



Repubblica e Cantone Ticino  
Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport  
Divisione della scuola  
Ufficio dell'insegnamento medio superiore  
Centro Didattico Cantonale



*Strumenti per  
l'insegnamento interdisciplinare  
della termodinamica  
nelle scienze sperimentali*

Volume II – Applicazioni didattiche

**Le ceneri della Fenice**  
**Parte II – Attività in classe e Appendice**

*Stefano Russo*  
*Liceo cantonale di Lugano 1*



Versione maggio 2011

Repubblica e Cantone Ticino  
Dipartimento dell'Educazione, della Cultura e dello Sport  
Divisione della scuola / Centro Didattico Cantonale e Ufficio dell'Insegnamento Medio Superiore

***Strumenti per l'insegnamento interdisciplinare della termodinamica nelle scienze sperimentali***

Estratto dal Volume 2 – Applicazioni didattiche (versione maggio 2011)

ISBN 88-86486-60-X

Responsabili del progetto: Michele D'Anna, Giuseppe Laffranchi, Paolo Lubini

Contatti: [michele.danna@edu.ti.ch](mailto:michele.danna@edu.ti.ch); [giuseppe.laffranchi@edu.ti.ch](mailto:giuseppe.laffranchi@edu.ti.ch); [paolo.lubini@edu.ti.ch](mailto:paolo.lubini@edu.ti.ch)

Gruppo di redazione:

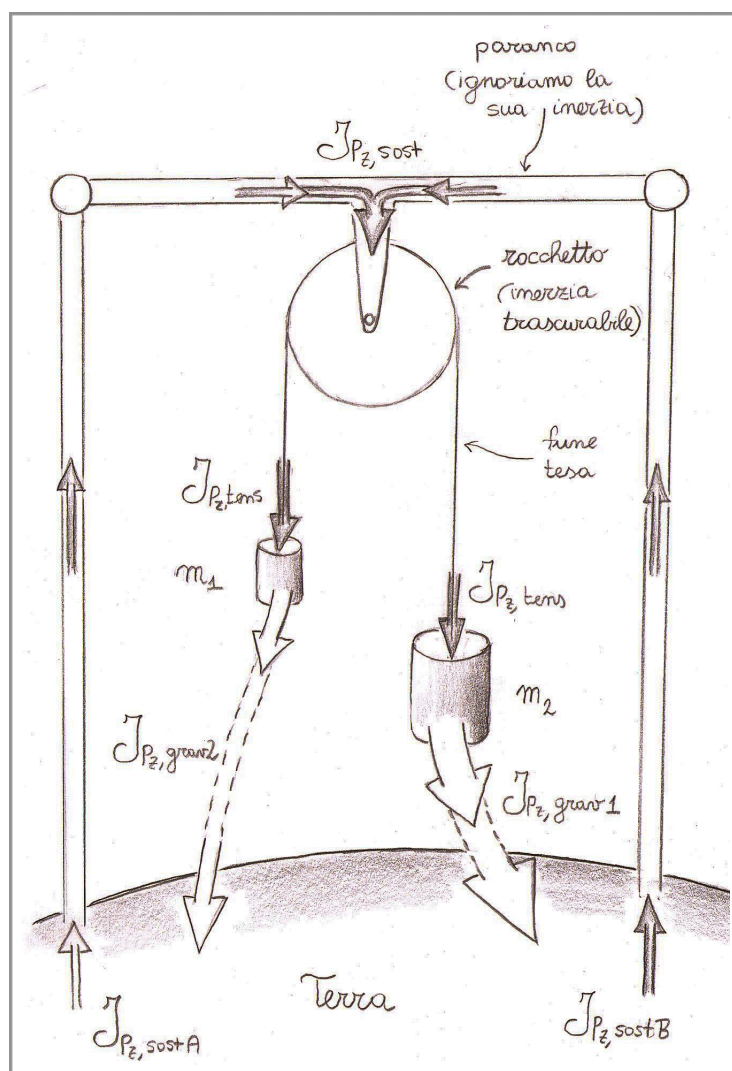
Claudio Arrivoli, Luigi Croci, Paolo Danielli, Michele D'Anna, Giuseppe Laffranchi, Paolo Lubini,  
Fabio Lucchinetti, Ruben Moresi, Paolo Agostino Morini, Giancarlo Parisi, Christian Rivera, Stefano Russo,  
Marco Villa

Immagine di copertina:

*Pittura rupestre de la Cueva de la Araña en Bicorp: Individuo recolectando panales,*  
Apiculture - création Achilléa d'après peinture rupestre de la Cueva de Arana - libre disposition suivant  
GNU Public Licence, [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cueva\\_arana.svg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cueva_arana.svg)

---

# LE CENERI DELLA FENICE



Parte 2: Attività in classe e Appendice

*Stefano Russo*

---



[...] Oggi abbiamo il compito di indicare a tutti come si deve calcolare la rapidità di trasferimento dell'energia attraverso la macchina semplice; quando avremo realizzato questo obiettivo, avremo fissato una volta per tutte l'entità dei trasferimenti in ogni situazione, e la loro unità di misura. [...]

Ai miei figli Tommaso, Michele e Virginia  
(in ordine di apparizione in questo mondo).

*Stefano Russo*  
*Rosone, 17 maggio 2011*

## SIMBOLI, TERMINOLOGIA E UNITÀ DI MISURA

Simbolo	Grandezza	S.I.	KR
$Q$	generico portatore		
$\varphi$	generico potenziale		
$\vec{p}, p_x, p_y, p_z$	quantità di moto	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	Hy
$\vec{v}, v_x, v_y, v_z$	velocità	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	
$\vec{v}_{rel}$	velocità relativa	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	
$F, \vec{F}$	forza	N	
$\mathcal{I}_{p_x}, \mathcal{I}_{p_y}, \mathcal{I}_{p_z}$	corrente di quantità di moto	N	$\text{Hy} \cdot \text{s}^{-1}$
$\vec{L}, L_z$	momento angolare	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	
$\vec{\tau}, \tau_z$	momento delle forze	$\text{N} \cdot \text{m}$	
$\vec{\omega}, \omega_z$	velocità angolare	$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$	
$\mathcal{I}_{L_z}$	corrente di momento angolare	$\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	
$\xi$	allungamento della molla	m	
$\mathcal{I}_\xi$	corrente di allungamento	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	
$\varphi_{el}$	potenziale elastico	N	
$k$	costante elastica	$\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$	
$m$	massa	kg	
$\mathcal{I}_m$	corrente di massa	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$	
$\varphi_{grav}$	potenziale gravitazionale	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$	
$M$	massa molare	$\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$	
$\vec{g}, g_z$	campo di gravità	$\text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$	
$\rho$	densità	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	
$P$	pressione	Pa	
$S$	entropia	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$	Ct
$T$	temperatura	K	
$\mathcal{I}_S$	corrente di entropia	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \text{s}^{-1}$	$\text{Ct} \cdot \text{s}^{-1}$
$\pi_S$	tasso di produzione di entropia	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \text{s}^{-1}$	$\text{Ct} \cdot \text{s}^{-1}$
$C$	capacità termica	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$	Ct
$C_{ent}$	capacità entropica	$\text{J} \cdot \text{K}^{-2}$	$\text{Ct} \cdot \text{K}^{-1}$

Simbolo	Grandezza	S.I.	KR
$q$	carica elettrica	C	
$I, \mathcal{I}_q$	corrente elettrica	A	
$\varphi_{el}$	potenziale elettrico	V	
$C, \mathcal{C}_{el}$	capacità elettrica	F	
$R, \mathcal{R}_{el}$	resistenza elettrica	$\Omega$	
$n$	quantità chimica	mol	
$\mu$	potenziale chimico	$J \cdot mol^{-1}$	$G$
$\mathcal{I}_n$	corrente chimica	$mol \cdot s^{-1}$	
$\mathcal{U}$	funzione energia (Gibbs)	J	
$\mathcal{E}$	energia	J	
$\mathcal{I}_{\mathcal{E}}$	corrente di energia	W	
$\mathcal{P}$	potenza	W	
$\mathcal{E}_{cin}$	energia cinetica	J	
$\mathcal{E}_{pot}$	energia potenziale (in meccanica)	J	
$L^{\rightarrow}, L^{\leftarrow}$	lavoro fatto/subito in un processo	J	
$Q^{\rightarrow}, Q^{\leftarrow}$	calore assorbito/ceduto in un processo	J	
$U$	energia interna (in termodinamica)	J	
$p_i$	probabilità dello stato $i$ -esimo		
$k_B$	costante di Boltzmann	$J \cdot K^{-1}$	Ct



## POTENZIALI, PORTATORI E PROCESSI

Ambito	Portatore	Potenziale	Capacità	Potenza
Meccanica	$p$	$v$	$m$	$\mathcal{I}_p v_{rel}$
Vasi (idraulica)	$V$	$p$	$\frac{A}{\rho g}$	$\mathcal{I}_V (p_2 - p_1)$
Vasi (chimica)	$n$	$\mu$	$\frac{\rho A}{M^2 g}$	$\mathcal{I}_n (\mu_2 - \mu_1)$
Vasi (gravità)	$m$	$gz$	$\frac{\rho A}{g}$	$\mathcal{I}_m g (z_2 - z_1)$
Elasticità	$\xi$	$k\xi$	$\frac{1}{k}$	$\mathcal{I}_\xi (k_2 \xi_2 - k_1 \xi_1)$
Elettricità	$q$	$\varphi_{el}$	$\mathcal{C}_{el}$	$\mathcal{I}_q (\varphi_{el,2} - \varphi_{el,1})$
Cond. Termica	$S$	$T$	$\frac{C}{T}$	$\mathcal{I}_S (T_1 - T_2)$
Dissipazione	$S$	$T$	$\frac{C}{T}$	$\pi_S T$

## A PROPOSITO DEI TERMINI

Quando ho concluso la prima versione di questo lavoro, mi è stato fatto notare che l'uso allargato del termine velocità genera confusione (soprattutto tra gli allievi).

Dovremmo difatti utilizzare questa parola solo per indicare la grandezza cinematica  $\vec{v} = d\vec{x}/dt$ ; tutte le altre derivate prime temporali possono essere chiamate **rapidità di variazione** (o più semplicemente rapidità) o **tasso istantaneo di variazione**.

Sorge a questo punto una questione interessante.

Difatti in dinamica dobbiamo considerare, accanto alla derivata prima, anche la derivata seconda, l'accelerazione. Dato che "celere" significa "veloce", accelerazione significa aumento di velocità; quale termine dovremo usare per indicare la derivata seconda al di fuori del contesto della dinamica?

La questione è stata sollevata dagli allievi di un corso di I liceo.

Propongo, in linea con l'etimologia del termine accelerazione, la parola **arrapidamento**: non brilla per eleganza ma ha un suo fascino che in prima liceo non mancano di notare, ed inoltre risponde all'esigenza di usare una terminologia chiara e suggestiva.

#### A PROPOSITO DELLA NOTAZIONE

La derivata temporale di una grandezza  $f(t)$  può essere indicata in due modi: con la notazione di Newton,  $\dot{f}(t)$ , e con la notazione di Leibniz,  $df(t)/dt$ . A lezione preferisco la notazione di Newton per due motivi:

1. non voglio che si faccia confusione tra la rapidità istantanea di variazione e la rapidità media  $\Delta f/\Delta t$ ;
2. la notazione di Newton suggerisce in modo più manifesto l'idea che la derivazione è un'operazione che fa corrispondere ad una funzione del tempo un'altra funzione del tempo; come accenno nella sezione 6.4 l'idea di operatore può essere esercitata attraverso l'uso dei grafici.

Così nella seconda parte di questo lavoro, quando espongo le attività in classe, uso sempre la notazione di Newton, mentre nella prima parte, di carattere teorico, uso la notazione che mi sembra più adatta nel contesto (principalmente sulla base di considerazioni estetiche).

#### A PROPOSITO DEI SIMBOLI

Le regole internazionali per la scrittura delle grandezze fisiche prevedono per la quantità di moto il simbolo  $\vec{p}$  e per la pressione il simbolo  $p$ .

In classe ho scelto invece di indicare la pressione con  $P$ , per evitare troppe confusioni; difatti già la distinzione tra i simboli  $p$  e  $P$  risulta sufficientemente impegnativa, così come tra  $v$  (velocità) e  $V$  (volume)

Trovo quindi poco sensato pretendere che allievi di prima e seconda liceo evitino in ogni caso di confondere tra i simboli  $p_x$ ,  $p_y$  e  $p_z$  delle componenti della quantità di moto e il simbolo  $p$  per la pressione.

Voglio così esprimere una considerazione: per quale motivo è necessario attenersi rigidamente alle norme internazionali? I casi sono due:

- o l'allievo non proseguirà gli studi iscrivendosi alle facoltà di Fisica o Ingegneria, e in tal caso indicare con  $P$  la pressione non dovrebbe turbare troppo il suo percorso di essere umano;

- o l'allievo diventerà un Fisico o un Ingegnere: non penso che in tal caso farà fatica ad adeguarsi alle norme internazionali quando sarà necessaria; o forse si vuole sostenere che sarà in grado di scrivere e comprendere l'equazione di Navier-Stokes, ma l'uso del simbolo sbagliato renderà fragile la sua preparazione?

Se diamo una rapida occhiata ai libri di testo più accreditati, vediamo che gli autori non si danno tanta pena per la questione: basta difatti riportare di volta in volta un elenco dei simboli. Ho visto di tutto: c'è anche chi ha indicato con  $t$  la temperatura (Enrico Fermi nel volume Termodinamica, sia pur per pochi paragrafi). È inoltre impossibile scegliere un insieme completo di simboli che copra tutte le esigenze della Fisica: prima o poi si incontra qualche nuova difficoltà.

Certamente è importante che i docenti al Liceo scelgano una terminologia comune, ma non è detto che debba essere la stessa indicata dal S.I.

Un'altra questione che ho risolto a modo mio è quella dei simboli relativi alle correnti.

In elettricità la corrente elettrica viene indicata con  $I$ ; nel corso di Karlsruhe di correnti ce ne sono proprio tante, e di solito si usano i simboli  $I_q$ ,  $I_V$ ,  $I_{p_x}$ ,  $I_{p_y}$ ,  $I_{L_z}$ ,  $I_m$ ,  $I_n$ . Fin qui tutto bene, ma un problema sorge nella meccanica del corpo rigido: di solito si indica con  $I$  il momento di inerzia di un corpo; quindi dal mio punto di vista i casi sono due: o cambio il simbolo del momento di inerzia o cambio il simbolo per le correnti.

Senza la pretesa di fare la scelta migliore ho risolto il problema così: uso un carattere calligrafico per tutte le correnti, che indico con  $\mathcal{I}_Q$ , dove  $Q$  è la quantità che scorre. La differenza alla lavagna tra  $I$  e  $\mathcal{I}$  è chiara e inoltre l'uso di un carattere speciale per le grandezze di Karlsruhe suggerisce, a mio modo di vedere, la posizione particolare che occupa l'analogia rispetto ai singoli temi della Fisica.

In questo modo tra l'altro posso indicare con  $\mathcal{L}$  il lavoro delle forze, per distinguerlo dal momento angolare  $L$ , e con  $\mathcal{E}$  l'energia, per distinguerla dal campo elettromagnetico  $E$ .

## Indice

<b>1</b>	<b>Prefazione</b>	<b>13</b>
<b>I</b>	<b>Fondamenti</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>Considerazioni Generali</b>	<b>18</b>
2.1	Perché la Fisica . . . . .	19
2.2	Perché la Termodinamica . . . . .	20
2.3	Piano di sede vs nuovo approccio . . . . .	22
2.4	Due percorsi distinti . . . . .	24
<b>3</b>	<b>L'idea chiave</b>	<b>29</b>
3.1	Potenziali . . . . .	29
3.2	Due sistemi e un'interfaccia . . . . .	32
3.3	Processi spontanei . . . . .	34
3.4	Portatori ed energia . . . . .	40
3.5	A proposito del termine "portatore" . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Dinamica</b>	<b>48</b>
4.1	Correnti di quantità di moto . . . . .	49
4.2	Correnti di momento angolare . . . . .	54
4.3	Correnti di energia . . . . .	56
4.4	Sistemi mediatori . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Processi</b>	<b>74</b>
5.1	Funzione di Gibbs e processi . . . . .	75
5.2	Diagrammi di processo . . . . .	78
5.3	Spontaneità ed entropia . . . . .	82
5.4	Il portatore chimico . . . . .	90
5.5	Esplosioni . . . . .	94
5.6	La freccia del tempo . . . . .	96
<b>6</b>	<b>Il percorso</b>	<b>103</b>
6.1	Cominciamo dalla fine . . . . .	104
6.2	Il baricentro . . . . .	109
6.3	Il ruolo dell'analogia . . . . .	112
6.4	Introduzione del calcolo . . . . .	117
6.5	Modelli al computer . . . . .	118
6.6	Mappa del percorso . . . . .	121

<b>II</b>	<b>Attività in classe</b>	<b>135</b>
<b>7</b>	<b>Processi meccanici</b>	<b>136</b>
7.1	Accumuli e trasferimenti . . . . .	138
7.2	Conservazione della quantità di moto . . . . .	142
7.3	Spinta e inerzia . . . . .	145
7.4	Definizione operativa . . . . .	148
7.5	Collisioni ed esplosioni . . . . .	150
7.6	Correnti e forze . . . . .	158
<b>8</b>	<b>I principi della dinamica</b>	<b>163</b>
8.1	Primo principio . . . . .	165
8.2	Secondo principio . . . . .	166
8.3	Terzo principio . . . . .	167
8.4	Leggi delle forze . . . . .	170
<b>9</b>	<b>Introduzione dell'energia</b>	<b>174</b>
9.1	Corrente di energia . . . . .	177
9.2	Potenza meccanica . . . . .	181
9.3	Accumuli di energia . . . . .	184
<b>10</b>	<b>Ancora sull'energia</b>	<b>193</b>
10.1	Il portatore elastico . . . . .	195
10.2	Il portatore gravitazionale . . . . .	199
10.3	Quadro generale . . . . .	203
10.4	Il metodo dell'energia potenziale . . . . .	203
<b>11</b>	<b>Oltre la dinamica</b>	<b>210</b>
11.1	Il crollo della meccanica . . . . .	213
11.2	Attrito . . . . .	219
11.3	Il principio di minimo . . . . .	227
<b>12</b>	<b>Termodinamica: introduzione</b>	<b>232</b>
12.1	Processi termici . . . . .	234
12.2	Una sola entropia . . . . .	240
12.3	Capacità entropica . . . . .	244
12.4	I principi della... . . . .	247
<b>13</b>	<b>Conclusione</b>	<b>251</b>
13.1	Retrospectiva del percorso . . . . .	251
13.2	Prospettive . . . . .	252
13.3	Hardware e software . . . . .	253

---

13.4 Ringraziamenti . . . . .	254
<b>III Appendice</b>	<b>256</b>
<b>A Sistemi di punti materiali</b>	<b>257</b>
A.1 Le equazioni cardinali . . . . .	257
A.2 A proposito dei corpi rigidi . . . . .	262
A.3 Ingranaggi . . . . .	266
<b>B Il concetto di spinta</b>	<b>272</b>
B.1 Prima interpretazione . . . . .	272
B.2 Seconda interpretazione . . . . .	273
B.3 Confronto . . . . .	275
<b>C A proposito dell'energia cinetica</b>	<b>277</b>
C.1 I fondamenti teorici . . . . .	277
C.2 Attività teorica . . . . .	278
C.3 Apparato sperimentale . . . . .	280
<b>D Dimostrazioni</b>	<b>283</b>
D.1 Potenziali e portatori . . . . .	283
D.2 Disomogeneità . . . . .	285
D.3 Cicli termodinamici . . . . .	290
<b>E Stechiometria</b>	<b>296</b>
E.1 Quantità chimica nelle reazioni . . . . .	296
E.2 Equazioni di continuità . . . . .	299
E.3 Conservazione della massa . . . . .	300
E.4 Termini di produzione/annichilazione . . . . .	302
E.5 Aspetti energetici . . . . .	303
<b>F Glossario</b>	<b>307</b>

---

Parte II

## Attività in classe

## 7 Processi meccanici

Ahi quanto a dir qual era è cosa dura  
 esta selva selvaggia e aspra e forte  
 che nel pensier rinnova la paura!  
*Dante Alighieri, Inferno (I, 4-6)*

**P**ARLIAMO UN poco delle funi poste in tensione. Nel linguaggio convenzionale, ortodosso della fisica ci esprimiamo così:

Ai capi opposti della fune agiscono forze di pari intensità, stessa direzione e verso opposto.

Tutto ciò è vero solo nel limite ideale in cui la fune ha massa nulla, e in tal caso l'immagine proposta è un modo molto concreto di esprimere il principio di azione-reazione.

Se invece ci esprimiamo con il linguaggio del corso di Karlsruhe dobbiamo dire:

La fune è attraversata, da un capo all'altro, da una corrente di quantità di moto.

Tutto ciò suona un tantino eretico; quando ho formulato questa proposizione le prime volte avevo davanti agli occhi l'immagine imbarazzante di una fune impregnata d'acqua che sgocciolava tutt'attorno.

Forse proprio simili considerazioni hanno fatto sì che questo approccio non sia stato preso dai più in debita considerazione.

Ora penso, invece, che la seconda frase sia estremamente sensata, e molto più della prima, e che essa sia molto più vicina alla base del buon senso comune formata dalle piccole esperienze che tutti noi abbiamo fatto fin da piccoli. Inoltre, procedendo da qui, non sarà difficile cogliere il senso del terzo principio e, per quanto ho visto lo scorso anno scolastico, evitare errori molto comuni tra allievi.

*Due atleti ingaggiano un confronto di tiro alla fune. L'atleta A vince. Quale dei due esercita sulla fune la forza maggiore?*

A partire da questa sezione alterno all'esposizione formale dei contenuti del corso brani tratti dalle dispense che sto preparando per gli allievi (ripartiti in "Testo" e "Esercizi"), dispense che a loro volta sono basate sull'attività in classe; spero con ciò di riuscire a dare un'idea di come procedo a lezione.



**Prerequisiti**

1. Saper applicare i metodi grafici del calcolo.
2. Saper usare le relazioni  $\dot{\mathcal{A}}_{media} = \frac{\Delta \mathcal{A}}{\Delta t}$  e  $\Delta \mathcal{A} \cong \dot{\mathcal{A}}(t) \Delta t$  (per piccoli intervalli temporali).
3. Saper calcolare i livelli di equilibrio e i trasferimenti complessivi in idraulica.

**Obbiettivi**

1. Esercitare la capacità di individuare e circoscrivere il sistema fisico in oggetto.
2. Individuare tutto ciò che è in grado di accumulare quantità di moto.
3. Individuare e rappresentare tutti i trasferimenti di quantità di moto.
4. Comprendere il contenuto del principio di conservazione della quantità di moto.

## 7.1 Accumuli e trasferimenti

Il primo passo è formare un base concreta e intuitiva del concetto di quantità di moto.

Dobbiamo procedere partendo da esempi semplici, piccole esperienze nelle quali non ci diamo l'assillo di eseguire misure; ad esempio possiamo lanciare ad un allievo (previo avvertimento) una palla da baseball.

### TESTO

Immaginate di dover bloccare una palla da baseball. Si sta muovendo veloce verso di voi, l'afferrerete con la mano e nel volger di un batter di ciglia l'arrestarete completamente. Possiamo esprimere questa circostanza in altri termini:

Quando la palla è in movimento possiede **quantità di moto** e per fermarla dobbiamo sottrargliela tutta.

La frase che abbiamo formulato contiene, in embrione, la definizione operativa della quantità di moto e, in pratica, tutte le sue proprietà.

Questa definizione è l'idea dalla quale vogliamo partire, e corrisponde ad esempio al fatto che arrestare un rinoceronte che ci sta caricando è più difficile che bloccare la palla da baseball: l'uno possiede più quantità di moto dell'altra.

Non è difficile, proponendo alcune variazioni sul tema (si può ad esempio lanciare la palla più o meno velocemente, o lanciare un oggetto più grande, o ancora lanciare una scatola che contiene un secondo oggetto) arrivare alla formulazione esplicita delle due proprietà principali:

1. La quantità di moto di un sistema costituito da due oggetti, uno con quantità di moto  $p_1$  e uno con quantità di moto  $p_2$ , è la somma algebrica delle due quantità di moto  $p = p_1 + p_2$  (figura 45).
2. Se un oggetto possiede la quantità di moto  $p_{in}$  e lo colpiamo, trasferendogli la quantità  $\Delta p$ , esso possiederà alla fine la quantità  $p_{fin} = p_{in} + \Delta p$  (figura 46).

Ora possiamo far notare, se qualcuno già non lo ha fatto, che queste sono le stesse proprietà che caratterizzano il volume d'acqua, e possiamo cominciare a tratteggiare gli elementi base dell'analogia (vedi figura 47).

Affrontiamo la controversa questione dell'unità di misura: ne ho sentito fin troppo dibattere, come se la questione avesse davvero un qualche rilievo.

Se vi fa piacere dare un nome all'unità di misura della quantità di moto, fatelo pure seguendo (magari) il suggerimento che ha dato Herrmann:

$$[p] = \text{Hy}$$

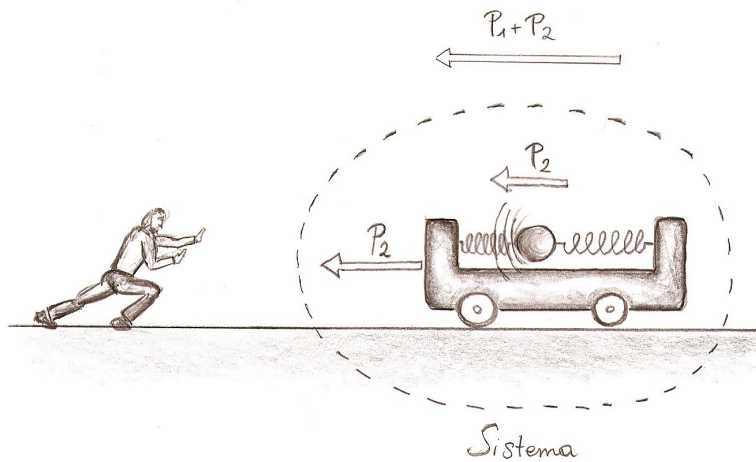


Figura 45: L'uomo a sinistra deve bloccare il movimento del sistema: quando il corpo all'interno del carrello avrà smesso di oscillare, egli avrà sottratto al sistema la quantità di moto  $p = p_1 + p_2$  (scaricandola a terra, poiché in caso contrario dovrebbe mettersi in movimento egli stesso).

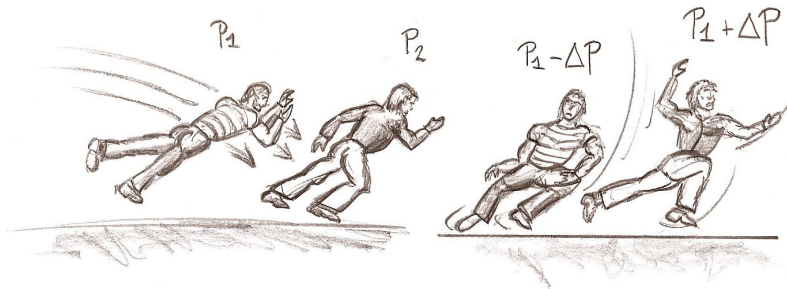


Figura 46: L'uomo a sinistra colpisce in volo quello a destra. Dopo la collisione, una certa quantità di moto  $\Delta p$  si è traferita dall'uno all'altro. Questo esempio contiene in germe tutti gli elementi che verranno sviluppati sotto i titoli "Conservazione" e "Trasferimenti".

Spesso sono proprio gli allievi a chiederlo. D'altra parte, se preferiamo essere più seri, possiamo anche scrivere

$$[p] = \text{u.S.I.}$$

Sigla che significa "unità del Sistema Internazionale"; questa è la procedura consueta già da decenni tra i Fisici, quindi possiamo ben sentirvi legittimati. Ad esempio nel vecchio sistema c.g.s. elettrostatico la carica elettrica ha un'unità di misura imbarazzante,  $[q] = \text{g}^{1/2}\text{cm}^{3/2}\text{s}^{-1}$  e così spesso si scriveva

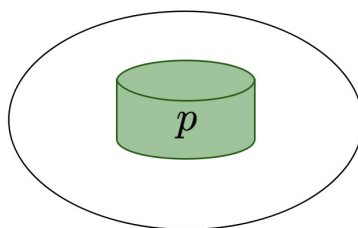


Figura 47: Un corpo in movimento possiede quantità di moto: possiamo raffigurarci il “possesso” con l’immagine del vaso contenente quantità di moto.

$[q] = \text{u.c.g.s.e.s.}$  .

E cosa dire del povero allievo che viene educato a suon di Huygens per poi entrare nel mondo dei grandi, dove gli Huygens non esistono? Semplice: sviluppi l’agilità mentale o cambi indirizzo di studio. Comunque, basterebbe far loro presente che è una convenzione interna, che verrà abbandonata nel giro di poco tempo; e ricordiamo che l’unità di misura della quantità di moto nel Sistema Internazionale esiste, solo che non ha un nome. Tutto qui.

Ora affrontiamo più da vicino la questione dei trasferimenti, il che ci condurrà all’idea di corrente di quantità di moto.

**TESTO**

Per variare lo stato di moto di un corpo non c’è altro da fare che agire su di esso. Vi è mai capitato di osservare un qualche oggetto prendere il volo senza che niente lo colpisse, o che una mano lo scagliasse, o che una corrente d’aria lo trascinasse con se?

Dobbiamo lavorare per stabilire questa idea:

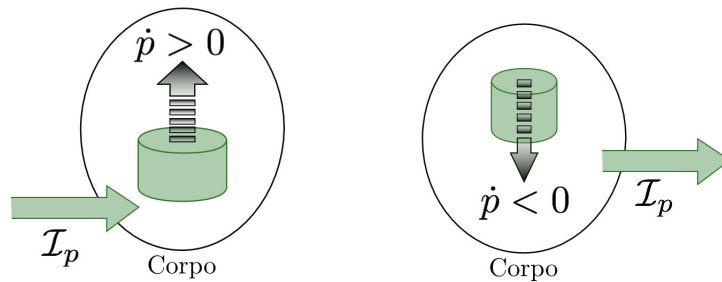
Se la quantità di moto di un corpo sta aumentando o diminuendo, vuole dire che la quantità in più o in meno viene trasferita da o verso l’ambiente.

Questa idea è illustrata nella figura 48. La freccia verde rappresenta proprio il trasferimento di quantità di moto; notiamo che questo trasferimento può richiedere un tempo più o meno lungo.

Rivolgeremo così la nostra attenzione alla rapidità dei trasferimenti.

**TESTO**

Ad esempio, una persona molto forte potrà bloccare un oggetto massiccio e compatto che procede velocemente verso di lui afferrandolo con la mano e ferman-



(a) Una corrente di quantità di moto entra nel sistema e  $p$  aumenta.

(b) Una corrente di quantità di moto esce dal sistema e  $p$  diminuisce.

Figura 48: Un sistema può scambiare quantità di moto con l'ambiente. Il trasferimento può essere più o meno veloce:  $\mathcal{I}_p$  è la corrente di quantità di moto.

dolo in un tempo molto breve, diciamo in  $1/100$  di secondo, mentre una più debole potrà ugualmente fermare lo stesso oggetto con un gesto più ampio e lento, della durata, diciamo, di  $30/100$  di secondo: la quantità di moto sottratta nei due casi è la stessa, ma il trasferimento è molto più rapido nel primo caso che nel secondo. Per completare l'esempio numerico, poniamo che prima di bloccare l'oggetto  $p$  sia pari a  $75 \text{ Hy}$ : la prima persona sottrae questa quantità alla rapidità media  $75 \text{ Hy}/0.01 \text{ s} = 7500 \frac{\text{Hy}}{\text{s}}$  e la seconda alla rapidità media  $75 \text{ Hy}/0.3 \text{ s} = 250 \frac{\text{Hy}}{\text{s}}$ .

Con la freccia verde vogliamo proprio rappresentare il tasso istantaneo di trasferimento, e non la sua entità complessiva in un arco di tempo determinato: questo significa che con essa rappresentiamo la **corrente di quantità di moto** (unità ufficiosa:  $\frac{\text{Hy}}{\text{s}}$ ).

Ho deciso questa regola di rappresentazione: l'intensità della corrente è rappresentata dallo spessore della freccia: in altri termini, più rapido sarà il trasferimento e più spessa sarà la freccia; naturalmente il valore di questa rappresentazione è soprattutto qualitativo.

La freccia tratteggiata, invece, rappresenta il tasso istantaneo di variazione della quantità di moto,  $\dot{p}$ : se la corrente entra nel corpo  $\dot{p} > 0$  (figura 48a) mentre quando esce  $\dot{p} < 0$  (figura 48b).

#### TESTO

Si stabilisce così questa idea molto forte della necessità di un trasferimento. Se un corpo è isolato, la sua quantità di moto non può che rimanere costante: se è fermo rimane fermo, se si muove continuerà a farlo nello stesso modo. Se invece

il suo stato di moto cambia, dobbiamo guardarci intorno e scoprire il meccanismo del trasferimento.

Faremo notare che  $\dot{p}$  ha la stessa unità di misura di  $\mathcal{I}_p$ : la prima grandezza misura quanto rapidamente cambia la quantità di moto di un corpo, mentre la seconda misura quanto rapidamente essa viene trasferita da o verso l'ambiente.

Ho scelto la convenzione in cui la corrente è una quantità senza segno, e quindi scrivo

$$\dot{p} = +\mathcal{I}_p$$

se la corrente entra nel corpo e

$$\dot{p} = -\mathcal{I}_p$$

quando la corrente esce dal corpo. Le ultime due equazioni contengono già il principio di conservazione della quantità di moto.

## 7.2 Conservazione della quantità di moto

Penso che sia possibile capire fino in fondo un principio di conservazione solo se lo riferiamo quanto meno al caso di un sistema isolato composto di due sistemi in interazione. In questo caso - il più semplice possibile tra quelli fisicamente significativi - ogni corrente di quantità di moto esprime un'interazione, e quindi ha un punto di partenza e un punto di arrivo.

### TESTO

Abbiamo già osservato che un corpo isolato non può che mantenere il proprio stato di moto, ossia, detto in termini più tecnici, la sua quantità di moto rimane costante: questo è già un caso particolare del principio di conservazione che  $p$  deve rispettare. Quando un corpo viene sollecitato da più parti dobbiamo tracciare una corrente per ciascuna di queste azioni: se un'azione porta ad un aumento di quantità di moto dobbiamo disegnare una corrente che entra, mentre nel caso l'azione faccia diminuire  $p$  dobbiamo disegnare una corrente che esce.

Se saliamo di un gradino la strada della complessità, il prossimo caso che dobbiamo prendere in considerazione è quello di un sistema isolato formato da due corpi: in altre parole abbiamo due corpi che interagiscono tra loro, mentre nessuno dei due interagisce con il resto dell'Universo.

#### 1. *Repulsione*

Quando i due corpi sono collegati da una molla compressa (figura 49a)

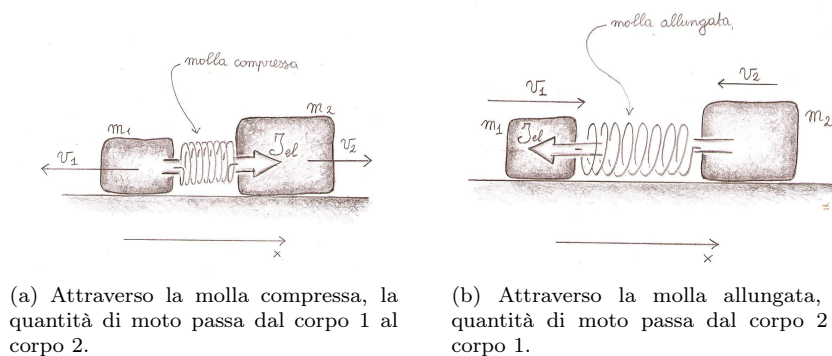


Figura 49: La molla è un buon esempio di azione trasmessa attraverso il contatto tra i due corpi.

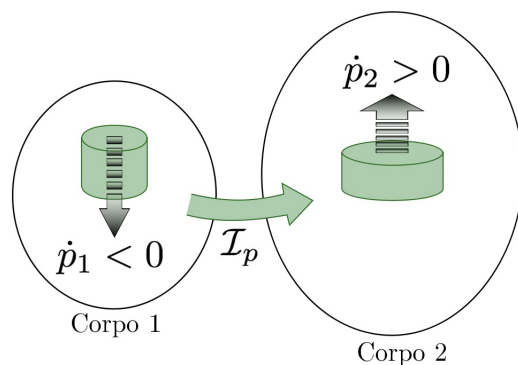


Figura 50: Una corrente di quantità di moto fluisce dal corpo 1 al corpo 2: i due corpi si respingono (l'asse  $x$  è orientato come di consueto da sinistra verso destra).

il corpo sinistra cede quantità di moto al corpo a destra, come è rappresentato in figura 50, la quantità di moto del primo diminuisce ( $\dot{p}_1 < 0$ ), mentre la quantità di moto del secondo aumenta ( $\dot{p}_2 > 0$ ). Questo significa che il corpo a sinistra rallenta, quello a destra accelera e pertanto i due si allontanano l'uno dall'altro: in altri termini, si respingono, ovvero l'interazione tra i due è repulsiva. Tra le grandezze fisiche  $\dot{p}_1$ ,  $\dot{p}_2$  e  $\mathcal{I}_p$  sussistono le relazioni

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= -\mathcal{I}_p \\ \dot{p}_2 &= +\mathcal{I}_p\end{aligned}$$

nelle quali i segni a destra devono essere scelti tenendo conto del fatto che la corrente  $\mathcal{I}_p$  esce dal corpo 1 ed entra nel corpo 2.

## 2. Attrazione

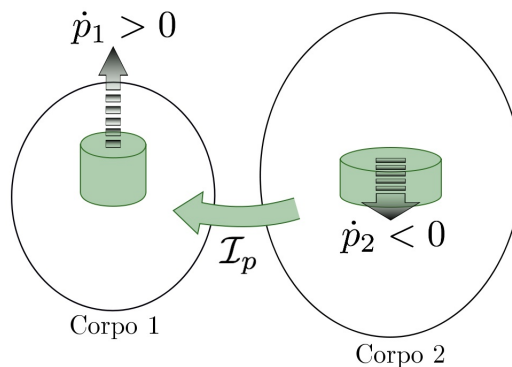


Figura 51: Una corrente di quantità di moto fluisce dal corpo 2 al corpo 1: i due corpi si attraggono (l'asse  $x$  è orientato come di consueto da sinistra verso destra).

Ora immaginiamo che i due corpi siano collegati da una molla allungata (figura 49b). In questo caso la molla accelera il corpo di sinistra ( $\dot{p}_1 > 0$ ) e rallenta il corpo di destra ( $\dot{p}_2 < 0$ ), ossia i due corpi, grazie alla molla, si attraggono, ovvero l'interazione tra i due è di tipo attrattivo. Nel caso dell'attrazione la quantità di moto passa dal corpo di destra al corpo di sinistra, come in figura 51. Tra le grandezze fisiche  $\dot{p}_1$ ,  $\dot{p}_2$  e  $\mathcal{I}_p$  sussistono le relazioni

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= +\mathcal{I}_p \\ \dot{p}_2 &= -\mathcal{I}_p\end{aligned}$$

nelle quali i segni a destra devono essere scelti tenendo conto del fatto che la corrente  $\mathcal{I}_p$  esce dal corpo 2 ed entra nel corpo 1.

In entrambi i casi descritti le due grandezze  $\dot{p}_1$  e  $\dot{p}_2$  hanno, istante per istante, valori opposti, ossia

$$\dot{p}_1(t) = -\dot{p}_2(t) \quad (78)$$

Dato che le rapidità di variazione delle due quantità di moto sono di uguale entità e segno opposto, la quantità di moto totale del sistema

$$p_{tot} = p_1 + p_2 \quad (79)$$

rimane costante nel tempo.



**TESTO**

Per capire meglio, elaboriamo un esempio nel contesto dell'economia spicciola. Se una persona cede ogni mese 2500 CHF ad una seconda persona, e nessuno dei due spende o guadagna (sistema isolato) il capitale della prima diminuisce costantemente e il capitale della seconda aumenta con la stessa rapidità, ma il capitale totale delle due persone rimane costante nel tempo. In questa analogia  $2500 \frac{\text{CHF}}{\text{mese}}$  corrisponde alla corrente di quantità di moto e i capitali corrispondono alla quantità di moto accumulata in ciascun corpo.

Si può notare che ho usato le molle per esemplificare il concetto di interazione, senza avere la necessità di introdurre la legge di Hooke. I primi esercizi su questo argomento hanno l'obiettivo di allenare l'equazione di bilancio - in particolare a proposito dei segni (che sono definiti rispetto a un sistema di riferimento prefissato).

**7.3 Spinta e inerzia**

Stabilita ed esercitata l'equazione di continuità, dobbiamo usarla per elaborare il concetto di inerzia.

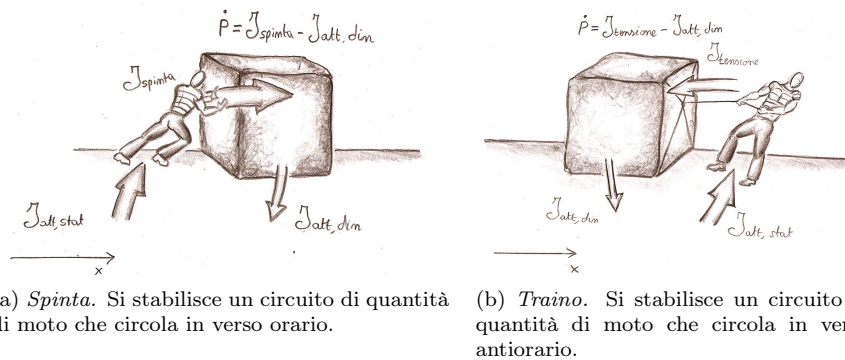


Figura 52: La velocità di variazione della quantità di moto del blocco risulta dal bilancio tra la corrente in entrata e quella in uscita. Quando  $I_{ingresso} - I_{attrito} = 0$  la quantità di moto rimane costante nel tempo. Non c'è modo di distinguere, scrivendo la sola equazione di continuità, in quale dei due casi ci troviamo. Osservate che cambiando verso all'asse  $x$  i circuiti di quantità di moto cambiano verso di circolazione, perché ciascuna corrente cambia verso di percorrenza. Tutte le frecce rappresentano la rapidità - e non l'entità - dei trasferimenti - di quantità di moto orizzontale.

Per realizzare questo obiettivo, introduco l'esempio chiave, il baricentro della strada verso la fondazione dei principi della dinamica.

Normalmente in un corso di fisica affrontiamo una situazione descritta in questi termini: “Un corpo appoggia su un piano orizzontale e subisce l’azione di una forza orizzontale costante”. L’obbiettivo è quello di arrivare alla relazione  $\vec{F} = m\vec{a}$ .

Qui però ci scontriamo con un ostacolo cognitivo: il buon senso ci dice che per mantenere un corpo in movimento a velocità costante occorre una forza costante; naturalmente il problema è la presenza dell’attrito: dobbiamo distinguere accuratamente tra  $\vec{F}_{piano \rightarrow blocco}^{att}$ ,  $\vec{F}_{uomo \rightarrow blocco}$  e  $\vec{F}_{tot}$ .

Non dovremmo mai dire “Forza uguale massa per accelerazione” bensì “Forza totale uguale massa per accelerazione” e sottolineare che “La forza totale è uguale alla somma di tutte le forze che agiscono su un oggetto”. Par poco, ma se siamo accurati, al limite della pignoleria, abbiamo qualche possibilità di superare l’ostacolo, l’apparente contraddizione tra il secondo principio della dinamica e il buon senso.

Il linguaggio delle correnti e degli accumuli di quantità di moto offre un ottimo punto di partenza per impostare il problema, fin dall’inizio, nel modo giusto: poiché si parla di trasferimenti è naturale chiamare subito in causa sia il punto di partenza sia il punto di arrivo delle correnti. Ecco perché parto dalle situazioni illustrate in figura 52.

