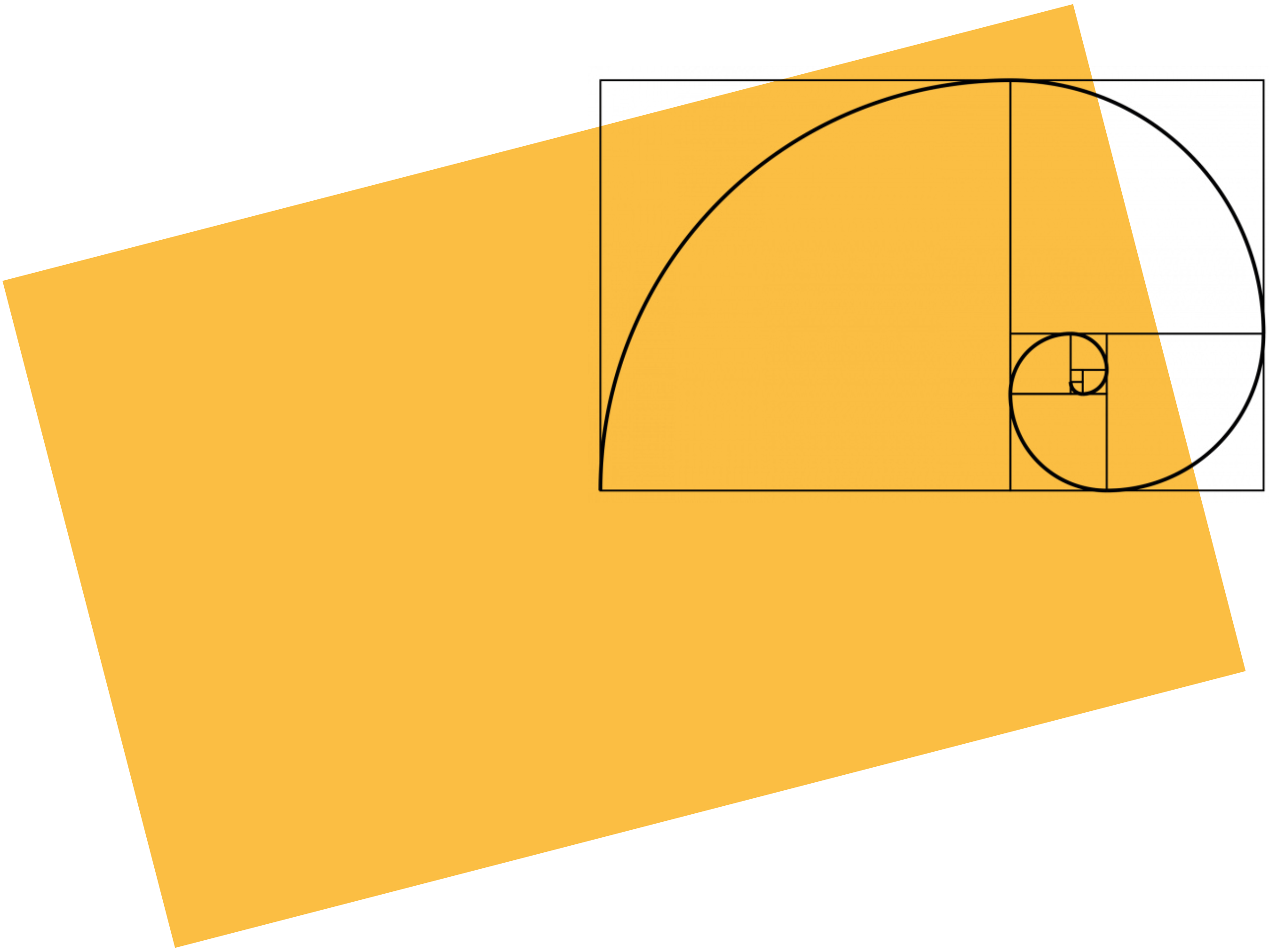
4



In arte… Matematica!

Luca Crivelli, Vanessa Henauer,
Antonella Martelli Pischedda

COLLANA **PRATICA**MENTE

AMBITO DISCIPLINARE matematica

Repubblica e Cantone Ticino
Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport

Scuola universitaria professionale
della Svizzera italiana
SUPSI

PICCOLI E GRANDI ARTISTI

Ogni bambino è un artista.
Il problema è
come rimanere un artista
quando si cresce.

(Pablo Picasso)

Impressum

Collana *Praticamente* diretta dalla Divisione della scuola (DECS)
e dal Dipartimento formazione e apprendimento (SUPSI)

Comitato editoriale della collana
Claudio Della Santa (responsabile della Formazione continua, SUPSI DFA), Claudia Di Lecce (referente Comunicazione, SUPSI DFA), Daniele Parenti (direttore del Centro di risorse didattiche e digitali), Serena Ragazzi (collaboratrice scientifica della Divisione della scuola), Rezio Sisini (direttore della Sezione delle scuole comunali)

Collana *Praticamente*, numero 4, *In arte... Matematica!*

Autori
Luca Crivelli, Vanessa Henauer e Antonella Martelli Pischedda

Comitato scientifico e di redazione
Silvia Sbaragli (responsabile del Centro competenze didattica della matematica, SUPSI DFA), Elena Franchini (docente-ricercatrice senior), Carlo Mina (collaboratore scientifico) e Monica Panero (docente-ricercatrice) del Centro competenze didattica della matematica

Coordinamento e editing
Claudia Di Lecce, Dipartimento formazione e apprendimento, Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana
Serena Ragazzi, Divisione della scuola, Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport

Progetto grafico
Christian Demarta, eureka comunicazione visiva, Sementina

Impaginazione
Jessica Gallarate, collaboratrice Comunicazione SUPSI DFA

https://scuolalab.ch/praticamente

Stampa e rilegatura: Tipografia Cavalli, Tenero
ISBN 978-88-85585-43-0
PRIMA EDIZIONE

Ringraziamenti

Grazie ai nostri allievi, che si sono trasformati in piccoli artisti e ci hanno permesso di concretizzare le nostre idee.

Grazie a Ruben, Omar e Riccardo, per aver ideato e condiviso le attività sull'arte a soqquadro.

Grazie a Elena, Carlo e Monica, per le revisioni e i preziosi consigli.

Grazie a Simona, per averci messo a disposizione il suo tempo e le sue competenze di storica dell'arte.

Grazie infinite a Silvia, che ci supporta, incoraggia, ed è sempre un punto di riferimento prezioso e instancabile.

Luca, Vanessa e Antonella

Prefazione

La collana *Praticamente* è un'iniziativa condivisa della Divisione della scuola (DECS) e del Dipartimento formazione e apprendimento (SUPSI).

Praticamente propone materiali didattici, in linea con il *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*, sviluppati e verificati nell'ambito di corsi di formazione continua svolti presso il DFA o altri enti formativi, ma anche esperienze nate ed affinate nelle aule della scuola dell'obbligo, progetti nati dalla collaborazione tra docenti nell'ambito di gruppi di lavoro o di attività di istituto.

La collana vuole valorizzare e favorire la condivisione di esperienze significative di vario tipo svolte da docenti ticinesi: resoconti di percorsi tematici, narrazioni di esperienze formative, racconti di sperimentazioni o di esperienze interdisciplinari o collaborative, buone pratiche ed altro ancora.
I contenuti delle pubblicazioni che rientrano nella collana sono molto variati per tipologia e pubblico di destinazione. Caratteristica comune di tutti i materiali prodotti è la loro concretezza e applicabilità in quanto percorsi e stimoli prodotti da docenti e indirizzati a docenti.

I quaderni editi all'interno della collana *Praticamente* sono suddivisi in tre ambiti: DISCIPLINARE, PEDAGOGICO-DIDATTICO-METODOLOGICO e SVILUPPO SOCIALE E PERSONALE. L'ambito disciplinare raccoglie tutte le esperienze esplicitamente afferenti alle diverse discipline, quello pedagogico-didattico-metodologico copre i processi di educazione e formazione (pedagogia) così come i metodi e le pratiche di insegnamento (didattica-metodologia). L'ambito sociale e personale si riferisce invece alle modalità di interazione del docente con il suo contesto professionale, come la collaborazione tra colleghi, le relazioni con gli allievi, le famiglie o con altri attori.

Ci auguriamo che questo nuovo progetto congiunto diventi presto un punto di riferimento per i docenti e che le pubblicazioni della collana possano divenire preziose fonti di ispirazione per la propria attività professionale.

Emanuele Berger
Direttore della Divisione della scuola

Alberto Piatti
Direttore del Dipartimento formazione e apprendimento

Introduzione

Questo libro della collana *Praticamente* è il terzo curato dal Centro competenze didattica della matematica del Dipartimento formazione e apprendimento della SUPSI e tratta il tema dell'interdisciplinarità tra matematica e arte, due mondi solo all'apparenza distanti ma che hanno in realtà molte profonde relazioni. Di questo ne è testimonianza il libro di Bruno D'Amore *Arte e matematica*, edito dalla casa editrice Dedalo, che rappresenta un riferimento importante per chi vuole intraprendere un viaggio culturale o per chi vuole progettare un percorso didattico che sappia intrecciare questi due sguardi e interpretazioni della realtà, alla ricerca di un mondo comune.
Come dichiarato in questo libro, il testo di D'Amore ha rappresentato un ricco riferimento per i docenti-autori che in questi ultimi anni hanno progettato e sperimentato all'interno del gruppo *Matematicando* diversi percorsi di successo vissuti dagli allievi di scuola elementare. Tali percorsi sono stati poi proposti in occasione dell'omonimo festival Matematicando, e all'interno di corsi di formazione continua. L'intento di questo libro è di raccontare alcune di queste esperienze vissute e scritte da docenti e rivolte a colleghi che intendono cimentarsi in questo appassionante viaggio, facendo cogliere l'arte nella matematica e la

matematica nell'arte e dando così un senso nuovo, sfaccettato e ricco, all'apprendimento degli allievi.
Nell'introduzione al quaderno, le due discipline vengono messe inizialmente a confronto, e la matematica viene presentata come oggetto o linguaggio dell'arte, o come struttura per realizzare opere d'arte;
si passa quindi a introdurre due elementi, il punto e la linea, sui quali vengono costruite motivanti attività; questi due "semplici" oggetti possono essere visti in senso artistico, come traccia lasciata su un'opera avente determinate caratteristiche fisiche (come il colore, la forma e la grandezza) e in senso matematico, come enti primitivi aventi rispettivamente zero e una dimensione.
In questo delicato rapporto fra realtà fisica e realtà matematica sta una prima importante riflessione:
per riuscire a entrare dentro al fantastico mondo della matematica occorre astrarre e staccarsi dalla concretezza di ciò che si osserva.
Seguono poi attività basate sulla tassellazione, che è un efficace esempio di come matematica e arte possano intrecciarsi e unirsi fra loro: si pensi all'affascinante Alhambra di Granada in Spagna, dove l'arte delle forme e dei colori si fonde con diversi concetti matematici, come quello di superficie, figura, ampiezza, ricorsività.