#### TESTO

È il momento di introdurre un esempio che lungo la strada che stiamo percorrendo acquisterà un’importanza sempre più grande. Non aspettatevi però grandi cose, perché qui cominciamo ad occuparci di una delle più umili attività che un essere umano possa intraprendere.

Immaginate un uomo che spinge un blocco su un piano orizzontale. Quest’uomo potrebbe essere uno schiavo dell’antico Egitto, che spinge davanti a se un blocco di pietra, oppure un cercatore d’oro in Alaska, che spinge una slitta carica di viveri e attrezzi per scavare e settacciare; o ancora Z la Formica che spinge una briciola di pane. Inoltre i ragionamenti e le conclusioni alle quali perverremo non cambiano in modo significativo se, anziché essere sospinto, il carico viene trainato.

All’inizio il blocco è immobile sul piano, e pertanto la sua quantità di moto è uguale a zero. Se non facciamo niente, rimarrà immobile per sempre (in accordo al principio di conservazione della quantità di moto).

Tra il blocco e il piano si stabilisce, durante il movimento, una corrente di attrito dinamico di intensità costante.

Non è necessario introdurre nel discorso l’accelerazione: vale la pena di dedicare almeno una lezione per analizzare questo problema riferendoci solo a  $\dot{p}$ .

Suddividiamo l’azione che segue l’inizio della spinta in quattro fasi.

1. Prima fase: spinta costante superiore alla corrente di attrito vedi figura 53a.
2. Nella seconda fase: spinta uguale alla corrente di attrito (vedi figura 53b).
3. Terza fase: spinta inferiore alla corrente di attrito (vedi figura 53c).
4. Quarta fase: non c'è più spinta (vedi figura 53d).

*Cosa succederebbe al corpo dopo essere stato messo in movimento, ossia dopo il primo tratto inclinato del grafico in figura , se l'attrito non ci fosse?*

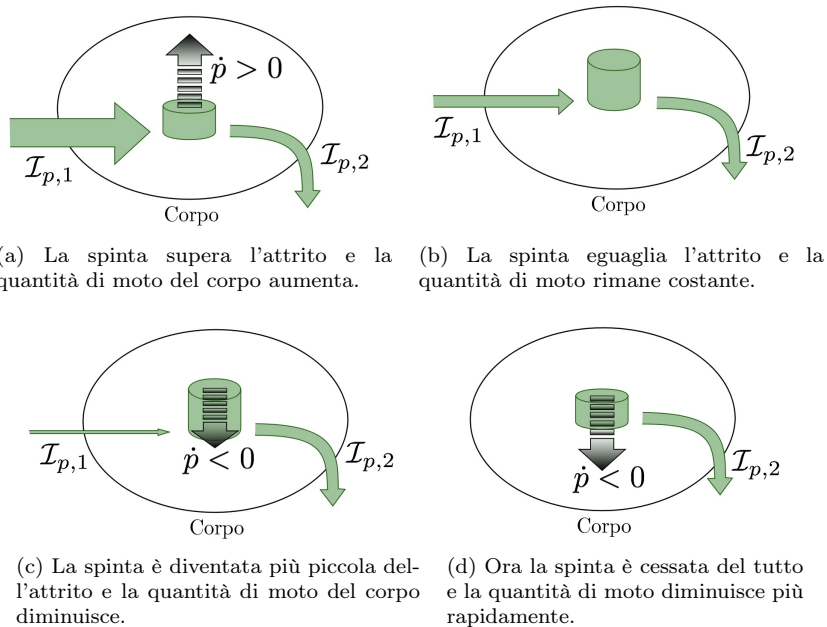


Figura 53: Spinta e inerzia: diagrammi

Come un po' tutti i docenti di Fisica hanno sperimentato sulla propria pelle, la seconda legge di Newton, "Forza = massa  $\times$  accelerazione", è spesso fraintesa perché comunemente attribuiamo al termine "forza" il significato di "forza esercitata dall'individuo", anziché il corretto significato di "forza totale = somma di tutte le azioni". In altri termini, non includendo l'attrito nel computo di  $\vec{F}$  un allievo è indotto a ritenere - a ragione, secondo la sua interpretazione del termine "forza"! - che occorra una forza costante per mantenere il corpo a velocità costante. Con questa lezione mi propongo appunto di affrontare questo nodo concettuale.

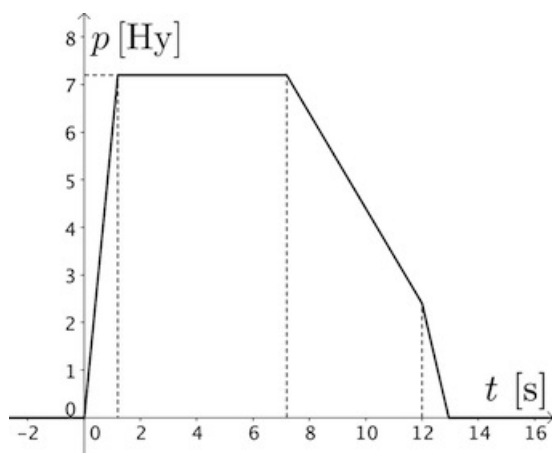


Figura 54: Spinta e inerzia: grafico

## 7.4 Definizione operativa

I prossimi obiettivi sono, in ordine di apparizione:

1. Introdurre una procedura che ci permetta di misurare la quantità di moto di un corpo.
2. Definire l'unità di misura della quantità di moto, e stabilire la sue relazione con le altre unità di misura del S.I.
3. Stabilire la relazione tra la quantità di moto e l'altra grandezza fisica che misura il movimento di un corpo, la velocità.

Il punto più urgente è proprio il primo, perché in assenza di questa procedura non siamo legittimati a considerare la quantità di moto una grandezza fisica.

### TESTO

Un corpo procede in linea retta; se vogliamo fermarlo dobbiamo vincere la sua inerzia con una azione di un qualche genere; in alternativa, possiamo dire che il corpo in movimento contiene una grandezza fisica chiamata quantità di moto e che per fermarlo dobbiamo sottrargliela tutta.

Lasciamo briglia sciolta all'immaginazione e decidiamo di fermare il corpo sparandogli contro una raffica di proiettili tutti uguali e con la stessa velocità (figura 55); intuitivamente vediamo che ciascuno dei proiettili deve avere la stessa quantità di moto; se indichiamo con  $p_u$  la quantità di moto di un proiettile, con  $p$  la quantità di moto del corpo e con  $N$  il numero di proiettili sparati per fermare il corpo, riconosciamo, esaminando la figura 55, che

1.  $p > 0$ , poiché il corpo procede nel verso positivo dell'asse  $x$ ;

2.  $p_u < 0$ , poiché i proiettili procedono nel verso negativo dell'asse  $x$ ;

Ogni volta che un proiettile penetra nel corpo porta con se la quantità di moto negativa  $p_u$ , e la quantità di moto del sistema corpo + proiettili diminuisce; quando tutti i proiettili sono stati sparati il corpo è fermo (assieme ai proiettili che vi sono penetrati) e la quantità di moto totale del sistema è 0:

$$p + N \cdot p_u = 0$$

Questa esperienza (ripetuta più e più volte durante l'epoca del Far West) può essere utilizzata per misurare la quantità di moto di un corpo; dobbiamo scegliere una volta per tutte quale cannoncino "sparapiselli" utilizzare e quali proiettili, e a questo punto possiamo decidere anche che ciascun proiettile ha quantità di moto unitaria.

Per determinare la relazione tra  $p$  e  $v$  lanciamo di volta in volta lo stesso corpo a velocità differenti e misuriamo la sua quantità di moto contando il numero di proiettili necessario per fermare il corpo; il risultato ovviamente è la

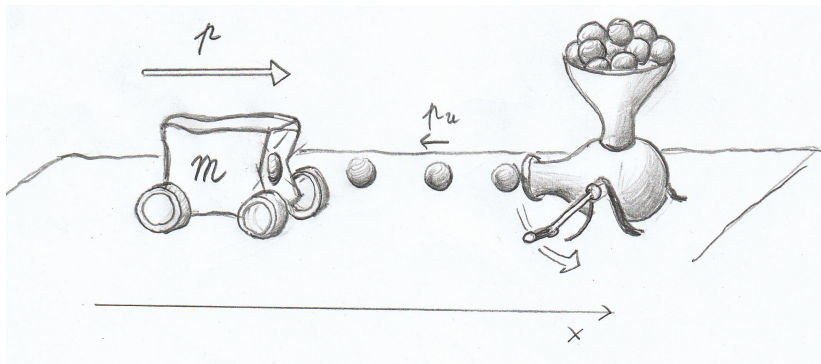


Figura 55: Il cannoncino sparapiselli. Fino ad oggi (due volte in tutto) ho descritto questa esperienza a parole e l'ho realizzata solo in minima parte, limitandomi ad una sola collisione anelastica. Ho scoperto in seguito che questo strumento è già stato realizzato da Hermann (vedi ())

relazione costitutiva

$$\frac{\Delta p}{\Delta v} = m \quad (80)$$

che può anche essere scritta così:

$$p = mv \quad (81)$$

Per spiegare il contenuto di queste due equazioni dovremo illustrarle anzitutto con il grafico di figura 56; a questo punto la rappresentazione "idraulica" della

quantità di moto si arricchisce di un elemento: la massa coincide con la capacità del vaso, e il livello è la velocità (vedi figura 57a).

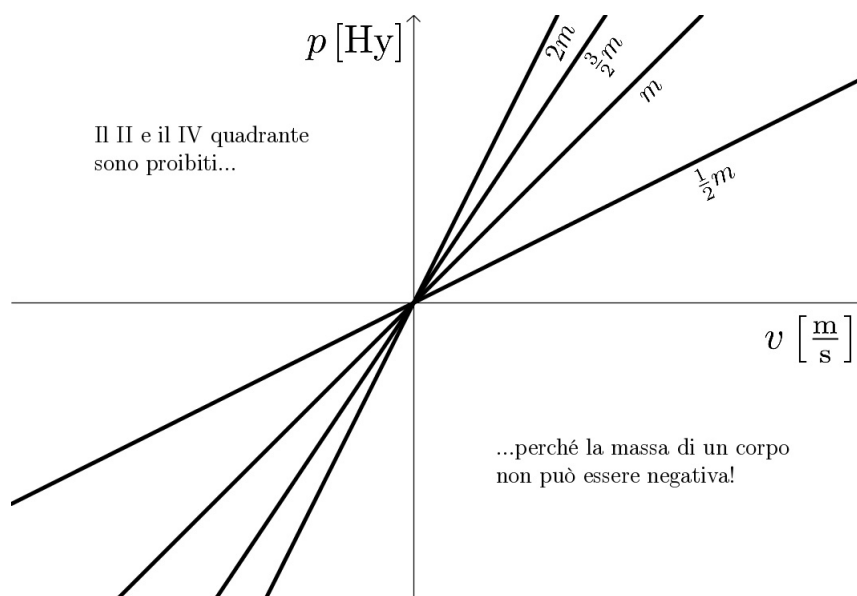


Figura 56: *Relazione costitutiva*. La pendenza delle rette è la massa inerziale del corpo: visto che la massa può solo essere positiva, le rette costitutive attraversano tutte il I e il III quadrante.

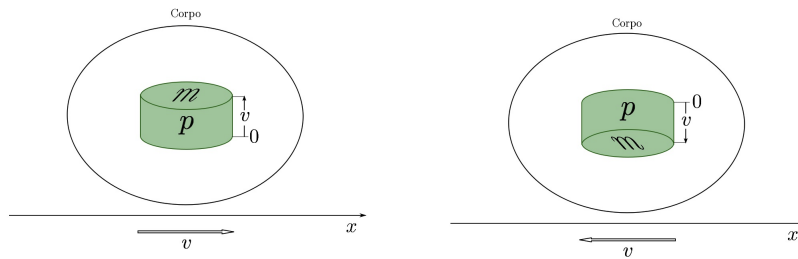
È opportuno far notare che la velocità può essere negativa e che il suo segno è relativo al sistema di riferimento: pertanto anche il vaso della quantità di moto ha un carattere *relativo* che lo rende diverso da un vaso idraulico, difatti:

1. il livello zero ( $v = 0$ ) coincide con il caso in cui il corpo è fermo rispetto al sistema di riferimento;
2. il livello può essere sia positivo, sia negativo (figura 57b): dipende dal fatto che il movimento del corpo può svilupparsi nello stesso verso dell'asse di riferimento o nel verso opposto.

La quantità di moto, pertanto, è proporzionale alla velocità e il coefficiente di proporzionalità, la pendenza del grafico, coincide con la massa del corpo. Possiamo almeno far notare che il vero significato fisico di  $m$  è proprio questo, e così potremo stabilire che  $m$  è la misura dell'inerzia di un corpo.

## 7.5 Collisioni ed esplosioni

Ho già detto che collisioni ed esplosioni sono il modo più semplice di esemplificare l'analogia idraulica, e ora che abbiamo sviluppato la relazione costitutiva



(a) *Quantità di moto: analogia.* La massa del corpo può essere interpretata come la capacità di un vaso cilindrico di altezza  $v$ ; il contenuto del vaso è il prodotto della capacità e dell'altezza:  $p = mv$ .

(b) Dato che la velocità può essere negativa rispetto all'orientamento prefissato, anche la quantità di moto può essere negativa. Se insistiamo sull'analogia con l'idraulica, dobbiamo far notare che un liquido reale non potrebbe avere un volume negativo!

Figura 57: La relazione costitutiva rappresentata dal punto di vista dell'analogia idraulica.

$p = mv$  possiamo prendere in considerazione degli esempi quantitativi. Dunque, perché no?

#### TESTO

Questi fenomeni hanno una natura violenta che ci consente di ignorare completamente i dettagli dell'interazione; non sarà necessario studiare le correnti che fluiscono da un corpo all'altro, ci concentreremo sul legame che esiste tra il passato e il futuro dell'interazione violenta che coinvolge i due corpi, il prima e il dopo.

Da questo punto di vista collisioni ed esplosioni sono la quintessenza dei principi di conservazione.

Sento spesso dire che non ha senso affrontare l'argomento fino a quando non abbiamo sviluppato il concetto di energia - e in particolare di energia cinetica.

Non sono d'accordo.

La definizione stessa dei fenomeni ci fornisce un valido punto di partenza:

#### 1. *Esplosioni.*

Un corpo si divide in due frammenti:  $v_{1,in} = v_{2,in} = v_{c.m.}$ .

#### 2. *Collisioni anelastiche.*

Due corpi si uniscono e formano un corpo unico:  $v_{1,fin} = v_{2,fin} = v_{c.m.}$ .

#### 3. *Collisioni elastiche.*

Parto dall'esempio della collisione elastica di un corpo contro una parete, e poi di un corpo contro una parete in movimento, per stabilire la legge di riflessione:  $v_{rel,fin} = -v_{rel,in}$ .

Posso a questo punto anche riformulare le esplosioni e le collisioni anelastiche:

1. *Esplosioni.*

Un corpo si divide in due frammenti che si allontaneranno l'uno dall'altro:

$$v_{rel} = 0 \xrightarrow{\text{processo}} v_{rel} \neq 0.$$

2. *Collisioni anelastiche.*

Due corpi si uniscono e formano un corpo unico:  $v_{rel} \neq 0 \xrightarrow{\text{processo}} v_{rel} = 0$ .

Si potrebbe obiettare che la legge di riflessione discende dall'azione congiunta dei due principi di conservazione, e quindi deve essere dimostrata solo arrivati a quel punto. Io non mi formalizzerei: questa legge è sensata, può essere indotta dall'esperienza diretta e ha il pregio di portare alla luce il ruolo della velocità relativa.

**Velocità relativa**

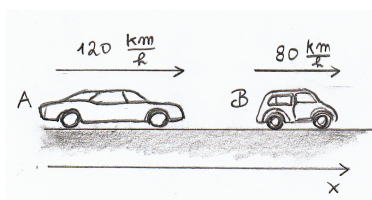
Per qualche motivo che in parte mi sfugge il concetto di velocità relativa è poco intuitivo.

Ecco perché dedico un tempo adeguato per introdurlo ed esercitarlo.

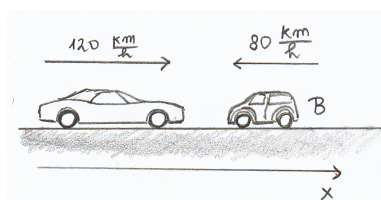
**TESTO**

Normalmente, in un discorso qualsiasi indichiamo le velocità dei corpi rispetto al suolo. Ad esempio, se qualcuno vi dice che è stato multato perché circolava in automobile alla velocità di  $168 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ , non è certo il caso di chiedergli "rispetto a cosa"! La scelta di misurare le velocità rispetto alla terra ferma è una convenzione largamente condivisa (tranne dai marinai) e, come ho già avuto modo di dire, trova la sua giustificazione nella necessità della sopravvivenza della specie. Noi ora ci poniamo di fronte a questa convenzione con spirito critico, e ci chiediamo come cambiano le cose se utilizziamo un osservatore diverso dal suolo.

La distinzione tra scontro frontale e tamponamento offre un buon punto di partenza (figura 58). Esso, tra l'altro, ha il merito di mostrare che il segno della velocità è fisicamente significativo.



(a) Le due macchine procedono nello stesso verso.



(b) Le due macchine procedono in verso opposto.

Figura 58: Urto tra due oggetti in movimento sulla stessa traiettoria rettilinea.



Emerge così senza alcuna difficoltà la relazione tra la velocità relativa e l'effetto finale dello scontro, tanto più violento quanto più essa è grande.

Il punto importante, qui, è far notare che la velocità relativa è la stessa per tutti gli osservatori.

Possiamo proporre questa esperienza concettuale: una palla da biliardo urta elasticamente una seconda palla, immobile; la scena viene osservata in due diversi sistemi di riferimento (vedi figura 59).

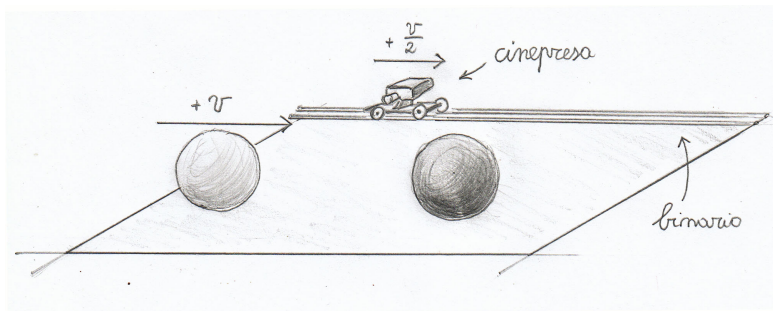


Figura 59: La boccia bianca colpisce una boccia immobile e la scena è ripresa da una cinepresa che si muove parallelamente alla boccia bianca a metà della sua velocità.

Nel riferimento solidale con il tavolo la velocità relativa coincide con la velocità della palla in movimento:

$$v_{rel} = +v - 0$$

mentre nel riferimento solidale con la cinepresa la velocità relativa si calcola così:

$$v_{rel} = +\frac{v}{2} - \left(-\frac{v}{2}\right)$$

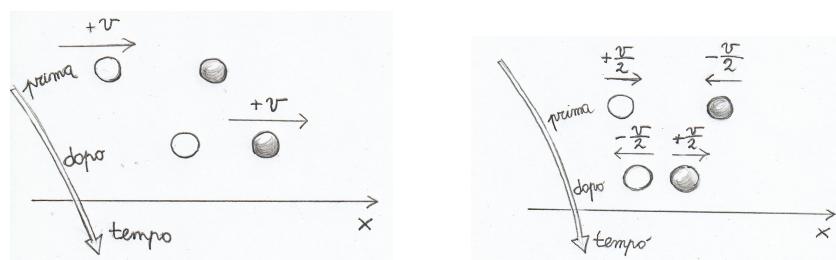
È significativo il fatto che allo stesso risultato si arrivi in modi così diversi (vedi figure 60a e 60b).

La conclusione che possiamo trarre è che non dovremmo parlare di velocità di un corpo, bensì di velocità del corpo rispetto alla Terra (nei casi più semplici) introducendo così l'idea che il sistema fisicamente significativo più semplice è composto da due corpi.

### Collisioni anelastiche ed esplosioni

Due corpi si scontrano e ne formano uno solo (vedi figura 61).

Cominciamo studiando un sistema isolato costituito da due corpi. La quantità di moto del sistema non cambia dopo l'urto; prima abbiamo due corpi, con



(a) Le velocità vengono misurate rispetto al tavolo da biliardo: in seguito all'urto la boccia bianca si ferma e la boccia, che prima era immobile, parte alla stessa velocità che aveva la bianca prima di colpirla.

(b) Se la scena viene ripresa dalla cinepresa, vediamo le due bocce avvicinarsi ad un centro comune con velocità opposte di pari intensità, urtarsi e in seguito allontanarsi ciascuna con la velocità che prima aveva l'altra.

Figura 60: *Palle da biliardo*. Quando due oggetti con la stessa massa si urtano elasticamente, le loro velocità si scambiano.

quantità di moto complessiva  $m_1v_{1,fin} + m_2v_{2,fin}$ , e dopo abbiamo un corpo unico, con quantità di moto  $(m_1 + m_2)v$ .

Nei primi esercizi mostreremo come si possa determinare la velocità del corpo che si forma, o una qualunque altra incognita, una volta noti i valori di tutte le altre grandezze coinvolti.

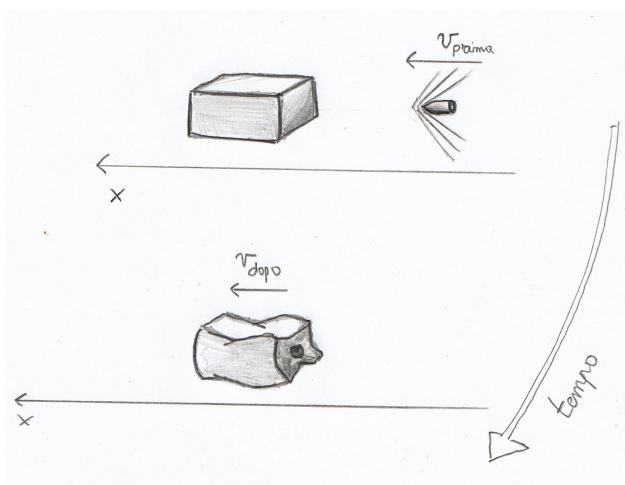


Figura 61: Urto anelastico: il proiettile rimane conficcato nel blocco e i due formano un corpo unico

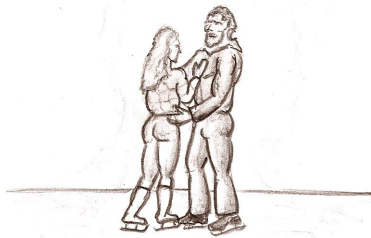
Se vogliamo introdurre l'idea di velocità del centro di massa, possiamo far notare che se ci allontaniamo molto dal sistema i due corpi si confondono in un solo; pertanto quel corpo che si formerà con l'urto, in un certo senso, esiste anche prima; e che la sua velocità è costante durante tutto il processo<sup>17</sup>

<sup>17</sup>In questa fase non voglio entrare nella definizione di centro di massa, così, evitando inutili

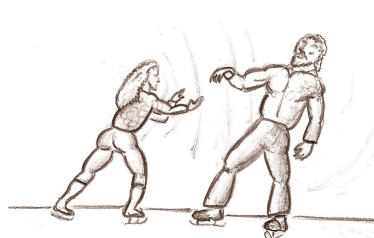
Invece di considerare le esplosioni come una semplice applicazione del principio di conservazione della quantità di moto, le tratto come una seconda occasione per evocare il concetto di quantità di moto.

Osservo che con la parola “esplosione” non voglio evocare necessariamente un ordigno distruttivo; di fatto, comincio la mia esposizione con l’esempio di figura 62. In questo problema assegniamo anzitutto le masse delle due persone, e sottolineiamo due aspetti:

- la dinamica del sistema non dipende da chi dei due prende l’iniziativa di allontanare l’altro (e qui è già contenuto, in embrione, il terzo principio);
- la successiva velocità di allontanamento dipende da quanto è “potente” la spinta iniziale.



(a) Magda ed Eric sono in piedi, immobili, sulla superficie liscia di un lago ghiacciato. Possiamo considerarli, in questo istante, come se fossero un corpo unico.



(b) Qualche cosa è successo: Magda dà un violento spintone ad Eric, che si sbilancia e comincia a scivolare indietro. Ma anche la ragazza viene proiettata in verso opposto e scivola sulla pista ghiacciata.

Figura 62: La massa del ragazzo è più grande della massa della ragazza, e l’effetto della spinta, pertanto, è maggiore su di lei.

Detto ciò, esiste una qualche conclusione generale alla quale si possa pervenire indipendentemente dal dettaglio del fenomeno?

Interrogati in proposito, diversi allievi riescono in genere a formula l’ipotesi di proporzionalità inversa tra velocità e masse:

$$\frac{v_{1,fin}}{v_{2,fin}} = -\frac{m_2}{m_1}$$

il che conduce ancora al principio di conservazione della quantità di moto.

Se vogliamo invece partire dal principio di conservazione, dobbiamo invocare un secondo parametro, accanto alla quantità di moto totale del sistema: la velocità relativa dei due frammenti.

Il modo migliore di fare questo è, a mio avviso, quello di considerare le esplosioni come “collisioni anelastiche al contrario”. Dopo avere risolto un problema orpelli, parlo di “velocità del corpo in blocco”.

di collisione, possiamo presentare la soluzione temporalmente speculare,

$$prima \longleftrightarrow \quad \text{dopo}(t \leftrightarrow -t)$$

$$u_{1,fin} = -v_{1,in}$$

$$u_{2,fin} = -v_{2,in}$$

(indico con “ $u$ ” le velocità della soluzione speculare) e mostrare che corrisponde all’esplosione di un “corpo in volo”

#### TESTO

Immaginiamo di filmare un urto completamente anelastico e di proiettare il film al contrario, ossia di far scorrere le immagini dall’ultima alla prima. In questo caso osserveremmo un corpo, un blocco unico, che ad un certo punto comincia a dividersi (in modo repentino e senza ragione apparente) in due frammenti che si allontanano sempre di più l’uno dall’altro, ciò che potremmo chiamare esplosione spontanea. Ora il punto è che a nessuno di noi è mai capitato di osservare qualcosa del genere, perché il fenomeno che ho descritto non può avere luogo nell’universo fisico che conosciamo! Il processo *spontaneo* di suddivisione in frammenti è impossibile; affinché un’esplosione abbia luogo è necessario che un certo quantitativo di energia venga trasferito al blocco, esattamente la stessa energia che era apparentemente scomparsa nell’urto elastico, quando in seguito alla collisione la differenza di velocità tra le due parti si è annullata. L’energia necessaria per realizzare un’esplosione deve essere messa a disposizione da un altro sistema, ad esempio da una carica esplosiva collocata all’interno del corpo.

Questa è anche l’occasione per parlare di **spontaneità** di un processo; procediamo con ordine.

Risolto un problema di collisione o di esplosione, possiamo calcolare la variazione di quantità di moto di ciascun corpo

$$\Delta p_1 = p_{1,fin} - p_{1,in}$$

$$\Delta p_2 = p_{2,fin} - p_{2,in}$$

e mostrare che è e deve essere  $\Delta p_1 = -\Delta p_2$ : possiamo così parlare di quantità di moto trasferita dal corpo 1 al corpo 2, e introducendo anche la durata del processo possiamo calcolare la corrente media di quantità di moto e richiamare le due equazioni di continuità

$$\frac{\Delta p_1}{\Delta t} = -\mathcal{I}_{media}$$

$$\frac{\Delta p_2}{\Delta t} = +\mathcal{I}_{media}$$

Non è difficile mostrare che nelle collisioni la corrente procede dal corpo a velocità maggiore a quello a velocità minore, mentre nelle esplosioni procede in verso opposto: le prime sono spontanee, le seconde no.

### Collisioni elastiche

Per la soluzione di un problema di collisione elastica dobbiamo far agire congiuntamente il principio di conservazione della quantità di moto e la legge di riflessione.

Se la classe ha una preparazione adeguata in algebra e non ci sono difficoltà nella soluzione dei sistemi di equazioni, possiamo anche osare qualcosa di più, provando ad utilizzare l'idea di simmetria temporale in coppie di problemi per lo scopo (le velocità iniziali del secondo problema sono opposte alle velocità finali del primo).

#### ESEMPIO

Per vedere come lavorano congiuntamente le due leggi, affrontiamo un esempio di collisione elastica.

1. Due corpi di massa  $m_1 = 3.0 \text{ kg}$  e  $m_2 = 5.0 \text{ kg}$  procedono l'uno verso l'altro ( $v_{1,in} = +6.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  e  $v_{2,in} = -2.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ) su un binario orizzontale e liscio. Si urtano elasticamente.

*Problema.* Determina le velocità finali dei due corpi.

[...]

2. Due corpi di massa  $m_1 = 3.0 \text{ kg}$  e  $m_2 = 5.0 \text{ kg}$  procedono l'uno verso l'altro ( $v_{1,in} = +4.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  e  $v_{2,in} = -4.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ) su un binario orizzontale e liscio. Si urtano elasticamente.

*Problema.* Dimostra nel modo più semplice possibile che

$$\begin{cases} v_{1,fin} &= -6.0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ v_{2,fin} &= +2.0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

*Soluzione.* Se filmiamo la collisione dell'esempio precedente e proiettiamo il film al contrario, vediamo i due corpi procedere l'uno incontro all'altro proprio alle velocità  $v_{1,in} = +4.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  e  $v_{2,in} = -4.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , urtarsi elasticamente e quindi allontanarsi con velocità  $v_{1,in} = -6.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  e  $v_{2,in} = +2.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Che

questa sia effettivamente la soluzione del problema lo vediamo dal fatto che se cambiamo i segni di tutte le velocità il principio di conservazione della quantità di moto e la legge di riflessione continuano ad essere rispettate. Provate in ogni caso a risolvere questo problema impostando il sistema di equazioni corrispondente.

A proposito degli urti elastici cerco di mostrare che nella prima fase della collisione la quantità di moto passa dal corpo a velocità maggiore a quello a velocità minore (ad esempio da 1 a 2); nella seconda fase la quantità di moto continua a scorrere nello stesso senso, ma i due corpi si sono scambiati il ruolo, e ora passa dal corpo a velocità minore all'altro.

Ciò è possibile solo se interponiamo tra i due corpi un terzo sistema fisico, ad esempio una molla (interfaccia elastica): a questo punto possiamo osservare che nella prima fase la velocità relativa diminuisce ma, contemporaneamente, aumenta la tensione della molla; e nella seconda fase la tensione della molla diminuisce, e parallelamente l'intensità della velocità relativa torna al valore originale.

## 7.6 Correnti e forze

Ho notato che molti allievi disegnano le frecce delle forze con la punta rivolta verso il punto di applicazione; ho ritenuto che fosse un errore fino a quando non mi è venuto in mente che le loro frecce, forse, rappresentavano qualcosa di diverso da ciò che intendevo io. Partendo da questa constatazione ho concluso che il concetto di corrente di quantità di moto è il giusto punto di partenza per un corso introduttivo di dinamica.

Certo che l'idea di corrente in dinamica sembra, a prima vista, molto eccentrica.

Provate a sostituire alla frase "corrente di quantità di moto" la parola "spinta".

Ciascuno di noi attribuisce alla parola in questione il corretto significato: una persona spinge un oggetto per metterlo in movimento. È naturale, inoltre, rappresentare questa spinta con una freccia che va dalla persona all'oggetto.

Con la parola "spinta" abbiamo però perso parte del significato originale.

D'altra parte possiamo invocare l'associazione tra la parola "spinta" e l'espressione "trasmissione del movimento"; una persona trasmette movimento all'oggetto: e da dove proviene questa "quantità di movimento"? Dall'unico deposito disponibile negli immediati dintorni dell'oggetto, il corpo stesso della persona.

Così il movimento viene trasmesso dalla persona all'oggetto e tutto ciò avviene in accordo al principio di conservazione.<sup>18</sup>

Ora pensiamo al significato della parola "forza". Una persona forte è in grado di trasmettere una certa quantità di movimento in un tempo molto breve, o a parità di intervallo temporale una quantità di movimento molto grande.

Così le frecce assumono un significato più preciso: non quanto movimento viene trasmesso, ma quanto rapidamente avviene questa trasmissione.

Ora sostituite alla parola "trasmissione" la parola "corrente" e all'espressione "quantità di movimento" l'espressione "quantità di moto": penso, a questo punto, di avere ampiamente giustificato il contenuto intuitivo delle correnti di quantità di moto; queste grandezze fisiche hanno la loro prima valida base proprio nell'esperienza quotidiana di ciascuno di noi.

Ma è possibile misurarle?

Senz'altro: basta interporre tra due corpi interagenti una molla: tanto più rapidamente avviene la trasmissione della quantità di moto, tanto più si comprimerà o si allungherà la molla.

È il momento di riaffermare un fatto fondamentale: un dinamometro non misura "la forza" - nel senso della Fisica, bensì la corrente di quantità di moto che fluisce da un corpo ad un altro.

Possiamo introdurre la nozione di forza - nel senso della Fisica - partendo dalle correnti di quantità di moto.

Due corpi interagiscono: avviene una sola cosa, la trasmissione, più o meno veloce, di quantità di moto; ciascuno dei due corpi subisce gli effetti di questo trasferimento dal proprio punto di vista: uno dei due cede - effetto negativo - e l'altro acquista - effetto positivo.

Da questo punto di vista declassiamo le forze al ruolo di contabilizzare gli effetti, su ciascun corpo, delle correnti di quantità di moto.

<sup>18</sup>In realtà qui è necessario fare una puntualizzazione.

Il corpo della persona ha un ruolo duplice: è sia un deposito di quantità di moto, sia la "pompa" che permette di caricare la quantità di moto dal suolo fino all'oggetto messo in movimento.

Possiamo separare i due ruoli procedendo per tappe successive. In un primo esperimento la persona che spinge il corpo è in piedi su uno skateboard: per ogni unità di quantità di moto trasferita, l'oggetto ne acquista una e procede nel verso della spinta, mentre la persona ne perde una e procede nel verso opposto; già in questo caso è evidente che la persona ha un ruolo attivo in quanto pompa, ma si può decidere di discutere la questione in un secondo tempo.

In un secondo esperimento la persona poggia i piedi a terra e il deposito dal quale la quantità di moto viene prelevata è il suolo: così la persona trasmette movimento senza accumularlo e possiamo porre l'accento sul suo ruolo di "pompa".

Anche l'apparato locomotore accumula quantità di moto, ma questo è un punto significativo solo se il sistema sta accelerando; in ogni caso non è opportuno affrontare la questione a causa di evidenti difficoltà tecniche - come già osservato, la persona non è un corpo rigido.

**TESTO**

Ancora una volta, possiamo appoggiarci ad un esempio economico per formarci un'immagine significativa dell'interazione tra due corpi.

Poniamo il caso che due persone, A e B, costituiscano un *sistema economico*: con questa espressione - che ho inventato di sana pianta - intendo che essi interagiscono attraverso uno scambio di denaro.

Ammettiamo che esista un accordo tra i due, per il quale ogni mese vengano trasferiti 2500 CHF dal conto di A al conto di B. Nella propria contabilità, A segna questo trasferimento con il numero -2500 CHF, mentre B registra lo stesso trasferimento con il numero +2500 CHF. Vi è un solo trasferimento, ma una doppia registrazione.

Allo stesso modo, in una interazione tra due corpi vi è una sola corrente di quantità di moto, che esce da un corpo ed entra nell'altro: ma ciascun corpo subisce gli effetti di questo trasferimento, il primo con una forza negativa ed il secondo con una forza positiva di pari intensità.

Senza la pretesa di essere rigorosi - in questa fase non è necessario, anzi: rallenterebbe il processo di apprendimento - possiamo stabilire la relazione tra il newton e le altre unità di misura del S.I.:

$$1 \text{ N} = 1 \frac{\text{Hy}}{\text{s}} = 1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Per chiarire il punto, è opportuno esercitarsi sulle rappresentazioni grafiche: un ovale con un vaso simboleggia il corpo che accumula quantità di moto, una freccia rappresenta la corrente che entra nel o esce dal corpo: lo spessore di questa freccia è proporzionale alla rapidità del trasferimento.

Notiamo che la direzione delle correnti dipende dal verso dell'asse di riferimento, poiché se cambiamo verso la quantità di moto cambia di segno.

Così la prima cosa da fare in queste rappresentazioni è decidere il verso positivo.

Per disegnare le forze, orientiamo i vettori nel verso positivo se la corrente entra, e nel verso negativo se la corrente esce (figure 63a, 63b, 63c e 63d).

Con questa definizione operativa si conferma il fatto che la direzione dei vettori non dipende dal sistema di riferimento.

Che cosa scegliere, allora, per il corso di meccanica: forze o correnti?

Il primato delle correnti è definitivo nella fase introduttiva, e quando vogliamo introdurre il discorso sull'energia: notate difatti che per ogni interazione abbiamo una corrente, anziché due forze.

Il primato delle forze è definitivo, invece, nella soluzione dei problemi pratici proposti nei corsi di Fisica al Liceo: difatti le forze sono grandezze vettoria-



li, relativamente facili da trattare, mentre le correnti sono legate a grandezze tensoriali di rango 2 (il tensore degli sforzi).

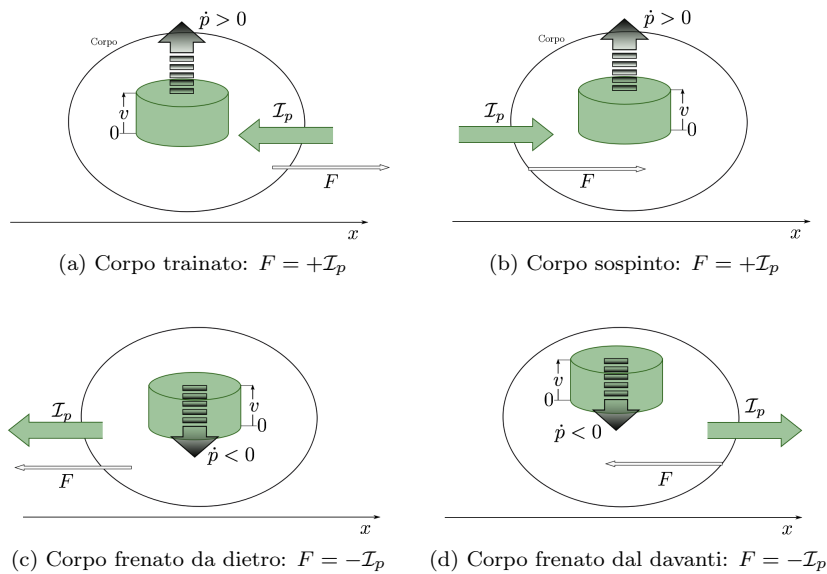


Figura 63: Per rendere esplicita la relazione tra le correnti e le forze corrispondenti dobbiamo prima scegliere il sistema di riferimento.

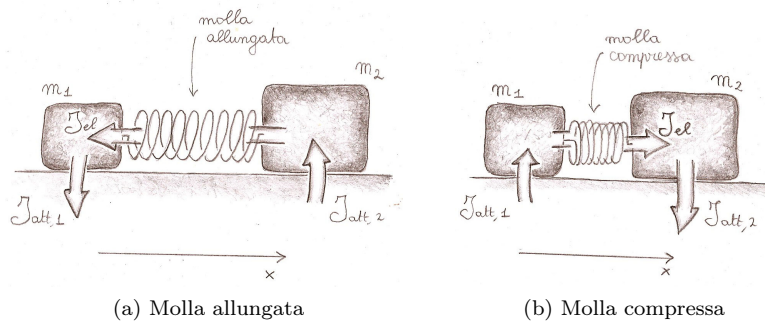


Figura 64: Nelle situazioni raffigurate si suppone che l'attrito sia tale da mantenere fermi gli oggetti: si stabiliscono così circuiti di quantità di moto, il cui verso dipende dal fatto che la molla sia compressa o allungata (e anche dall'orientamento dell'asse  $x$ ).

Poiché il passaggio dalle correnti alle forze è una fase relativamente delicata, ho pensato di presentare agli allievi alcune situazioni chiave nelle quali propongo di

1. Scegliere l'orientamento dell'asse  $x$ .
2. Tracciare tutte le correnti.

3. Tracciare, per ciascuna corrente, la coppia di forze associate.

Tra le situazioni che propongo abitualmente, in figura 64 potete vedere quella che ritengo più significativa.

Arrivati a questo punto abbiamo stabilito la maggior parte degli elementi della dinamica. La coppia di forze associata a ciascuna corrente di interazione non è altro che la coppia azione-reazione di cui parla il III principio.

In questo approccio, pertanto, il principio di azione e reazione discende in modo del tutto naturale dall'equazione di continuità, e questo è un grande vantaggio.

Manca ancora una tappa, e di questo mi occupo nel prossimo paragrafo.

## 8 I principi della dinamica

E come quei che con lena affannata  
uscito fuor dal pelago alla riva  
si volge all'acqua, perigliosa e guata  
cos'ì l'animo mio, che ancor fuggiva  
si volse a retro a rimirar lo passo  
che non lasciò già mai anima viva

*Dante Alighieri, Inferno (I, 22-27)*

Formulare esplicitamente i tre principi di Newton ed esprimerli nel linguaggio convenzionale è importante ed inevitabile. Come ho già sottolineato, la soluzione dei problemi pratici deve passare dalle forze, poiché la matematica delle correnti - che sono associate a tensori di rango 2 - è troppo difficile; inoltre dobbiamo mantenere il contatto con i contenuti dei principali libri di testo, e già questo è di per sé un motivo sufficiente.

I problemi più semplici, d'altronde, possono essere affrontati e risolti utilizzando le correnti - in particolar modo quando la dinamica si sviluppa in una sola dimensione. Dopo aver individuato tutte le correnti scriviamo l'equazione di continuità per ciascun corpo e determiniamo il valore di  $\dot{p}_x$ : noti i valori iniziali della quantità di moto sarà così possibile determinare  $p_{x,\text{fin}}$  e quindi anche  $v_{x,\text{fin}}$  anche se non abbiamo ancora introdotto le accelerazioni.

Voglio affrontare una questione che riguarda il terzo principio.

Dal punto di vista delle correnti, esso è una semplice conseguenza del fatto che una data corrente esce da un sistema ed entra in un altro: le due forze della coppia azione-reazione registrano gli effetti su ciascuno dei due corpi interagenti.

Nella notazione usuale, queste forze vengono scritte nella forma  $\vec{F}_{1\rightarrow 2}$  e  $\vec{F}_{2\rightarrow 1}$ , "1" e "2" essendo le etichette che distinguono i due corpi. Da questo punto di vista, se una fune (ad esempio) collega due corpi rigidi, le azioni esercitate dalla fune su ciascun corpo non vengono ritenute una coppia azione-reazione.

Ritengo che questo punto di vista sia sbagliato.

Esiste difatti un solo caso in cui un'interazione tra due corpi non sia mediata da un terzo sistema?

Poniamo il caso che due corpi rigidi siano in contatto, e che uno spinga l'altro. Dov'è il mediatore?

La risposta è questa: nessun corpo è assolutamente rigido, e dobbiamo come minimo ammettere la possibilità di una deformazione elastica.

Approfondirò la questione un altro giorno.

**Prerequisiti**

1. Comprendere il concetto di accumulo di quantità di moto.
2. Saper trattare semplici casi di collisioni ed esplosioni.
3. Saper tracciare le correnti di quantità di moto nel verso corretto, in particolare quando sono presenti molle, sostegni, attriti e campo di gravità.
4. Distinguere il ruolo della velocità relativa e della tensione delle molle nel sistema “due corpi + molla”.
5. Conoscere il concetto di accelerazione.