Si passa poi alla trasformazione isometrica più conosciuta, la simmetria, contraddistinta da armonia ed equilibrio; si tratta di una delle trasformazioni geometriche più frequenti nella realtà che ci circonda e che può essere analizzata in profondità, cogliendone le caratteristiche salienti. In un libro su matematica e arte non poteva mancare l'affascinante numero aureo: simbolo di bellezza e di eleganza, questo numero, rapporto di due grandezze in proporzione aurea fra loro, ha contraddistinto la storia dell'arte e della matematica; e poi ancora il tema dei poliedri regolari che da Platone, ma certamente anche prima, ha accompagnato il cammino filosofico, matematico e artistico dell'essere umano.
È quindi con grande entusiasmo, lo stesso che ha contraddistinto il lavoro dei docenti, che mi auguro che questo libro si diffonda tra gli insegnanti per stimolare la sperimentazione in classe di percorsi interdisciplinari, attraverso i quali si possa far cogliere agli allievi il gusto di guardare gli oggetti reali o ideali con occhi curiosi, attenti e sempre più competenti.

Silvia Sbaragli
Responsabile del Centro competenze didattica della matematica

INDICE

4.

INCASTRI PERFETTI

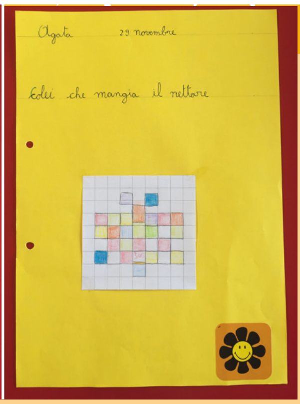
Tassellare significa ricoprire il piano, cioè una superficie illimitata, accostando delle figure (dette appunto tasselli) senza sovrapporle e senza lasciare parti di piano vuote. In questo capitolo vengono presentate alcune attività che si ispirano ad artisti e a opere legate alla tassellazione.

Partiamo da una storia…

Da una valigia portata in classe l'insegnante estrae il libro di Leo Lionni intitolato *Pezzettino* (Lionni, 1975) (4.3). Ai bambini si chiede di osservare l'immagine di copertina, identificando il personaggio principale con la figura del quadrato o eventualmente di un rettangolo (di certo non si tratta di un quadrato particolarmente preciso, ma in fondo qualche licenza artistica è ben possibile concederla!). Questa introduzione permette inoltre ai bambini di nominare le figure geometriche conosciute ed eventualmente di elencare alcune delle loro proprietà.

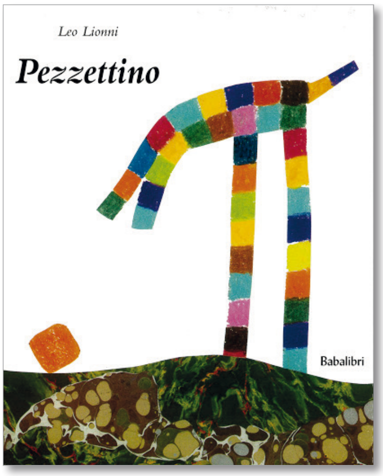
La storia di Pezzettino è semplice e ascoltandola i bambini imparano a conoscere il protagonista: si tratta appunto di una piccola figura che ricorda il quadrato, che incontra dei personaggi composti da tanti pezzettini come lui. Disperato, decide di scoprire a chi appartiene, e parte quindi in un viaggio alla ricerca di un proprio spazio e di una propria identità.

A chi apparterrà Pezzettino? L'insegnante apre la valigia e fa comparire tanti quadrati di diverso colore, in cartoncino, che vengono messi a disposizione della classe affinché i bambini possano creare liberamente un personaggio al quale potrebbe appartenere Pezzettino (4.1, 4.2, 4.4).



4.1 – 4.2

Esempi di animali ricreati con i quadratini, ispirandosi agli esempi di Pezzettino.



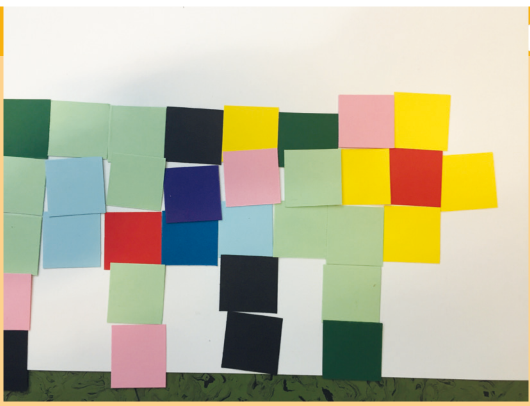
4.3

Lionni, L. (1975). *Pezzettino.* Milano: Babalibri.

Dopo una prima fase di gioco libero, l'insegnante può fornire un solo vincolo da tenere in considerazione scegliendo ad esempio fra le seguenti proposte: i quadrati non devono sovrapporsi neanche parzialmente, devono avere tra loro almeno un punto di contatto, i lati devono coincidere fra loro quando si accostano i pezzi, i quadrati dello stesso colore non devono essere adiacenti. Il compito potrebbe poi complicarsi maggiormente proponendo più vincoli contemporaneamente, fino ad arrivare alle regole che permettono di avere una tassellazione vera e propria, ossia non lasciare parti di piano vuote e non sovrapporre le tessere utilizzate.
Una volta creato un personaggio, si invitano i bambini a riprodurlo su un foglio quadrettato cercando di rispettare precisamente sia la posizione dei singoli quadrati sia il loro colore. I personaggi creati, come nel racconto di Lionni, possono essere caratterizzati da un nome.

A caccia di pavimentazioni!

L'attività precedentemente descritta e l'osservazione dei lavori da loro prodotti condurranno i bambini a notare, all'interno dell'aula e della sede scolastica, alcune tassellazioni. L'insegnante può facilmente guidare questa osservazione, ponendo alcune domande mirate: osserviamo come sono disposte le piastrelle nel corridoio della nostra scuola. E i pannelli del nostro soffitto? Quali figure geometriche sono? Proviamo a combinarle in maniera diversa; riusciamo a trovare una nuova tassellazione? L'osservazione dell'ambiente che ci circonda è un'ottima occasione per iniziare a considerare che anche altre figure, e non solo il quadrato o il rettangolo, permettono di tassellare il piano. Inoltre, sarà interessante osservare diverse tipologie di tassellazioni: utilizzando lo stesso poligono regolare, o differenti poligoni regolari, o poligoni non regolari, o poligoni i cui



4.4

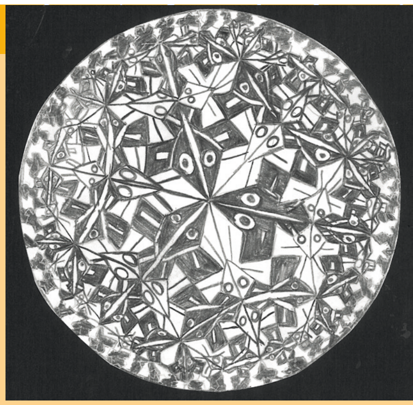
Esempi di animali ricreati con i quadratini, ispirandosi agli esempi di Pezzettino.

4.5 – 4.6 – 4.7

Esempi di pavimentazioni e di facciate di edifici che presentano motivi geometrici.

vertici combaciano con altri vertici oppure facendo in modo che questo non accada.
Matematicamente alcune di queste strutture sono particolarmente interessanti, in quanto come vedremo in seguito, se proposte in classe permettono di lavorare sull'ampiezza degli angoli, sulle trasformazioni geometriche e sulla classificazione e la nomenclatura delle figure.
L'interesse non si limiterà alla realtà scolastica, ma si estenderà alle pavimentazioni delle case private, della chiesa del paese o ancora delle facciate di alcuni edifici. Sarà importante, a questo proposito, proporre alla classe delle uscite con l'intenzione di favorire l'osservazione puntuale della realtà nella quale i bambini vivono. L'attività della "Caccia alla tassellazione" è un esempio lampante: l'insegnante organizza un'uscita all'esterno e porta con sé la macchina fotografica. Il compito dei bambini sarà quello di trovare pavimenti, piastrelle o decorazioni che presentino delle tassellazioni. L'insegnante documenta le loro scoperte scattando delle fotografie (4.5, 4.6, 4.7). A poco a poco l'aula potrebbe diventare un'esposizione delle immagini raccolte.

Le pavimentazioni individuate nella realtà possono diventare oggetto di studio. Si chiede ai bambini di osservarle e di identificare la forma dei tasselli. In un secondo tempo si procede alla riproduzione delle tassellazioni su fogli, copiando la trama dalle fotografie scattate.
In alternativa si può fare la richiesta di progettare tassellazioni diverse da quelle già trovate, utilizzando altri poligoni o figure conosciute dagli allievi come il rettangolo e il triangolo. Le figure potranno poi combinarsi tra loro e dare vita a motivi geometrici fantasiosi e particolari.



4.8

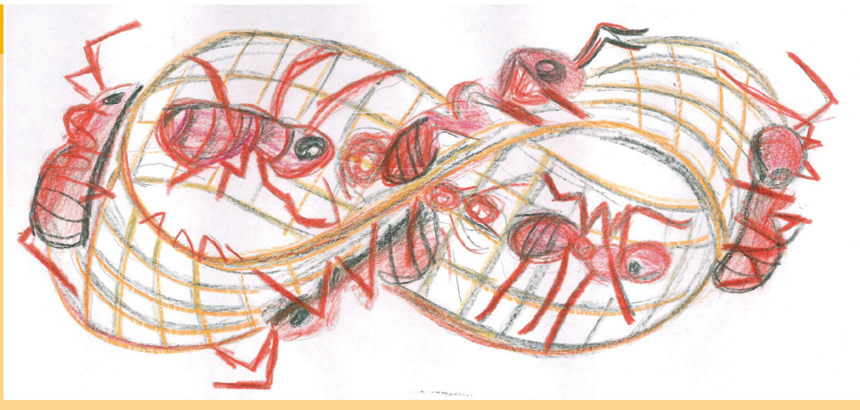
Riproduzione di un allievo dell'opera di Escher, M. C., *Limite del cerchio 1*, 1958, xilografia.

Tasselliamo con Escher: lo studio dei tasselli

Una volta acquisita dimestichezza con il concetto di tassellazione, si può procedere con la scoperta di un artista che ha fatto della tassellazione uno dei suoi punti di forza: Maurits Cornelis Escher.

I bambini, dopo aver scoperto grazie all'aiuto dell'insegnante informazioni significative o curiosi episodi legati alla vita dell'artista, ragionano e discutono osservando alcune delle sue opere più rappresentative, nelle quali si possono ritrovare importanti temi legati alla geometria che spaziano dalle figure piane, ai solidi, al nastro di Moebius, alle trasformazioni e altro ancora (4.8, 4.9).

Analizzando e apprezzando le sue opere, i bambini si renderanno presto conto che Escher non si è limitato ad accostare semplici poligoni fra loro, come quadrati o rombi, per realizzare delle tassellazioni. Le figure di Escher sono perlopiù animali, anche di diverso tipo, che si intrecciano fra loro nelle maniere più disparate. Grazie all'aiuto dell'insegnante, gli allievi scoprono che queste figure che tassellano sono state costruite dall'artista grazie a una tecnica ben precisa, quella della compensazione, che può essere sperimentata in classe così come proposto da Weltman (2017).
Si prende un quadrato, si disegnano e ritagliano alcune parti da quest'ultimo a partire da un lato. Quindi, le si trasla e le si fissa sul lato opposto rispetto a quello di partenza. La stessa operazione può essere effettuata sui due lati rimanenti. Il risultato finale è un nuovo tassello, una figura creata per compensazione (ciò che tolgo da un lato viene recuperato sul lato opposto) che utilizzata un numero infinito di volte permette di realizzare una tassellazione del piano.



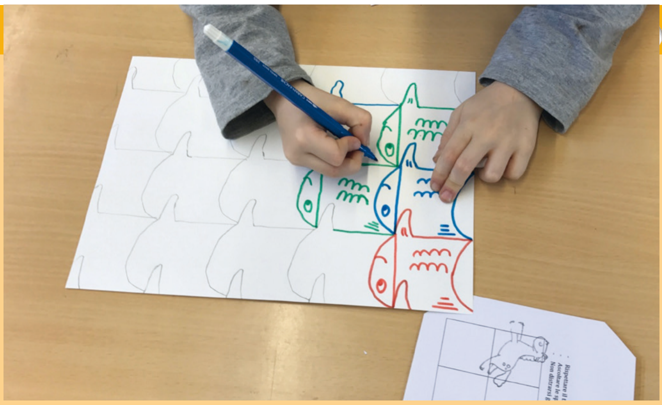
4.9

Riproduzione di un allievo dell'opera di Escher, M. C., *Nastro di Moebius 2*, 1953, xilografia.

A questo punto gli allievi, dopo aver costruito una figura utilizzando questa tecnica, la appoggiano su un supporto cartaceo resistente, come ad esempio un cartoncino, e ne rilevano i contorni. Una volta ritagliata, la figura viene appoggiata su un foglio da disegno e ricalcata più e più volte fino a quando non si è ricoperta tutta la superficie a disposizione. L'ultimo passaggio consiste nella colorazione, che può avvenire liberamente, rispettando perciò i gusti personali degli allievi (4.10).

Una volta realizzato il primo disegno, è possibile chiedere agli allievi di modificare altri tipi di figure, cambiando di volta in volta le regole di traslazione. Cosa succede se al posto del rettangolo si modifica un rombo? E un triangolo? Si può ancora tassellare se le parti ritagliate dal tassello originale vengono traslate su di un lato consecutivo e non su quello opposto? In questa fase, è interessante lasciar sperimentare, sbagliare e scoprire nuove regole legate alla compensazione. Le scoperte possono essere condivise con il resto della classe, al fine di ottenere risultati sempre più originali e diversificati!

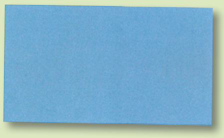
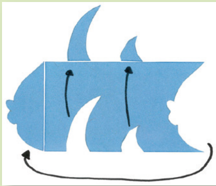
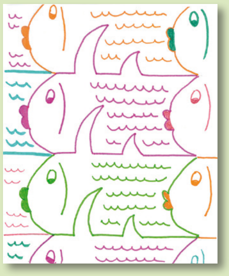
Un ulteriore sviluppo dell'attività potrebbe essere quello di analizzare quelle che Escher chiama "Metamorfosi" (4.11). La sua ammirazione per le leggi della natura lo ha portato a sperimentare il tema delle trasformazioni, delle metamorfosi; come in natura la larva si trasforma gradualmente in farfalla o il girino in rana, così le trasformazioni geometriche diventano al tempo stesso metafora e procedimento grafico per giocare con la percezione di chi guarda l'opera. Le sue composizioni sono figure che mutano rispettando le leggi delle trasformazioni geometriche, dalle isometrie (traslazioni, rotazioni e simmetrie) alle omotetie (similitudini), o delle trasformazioni topologiche.



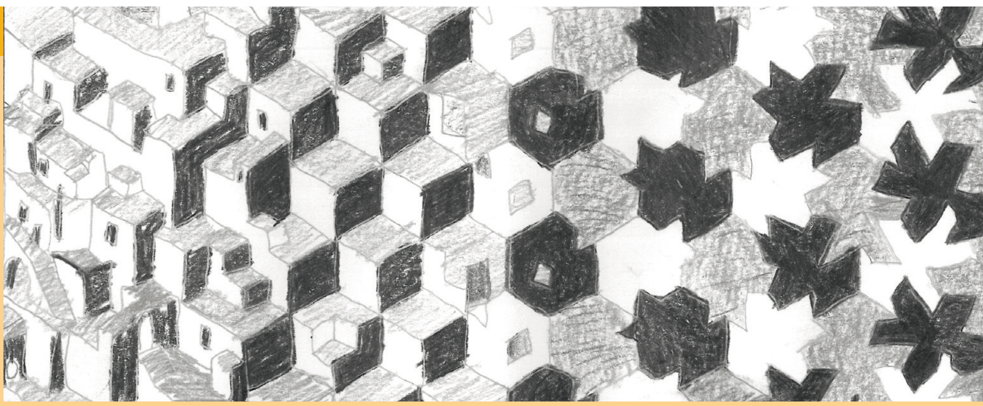
4.10

Opera realizzata utilizzando un tassello a forma di pesce.

TASSELLIAMO COME ESCHER

1)		Selezionare una figura di partenza: deve trattarsi di una figura che, presa infinite volte, permetta una tassellazione del piano. Nel nostro esempio, si parte da un rettangolo.
2)		Selezionare due lati consecutivi del rettangolo. Disegnare le parti che si intendono in seguito ritagliare e traslare sui lati opposti corrispondenti.
3)		Effettuare il ritaglio e la traslazione. Si consiglia di incollare la figura ottenuta su di un cartoncino resistente, in modo che il tassello non si rovini nella fase successiva dell'attività.
4)		Prendere il tassello ottenuto dopo la traslazione e ricalcarlo su di un foglio bianco, in modo da ricoprire tutta la superficie a disposizione. Il disegno in stile Escher può quindi essere colorato e decorato a piacimento!

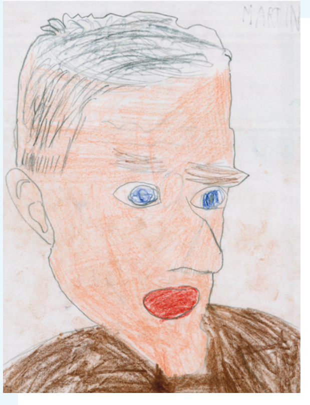
È possibile sperimentare insieme ai bambini la trasformazione di un poligono che tassella in un'altra figura. Si può partire per esempio da un quadrato, trasformandolo in una barca a vela seguendo una serie di semplici passaggi che permettono di variare poco per volta la figura di partenza, fino ad ottenere un veliero pronto a solcare i mari (4.12). Una volta compresa la modalità di lavoro, gli allievi potranno sbizzarrirsi sia nella scelta della figura di partenza, considerando le scoperte già fatte nel campo della tassellazione, sia nell'immagine da ottenere al termine delle diverse variazioni. L'aspetto da tenere sempre in considerazione è riuscire a modificare poco per volta la forma di partenza, cercando di mantenere intatta la struttura originale (Weltman, 2017).



4.11

Riproduzione di un allievo di Escher, M. C., *Metamorfosi I*, 1931.

CARTA D'IDENTITÀ



Riproduzione dell'artista realizzata da un allievo.

CHI
Maurits Cornelis Escher

QUANDO
1898 - 1972

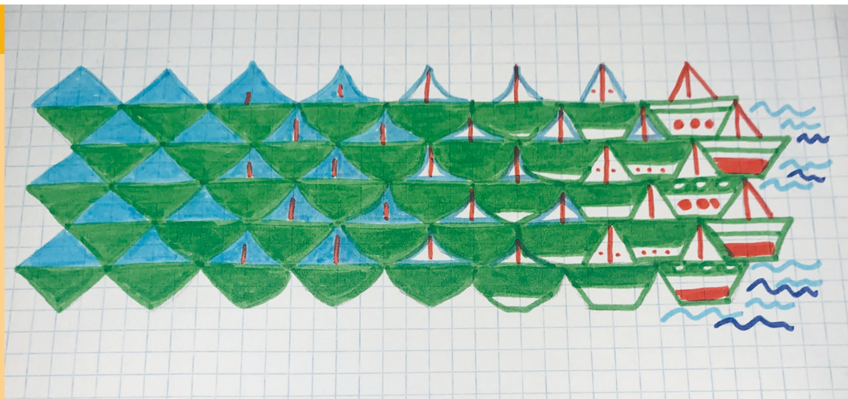
MOVIMENTO ARTISTICO
Astrattismo, Der Blaue Reiter

OPERE FAMOSE
Mani che disegnano, Metamorfosi, Il nastro di Möbius, Relatività

ISPIRAZIONI
Impressionismo

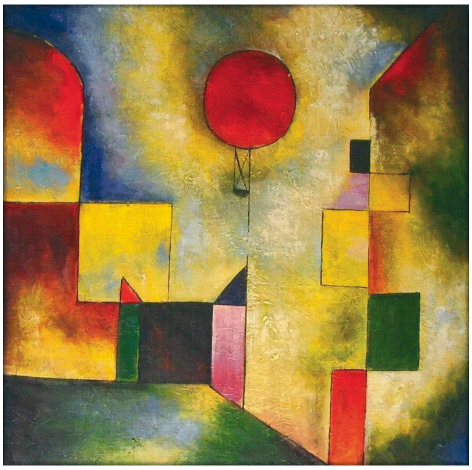
FRASE CELEBRE
"Il mio lavoro è un gioco, un gioco molto serio."

IN AMBITO MATEMATICO
La tassellazione, gli angoli, il nastro di Möbius, le linee, i poligoni, le trasformazioni geometriche



4.12

La metamorfosi del quadrato, che diventa una barca a vela.