**Obbiettivi**

1. Introdurre ed esercitare la relazione  $\dot{p} = m\dot{v}$ .
2. Introdurre, in modo qualitativo, il concetto di osservatore inerziale.
3. Riformulare la dinamica basata sulla quantità di moto nel linguaggio del II e del III principio.
4. Stabilire le principali leggi delle forze.

## 8.1 Primo principio

Il primo principio viene spesso formulato così:

Un corpo non soggetto a forze si muove di moto rettilineo uniforme

In realtà questa è una semplice conseguenza del secondo principio, come non fatica a rendersene conto la maggior parte degli allievi (talvolta anche autonomamente).

In realtà il primo principio è il contenuto della Relatività Galileiana:

- bisogna in primo luogo dare la definizione operativa di osservatore inerziale;
- si stabilisce che le leggi della Fisica sono le stesse per tutti gli osservatori inerziali;
- si stabilisce sperimentalmente che esistono osservatori che possiedono un grado più o meno elevato di inerzialità.

Questo è il vero contenuto, ed è troppo complesso per essere trattato rigorosamente in prima e in seconda liceo. Per questo motivo mi limito a dedicare i momenti che ritengo più adatti a discussioni qualitative sulla questione.

### TESTO

Il corpo che domina le esperienze di tutta l'umanità è la Terra; la massa inerziale del nostro pianeta è impressionante :  $m_{Terra} \cong 5.96 \cdot 10^{24}$  kg. Possiamo raffigurarci il tutto come un vaso di capacità enorme, un oceano di quantità di moto; ecco, immaginate di essere sulle rive dell'Oceano Pacifico e di versare nelle sue acque l'intero contenuto di un grosso secchiello d'acqua: senz'altro il livello del Pacifico sale...! E senz'altro sale molto poco, non dobbiamo così preoccuparci di tragiche conseguenze: l'Adriatico non sommergerà Venezia.

[...]

Gli osservatori "migliori" hanno pertanto una grande massa inerziale, e le correnti di quantità di moto che in essi eventualmente fluiscono cambiano solo in minima parte il loro stato di moto. Nella misura in cui non sono influenzati da queste correnti, essi sono detti **inerziali**. Vi è pertanto una qualche nozione di "inerzialità", in base alla quale alcuni osservatori sono "più" inerziali di altri. La Luna, ad esempio, lo è meno della Terra, che a sua volta lo è meno del Sole, che a sua volta lo è meno della nostra Galassia, che...

[...]

Ora, immaginiamo che un corpo sia così lontano da tutti gli altri che possiamo senz'altro trascurare tutte le azioni che il resto dell'universo esercita su di lui.

Che cosa fa questo corpo?

La risposta potrebbe essere: niente, niente del tutto!

E questa risposta è giusta, ma in un senso decisamente diverso da ciò che normalmente si suppone.

Dunque, potremmo pensare, se non fa niente, significa che sta fermo del tutto. Questa, però, è una concezione ingenua (pensate alle parole di Sir Eddington): difatti dovremmo precisare anzitutto rispetto a quale osservatore inerziale riferiamo le misure.

Così, se in un dato riferimento inerziale il corpo è fermo, rispetto ad un altro, senz'altro, non lo è.

Non possiamo pertanto affermare che un corpo isolato sia senz'altro fermo: lo sarà per certi osservatori, ma non per altri.

Dobbiamo piuttosto ritenere che esso si comporti nel modo più semplice possibile: nessuna curva, nessuno scossone, nessun cambiamento dello stato di moto. Ma questo significa, in generale, che si muoverà seguendo la traiettoria più semplice, la retta, e che procederà a velocità costante.

## 8.2 Secondo principio

Il secondo principio è ciò che otteniamo quando sostituiamo la relazione costitutiva nell'equazione di continuità.

In altri termini dobbiamo aggiungere alla nozione generale di bilancio conservativo il concetto di inerzia.

Ciò significa introdurre nel discorso l'accelerazione dei corpi, cosa che fino a questo punto non ho fatto esplicitamente.

### TESTO

Se tutti i corpi fossero isolati e se ne andassero a spasso per l'universo procedendo imbelli lungo le loro traiettorie rettilinee - e per di più, il colmo della noia, a velocità costante - tutto sarebbe veramente desolante.

Noi però constatiamo che, tutt'attorno, le *cose accadono*: i corpi curvano, accelerano, rallentano, rimbalzano.

Ora, noi abbiamo convenuto di scegliere sempre, per le nostre misure, un osservatore inerziale: questo significa che qualsiasi deviazione dal moto rettilineo uniforme deve essere attribuita ad azioni esterne.

Dal momento che le forze sono vettori, dobbiamo introdurre la relazione costitutiva in tutte e tre le dimensioni e di qui potremo dedurre senza difficoltà

che

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} \quad (82)$$

Al bilancio delle correnti in ciascuna direzione affiancheremo il concetto di vettore forza totale. Ora siamo pronti per enunciare il principio nella forma data da Newton.

### SECONDO PRINCIPIO DELLA DINAMICA

Per cambiare lo stato di moto di un corpo è necessaria la forza  $m\vec{a}$ , ed essa coincide con la somma di tutte le forze che agiscono sul corpo:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{tot}$$

Questa è l'equazione centrale di tutta la dinamica.

Per approfondire il discorso sull'inerzia, ripercorro esempi come quello descritto nel paragrafo 7.3 con il nuovo linguaggio, esplicitando in ogni fase il calcolo delle accelerazioni.

### 8.3 Terzo principio

Non appena abbiamo tracciato le correnti di interazione e le abbiamo interpretate alla luce dell'equazione di continuità, abbiamo stabilito tutto il contenuto del terzo principio.

Esso emerge chiaramente quando consideriamo i sistemi costituiti da due corpi in interazione.

#### TESTO

Un corpo solo nell'universo non combina un gran che, ormai è chiaro.

Le cose si fanno interessanti quando di corpi ce ne sono due, e i due interagiscono.

Questo significa che una corrente di quantità di moto scorre dall'uno all'altro; ne abbiamo parlato in diverse circostanze: l'effetto della corrente su ciascuno dei due può essere descritto come l'azione di una forza.

Ad ogni corrente, quindi, è associata una coppia di forze, che sono vettori con stessa direzione, uguale intensità e verso opposto.

Perché ad ogni azione corrisponde una reazione? La frase:

A agisce su B e di conseguenza B reagisce su A

mi è sempre sembrata un tantino oscura; il problema diventa drammatico non appena la si pronuncia in classe.

Cosa significa che B reagisce? Questa voce verbale sembra sottintendere un intento da parte di B, che a causa dell'azione di A reagisce opponendo una forza uguale (meglio: di pari intensità e direzione) e contraria. Così, qual è il risultato finale? Che A e B *stanno in equilibrio*. Naturalmente non è questa la giusta interpretazione del principio, ma mi sembra di dire che proprio le parole che abbiamo utilizzato hanno indotto all'errore.

Il punto più basso della discesa lungo questa china è probabilmente quando proviamo a proporre situazioni come quella del braccio di ferro o del tiro alla fune:

Vince il più forte, chi vince esercita la forza maggiore. Allora perché il terzo principio dice che azione e reazione hanno la stessa intensità?

Nell'ultima frase, l'aggettivo "forte" si riferisce ad una caratteristica diversa da quella misurata dalla forza che uno dei due corpi esercita sull'altro. La vittoria e la sconfitta sono determinate dalla presenza di un ambiente circostante, e dalla capacità di sfruttare l'ambiente in modo più o meno efficace.

Qual è il modo migliore di affrontare la questione?

Ho già mostrato che ad ogni corrente di interazione corrisponde una coppia di forze: se riusciamo a chiarire questo punto e a sfruttare adeguatamente l'equazione di continuità il terzo principio apparirà chiaro e il suo contenuto aderirà perfettamente all'intuizione basata sull'esperienza.

In aula rendo esplicita la corrispondenza correnti-coppie esercitando, in situazioni significative, la capacità di associare ad ogni corrente questa coppia (figure 65a e 65b).

Deve essere ribadito il concetto più e più volte:

*Ad ogni corrente di interazione corrisponde una coppia di forze che misurano gli effetti della corrente su ciascun corpo*

Anche qui collisioni ed esplosioni sono un ottimo modo per esemplificare la questione: basta introdurre la durata del processo per determinare le correnti medie e di conseguenza le coppie azione-reazione.

Il passo successivo è quello di interporre una molla tra i due corpi (il sistema mediatore).

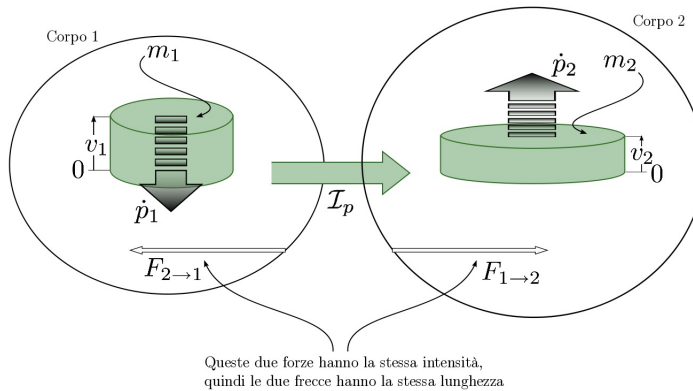


### TERZO PRINCIPIO DELLA DINAMICA

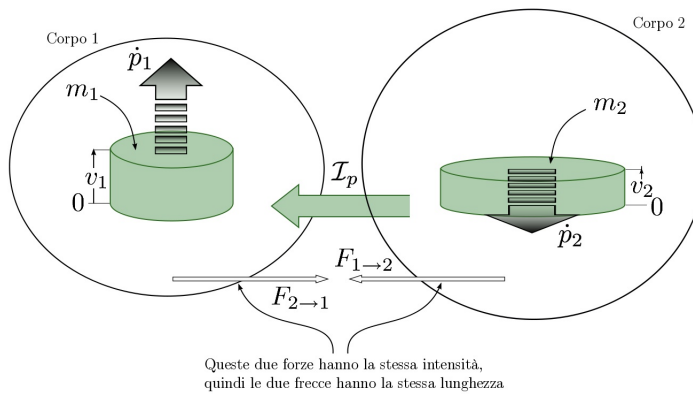
Ad ogni azione corrisponde una reazione: le due forze hanno sempre la stessa direzione, la stessa intensità e verso opposto:

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$$

Questo è anche conosciuto come il **principio di azione e reazione**.



(a) *Repulsione*. Possiamo concretizzare questa situazione interponendo tra i due corpi una molla o una barra rigida.



(b) *Attrazione*. Possiamo concretizzare questa situazione interponendo tra i due corpi una molla, una barra rigida o una fune in tensione.

Figura 65: Nelle due figure le correnti sono state tracciate rispetto ad un asse  $x$  orientato come di consueto da sinistra a destra. Possiamo anche proporre di tracciare gli stessi diagrammi con l'orientamento opposto.

Possiamo chiudere, per ora, il discorso sul terzo principio sviscerando il problema del tiro alla fune (figura 66).

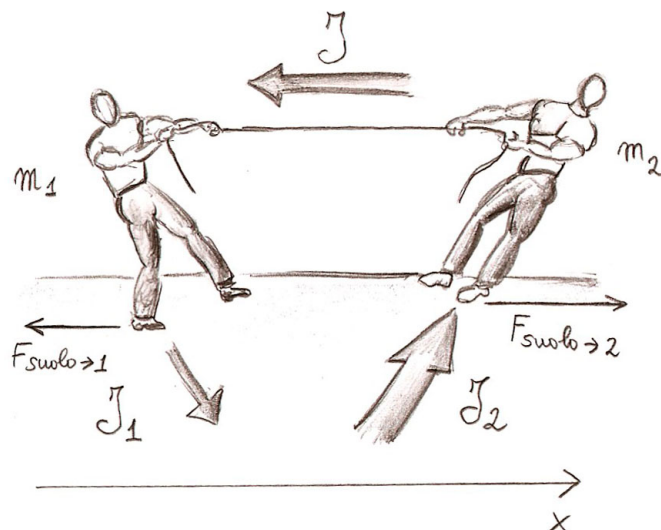


Figura 66: La persona più massiccia e forte, a destra in figura, riesce a “caricare” una maggior quantità di moto dal suolo.

Se vince la persona a destra, significa che il sistema costituito dalle due persone si muove verso destra, ossia nel verso positivo, come un corpo unico. Questo significa che il bilancio delle correnti scambiate tra il sistema e l’ambiente è positivo per il sistema. Come si realizza questa situazione?

La persona a destra cammina a ritroso, e sfruttando il proprio peso “carica” molto rapidamente la quantità di moto dall’ambiente, mentre la persona di sinistra striscia per terra, “scaricando” la quantità di moto più lentamente, in primo luogo a causa della propria massa inferiore.

## 8.4 Leggi delle forze

Ora dedichiamo almeno un piccolo spazio alla questione delle leggi delle forze. In prima liceo trattiamo soprattutto la forza di attrito, la forza di sostegno, la forza elastica e la forza di gravità.

Le leggi fenomenologiche che caratterizzano queste forze si lasciano esprimere nel modo più conveniente attraverso le correnti corrispondenti, evitando completamente alcuni imbarazzanti problemi di segno.

### Interazione tra corpo e sostegno

Tra un corpo qualsiasi e il suo sostegno scorrono due correnti:

- la prima, presente in ogni caso, è una corrente di **quantità di moto perpendicolare alla superficie di appoggio**, che garantisce il sostegno del corpo;
- la seconda, in pratica sempre presente, è una corrente di **quantità di moto parallela alla superficie di appoggio**, che è la misura dell'attrito presente tra le due superfici a contatto.

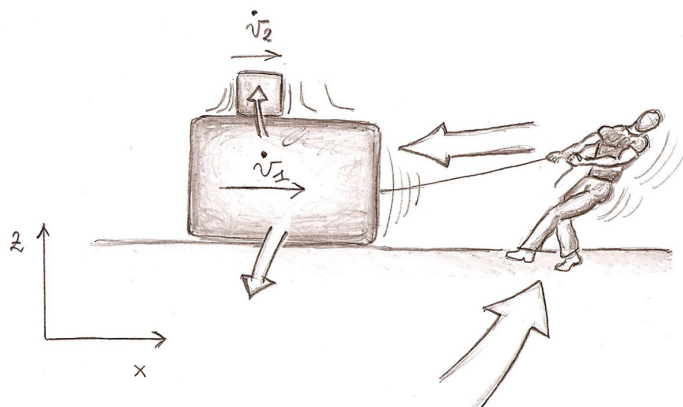


Figura 67: L'uomo mette la fune in tensione e comincia a trainare il blocco inferiore accelerandolo. La trazione è talmente potente che il blocco superiore comincia a slittare su quello inferiore, così che questi “rimane indietro” sempre più.

Se un corpo qualsiasi si muove relativamente al sostegno, tra le due correnti (che nella convenzione che ho scelto sono quantità senza segno) sussiste la relazione di proporzionalità

$$\mathcal{I}_{attrito} = \mu_D \mathcal{I}_{sostegno}$$

nella quale  $\mu_D$  è il coefficiente di attrito dinamico.

Quali sono le regole per stabilire in che verso scorrono queste correnti?

- La corrente di sostegno garantisce il bilancio della quantità di moto nella direzione perpendicolare alle due superfici a contatto;
- la corrente di attrito scorre dal corpo a velocità maggiore al corpo a velocità minore: questo significa che si oppone non al movimento assoluto del corpo, bensì al movimento relativo del corpo rispetto al sostegno (vedi figura 67).

**Interazione elastica**

Quando due corpi sono collegati da una molla in tensione, attraverso di essa scorre una corrente di quantità di moto che passa da un corpo all'altro. L'intensità della corrente elastica è data dalla relazione

$$\mathcal{I}_{p,molla} = k |\xi|$$

nella quale  $\xi$  misura la deformazione della molla ( $\xi > 0$  se la molla è allungata) e  $k$  è la costante elastica.

La regola per il verso della corrente è questa:

- disponiamo in ogni caso l'asse di riferimento lungo la molla e scegliamo il suo verso come meglio conviene nel problema considerato;
- quando la molla è compressa la corrente fluisce nel verso positivo dell'asse, altrimenti nel fluisce nel verso negativo.

Ho già mostrato questa regola nelle figure 49a e 49b. Osservo anche che la regola per il verso della corrente che scorre attraverso una fune tesa è la stessa del caso della molla allungata.

**Interazione tra corpo e Terra (gravità)**

Per rappresentare il campo di gravità pongo anzitutto

$$g_{Terra} = \|\vec{g}_{Terra}\|$$

ossia la grandezza  $g_{Terra}$  è il modulo del campo  $\vec{g}_{Terra}$ . A questo punto per scrivere il valore algebrico del campo è necessario “aggiungere il segno a mano” una volta orientato l'asse delle  $z$ : ciò potrebbe sembrare intricato dal punto di vista formale, ma è a mio avviso meno problematico da gestire con gli allievi.

Tra un corpo e la Terra (che è semplicemente un corpo di massa immensa) scorre la corrente di gravità data dalla legge

$$\mathcal{I}_{p,campo} = mg_{Terra}$$

Per decidere se questa corrente di quantità di moto entra nel o esce dal corpo, dobbiamo prima orientare l'asse  $z$ ; la regola per il verso è

- la corrente di quantità di moto fluisce dal corpo più in alto a quello più in basso, dove “alto” e “basso” si riferiscono all'orientamento fissato dall'asse di riferimento.

Per mostrare come funziona in pratica questa prescrizione possiamo studiare l'esempio della macchina di Atwood (figura 68).

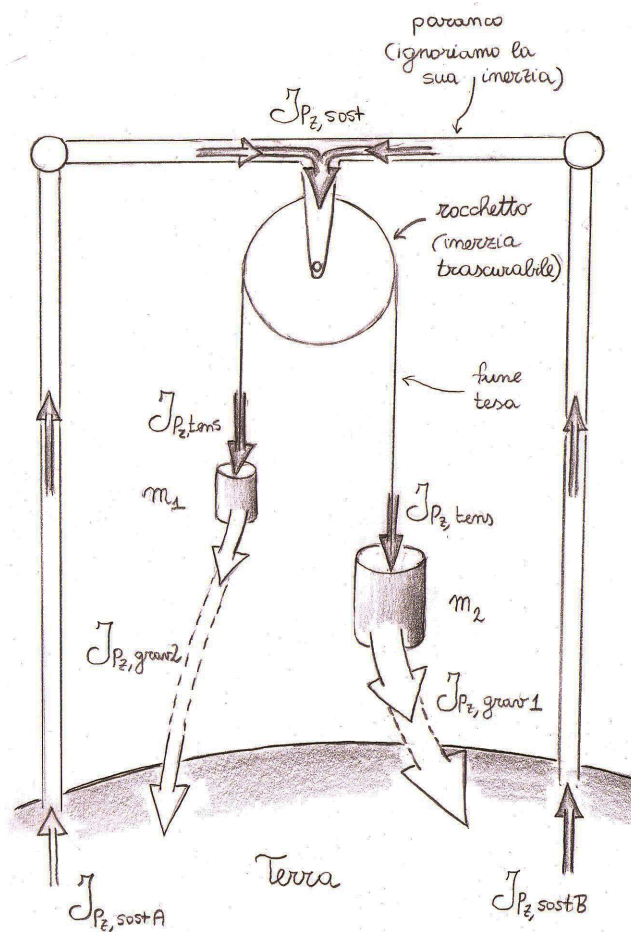


Figura 68: Quando scegliamo un'unico asse di riferimento verticale per il verso delle correnti lungo la fune tesa sembra ad un primo momento meno intuitivo. Il vantaggio però è evidente: possiamo seguire il flusso delle correnti da Terra attraverso il sostegno della macchina, dal sostegno ai corpi attraverso la fune tesa e dai corpi a Terra attraverso il campo di gravità.

## 9 Introduzione dell'energia

Sta scritto: «In principio era *la Parola*».  
 E eccomi già fermo. Chi mi aiuta a procedere?  
 M'è impossibile dare a «*Parola*»  
 tanto valore. Devo tradurre altrimenti,  
 se mi darà il giusto lume lo Spirito.  
 Sta scritto: «In principio era *il Pensiero*».  
 Medita bene il primo rigo,  
 chè non ti corra troppo la penna.  
 Quel che tutto crea e opera, è *il Pensiero*?  
 Dovrebbe essere: «In principio era *l'Energia*».  
 Pure, mentre trascrivo questa parola, qualcosa  
 già mi dice che non qui potrò fermarmi.  
 Mi dà aiuto lo Spirito! Ecco che vedo chiaro  
 e, ormai sicuro, scrivo: «In principio era *l'Azione*»!  
*Wolfgang Goethe, "Faust" (I, Studio)*

**I**L DISCORSO sull'energia comincia, al Liceo 1, alla fine della prima classe, o al più tardi all'inizio della seconda liceo, dopo un lavoro adeguato atto a consolidare la pratica sul secondo e sul terzo principio e sulla natura vettoriale delle forze.

Se ripercorriamo la storia del concetto di energia in Fisica, ci possiamo facilmente rendere conto che non esiste una definizione sintetica di questo termine.

Passiamo dalla sua definizione come quantità conservata nei processi non dissipativi nella dinamica Newtoniana, al suo legame con la simmetria di traslazione temporale nei principi variazionali, alla posizione stabilita dal Primo Principio della Termodinamica, agli autovalori dell'operatore Hamiltoniano in Meccanica Quantistica e ai valori medi della matrice densità in Fisica Statistica.

### TESTO

Che cos'è l'energia? Questa è una parola di cui spesso abusiamo, ma è comprensibile, poiché abbiamo la sensazione che l'energia sia il succo vitale di tutti i processi che si svolgono nell'Universo. Ora, se chiedete a un Fisico qual è il significato di questa parola, probabilmente volete una risposta breve e concisa, una definizione sintetica pronta per l'uso; volete una definizione del termine chiara ed essenziale.

Spiacente, devo deludervi: non esiste la definizione che state cercando, nessun fisico potrà consegnarvi la risposta che desiderate, non più di quanto possa porgervi un bicchiere colmo di un fluido luminoso e dirvi: "Ecco qua, un bel bicchierone di energia!".

È possibile, d'altra parte, circoscrivere il concetto "energia" attraverso l'elenco di alcune caratteristiche fondamentali; dobbiamo muoverci con calma, e puntualizzare uno ad uno i nodi della trama.

Ciò che possiamo fare è introdurre questa grandezza attraverso l'elenco delle sue proprietà - d'altra parte non esiste un energometro. L'approccio del corso di Karlsruhe offre un elenco esauriente, che ci permetterà di trasportare il concetto di energia a tutte le aree della Fisica Classica senza che esso debba essere ulteriormente affinato.

1. L'energia può essere accumulata nei sistemi fisici; indicheremo con  $\mathcal{E}_{sistema}$  l'entità dell'accumulo.
2. L'energia può fluire da un sistema fisico ad un altro; indicheremo con  $\mathcal{I}_{\mathcal{E}}$  l'intensità della corrente di energia, ovvero la rapidità del trasferimento.
3. Gli accumuli e i trasferimenti di energia sono sempre associati ad accumuli e trasferimenti di un'altra grandezza fisica, il **portatore**. L'obbiettivo è determinare la relazione generale tra la corrente di portatore e la corrente di energia associata.
4. L'energia può essere trasferita da un portatore ad un altro; la rapidità di questo trasferimento è la **potenza di processo**.
5. L'energia è una grandezza conservata.

Nella lezione introduttiva raccolgo tutti i contributi per portare alla luce la nozione di energia con la quale gli allievi entrano in aula; è una fase esplorativa nella quale il compito del docente è quello di organizzare tutte le idee. Fino ad oggi i cinque punti che ho elencato sono emersi in modo naturale dalla discussione, anche quello di portatore, una volta che ho chiarito che l'energia né si vede, né si sente, né si tocca né si misura, e quindi la sua esistenza può manifestarsi solo attraverso un'altra grandezza fisica misurabile.

**Prerequisiti**

1. Anzitutto, le basi della dinamica gettate durante il primo anno del corso.
2. In particolare: una buona competenza tecnica ed intuitiva sui problemi che coinvolgono le tre interazioni fondamentali: molla, gravità e attrito.

**Obbiettivi**

1. Comprendere il concetto di portatore.
2. Distinguere tra corrente di energia e potenza di processo.
3. Saper calcolare gli accumuli di energia nei corpi rigidi, nelle molle e nel campo di gravità.



## 9.1 Corrente di energia

L'accento deve essere posto fin dal primo momento sulla rapidità dei trasferimenti di energia da un sistema all'altro, e quindi sulle correnti di energia.

Come possiamo giustificare la relazione fondamentale di tutta la teoria,

$$\mathcal{I}_{\mathcal{E}} = v\mathcal{I}_p \quad (83)$$

senza invocarla a priori? Dobbiamo basarci sull'elenco delle proprietà, una constatazione sperimentale e un po' di buon senso.

L'esperienza chiave è la costruzione e l'utilizzo di un paranco.

Manovrando il paranco dobbiamo portare alla luce le due circostanze fondamentali:

1. la forza applicata dalla persona è una frazione del carico, determinata dal numero di giri che percorre la corda nel paranco;
2. la velocità di sollevamento del carico è inferiore alla velocità con cui la persona tira a sé la corda; e il rapporto tra le due velocità è l'inverso del rapporto delle due forze corrispondenti.

Indichiamo con  $Q$  il punto di applicazione della forza e con  $P$  il punto in cui è collegato il carico; le due osservazioni portano congiuntamente alla legge

$$\mathcal{I}_P v_P = \mathcal{I}_Q v_Q \quad (84)$$

che in effetti descrive il funzionamento di tutte le macchine di analoga concezione.

Per condurre la riflessione su questa esperienza, mi sbarazzo di quella che, in questa fase, è una complicazione non necessaria: il campo di gravità; per questo motivo disegno alla lavagna una macchina che agisce orizzontalmente (figura 69).

Ecco che, dopo avere risolto i problemi classici di dinamica (per intenderci, quelli di libri come "Invito alla Fisica" di Tipler, con piani inclinati, macchine di Atwood su piani inclinati e in generale tutti i problemi di dinamica piana) usando le forze, torno alle correnti di quantità di moto, perché questo mi sembra il linguaggio più adatto per parlare di energia.

Senza altro è necessario avere sviluppato una certa agilità mentale, per potere passare da un linguaggio all'altro, ma penso che sia proprio ciò che dobbiamo aspettarci da uno studente di liceo.

Nella descrizione del paranco, o della macchina orizzontale descritta in figura, il punto delicato è orientare le correnti sui tre rami della corda. Preferisco pro-



la Terra (figura 71). Questa volta, però, abbiamo interposto una macchina semplice per mostrare come si incarna il concetto di energia delineato dalle sue proprietà fondamentali.

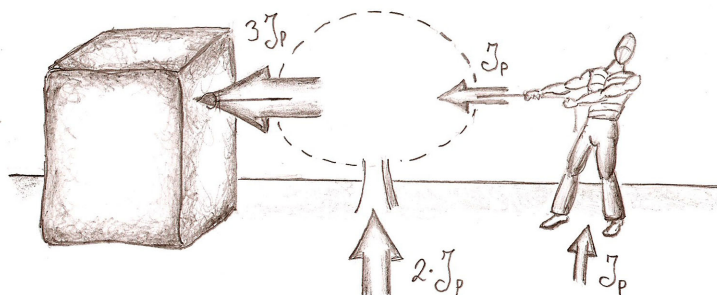


Figura 71: La quantità di moto passa dalla Terra alla cassa attraversando l'apparato locomotore e la macchina semplice; tuttavia l'energia necessaria per questa operazione può provenire solo dall'apparato locomotore.

#### TESTO

Oggi porteremo in scena una piccola rappresentazione.

Voi - noi, se mi includete - abbiamo elencato le proprietà che deve avere l'energia. Ora ci proponiamo di concretizzare queste idee.

Faremo finta di essere i pionieri in questo campo, o, se preferite, cercheremo di ripercorrere (a modo nostro) le tappe storiche.

Oggi abbiamo il compito di indicare a tutti come si deve calcolare la rapidità di trasferimento dell'energia attraverso la macchina semplice; quando avremo realizzato questo obiettivo, avremo fissato una volta per tutte l'entità dei trasferimenti in ogni situazione, e la loro unità di misura.

Di fronte alla macchina semplice, vi è un consenso generale a proposito di due punti:

- la macchina stessa non può fornire energia;
- né, d'altra parte, questa energia può provenire dal suolo;

Confesso di fare appello, in questa fase, al lato emotivo della questione: è pur l'uomo che sta faticando, e senza di lui niente si metterebbe in movimento.

Così l'energia deve attraversare la macchina senza perdite né guadagni, ossia

$$\mathcal{I}_{\mathcal{E},P} = \mathcal{I}_{\mathcal{E},Q} \quad (85)$$



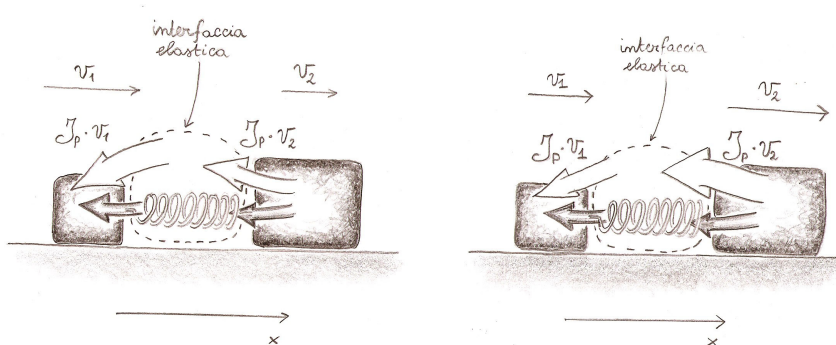
## 9.2 Potenza meccanica

Così come la velocità dipende dall'osservatore, mentre la velocità relativa è una grandezza assoluta, così anche la corrente di energia è una grandezza relativa all'osservatore.

E allora qual è la grandezza fisica che affianca la corrente di energia, e che ha un valore assoluto?

Questo non è senz'altro un problema da poco: difatti, se il concetto di energia ha senso anche in rapporto al comune buon senso, esso non deve dipendere dall'osservatore. Più concretamente: se per compiere un certo percorso un'automobile consuma 12L di carburante, ciò deve coinvolgere un determinato quantitativo di energia (e un corrispondente costo in denaro), che non può dipendere da chi osserva il movimento; un osservatore solidale con l'automobile constata il consumo di 12L e, usando le formule corrette, deve calcolare una quantità di energia coinvolta nel processo pari a quella calcolata dall'osservatore solidale con il suolo.

Il punto essenziale, qui, è rispondere alla domanda: qual è il processo fisicamente significativo? Non certo il trasferimento di energia da un luogo all'altro - ad esempio dal motore alla macchina, bensì la trasduzione di energia dal portatore chimico al portatore meccanico, e ciò che dobbiamo fare è mostrare come si calcola la rapidità del processo. Il risultato è una relazione indipendente dall'osservatore.



(a) La corrente di quantità di moto esce dal corpo a destra ed entra nel corpo a sinistra. Dato che il corpo a sinistra è più veloce la molla si sta accorciando, e libera energia che viene caricata sulla corrente di quantità di moto al tasso temporale  $(v_1 - v_2) \mathcal{I}_p$

(b) La corrente di quantità di moto esce dal corpo a destra ed entra nel corpo a sinistra. Dato che il corpo a sinistra è più lento la molla si sta allungando, e accumula energia che viene scaricata dalla corrente di quantità di moto al tasso temporale  $(v_2 - v_1) \mathcal{I}_p$

Figura 73: La potenza meccanica è proporzionale alla velocità relativa dei due corpi (si suppone in entrambi i casi che gli attriti siano completamente trascurabili).

Facciamo il punto partendo dal sistema prototipo (vedi figura 73). Il sistema (isolato) è composto da due corpi rigidi e da una molla di collegamento, e la sua dinamica si sviluppa in una dimensione.

Sappiamo che la dinamica dell'oscillatore si può scomporre in due parti: il movimento costante del centro di massa e l'oscillazione armonica relativa al centro di massa; non è male fare qualche riferimento qualitativo a questa situazione, ma ora ci occupiamo principalmente delle questioni energetiche, e quindi non siamo interessati al dettaglio del movimento.

In entrambe le situazioni illustrate la molla è allungata (si possono ripercorrere gli stessi ragionamenti, o meglio ancora proporli per esercizio, nel caso della molla compressa).

La corrente di quantità di moto abbandona il corpo a destra a velocità  $v_2$ , trasportando la corrente di energia  $\mathcal{I}_{\mathcal{E},2} = v_2 \mathcal{I}_p$ , ed entra nel corpo a sinistra a velocità  $v_1$ , trasportando la corrente di energia  $\mathcal{I}_{\mathcal{E},1} = v_1 \mathcal{I}_p$ .

Dobbiamo invocare esplicitamente l'equazione di continuità per ciascuno dei due corpi e scrivere

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{E}}_1 &= +v_1 \mathcal{I}_p \\ \dot{\mathcal{E}}_2 &= -v_2 \mathcal{I}_p\end{aligned}$$

La rapidità di variazione dell'energia del sistema dei due corpi si può esprimere così:

$$\dot{\mathcal{E}}_{corpi} = (v_1 - v_2) \mathcal{I}_p$$

Si noti che non stiamo ancora includendo la molla nel discorso.

Queste relazioni devono essere esercitate tenendo d'occhio le due difficoltà principali: determinare, nei casi concreti, la corrente di quantità di moto; tenere adeguatamente conto dei segni delle velocità e del verso di scorrimento della corrente.

#### ESEMPIO

Poniamo il caso che la molla abbia costante elastica  $k = 300 \frac{\text{N}}{\text{m}}$  e che sia allungata di 2.5 cm. Il corpo a sinistra si muove alla velocità  $v_1 = -4.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  e  $v_2 = +2.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Determina la rapidità di variazione di energia del sistema dei due corpi, e la rapidità di variazione dell'energia accumulata dalla molla.

Qui ci stiamo occupando della primo esempio in cui il principio di conservazione dell'energia si dispiega nei suoi aspetti principali. L'energia entra nei - o esce dai - corpi trasportata dalla quantità di moto, e le velocità dei corpi hanno

il ruolo di livelli (ossia i potenziali), mentre la velocità relativa svolge il ruolo di dislivello (ossia differenza di potenziali ovvero tensione).

Il sistema costituito dai due corpi e dalla molla, d'altra parte, è isolato: questo significa che la sua energia deve rimanere costante nel tempo, ossia che  $\dot{\mathcal{E}}_{sistema} = 0$ . Possiamo così dedurre che

$$\dot{\mathcal{E}}_{molla} = -\dot{\mathcal{E}}_{corpi}$$

Così l'energia dei due corpi aumenta o diminuisce nel tempo a causa del trasferimento di energia da o verso la corrente di interazione; la rapidità di questo trasferimento, misurata in J/s (o W) è la **potenza meccanica**:

$$\dot{\mathcal{E}}_{corpi} = \mathcal{P}_{mecc} \quad (86)$$

$$\mathcal{P}_{mecc} \stackrel{def}{=} (v_1 - v_2) \mathcal{I}_p \quad (87)$$

L'equazione 86 esprime il principio di conservazione dell'energia per il sistema dei due corpi, ed è fisicamente significativa, poiché si riferisce ad un'interazione e quindi a qualcosa di assoluto, di indipendente dal sistema di riferimento; essa deve sostituire l'equazione di continuità per il singolo corpo rigido, che viceversa non ha un significato fisico ben definito, poiché sia la corrente di energia sia l'energia accumulata dipendono dall'osservatore.

#### ESEMPIO

Poniamo il caso che la molla abbia costante elastica  $k = 300 \frac{\text{N}}{\text{m}}$  e che sia compressa di 2.5 cm. Il corpo a sinistra si muove alla velocità  $v_1 = +4.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  e  $v_2 = -2.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  rispetto ad un osservatore solidale con il suolo. Determina la rapidità di variazione di energia del sistema dei due corpi, e la rapidità di variazione dell'energia accumulata dalla molla, rispetto a questi quattro osservatori:

1. Quello solidale con il suolo.
2. Quello solidale con il corpo a sinistra.
3. Quello solidale con il corpo a destra.
4. Quello solidale con il sistema dei due corpi in blocco.

Nei libri di testo si sorvola in genere sulla distinzione tra potenza e corrente di energia, e quest'ultima viene chiamata potenza. Nella maggior parte dei problemi proposti questa scelta non crea difficoltà, perché uno dei due corpi - che c'è sempre, anche se la sua esistenza è sottaciuta - è il suolo, e la sua velocità

è uguale a zero, così che la corrente di energia che entra nel o esce dal suolo è nulla.

L'equazione 87 esprime la potenza in termini del portatore meccanico e della tensione associata, la velocità relativa. Volendo essere esaustivi, il quadro è completo solo se introduciamo anche la corrispondente coppia tensione-portatore per la molla; non è difficile rendersi conto che in questo caso la corrente di portatore è misurata da  $\mathcal{I}_\xi = \dot{\xi}$  e che la tensione è  $\chi = k\xi$ ; non è il caso, a mio avviso, di insistere su questo punto, ma dobbiamo almeno tenerlo presente, soprattutto quando, come nel prossimo paragrafo, ricaveremo l'espressione per l'accumulo di energia nella molla.

### 9.3 Accumuli di energia

Solo ora è il momento di addentrarci nella questione degli accumuli di energia; ci occuperemo di tre differenti sistemi fisici:

1. Il sistema di **due corpi**, in cui uno dei due ha una massa inerziale enorme, ed acquista il ruolo di osservatore: in pratica, il pianeta Terra; la tensione che caratterizza questo sistema è la velocità relativa, che corrisponde nel limite indicato alla velocità del corpo misurata rispetto al suolo fisso.
2. La **molla interposta tra due corpi**; la tensione che caratterizza questo sistema è proporzionale all'allungamento della molla.
3. Il **campo di gravità tra il corpo e il pianeta Terra, nel limite di piccole quote** (più semplicemente: il campo di gravità terrestre vicino alla superficie); la tensione che caratterizza questo sistema è proporzionale alla quota.

Qui abbiamo due classi di sistemi: il primo, composto da due parti; gli altri due, che si interpongono nei sistemi come il primo; potremmo chiamare la molla e il campo di gravità **sistemi mediatori**: essi trasmettono invariata la quantità di moto, ma sono in grado di accumulare o liberare energia.

Non è necessario introdurre fin dall'inizio il portatore associato al campo né quello associato alla molla, è sufficiente far riferimento al concetto di sistema mediatore.

#### Sistema corpo + Terra

Per mostrare come si calcola l'energia associata al movimento di un corpo, facciamo riferimento alla situazione illustrata in figura 75.

Possiamo immaginare di mettere in movimento il corpo mediante la forza muscolare ed eventualmente con l'ausilio di una macchina semplice; supponiamo, per semplicità, che non vi sia attrito tra il corpo e il piano.



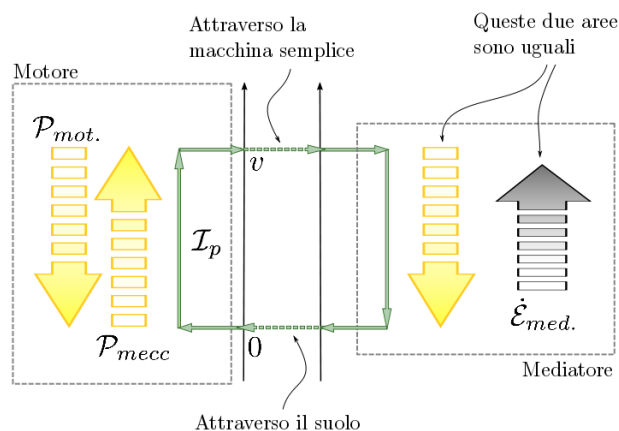


Figura 74: Questo è il diagramma di riferimento per l'introduzione degli accumuli di energia nel campo di gravità e nella molla.

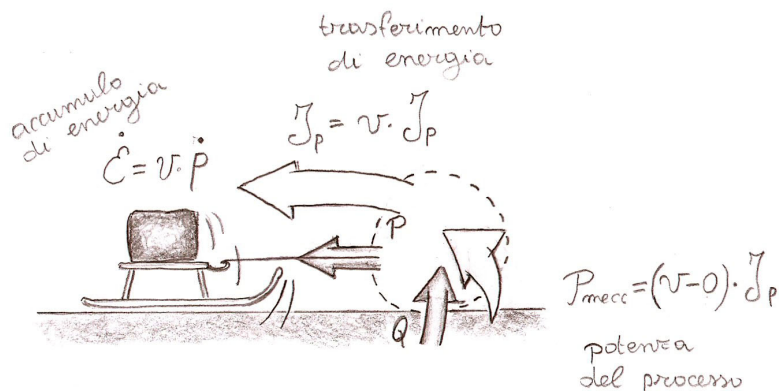


Figura 75: La quantità di moto viene caricata da Terra dal complesso motore+macchina (l'area con il perimetro tratteggiato). La quantità di moto si carica di energia e la trasporta fino alla slitta, che la accumula e la manifesta sotto forma di movimento.

Il motore, di qualunque natura esso sia, si interpone tra il corpo e il pianeta Terra e attraverso la sua azione stabilisce tra le due parti un moto relativo, misurato dalla velocità  $v$  del corpo rispetto alla Terra.

Per quanto abbiamo visto nel paragrafo precedente la potenza meccanica sviluppata dal motore è  $\mathcal{I}_p \cdot v$  e pertanto la rapidità di variazione dell'energia del sistema è data dall'equazione

$$\dot{\mathcal{E}}_{c.+T.} = \mathcal{I}_p \cdot v$$

Applichiamo il II principio della dinamica e scriviamo  $\dot{\mathcal{E}}_{c.+T.} = m\dot{v} \cdot v$  e anche

$$\dot{\mathcal{E}}_{c.+T.} = mv \cdot \dot{v}$$

Se moltiplichiamo entrambi i lati dell'equazione per la misura  $\Delta t$  di un piccolo intervallo di tempo otteniamo l'uguaglianza approssimata

$$\Delta\mathcal{E}_{c.+T.} \cong mv\Delta v$$

Per integrare l'ultima uguaglianza facciamo riferimento alla figura 76: il termine a destra dell'uguaglianza è il prodotto della base e dell'altezza del rettangolo; possiamo suddividere la base  $v_{fin} - v_{in}$  in un certo numero di rettangoli e così vediamo che la variazione totale di energia coincide pertanto, in prima approssimazione, con la somma delle aree di tutti questi rettangoli.

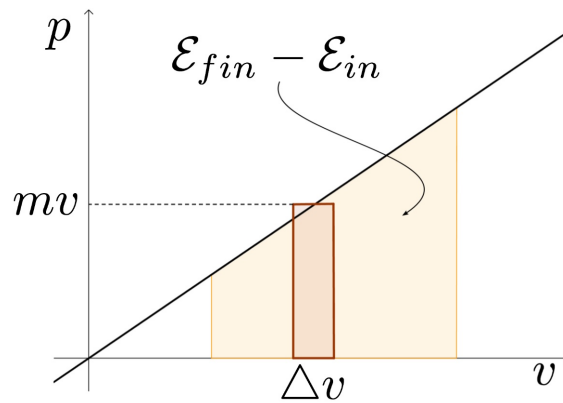


Figura 76: L'area del trapezio coincide con la variazione di energia accumulata nel sistema corpo+Terra.

Nel passaggio al limite per infiniti rettangoli di area infinitesima otteniamo l'uguaglianza esatta

$$\mathcal{E}_{fin} - \mathcal{E}_{in} = \frac{1}{2}mv_{fin}^2 - \frac{1}{2}mv_{in}^2$$

dalla quale induciamo la relazione

$$\mathcal{E}_{c.+T.} = \frac{1}{2}mv^2$$

che permette di calcolare l'energia nel sistema corpo+Terra.

### Molla interposta tra due corpi

Per mostrare come si calcola l'energia associata alla tensione di una molla, facciamo riferimento alla situazione illustrata in figura 77. Anche in questo caso la molla viene messa in tensione dal complesso motore+macchina; faremo riferimento, come di consueto, ad una molla ideale, e ricorderemo in principio le due caratteristiche che la definiscono:

- trasmette quantità di moto senza accumularla, perché ha massa nulla;
- obbedisce alla legge di elasticità  $\mathcal{I}_{el} = k\xi$ .

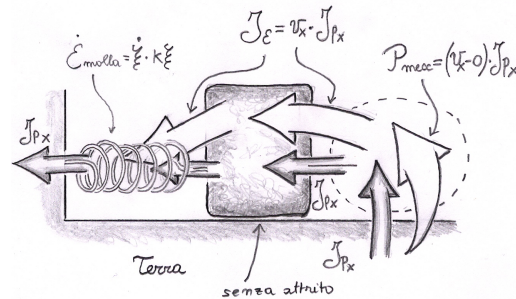


Figura 77: La quantità di moto viene caricata da Terra dal complesso motore+macchina (l'area con il perimetro tratteggiato). La quantità di moto si carica di energia e la trasporta fino alla molla, che la accumula e la manifesta sotto forma di tensione.

La molla è un sistema mediatore collocato tra il corpo e la Terra.

Come prima, la potenza sviluppata dal motore è  $\mathcal{I}_p \cdot v$ ; in questo caso, però, possiamo esprimere la potenza usando la definizione di allungamento  $\xi$  e la legge di Hooke, e otteniamo

$$\mathcal{P} = k\xi \cdot \dot{\xi}$$

Il motore sta trasferendo energia al sistema corpo+Terra+molla; se, per evitare inutili complicazioni, supponiamo che il corpo venga mantenuto in movimento a velocità costante, l'energia del sotto-sistema corpo+Terra rimane costante, e pertanto può cambiare solo quella della molla:

$$\dot{\mathcal{E}}_{molla} = k\xi \cdot \dot{\xi}$$

Da un punto di vista puramente formale, possiamo sostituire  $k$  con  $m$  e  $\xi$  con  $v$ , riottenendo in tal modo la stessa equazione che abbiamo ricavato per il sistema corpo+Terra; analoghe equazioni hanno analoghe soluzioni, e tanto basta perché gli allievi vedano subito che

$$\mathcal{E}_{molla} = \frac{1}{2}k\xi^2$$

Detto ciò, richiedo comunque che venga realizzato e compreso il grafico di figura 78, e che vengano condotte tutte le deduzioni fino alla formula finale, magari come esercizio.

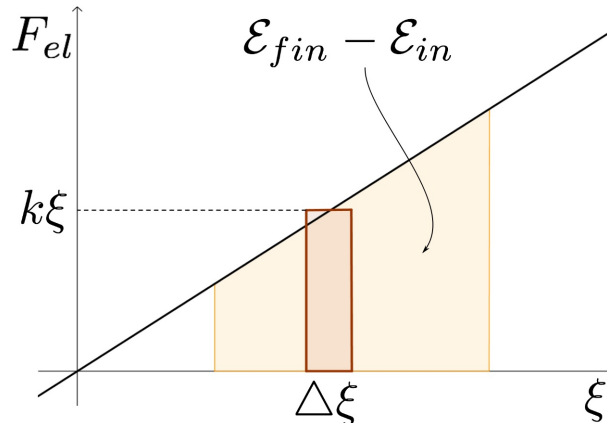


Figura 78: L'area del trapezio coincide con la variazione di energia accumulata nella molla.

In pratica non è necessario aggiungere il corpo, perché possiamo applicare il motore direttamente all'estremo libero della molla; preferisco tuttavia mantenere questa impostazione: in questo modo possiamo pensare alla molla come a un tramite che accumula diversamente l'energia dei due corpi, non in rapporto alla velocità relativa, bensì alla tensione elastica. Inoltre sarà più evidente la somiglianza con il caso del campo di gravità.

### Campo di gravità

Il complesso motore+paranco della figura 79 solleva il corpo rispetto al suolo a velocità costante.

Il motore sta trasferendo energia al sistema corpo + Terra + campo di gravità. Usando la legge di gravità vediamo che la potenza sviluppata dal motore si può scrivere nella forma

$$\mathcal{P} = mg\dot{z}$$

Dato che il corpo sale a velocità costante, l'energia del sotto-sistema corpo + Terra rimane costante e pertanto l'energia non può che accumularsi nel campo di gravità:

$$\dot{\mathcal{E}}_{gravità} = mg \cdot \dot{z}$$

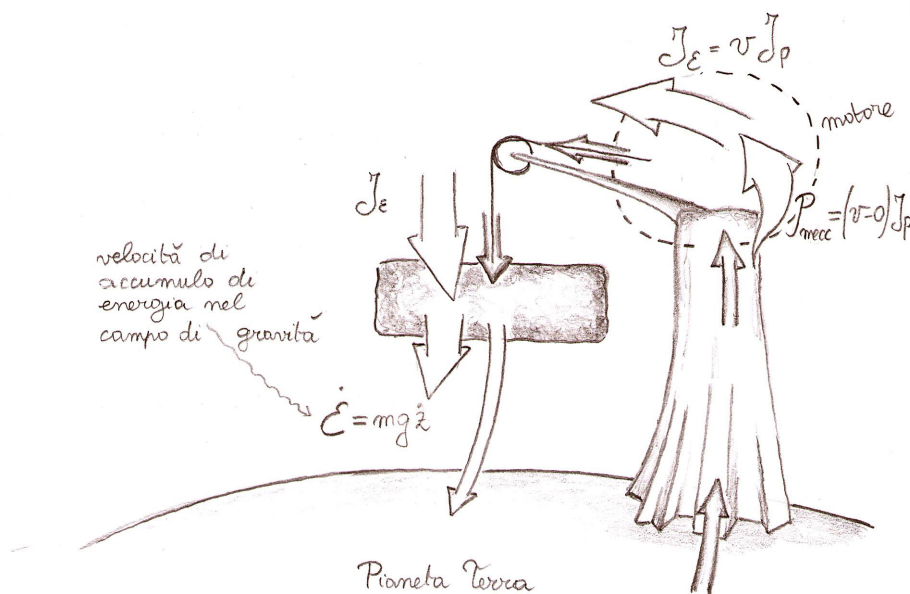


Figura 79: La quantità di moto viene caricata da Terra dal complesso motore+macchina (l'area con il perimetro tratteggiato). La quantità di moto si carica di energia e la trasporta fino al campo di gravità, che la accumula e la manifesta sotto forma di quota del corpo rispetto al suolo.

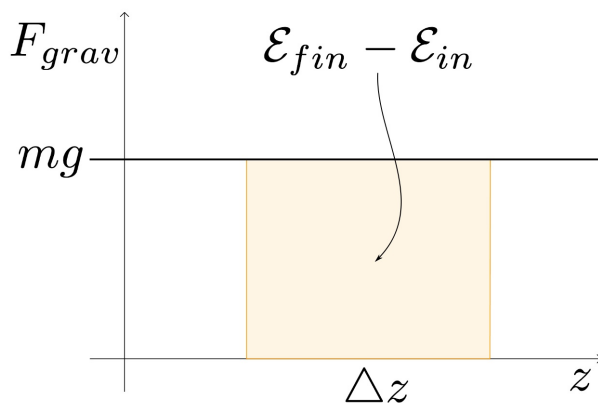


Figura 80: L'area del rettangolo coincide con la variazione di energia accumulata nel campo di gravità.

Questa è una situazione matematicamente più semplice delle due precedenti (vedi figura 80) e non sarà difficile mostrare che

$$\mathcal{E}_{gravità} = mgz$$

In questo caso la presenza del corpo è indispensabile, poiché senza la sua massa  $m$  l'energia non potrà essere accumulata in nessun'altra forma.

### Quadro generale

Se vogliamo applicare queste idee sull'energia dobbiamo in primo luogo:

1. Identificare tutti i sistemi (corpi, molle, campo di gravità) in grado di accumulare energia.
2. Identificare tutte le interfacce, che comportano processi non completamente meccanici; queste, per ora, possono essere di due tipi:
  - (a) Motori, associati ad una potenza meccanica positiva: allargando la definizione usuale del termine, possiamo includere l'apparato locomotore.
  - (b) Interfacce dissipative, associati ad una potenza meccanica negativa: in pratica, l'insieme delle due superfici a contatto (nel caso di attrito dinamico: quello statico non comporta una potenza meccanica).

In entrambi i casi l'interfaccia è collocata tra due corpi rigidi che si muovono a velocità differenti.

In qual modo potremo esercitare questi concetti, in particolar modo l'idea di potenza?

#### **ESERCIZIO.**

Due corpi sono collegati con una molla e si muovono su un piano orizzontale privo di attrito. I dati del problema sono:  $m_1 = 2.5 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 4.5 \text{ kg}$ ,  $v_1 = +5.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $v_2 = +2.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ;  $k = 9.0 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}}$  e  $\xi = +2.5 \text{ cm}$ .

1. rappresentate la corrente di quantità di moto trasmessa dalla molla;
2. determinate le correnti di energia trasportate dalla quantità di moto, in ingresso in o in uscita da ciascun corpo;
3. determinate  $\mathcal{P}_{mecc}$ ,  $\dot{\mathcal{E}}_1$ ,  $\dot{\mathcal{E}}_2$ ,  $\dot{\mathcal{E}}_{corpi}$ ,  $\dot{\mathcal{E}}_{molla}$  e  $\dot{\mathcal{E}}_{sistema}$ .

Rappresentate con il diagramma di processo questo problema.

Ripetete l'esercizio tra volte con queste varianti:

1.  $v_2 = -2.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ;
2.  $v_2 = +2.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  e  $\xi = -2.5 \text{ cm}$ ;
3.  $v_2 = -2.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  e  $\xi = -2.5 \text{ cm}$ .

(rappresentate ogni volta la situazione con il diagramma di processo).

In questo esempio il diagramma di processo richiesto è la metà di destra di quello illustrato in figura 74.

Già il solo tracciare questi diagrammi obbliga a riflettere sul verso di tutte le correnti - quella di quantità di moto, e le correnti di energia associate. Non è assolutamente detto che tutte le persone capiscano meglio con i diagrammi: la capacità di associare ad ogni immagine una formula potrebbe essere proprio l'obiettivo dell'apprendimento; negli altri casi, invece, sarà più facile per gli allievi decidere i segni giusti dopo avere tracciato tutte le frecce. In figura 81 è rappresentata la prima parte dell'esercizio.

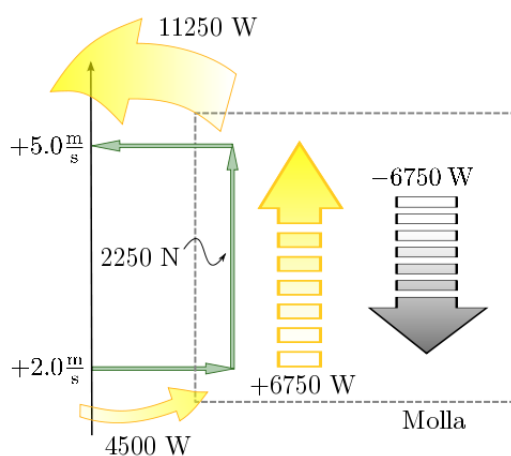


Figura 81: La differenza tra le correnti di energia coincide con la potenza meccanica del sistema dei due corpi. La rapidità di variazione dell'energia accumulata nella molla è l'opposto della potenza meccanica.

Dopo avere introdotto la potenza associandola al concetto di velocità relativa, è il momento di puntualizzare un'altra volta la differenza tra correnti e potenze.

**TESTO.**

Diamo ora la definizione definitiva dei due concetti, correnti di energia e potenza.

*Corrente di Energia.*

È la rapidità con la quale il portatore trasporta energia in ingresso o in uscita rispetto ad un sistema.

*Potenza.*

È la rapidità con la quale l'energia viene trasferita da un portatore all'altro.

Qual è il senso dell'equazione di continuità per l'energia e delle equazioni di processo? Considerate questo esempio.

Noi, in quest'aula, costituiamo un sistema: nell'analogia che sto elaborando il numero di persone corrisponde all'energia.

Il numero di persone del sistema può cambiare se qualcuno entrerà da quella porta per assistere alla lezione (poco probabile), ovvero se qualcuno uscirà per impellenti necessità fisiologiche; al limite possiamo considerare anche trasferimenti attraverso la finestra. Nell'analogia, queste sono le correnti di energia.

Se però le cose continuano così, questa lezione durerà decenni: tanto è necessario affinché capiate la differenza tra correnti e potenza.

In questo periodo di tempo alcuni di noi moriranno (non sarò necessariamente il primo): se avete qualche genere di sensibilità religiosa potete immaginare che il numero di persone verrà trasferito dal portatore "essere umano in carne ed ossa" ad un altro portatore più spirituale; questo è un processo caratterizzato da una potenza negativa.

D'altra parte, è anche più che probabile che tra di voi si formeranno delle coppie: così prima o poi divideremo la gioia di nuove nascite; questo è un processo caratterizzato da una potenza positiva.

L'equazione che descrive la conservazione del numero di persone è quindi

$$\dot{N} = \mathcal{I}_{N,ingresso} - \mathcal{I}_{N,uscita} + \mathcal{P}_{nascite/decessi}$$

Spero tuttavia che questa lezione finisca prima, e che il termine di potenza non debba essere incluso nell'equazione.

Se in ogni problema prenderemo un po' di tempo per parlare dei limiti delle idealizzazioni della meccanica, gli allievi perverranno presto a questo quadro sintetico:

1. Ad ogni motore è associata una potenza meccanica positiva.
2. Ad ogni interfaccia di attrito è associata una potenza meccanica negativa.
3. In assenza di motori e di interfacce di attrito,  $\dot{\mathcal{E}}_{sistema} = 0$  e tutte le potenze sono associate a processi interni, in cui l'energia viene trasferita da un portatore all'altro.

Non è necessario definire con esattezza gli altri portatori della meccanica (cosa non difficile, ma onerosa in termini di tempo, come mostro nel prossimo capitolo): è sufficiente suggerire che esistono, e così potremo gettare le basi per andare oltre la dinamica.



## 10 Ancora sull'energia

La conservazione senza evoluzione è morte.

L'evoluzione senza conservazione è follia.

*Gregory Bateson*

**Q**UANTI e quali sono i portatori della meccanica? Fino a quando riteniamo che il soggetto del discorso siano esclusivamente i corpi rigidi, che si muovono di moto traslazionale, la quantità di moto esaurisce il discorso.

Possiamo allargare il contesto, includendo le rotazioni: in tal caso dobbiamo introdurre il portatore **momento angolare**.

Se procediamo in un'altra direzione, possiamo ricordare che i corpi reali non sono rigidi; il caso più semplice è un corpo composto da due parti rigide legate (ad esempio da una molla; nell'appendice C suggerisco che in questo caso esiste un altro portatore, il **momento di marea**, determinato dalla massa ridotta delle due parti e dalla velocità relativa, che gioca il ruolo di potenziale associato).

In prima e in seconda liceo difficilmente potremo trattare questi termini, già solo per mancanza di tempo; il problema è che, fino a quando ci limitiamo alla quantità di moto, non possiamo giustificare i diagrammi di processo (tornate alla figura 74), che invece giocheranno un ruolo essenziale quando dovremo introdurre l'entropia.

Così, se sentiamo l'esigenza di ampliare il discorso in vista per preparare il passaggio alla termodinamica e alla chimica (i due ambiti in cui emerge l'idea di evoluzione), dobbiamo cercare di portare l'attenzione, quantomeno, ai portatori di energia della molla e del campo di gravità.

In secondo luogo dobbiamo affrontare il problema della terminologia.

Difatti i docenti di Fisica, e i libri di testo, fanno abitualmente riferimento al lavoro delle forze, al teorema dell'energia cinetica e all'energia potenziale.

In quale misura, e come, possiamo introdurre questa terminologia all'interno dell'approccio potenziali-portatori?

**Prerequisiti**

1. Saper scrivere l'equazione di continuità dell'energia per il sistema completo e per le parti che lo compongono.
2. Conoscere le leggi dell'interazione elastica e del campo di gravità costante.
3. Conoscere il ruolo della macchina semplice e dei motori.

**Obbiettivi**

1. Introdurre il potenziale elastico.
2. Introdurre, in idraulica, il portatore gravitazionale e il portatore volume.
3. Introdurre la definizione operativa  $W_{A\Gamma B}^{\sphericalangle} = \int_{A\Gamma B} \vec{F} \cdot d\vec{l}$ .
4. Mostrare che  $W_{P(t_1)\Gamma P(t_2)}^{\sphericalangle} = \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{I}_{p,x}v_x + \mathcal{I}_{p,y}v_y + \mathcal{I}_{p,z}v_z) dt$  (nel dettaglio solo nel corso scientifico).
5. Introdurre il metodo dell'energia potenziale.

## 10.1 Il portatore elastico

Il portatore di energia per la molla è il suo allungamento  $\xi$ , il potenziale è  $k\xi$  e la capacità della molla è  $\frac{1}{k}$ .

Vediamo perché, e perché può essere interessante parlarne a lezione.

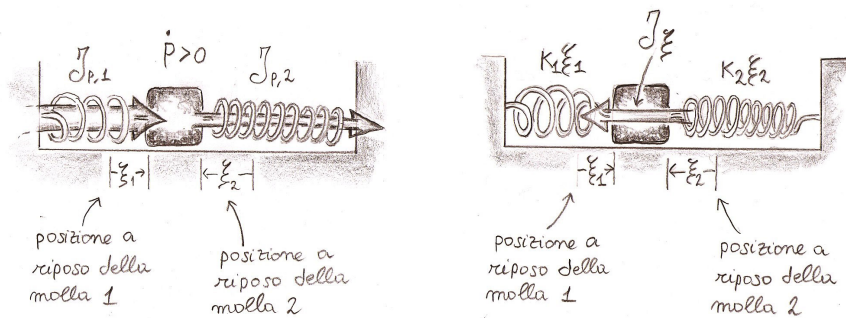
Per riconoscere qual è il ruolo di queste grandezze, dobbiamo far interagire due molle e cercare qual è la situazione di equilibrio.

In figura 82 entrambe le molle sono compresse: il corpo centrale si sposterà fino a quando  $k_1\xi_1 = k_2\xi_2$ : già questo ci suggerisce che  $k\xi$  è un buon candidato per il ruolo di potenziale; inoltre, per la geometria del problema, tanto una delle molle si accorcerà, quanto l'altra si allungherà, ossia  $\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2 = 0$ : con un po' di audacia possiamo addirittura scrivere le due equazioni di continuità

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= -\mathcal{I}_\xi \\ \dot{\xi}_2 &= +\mathcal{I}_\xi\end{aligned}$$

e così  $\xi$  è un buon candidato per coprire il ruolo di portatore.

Per completare il quadro possiamo analizzare - e far analizzare in classe - varie situazioni come questa e concludere che in ogni caso (se il corpo è inizialmente fermo) la corrente di portatore passa sempre dalla molla in cui  $k\xi$  è maggiore all'altra<sup>19</sup>. Se la massa del corpo centrale è nulla questa affermazione è sempre vera.



(a) La corrente di quantità di moto attraversa ciascuna molla senza perdite né guadagni.

(b) La corrente elastica attraversa il corpo rigido senza perdite né guadagni.

Figura 82: La molla a sinistra ha costante elastica maggiore della molla di destra, così che  $k\xi_1 > k\xi_2$ . La dinamica del sistema non dipende da quale delle due molle è la più compressa, ma da quale ha la tensione maggiore (l'asse  $x$  è orientato da sinistra verso destra).

<sup>19</sup>Ricordiamo che se la molla è compressa  $\xi$  è negativo.

Quindi il portatore elastico  $\xi$  e il potenziale elastico, che indicherò con  $\varphi_{el}$ , sono legati dalla relazione  $\varphi_{el} = \xi/k$ . Con queste idee riscriveremo le equazioni dell'oscillatore così:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \mathcal{I}_p && \text{equazione di continuità per il corpo} \\ \dot{\xi} &= \mathcal{I}_\xi && \text{equazione di continuità per la molla} \\ \mathcal{I}_\xi &= \frac{p}{m} && \text{accoppiamento molla-corpo} \\ \mathcal{I}_p &= -k\xi && \text{accoppiamento corpo-molla} \end{aligned}$$

I lettori attenti non faranno fatica a riconoscere le equazioni di Hamilton (riscritte in una forma espansa, per mettere in evidenza il ruolo delle correnti) per l'oscillatore<sup>20</sup>.

In questo contesto l'inverso della costante elastica gioca il ruolo di capacità: del resto era evidente fin dall'inizio, difatti tanto più è piccola la costante elastica tanto più la molla è in grado di accumulare "allungamento" senza che la sua tensione cambi sensibilmente.

Per completare il quadro ho pensato di introdurre la situazione di figura 83.

La molla che percorre la circonferenza della Terra è estremamente lunga, e quindi la sua costante elastica è praticamente nulla ed è quasi uguale a zero anche il suo potenziale; d'altra parte questo è solo un esperimento concettuale, quindi possiamo senz'altro assumere che queste affermazioni siano esatte.

La corrente di quantità di moto passa da Terra (terminale a velocità zero e capacità infinita) al corpo (terminale a velocità  $v$ ) attraversando la molla principale senza perdite né guadagni.

La corrente elastica passa dalla molla infinita (terminale a potenziale elastico zero e capacità infinita) alla molla centrale (terminale a potenziale elastico negativo) attraversando il corpo in movimento senza perdite né guadagni.

Possiamo così immaginare un corpo come una molla con capacità nulla, poiché non è in grado di accumulare allungamento (detto in termini umani: una molla infinitamente rigida); e possiamo immaginare la molla come un corpo con capacità nulla, poiché non è in grado di accumulare quantità di moto (detto in termini umani: un corpo infinitamente leggero).

Solo a questo punto posso introdurre, nell'ambito della meccanica, un diagramma di processo come quello in figura 84.

Par proprio che abbiamo complicato le cose, forse potevamo limitarci a parlare di energia accumulata nella molla.

<sup>20</sup>Un altro motivo per cui, molto prima che il quadro generale cominciasse a sembrarmi chiaro, avevo deciso che l'approccio di Karlsruhe mi piaceva.

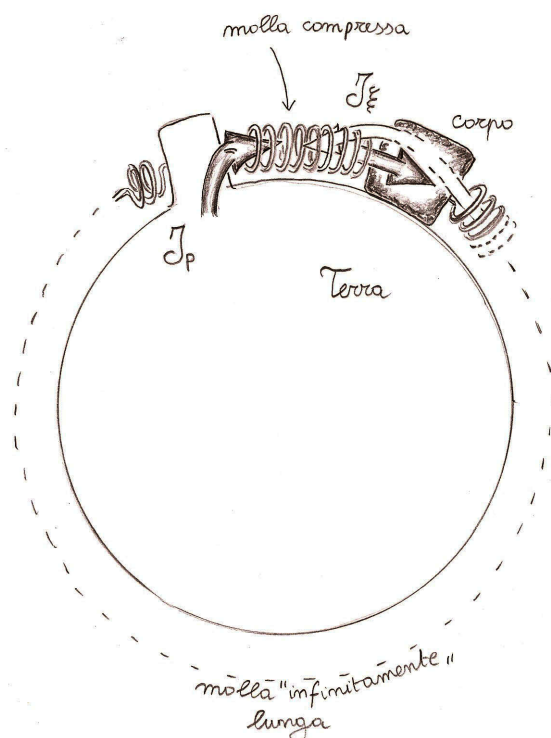


Figura 83: Un'immagine ardita per l'oscillatore armonico: una molla di lunghezza "infinita" - e quindi capacità elastica nulla - collega l'estremo libero del corpo al blocco immobile, dopo aver percorso la circonferenza terrestre. In questa situazione il corpo si sta muovendo nel verso antiorario - che è anche, per definizione, il verso positivo.

È proprio così, se non siamo interessati alla dinamica dell'oscillatore. Se invece vogliamo risalire agli integrali primi del moto, proprio questa interpretazione dell'oscillatore fornisce un buon attacco al problema.

Esistono diversi programmi di calcolo numerico (alcuni open source) che consentono di inserire le equazioni differenziali attraverso pittogrammi, il che li rende particolarmente intuitivi; in appendice 6.5 a pagina 118 mostro a grandi linee i principi generali e spiego qual è la loro utilità didattica. Come forse potete intuire dall'immagine, i pittogrammi fanno riferimento in modo suggestivo agli accumuli e ai trasferimenti, e la costruzione di un modello obbliga l'allievo a radunare tutte le sue competenze sul fenomeno studiato.

In II liceo, al corso ordinario affianco alcune lezioni al computer, per esercitare la costruzione di queste simulazioni. Non mi propongo grandi obiettivi, soprattutto dato il tempo limitato. Una delle tappe fondamentali, d'altra parte, è proprio la costruzione del modello dell'oscillatore (figura 85).

La struttura stessa del modello, la più semplice che io riesca ad immaginare,

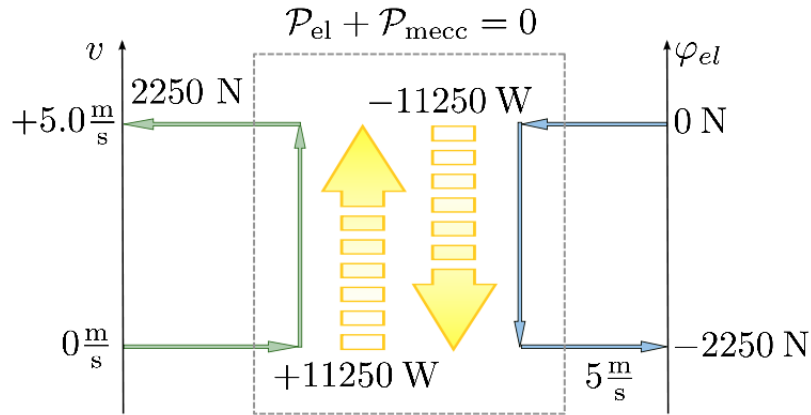


Figura 84: La corrente di quantità di moto passa da Terra, al corpo, che si muove alla velocità di  $+5.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , e si carica energia; la molla ( $k = 9.0 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ) è compressa ( $\xi = -2.5 \text{ cm}$ ) e si espanderà: la corrente elastica passa dallo spazio libero alla molla, che si trova a potenziale  $\varphi_{el} = -2250 \text{ N}$  e libera energia. La potenza del processo è pari a  $11250 \text{ W}$ .

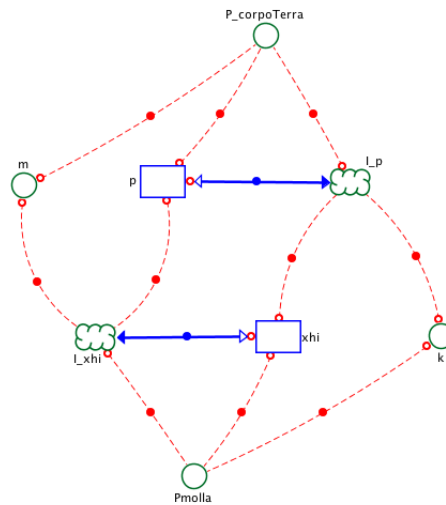


Figura 85: Questo è il modello dell'oscillatore semplice:  $\dot{p} = -k\xi$  e  $\dot{\xi} = \frac{p}{m}$  ( $k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ,  $m = 6 \text{ kg}$ ,  $\dot{\xi}_{in} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ); metodo di integrazione Runge-Kutta 4 con  $\Delta t = 0.01 \text{ s}$ ). La costruzione del modello conduce facilmente all'accoppiamento portatore-potenziale.

indica che  $\xi$  è il portatore della molla.

In effetti arrivo alla coppia portatore-potenziale,  $(\xi, \varphi_{el})$ , in primo luogo, proprio attraverso l'uso del programma di calcolo numerico, e in un secondo tempo (se mi sembra il caso, e tempo permettendo) svolgo una lezione per interpretare i risultati di questa attività pratica.

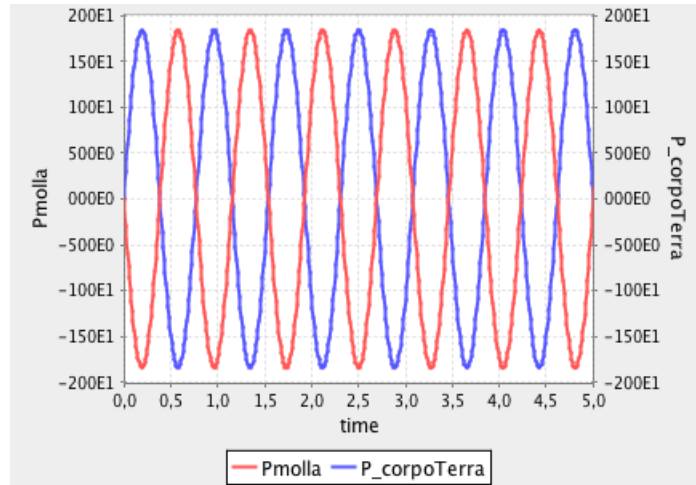


Figura 86: Il grafico mostra che  $\mathcal{P}_{corpo+Terra} + \mathcal{P}_{molla} = 0$ : l'energia viene scambiata periodicamente tra il portatore  $p$  e il portatore  $\xi$ .

Nel modello in figura ho aggiunto il calcolo della potenza meccanica e della potenza elastica e ho riportato in grafico il risultato della simulazione (figura 86).

## 10.2 Il portatore gravitazionale

Torniamo all'esempio dei vasi comunicanti di forma cilindrica (figura 87).

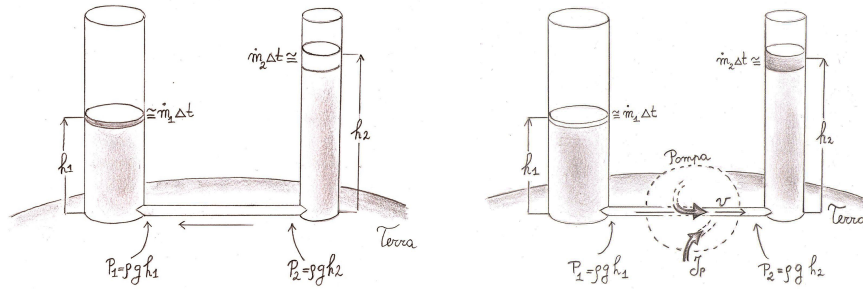
L'acqua occupa due regioni del campo di gravità, nel vaso 1 e nel vaso 2; la caratteristica fondamentale dell'acqua è che la sua estensione è univocamente legata alla sua massa gravitazionale, poiché la sua densità è costante:  $m = \rho_{acqua}V$  (d'ora in avanti  $\rho_{acqua} = \rho$ ).

Se la massa d'acqua in un vaso sta cambiando al tasso temporale  $\dot{m}$ , il volume associato cambia secondo la legge  $\dot{m} = \rho\dot{V}$ ; includendo la geometria del vaso (area di base  $A$  e altezza  $h$ ) possiamo anche scrivere

$$\dot{m} = \rho A \dot{h} \quad (88)$$

In figura 87a una certa quantità di acqua passa dal vaso di destra a quello di sinistra; le equazioni di continuità in questo problema sono

$$\begin{aligned} \dot{m}_1 &= +\mathcal{I}_m \\ \dot{m}_2 &= -\mathcal{I}_m \end{aligned}$$



(a) Una massa d'acqua  $\Delta m \cong \dot{m}_1 \Delta t = -\dot{m}_2 \Delta t$  passa dal vaso in cui il livello è maggiore a quello in cui il livello è minore: ciò comporta la diminuzione di energia accumulata nel campo di gravità al tasso temporale  $\dot{m}g(h_2 - h_1)$ .

(b) Se interponiamo una pompa tra i due vasi, l'acqua può passare dal vaso in cui il livello è minore al vaso in cui il livello è maggiore. Se indichiamo con  $\mathcal{P}$  la potenza della pompa, vediamo che l'energia accumulata nel campo di gravità aumenta al tasso temporale  $\dot{m}g(h_1 - h_2) = \mathcal{P}$ .

Figura 87: In questo esempio il sistema fisico è il campo di gravità, è il volume d'acqua che occupa due regioni del campo deve essere considerato "materia esploratrice"; possiamo così valutare gli accumuli di energia del sistema da due punti di vista differenti: pensando al campo, ovvero pensando al volume esploratore. Dal primo punto di vista vediamo facilmente che  $m$  è il portatore di energia del campo di gravità, e  $gh$  è il potenziale; mentre dal secondo punto di vista vediamo che il portatore di energia "esploratore" è il volume d'acqua  $V$  e il potenziale idraulico ad esso associato è  $P$ .

Queste relazioni devono essere esercitate a sufficienza, ad esempio nelle lezioni in cui esponiamo le basi di idraulica necessarie per l'analogia.

### ESERCIZI

1. In un vaso cilindrico entrano  $2.5 \frac{\text{kg}}{\text{min}}$  di acqua; la sezione del vaso è  $25 \text{ cm}^2$ . Determina la velocità di variazione del livello dell'acqua ed esprimila in  $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ .
2. L'acqua passa dal vaso di destra a quello di sinistra al ritmo di  $2.5 \frac{\text{kg}}{\text{min}}$  di acqua; sappiamo che  $A_1 = 45 \text{ cm}^2$  e  $A_2 = 18 \text{ cm}^2$ ; determina le velocità di variazione dei livelli d'acqua nei due vasi ed esprimila in  $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

Il risultato netto di questo trasferimento è che una quantità d'acqua con massa gravitazionale  $\dot{m}\Delta t$  passa in ogni piccolo intervallo di tempo da una regione all'altra dello spazio, e conseguentemente l'energia del campo cambia al tasso temporale



$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{E}}_{campo} &= \dot{m}_1 g h_1 + \dot{m}_2 g h_2 = \\
&= +\mathcal{I}_m g h_1 - \mathcal{I}_m g h_2 = \\
&= \mathcal{I}_m (\varphi_{grav,1} - \varphi_{grav,2})
\end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio ho sostituito la definizione del **potenziale gravitazionale**:

$$\varphi_{grav}(z) \stackrel{def}{=} gz$$

Possiamo reinterpretare il tutto dal punto di vista del volume d'acqua che permea il campo: questo volume passa dal vaso di destra a quello di sinistra e le equazioni di continuità sono

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= +\mathcal{I}_V \\
\dot{V}_2 &= -\mathcal{I}_V
\end{aligned}$$

Questo passaggio non è fisicamente distinguibile del passaggio di massa gravitazionale da una regione all'altra del campo, così come non possiamo parlare, nell'ambito della teoria di Newton, di energia del campo se non sono presenti dei corpi. Così la variazione di energia dell'acqua nei vasi deve coincidere con quella del campo:

$$\dot{\mathcal{E}}_{acqua,vasi} \equiv \dot{\mathcal{E}}_{campo}$$

Se usiamo l'equazione 88 possiamo riesprimere la variazione di energia in altro modo

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{E}}_{acqua,vasi} &= \dot{m}_1 g h_1 + \dot{m}_2 g h_2 = \\
&= P_1 \dot{V}_1 + P_2 \dot{V}_2 = \\
&= \mathcal{I}_V (P_1 - P_2)
\end{aligned}$$

Come interpretiamo questa equazione? Notiamo che essa fa riferimento alla corrente che sta attraversando il condotto (figura 88).

Il sistema costituito dall'acqua nei vasi (o equivalentemente dal campo gravitazionale) e da quella nel condotto è isolato (se trascuriamo gli effetti dissipativi sulle pareti e la vorticosità alle imboccature del condotto) e questo significa che

$$\dot{\mathcal{E}}_{acqua,condotto} + \dot{\mathcal{E}}_{acqua,vasi} = 0$$

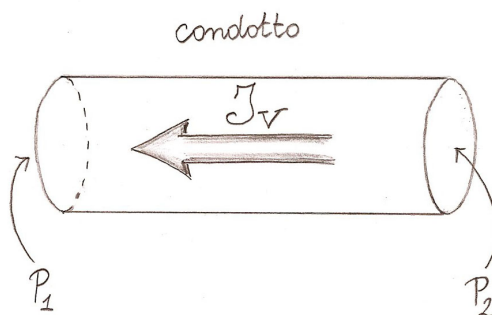


Figura 88: La corrente idraulica  $\mathcal{I}_V$  attraversa il condotto muovendosi dal punto a pressione  $P_2$  al punto a pressione  $P_1$ .

e questo significa che

$$\dot{\mathcal{E}}_{acqua,condotto} = \mathcal{I}_V (P_2 - P_1) \quad (89)$$

L'equazione 89 dice che la corrente idraulica, attraversando il condotto, cede energia al tasso temporale  $\mathcal{I}_V (P_2 - P_1)$ , che quindi è una potenza di processo. Ciò significa che la corretta definizione del **potenziale idraulico** è

$$\varphi_{idr} \stackrel{def}{=} P$$

Non è difficile vedere, a questo punto, che abbiamo determinato due nuove coppie portatore-potenziale:  $(m, gh)$  per il campo di gravità e  $(V, P)$  per l'idraulica. Partendo dalla 89 poi è facile ricavare l'equazione di Bernoulli.

#### ESERCIZI

1. Una cascata collega due bacini, uno a quota 1250 m e uno a quota 1085 m; la portata d'acqua della cascata è pari a  $950 \frac{\text{L}}{\text{s}}$ . Determina la potenza meccanica massima che si potrebbe ottenere costruendo una centrale idroelettrica.
2. Le pompe di sentina di un sommergibile immerso alla profondità di 250 m permettono di espellere dall'imbarcazione acqua al ritmo di 5 L/s. Determina la potenza minima delle pompe.

### 10.3 Quadro generale

Già nel corso di I liceo, pertanto, sono nascoste quattro coppie portatore-potenziale: una per i corpi rigidi<sup>21</sup>, una per l'idraulica (ossia la meccanica dei fluidi incompressibili), una per il campo di gravità e una per la molla. I risultati che abbiamo trovato potranno essere riassunti in una tabella:

	Portatore	Potenziale	$\mathcal{I}_{\mathcal{E}}$	$\mathcal{P}$
corpo	$P$	$\varphi_{cin} = v$	$\mathcal{I}_p \varphi_{cin}$	$\mathcal{I}_p (\varphi_{cin,1} - \varphi_{cin,2})$
gravità	$m$	$\varphi_{grav} = gz$	$\mathcal{I}_m \varphi_{grav}$	$\mathcal{I}_m (\varphi_{grav,1} - \varphi_{grav,2})$
idraulica	$V$	$\varphi_{idr} = P$	$\mathcal{I}_V \varphi_{idr}$	$\mathcal{I}_V (\varphi_{idr,1} - \varphi_{idr,2})$
molla	$\xi$	$\varphi_{el} = k\xi$	$\mathcal{I}_{\xi} \varphi_{el}$	$\mathcal{I}_{\xi} (\varphi_{el,1} - \varphi_{el,2})$

Questa è una buona base per l'analogia che, più avanti, ci permetterà di includere i processi chimici e i processi termici.

Sono convinto che si debba dedicare tanto tempo alla quantità di moto, indipendentemente dal fatto che si voglia proseguire con l'approccio di Karlsruhe: ho già motivato altrove, spiegando che il punto di vista dei trasferimenti è più naturale rispetto a quello delle forze, e conduce immediatamente al terzo principio.

Per quanto riguarda gli altri tre portatori, quello del campo di gravità è forse il meno utile in pratica, mentre quello per l'idraulica è importante in molte applicazioni; il portatore per la molla emerge in modo naturale nei modelli al computer, e forse tanto basta.

In generale approfondisco quel tanto che mi sembra necessario, tenendo presente che il quadro completo è soprattutto un mezzo, e non il fine ultimo.

Proprio per questo, d'altra parte, mi sembra che sia utile possedere un quadro che vada oltre la quantità di moto: potremo così giustificare più facilmente la ricerca della coppia portatore-potenziale in altri ambiti.

### 10.4 Il metodo dell'energia potenziale

Questo è il titolo, poiché di metodo risolutivo qui si tratta, e non di teoria fondamentale; e allo stesso modo ho deciso di introdurlo nelle lezioni di II liceo.

<sup>21</sup>Puntiformi, oppure vincolati a muoversi di moto puramente traslazionale.

L'obbiettivo di questo paragrafo è quello di gettare il ponte tra l'approccio che ho seguito e quello più tradizionale, incentrato sui concetti di energia cinetica, lavoro, forze conservative e energia potenziale.

In questa ottica l'energia  $\mathcal{E} = \frac{1}{2}mv^2$  è l'**energia cinetica** del corpo, ossia l'energia "che si manifesta sotto forma di movimento". Quando una forza  $\vec{F}$  agisce su un corpo, trasferisce ad esso energia alla rapidità  $\mathcal{I}_{\mathcal{E}} = \vec{F} \cdot \vec{v}$  e la quantità totale di energia trasferita è  $\int_{t_{in}}^{t_{fin}} \vec{F} \cdot \vec{v} dt$ ; con un cambio di variabile sotto il segno di integrazione otteniamo la definizione di **lavoro della forza**:

$$L = \int_{P\Gamma Q} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

Il lavoro misura la quantità totale di energia trasferita al corpo dalla forza lungo la particolare traiettoria  $\Gamma$  che collega la posizione iniziale  $P$  a quella finale  $Q$ .

Dalla definizione di lavoro ed energia cinetica discende subito il teorema dell'energia cinetica:

$$\frac{1}{2}mv_{fin}^2 - \frac{1}{2}mv_{in}^2 = L_{tot}$$

( $L_{tot}$  è la somma dei lavori effettuati da tutte le forze che agiscono sul corpo).

In linea di principio questo integrale dipende dal cammino  $\Gamma$ ; se, d'altra parte, la forza è una funzione ragionevole della posizione - diremo che in tal caso è una **forza conservativa** - il risultato è indipendente dal particolare cammino che collega  $P$  a  $Q$  e possiamo così introdurre la funzione **energia potenziale** associata alla forza; per far questo scegliamo una volta per tutte un punto  $O$  e calcoliamo il valore della funzione in  $P$  così:

$$\mathcal{E}_{pot}(P) \stackrel{def}{=} -L_{O\Gamma P}$$

Già sappiamo che il cammino  $\Gamma$  è ininfluente; è facile vedere che, scegliendo un punto diverso da  $O$  otteniamo la stessa funzione a meno di una costante additiva, che non ha alcun significato fisico.

Dunque, se  $\vec{F}$  è una forza conservativa, il suo lavoro quando il corpo si sposta da  $P$  a  $Q$  si può calcolare usando l'energia potenziale:

$$L = -(\mathcal{E}_{pot}(P) - \mathcal{E}_{pot}(Q))$$

Se indichiamo con  $\mathcal{E}_{cin}$  l'energia cinetica del corpo il teorema dell'energia cinetica può essere riscritto nella forma

$$\mathcal{E}_{cin}(Q) + \mathcal{E}_{pot}(Q) = \mathcal{E}_{cin}(P) + \mathcal{E}_{pot}(P)$$

Se ora consideriamo il caso in cui diverse forze, tutte conservative, agiscono sullo stesso corpo, calcoliamo per ciascuna di esse la funzione energia potenziale e arriviamo così all'equazione

$$\mathcal{E}_{cin}(Q) + \sum \mathcal{E}_{pot}(Q) = \mathcal{E}_{mecc,tot} \quad (90)$$

che esprime il **principio di conservazione dell'energia meccanica**.

Quella che ho fin'ora interpretato com'energia accumulata nei vari sistemi mediatori - come la molla e il campo di gravità - viene ora reinterpretata come energia potenziale, ossia "congelata": si tratta di una quantità di energia potenzialmente "liberabile" e che, in caso venga liberata, si manifesterà sotto forma di energia cinetica.

I vantaggi di questo approccio sono noti; nei problemi puramente meccanici possiamo

- determinare le posizioni di equilibrio stabile cercando i minimi dell'energia potenziale;
- determinare le posizioni di inversioni del moto cercando le intersezioni tra la funzione energia potenziale e la linea di livello dell'energia totale.

Cercherò di mostrare che possiamo includere queste possibilità anche nell'approccio di Karlsruhe e di chiarire quali sono i limiti dell'approccio tradizionale.

### Lavoro e forze conservative

Consideriamo anzitutto le difficoltà di introdurre il concetto di forza conservativa: anche se non ne ho parlato esplicitamente fino a qui, il problema rimane anche nell'approccio dell'equazione di bilancio: semplicemente possiamo permetterci di sorvolare fino a quando consideriamo problemi in una dimensione.