4.13

Klee, P.,
Palloncino rosso, 1922.

4.14

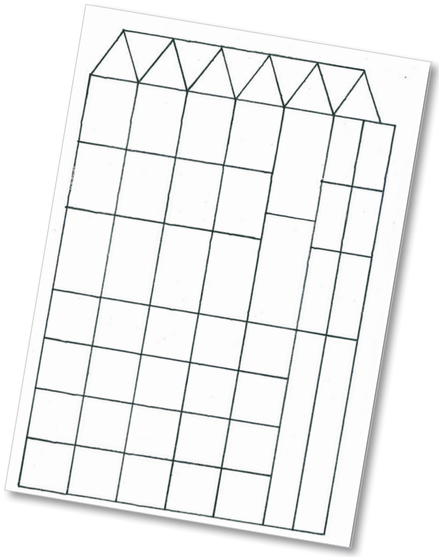
Klee, P.,
Parco vicino a Lu, 1938.

Tasselliamo con Paul Klee: giochi e scoperte attorno al concetto di angolo

Dopo aver compreso, manipolato e sperimentato diverse proposte legate al tema della tassellazione, si può approfondire l'argomento osservando e scoprendo un altro artista: Paul Klee.

L'insegnante propone alcune opere di Klee (4.13, 4.14) che si prestino a un'osservazione fantasiosa, ma che allo stesso tempo diano modo ai bambini di coglierne aspetti legati alla matematica e più precisamente all'ambito della geometria. Un esempio significativo potrebbe essere quello legato all'opera intitolata *Palloncino rosso* (1922) che permette a una prima osservazione di notare la presenza di alcuni edifici di vario genere, dei balconi, dei tetti, di una mongolfiera o anche di un lampione. Prendendo in considerazione solo la geometria, le forme prima liberamente interpretate si trasformano in parallelogrammi, triangoli, cerchi, rettangoli. Questo passaggio, che per alcuni può rappresentare un ostacolo, può risultare più semplice facendo indossare agli allievi gli occhiali della matematica, che permettono di focalizzare l'attenzione e tutte le osservazioni che ne scaturiscono sugli aspetti peculiari di questa disciplina (per un approfondimento sul tema, si faccia riferimento al capitolo 2).

Una volta entrati nel mondo di Klee e della geometria, ci si concentra su di un'opera intitolata *Castello e sole* (1928) (4.15). Se ne estrapola una parte e si chiede di riprodurla a mano libera, così come ha fatto l'autore, oppure se ne crea una nuova utilizzando un programma di grafica (4.16). È possibile anche chiedere ai bambini di colorarla liberamente, come l'originale o rispettando la "regola del risparmio del colore", che consiste nel dipingere il quadro facendo in modo che due regioni confinanti non abbiano lo stesso colore, facendo attenzione a utilizzare il minor numero possibile di colori diversi.



4.15

Klee, P.,
Castello e sole, 1928.

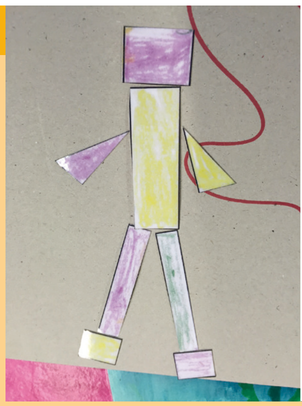
4.16

Elaborazione grafica digitale di un dettaglio dell'opera di Paul Klee. *Castello e sole*.

Terminata la colorazione si ritagliano i singoli poligoni e si lascia che gli allievi sperimentino in autonomia, invitandoli a utilizzare i pezzi ottenuti come se fossero tasselli di un puzzle. I bambini inizieranno ad accostarli ricreando animali, oggetti, persone (4.17). Anche in questa fase di lavoro è possibile introdurre dei vincoli, come ad esempio costruire un oggetto utilizzando un solo tipo di poligono, oppure scegliendo un tema, ad esempio un animale, per la figura da comporre (4.18).

Per lavorare con materiale più vario, l'insegnante fornisce ai bambini una serie di ulteriori tasselli di varie forme, non solo poligoni (4.19, 4.20), chiedendo loro di ipotizzare se lo stesso tipo di tassello preso un numero infinito di volte consentirebbe di tassellare il piano (4.21). Come esplicitato all'inizio di questo capitolo, l'obiettivo resta quello di portare gli allievi a scoprire o riprendere le due regole fondamentali per realizzare una tassellazione: non lasciare parti di piano vuote e non sovrapporre le tessere. I bambini, divisi a piccoli gruppi in modo da poter confrontare i propri pensieri e con il supporto di una tabella di registrazione (4.23), descrivono con un linguaggio geometrico le figure scelte e valutano e verificano la loro ipotesi in merito alla domanda che li guida: con questa figura, è possibile tassellare il piano? Ogni gruppo, al termine del lavoro, ha modo di presentare ai compagni i tasselli analizzati e i risultati ottenuti.

Si continua il viaggio nel mondo dell'arte e della matematica ritornando a porre l'attenzione sulla parte di opera di Paul Klee utilizzata in precedenza. In particolare, l'insegnante mette in evidenza alcuni vertici dei poligoni e chiede agli allievi di provare a descrivere gli angoli che hanno origine da ognuno di essi. Da alcuni dei vertici evidenziati hanno origine quattro angoli, da altri solo tre, da altri ancora ben cinque, sei o altro.



4.17

Un personaggio ricreato assemblando alcuni poligoni tratti da Paul Klee.

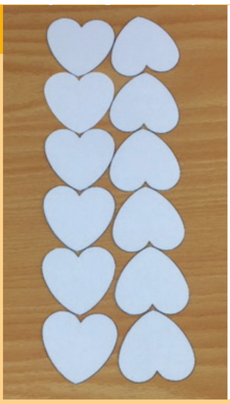
4.18

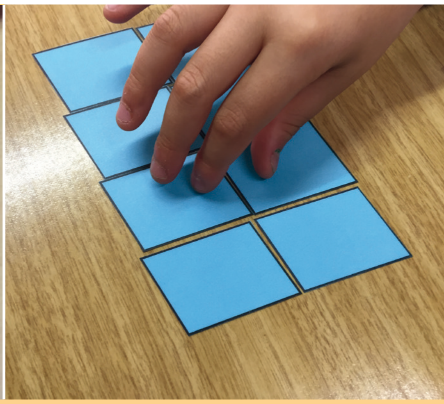
Due allieve collaborano per riuscire a ricoprire una superficie con i pezzi a disposizione, tassellando il piano seguendo i vincoli posti dal docente.

Sommando l'ampiezza degli angoli che hanno origine nello stesso vertice, gli allievi si accorgono presto che ogni volta si ha come risultato 360°, pari all'angolo giro. Si tratta di un'altra importante scoperta relativa alla tassellazione: in una tassellazione con poligoni, la somma delle ampiezze degli angoli che hanno origine in uno stesso vertice è sempre 360°! Per convincere gli allievi più increduli, l'insegnante mette a disposizione un goniometro (4.24), e li invita a verificare misurando le ampiezze degli angoli attorno a un vertice e facendo la relativa somma (4.25).

Si prosegue quindi riprendendo i poligoni-tasselli utilizzati nelle attività precedenti, in cui spontaneamente li si analizzava per capire se potessero tassellare o meno, e si chiede di misurare le ampiezze dei loro angoli (quando non sono già note alla classe). Il docente si preoccupa anche di organizzare l'allestimento di un cartellone (4.22) su cui sono indicati i nomi dei tasselli e le ampiezze rilevate.

Questo cartellone permette di giocare al mercatino dei tasselli. Al proprio posto e senza avere i tasselli a disposizione, gli allievi selezionano alcuni poligoni sulla base delle ampiezze dei loro angoli: l'obiettivo è scegliere il tipo e il numero adeguato di poligoni, in modo che la somma delle ampiezze degli angoli che incidono nel vertice che avranno in comune, una volta accostati, sia 360°. Un esagono regolare, per esempio, potrà essere accostato a due quadrati e a un triangolo isoscele con un angolo di 60° (4.26, 4.27), per riuscire a ricreare un angolo giro (120° + 90° + 90° + 60° = 360°); si crea così un esempio di tassellazione non lato a lato.





4.19

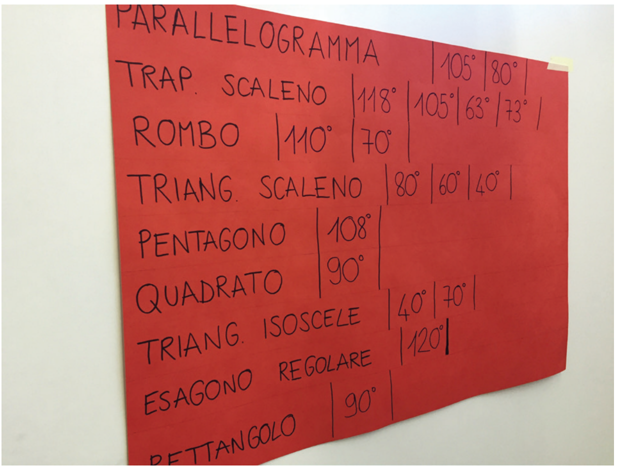
Tentativo di tassellazione utilizzando i cuori.

4.20

Tentativo di tassellazione utilizzando dei fiori.

4.21

Un inizio di tassellazione riuscita, utilizzando dei rettangoli.



4.22

Il tabellone con le misure delle ampiezze degli angoli dei tasselli a disposizione.

Un percorso di questa durata e di questa complessità, ottimo per riprendere il concetto di angolo nel corso del secondo ciclo e altri aspetti di geometria euclidea, potrebbe terminare con la creazione di un mosaico da esporre nella sede scolastica, mettendo a frutto tutte le conoscenze, le abilità e le competenze costruite grazie a Paul Klee e alle attività realizzate attorno alle sue opere!

4.23

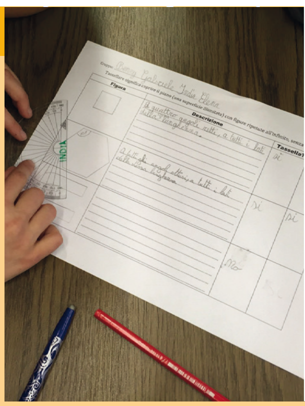
Gli allievi registrano le proprie osservazioni nella tabella, analizzando geometricamente i tasselli.