Possiamo però cercare di portare l'attenzione degli allievi su forze che si comportano diversamente dalla forza elastica e da quella gravitazionale.

#### ESERCIZIO

Un corpo di massa  $m = 12$  kg viene trascinato su un piano; il coefficiente di attrito tra corpo e piano è  $\mu = 0.15$ .

Il corpo viene spostato dal punto  $x = 0$  m al punto  $x = 10$  m in due modi diversi:

1. direttamente, a velocità costante;
2. facendo tappa per il punto  $x = 5$  m, a velocità costante in ciascuno dei due tratti.

Determina la variazione di energia del sistema corpo+piano dovuta alla forza di attrito in ciascuno dei due casi.

Il risultato è ovviamente diverso nei due casi; l'attrito dinamico, difatti, è una forza dipendente dalla velocità:

$$\begin{cases} -\mu mg & \text{per } v_{rel} > 0 \\ +\mu mg & \text{per } v_{rel} < 0 \end{cases}$$

questo significa che non può essere una "forza conservativa" nel senso specificato sopra<sup>22</sup>.

Dunque le difficoltà concettuali sono le stesse in entrambi gli approcci, e allo stesso modo decideremo in che misura affrontarle - o non affrontarle del tutto. Notiamo difatti che per calcolare l'energia accumulata nei vari sistemi mediatori dobbiamo implicitamente ammettere che il risultato non dipenda dal particolare percorso.

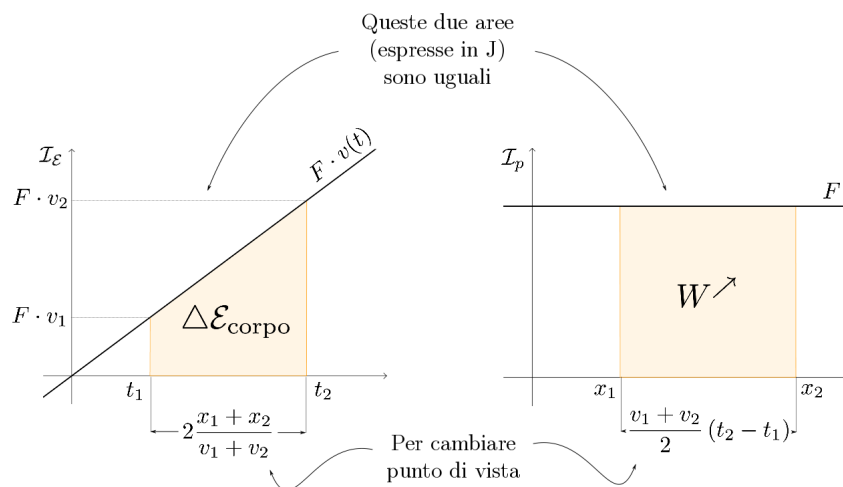


Figura 89: Quando la forza applicata è costante, le difficoltà offerte da entrambi i punti di vista sono abordabili, ma è decisamente più facile calcolare il lavoro della forza:  $L \sphericalR = F \Delta x$ .

Nei corsi tradizionali, d'altra parte, si pone l'accento proprio sul concetto di lavoro, che è il punto sensibile di tutta la teoria; non ne vedo la necessità,

<sup>22</sup>Questo esempio mette in luce, tra l'altro, il limite dell'approccio tradizionale.

Spesso nei libri di testo si propongono esercizi in cui l'allievo deve calcolare il lavoro della forza di attrito. In questo caso la definizione sembra portare alla relazione  $\mathcal{L} = |F| \cdot l$ , dove  $l$  è la lunghezza totale del percorso. Questa conclusione, però, è assolutamente sbagliata: approfondirò la questione nella prossima sezione.

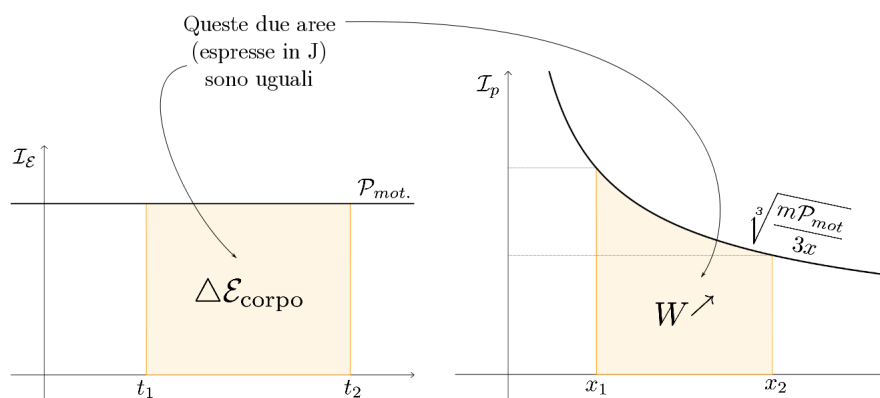


Figura 90: Quando la potenza del motore che mette in movimento il corpo è costante (in un determinato intervallo di tempo) è più semplice determinare l'integrale nel tempo della corrente di energia  $\mathcal{I}_E = \mathcal{P}_{mot.}$

poiché se vogliamo calcolare i trasferimenti di energia ad opera di forze come la tensione della fune è sufficiente valutare (con l'aiuto di un grafico) l'integrale

$$\mathcal{E}_{transferita} = \int_{t_{in}}^{t_{fin}} \mathcal{I}_E dt$$

e se ci sembrerà il caso potremo operare il cambio di variabile - spesso vantaggioso - e calcolare piuttosto l'integrale

$$\mathcal{E}_{transferita} = \int_{x_{in}}^{x_{fin}} F dx$$

Naturalmente non penso si debba operare un cambio di variabile sotto il segno di integrale, ma che si debba scegliere quale variabile indipendente utilizzare per i grafici, il tempo o la posizione.

### Energia meccanica totale

Il valore dell'**energia meccanica totale** in un dato istante è semplicemente la somma di tutti gli accumuli di energia legati ai portatori meccanici (corpi, campo e molle, o meglio: quantità di moto, massa e allungamento).

Nessuna novità rispetto agli approcci tradizionali, se non per il fatto che poniamo l'accento sui portatori.

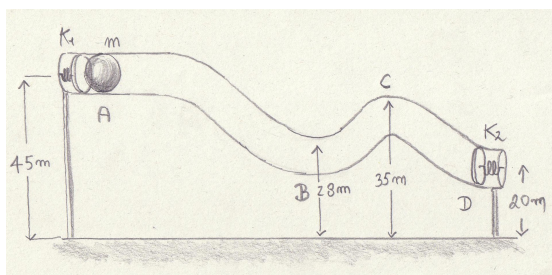
Io procedo così:

1. richiedo di identificare il sistema, individuando in anticipo tutti i possibili accumuli di energia;

2. nell'equazione di continuità per l'energia sposto l'attenzione dalle rapidità di variazione alle variazioni totali in un intervallo di tempo determinato;
3. interpreto i singoli accumuli e la somma di tutti gli accumuli come si fa di consueto in tutti i libri di testo, prestando attenzione al significato dei termini usati (ad esempio si può dire "energia cinetica" o "energia accumulata nel corpo", basterà chiarire di volta in volta a quale schema interpretativo facciamo riferimento);
4. Faccio notare (se è il caso) che  $\dot{\mathcal{E}}_{sistema} = 0$  e quindi  $\mathcal{E}_{sistema}(t)$  è costante.

Penso proprio che in questa fase del corso dobbiamo proporre i problemi di stampo classico sulla conservazione dell'energia, dimenticando (per il momento) le correnti di energia e le potenze di processo.

### ESERCIZIO



Un corpo di massa  $m = 4.5$  kg si muove nel tubo della figura. Determina:

1. la velocità con cui entra nel tubo;
2. la velocità nei punti  $B$  e  $C$ ;
3. la compressione della molla collocata nel punto  $D$ .

Qual è la minima compressione della molla collocata in  $A$ , necessaria affinché il corpo riesca a "scollinare", ossia raggiungere il punto  $D$  e procedere oltre?

L'approccio al problema richiede una qualche sistematizzazione dei calcoli (ad esempio quella proposta in figura 91).

Si deve far notare che questo approccio non fornirà alcuna informazione sugli istanti di tempo in cui il sistema assume una data configurazione.

Cionondimeno è interessante introdurre nella tabella l'idea di ordine temporale; difatti capita a questo punto che più d'uno si renda conto che il processo è



reversibile, ossia tutte le configurazioni possono essere riattraversate in ordine temporale inverso: di solito la considerazione viene espressa in questi termini:

Ma in questo modo il corpo va avanti e indietro per sempre!

Questa è senz'altro una buona occasione per gettare le basi della futura introduzione dell'entropia e dell'idea di processo reversibile.

istante	Molla 1 $\frac{1}{2}mv^2$	Corpo $\frac{1}{2}k_1\xi_1^2$	Molla 2 $\frac{1}{2}k_2\xi_2^2$	Campo $mgz$	$\mathcal{E}_{\text{mecc}}(t)$
$t_A$	0.0 J	36.0 J	0.0 J	88.2 J	124.2 J
$t_B$	36.0 J	0.0 J	0.0 J	88.2 J	124.2 J
$t_C$	124.2 J	0 J	0.0 J	0 J	124.2 J
$t_D$	13.95 J	0.0 J	0.0 J	110.25 J	124.2 J
$t_E$	0.0 J	0.0 J	13.95 J	110.25 J	124.2 J

Figura 91: In ogni intervallo di tempo avviene un processo che trasferisce l'energia da un portatore all'altro (le frecce tratteggiate rappresentano, senza troppe pretese, questi trasferimenti). Con la tabella organizziamo in modo efficiente il calcolo dei singoli accumuli di energia in un dato istante, ricordando che l'energia meccanica totale rimane costante.

La sintesi finale di questa fase del lavoro potrebbe essere:

Tutte le volte che il sistema è isolato, e non include né motori né interfacce di attrito, possiamo applicare l'idea di conservazione dell'energia meccanica totale.

In definitiva, penso che si possa e si debba eliminare dal gioco il concetto di lavoro, e quando è il caso limitarci a tracciare i grafici dell'energia potenziale - mettendo in relazione gli accumuli di energia nelle molle e nei campi con una opportuna variabile di configurazione.

Possiamo invece mantenere la definizione di lavoro, operando come mostrato nei grafici nelle figure 89 e 90, senza entrare in ulteriori dettagli, se ci sembra che sia importante mantenere la corrispondenza con l'approccio tradizionale.

## 11 Oltre la dinamica

Nel cielo apparve poi un segno grandioso: una donna vestita di sole, con la luna sotto i suoi piedi e sul suo capo una corona di dodici stelle. Era incinta e gridava per le doglie e il travaglio del parto. Allora apparve un altro segno nel cielo: un enorme drago rosso, con sette teste e dieci corna e sulle teste sette diademi; la sua coda trascinava giù un terzo delle stelle del cielo e le precipitava sulla terra. Il drago si pose davanti alla donna che stava per partorire per divorare il bambino appena nato.

*San Giovanni, "Apocalisse" 12, I-IV*

L'APPARATO DELLA dinamica fondato da Newton si basa in particolare su un assunto riduzionistico: si suppone che tutti i fenomeni possano essere ricondotti ad interazioni tra corpi puntiformi, misurate dall'intensità di coppie azione-reazione.

Questa neonata disciplina aveva subito permesso di affrontare problemi di balistica e di meccanica celeste, con esiti soddisfacenti.

Essa però era destinata a crollare sotto i colpi di maglio della Termodinamica e, più avanti, dello studio sui sistemi dinamici avviati da Henri Poincaré.

La Termodinamica richiese l'introduzione di nuove variabili di stato, grazie alle quali si potevano determinare accumuli e trasferimenti di energia necessari per garantire i bilanci energetici.

Lo studio dei sistemi dinamici mostrò i limiti del paradigma deterministico, sancito in prima istanza dall'impossibilità di trovare una soluzione generale del problema dei tre corpi.

In entrambi i contesti, sia pur in modo differente, emerge la questione della freccia del tempo.

Seguire l'evoluzione di sistemi in cui agiscono le forze di attrito o forze di origine muscolare è impossibile fino a quando circoscriviamo il discorso nell'ambito delle grandezze della meccanica (quantità di moto e velocità).

Ciò si può vedere come impossibilità di impostare l'equazione del bilancio energetico, fino a quando si prendono in considerazione solo i portatori meccanici; o, in altri termini, come impossibilità di giustificare l'esistenza di processi irreversibili.

Possiamo progettare diverse esperienze che mostrano i limiti della dinamica di Newton.

Gli allievi assisteranno così al crollo dello schema costruito nel corso del primo anno e dei primi mesi del secondo anno di Fisica.

Rimarranno le ceneri dello schema, ma si vedrà presto che il linguaggio dei portatori è adatto per ampliare il discorso ed includere sia i processi termici sia quelli chimici: dalle ceneri sorgerà una teoria più ampia e solida.

**Prerequisiti**

1. Conoscere la legge dell'interazione di attrito, e saper risolvere i problemi più semplici usando il II e il III principio;
2. Saper associare a tutte le coppie azione-reazione le correnti corrispondenti;
3. Conoscere il concetto di potenza meccanica;
4. Aver affrontato la soluzione di semplici problemi (forza costante, caduta libera, oscillatore) con i programmi di calcolo numerico.

**Obiettivi**

1. Formulare considerazione energetiche sui problemi che coinvolgono gli attriti.
2. Introdurre l'entropia con l'equazione di processo  $T\pi_S = v_{rel}\mathcal{I}_{p,att}$ .
3. Introdurre il principio  $\pi_S \geq 0$  e il concetto di processo irreversibile.
4. Introdurre il principio di minimo dell'energia potenziale.

## 11.1 Il crollo della meccanica

L'azione muscolare e le interazioni di attrito sono il punto di attacco ideale.

Possiamo considerare, in prima istanza, alcune situazioni dal punto di vista qualitativo; così facendo potremo mostrare che gli accumuli di energia presi in considerazione nella teoria della dinamica non sono sufficienti per garantire il bilancio energetico.

### L'esperienza dei palmi delle mani

Una persona sfrega velocemente, l'uno contro l'altro, i palmi delle mani - forse ha freddo (figura 92).

Nell'apparato locomotore si stabilisce una corrente di quantità di moto che cambia periodicamente di verso; dal punto di vista del bilancio energetico, il risultato netto è un trasferimento di energia ad un tasso temporale che in prima approssimazione può essere considerato costante.

Un ragionamento dettagliato sui segni delle correnti e delle velocità mostra che:

1. l'energia cinetica delle due mani è costante e pari a  $\frac{1}{2}mv_{rel}^2$ , dove  $v_{rel}$  è la velocità relativa tra le due mani (costante a meno del segno);
2. la corrente di energia che fluisce dall'apparato locomotore alle mani è positiva e costante, e pari a  $-\mathcal{I}_{att}v_{rel}$ .

(vedi i grafici raccolti in figura 93, nei quali tra l'altro stabilisco la convenzione dei segni<sup>23</sup>).

Il principio di conservazione dell'energia, applicato al sistema delle due mani, stabilisce pertanto che nell'interfaccia (costituita dai due palmi a contatto) si deve sviluppare una potenza meccanica negativa:

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{E}}_{cin} &= -\mathcal{I}_{att}v_{rel} + \mathcal{P}_{mecc} \\ \dot{\mathcal{E}}_{cin} &= 0\end{aligned}$$

Questa potenza meccanica misura un deficit di energia accumulata dalla quantità di moto: difatti, nonostante il trasferimento costante, l'energia cinetica delle mani non cambia.

Affinché il concetto di energia diventi concreto, dobbiamo capire dove viene accumulata l'energia mancante. Vediamo così che si rende necessario individuare

<sup>23</sup>Non ho esaminato il dettaglio del cambiamento di verso delle velocità: è complicato e non pertinente in questo contesto.

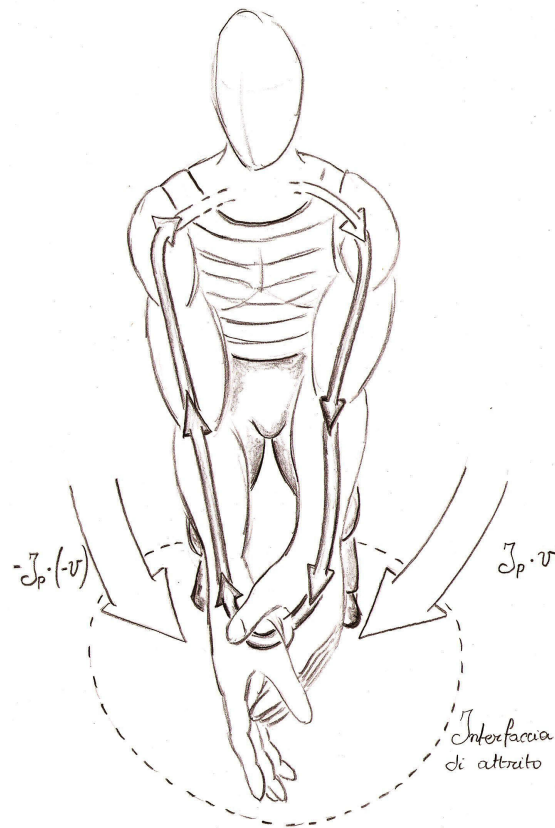


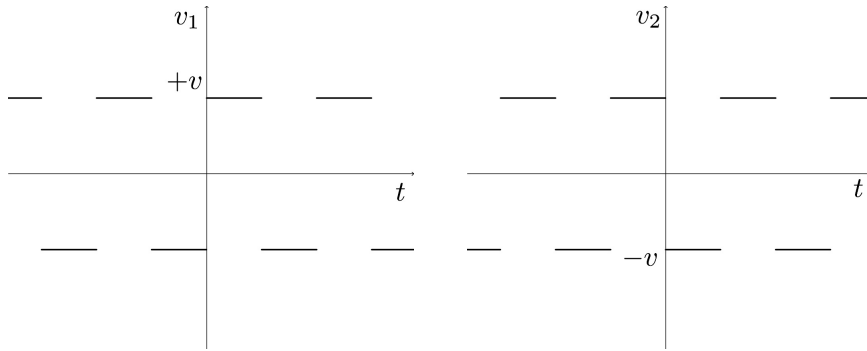
Figura 92: Attraverso il movimento alternato delle braccia, nel sistema costituito dalla due mani entra una corrente di energia costante pari a  $v_{rel} \cdot \mathcal{I}_p$ . Dato che la velocità di ciascuna mano, a parte il segno, rimane approssimativamente costante, anche l'energia calcolata con la formula  $\frac{1}{2}mv^2$  rimane costante: dove finisce l'energia fornita dalle braccia? E da dove viene questa energia, visto che il resto del corpo dell'uomo rimane fermo?

un nuovo portatore, finora sconosciuto nell'ambito della teoria di Newton; dato che la temperatura delle mani aumenta in questo processo, possiamo cominciare a parlare, in modo generico, di **portatore termico**: più avanti potremo chiarire la sua natura.

Nell'interfaccia, pertanto, si sviluppa una potenza termica positiva, di entità pari alla potenza meccanica, in modo che sia garantito il bilancio:

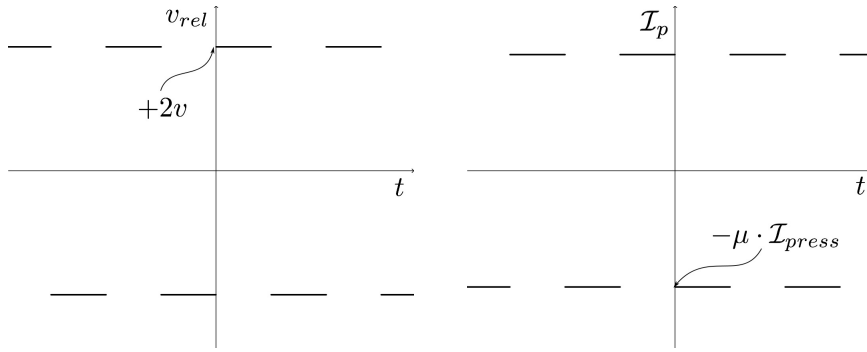
$$\mathcal{P}_{term} + \mathcal{P}_{mecc} = 0$$

Questa equazione misura la rapidità con la quale l'energia viene trasferita dal portatore meccanico a quello termico; quando avremo trovato le giuste variabili termiche potremo determinare l'entità dell'accumulo di energia ad esse



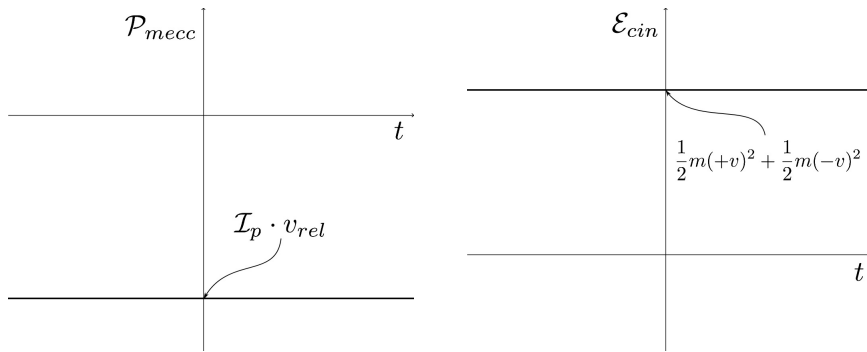
(a) La mano sinistra si muove avanti e indietro: in prima approssimazione possiamo assumere che il valore della velocità sia costante.

(b) La mano destra si muove alla stessa modo di quella di sinistra, ma quando la prima avanza la seconda recede, e viceversa.



(c) La velocità relativa tra le due mani,  $v_{rel} \stackrel{def}{=} v_1 - v_2$ , è pari al doppio della velocità della mano sinistra.

(d) L'intensità della corrente di quantità di moto è costante; per convenzione  $\mathcal{I}_p$  è positiva quando entra nella mano sinistra.



(e) Dato che  $v_{rel}$  e  $\mathcal{I}_p$  hanno sempre segno opposto, la potenza meccanica sviluppata nelle mani è negativa.

(f) L'energia cinetica del sistema delle due mani è costante, perché l'intensità della velocità di ciascuna mano è costante.

Figura 93: La corrente di energia che entra nelle mani ha pari intensità ma verso opposto alla potenza meccanica sviluppata nelle mani, e l'energia cinetica è costante:  $\dot{\mathcal{E}}_{cin} = 0$  così come  $\mathcal{I}_E + \mathcal{P}_{mecc} = 0$ . Ma dove va a finire l'energia dissipata a causa dell'attrito?

associate e scrivere una seconda equazione di bilancio, questa volta localizzato all'interfaccia:

$$\dot{\mathcal{E}}_{term} = \mathcal{P}_{term}$$

Concentriamoci ora sull'apparato locomotore; possiamo suddividerlo, rozza-mente, in due parti rigide: il tronco (immobile) e il sistema costituito dagli avambracci e dalle mani (in movimento). Il complesso spalla-bicipite, in quest'ottica approssimativa, è l'interfaccia tra una parte immobile (il tronco) e una parte in movimento (gli avambracci).

La corrente di quantità di moto attraversa i bicipiti e lì si carica di energia: la potenza di questo processo è pari, ma di segno opposto, a quella che avviene nel palmo delle mani. Anche in questo modo mostriamo la necessità di un ulteriore portatore non meccanico.

In seconda liceo gli allievi hanno già studiato, nel corso di Biologia, il ruolo delle trasformazioni chimiche (in particolare della dissociazione di ATP) nell'attività muscolare; non sarà quindi difficile evocare, durante la lezione, un generico **portatore chimico**.

Se osserviamo poi che ad ogni movimento è associata quella che - impropriamente - viene chiamata "produzione di calore", vediamo che in questo processo è anche coinvolto un portatore termico; arriviamo così all'equazione che misura la rapidità del processo localizzato nell'interfaccia spalla-bicipite:

$$\mathcal{P}_{chim} + \mathcal{P}_{term} + \mathcal{P}_{mecc} = 0$$

Qui la potenza chimica è negativa, e le altre due sono positive.

### L'esperienza della palla

Questa parte del corso è nata in seguito alla discussione di un esercizio che, a prima vista, sembrava del tutto innoquo.

#### ESERCIZIO

Dopo avere ricevuto 19.2 J tramite un portatore meccanico, un corpo, si muove alla velocità di  $+5.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . La massa del corpo è pari a 2.4 kg. Determina la sua velocità iniziale.

Il problema si risolve con l'equazione  $1.2 \text{ kg} \cdot v_{in}^2 + 19.2 \text{ J} = 30 \text{ J}$ , e le soluzioni sono  $v_{in} = \pm 3.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

Dal punto di vista algebrico è ovvio che debbano essere due soluzioni, perché l'equazione è di II grado; ma qual è la loro interpretazione fisica?



Questi dati implicano che trasferendo  $19.2\text{ J}$  possiamo accelerare il corpo da  $+3.0\frac{\text{m}}{\text{s}}$  a  $+5.0\frac{\text{m}}{\text{s}}$ , e con lo stesso trasferimento possiamo accelerarlo anche da  $-3.0\frac{\text{m}}{\text{s}}$  a  $+5.0\frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Se immaginiamo di essere noi il tramite dell'azione meccanica, il risultato può sorprenderci, poiché è senz'altro più "faticoso" ottenere il secondo risultato.

Allora, la questione è in questi termini: *o* il concetto di energia è tanto astratto da non avere alcuna relazione con il buon senso comune; *o* il quadro generale sulla conservazione dell'energia è ancora incompleto.

Per esemplificare la questione, possiamo proporre di costruire un modello puramente meccanico di questa situazione (vedi figura 94) e una situazione che coinvolge l'apparato locomotore (vedi figura 95).

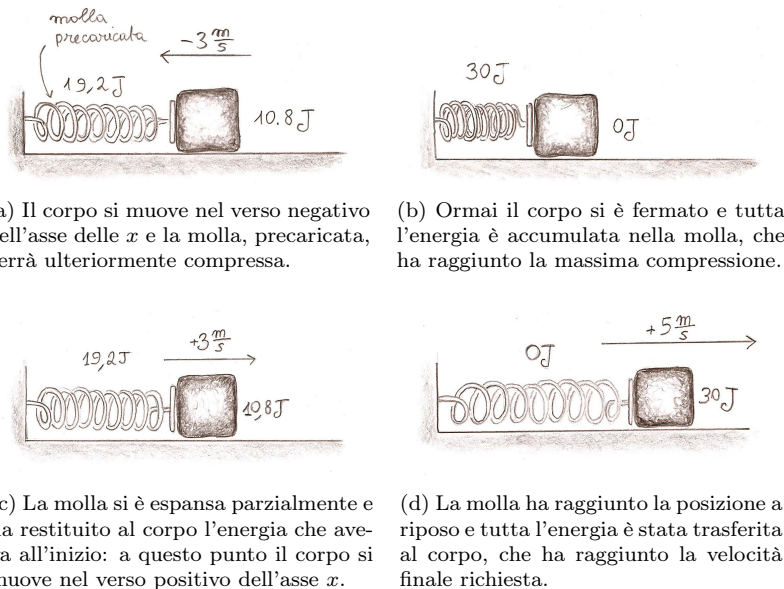
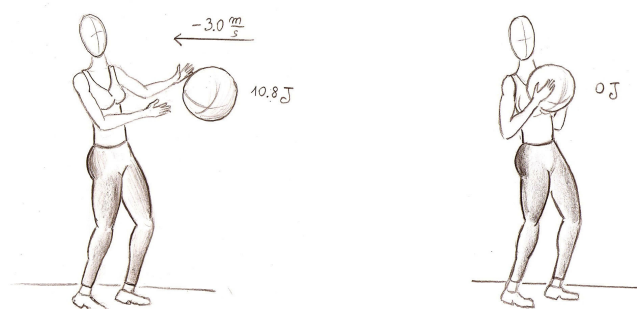


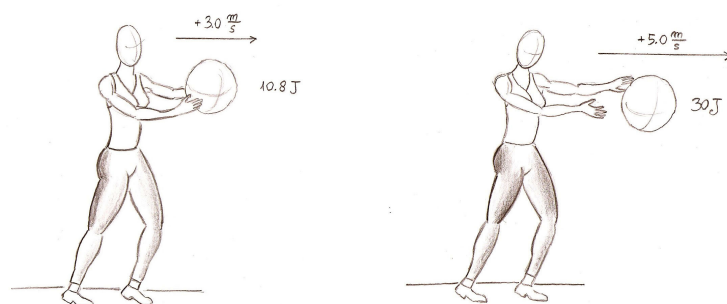
Figura 94: Con questo dispositivo mostriamo come sia possibile portare un corpo da  $v_{in} = -3.0\frac{\text{m}}{\text{s}}$  a  $v_{fin} = +5.0\frac{\text{m}}{\text{s}}$  trasferendogli la stessa quantità di energia necessaria per portarlo da  $v_{in} = +3.0\frac{\text{m}}{\text{s}}$  alla stessa velocità finale; questa quantità di energia deve essere precaricata nella molla e verrà trasferita al corpo non appena vi saranno le condizioni opportune (a partire dalla situazione raffigurata nella terza immagine). Notate che possiamo scambiare passato e futuro nelle prime tre immagini (N.B. In tutte e quattro le immagini l'asse  $x$  è orientato da sinistra verso destra).

Qui abbiamo portato in luce la differenza tra la molla, in grado di accumulare energia su un portatore meccanico (la compressione) e di restituirla in una fase di espansione perfettamente simmetrica, e l'apparato locomotore: ed è proprio su questa differenza che dobbiamo concentrarci.



(a) La palla si muove nel verso negativo dell'asse delle  $x$  e la ragazza, con le braccia parzialmente distese, si prepara a riceverla.

(b) Ormai la ragazza ha bloccato completamente la palla, sottraendole tutta l'energia che aveva all'inizio.



(c) La ragazza ha ridisteso parzialmente le braccia, restituendo alla palla tutta l'energia che aveva all'inizio: ora però la palla si muove nel verso positivo dell'asse  $x$ .

(d) Questo è l'istante finale della fase di spinta: la ragazza ha le braccia completamente distese e ha trasferito alla palla un'ulteriore quantità di energia.

Figura 95: La ragazza è senz'altro un dispositivo più complesso della molla. Dobbiamo chiederci: dov'è finita l'energia sottratta alla palla nella fase tra  $-3.0 \frac{m}{s}$  a  $0 \frac{m}{s}$ ? Senz'altro nella ragazza, ma in qual modo è stata accumulata? E da dove proviene l'energia trasferita alla palla nelle due fasi successive? Anche qui, senz'altro dalla ragazza. Notate che l'energia ricevuta dall'atleta nella prima fase non può certo essere utilizzata per faticare meno nelle due fasi successive: in questo caso, quindi, non possiamo scambiare passato e futuro nelle prime tre immagini (N.B. In tutte e quattro le immagini l'asse  $x$  è orientato da sinistra verso destra).

Possiamo abbozzare un'interpretazione approssimativa di questa differenza in questo modo.

- Nella prima fase, in cui la ragazza deve bloccare la palla, la potenza meccanica sviluppata nelle braccia è negativa: difatti la loro velocità è negativa, mentre la corrente di quantità di moto scorre dalle mani alla palla, e quindi nel verso positivo dell'asse delle  $x$ . Alla fine di questa fase tutta la

quantità di moto è stata sottratta alla palla: vediamo l'analogia con il fenomeno dell'attrito radente, che ferma un corpo senza poterlo poi rimettere in movimento.

Già con l'esempio delle due mani abbiamo associato alle correnti di attrito una potenza termica; possiamo così scrivere l'equazione per questo processo:

$$\mathcal{P}_{term} + \mathcal{P}_{mecc} = 0$$

Anche qui la potenza deve essere positiva: l'energia è stata trasferita dalla quantità di moto ad un portatore non meglio definito, che non potrà restituire l'energia ricevuta semplicemente invertendo il processo.

- Nella seconda e nella terza fase la potenza meccanica è positiva e, dato che l'energia accumulata nella prima fase non può essere utilizzata, dobbiamo individuare il processo che rende possibile il movimento.

Come nel caso delle due mani, anche qui possiamo invocare le reazioni chimiche che consentono l'attività muscolare, e quindi l'equazione del processo (includendo la potenza termica) è ancora

$$\mathcal{P}_{chim} + \mathcal{P}_{term} + \mathcal{P}_{mecc} = 0$$

Tutto ciò ha un senso solo se potremo individuare il portatore termico ed il portatore chimico: solo a questo punto il principio di conservazione dell'energia diventerà operativo.

### **Torniamo al baricentro**

Le due situazioni che ho descritto sono senz'altro difficili da un punto di vista tecnico; questo è il momento di tornare all'esempio chiave del corso, che ci permetterà di introdurre sia il portatore termico sia quello chimico (figura 96).

Interporre tra l'apparato locomotore e il blocco una macchina semplice non è necessario, ma permette quando il caso di ribadire la distinzione tra la rapidità con cui l'energia fluisce da una parte all'altra del sistema, e legata al flusso del portatore meccanico, e la potenza, che misura la rapidità del trasferimento di energia da un portatore all'altro in un processo.

## **11.2 Attrito**

A lezione possiamo dedicare un po' di tempo a studiare questo fenomeno, e potremo così introdurre l'entropia nell'ambito della dinamica.

L'esempio chiave ci porta a studiare l'attrito radente, ma potremo allargare il discorso anche all'attrito viscoso.

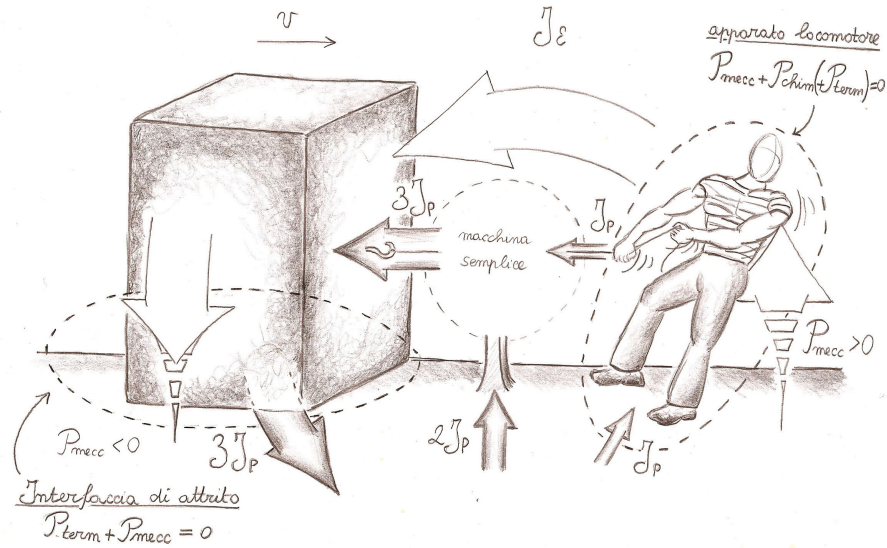


Figura 96: In un solo esempio, possiamo visualizzare due distinti processi: il primo, chimico-meccanico, localizzato nell'apparato locomotore, e descritto dall'equazione di processo  $\mathcal{P}_{mecc} + \mathcal{P}_{chim} = 0$ ; il secondo, meccanico termico, localizzato nell'interfaccia di attrito, e descritto dall'equazione di processo  $\mathcal{P}_{term} + \mathcal{P}_{mecc} = 0$ .

### Attrito radente

Facciamo riferimento alla figura 96 e concentriamoci sul sottosistema corpo+Terra, includendo come terzo componente l'interfaccia di attrito.

L'equazione di continuità per il sottosistema è

$$\dot{\mathcal{E}}_{corpo+Terra} + \dot{\mathcal{E}}_{interfaccia} = \mathcal{I}_{p,x} v_x$$

( $\mathcal{I}_p$  è la corrente di quantità di moto che passa dalla macchina semplice al corpo, mentre  $v$  è la velocità del corpo rispetto al suolo).

Se, per ipotesi, il corpo si muove a velocità costante,  $\mathcal{I}_{p,x} = \mu mg$  e

$$\dot{\mathcal{E}}_{corpo+Terra} = 0$$

e quindi

$$\dot{\mathcal{E}}_{interfaccia} = \mu mg v_x$$

Se consideriamo separatamente il sottosistema corpo+Terra e l'interfaccia

avremo invece

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{E}}_{\text{corpo}+\text{Terra}} &= \mu mgv_x + \mathcal{P}_{\text{mecc}} \\ \dot{\mathcal{E}}_{\text{interfaccia}} &= \mathcal{P}_{\text{termica}}\end{aligned}$$

e quindi troviamo subito

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\text{mecc}} &= -\mu mgv_x \\ \mathcal{P}_{\text{termica}} &= -\mathcal{P}_{\text{mecc}}\end{aligned}$$

Questo è un gioco in cui le singole quantità, come  $\mathcal{I}_p v$ , hanno interpretazioni diverse a seconda del contesto in cui ci troviamo. Dato che non è evidente riuscire a cambiare facilmente punto di vista, possiamo allenare questa capacità in semplici esercizi, in cui non ci proponiamo di legare le correnti e le potenze ai portatori, ma solo di garantire il bilancio energetico e di dare ad ogni quantità la giusta interpretazione.

#### ESERCIZIO

Il corpo viene trainato orizzontalmente, grazie ad una macchina semplice, a velocità costante. La potenza del motore è pari a 25 kW. Scrivi le equazioni di bilancio e le equazioni di processo per i seguenti sistemi:

1. L'apparato locomotore.
2. Il sistema corpo+Terra.
3. Il sistema corpo+Terra+interfaccia.
4. Il sistema apparato locomotore+corpo.
5. Il sistema che include tutti i componenti.

Ora è il momento di ricorrere all'analogia e forzare l'introduzione dell'entropia.

Osserviamo anzitutto che  $\dot{\mathcal{E}}_{\text{corpo}+\text{Terra}}$  si può calcolare con la relazione  $v_x \dot{p}_x$ ; difatti, se torniamo con gli allievi alla figura 76 e alle deduzioni che abbiamo svolto per ricavare l'espressione  $\frac{1}{2}mv^2$ , possiamo mostrare che

$$\dot{\mathcal{E}}_{\text{corpo}+\text{Terra}} = mv_x \cdot \dot{v}_x = v_x \cdot m\dot{v}_x$$

Potremo ribadire questa relazione mostrando che se si moltiplica l'equazione di continuità,  $\dot{p}_x = \mathcal{I}_{p_x}$  per  $v_x$  da entrambi i lati si ottiene  $v_x \dot{p}_x = \mathcal{I}_{\mathcal{E}}$ , e da qui con l'equazione di continuità per l'energia torniamo proprio a

$$\dot{\mathcal{E}}_{\text{corpo}+\text{Terra}} = v_x \dot{p}_x$$

Questa è la base per una prima analogia, per ora incompleta, che ci guiderà nei prossimi passi.

**TESTO**

Come si manifesta un accumulo di quantità di moto? Ciò che osserviamo è che il corpo si muove ad una certa velocità  $v$ . Non è possibile un trasferimento netto di quantità di moto dall'ambiente ad un corpo senza che esso si metta in movimento.

Che cosa osserviamo, invece, nell'interfaccia di attrito? Se trascuriamo i dettagli più complessi, ciò che da subito attira la nostra attenzione è che la temperatura dell'interfaccia aumenta. Teniamo presente che stiamo cercando di individuare un nuovo portatore, in grado di garantire il necessario accumulo di energia nell'interfaccia; così come la velocità  $v$  è associata al portatore  $p$ , allo stesso modo la temperatura  $T$  deve essere associata al nuovo portatore.

Quando la quantità di moto attraversa l'interfaccia, passando da un potenziale elevato a uno inferiore, le cede energia, che deve, per così dire, "farsi spazio", e ciò implica la produzione di un certo quantitativo di un portatore termico. Questa produzione si manifesterà in un aumento di temperatura.

Indicheremo con  $S$  il nuovo portatore e lo chiameremo entropia. Per analogia, esso deve rispettare l'equazione

$$\dot{\mathcal{E}}_{\text{interfaccia}} \stackrel{\text{def}}{=} T \dot{S} \quad (91)$$

La rapidità con cui aumenta l'entropia accumulata nell'interfaccia è dovuta, in prima istanza, ad un processo di *creazione*. Il simbolo  $\pi_S$  è sufficientemente suggestivo per rappresentare il tasso di creazione di  $S$ :

$$T \pi_S \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\mathcal{E}}_{\text{interfaccia}}$$

$$[\pi_S] = \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{s}}$$

Questa va intesa come una definizione operativa; sulla sua validità ci potremo esprimere solo quando prenderemo in considerazione processi puramente termici (in questo senso il procedimento delineato non si discosta da quello esposto da Enrico Fermi nel libro *Termodinamica*).

Non ripeterò qua le considerazioni che ho già esposto altrove: se lo riteniamo didatticamente opportuno, possiamo dare un nome all'unità di misura S.I.; questo nome è già stato proposto ed è il Carnot:  $[S] = \text{Ct}$ .

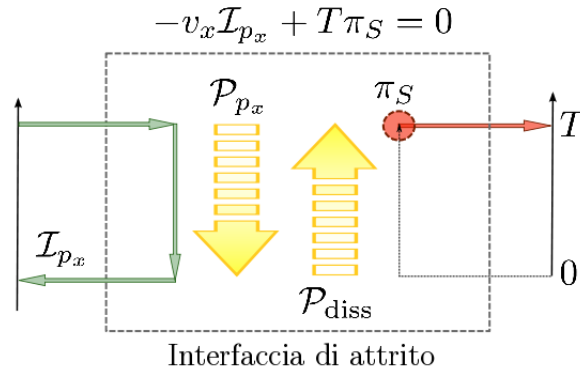


Figura 97: La corrente di quantità di moto esce dal corpo a velocità  $v_x$  e, dopo avere attraversato l'interfaccia, entra nel suolo a velocità 0: si sviluppa così una potenza meccanica negativa; l'interfaccia è la sede della creazione di entropia, al tasso temporale necessario affinché la potenza termica positiva abbia la stessa entità di quella meccanica.

Dalla definizione operativa di  $\pi_S$  discende immediatamente  $[S] = \frac{\text{J}}{\text{s}\cdot\text{K}}$  e anche  $1 \text{ Ct} \stackrel{\text{def}}{=} 1 \frac{\text{J}}{\text{K}}$ .

Per fare un esempio concreto: se in un dato istante  $T_{\text{interfaccia}} = 300 \text{ K}$ , la massa del corpo è  $m = 80 \text{ kg}$ , il coefficiente di attrito è  $\mu = 0.12$  e la velocità è  $5.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , il tasso istantaneo di produzione di entropia è  $\dot{\pi}_S \cong 1.6 \frac{\text{Ct}}{\text{s}}$ .

In qual modo potremo seguire ciò che accade in un intervallo di tempo finito? Il problema è che la temperatura del sistema aumenterà gradualmente proprio a causa della creazione di entropia, che si farà vieppiù lenta: ciò conduce ad un sistema di equazioni differenziali accoppiate che non possiamo certo proporre in II liceo.

Se decidiamo che è il caso di approfondire la questione, possiamo utilizzare un programma di calcolo numerico a pittogrammi.

Ho deciso di mostrare qui il modello per simulare un oscillatore lineare con attrito radente (figura 98).

Dopo avere costruito il modello possiamo avviare la simulazione e visualizzare in grafico i risultati: in figura 99 ho riportato anzitutto l'energia cinetica e quella elastica. L'energia accumulata nell'interfaccia può essere calcolata semplicemente a partire da  $\mathcal{P}_{\text{mecc}}$  e l'energia totale è la somma di tutte e tre gli accumuli.

Con questo modello sottolineiamo la caratteristica fondamentale del presente approccio: abbiamo introdotto l'entropia per garantire il bilancio energetico.