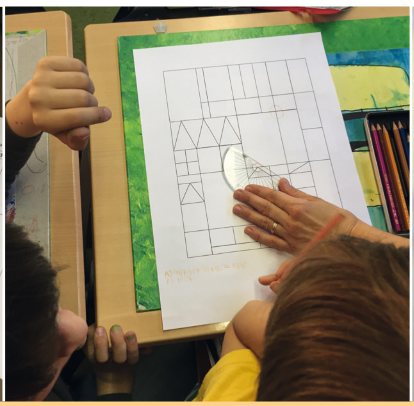
4.24

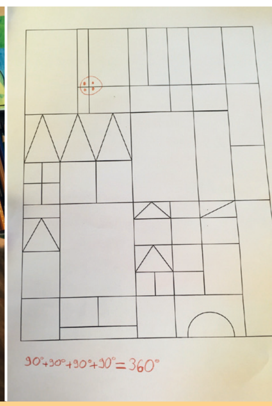
Gli allievi misurano l'ampiezza degli angoli attorno a un vertice.

4.25

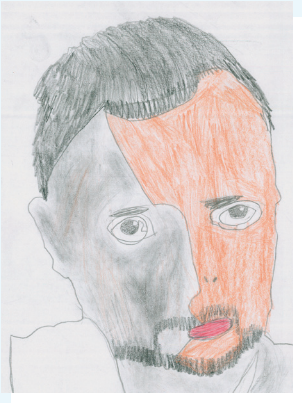
La somma delle ampiezze è 360°!







CARTA D'IDENTITÀ



Riproduzione dell'artista realizzata da un allievo.

CHI
Ernst Paul Klee

QUANDO
1879 - 1940

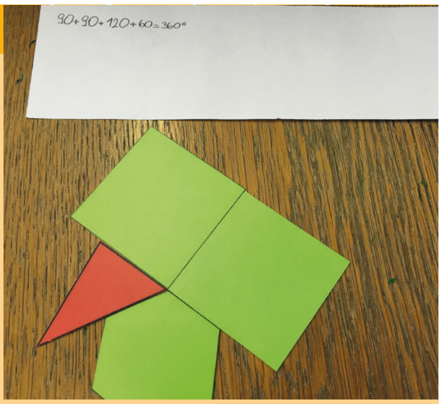
MOVIMENTO ARTISTICO
Espressionismo, Cubismo, Der Blaue Reiter, Astrattismo

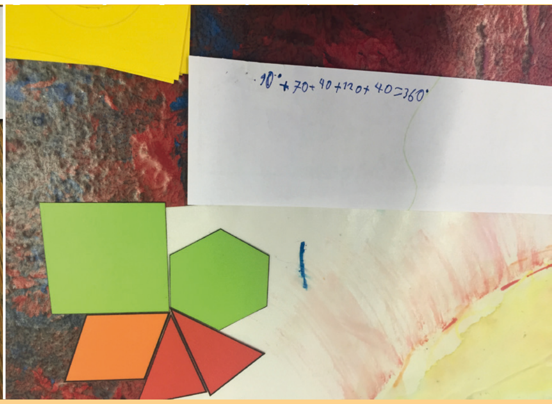
OPERE FAMOSE
Parco nei pressi di Lu, Castello e sole, Paesaggio con uccelli gialli, Senecio

ISPIRAZIONI
Jugendstil, Art Nouveau

FRASE CELEBRE
"L'arte non riproduce ciò che è visibile, ma rende visibile ciò che non sempre lo è."

IN AMBITO MATEMATICO
La tassellazione, le figure piane, le linee, i poligoni, gli angoli





4.26

Esempio di tassellazione attorno a un vertice, utilizzando due quadrati, un esagono regolare e un triangolo isoscele.

4.27

Esempio di tassellazione attorno a un vertice, utilizzando un quadrato, un esagono regolare, due triangoli scaleni e un parallelogramma.

6.1

Da Vinci, L., *Testa di fanciulla* (detta *La Scapigliata*), 1508 circa.

6. IL NUMERO AUREO

Fra tutti i numeri irrazionali, ce n'è uno decisamente particolare, ritenuto talmente prezioso e unico da avere influenzato il mondo dell'arte. Portare il numero aureo in classe significa proporre un percorso a cavallo fra matematica, storia e arte.

Da Fibonacci al numero aureo

Questo capitolo inizia con un viaggio nella storia, accompagnati ancora una volta dalle preziose riflessioni di D'Amore (2015), che racconta come con la caduta dell'Impero Romano d'Occidente (476 d.C.) arrivarono dal Medio Oriente fino alle nostre latitudini i 10 segni che oggi chiamiamo cifre: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e che possono essere combinati fra loro per scrivere infiniti numeri. Fino a quel momento, infatti, per scrivere i numeri i greci e i romani utilizzavano le lettere dell'alfabeto.

Ad avere frequenti contatti con i matematici mediorientali e a favorire la diffusione di questo nuovo sistema di numerazione, fu Leonardo da Pisa detto Fibonacci. Figlio di un mercante prestigioso, viaggiò molto ed ebbe la possibilità di studiare cifre e tecniche matematiche ancora sconosciute in occidente. La sua opera principale, il *Liber Abaci*, è un trattato di aritmetica e algebra rivoluzionario, in cui all'inizio del XIII secolo raccolse tutto quanto aveva potuto apprendere riguardo a cifre, numeri e calcoli. Per un approfondimento si veda D'Amore e Sbaragli (2018, 2019).

Fibonacci, fra le varie cose, è famoso anche per la successione di numeri che porta il suo nome, nata osservando l'accoppiamento dei conigli:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, …

LA SUCCESSIONE DI FIBONACCI

Immaginiamo di mettere una coppia di conigli in un recinto e di voler scoprire quante coppie di conigli discendono da questa in un anno. Supponiamo che ogni coppia di conigli ne generi un'altra ogni mese, a partire dal secondo mese di età.

- Inizialmente si parte con una coppia di conigli appena nati.
- Il primo mese la coppia è giovane e non genera altre coppie.
- Il secondo mese, la coppia è matura e ne genera un'altra: nel secondo mese le coppie sono 2.
- Di queste, la prima coppia nel terzo mese ne genera un'altra: quindi nel terzo mese ci sono 3 coppie.
- Di queste, il mese successivo, due coppie si riproducono: quindi, nel quarto mese, ci sono 5 coppie di conigli in tutto.
- Di queste, il mese successivo, tre coppie si riproducono e ci sono 8 coppie di conigli in tutto.
- Di queste, il mese successivo, cinque coppie si riproducono e ci sono 13 coppie in tutto.
- E così via, fino all'ultimo mese.

Mese	Coppie giovani (a) e cresciute (b)	Coppie di conigli in totale
Inizio	1 (a)	1
Primo mese	1 (a)	1
Secondo mese	1 (a) e 1 (b)	2
Terzo mese	1 (a) e 2 (b)	3
Quinto mese	2 (a) e 3 (b)	5
Sesto mese	3 (a) e 5 (b)	8
Settimo mese	5 (a) e 8 (b)	13
Ottavo mese	8 (a) e 13 (b)	21
Nono mese	13 (a) e 21 (b)	34
Decimo mese	21 (a) e 34 (b)	55
Undicesimo mese	34 (a) e 55 (b)	89
Dodicesimo mese	55 (a) e 89 (b)	144
Tredicesimo mese	89 (a) e 144 (b)	233
...	...	...

Matematizzando la situazione descritta nel box, notiamo che la successione è costruita in questa maniera: i due numeri 1 iniziali sono i numeri di partenza (la coppia di conigli giovane e matura), ogni altro termine della successione è ricavato facendo la somma dei due che lo precedono ($1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$, $3 + 2 = 5$ e così via).

Proviamo ora a dividere un numero della successione per quello che lo precede, e osserviamo i vari rapporti, approssimati alla quarta cifra dopo la virgola:

Calcolo	Rapporto
1:1	1
2:1	2
3:2	1,5
5:3	1,6667
8:5	1,6
13:8	1,625
21:13	1,6153
34:21	1,6190
55:34	1,6176
...	...

Scegliendo numeri sempre più grandi della successione di Fibonacci, ci si rende conto che tale rapporto si avvicina sempre di più ad un particolare numero, che si dimostra essere il numero irrazionale $\varphi \approx 1{,}618033988\ldots$, chiamato anche numero aureo o rapporto aureo o sezione aurea.
Immaginiamo di costruire dei rettangoli il cui rapporto fra i lati si avvicini al numero aureo (per esempio, un rettangolo di lato 144 cm × 89 cm → $144 : 89 \approx 1{,}6179775\ldots$).
Questi rettangoli sono detti rettangoli aurei.

Cosa c'entra tutto questo con l'arte? È presto detto! Questo numero magico e misterioso era conosciuto fin dall'antichità e in numerosissime opere è un protagonista molto discreto, che può essere riconosciuto solo da occhi molto attenti e consapevoli. Nel Partenone di Atene, nel tempio di Atena a Paestum, nelle cattedrali medioevali come la celeberrima Notre Dame di Parigi, è possibile ritrovare tantissimi rettangoli aurei. Allo stesso modo, molte opere, dal Rinascimento in poi, sono costruite secondo queste proporzioni considerate divine (6.1). Mario Merz, pittore e scultore italiano, ha realizzato diverse opere in cui esplicitamente ha fatto riferimento alla successione di Fibonacci: una particolarmente famosa è l'installazione al Guggenheim Museum di New York del 1971.

I numeri della successione di Fibonacci e il numero aureo ritornano costantemente nel mondo dell'arte (in botanica, in zoologia, in economia e anche nella vita di tutti i giorni: le carte di credito, in effetti, sono spesso dei rettangoli aurei). Si tratta di un argomento davvero vasto e complesso, al quale ci siamo ispirati per trovare spunti didattici e per costruire un breve percorso che illustriamo nel resto del capitolo.

CARTA D'IDENTITÀ

Riproduzione dell'artista realizzata da un allievo.

CHI
Leonardo Pisano detto Fibonacci

QUANDO
1170 circa – 1240 circa

OPERE FAMOSE
Liber Abaci, Practica geometriae, Liber quadratorum

ISPIRAZIONI
Euclide

FRASE CELEBRE
"Ho pensato all'origine di tutti i numeri quadrati e ho scoperto che essi derivano dal regolare aumento dei numeri dispari. L'1 è un quadrato e da esso è prodotto il primo quadrato, chiamato 1; aggiungendo 3 a questo, si ottiene il secondo quadrato, 4, la cui radice è 2; se a questa somma viene aggiunto un terzo numero dispari, cioè 5, verrà prodotto il terzo quadrato, cioè 9, la cui radice è 3; per cui la sequenza e le serie dei numeri quadrati derivano sempre da addizioni regolari di numeri dispari."