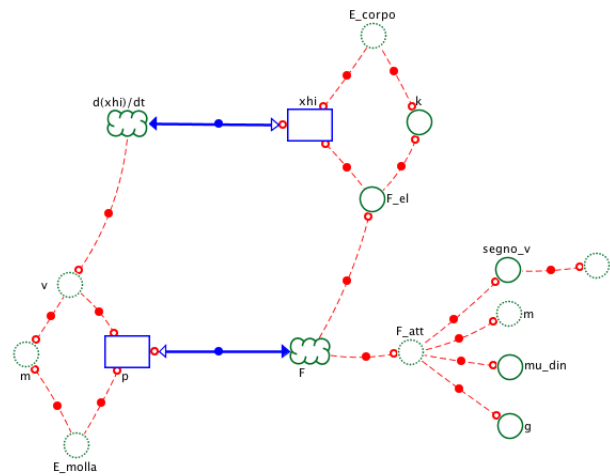


Figura 98: *Oscillatore con attrito*. Questo è il modello che rappresenta il sistema di equazioni differenziali  $\dot{\xi} = v_x$  e  $p_x = -k\xi - \mathcal{I}_{att}$ , dove la corrente di attrito ha intensità  $\mu mg$  e si oppone sempre alla velocità del corpo (la funzione “segno\_v” ha proprio la funzione di far decidere al programma il verso della corrente).

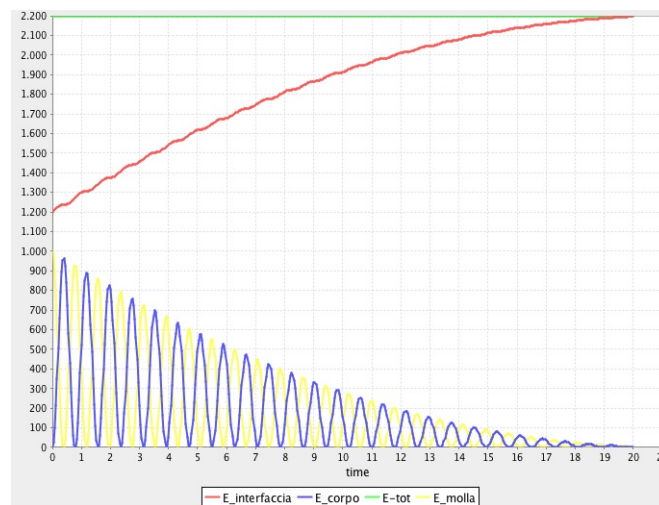


Figura 99: L'energia accumulata nell'interfaccia aumenta nel tempo.

Dal grafico si vede che l'energia del sistema costituito da blocco+Terra e dalla molla diminuisce ad ogni periodo, eppure non vi sono altri portatori meccanici: il principio di conservazione dell'energia può essere salvaguardato introducendo il portatore termico,

Per potere inserire la temperatura e l'entropia nel modello dobbiamo prima conoscere qualche cosa di equivalente ad una relazione costitutiva che legghi l'entropia alla temperatura, il che si riduce, quando è possibile, a stabilire la



forma della funzione  $S(T)$ . Dobbiamo così rimandare la questione ad una fase successiva.

### Attrito viscoso

Quando un corpo compatto si muove in aria, subisce in prima approssimazione l'effetto di una forza di attrito viscoso proporzionale al quadrato della velocità relativa del corpo rispetto all'aria:

$$\mathcal{I}_{att} = \lambda v_{rel}^2 \quad (92)$$

Se il corpo sta cadendo, l'azione dell'aria aumenta progressivamente, fino a quando la velocità raggiunge un valore di regime:

$$\dot{p}_z = 0 \implies \lambda v_{rel}^2 = mg$$

Nell'analogia idraulica, questo è il caso dello stato stazionario trattato nel capitolo 6.3. Quando propongo la costruzione del modello mi sembra una buona idea orientare l'asse  $z$  verso il basso (così che la Terra si trova "gravitazionalmente" in alto rispetto al corpo, vedi figura 100).

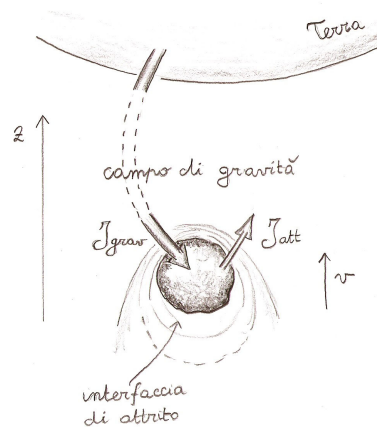


Figura 100: La corrente di quantità di moto attraversa il campo gravitazionale, caricandosi di energia, ed entra nel corpo. La corrente di attrito esce dal corpo, attraversando l'interfaccia corpo-aria immobile, costituita da alcuni strati che aderiscono l'uno sull'altro e l'ultimo alla superficie del corpo: in questo passaggio la corrente scarica energia.



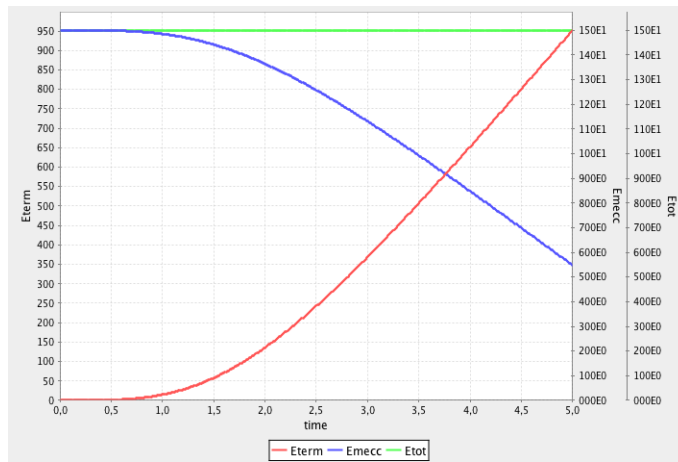


Figura 102: L'energia cinetica raggiunge, assieme alla velocità, un valore di regime, e da questo punto in avanti l'energia meccanica inizia a diminuire sensibilmente. L'energia mancante deve essere caricata sul portatore termico.

### 11.3 Il principio di minimo

Il principio del minimo dell'energia potenziale meccanica può essere messo in relazione con la legge dell'aumento di entropia.

Abbiamo visto nella sezione 10.4 che nei problemi meccanici con un solo grado di libertà (che indico con  $\zeta$ ) il metodo dell'energia potenziale prevede che si determini anzitutto la funzione  $\mathcal{E}_{pot}(\zeta)$ , che è la somma di tutti gli accumuli di energia nei sistemi mediatori espressa in funzione dell'unico grado di libertà.

Ricordiamo a questo punto che per definizione l'energia meccanica totale è la somma di questi due termini:

$$\mathcal{E}_{mecc} = \mathcal{E}_{cin} + \mathcal{E}_{pot}$$

Se scriviamo l'equazione di processo per le parti che compongono il sistema dobbiamo includere tutte le potenze termiche corrispondenti ai termini di produzione di entropia nelle interfacce:

$$\dot{\mathcal{E}}_{mecc} = - \sum_i T_i \pi_{S,i} \leq 0 \quad (93)$$

L'energia cinetica è comunque positiva e quindi  $\mathcal{E}_{mecc} \geq \mathcal{E}_{pot}$ . Così nel corso del processo l'energia meccanica diminuisce costantemente nel tempo, ma rimane in ogni caso più grande del valore che ha l'energia potenziale nello stesso istante.

Possiamo esprimere il tutto in altro modo: poiché l'energia meccanica diminuisce costantemente, ad ogni istante la quantità di energia a disposizione, per

così dire, dei sistemi mediatori, diminuisce, e l'energia potenziale è costretta ad avvicinarsi al suo valore minimo.

Si giustifica così la ricerca dei **minimi locali** della funzione  $\mathcal{E}_{pot}$ , ossia i valori di  $\zeta$  per i quali

$$\mathcal{E}'_{pot}(\zeta) = 0$$

e si interpretano questi valori in quanto posizioni di **equilibrio stabile**.

#### TESTO

Qual è il ruolo dell'attrito nel bilancio energetico?

Sappiamo che i corpi accumulano energia, per un'entità pari a  $\frac{1}{2}mv^2$  per ciascun corpo; che le molle accumulano l'energia  $\frac{1}{2}k\xi^2$  e il campo di gravità (vicino alla superficie terrestre) la quantità di energia  $mgz$ .

Se proprio vogliamo usare le parole più comuni, possiamo chiamare energia meccanica il totale di questi accumuli in un sistema qualsiasi.

Attraverso l'interazione di attrito, l'energia passa in ogni istante dal portatore meccanico a quello termico, e l'entropia viene creata; il processo inverso non è possibile, perché l'entropia non può in nessun caso essere distrutta.

Così il quantitativo di energia meccanica che all'inizio si ripartiva tra i vari portatori meccanici (corpo, molla e campo) diminuisce istante dopo istante, e questi portatori ne hanno sempre meno.

Che cosa succederà alla fine?

Quale sarà il valore finale dell'energia cinetica in questo processo? E il valore finale dell'energia potenziale?

Se una quantità qualsiasi diminuisce costantemente, il suo valore finale sarà il minimo possibile. Così l'energia cinetica, che non può essere negativa, si annullerà (e infatti ci aspettiamo che, sotto l'azione degli attriti, ogni movimento venga alla fine esaurito).

Anche l'energia potenziale raggiungerà il suo valore minimo, che dovete cercare partendo dal grafico che lo rappresenta.

#### ESERCIZI

1. Un corpo è attaccato ad una molla sospesa verticalmente; determina l'energia potenziale, rappresentala in grafico e calcola la posizione del suo minimo.
2. Costruisci il modello dell'esercizio precedente e verifica che le oscillazioni smorzate convergono verso la posizione di equilibrio stabile.

Per risolvere facilmente il problema collochiamo  $z = 0$  nel punto in cui la molla è a riposo, così  $z = -\xi$ ; in questo modo otteniamo una parabola che ha un

minimo in  $\xi = \frac{mg}{k}$ : sarà interessante a questo punto far notare che allo stesso risultato si arriva dall'equazione  $k\xi - mg = 0$ .

Confrontando i risultati dei due esercizi, potremo facilmente tratteggiare il concetto di posizione di equilibrio stabile.

Qui c'è una buona occasione per gettare uno sguardo verso i temi di ricerca attuali.

Possiamo preparare, ad esempio, una facile esperienza qualitativa: un carrellino oscilla in un binario con due avvallamenti, separati da un dosso; in questo caso gli attriti non sono trascurabili, né vorremmo eliminarli perché sono il succo della questione (anche se è interessante fare in modo che siano di piccola entità, affinché il carrello possa compiere molte oscillazioni).

Si intuisce subito che ci sono due scenari possibili: il carrello, dopo un certo tempo, verrà confinato in una delle due buche.

Se vogliamo realizzare la simulazione dell'esperimento, senza avventurarci nelle difficoltà relative al profilo del binario (non è proprio il caso) possiamo modificare leggermente il modello dell'oscillatore con attrito radente, sostituendo alla forza elastica una funzione cubica (vedi figura 103).

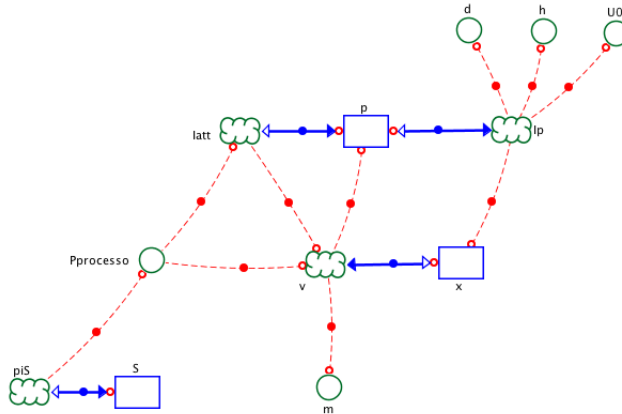
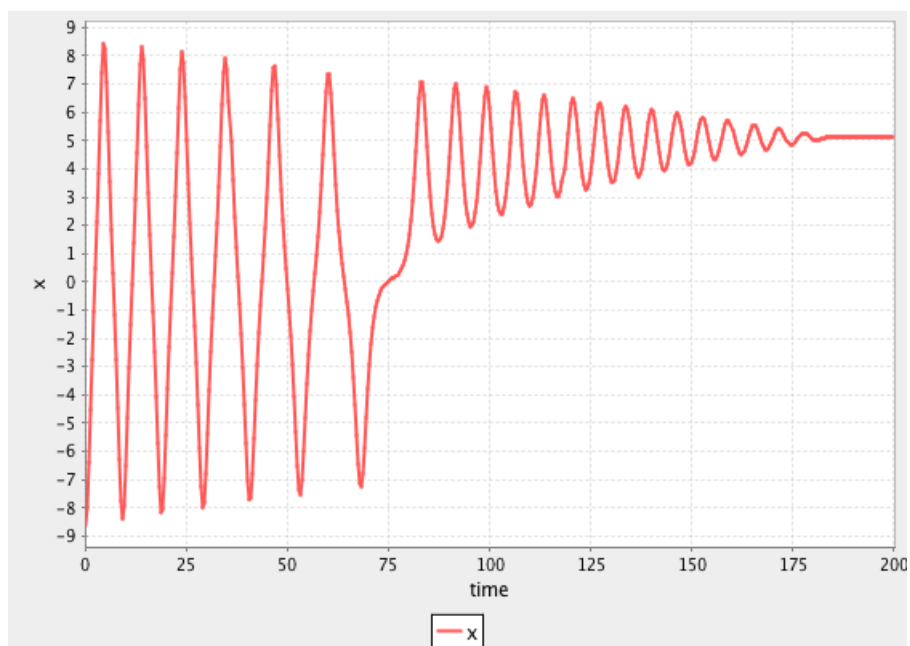
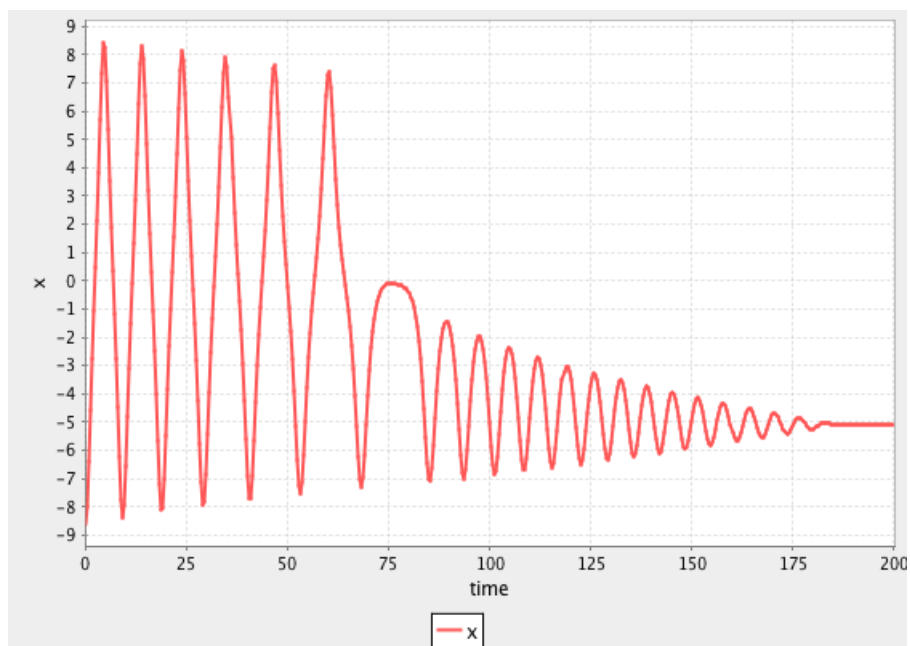


Figura 103: L'intensità della corrente di quantità di moto legata all'energia potenziale è  $\mathcal{I}_p = -\frac{\epsilon}{h} \left( 4 \left( \frac{x}{d} \right)^3 - 26 \frac{x}{d} \right)$ , ossia la forza conservativa associata al potenziale biquadratico  $\mathcal{E}_{pot}(x) = \epsilon \left( \left( \frac{x}{d} \right)^2 - 9 \right) \left( \left( \frac{x}{d} \right)^2 - 4 \right)$ ; i dati della simulazione sono:  $d = 2$  m,  $h = 10$  m,  $\epsilon = 1$  J (questi parametri sono utili per regolare la profondità e l'ampiezza delle buche di potenziale);  $m = 2.5$  kg,  $\mathcal{I}_{att} = 0.1$  N. Metodo di integrazione: Runge-Kutta-4 con  $dt = 0.01$  s.

Ad ogni passaggio, ad ogni, per così dire, "scollinamento", l'energia a disposizione di questo oscillatore sarà sempre più piccola, fino a quando il corpo non sarà in grado di attraversare la barriera centrale: si tratta di stabilire in quale buca il corpo si trova quando ciò avviene.



(a) A causa dell'attrito, il corpo sarà alla fine confinato nella buca a destra.



(b) In questo caso il corpo verrà confinato nella buca di sinistra.

Figura 104: Una piccolissima variazione del valore iniziale conduce il sistema a futuri completamente diversi: la simulazione mostra che  $x_1 = 8.580$  m e  $x_2 = 8.582$  m danno luogo a futuri diversi.

Scegliendo in modo opportuno il valore iniziale della posizione, possiamo precipitare il sistema in uno dei due possibili scenari (vedi figura 104). Gli intervalli di valori che fanno precipitare il corpo nella buca di sinistra, e quelli dei valori che fanno precipitare il corpo nella buca di destra, sono separati da valori critici.

Questo è un sistema-giocattolo che mostra come il concetto di evoluzione possa emergere anche nelle situazioni più semplici.

1. nella sottosezione 10.4 abbiamo considerato sistemi conservativi, in cui tutte le configurazioni vengono percorse ciclicamente in una successione infinita di periodi di tempo indistinguibili: nessuna evoluzione;
2. nella sottosezione 11.2 abbiamo considerato un oscillatore con attrito che evolveva in modo prevedibile verso l'immobilità; qui possiamo prevedere fin dall'inizio il destino del sistema: incontrare la propria morte termica quando tutta l'energia verrà caricata sul portatore entropia;
3. in questo caso, invece, non è possibile determinare il futuro del sistema quando il valore iniziale di  $x$  è troppo vicino a quello critico, ossia tanto vicino che nessuno strumento potrebbe stabilire se è più piccolo o più grande di tale valore; così il sistema incontra ad un certo punto una biforcazione, al di là della quale lo attendono due differenti destini.

Se il tempo lo consente, è possibile mostrare questo modello e far regolare direttamente agli studenti i valori iniziali.

È una parte del corso che non deve essere necessariamente soggetta a valutazione: possiamo investire un po' di energie al solo scopo far intravedere alcune interessanti applicazioni delle leggi fisiche.

È anche il caso di far notare che l'esistenza della biforcazione è associata alla creazione dell'entropia - che impedisce al sistema di ritornare sui propri passi.

## 12 Termodinamica: introduzione

Le stelle e le Galassie morirono e si spensero,  
e lo spazio, dopo trilioni di anni di decadimento, divenne nero...

... Un passo alla volta, così bisognava procedere.

LA LUCE SIA! Disse AC.

E la luce fu...

*Isaac Asimov, "L'ultima domanda"*

ENTROPIA È un termine che discende dalle parole greche *τροπέ* ("trasformazione") e *εν* ("dall'interno"): possiamo tradurre il tutto con l'espressione "rivolgimento interno".

Il concetto ed il termine che lo indica furono introdotti nel 1865 dal fisico tedesco Rudolf Clausius.

Già nella genesi del termine che la indica, questa grandezza fisica è legata al concetto di trasformazione.

Se seguiamo questo filone etimologico, possiamo portare alla luce una relazione interessante del concetto di entropia con la mitologia Greca.

Si narra che la vita è regolata dall'opera delle tre moire (parche nella mitologia Romana): Cloto, Lachesi ed Atropo.

Cloto era la tessitrice, che filava lo stame della vita.

Lachesi era la moira che svolgeva sul fuso lo stame della vita, distribuiva la quantità di vita ad ogni umano e vi decideva il destino.

Atropo aveva il compito di recidere il filo della vita. In greco il nome della parca, *Ἄτροπος*, significa "l'inesorabile, che non si può mutare".

È chiaro con Atropo il riferimento all'ineluttabilità della morte termica di un sistema isolato, quando la trasformazione cessa, ossia il tasso istantaneo di produzione dell'entropia si avvicina asintoticamente a zero. Trovo suggestivo pensare che anche Cloto e Lachesi possano corrispondere a due concetti che dominano lo scenario della Fisica.

Nonostante l'esistenza di questa grandezza fisica abbia notevoli implicazioni, essa è concettualmente più semplice della nozione classica di calore: non appare così irragionevole cominciare la termodinamica proprio con l'entropia.



### **Prerequisiti**

1. Aver capito il ruolo dell'entropia in presenza di forze di attrito.
2. Se possibile, avere già nozioni elementari di termologia.
3. Conoscere il concetto di capacità.
4. Se possibile, aver preparato almeno le più semplici simulazioni al computer.

### **Obbiettivi**

1. Reintrodurre l'entropia nel contesto dei processi puramente termici.
2. Mostrare (se possibile sperimentalmente) che è possibile riscaldare un sistema usando solo l'attrito.
3. Mostrare che esiste una sola entropia, coinvolta in tutti i processi irreversibili.
4. Introdurre la nozione di calore, e collocarla nella giusta relazione con l'energia e la potenza termica.
5. Fondare i principi della termodinamica sul concetto di entropia, ed in particolare sulla legge  $\pi_S \geq 0$ .

## 12.1 Processi termici

I due vasi comunicanti con livelli differenti, per l'idraulica, e i due corpi in moto relativo, per la meccanica, mostrano che la "tensione" tra due sistemi è la causa della successiva evoluzione; viceversa, quando questa tensione non sussiste non osserviamo alcuna evoluzione, ossia il sistema composto di due parti è in equilibrio. Il potenziale elastico e quello gravitazionale sono altri due esempi della stessa idea, che completano e rafforzano il quadro.

Con questo spirito affrontiamo lo studio della termodinamica.

Mi sembra che il punto di partenza debba essere la terminologia. Per quanto nel corso di Karlsruhe si voglia mettere l'accento sul portatore di energia, nei processi termici ciò che constatiamo in primo luogo, e che siamo in grado di misurare, sono i flussi di energia, partendo dai quali solo in un secondo tempo potremo parlare dei flussi di entropia.

Il punto che da tanto si discute è se di debba o no usare la parola calore. Riassumendo la questione, gli aspetti essenziali sono:

- questo è un termine di uso comune, con il quale dobbiamo confrontarci;
- alla parola vengono spesso attribuite le caratteristiche che invece competono all'entropia;
- la termodinamica basata su calore e lavoro è coerente, ma concettualmente difficile fin dalle prime battute.

Qui bisogna prendere una posizione. Possiamo anzitutto "saggiare il terreno" in aula e portare alla luce le idee originali degli allievi; il termine "calore" comparirà senz'altro nel discorso; per questo motivo, e poiché questo concetto appartiene alla fisica, non dobbiamo evitare di parlarne, ma dobbiamo semmai puntualizzare, un passo alla volta, il concetto sottostante.

Altro discorso è se dovremo fondare la termodinamica sul calore  $Q$ , oppure sull'entropia  $S$ , e relegare il calore ad un ruolo di secondo piano; propondo per la seconda alternativa.

### Sorgente con potenza costante

Il primo passo è definire un'unità calorimetrica per gli scambi di energia: in questa fase non è del tutto chiaro se si sta parlando della stessa energia della meccanica.

Anche se si potrebbe procedere usando solo i calorimetri, preferisco cominciare riscaldando un corpo con un fornello (vedi figura 105).

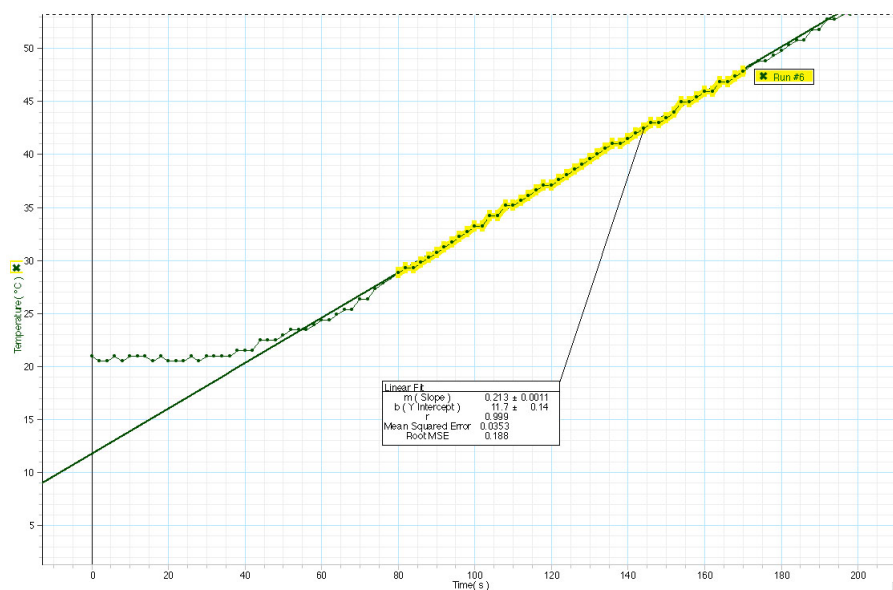


Figura 105: Questo è il risultato di un'acquisizione dati con un sensore digitale. Un sistema composto da una certa quantità di acqua e da un contenitore è collocato al di sopra della fiamma di un fornello a gas; la temperatura iniziale dell'ambiente è  $22^{\circ}\text{C}$  e ho limitato la regressione ad un intervallo di tempo in cui l'effetto di evaporazione dell'acqua non è significativo.

Esperimenti come questi mostrano la proporzionalità diretta tra incremento di temperatura ed intervallo di tempo

$$T_{fin} - T_{in} \propto t_{fin} - t_{in}$$

Le ipotesi sottostanti sono:

1. che il fornello sia caratterizzato da una potenza termica costante;
2. che non avvengano transizioni di fase;
3. che il cambiamento di volume del sistema non sia significativo.

Naturalmente non possiamo decidere con una misura se l'erogazione di energia avviene con potenza costante oppure no, poiché non abbiamo ancora fissato l'unità di misura; d'altra parte potremo appellarci al buon senso; in pratica uso un becco bunsen o un normale fornello a gas e mostro agli allievi che fisso l'erogazione con la valvola dell'ugello: il fenomeno che si svolge davanti ai nostri occhi ha qualità costanti nel tempo (vivacità della fiamma) ed è quanto basta per assumere che la potenza sia costante:

$$\mathcal{E}_{trasferita} \propto t_{fin} - t_{in}$$

Non credo esistano punti di attacco al problema più rigorosi: il rigore sperimentale potrà eventualmente essere ristabilito quando avremo mostrato la corrispondenza tra le unità calorimetriche e il joule.

Unendo le due relazioni di proporzionalità otteniamo

$$\mathcal{E}_{trasferita} = C (T_{fin} - T_{in}) \quad (94)$$

(in questa relazione  $C$  è la capacità termica del sistema).

In questa parte del corso parlo di potenza termica ed energia termica, evitando (almeno ufficialmente) il termine calore: è sottinteso che l'obbiettivo sia mostrare che stiamo semplicemente parlando dell'energia associata al portatore termico introdotto con l'attrito, ma sospendo la questione fino a quando non ho analizzato il dettaglio della conduzione termica.

Non mi soffermo sui dettagli della calorimetria: mi limito a dire che seguo la procedura standard e introduco come si fa di consueto la caloria. Per me è essenziale dare il giusto rilievo alla relazione tra joule e caloria, che è in ultima analisi il contenuto del primo principio della termodinamica.

### Conduzione termica

Quando mettiamo a contatto termico due corpi con temperatura diversa si instaura una corrente termica di intensità

$$\mathcal{I}_{\mathcal{E}} = k \frac{A}{l} (T_1 - T_2)$$

Come possiamo arrivare a questo risultato? Acquisendo le temperature dei due corpi in funzione del tempo possiamo mostrare sperimentalmente che

$$C_1 \underbrace{(T_1(t) - T_{1,in})}_{\Delta T_1} = -C_2 \underbrace{(T_2(t) - T_{2,in})}_{\Delta T_2}$$

in ogni istante del processo: questa è una relazione tra le variazioni di energia termica dei due corpi; dato che all'energia termica attribuiamo - tra le varie caratteristiche che definiscono l'energia in generale - almeno la proprietà di essere conservata, e quindi le variazioni di energia devono essere attribuite ad un trasferimento da un corpo all'altro:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E}_1 &= C_1 \Delta T_1 = - \int_{t_{in}}^{t_f} \mathcal{I}_{\mathcal{E}} dt \\ \Delta \mathcal{E}_2 &= C_2 \Delta T_2 = + \int_{t_{in}}^{t_f} \mathcal{I}_{\mathcal{E}} dt \end{aligned}$$

Non parleremo di calore trasferito, bensì di quantità totale di energia trasferita, misurata come “area sotto la curva” del grafico di una funzione corrente, che deve essere costruita partendo dai dati sperimentali; mostrata in modo qualitativo l’esistenza della corrente termica, penso sia il caso di mostrare sperimentalmente almeno la proporzionalità  $\mathcal{I}_E \propto T_1 - T_2$ .

**ESERCIZIO**

Partendo dalle tabelle di dati sperimentali  $(t, T_1)$  e  $(t, T_2)$

1. costruite le tabelle  $(t, \Delta T_1(t))$  e  $(t, \Delta T_2(t))$  (calcolando le variazioni di temperatura nell’intervallo di tempo  $(0; t)$ );
2. verificate che per ogni intervallo di tempo, scelto arbitrariamente lungo il processo,  $C_1 \Delta T_1 = -C_2 \Delta T_2$ ;
3. costruite le tabelle  $(t, \dot{T}_1)$  e  $(t, \dot{T}_2)$  (calcolando le rapidità medie di variazione delle temperature su piccoli intervalli);
4. costruite le tabelle  $(t, \dot{\mathcal{E}}_1)$  e  $(t, \dot{\mathcal{E}}_2)$ ;
5. verificate che in ogni istante  $\dot{\mathcal{E}}_1(t) = -\dot{\mathcal{E}}_2(t)$ ;
6. mostrate che, nel limite dato dagli errori sperimentali e dalle approssimazioni che avete usato,  $\mathcal{I}_E \propto T_1 - T_2$ ;
7. rappresentate in grafico le funzioni  $T_1(t)$ ,  $T_2(t)$ ,  $\mathcal{I}_E(t)$  e  $T_1(t) - T_2(t)$ .

*Suggerimento.* Usate un foglio elettronico.

L’equilibrio termico è raggiunto quando  $\mathcal{I}_E = 0$  e con i metodi noti si ricava la formula per la temperatura di equilibrio.

La corrente di conduzione scorre lungo un elemento (ad esempio un cilindro di materiale conduttore) di capacità termica trascurabile, che indentifichiamo con l’interfaccia).

Come seconda tappa in questo percorso passo alla simulazione al computer di questo fenomeno (figura 106).

Inserendo gli stessi parametri che hanno caratterizzato l’esperimento (temperature iniziali, geometria dell’interfaccia e coefficiente di conduzione termica) i grafici ottenuti con il calcolo numerico coincidono con quelli sperimentali (figura 107).

Come abbiamo fatto per l’attrito, forziamo la definizione del portatore termico secondo lo schema generale già consolidato in meccanica:

$$\mathcal{I}_S \stackrel{def}{=} \frac{\mathcal{I}_E}{T}$$

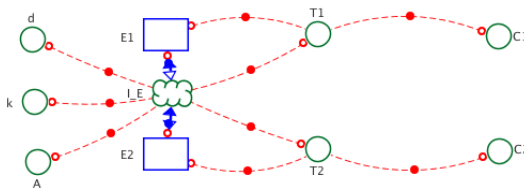


Figura 106: Questo è il modello per il sistema di equazioni differenziali  $\dot{\mathcal{E}}_1 = -\mathcal{I}_{\mathcal{E}}$ ,  $\dot{\mathcal{E}}_2 = +\mathcal{I}_{\mathcal{E}}$ ,  $\mathcal{I}_{\mathcal{E}} = k \frac{A}{d} (T_1 - T_2)$  e  $\Delta T_{1,2} = \Delta \mathcal{E}_{1,2} / C_{1,2}$ .

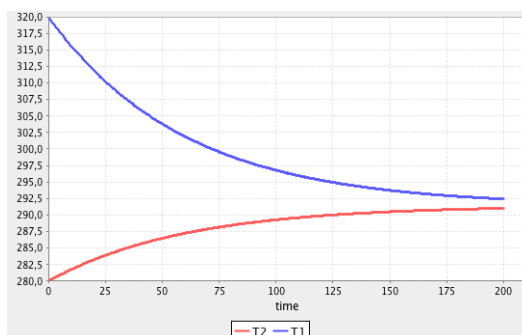


Figura 107: Le due temperature raggiungono asintoticamente lo stesso valore di equilibrio che gli allievi hanno determinato in precedenza con la relazione  $T_{eq} = \frac{C_1 T_1 + C_2 T_2}{C_1 + C_2}$ .

In base a questa definizione la corrente di entropia che esce dal corpo a temperatura maggiore è più piccola di quella che entra nel corpo a temperatura minore, e quindi possiamo interpretare la situazione dicendo che nell'interfaccia viene prodotta entropia al tasso temporale

$$\pi_S = \mathcal{I}_{S,2} - \mathcal{I}_{S,1}$$

Se aggiungiamo la legge della conduzione termica otteniamo l'espressione

$$\pi_S = k \frac{A}{l} \frac{(T_1 - T_2)^2}{T_1 T_2}$$

Possiamo dare un'interpretazione della creazione di entropia usando i diagrammi di processo già impiegati per l'oscillatore e per il caso dell'attrito radente (figura 108).

Ora possiamo aggiungere al nostro modello le correnti di entropia ed il termine di produzione (figura 109) e costruire i grafici di  $S_1(t)$ ,  $S_2(t)$  e  $S_{interrfaccia}(t)$  (figura 110). A proposito delle funzioni entropia dobbiamo osservare che:

1. per il momento non conosciamo il loro valore assoluto, perché la definizione data permette di determinare solo gli incrementi di temperatura (in

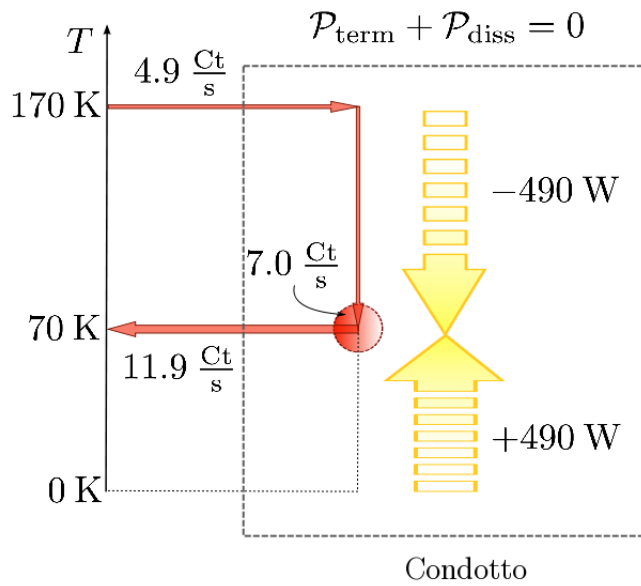


Figura 108: La corrente di entropia, attraversando l’interfaccia, “cade” dalla temperatura maggiore alla temperatura minore, e si determina così una “potenza di caduta” negativa; allo stesso tempo viene prodotta entropia nell’interfaccia al tasso temporale necessario affinché la “potenza di creazione”, positiva, abbia la stessa entità della “potenza di caduta”.

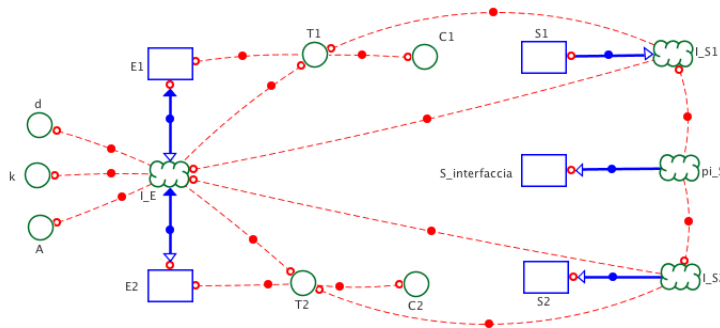


Figura 109: In questo modello ho aggiunto le relazioni per il calcolo delle correnti di entropia e del tasso di produzione di entropia:  $\mathcal{I}_{S,,1} = \mathcal{I}_{\mathcal{E}}/T_1$ ,  $\mathcal{I}_{S,,2} = \mathcal{I}_{\mathcal{E}}/T_2$  e  $\pi_S = \mathcal{I}_{S,2} - \mathcal{I}_{S,1}$ .

pratica, nei modelli pongo  $S_1(0) = S_2(0) = 0$  unità);

2. l’entropia finale del sistema,  $S_1(t_{fin}) + S_2(t_{fin})$ , coincide con l’entropia iniziale del sistema più quella creata nell’interfaccia;
3. è una grandezza di stato, come discuterò anche più avanti.

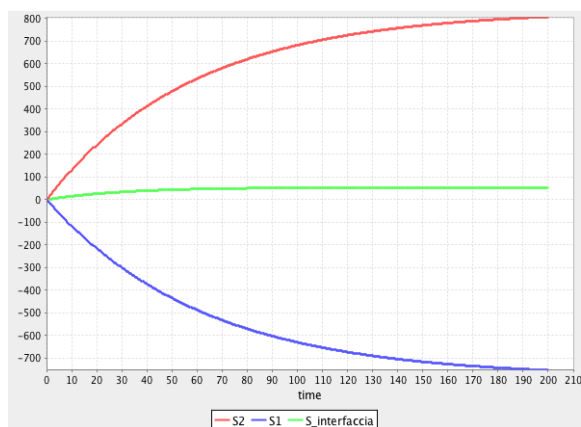


Figura 110: L'entropia creata nell'interfaccia entra nel secondo corpo; così l'entropia del secondo aumenta più velocemente di quanto non diminuisca l'entropia del primo. L'entropia totale del sistema è  $S_1 + S_2$  e coincide con  $S_{interfaccia}$ .

## 12.2 Una sola entropia

Le due entropie, quella introdotta con l'esempio dell'attrito e quella introdotta con l'esempio della conduzione termica, devono coincidere: questo è il punto fondamentale per realizzare l'inclusione dei processi termici nella teoria generale.

Dal punto di vista storico l'esperienza chiave è quella del mulinello di Joule (in figura 111 illustro la sua versione originale). Nel nostro schema concettuale i sistemi fisici sono:

1. il campo di gravità;
2. il sistema gravi+rotori+contenitore;

Vi sono poi due interfacce: quella in cui l'energia passa dal portatore gravitazionale al portatore meccanico (non entro nel dettaglio) e l'acqua stessa<sup>24</sup>, in cui l'energia passa dal portatore meccanico a quello termico (figura 112). L'esperienza mostra che possiamo innalzare la temperatura del sistema costituito dall'acqua, dal contenitore e dal rotore senza metterlo a contatto con un sistema a temperatura maggiore.

L'esperienza dell'attrito radente mi sembra più difficile da realizzare sperimentalmente, ma più semplice da analizzare dal punto di vista teorico.

Abbiamo già visto nel paragrafo 11.2 il modello dell'oscillatore orizzontale con attrito radente; ora possiamo aggiungere la sezione che permette di determinare la produzione di entropia e la temperatura del sistema (figura 113).

Un'interessante possibilità di sviluppare questo problema è cercare di capire in quale misura l'entropia prodotta si distribuisce tra corpo e piano.

<sup>24</sup>O meglio, gli strati di acqua che fanno da interfaccia meccanica tra il rotore in movimento e la porzione di acqua immobile che aderisce al contenitore



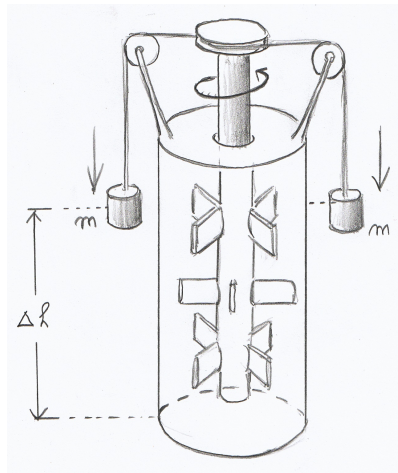


Figura 111: I due oggetti sospesi cadono e determinano così la rotazione dell'albero; le pale agitano il liquido all'interno del cilindro; in questo modo la caduta avviene a velocità costante e la diminuzione di energia gravitazionale del sistema corrisponde ad un eguale aumento di energia interna. Alla fine della caduta si lascia il tempo al liquido di raggiungere la quiete: l'attrito viscoso dissipa l'energia cinetica delle correnti provocate dalle pale; tutta l'energia interna, ora, si manifesta in un aumento di temperatura del liquido.

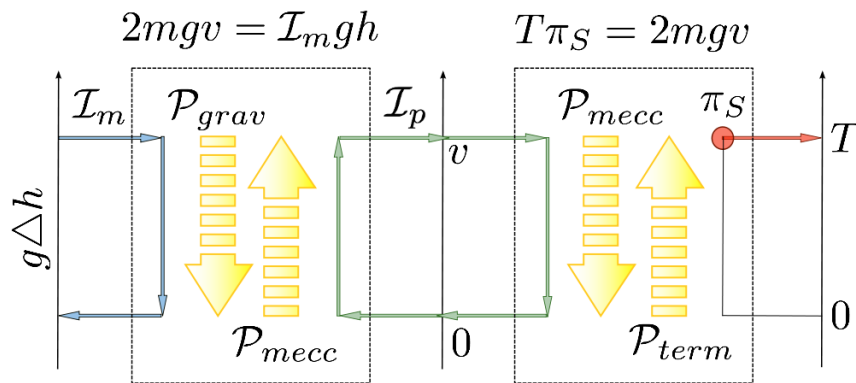


Figura 112: Possiamo schematizzare il mulinello di Joule con un combinazione in cascata di due processi di trasferimento: dal portatore gravitazionale a quello meccanico, e da quello meccanico a quello termico; l'entropia creata viene prodotta nell'interfaccia acqua-rotore attraverso l'attrito, e viene accumulata nel sistema acqua+rotore+contenitore. Se i pesi vengono fatti cadere  $N$  volte per un'altezza complessiva  $z_{in} - z_{fin}$  il trasferimento complessivo di energia, dal portatore gravitazionale a quello termico, è descritto dall'equazione  $C(T_{fin} - T_{in}) = N \cdot 2mg(z_{fin} - z_{in})$ .

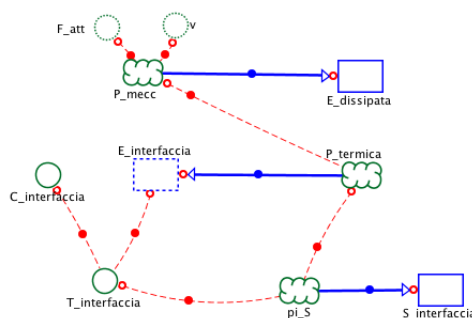


Figura 113: Questo modello è collegato a quello di figura 98 a pagina 224, e rappresenta il sistema di equazioni differenziali  $\dot{\mathcal{E}} = \mathcal{P}_{term}$ ,  $\Delta\mathcal{E} = C\Delta T$ ,  $\mathcal{P}_{term} = T\pi_S$ ,  $\mathcal{P}_{mecc} = \mathcal{I}_{att}v$  e  $\mathcal{P}_{term} + \mathcal{P}_{mecc} = 0$ .

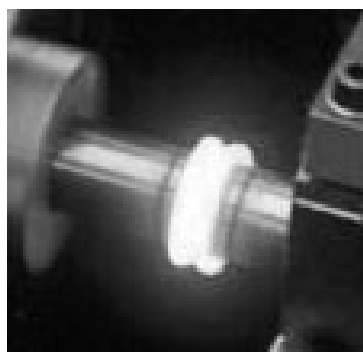


Figura 114: L'aumento di temperatura è determinato dall'equazione di processo  $T\pi_S = \mathcal{I}_L\omega_{rel}$ , nella quale  $\mathcal{I}_L$  è la corrente di momento angolare dovuta all'attrito e  $\omega_{rel}$  è la velocità angolare relativa dei due elementi in rotazione; come si vede da questa immagine l'accumulo di energia è localizzato in una zona composta da due strati di uguale spessore - l'interfaccia. Quando i rotori verranno fermati questa energia si distribuirà in un sistema più grande. Se  $\omega_{rel}$  è abbastanza grande, possiamo supporre che il processo di redistribuzione sia trascurabile durante il processo principale.

In questa prima fase mi sembra il caso, d'altra parte, di aggirare la questione, per non appesantire il discorso; mi affido così nuovamente all'idea di interfaccia (che, come ricordo, è un'utile idealizzazione).

In figura 114 un asse rigido viene posto in rapida rotazione rispetto ad un'asse fisso, e tra le due superfici a contatto si sviluppa un'interazione di attrito radente. L'aumento di temperatura, reso evidente dall'incadescenza delle parti a contatto, è localizzato a due piccoli strati, uno per ciascun asse.

In generale accadrà proprio questo: durante un processo sufficientemente rapido sono interessati solo gli strati direttamente a contatto (non formulo qui alcuna ipotesi sulla loro estensione, ma mi limito a constatare il fenomeno).

L'interfaccia di attrito è costituita dai due strati a contatto coinvolti direttamente dall'aumento di temperatura; l'accumulo di energia in questa interfaccia verrà distribuito tra i corpi in contatto termico alla fine del processo; possiamo così determinare l'entropia prodotta in due fasi:

1. nella prima fase  $T\pi_S = v\mathcal{I}_{att}$  e  $C_{interfaccia}\Delta T = \int v\mathcal{I}_{att}dt$ ;
2. nella seconda fase si instaurano correnti di entropia tra l'interfaccia e ambiente, con ulteriore produzione di entropia.

Il tasso temporale di produzione di entropia nella prima fase è illustrato nel grafico di figura 115.

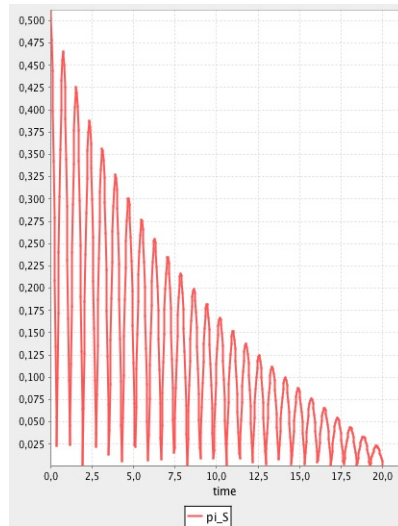


Figura 115: Il tasso temporale di produzione dell'entropia,  $\pi_S$ , oscilla nel tempo tra il valore zero e un massimo che decresce ad ogni periodo; come discende dalla definizione, il suo valore non è mai negativo.

Così possiamo aumentare la temperatura di un sistema in due modi: o mettendolo a contatto con una sorgente a temperatura maggiore o con un processo di attrito.

Nel primo caso trasferiamo energia attraverso il portatore entropia:

$$\Delta\mathcal{E}_{sistema} = \int T_{sistema}\mathcal{I}_{S,ingresso}dt$$

Nel secondo caso l'energia ceduta dalla quantità di moto che attraversa l'interfaccia viene accumulata grazie alla creazione di entropia:

$$\Delta\mathcal{E}_{sistema} = \int T_{interfaccia}\pi_S dt$$

A questo punto possiamo abbandonare, una volta per tutte, la distinzione artificiale tra energia termica ed energia: con la scelta delle unità di misura opportune, esse non sono distinguibili con nessun esperimento; allo stesso modo, le due definizioni operative di energia conducono alla stessa grandezza fisica.

La distinzione tra i due diversi processi di riscaldamento è che nel primo caso l'entropia viene trasferita ad un sistema, mentre nel secondo viene creata nell'interfaccia e in un secondo tempo trasferita al sistema.

È facile dimostrare che l'entropia totale accumulata in un sistema dipende solo dalle temperature iniziali e finali, e non dal dettaglio del processo. Questo significa che possiamo aumentare la temperatura di un corpo con l'attrito, o con un trasferimento termico e il risultato finale dell'accumulo è sempre lo stesso: in altri termini l'entropia definita operativamente con le correnti termiche o con il tasso di creazione legato all'attrito è la stessa.

In questo senso l'entropia è una grandezza fisica definita in modo univoco.

Ho già osservato nel capitolo 3 che l'introduzione dell'entropia ha una caratteristica unica: si parte dall'energia per determinare  $\mathcal{I}_S$  e  $\pi_S$ , mentre per gli altri portatori l'energia viene calcolata a posteriori. Cito ancora Tiezzi:

Il ruolo dell'entropia è fondamentale nella Termodinamica dei sistemi lontani dall'equilibrio. Potremmo dire che l'entropia esiste di per sé, è una funzione non conservativa ed è legata all'evoluzione. E questo è un grande passo avanti, perché supera il vecchio dilemma se l'entropia sia l'ombra dell'energia oppure sia l'energia l'ombra dell'entropia e non riduce la geniale intuizione dell'entropia a puro dogma energetico.

Così l'entropia deve essere considerata - a tutti gli effetti - una grandezza fisica, e non un semplice costrutto teorico.

### 12.3 Capacità entropica

L'entropia è una grandezza di stato; finché ci limitiamo a corpi rigidi non-cristallini e a liquidi incompressibili all'equilibrio idraulico, lo stato è univocamente determinato dalla temperatura: così affermare che l'entropia è una funzione di stato equivale a dire che essa è funzione della temperatura:  $S = S(T)$ . Come sappiamo la capacità entropica è definita come la derivata dell'entropia rispetto alla temperatura:

$$C_{ent} \stackrel{def}{=} \frac{dS}{dT}$$

Ora il punto è trovare un percorso abordabile in seconda liceo per ricavare l'espressione della capacità entropica. Si può procedere in due modi diversi: con le simulazioni al computer, oppure con una deduzione teorica.

### L'approccio della simulazione

Se in classe facciamo osservare che  $\Delta S \cong \dot{S}(t) \Delta t$  e  $\Delta T \cong \dot{T}(t) \Delta t$  possiamo giustificare (senza ricorrere alla regola di derivazione a catena) la relazione

$$C_{ent}(t) = \frac{\dot{S}(t)}{\dot{T}(t)}$$

Questo è il punto di partenza per la costruzione di un modello che consente di determinare la funzione  $C_{ent}(t)$  (vedi figura 116).

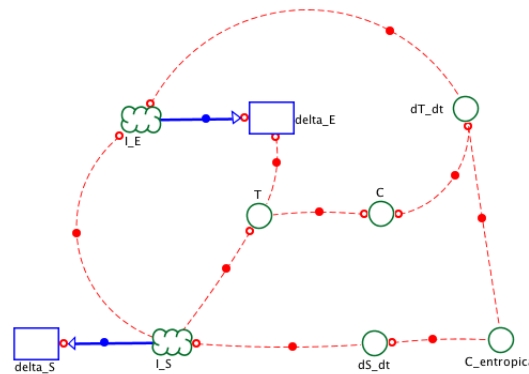


Figura 116: Questo modello conduce al calcolo della capacità entropica con la relazione  $C_{ent}(t) = \frac{\dot{S}(t)}{\dot{T}(t)}$ .

Di qui possiamo risalire al grafico della funzione  $C_{ent}(T)$  con un diagramma di fase, che riporta in orizzontale  $T(t)$  e in verticale  $C_{ent}(t)$ : si può vedere il risultato in figura 117.

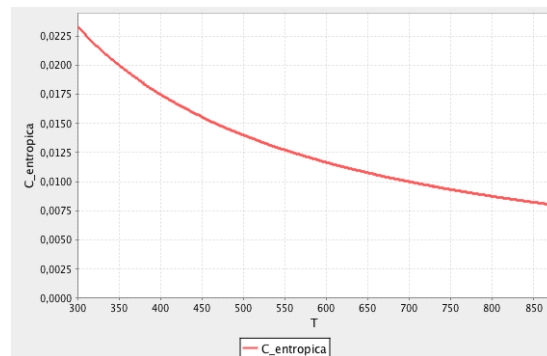


Figura 117: Con il grafico di fase in cui  $T(t)$  è riportato sull'asse orizzontale e  $C_{ent}(t)$  sull'asse verticale, abbiamo ottenuto la curva che rappresenta la funzione  $C_{ent}(T)$ .

Osservando che la capacità diminuisce quando la temperatura del sistema aumenta, è naturale chiedersi se essa aumenterà indefinitamente per tempera-

ture sempre più basse; cerchiamo la risposta a questa domanda invertendo il flusso termico nel modello: ciò porterà ad una diminuzione progressiva della temperatura (possiamo fare in modo che la temperatura scenda al di sotto di  $T = 0\text{ K}$ , come in figura 118).

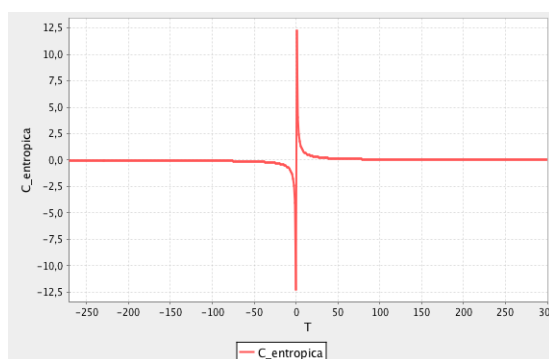


Figura 118: Invertendo il flusso termico estraiamo entropia dal corpo e portiamolo a temperature sempre più basse; con le impostazioni date al modello il programma raggiunge ed oltrepassa la temperatura di  $0\text{ K}$ : osserviamo il comportamento asintotico della capacità entropica intorno allo zero assoluto.

Il comportamento asintotico del grafico attorno a  $T = 0\text{ K}$  ammette, come interpretazione più semplice, una proporzionalità inversa tra capacità e temperatura; una regressione della funzione  $\frac{C}{T}$  sui dati della simulazione permette di mostrare che la costante coincide con la capacità termica, e quindi che  $C_{ent}(T) = \frac{C}{T}$ .

### L'approccio teorico

Per mitigare la difficoltà del ragionamento, possiamo appoggiarci alla costruzione del vaso dell'entropia, come mostrato in figura 119.

Il punto di partenza, questa volta, è la relazione  $TdS = CdT$ . Ad uguali incrementi di temperatura corrispondono uguali incrementi di energia del sistema; d'altra parte  $dS = \frac{d\mathcal{E}}{T}$ , per definizione di entropia, e quindi gli incrementi corrispondenti di entropia sono più piccoli se la temperatura iniziale è maggiore.

La relazione

$$C_{ent}(T) = \frac{C(T)}{T}$$

è sempre valida perché discende dalla relazione generale  $\dot{\mathcal{E}} = C(T)\dot{T}$  per la rapidità di variazione dell'energia in un sistema a temperatura uniforme  $T$ .

Se la capacità termica fosse costante fino allo zero assoluto, d'altra parte, il vaso dell'entropia dovrebbe essere infinitamente largo per  $T = 0\text{ K}$  e restringersi con l'aumentare della temperatura.

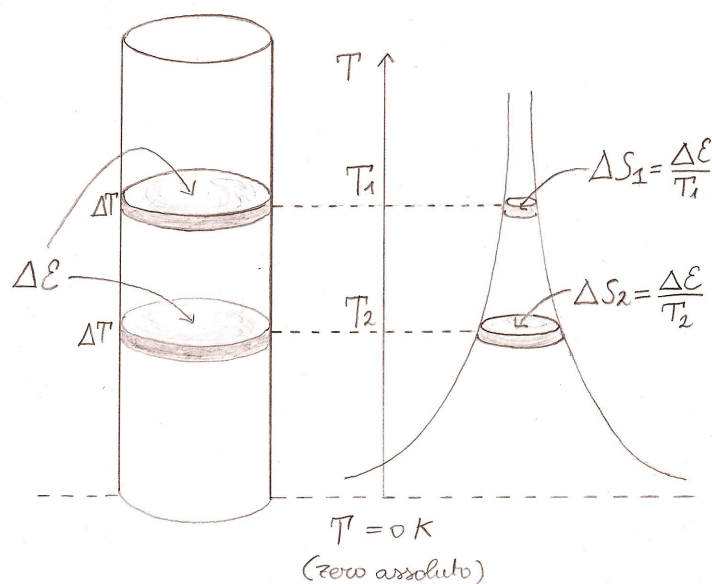


Figura 119: Uguali incrementi di energia, a temperature diverse, determinano incrementi di entropia diversi. Il vaso dell'entropia pertanto ha sezione variabile, determinata dalla formula  $C_{ent} = C/T$ .

Naturalmente abbiamo aggirato (almeno per il momento) un ostacolo concettuale: la scelta dello zero della scala termometrica. D'altra parte proprio questo approccio mostra che deve esistere uno zero assoluto della temperatura, e possiamo rimandare ad un secondo momento la dimostrazione che questo zero coincide con quello della temperatura misurato dal termometro a gas ideale,  $T_0 = -273.15^\circ\text{C}$ .

Quella che abbiamo realizzato non è una dimostrazione: al più potremo considerarla una suggestione. Difatti la capacità termica non è costante; in particolare il teorema di Nerst impone che  $\lim_{T \rightarrow 0\text{K}} C(T) = 0 \frac{\text{J}}{\text{K}}$ . Dal punto di vista didattico, potremo attribuire a questo percorso lo stesso valore e gli stessi limiti che ha tradizionalmente l'esperimento per la determinazione dello zero assoluto della temperatura del termometro a gas ideale.

## 12.4 I principi della termodinamica

Termino questo capitolo con un confronto tra l'approccio tradizionale alla termodinamica (faccio riferimento all'esposizione data da Enrico Fermi) e quella proposta da Herrmann nel corso di Karlsruhe<sup>25</sup>.

<sup>25</sup>In realtà il linguaggio di Herrmann coincide nella sua essenza con quella delle ricerche moderne, in particolare a quella del chimico teorico Ilya Prigogine.

## Fermi

Sintetizzando in modo brutale, l'approccio classico si articola in quattro punti fondamentali.

1. *Equilibrio termico.*

Il principio zero della termodinamica afferma che due sistemi in equilibrio termico con un terzo sono in equilibrio termico tra loro; questo permette di definire una grandezza intensiva, la temperatura, e getta la base teorica per la possibilità di misurare la temperatura con i termometri.

2. *Definizione dell'energia interna.*

L'energia interna di un sistema è definita attraverso il lavoro fatto dal sistema sull'ambiente:  $U(P) - U(0) = -L_{O\Gamma P}^{\nearrow}$ ; Fermi dimostra in primo luogo che in processi che coinvolgono solo azioni meccaniche il lavoro non dipende dal cammino  $\Gamma$ , e quindi  $U$  è una funzione di stato.

3. *Primo principio della termodinamica.*

In processi che coinvolgono correnti termiche, il lavoro dipende dal cammino - ossia è una grandezza di processo; d'altra parte l'energia interna è una funzione di stato e quindi si deve introdurre una seconda grandezza di processo, il calore assorbito dal sistema: la sua definizione operativa è  $Q^{\leftarrow} \stackrel{def}{=} \Delta U + L^{\nearrow}$  e coincide con il I principio (che in effetti è un'affermazione sull'esistenza del calore).

4. *Secondo principio della termodinamica.*

I due enunciati storici del II principio, quello di Clausius e quello di Kelvin-Planck, sono equivalenti tra loro e possono essere sostituiti da tre affermazioni sull'entropia:

- L'entropia  $S \stackrel{def}{=} \int \frac{dQ}{T}$  è una grandezza di stato;
- In una qualunque trasformazione di un sistema isolato  $S_{fin} \geq S_{in}$ .
- Se un sistema è diviso in più parti, l'entropia complessiva è la somma delle entropie delle singole parti.

In effetti, delle tre solo la terza esprime il contenuto del secondo principio, mentre la prime due possono già essere introdotte nell'ambito del principio di conservazione dell'energia.

In questa formulazione il calore è la grandezza fondamentale, mentre l'entropia è una grandezza derivata; osserviamo che delle due grandezze la seconda, in quanto grandezza di stato, è concettualmente più semplice.



## Herrmann

L'approccio del corso di Herrmann si basa sull'idea di portatori e di potenziali. In modo schematico, i passi necessari per fondare la termodinamica sono:

1. *Identificare il potenziale termico.*

La procedura operativa necessaria per introdurre il potenziale termico coincide con il contenuto del principio zero.

2. *Introdurre l'entropia come portatore.*

A mio modo di vedere dobbiamo distinguere tre fasi:

- nei processi di conduzione termica la corrente di entropia che entra in un sistema è definita dalla relazione  $\mathcal{I}_S = \frac{\mathcal{I}_E}{T}$ ;
- nei processi termomeccanici il tasso di creazione dell'entropia nell'interfaccia è definita dalla relazione  $\pi_S = -\frac{\mathcal{P}_{mecc}}{T}$ .
- l'entropia definita operativamente nei due contesti diversi è la stessa, ed è una grandezza di stato.

Dato che l'entropia è definita *via* equazione di continuità, è automaticamente una grandezza addittiva. L'insieme delle affermazioni sull'entropia coincide con il I principio.

3. *La proprietà distintiva dell'entropia.*

L'entropia può solo essere creata, mai distrutta:  $\pi_S \geq 0$  in tutte le interfacce.

In questa formulazione il calore è una grandezza derivata, definita da un integrale di linea nello spazio delle configurazioni del sistema, che può essere calcolato con l'espressione

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_{in}}^{t_{fin}} T(t) \mathcal{I}_S(t) dt$$

una volta nota la curva che il sistema percorre nel proprio spazio delle configurazioni.

Non sarebbe neanche necessario parlare di calore, se non fosse che il termine è sia di uso comune, sia ampiamente impiegato nei testi di fisica.

Il percorso di Karlsruhe non è concettualmente più semplice di quello di Fermi, perlomeno fino a quando ci limitiamo ai processi termomeccanici; esso però ha il pregio di partire da un'idea, quella dei trasferimenti e della creazione di entropia, particolarmente intuitiva, e di spostare le difficoltà tecniche in una seconda fase del lavoro.

Quando includeremo nel discorso i processi che coinvolgono il portatore elettrico e quello chimico potremo estendere il principio di conservazione dell'energia

implementando le stesse idee; non viene mai introdotta nel discorso la distinzione artificiale tra il principio di conservazione dell'energia in meccanica e nella teoria dei campi, il Primo Principio per la termodinamica e la sua estensione alla chimica.

Possiamo affiancare i due percorsi in una tabella sinottica, che mostra come sono interpretati diversamente i principi della Termodinamica:

	<i>Fermi</i>	<i>Herrmann</i>
<b>I Principio</b>	$\Delta U = -L^{\rightarrow} + Q^{\leftarrow}$ $\frac{dQ}{T} = dS$	$\dot{\mathcal{E}} = v\mathcal{I}_p + T\mathcal{I}_S$ $T\pi_S = v_{rel}\mathcal{I}_p$
<b>II Principio</b>	$S_{fin} - S_{in} \geq 0$	$\pi_S \geq 0$
<b>III Principio</b>		$S(0\text{ K}) = 0 \frac{\text{J}}{\text{K}}$

Si noti che ho incluso il Terzo Principio. Non ne ho parlato fin qui ma ora è il momento di esprimere la mia posizione.

La costante dell'entropia viene fissata dal teorema di Nerst, che a sua volta discende dall'interpretazione statistica dell'entropia data da Boltzmann:

$$S = k_B \ln p$$

( $p$  è la probabilità dello stato del sistema).

Ho detto, nel capitolo 6, che i portatori di energia, pur rientrando tutti nel quadro dell'analogia idraulica, hanno una natura fisica diversa tra loro.

Sappiamo che la quantità di moto è qualcosa che possiamo misurare direttamente con gli urti. Che cos'è l'entropia?

Penso che potremo capire fino in fondo il suo significato solo quando avremo mostrato l'armonia di fondo tra l'approccio microscopico e quello macroscopico, e che la strada indicata da Boltzmann sia il giusto punto di partenza.

In questo senso mi discosto nettamente da chi sostiene che non dovremmo affiancare all'approccio macroscopico quello microscopico, e che per di più dovremmo evitare nella nostra esposizione della Fisica qualunque riferimento di tipo riduzionistico.

La Fisica è bella anche perché si ribella a qualunque tentativo di costringerla in un percorso lineare.

## 13 Conclusione

Ognuno sta solo sul cuor della Terra  
Trafitto da un raggio di sole  
Ed è subito sera  
*Salvatore Quasimodo*

NON SONO giunto alla fine, poiché non ho spinto il discorso fino ai fenomeni chimici. Ho fatto tappa qui perché sto ancora raccogliendo il materiale per l'inclusione del potenziale chimico, e per ragioni di spazio.

Il baricentro di questo percorso è l'esempio di un uomo che spinge una cassa su un piano. La potenza meccanica negativa sviluppata nell'interfaccia porta ai fenomeni termici, mentre la potenza meccanica positiva sviluppata nell'apparato locomotore porterà in modo altrettanto naturale ai fenomeni chimici.

In tutto il percorso giocano un ruolo decisivo l'idea "due sistemi e un'interfaccia", e la distinzione tra equazioni di bilancio ed equazioni di processo.

La mia esposizione del corso di Fisica si discosta sia dall'approccio tradizionale sia da quello di Karlsruhe; non mi sento autorizzato ad introdurre i portatori di energia per semplice analogia con l'idraulica.

Non credo difatti che l'argomento dell'analogia sia conclusivo: sono interessato in primo luogo alle peculiarità dei diversi ambiti della fisica, e questo mi conduce a percorsi differenziati per l'introduzione di ciascun portatore. Solo in un secondo tempo il quadro potenziali-correnti mi consente un'interpretazione unitaria dei fenomeni trattati, e un unico linguaggio che semplifica la trattazione.

Il percorso che così risulta è oneroso in termini di tempo, ma conduce - nello spirito originale del progetto di Karlsruhe - all'idea completa di conservazione dell'energia (nell'ambito della Fisica Classica).

### 13.1 Retrospettiva del percorso

Una delle ipotesi a di partenza di questo lavoro è esposta nel capitolo 2, dove ho formulato la domanda:

È possibile includere la termodinamica nel programma di II liceo, senza stravolgere il piano della mia sede?

È il momento di vedere in quale misura questo obiettivo sia stato raggiunto.

- Il corso di I liceo prevede già lo studio della legge di Stevino e della spinta di Archimede; si tratta pertanto di orientare il ciclo di lezioni sull'idraulica in modo tale da gettare le basi dell'analogia.

- L’obbiettivo comune a tutti i docenti in I liceo, inoltre, è gettare le basi della dinamica di Newton, e io mi propongo lo stesso obbiettivo, anche se la strada per raggiungerlo è sensibilmente diversa.
- Il primo tema previsto in II liceo è la conservazione dell’energia meccanica; anche il percorso che ho indicato parte dall’energia: si tratta soltanto di allargare il contesto per includere l’idea di portatore.
- Il capitolo con l’energia può terminare con l’inclusione dell’entropia, partendo prima dall’attrito e poi dalla conduzione termica. L’obbiettivo è di introdurre  $\pi_S$ ,  $\mathcal{I}_S$  e la capacità entropica. In linea di massima mi impongo di arrivare per Natale a questo punto.
- Credo, assieme ai miei colleghi, che non si debba rinunciare al tema della Gravitazione Universale, che può occupare due mesi di corso (a meno di non volerlo trattare con superficialità).
- A questo punto non è certo il caso di includere una trattazione più ampia della Termodinamica; mi sembra più utile invece dedicare un po’ di tempo allo studio dei circuiti elettrici, che offrono tra l’altro l’occasione di trattare un altro fenomeno dissipativo.
- In ordine al raggiungimento di questi obbiettivi, ho sacrificato la maggior parte del capitolo dedicato al moto del proiettile. In pratica affronto il moto del proiettile nella parte introduttiva alla Gravitazione.

In questo senso mi sembra senz’altro fattibile integrare il tema dell’entropia con il piano di sede.

Ho già detto, d’altra parte, che questo percorso è impegnativo; si deve inoltre tener conto del fatto che per ora non esistono libri di testo adeguati che seguano l’approccio di Karlsruhe, e così il docente che decide di seguire lo stesso approccio è costretto ad elaborare la maggior parte del materiale per conto proprio; il che, d’altra parte, potrebbe costituire un vantaggio, anche se il carico di lavoro è notevole.

## 13.2 Prospettive

Nel corso di Scienze Sperimentali di III liceo presento lo stesso percorso, ridotto all’osso, per raggiungere rapidamente il quadro dell’analogia e potere parlare del regime stazionario della Troposfera. In questo caso l’obbiettivo principale non è la comprensione della Meccanica, dell’attrito e della Termodinamica, e quindi non è necessario approfondire le singole questioni come ho fatto in questo lavoro. Penso che in questo corso il ruolo dei modelli al computer sia fondamentale, ma sono costretto a fare numerosi compromessi per ragioni di tempo.

### 13.3 Hardware e software

Viviamo in un'era in cui la presenza di computer e programmi, ben lungi da alleviarci le fatiche, ci impone una produttività sempre maggiore.

Se da una parte è sempre più facile produrre documenti ben impaginati che includono vari elementi sofisticati, quali le equazioni, i grafici e le illustrazioni di vario genere, dall'altra proprio questa accresciuta disponibilità di risorse ci impone di procedere rapidamente e di produrre documenti di buon livello.

Purtroppo il software migliore ha spesso un costo elevato, e non tutti possono permetterselo; l'esito della storia è ben noto: la grande maggioranza degli utenti di computer utilizza alcuni - pochi, in pratica uno solo - programmi molto diffusi che hanno imposto e diffuso, negli ultimi vent'anni, standard di qualità molto bassi.

Si consideri, a titolo di esempio, questa circostanza: nel 1996 usavo Word 2.0 su un PC con una CPU intel 80486 con 33MHz di clock, e 4 MB di RAM: con questo strumento impaginavo senza problemi documenti di 120 pagine con numerose equazioni. Oggi ho un computer con una CPU intel Core duo con 2.8GHz di clock, e 4GB di RAM: se provo a scrivere un documento con testo e immagini con più di venti pagine Word 2008 si blocca (e non mi si dica di provare con Word 2011).

Senz'altro non dedico molto tempo al ridimensionamento delle immagini che importo in Word, e quindi non ottimizzo la gestione della memoria RAM, ma a mio avviso qui c'è qualche cosa che non va.

Voglio portare un contributo per la diffusione di una cultura informatica più sana - e spero che questa presunzione possa esser tollerata. Il complesso hardware-software deve consentire l'espressione delle nostre idee; non deve avvenire il contrario, ossia che le nostre idee debbano plasmarsi sui vincoli e sugli standard ormai diffusi, ed esserne pesantemente condizionate e limitate.

Il mio contributo è molto tecnico: faccio l'elenco del software che ho impiegato; si tratta solo ed esclusivamente di programmi open-source adatti a tutte le piattaforme in commercio.

#### **Strumenti per la redazione**

1. Per la scrittura testi ho utilizzato Lyx, un front-end grafico di Latex.
2. Per i diagrammi con le frecce ho utilizzato Inkscape, un programma di grafica vettoriale con le stesse funzionalità di Adobe Illustrator.

3. Per le equazioni che ho aggiunto ai grafici ed ai diagrammi ho utilizzato Latexit, un programma basato su Latex che ha come unico scopo produrre equazioni in formato .PNG.
4. Per i grafici ho utilizzato Geogebra.
5. Per i disegni ho utilizzato una matita con mina H (per cominciare), una matita con mina 3B (per ripassare i contorni) e una con mina 4B (per i riempimenti), nonché un temperino da scrivania con manovella, poiché quelli in commercio nei reparti cartoleria ormai sembrano non funzionare più.
6. Per i modelli a pittogrammi ho usato Narrator; un altro progetto open source che mi sono proposto di seguire con attenzione è il programma Sphynxs SD, che purtroppo, al momento, è in grado di integrare solo con il metodo di Euler.
7. Per la gestione dei file .JPEG, .PNG e .PDG, per il momento, ho usato programmi commerciali, peraltro di ottima qualità; sto cercando adeguati sostituti open-source.

Penso che l'impulso per rinnovare la cultura informatica possa e debba crescere proprio nelle scuole.

## 13.4 Ringraziamenti

Ora qualche parola di ringraziamento.

Nell'anno scolastico 2007/2008 ho dovuto affrontare l'abilitazione per l'insegnamento della fisica nelle scuole superiori.

Non dovete essere tristi per me: di questi tempi è qualche cosa che prima o poi capita a tutti i docenti; d'altra parte, si dice che ciò che non uccide rende più forti.

Poiché anche nei cammini più oscuri si fanno buoni incontri, la stessa cosa è capitata anche a me; ho molto apprezzato i contenuti del corso di didattiche disciplinari, tenuto dal prof. Michele D'Anna.

Devo alle numerose provocazioni intellettuali che Michele lanciava durante le sue lezioni alcune idee che sono rimaste per molto tempo nella loro fase larvale.

Sorvolando sui contenuti generali dell'approccio di Karlsruhe, gli impulsi principali che ricordo di avere ricevuto sono questi:

- l’idea che la costruzione dei modelli al computer conducesse in modo naturale alla distinzione tra portatori e potenziali;
- il ruolo dei modelli al computer e dell’acquisizione dati on-line nel percorso formativo degli allievi;
- la centralità dell’esempio dell’attrito tra corpo e piano: questo era il contenuto di un articolo che Michele ci ha chiesto di approfondire.

Michele D’Anna ha dedicato una grande quantità di tempo alla lettura di queste pagine, e le sue indicazioni sono state preziose per correggere il numero (impressionante) di errori di distrazione, e per sistemare alcuni nodi concettuali presenti nelle prime versioni.

Ringrazio inoltre Albert Strupler, insegnante di Fisica al Liceo 1, per le numerose discussioni sui temi presentati in questo lavoro, che mi hanno di volta in volta permesso di fare piccoli, ma decisivi passi in avanti.

Infine sono grato al gruppo StrIIT intero per la fiducia che mi ha accordato quando, ormai tre anni fa, avevo presentato le mie prime confuse idee su quale sarebbe stato il mio contributo all’intero progetto.

Il lavoro prosegue, poiché c’è ancora molto da fare.

A presto.

---

Parte III

## Appendice



## A Sistemi di punti materiali

Le equazioni della dinamica formulate da Newton sono affermazioni sulla dinamica traslazionale dei punti materiali.

Se ci basiamo su queste equazioni ed includiamo nella teoria il principio di sovrapposizione, possiamo dedurre alcune conclusioni molto generali sulla dinamica dei sistemi di punti materiali e in particolare sui corpi rigidi.

Il risultato è un insieme di sei equazioni, tre per i gradi di libertà traslazionali e tre per i gradi di libertà rotazionali, chiamate **equazioni cardinali della dinamica**.

Poiché voglio poggiare le argomentazioni di questo lavoro su una base che possenga un minimo di coerenza interna, affronto qui una breve digressione su questi argomenti.

### A.1 Le equazioni cardinali

La teoria di Newton poggia sulla definizione di **punto materiale**.

Un punto materiale è un punto geometrico al quale può essere attribuita una massa inerziale  $m$ . Possiamo considerarlo un'utile idealizzazione e immaginare che un corpo esteso sia composto da infinite parti minuscole, che nel limite diventano punti materiali.

D'altra parte questa definizione si configura anche come una necessità interna della teoria.

Il punto chiave è che un punto materiale ha solo i tre gradi di libertà traslazionali, mentre un corpo esteso, per quanto piccolo, ha almeno i gradi di libertà rotazionali. Inoltre se un corpo esteso non è rigido dobbiamo aggiungere i gradi vibrazionali interni.

Il Secondo e il Terzo principio di Newton si riferiscono solo ai gradi di libertà traslazionali, e sono pertanto affermazioni sui punti materiali, e non sui corpi estesi.

La relazione dalla quale possiamo partire è quella che lega la quantità di moto di un punto materiale alla sua velocità:

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{95}$$

L'equazione (95) è detta **relazione costitutiva** e non è una semplice definizione: essa contiene già un'informazione importante sulla natura dello spazio

e del tempo, ed è legata al principio di relatività galileiana, e in ultima analisi al Primo Principio della Dinamica<sup>26</sup>.

Se invece fondiamo la teoria sul Principio di Relatività speciale, la relazione costitutiva diventa

$$\vec{p} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \vec{v}$$

Così quella che di solito viene considerata definizione appare invece un'equazione ricca di contenuto.

Per esemplificare in modo compatto e significativo il contenuto del Secondo e del Terzo Principio, consideriamo un sistema costituito da due punti materiali. Se indichiamo con  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$  ed  $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$  le azioni reciproche tra i due punti materiali, e con  $\vec{F}_{amb \rightarrow 1}$  e  $\vec{F}_{amb \rightarrow 2}$  le azioni dell'ambiente, le equazioni della dinamica si possono scrivere così:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}_1}{dt} &= \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_{amb \rightarrow 1} \\ \frac{d\vec{p}_2}{dt} &= \vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_{amb \rightarrow 2} \\ \vec{F}_{1 \rightarrow 2} &= -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} \end{aligned}$$

La loro validità è fondata anche sul **Principio di Sovrapposizione**, che ci permette di scrivere la forza totale che agisce su ciascun punto come somma delle azioni dell'altro punto e dell'ambiente.

Ora consideriamo un sistema costituito da un numero arbitrario di punti materiali e introduciamo la quantità di moto totale nel modo più semplice:

$$\vec{p}_{tot} = \sum_i \vec{p}_i \tag{96}$$

Deriviamo rispetto al tempo l'equazione (96) ed usiamo il Secondo Principio ("II"), il Terzo Principio ("III"), il Principio di Sovrapposizione ("sovr") e un po' di algebra ("alg"):

---

<sup>26</sup>La versione comunemente riportata nei libri di Liceo, "...Se la risultante di tutte le azioni su un corpo è zero, questo si muove a velocità costante..." non è il Primo Principio ma una semplice conseguenza del Secondo".

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{p}_{tot}}{dt} &= \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \\
&\stackrel{\text{II}}{=} \sum_i \vec{F}_{i,tot} \stackrel{\text{sovr}}{=} \sum_i \left( \vec{F}_{amb \rightarrow i} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i} \right) = \\
&\stackrel{\text{alg}}{=} \sum_i \vec{F}_{amb \rightarrow i} + \sum_i \sum_{j < i} \left( \vec{F}_{j \rightarrow i} + \vec{F}_{i \rightarrow j} \right) = \\
&\stackrel{\text{III}}{=} \sum_i \vec{F}_{amb \rightarrow i} = \vec{F}_{amb,tot}
\end{aligned}$$

A questo punto introduciamo come di consueto la definizione di **massa totale** e di **velocità del centro di massa** del sistema:

$$m_{tot} \stackrel{def}{=} \sum_i m_i \quad (97)$$

$$\vec{v}_{c.m.} \stackrel{def}{=} \frac{1}{m_{tot}} \sum_i \vec{p}_i \quad (98)$$

Con queste definizioni possiamo riscrivere l'ultimo risultato nella forma

$$m_{tot} \frac{d\vec{v}_{c.m.}}{dt} = \vec{F}_{amb,tot} \quad (99)$$

La (99) è formalmente analoga al II principio, ma come abbiamo visto contiene molta più informazione: essa è comunemente chiamata **Prima Equazione Cardinale della Dinamica**.

Essa non è sufficiente per determinare la dinamica di un sistema di  $N$  punti materiali; che sia così è evidente per il fatto che i gradi di libertà di questo sistema sono  $3N$ , mentre un'equazione vettoriale equivale a solo tre equazioni (per  $N = 1$  ritorniamo alla dinamica del punto materiale).

Per questo motivo dobbiamo introdurre le nozioni di **momento angolare** e di **momento di una forza**. Entrambe le definizioni dipendono dalla scelta di un punto dello spazio, che indico con  $O$ .

$$\vec{L}_O \stackrel{def}{=} \vec{r}_O \times \vec{p} \quad (100)$$

$$\vec{\tau}_O \stackrel{def}{=} \vec{r}_O \times \vec{F} \quad (101)$$

( $\vec{r}_0$  è il vettore posizione del punto materiale rispetto ad  $O$ ).

Bisogna stare molto attenti: se si cambia, nella definizione, il punto di riferimento, cambiano i vettori  $\vec{L}$  e  $\vec{\tau}$ : vedremo che questa osservazione diventa importante quando studiamo la dinamica di due o più corpi rigidi collegati.

Fatte queste precisazioni, nel seguito ometto il pedice “O” per alleggerire la notazione.

Come abbiamo già fatto per la quantità di moto e le forze, applichiamo le definizioni (100) e (101) al caso di un sistema costituito da due punti materiali:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}_1}{dt} &= \vec{\tau}_{2 \rightarrow 1} + \vec{\tau}_{amb \rightarrow 1} \\ \frac{d\vec{L}_2}{dt} &= \vec{\tau}_{1 \rightarrow 2} + \vec{\tau}_{amb \rightarrow 2} \\ \vec{\tau}_{1 \rightarrow 2} &= -\vec{\tau}_{2 \rightarrow 1}\end{aligned}$$

La deduzione di queste equazioni (oltre a qualche piccola manipolazione algebrica) coinvolge nuovamente i Principi di Newton e il Principio di Sovrapposizione. Questa volta però dobbiamo usare anche la relazione costitutiva per derivare il momento angolare rispetto al tempo:

$$\frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \stackrel{\text{cost}}{=} \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

(nel secondo passaggio teniamo conto del fatto che  $\vec{p}$  è parallelo a  $\vec{v}$ ).

Ora applichiamo queste idee ad un sistema composto da un numero arbitrario di punti materiali ed introduciamo il momento angolare totale come già abbiamo fatto per la quantità di moto:

$$\vec{L}_{tot} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad (102)$$

Deriviamo rispetto al tempo l'equazione (102):

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} &= \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \\ &\stackrel{\text{II}}{=} \sum_i \vec{\tau}_i \stackrel{\text{SOVR}}{=} \sum_i \left( \vec{\tau}_{amb \rightarrow i} + \sum_{j \neq i} \vec{\tau}_{j \rightarrow i} \right) = \\ &\stackrel{\text{alg}}{=} \sum_i \vec{\tau}_{amb \rightarrow i} + \sum_i \sum_{j < i} (\vec{\tau}_{j \rightarrow i} + \vec{\tau}_{i \rightarrow j}) = \\ &\stackrel{\text{III}}{=} \sum_i \vec{\tau}_{amb \rightarrow i} = \vec{\tau}_{amb, tot}\end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto la **Seconda Equazione Cardinale della Dinamica**:

$$\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \vec{\tau}_{amb, tot}$$

Le due Equazioni Cardinali non sono sufficienti per determinare la dinamica di un sistema di punti materiali qualsiasi, poiché sono sei equazioni in tutto, ma lo sono nel caso del corpo rigido, che ha sei gradi di libertà, tre traslazionali e tre rotazionali.

Analoghe manipolazioni algebriche ci permettono di adattare le due Equazioni Cardinali al caso di due sistemi in interazione,  $A$  e  $B$ .

### Le Equazioni Cardinali della Dinamica

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}_A}{dt} &= \vec{F}_{A \rightarrow B} + \vec{F}_{amb \rightarrow A} & \frac{d\vec{L}_A}{dt} &= \vec{\tau}_{B \rightarrow A} + \vec{\tau}_{amb \rightarrow A} \\ \frac{d\vec{p}_B}{dt} &= \vec{F}_{B \rightarrow A} + \vec{F}_{amb \rightarrow B} & \frac{d\vec{L}_B}{dt} &= \vec{\tau}_{A \rightarrow B} + \vec{\tau}_{amb \rightarrow B} \\ \vec{F}_{A \rightarrow B} &= -\vec{F}_{B \rightarrow A} & \vec{\tau}_{A \rightarrow B} &= -\vec{\tau}_{B \rightarrow A} \end{aligned}$$

Questa riformulazione basata su una coppia di sistemi interagenti si rivelerà particolarmente utile quando introdurremo il linguaggio delle correnti.

Le definizioni di momento angolare e di momento di una forza ci permettono di dimostrare facilmente due utili risultati.

**Lemma 1.** *Sussiste la relazione  $\vec{L}_{O'} = \vec{L}_O + \vec{O'O} \times \vec{p}_{tot}$ .*

*Dimostrazione.* Per definizione

$$\begin{aligned} \vec{L}_{O'} &= \sum_i \vec{O'P}_i \times \vec{p}_i = \sum_i (\vec{O'O} + \vec{OP}_i) \times \vec{p}_i = \\ &= \vec{O'O} \times \sum_i \vec{p}_i + \sum_i \vec{OP}_i \times \vec{p}_i = \\ &= \vec{O'O} \times \vec{p}_{tot} + \vec{L}_O \end{aligned}$$

Questo significa, in particolare, che quando la quantità di moto di un sistema è uguale a zero il calcolo del momento angolare conduce allo stesso risultato qualunque sia il punto di riferimento.  $\square$

**Lemma 2.** *Il momento angolare di una coppia non dipende dal punto di riferimento.*

*Dimostrazione.* Con il termine coppia si intende qui una coppia di forze di pari intensità, stessa direzione e verso opposto.

Indichiamo queste forze con  $+\vec{F}$  e  $-\vec{F}$ ; siano inoltre  $P$  e  $Q$  i rispettivi punti di applicazione.

Il momento della coppia rispetto ad un punto  $O$  è

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \overrightarrow{OP} \times \vec{F} + \overrightarrow{OQ} \times (-\vec{F}) = \\ &= (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}) \times \vec{F} = \overrightarrow{QP} \times \vec{F}\end{aligned}$$

Questo risultato non dipende dal punto  $O$  e quindi il lemma è dimostrato.  $\square$

## A.2 A proposito dei corpi rigidi

I corpi rigidi sono sistemi molto particolari di punti materiali.

Siano  $P$  e  $Q$  sono due punti materiali di un corpo rigido; per la nozione stessa di “rigidità” la distanza tra due punti qualsiasi è costante nel tempo:

$$(\vec{r}_P - \vec{r}_Q)^2 = \text{costante}$$

Deriviamo anzitutto questa equazione rispetto al tempo:

$$(\vec{r}_P - \vec{r}_Q) \times (\vec{v}_P - \vec{v}_Q) = \vec{0}$$

Dunque i vettori **posizione relativa** e **velocità relativa** della coppia di punti sono perpendicolari tra loro.

Alcune argomentazioni abbastanza semplici sulla cinematica del corpo rigido (cfr. ad esempio Fasano e Marmi, [18]) permettono di mostrare che la velocità di un punto qualsiasi di un corpo rigido, ad un dato istante, si può esprimere con la relazione

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_O) \tag{103}$$

L'equazione (103) è a me nota come Teorema del Mozzi.

Usiamo ora questa formula per caratterizzare ulteriormente il concetto di momento angolare.

Nel caso più generale un corpo rigido trasla e ruota nello spazio, mentre nell'economia di questo lavoro siamo interessati in primo luogo alla dinamica di un corpo rigido vincolato a muoversi su un piano.

In questo caso speciale il vettore  $\vec{\omega}$  è perpendicolare al piano sul quale si svolge il moto<sup>27</sup>.

Di qui in avanti scegliamo una terna cartesiana  $xyz$  positiva (con versori  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$ ), in cui  $z$  è l'asse perpendicolare al piano in cui si sviluppa il movimento del corpo rigido.

<sup>27</sup>Per essere precisi, dovremmo dire che l'equazione (103) definisce solo la componente di  $\vec{\omega}$  perpendicolare al piano, e quindi siamo liberi di porre le altre due componenti uguali a zero.

Fatte queste puntualizzazioni, calcoliamo il momento angolare di un corpo rigido vincolato a muoversi su un piano.

Scegliamo come punto di riferimento un punto  $O$  del piano e indichiamo con  $\vec{r}_0$  (“r con zero”) la sua posizione. Vediamo in primo luogo che il calcolo di  $\vec{L}$  si può dividere in due termini, che trattiamo separatamente.