IN AMBITO MATEMATICO
Il sistema di cifre decimali indo-arabico, successione di Fibonacci

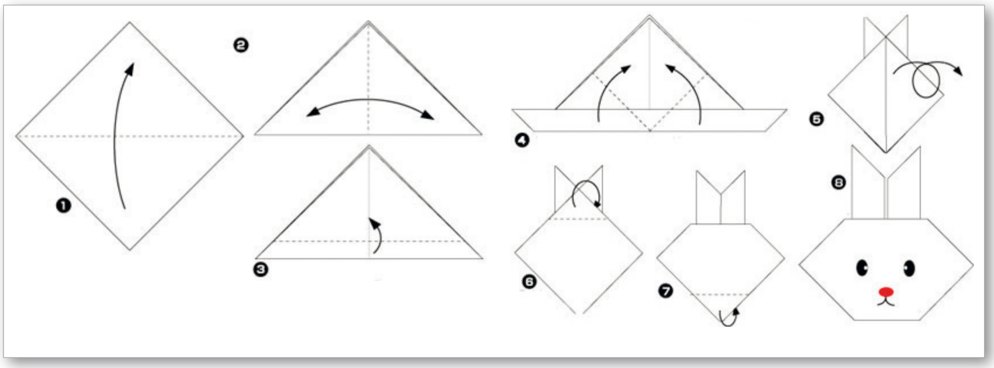
Successione di Fibonacci e numero aureo: applicazioni didattiche

Una possibile introduzione alla tematica consiste nel sottoporre agli allievi il problema dei conigli di Fibonacci. Si chiede di costruire dei conigli in origami (6.2, 6.3) (realizzare origami è sempre un'ottima occasione per allenarsi nell'utilizzo di un linguaggio specifico della geometria e per ripassare alcuni termini o concetti trattati in classe), oppure con della plastilina o altro materiale da bricolage. L'importante è che i conigli siano a coppie, fissati con del nastro adesivo o della colla, e che siano di due dimensioni diverse, per rappresentare le coppie giovani e quelle adulte.

Si narra quindi il problema dei conigli descritto in precedenza, assicurandosi che gli allievi ne abbiano ben capito l'andamento, non inizialmente facile e immediato. Si lascia quindi del tempo per la risoluzione, individuale o a coppie, del problema. L'obiettivo è quello di stabilire quante coppie di conigli ci sono in tutto, dopo 12 mesi. Vista la complessità della richiesta, è possibile aiutarsi con carta e penna, con del materiale di recupero con cui modellizzare la situazione, oppure con gli origami stessi creati prima

6.2

Allievo al lavoro mentre realizza un coniglio origami.



6.3

Indicazioni per realizzare un semplice coniglio in origami.

dell'inizio dell'attività. Per sintetizzare quanto scoperto, si crea un cartellone (6.4) incollando gli origami e mettendo in evidenza il numero di coppie di conigli per ogni mese trascorso, tenendo conto della logica di nascita.

Una volta terminato il lavoro di condivisione, l'insegnante scrive alla lavagna i numeri della successione di Fibonacci scoperti fino a quel punto e chiede agli allievi di ipotizzare quale sarà il numero successivo. Sarà l'occasione, se ancora non è emerso dalle osservazioni degli allievi, per scoprire il funzionamento della successione in maniera meno empirica. A questo punto, volendo, è possibile deviare dal percorso e trattare il tema delle successioni di numeri: può essere interessante proporne altre diverse da quella di Fibonacci e chiedere ai bambini di scoprirne le regole, oppure invitare gli allievi stessi a inventarne di nuove e a sottoporle ai compagni.
Parlare di successione di Fibonacci senza accennare alla vita del celebre matematico sarebbe un peccato: in un secondo tempo, l'insegnante può raccontare aneddoti e particolarità sulla biografia del mercante italiano, mettendo l'accento sul ruolo centrale che ha avuto nel divulgare il sistema numerico indo-arabo in occidente (D'Amore & Sbaragli, 2018). A questo punto, si potrebbe anche cogliere l'occasione per trattare il tema del nostro sistema posizionale, vedendo quanto è più semplice sommare, calcolare o rappresentare i numeri con le nostre dieci cifre, rispetto ad altri sistemi di numerazione additivi, come per esempio quello romano.
Questa parte del percorso può concludersi trattando il tema del rapporto. Se gli allievi non conoscono questo termine, si può spiegare intuitivamente che il rapporto non è altro che il risultato della divisione fra due numeri. Individualmente o a coppie, si chiede di trovare i rapporti che ci sono fra i numeri della successione di Fibonacci, scegliendone

6.4

Cartellone riassuntivo utilizzato per trovare la soluzione al problema dei conigli: gli origami sono stati incollati e poi contati.

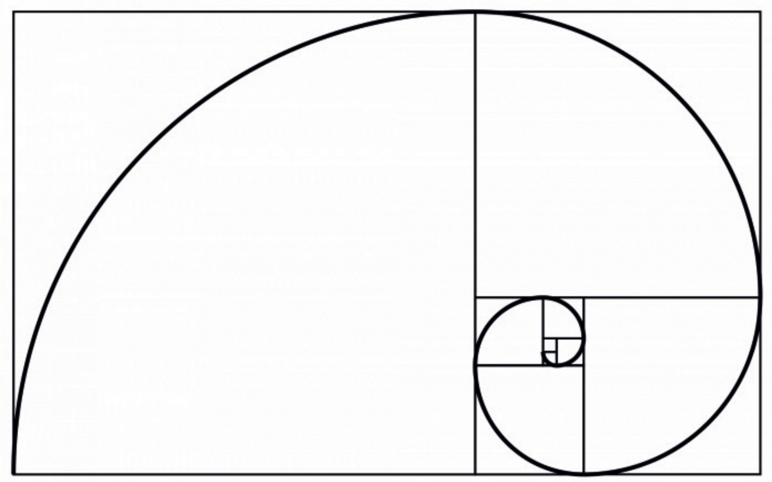
uno come dividendo, e quello precedente come divisore. Il quoziente può essere trovato utilizzando la calcolatrice oppure senza, se si vogliono allenare le tecniche d'algoritmo della divisione. Un confronto diretto fra i vari risultati ottenuti dovrebbe portare la classe a capire che il rapporto fra i numeri si avvicina sempre più a un numero famosissimo. Il docente può quindi presentare agli allievi il numero aureo, che si definisce come $\varphi \approx 1{,}618033$. Questo numero, una volta introdotto, merita di essere incorniciato e appeso in classe, perché è considerato divino e sarà al centro delle attività successive.

Spirali auree e rettangoli aurei nell'arte

Il percorso continua con l'insegnante che chiede agli allievi di disegnare liberamente su di un foglio bianco, il rettangolo che ritengono essere il più bello esteticamente. Ognuno naturalmente ottiene un risultato diverso, a seconda dei propri canoni estetici, e non c'è quindi una proposta giusta e una sbagliata. A questo punto, si chiede ai bambini di misurare la lunghezza dei lati consecutivi del rettangolo, e di trovare il rapporto fra i due numeri individuati, utilizzando come numeratore il più grande e come denominatore il più piccolo, se sono diversi. Insieme si riflette sul rapporto ottenuto, confrontandolo con il numero aureo: quanto si avvicina? Di quanto è la differenza? I bambini scoprono il rettangolo aureo: si tratta, appunto, di un rettangolo il cui rapporto fra i lati è uguale al numero aureo scoperto nelle lezioni precedenti.
Insieme si prova quindi a disegnare dei rettangoli aurei: un metodo semplice è quello di scegliere come lunghezza dei lati due numeri vicini consecutivi nella successione di Fibonacci (è bene però anche rendere attenta la classe al fatto che si tratta di un'approssimazione di rettangolo aureo). Scegliendo per esempio di realizzare un rettangolo con dei lati lunghi 55 cm e 89 cm, otterremo una figura con un rapporto fra i lati pari

6.5 - 6.6

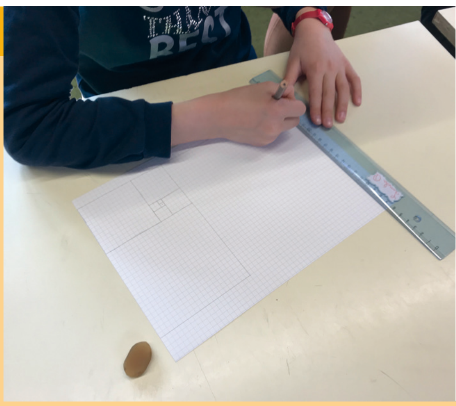
Esempi di opere e di fotografie analizzate dagli allievi, alla ricerca di proporzioni auree.

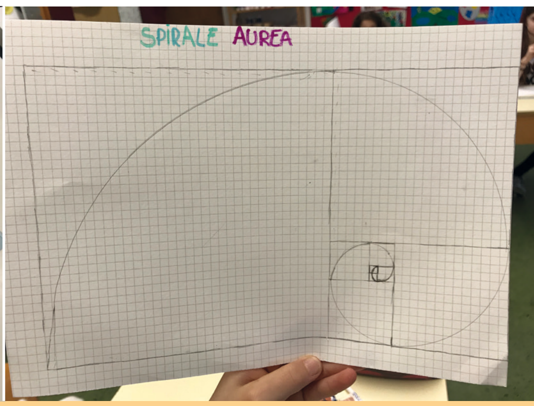


6.7
La spirale aurea, costruita all'interno di rettangoli aurei.

a 1,618181818... Maggiori sono i numeri scelti all'interno della successione di Fibonacci, migliore sarà l'approssimazione al rettangolo aureo.
Una possibile attività da proporre ai bambini consiste nell'andare a caccia di rettangoli aurei in una serie di quadri e fotografie di sculture o edifici (6.5, 6.6). Gli allievi procedono empiricamente, lavorando su fogli trasparenti o lucidi sovrapposti alle immagini delle opere e provano a disegnare rettangoli, per esempio, in cui risultino inscritti volti, corpi o semplicemente parte dei soggetti realizzati.

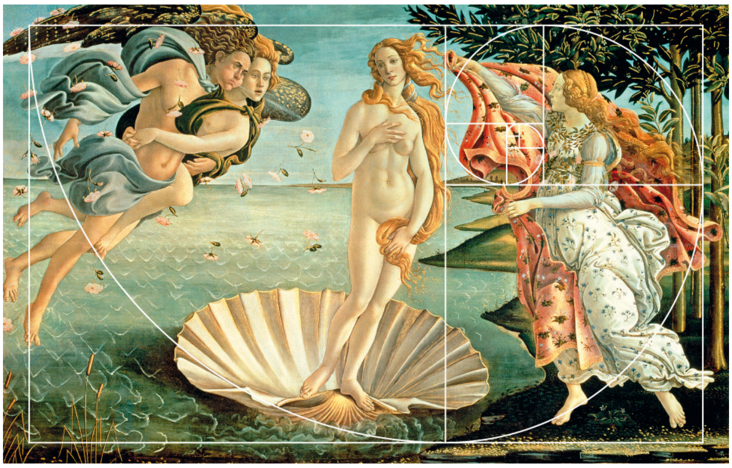
È possibile anche trattare il tema delle spirali auree (6.7): si tratta appunto di spirali costruite sull'accostamento di quadrati che formano rettangoli che si avvicinano sempre di più a quello aureo. Un modo veloce di realizzarli con la classe è quello di utilizzare un foglio quadrettato (6.8, 6.9). Si parte disegnando due quadrati che hanno il lato lungo come il lato di 1 quadretto, che chiameremo per comodità *l*. I due quadrati hanno un lato che combacia. Vicino a questi due quadrati, se ne realizza un terzo, che ha il lato lungo come 2*l*. Osservando la figura ottenuta, avremo un rettangolo di 2×3 quadretti. Procediamo sempre alla stessa maniera, aggiungendo un quadrato con il lato lungo come 3*l* (ottenendo un rettangolo di 3×5 quadretti), poi uno con il lato lungo come 5*l* (ottenendo un rettangolo di 5×8 quadretti) e così via, procedendo sempre nello stesso senso o orario o antiorario fino ad aver riempito il foglio. Partendo da un vertice del primo quadrato, è possibile infine disegnare una spirale che passi per i vertici degli altri quadrati, come mostrato nell'illustrazione. Concretamente per ogni quadrato si traccia l'arco di circonferenza con centro in un vertice e raggio pari alla lunghezza del lato. La spirale ottenuta è la famosa spirale aurea.





6.8
Allievo al lavoro, nell'intento di disegnare una serie di rettangoli aurei in cui disegnare la spirale.

6.9
Lavoro terminato: la spirale aurea prende forma!



6.10

Botticelli, S.,
La nascita di Venere, 1482-1485.

Analogamente a quanto visto con i rettangoli aurei, è possibile andare a caccia di spirali auree nelle opere d'arte, nelle fotografie o in natura. Anche in questo caso la spirale è la struttura matematica su cui si regge l'opera, e sia in passato che al giorno d'oggi, si ritiene che le proporzioni suggerite da questa figura rappresentino il perfetto equilibrio da un punto di vista estetico. Si vedano gli esempi portati da Pulvirenti (2016) (6.10, 6.12).

Quanto sei aureo? Misurati!

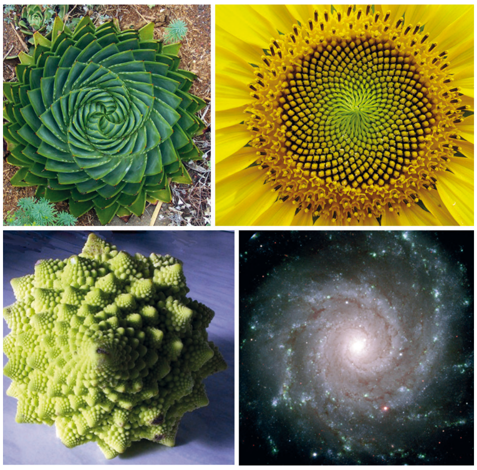
Anche nel corpo umano si possono trovare delle proporzioni più o meno armoniose. Alcuni artisti, come Leonardo da Vinci, le hanno studiate in maniera approfondita. Con la classe si osserva e si analizza una sua opera, l'*Uomo vitruviano* (6.13), disegno a inchiostro su carta realizzato attorno al 1490, che simboleggia le proporzioni ideali del corpo umano. Nel suo studio anatomico, il genio rinascimentale rappresenta un corpo di uomo armoniosamente inscritto in un quadrato e in un cerchio.

Si chiede quindi ai bambini di provare a trovare dei rapporti aurei all'interno del corpo dell'*Uomo vitruviano*, misurandone alcune lunghezze: l'altezza diviso la distanza fra l'ombelico e i piedi, la distanza fra la spalla e la punta delle dita diviso la distanza fra il gomito e la punta delle dita, oppure ancora il rapporto fra l'altezza e la larghezza del volto. Sarà così possibile scoprire quanto è aureo l'*Uomo vitruviano* di Leonardo. Inizialmente, sarà necessario guidare i bambini nelle misurazioni. In un secondo tempo, sarà possibile lasciarli liberi di sperimentare e di trovare altre proporzioni.

Una volta misurato l'*Uomo vitruviano*, è ora di mettersi in gioco in prima persona e di cercare di stabilire quanto ogni allievo (e, perché no, l'insegnante) sia aureo e rispetti

6.11

Due allieve utilizzano degli strumenti di misura per scoprire se il proprio volto ha delle proporzioni auree.



6.12

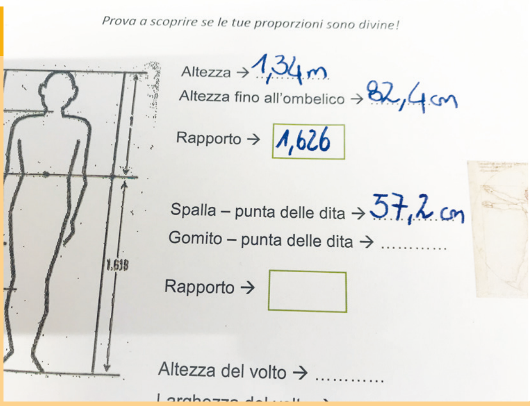
Numeri e spirali auree in natura!

6.13

Da Vinci, L., *Uomo vitruviano*, 1490 circa.

i canoni rinascimentali di bellezza e proporzione. Si tratta di un'attività laboratoriale e sperimentale, utile per allenare l'utilizzo di strumenti di misura (6.11): come si è fatto con il disegno di Leonardo, l'obiettivo è quello di fare un confronto fra i rapporti presenti nel proprio corpo e il numero aureo scoperto insieme nelle attività precedenti. Per gli allievi è sorprendente notare quanto le proporzioni del proprio corpo si avvicinino a quelle ritenute divine e impeccabili dagli artisti rinascimentali.
Oltre che per allenare alcune tecniche legate all'ambito Grandezze e misure, questa attività può essere sfruttata per far vivere i numeri da un punto di vista personale e affettivo: i numeri sono in ognuno di noi, ci descrivono e ci appartengono. Così come all'interno della classe ci sono aspetti che accomunano i bambini e altri che li rendono unici e differenti, anche i numeri rilevati possono essere comuni o differenti tra compagni. Per registrare i dati e favorire il confronto, si può proporre agli allievi una scheda intitolata "Quanto sei aureo?" (6.14), una sorta di carta d'identità da completare che guidi le misurazioni, per poi stabilire che ognuno di noi è a suo modo... aureo!

Per divertirsi con queste misurazioni, è possibile proporre un confronto fra le proporzioni del proprio volto e quelle di personaggi conosciuti e vicini alla quotidianità degli allievi. Per farlo, si stampano immagini o fotografie di celebrità del mondo della musica, della televisione, dello sport, poi si inscrivono i loro volti in rettangoli e si trova il rapporto fra le lunghezze dei due lati, come già fatto per le opere d'arte (6.15). Quindi, ogni allievo può stabilire quale personaggio si avvicini di più al numero aureo in termini di proporzioni del volto: le discussioni che nascono durante quest'attività sono senz'altro simpatiche e interessanti non solo da un punto di vista matematico.



6.14

Particolare della scheda di lavoro con registrati i dati raccolti tramite le misurazioni da parte di un allievo.

6.15

Le proporzioni nel volto di alcuni personaggi famosi: chi si avvicinerà di più ai canoni estetici rinascimentali?

BIBLIOGRAFIA

Libri

- Bagni, G. T., & D'Amore, B. (1994). *Alle radici storiche della prospettiva.* Milano: Franco Angeli.
- D'Amore, B. (2015). *Arte e matematica.* Bari: Dedalo.
- D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2018). *La matematica e la sua storia. Dal tramonto greco al Medioevo.* Bari: Dedalo.
- D'Amore, B, & Sbaragli, S. (2019). *La matematica e la sua storia. Dal Rinascimento al XVIII secolo*. Bari: Dedalo.
- DECS (2015). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese.* Bellinzona: Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport, Divisione della scuola.
- Demartini, S., Fornara, S., & Sbaragli, S. (2017). Dalla parola al termine. Il cammino verso l'apprendimento del lessico specialistico della matematica nelle definizioni dei bambini. Atti del convegno Giscel, Milano, 22-24.09.2016. *La lingua di scolarizzazione nell'apprendimento delle discipline non linguistiche*, 79-101.
- Dussutour, O., & Guéry, A. (2012). *123 d'arte.* Modena: Franco Cosimo Panini.
- Kandinsky, W. (1968). *Punto, linea, superficie.* Milano: Adelphi.
- Lionni, L. (1975). *Pezzettino*. Milano: Babalibri.
- Martini, B., & Sbaragli, S. (2005). *Insegnare e apprendere la matematica*. Napoli: Tecnodid.
- Platone, *Timeo*, traduzione a cura di Francesco Fronterotta, BUR, Milano 2003.
- Posthuma, S. (2016). *Il filo di Alexander Calder*. Vercelli: Whitestar.
- Reynolds, P. H. (2003). *Il punto.* Milano: Ape Junior.
- Sbaragli, S. (2014). Una lettura didattica della metafora degli "occhiali della matematica". In B. D'Amore, & S. Sbaragli, *Parliamo tanto e spesso di didattica della matematica.* Bologna: Pitagora.
- Wehrli, U. (2008). *L'arte a soqquadro.* Milano: Il Castoro.
- Wehrli, U. (2013). *The art of clean up*. Zurigo: Kein und Aber.
- Weltman, A. (2017). *Questa (non) è matematica. Un libro di attività per disegnare con intelligenza: 1*. Trieste: Editoriale Scienza.
- Wye, D. (2010). *A Picasso portfolio: prints fromt the Museum of Modern Art*. New York: The Museum of Modern Art.

Sitografia

- Calder, A. (1955). *Alexander Calder performs his "Circus" | Whitney Museum of American Art*. Disponibile da https://www.youtube.com/watch?v=t6jwnu8Izy0 (consultato in data 19.08.2019).
- Cavandoli, O. (1969). *La linea - Osvaldo Cavandoli Episodio 1*. Disponibile da https://youtu.be/GV3BqbsyaUk (consultato in data 19.08.2019).
- Odifreddi, P. (1998, Febbraio 26). *Matematica e arte.* Disponibile da https://www.youtube.com/watch?v=lo68B9kGw8s (consultato in data 19.08.2019).
- Pulvirenti, E. (2016). *Come nel Rinascimento... fai una foto con la spirale aurea!* Disponibile da http://www.didatticarte.it/Blog/?p=8202 (consultato in data 19.08.2019)

Fonti delle immagini

(1.1) Johns, Jasper. *0-9*. ca. 1962, Tate Modern, Londra. *Tate Modern*, https://www.tate.org.uk/art/artworks/johns-0-through-9-t00454. Ultimo accesso 11 novembre 2020; **(1.2)** Mantegna, Andrea. *Casa del Mantegna*. 1476, Mantova. *Hidden Architecture*, http://hiddenarchitecture.net/casa-del-mantegna/. Ultimo accesso 11 novembre 2020; **(1.3)** Kandinskij, Vasilij. *Giallo, rosso, blu*. 1925, Centre George Pompidou, Parigi. *Parigi.it*, https://www.parigi.it/principali-opere-centre-pompidou. Ultimo accesso 11 novembre 2020; **(1.4)** Balla, Giacomo. *Numeri innamorati*. 1920, Mart, Museo di arte moderna e contemporanea di Trento e Rovereto / Collezione VAF-Stiftung, Trento Rovereto. *Google Arts & Culture*. https://artsandculture.google.com/asset/numeri-innamorati-giacomoballa/1QH5BNqJEcJs6w?hl=it. Ultimo accesso 11 novembre 2020. **(1.5)** Klee, Paul. *Station L 112, 14 km*. 1920, Kunstmuseum, Berna. *AKG Images*, https://www.wikiart.org/en/paul-klee/station-l-112-1923. Ultimo accesso 11 novembre 2020; **(1.6)** Grassi, Paolo. *Element 143-145*. 2010, collezione privata, Losone. *Paolograssi.biz*, https://www.paolograssi.biz/led-painting/. Ultimo accesso 11 novembre 2020; **(1.7)** Malevich, Kasimir. *Quadrato nero*. 1915, Tretyakov Gallery, Mosca. *Wikipedia*,https://en.wikipedia.org/wiki/Black_Square_(painting)#/media/File:Kazimir_Malevich,_1915,_Black_Suprematic_Square,_oil_on_linen_canvas,_79.5_x_79.5_cm,_Tretyakov_Gallery,_Moscow.jpg. Ultimo accesso 11 novembre 2020; **(1.8)** Mondrian, Piet. *Composizione in rosso, blu e giallo*. 1929, Narodni Muzej, Belgrado. *Wikipedia*, https://en.wikipedia.org/wiki/Composition_with_Red_Blue_and_Yellow. Ultimo accesso 11 novembre 2020; **(1.9)** Seurat, George. *Una domenica pomeriggio all'isola della Grande Jatte*. 1883-1885, The Art Institute, Chicago. *Arteworld.it*, https://www.arteworld.it/domenica-pomeriggio-sull-isola-della-grande-jatte-seurat-analisi/. Ultimo accesso 11 novembre 2020. **(1.10)** Picasso, Pablo. *I tre musici*. 1921, The Museum of Modern Art, New York. *Arteworld.it*, https://www.arteworld.it/i-tre-musici-picasso-analisi/. Ultimo accesso 11 novembre 2020; **(1.11)** Kandinsky, Vasilij. *Composition 8*. 1923, Solomon R. Guggenheim Museum, New York. Guggenheim Museum, https://www.guggenheim.org/artwork/1924. Ultimo accesso 11 novembre 2020; **(1.12)** Della Francesca, Piero. *Flagellazione di Cristo*. 1453, Galleria Nazionale delle Marche, Urbino. *Galleria Nazionale delle Marche*, http://www.gallerianazionalemarche.it/collezioni-gnm/flagellazione. Ultimo accesso 11 novembre 2020; **(1.13)** Magritte, Rene. *La decalcomania*. 1966, Centro George Pompidou, Parigi. *Wall Street International*, https://wsimag.com/centre-pompidou/artworks/84834. Ultimo accesso 11 novembre 2020; **(1.14)** Warhol, Andy. *Marilyn Monroe*. 1967, Colorado Powers Art Center, Carbondale. *The Museum of Modern Art*, https://www.moma.org/collection/works/61240? Ultimo accesso 11 novembre 2020; **(2.2)** Picasso, Pablo. *Serbatoio a Horta de Ebro*. 1909, The Museum of Modern Art, New York. *Pablopicasso.org*, https://www.pablopicasso.org/factory-at-horta-de-ebro.jsp. Ultimo accesso 11 novembre 2020; **(3.1)** Seurat, George. *Il circo*. 1890-1891, Museo D'Orsay, Parigi. *Wikipedia*, https://it.wikipedia.org/wiki/Il_circo_(Seurat). Ultimo accesso 11 novembre 2020; **(3.7)** Immagine in formato digitale ad alta risoluzione fornita esclusivamente allo scopo di questa pubblicazione dall'agenzia Quipos s.r.l, Milano, Italia **(3.11)** Miro, Joan. *La cantante malinconica*. 1928, Museo dell'arte Latinoamericana, Buenos Aires. *Joanmiropaintings.org*, http://www.joanmiropaintings.org/melancholic-singer/. Ultimo accesso 11 novembre 2020; **(3.12)** Kandinsky, Vasilij. *Linea Trasversale*. 1923, Kunstsammlung Nordrhein-Westfalen, Düsseldorf. *Kunstsammlung Nordrhein-Westfalen*, https://www.kunstsammlung.de/en/collection/artists/wassily-kandinsky. Ultimo accesso 11 novembre 2020; **(3.17)** Picasso, Pablo. *Donna che piange*. 1937, Tate Modern, Londra. *Tate Modern*, https://www.tate.org.uk/art/artworks/picasso-weeping-woman-t05010. Ultimo accesso 11 novembre 2020; **(3.18)** Picasso, Pablo. *Ritratto di Dora Maar*. 1937, Museo Picasso, Parigi. *Museo Picasso*, https://www.museepicassoparis.fr/fr/portrait-de-dora-maar. Ultimo accesso 11 novembre 2020; **(3.22)** Picasso, Pablo. *Il toro*. 1945-1946, litografie. *Draw Paint Academy*, https://drawpaintacademy.com/the-bull/. Ultimo accesso 11 novembre 2020; **(3.23)** Klimt, Gustav. *L'albero della vita*. 1905-1909, Palazzo Stoclet, Bruxelles. *Gustav-klimt.com*, https://www.gustav-klimt.com/The-Tree-Of-Life.jsp#prettyPhoto[image2]/0/. Ultimo accesso 11 novembre 2020; **(4.13)** Klee, Paul. *Palloncino rosso*. 1922, Solomon R. Guggenheim Museum, New York. *Solomon R. Guggenheim Museum*, https://www.guggenheim.org/artwork/2143. Ultimo accesso 11 novembre 2020; **(4.14)** Klee, Paul. *Parco vicino a Lu*. 1938, Zentrum Paul Klee, Berna. *Paul-klee.org*, http://www.paul-klee.org/de/park-bei-lu/. Ultimo accesso 11 novembre 2020; **(4.15)** Klee, Paul. *Castello e sole*. 1928, Collezione privata. *Paul-klee.org*, http://www.paul-klee.org/de/burg-und-sonne/. Ultimo accesso 11 novembre 2020; **(5.3)** Titolo sconosciuto, Autore sconosciuto, data incerta. https://urgetocreate.tumblr.com/post/88274895755/magrittee-rene-magritte-and-cats-cat-in-a **(5.4)** Magritte, Rene. *Il figlio dell'uomo*. 1964, collezione privata. *Wikipedia*, https://en.wikipedia.org/wiki/The_Son_of_Man#/media/File:Magritte_TheSonOfMan.jpg. Ultimo accesso 11 novembre; **(5.12)** Bill, Max. *Ottagono, 15 variazioni sullo stesso tema*. 1938, serigrafia. *Museum Haus Konstruktiv*, https://www.hauskonstruktiv.ch/enUS/art-mediation/digital-program/collection-highlights/-/digital/collection/collection-highlights/max-billbriquinze-variations-sur-un-meme-theme-i.htm. Ultimo accesso 11 novembre 2020; **(5.15)** Bill, Max. *Composizione con centro bianco*. 1972, serigrafia. WorthPoint, https://www.worthpoint.com/worthopedia/max-bill-1972-composition-white-1807974610. Ultimo accesso 11 novembre 2020; **(5.19)** Mondrian, Piet. *Tableau*. 1923, Museu Berardo, Lissabon. *Wikimedia commons*, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Piet_Mondriaan_-_Tableau_-_B150_-_Piet_Mondrian,_catalogue_raisonn%C3%A9.jpg?uselang=it. Ultimo accesso 19 gennaio 2021. **(6.1)** Da Vinci, Leonardo. *Testa di fanciulla* (detta *La Scapigliata*). 1508 circa, Galleria nazionale, Parma. *Wikipedia*, https://en.wikipedia.org/wiki/La_Scapigliata#/media/File:Leonardo_da_vinci_-_La_scapigliata.jpg. Ultimo accesso 11 novembre 2020; **(6.10)** Botticelli, Sandro. *La nascita di Venere*. 1482-1485, Galleria degli Uffizi, Firenze. *Galleria degli Uffizi*, https://www.uffizi.it/opere/nascita-di-venere. Ultimo accesso 11 novembre 2020; **(6.13)** Da Vinci, Leonardo. *Uomo vitruviano*. 1490 circa, Gabinetto dei Disegni e delle Stampe delle Gallerie dell'Accademia, Venezia. *Gallerie dell'Accademia di Venezia*, https://en.wikipedia.org/wiki/Vitruvian_Man#/media/File:Da_Vinci_Vitruve_Luc_Viatour.jpg. Ultimo accesso 11 novembre 2020; **(7.3)** Miro, Joan. *L'aria*. 1937, litografia. *Wikiart*, https://www.wikiart.org/en/joan-miro/the-air-1937. Ultimo accesso 11 novembre 2020; **(8.1)** Arcimboldo, Giuseppe. *L'estate*. 1563, Musée du Louvre, Parigi. *Musée du Louvre*, http://cartelfr.louvre.fr/cartelfr/visite?srv=car_not_frame&idNotice=21517. Ultimo accesso 11 novembre 2020; **(8.4)** Ernst, Max. *La bella stagione*. 1925, collezione privata. *Wikiart*, https://www.wikiart.org/en/max-ernst/the-beautiful-season-1925. Ultimo accesso 11 novembre 2020; **(8.5)** Demuth, Charles. *La figura 5 in oro*. 1928, Metropolitan Museum of Art, New York. *Metropolitan Museum of Art*, https://www.metmuseum.org/it/art/collection/search/488315. Ultimo accesso 11 novembre 2020.

Tutte le immagini non elencate nel presente elenco sono state fornite dagli autori del volume e sono di loro proprietà. L'editore è a disposizione degli aventi diritto con i quali non è stato possibile comunicare, nonché per eventuali omissioni o inesattezze nella citazione delle fonti delle immagini riprodotte nel presente volume.