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times m_i (\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_0)) = \\ &= \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{v}_0 + \\ &+ \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_0)\end{aligned}$$

Il primo termine è uguale a zero se  $O$  è un punto fisso: se il corpo rigido è vincolato a muoversi attorno ad un punto fisso, ad esempio, possiamo scegliere proprio questo per calcolare il momento angolare e il momento delle forze.

Se il corpo rigido non ha alcun punto fisso possiamo scegliere il centro di massa, e anche in questo caso il primo termine è uguale a zero: difatti

$$\begin{aligned}\sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_{c.m.}) \times \vec{v}_{c.m.} &= \left( \sum_i m_i \vec{r}_i - \left( \sum_i m_i \right) \vec{r}_{c.m.} \right) \times \vec{v}_{c.m.} = \\ &= (m_{tot} \vec{r}_{c.m.} - m_{tot} \vec{r}_{c.m.}) \times \vec{v}_{c.m.} = 0\end{aligned}$$

In queste due speciali circostanze, e solo in queste due, il momento angolare si riduce al secondo dei due termini.

Esso può essere semplificato usando la relazione generale

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

e tenendo presente che il vettore  $\vec{\omega}$  è perpendicolare a tutti i vettori  $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ ; il risultato è

$$\vec{L} = I \vec{\omega} \quad (104)$$

dove abbiamo introdotto il momento di inerzia

$$I = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_0)^2 \quad (105)$$

Diamo ora la corretta interpretazione al vettore  $\vec{\omega}$  che è stato introdotto in modo tanto astratto.

Per far questo dobbiamo parametrizzare lo spazio delle configurazioni del corpo rigido con le coordinate  $(x, y, z)$  del punto di riferimento per il calcolo di  $\vec{L}$  e con l'angolo  $\phi$  che il vettore  $\vec{r} - \vec{r}_0$  forma con l'asse  $x$ .

La posizione di un punto qualsiasi del corpo rigido è dato da

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \varrho \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

e se deriviamo rispetto al tempo otteniamo

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix} + \varrho \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \frac{d\phi}{dt}$$

Notiamo ora che

$$\begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{k} \times \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

e pertanto

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{d\phi}{dt} \mathbf{k} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)$$

Confrontando l'ultima equazione con la (103) vediamo che

$$\vec{\omega} = \frac{d\phi}{dt} \mathbf{k}$$

ed è quindi chiaro perché  $\vec{\omega}$  è chiamato **vettore velocità angolare**.

Le equazioni 104 e 105 rappresentano ciò che possiamo chiamare **relazione costitutiva della rotazioni**.

Poniamo ora

$$\vec{L} = L_z \mathbf{k}$$

così che l'equazione costitutiva delle rotazioni può essere scritta semplicemente così:

$$L_z = I\omega_z$$

dove  $\omega_z$  è semplicemente  $d\phi/dt$ .

È bene ribadire che questo è solo un caso particolare della dinamica dei corpi rigidi: abbiamo difatti supposto che tutti i movimenti avvengano su un piano.



D'altro canto nel caso più generale si introducono la **matrice di inerzia** (simmetrica)

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

dove gli elementi diagonali sono chiamati **momenti di inerzia**, mentre gli elementi fuori-diagonale sono chiamati **momenti deviatori**, e il vettore velocità angolare

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

e così il momento angolare è legato alla velocità angolare dalla relazione

$$\vec{L} = \mathbf{I}\vec{\omega}$$

In questo modo intuivamo che si potranno estendere le deduzioni di questa sezione al caso più generale.

La relazione costitutiva delle rotazioni ci permette di scrivere la Seconda Equazione Cardinale in forma compatta. Abbiamo così ottenuto le tre equazioni per i moti piani di un corpo rigido.

### Dinamica dei corpi rigidi sul piano

$$\frac{dp_x}{dt} = F_{ext,x} \quad p_x = mv_x$$

$$\frac{dp_y}{dt} = F_{ext,y} \quad p_y = mv_y$$

$$\frac{dL_z}{dt} = \tau_{ext,z} \quad L_z = I\omega_z$$

Concludiamo questa sezione con un piccolo approfondimento, che riguarda il ruolo delle aste utilizzate come elementi di collegamento tra corpi rigidi, nel limite di massa nulla. Si ammette che queste aste siano soggette a forze che agiscono attraverso i loro estremi (vedi figura 120).

**Lemma 3.** (Delle aste ideali) Le forze applicate ai capi di un'asta di massa nulla hanno stessa intensità e stessa direzione, ma verso opposto. Inoltre giacciono sulla stessa retta di applicazione.

*Dimostrazione.* Scriviamo anzitutto le due equazioni cardinali per l'asta, indicando con  $\vec{F}_A$  ed  $\vec{F}_B$  le forze applicate ai capi liberi dell'asta, A e B, riferendo il calcolo dei momenti al centro di massa dell'asta ( $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  sono i vettori che collegano il centro di massa ai due estremi):

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_A + \vec{F}_B$$

$$I \frac{d\omega_z}{dt} = (\vec{a} \times \vec{F}_A + \vec{b} \times \vec{F}_B)_z$$

Per ipotesi  $m$  e  $I$  sono uguali a zero: otteniamo così in primo luogo

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B = 0$$

e con ciò abbiamo appena dimostrato la prima parte del lemma.

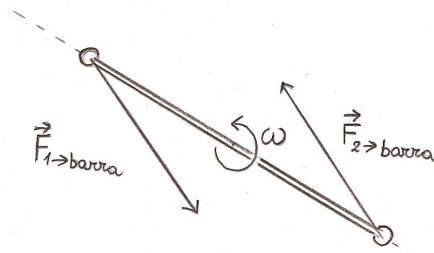


Figura 120: La situazione illustrata è impossibile nel limite ideale di massa nulla dell'asta.

Sostituendo questa relazione nella seconda equazione otteniamo anche

$$(\vec{a} - \vec{b}) \times \vec{F}_A = \vec{0}$$

e dato che  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{a} - \vec{b}$  sono allineati con l'asta abbiamo anche dimostrato la seconda parte.  $\square$

### A.3 Ingranaggi

Il momento angolare e il momento delle forze devono essere calcolati, per tutti i corpi che compongono un sistema qualsiasi, rispetto allo stesso punto di riferimento; ciò richiede una certa cautela, il che è evidente già quando analizziamo il sistema dei due corpi rigidi in interazione.

Consideriamo il caso in cui due ingranaggi di raggio e massa diversa sono imperniati su un asse fisso e collegati tra loro attraverso le rispettive cremagliere (figura 121).

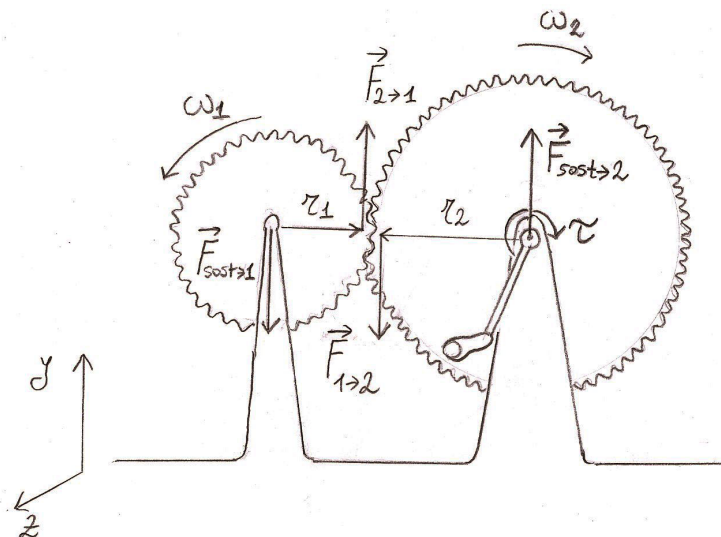


Figura 121: Agendo attraverso la manovella, imprimiamo all'ingranaggio 2 un'accelerazione angolare negativa. Si suppone che gli ingranaggi ruotino liberamente (senza attriti) e che siano simmetrici, così che i centri di massa si trovino esattamente sugli assi di rotazione.

Non sono rappresentate le forze orizzontali che agiscono sugli ingranaggi attraverso i pignoni poiché non hanno momento rispetto agli assi di rotazione.

Per fissare le idee supponiamo che sia  $r_2 > r_1$ , e che l'ingranaggio venga mantenuto in rotazione attraverso un'opportuna manovella. In primo luogo, passiamo al linguaggio delle correnti di quantità di moto: le condizioni di equilibrio mostrano immediatamente che nel dispositivo si stabilisce un circuito di quantità di moto che entra nell'ingranaggio 2 dal suolo attraverso il pignone, fluisce da un ingranaggio all'altro ed esce dal pignone dell'ingranaggio 1 verso il suolo (vedi figura 122).

Le due equazioni per la dinamica rotazionale sono

$$(1) \quad I_1 \frac{d\omega_1}{dt} = +\mathcal{I}_p r_1$$

$$(2) \quad I_2 \frac{d\omega_2}{dt} = +\mathcal{I}_p r_2 - \mathcal{I}_{L,man}$$

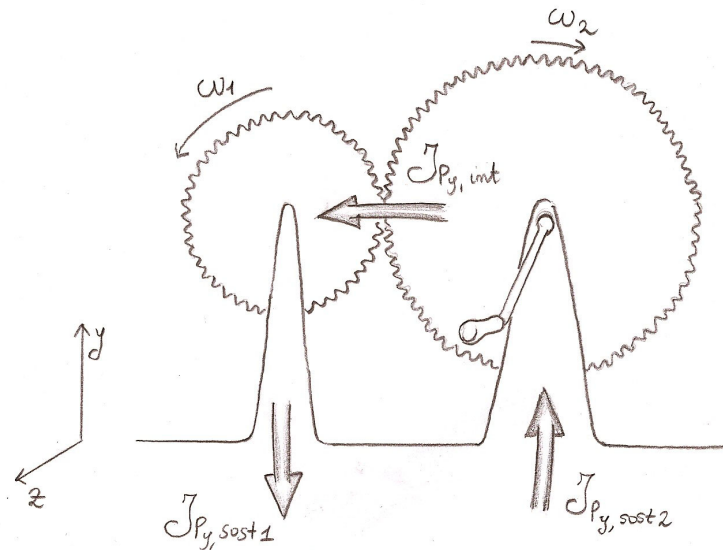


Figura 122: Alle coppie azione-reazione corrisponde questo circuito di quantità di moto; l'equazione di continuità per la quantità di moto impone che  $\mathcal{I}_{p_y, sost 1} = \mathcal{I}_{p_y, sost 2} = \mathcal{I}_{p_y, int}$ .

In parentesi ho indicato il centro di massa al quale ciascuna equazione è riferita.

I termini di interazione nei due lati di sinistra non possono essere uguali e per il momento non siamo in grado di identificare una corrente di momento angolare che fluisce da un ingranaggio all'altro.

Per individuare questa corrente dobbiamo prestare attenzione alla definizione di momento di una forza e di momento angolare: entrambi dipendono in generale dalla scelta del punto a cui viene riferito il calcolo. A questo proposito osserviamo che non dipendono da questa scelta:

1. la corrente  $\mathcal{I}_{L_z, man}$ , perché corrisponde ad una coppia;
2. il momenti angolare di ciascun ingranaggio (a patto che il punto di riferimento sia un qualche punto fisso del dispositivo) perché i centri di massa sono immobili;

Osserviamo inoltre - e questo sarà il punto chiave delle successive deduzioni - che alla corrente di quantità di moto che fluisce attraverso ciascun ingranaggio corrisponde una coppia di forze di pari intensità, stessa direzione e verso opposto; ad essa è associato un momento di coppia e la corrispondente corrente di momento angolare che, come  $\mathcal{I}_{L_z, man}$ , non dipende dalla scelta del punto di riferimento.

Scegliamo ad esempio di calcolare tutti i momenti rispetto al centro di massa dell'ingranaggio 2 (figura 123); la seconda equazione non cambia, perché abbiamo già usato questo punto come riferimento (per ipotesi anche nel calcolo di  $\mathcal{I}_{L,ext}$ ).

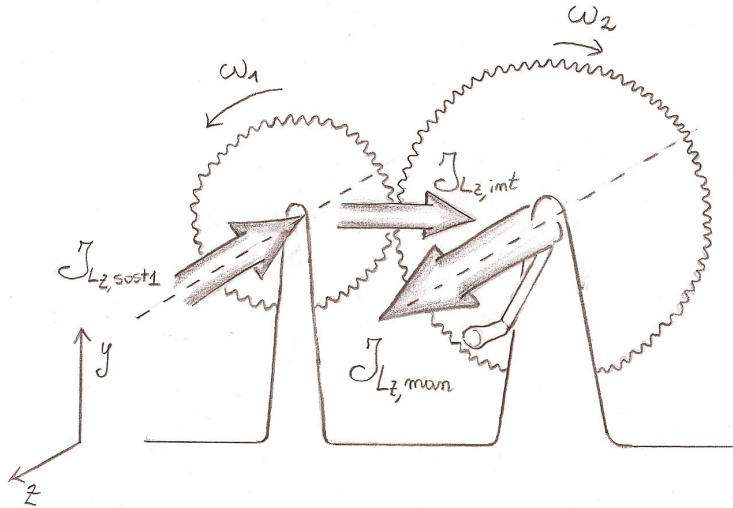


Figura 123: Alla coppia azione-reazione che si instaura nel pignone dell'ingranaggio 1 corrisponde la corrente di momento angolare  $\mathcal{I}_{Lz, sost1}$ . La corrente di momento angolare  $\mathcal{I}_{Lz, int(2)}$ , scorre dall'ingranaggio 1 all'ingranaggio 2. Tutte le correnti sono misurate rispetto al centro di massa dell'ingranaggio 2.

Le equazioni di continuità per il momento angolare, scritte entrambe rispetto a  $B$ , sono quindi

$$(2) \quad I_1 \frac{d\omega_1}{dt} = \underbrace{-\mathcal{I}_{p_y, int} r_2}_{\text{interazione}} + \underbrace{\mathcal{I}_{p_y, int} (r_2 + r_1)}_{\text{pignone 1}}$$

$$(2) \quad I_2 \frac{d\omega_2}{dt} = \underbrace{+\mathcal{I}_{p_y, int} r_2}_{\text{interazione}} - \underbrace{\mathcal{I}_{Lz, man}}_{\text{manovella}}$$

Si vede immediatamente che la prima equazione non è cambiata, ma ora i termini sono diversamente organizzati.

Possiamo così identificare una corrente di momento angolare, calcolato rispetto a 2 con la relazione

$$\mathcal{I}_{Lz, int(2)} = r_2 \mathcal{I}_{p_y, int}$$

che fluisce dall'ingranaggio 1 all'ingranaggio 2 attraverso il punto di contatto, e una corrente di momento angolare esterna che scorre attraverso il pignone

dell'ingranaggio 1.

Se invece decidiamo di riferire tutto al centro di massa dell'ingranaggio 1 (124), possiamo identificare un'altra corrente di momento angolare, calcolato

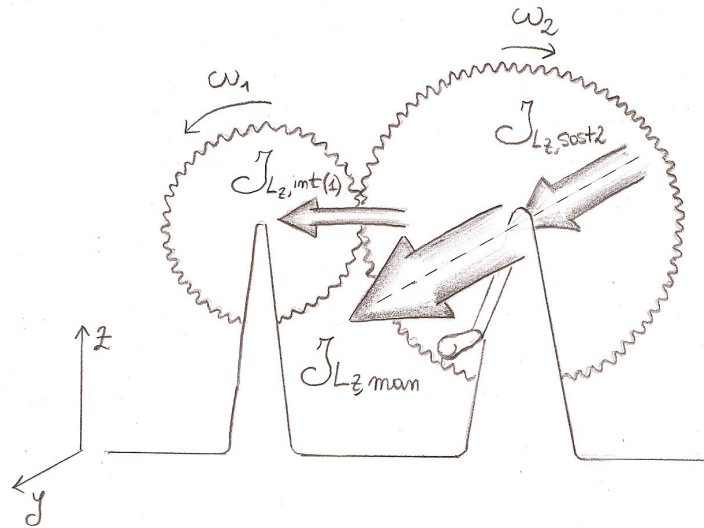


Figura 124: Alla coppia azione-reazione che si instaura nel pignone dell'ingranaggio 2 corrisponde la corrente di momento angolare  $\mathcal{I}_{L_z, sost 2}$ . La corrente di momento angolare  $\mathcal{I}_{L_z, int(1)}$ , scorre dall'ingranaggio 2 all'ingranaggio 1. Tutte le correnti sono misurate rispetto al centro di massa dell'ingranaggio 1.

rispetto a 1 con la relazione

$$\mathcal{I}_{L_z, int(1)} = r_1 \mathcal{I}_{p_y, int}$$

che fluisce dall'ingranaggio  $B$  all'ingranaggio  $A$  attraverso il punto di contatto, e una nuova corrente di momento angolare esterna che scorre attraverso il pignone dell'ingranaggio  $B$ . Le equazioni della dinamica rotazionale si riscrivono pertanto in questo modo:

$$\begin{aligned} (B) \quad I_1 \frac{d\omega_1}{dt} &= \underbrace{+\mathcal{I}_{p_y, int} r_1}_{\text{interazione}} \\ (B) \quad I_2 \frac{d\omega_2}{dt} &= \underbrace{-\mathcal{I}_{p_y, int} r_1}_{\text{interazione}} + \underbrace{\mathcal{I}_{p_y, int} (r_2 + r_1)}_{\text{pignone 2}} - \underbrace{\mathcal{I}_{L_z, man}}_{\text{manovella}} \end{aligned}$$

Anche qui nulla è cambiato, tranne la ripartizione dei termini e il significato di ciascuno di essi.

### Dinamica degli ingranaggi

La cinematica della situazione impone che le due velocità angolari siano legate alla velocità  $v$  del punto di contatto dalle relazioni

$$\begin{aligned}\omega_1 &= +\frac{v}{r_1} \\ \omega_2 &= -\frac{v}{r_2}\end{aligned}$$

e usando queste due relazioni è facile vedere che è

$$\left(\frac{I_1}{r_1^2} + \frac{I_2}{r_2^2}\right) \frac{dv}{dt} = \frac{\mathcal{I}_{L_z, man}}{r_2}$$

e anche

$$\mathcal{I}_{p_y} = \frac{I_1}{r_1^2} \frac{dv}{dt}$$

dove ho indicato con  $\mathcal{I}_{p_y}$  l'intensità di corrente del circuito.

Nel caso in cui la manovella non sia presente, otteniamo immediatamente

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= 0 \\ \mathcal{I}_{p_y} &= 0\end{aligned}$$

In questo caso i due ingranaggi sono praticamente disaccoppiati, anche se le loro velocità di rotazione continuano ad essere in relazione tra loro: la conservazione del momento angolare vale separatamente per ciascuno di essi.

Penso che basandoci su questo esempio potremo affrontare con la dovuta cautela tutti i problemi che coinvolgono ingranaggi accoppiati sullo stesso piano (sia attraverso cremagliere a contatto, sia attraverso cinghie di trasmissione).

## B Il concetto di spinta

Penso che alla parola “spinta” potremmo attribuire due significati diversi, a seconda del contesto nel quale ci stiamo muovendo.

Consideriamo anzitutto, a titolo di semplicità, due corpi collocati ad una certa distanza, e vincolati a muoversi lungo la stessa traiettoria rettilinea.

### B.1 Prima interpretazione

Se tra i due corpi sussiste un’interazione che dipende solo dalla posizione relativa le equazioni di continuità sono

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= +\mathcal{I}_p \\ \dot{p}_2 &= -\mathcal{I}_p \\ \mathcal{I}_p &= \phi(x_{rel})\end{aligned}$$

dove ho posto  $x_{rel} = x_2 - x_1$ . Questo è ad esempio il caso dell’interazione di tipo elastico, ma non solo. Per fissare le idee poniamo che sia  $x_2 > x_1$ .

Deriviamo rispetto al tempo la terza equazione ed otteniamo

$$\frac{d\mathcal{I}_p}{dt} = \phi' v_{rel} \tag{106}$$

dove ho posto

$$\frac{dx_{rel}}{dt} = v_{rel}$$

L’equazione 106 ci dice che la rapidità di variazione della corrente è proporzionale alla la velocità relativa dei due corpi (la “tensione cinematica”). Ora si danno quattro casi casi:

$$\begin{array}{ccc} \phi' > 0 & & \phi' < 0 \\ \phi > 0 & \frac{d\mathcal{I}_p}{dt} > 0 & \frac{d\mathcal{I}_p}{dt} < 0 \\ & \mathcal{I}_p > 0 & \mathcal{I}_p > 0 \\ \phi < 0 & \frac{d\mathcal{I}_p}{dt} > 0 & \frac{d\mathcal{I}_p}{dt} < 0 \\ & \mathcal{I}_p < 0 & \mathcal{I}_p < 0 \end{array}$$

In questo contesto interpreto la velocità relativa come spinta al cambiamento della corrente (che può eventualmente anche scorrere dal corpo a velocità minore all’altro).



## B.2 Seconda interpretazione

Se tra i due corpi scorre una corrente di quantità di moto di tipo viscoso, sappiamo per esperienza che la velocità relativa diminuirà fino a quando il sistema raggiungerà asintoticamente la soluzione di equilibrio, con  $v_1 = v_2 = v_{cm}$ . Questo è il caso, ad esempio, di un proiettile (corpo 1) che si conficca in un corpo plastico (corpo 2). Approfondiamo la questione dal punto di vista teorico,

Per non perdere troppo di generalità, ammettiamo che la corrente di interazione scorra dal corpo veloce a quello lento e che abbia queste caratteristiche:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{int} &= f(v_{rel}) \\ f' &> 0 \\ f(0) &= 0\end{aligned}$$

Possiamo allora dimostrare la seguente

**Proposition 4.** *Il sistema tende asintoticamente all'equilibrio, ossia vale la relazione  $\lim_{t \rightarrow \infty} v_{rel} = 0$ .*

*Dimostrazione.* Fissiamo le idee ponendo  $v_1(0) > v_2(0)$ , dove  $t = 0$  è l'istante del contatto dei due corpi. Le equazioni di continuità per i due corpi sono allora

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= -f(v_{rel}) \\ \dot{p}_2 &= +f(v_{rel})\end{aligned}$$

Se dividiamo ciascuna equazione per la massa corrispondente e sottraiamo le due equazioni membro a membro otteniamo

$$\dot{v}_{rel} = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) f(v_{rel}) \quad (107)$$

Procedendo con i metodi consueti di integrazioni otteniamo anche

$$\frac{dv_{rel}}{f} = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) dt$$

e quindi

$$\frac{\tilde{f}(t)}{\tilde{f}(0)} = e^{-\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)(t-t_0)} \quad (108)$$

dove abbiamo introdotto la funzione composta  $\tilde{f} = f \circ v_{rel}$ .

L'equazione (108) implica che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{f}(t) = 0$$

e, invocando le regolarità matematiche opportune possiamo anche dire che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{f}(t) = f\left(\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)\right) = 0$$

Per le ipotesi fatte sulla corrente di interazione, questo significa che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 0$$

L'avvicinamento al limite, inoltre, è asintotico fin dall'inizio dell'interazione, perché l'equazione 107 implica che  $\dot{v}_{rel} < 0$   $\square$

Abbiamo così caratterizzato un processo meccanico spontaneo. Ora vediamo cosa succede quando in ciascuno dei due corpi entra una corrente di quantità di moto esterna che non dipende né dalla velocità relativa, né dalla distanza tra i due corpi (e quindi può dipendere solo da processi non meccanici).

**Proposition 5.** *La velocità relativa tende asintoticamente ad un valore di regime, funzione della grandezza  $\frac{\mathcal{I}_{p,1}}{m_1} - \frac{\mathcal{I}_{p,2}}{m_2}$ , dove  $\mathcal{I}_{p,1}$  e  $\mathcal{I}_{p,2}$  sono le correnti di quantità di moto esterne.*

*Dimostrazione.* Le equazioni di continuità per i due corpi sono

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= -f(v_{rel}) + \mathcal{I}_{p,1} \\ \dot{p}_2 &= +f(v_{rel}) + \mathcal{I}_{p,2}\end{aligned}$$

e procedendo come prima otteniamo

$$\dot{v}_{rel} = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \left(f(v_{rel}) - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{\mathcal{I}_{p,1}}{m_1} - \frac{\mathcal{I}_{p,2}}{m_2}\right)\right) \quad (109)$$

Introduciamo ora la funzione

$$h(v_{rel}) = f(v_{rel}) - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{\mathcal{I}_{p,1}}{m_1} - \frac{\mathcal{I}_{p,2}}{m_2}\right)$$

e la funzione composta  $\tilde{h} = h \circ v_{rel}$ .

La proposizione 4 ci garantisce che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{h}(t) = 0$$

e quindi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{f}(t) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{\mathcal{I}_{p,1}}{m_1} - \frac{\mathcal{I}_{p,2}}{m_2}\right)$$

Invocando le necessarie regolarità di tutte le funzioni coinvolte vediamo infine che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = f^{-1} \left( \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left( \frac{\mathcal{I}_{p,1}}{m_1} - \frac{\mathcal{I}_{p,2}}{m_2} \right) \right) \quad (110)$$

□

Possiamo comprendere meglio il significato della proposizione 5 nel caso che sia  $f(v_{rel}) = \frac{1}{\mathcal{R}} v_{rel}$ , dove  $\mathcal{R}$  è una certa grandezza costante.

Questo è il caso, ad esempio, dell'attrito laminare.

Il valore asintotico della velocità relativa è allora

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \mathcal{R} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left( \frac{\mathcal{I}_{p,1}}{m_1} - \frac{\mathcal{I}_{p,2}}{m_2} \right) \quad (111)$$

Ispirati dall'equazione (111) introduciamo la corrente di marea con la relazione

$$\mathcal{I}_{marea} \stackrel{def}{=} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left( \frac{\mathcal{I}_{p,1}}{m_1} - \frac{\mathcal{I}_{p,2}}{m_2} \right)$$

così che la (111) diventa

$$v_{rel, regime} = \mathcal{I}_{marea} \mathcal{R} \quad (112)$$

L'equazione (112), mi pare, esprime il senso della frase “spinta, corrente e resistenza” del modello di Karlsruhe (tra l'altro, nel limite in cui il corpo 2 ha massa infinita, la corrente di marea diventa semplicemente  $\mathcal{I}_{p,1}$ ).

Il nome “corrente di marea” è giustificato dal fatto che l'espressione corrispondente è una combinazione di correnti di forze che agiscono sulla frontiera del sistema e determinano delle tensioni; inoltre la quantità  $\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$  è una combinazione delle masse che compare ripetutamente nel problema dei due corpi.

Nella prossima sezione si possono trovare ulteriori approfondimenti su questo tema.

Osserviamo, infine, che alle stesse conclusioni possiamo arrivare se sostituiamo alla quantità di moto un portatore conservato qualsiasi, e alle velocità il potenziale corrispondente.

### B.3 Confronto

Le due interpretazioni che ho dato alla parola spinta sono in conflitto; vale la pena di scegliere quella che già riecheggia nel modello di Karlsruhe, e tener in ogni caso presente che le interazioni meccaniche consentono alle correnti di

scorrere dal potenziale minore a quello maggiore: in questo caso, ovviamente, la quantità di moto è accoppiata ad un altro portatore.

## C A proposito dell'energia cinetica

Quando ho esposto il tema degli accumuli di energia dei corpi, ho spesso insistito sulla relazione approssimata

$$\mathcal{E}_{corpo+Terra} \cong \frac{1}{2} m_{corpo} v^2$$

nella quale  $v$  è la velocità del corpo misurata rispetto al suolo; ora mostrerò le basi rigorose di questa affermazione.

### C.1 I fondamenti teorici

Dato un sistema qualsiasi costituito da due corpi, l'energia cinetica totale del sistema è data dalla somma delle energie cinetiche dei singoli corpi:

$$\mathcal{E}_{cin} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (113)$$

Se considerassimo i due corpi come un sol blocco, l'energia del sistema si dovrebbe calcolare semplicemente così:

$$\mathcal{E}_{c.m.} = \frac{1}{2} m_{tot} v_{c.m.}^2 \quad (114)$$

Le equazioni 113 e 114 danno lo stesso risultato solo nel caso che i due corpi che compongono il blocco non si muovano l'una relativamente all'altra, ossia, detto in altri termini, se non c'è moto interno.

Ispirati da questa idea possiamo definire l'energia cinetica interna del blocco come differenza tra l'energia totale e l'energia in blocco:

$$\mathcal{E}_{int} \stackrel{def}{=} \mathcal{E}_{cin} - \mathcal{E}_{c.m.},$$

Ora possiamo combinare le equazioni 113 e 114 (ricordando che  $v_{c.m.} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$ ), svolgere qualche semplice manipolazione algebrica e infine determinare l'espressione dell'energia interna:

$$\mathcal{E}_{int} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_{rel}^2 \quad (115)$$

La particolare combinazione di masse che compare nell'ultima equazione è chiamata **massa ridotta del sistema**. Notiamo che, nell'analogia idraulica, questa è la "capacità parallela" di due vasi.

La massa ridotta e la massa totale godono di caratteristiche speculari molto interessanti:

1. se  $m_1 = m_2 = m$ , la massa ridotta è pari a  $\frac{1}{2}m$ , la massa totale è pari a  $2m$ ;
2. la massa ridotta è sempre inferiore alla più piccola tra le due masse dei corpi, la massa totale sempre maggiore della più grande;
3. sussistono due limiti notevoli:

$$\lim_{\frac{m_1}{m_2} \rightarrow 0} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = m_1 \quad \lim_{\frac{m_1}{m_2} \rightarrow 0} (m_1 + m_2) = m_2$$

L'energia cinetica totale del sistema dei due corpi si potrà quindi scomporre anche in questo modo:

$$\mathcal{E}_{cin} = \frac{1}{2} m_{tot} v_{c.m.}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_{rel}^2 \quad (116)$$

Ora applichiamo queste idee al sistema corpo+Terra; se il corpo in questione ha natura "terrestre", ossia animale, persona o veicolo, il rapporto  $\frac{m_1}{m_2}$  vale al più  $10^{-18}$ , e quindi le condizioni della terza proprietà sono ampiamente soddisfatte: da questo punto di vista l'equazione 116 si riduce semplicemente alla 113 - tanto lavoro per nulla!

Esiste però un altro punto di vista, più interessante.

Se ci poniamo nel sistema di riferimento del centro di massa del sistema corpo+Terra, l'energia cinetica diventa

$$\mathcal{E}_{cin} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_{rel}^2 \cong \frac{1}{2} m_1 v_{rel}^2 \quad (117)$$

In questo sistema  $v_{c.m.} = 0$  e quindi  $v_{rel} = v_1$ : pertanto l'osservatore inerziale solidale con il centro di massa misura l'accumulo di energia.

$$\mathcal{E}_{corpo+Terra} \cong \mathcal{E}_{corpo} \quad (118)$$

L'equazione 118 giustifica ampiamente la mia presa di posizione là dove tratto l'energia cinetica, nella sezione 9.3.

L'argomento della massa ridotta appare tecnico e astratto, ma è possibile introdurlo in modo naturale con attività di calcolo numerico, ed anche darne una definizione operativa con un apparato sperimentale abbastanza semplice da realizzare.

## C.2 Attività teorica

Esercizi come questo permettono di mostrare il senso della massa ridotta.

**Esercizio**

Due automobili ( $m_1 = 1.4 \cdot 10^3$  kg,  $m_2 = 1.2 \cdot 10^3$  kg) si muovono sulla stessa traiettoria rettilinea e collidono (con velocità iniziale  $v_1 = +36 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  e  $v_2 = -25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ). In seguito all'urto rimangono collegate, formando un unico corpo.

1. Determina la quantità di energia trasferita al portatore termico.
2. Usando un foglio elettronico, rappresenta in grafico l'energia trasferita al portatore termico, generalizzando al caso generale di velocità relativa qualsiasi.

Se invece il grafico che hai costruito rappresentasse la quantità di energia trasferita da una sola automobile in una collisione completamente anelastica contro un muro rigido e immobile, quale sarebbe la massa di questa automobile?

Per rispondere alla prima domanda di questo esercizio è sufficiente determinare la velocità del centro di massa e calcolare l'energia trasferita al portatore termico con la relazione

$$\mathcal{E}_{trasferita} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{c.m.}^2.$$

ed il risultato coincide, ovviamente, con  $\frac{1}{2}m_r v_{rel}^2$ .

Per rispondere alla seconda domanda ripetiamo il calcolo, ad esempio, variando il valore di  $v_1$  (vedi tabella 1).

$v_1$	$v_2$	$v_{c.m.}$	$v_{rel}$	$\mathcal{E}_{traf}$	$\mathcal{E}_{tot}$	$\mathcal{E}_{c.m.}$
-25	-25	-25	0	0	812500	812500
-20	-25	-22.31	5	8077	655000	646921
-15	-25	-19.61	10	32308	532500	500192
-10	-25	-16.92	15	72692	445000	372308
-5	-25	-14.23	20	129231	392500	263269
0	-25	-11.54	25	201923	375000	173077
5	-25	-8.85	30	290769	392500	101731
10	-25	-6.15	35	395769	445000	49231
15	-25	-3.46	40	516923	532500	15577
20	-25	-0.77	45	654231	655000	769
25	-25	1.92	50	807692	812500	4808
30	-25	4.61	55	977308	1005000	27692
35	-25	7.31	60	1163078	1232500	69423
40	-25	10	65	1365000	1495000	130000

Tabella 1: I dati sono stati calcolati con un foglio elettronico usando le masse indicate nel problema.

Ora possiamo riportare in grafico  $\mathcal{E}_{trasf}$  in funzione di  $v_{rel}$ , ed il risultato, mostrato in figura 125, è una parabola (figura 125). Come si vede la regressione lineare ha condotto alla relazione  $\mathcal{E}_{trasf} \cong 323 \text{ kg} \cdot v_{rel}^2$ , e questo significa in primo luogo che l'energia trasferita può essere interpretata come energia cinetica di un corpo che si muove a velocità pari a  $v_{rel}$ : quando questo corpo impatta contro il muro si ferma completamente, e tutta questa energia viene trasferita al portatore termico.

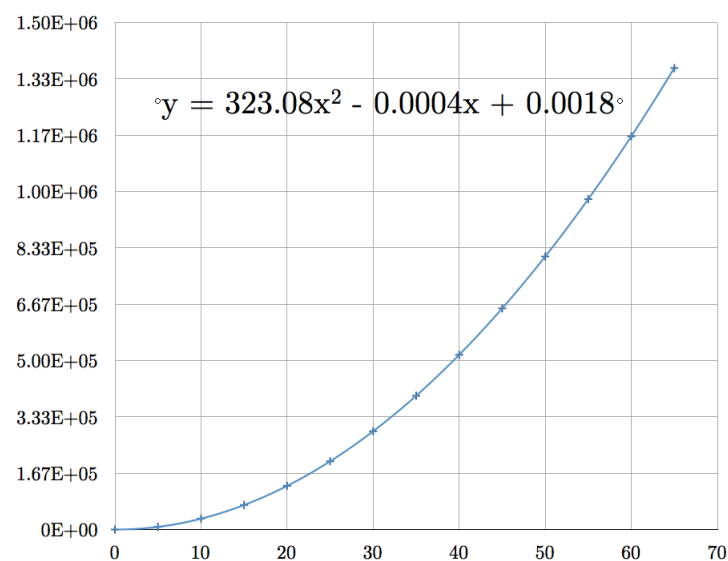


Figura 125: Il coefficiente del termine quadratico nella regressione coincide con  $\frac{1}{2}m_r$ .

In secondo luogo, osserviamo che il coefficiente del termine quadratico è pari a metà di  $m_r$ , e questo significa che la massa ridotta è la risposta alla seconda domanda.

È possibile, inoltre, ripetere i calcoli con diversi rapporti delle masse ed ottenere, graficamente, le proprietà della massa ridotta (vi risparmio le relative tabelle ed i grafici).

### C.3 Apparato sperimentale

Per definire sperimentalmente la massa ridotta riferiamoci all'esperimento illustrato in figura 126.

Trascurando gli attriti, le equazioni della dinamica dei due corpi sono



$$m_1 \dot{v}_1 = -k_A \xi_A + k_B \xi_B$$

$$m_2 \dot{v}_2 = +k_A \xi_A - k_B \xi_B$$

Moltiplichiamo la prima equazione per  $\frac{1}{m_1}$  e la seconda equazione per  $\frac{1}{m_2}$  e sottraiamole membro a membro:

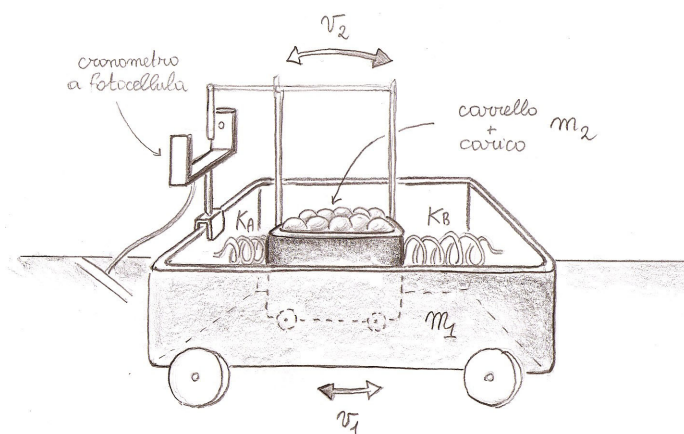


Figura 126: Il periodo di oscillazione del sistema è pari a  $\tau = 2\pi\sqrt{m_r/k_{\parallel}}$ , e può essere misurato con questo allestimento: la bandierina, solidale con il carrello interno oscura periodicamente la fotocellula collegata al cronometro digitale.

$$\dot{v}_1 - \dot{v}_2 = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)(k_A \xi_A - k_B \xi_B)$$

Notiamo che, per la geometria del problema, sussistono le relazioni

$$\xi_A = x_1 - x_2 = -\xi_B$$

e quindi possiamo anche scrivere:

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{v}_{rel} + (k_A + k_B) x_{rel} = 0$$

Questa è l'equazione di un oscillatore armonico di massa  $\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$  e costante elastica pari a  $k_{\parallel} = k_1 + k_2$ : quindi tutto va come se ci fossero un unico corpo e un'unica molla, e il periodo dell'oscillazione è dato da

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m_r}{k_{\parallel}}}$$

Dall'ultima relazione ricaviamo facilmente la massa ridotta del sistema dei due carrelli in funzione dei dati sperimentali:

$$m_r = \frac{k_{\parallel}}{4\pi^2} \tau^2$$

Se poi ripetiamo l'esperienza più volte variando il carico centrale, possiamo determinare la relazione  $m_r(m_1, m_2)$  (è sufficiente tener presente che questa deve essere una funzione simmetrica nei due argomenti).

Da ultimo, un'osservazione sul bilancio energetico nei carrelli oscillanti.

Durante l'oscillazione i portatori elastici associati alle due molle caricano e scaricano energia sui corpi, in un processo misurato dalla potenza elastica

$$\mathcal{P}_{el} = -(k_A + k_B) x_{rel} v_{rel}$$

Qual è esattamente l'altro portatore coinvolto nel processo? Non la quantità di moto totale del sistema, poiché rimane costante nel tempo.

È facile convincersi che qui è necessario introdurre un'altra coppia portatore-potenziale, in cui il potenziale è la velocità relativa e il portatore la quantità  $m_r v_{rel}$ .

Penso che potremmo chiamare questo portatore **quantità di moto interna**, o meglio ancora **momento di marea**, poiché le correnti corrispondenti sono le forze di marea.

## D Dimostrazioni

In questa sezione espongo alcune dimostrazioni che, a mio avviso, contribuiscono a portare un po' di chiarezza sul modello dei potenziali e dei portatori.

I contenuti possono essere articolati in tre parti:

1. *Potenziali e portatori*

In questa parte affronto la questione dei potenziali assoluti e dei processi spontanei.

2. *Disomogeneità*

In questa parte mi concentro sul fatto che quando due sistemi interagiscono si stabiliscono delle disomogeneità interne, a causa delle quali non possiamo in generale attribuire a ciascuno di essi un valore definito del potenziale.

3. *Cicli Termodinamici*

Mi dedico infine al cuore della Termodinamica classica, ossia ai motori termici e alle pompe termiche ideali.

### D.1 Potenziali e portatori

Consideriamo, a titolo di esempio, un sistema composto di due parti omogenee. Per ipotesi, la funzione energia del sistema è  $U(\varphi_i, Q_i, T_i, S_i)$  ( $i = 1, 2$  è l'etichetta che distingue i due sottosistemi). Le coppie  $(\varphi_i, Q_i)$  rappresentano i gradi di libertà non termici del sistema.

In generale, in un processo che coinvolge il sistema dobbiamo prendere in considerazione due termini di produzione,  $\pi_Q$  e  $\pi_S$  localizzati nell'interfaccia. Supponiamo, per fissare le idee, che una corrente  $\mathcal{I}_Q$  abbandoni il sistema: in tal caso nel sistema 2 entra la corrente  $\mathcal{I}_Q + \pi_Q$  (il termine di produzione può essere negativo). Non sappiamo in che verso scorre la corrente di entropia, ma il secondo principio della Termodinamica impone che la corrente in ingresso nel sistema che la riceve (diciamo  $j$ ) sia superiore alla corrente in uscita dal sistema che la cede (diciamo  $i$ )<sup>28</sup>; le equazioni di continuità, quindi, sono

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= -\mathcal{I}_Q & \dot{Q}_2 &= +\mathcal{I}_Q + \pi_Q \\ \dot{S}_i &= -\mathcal{I}_S & \dot{S}_j &= +\mathcal{I}_S + \pi_S \end{aligned}$$

La potenza associata al portatore  $Q$  è

$$\mathcal{P}_Q = (\varphi_2 - \varphi_1)\mathcal{I}_Q + \varphi_2\pi_Q$$

---

<sup>28</sup>Questo perché l'entropia totale del sistema non può diminuire.

La potenza associata al portatore  $S$  deve essere valutata con attenzione; essa è composta da due termini:

$$\mathcal{P}_S = (T_j - T_i) \mathcal{I}_S + \pi_S$$

Nel caso di processo puramente termico (ossia in assenza della corrente  $\mathcal{I}_Q$ ) il lato di destra di questa equazione è identicamente nullo, e  $\pi_S \propto \frac{(T_1 - T_2)^2}{T_1 T_2}$ ; in generale, invece, la corrente termica potrebbe anche scorrere nel verso non naturale, e il termine di produzione ha in tal caso un valore diverso.

Fatte queste premesse, possiamo dimostrare facilmente tre risultati.

**Proposition 6.** *La scala termodinamica deve possedere uno zero assoluto.*

*Dimostrazione.* Notiamo anzitutto che esistono fenomeni puramente termici, in cui la potenza del processo si lascia esprimere in due forme equivalenti:

$$\mathcal{P}_{termica} = \pi_S T_2 = \mathcal{I}_S (T_1 - T_2)$$

posto che  $T_1 > T_2$ , che  $\mathcal{I}_S$  è la corrente di entropia che abbandona il corpo a temperatura maggiore e  $\pi_S$  è la produzione di entropia nell'interfaccia. Dato che il termine di sinistra non è invariante sotto la trasformazione  $T \rightarrow T + \delta T$ , mentre il termine di destra lo è, deve esistere una scala assoluta della temperatura (che coincide con la temperatura termodinamica).  $\square$

**Proposition 7.** *Inoltre, se la trasformazione  $\varphi \rightarrow \varphi + \delta\varphi$  non è fisicamente significativa,  $\pi_Q = 0$ ; viceversa, se il termine di produzione è diverso da zero, il potenziale è assoluto.*

*Dimostrazione.* Ora, se  $(Q, \varphi)$  è una coppia quantità/potenziale, un processo spontaneo implica un trasferimento di energia da un portatore all'altro; la potenza del trasferimento è

$$\mathcal{I}_Q (\varphi_1 - \varphi_2) = \pi_Q \varphi_2 + \pi_S T_2$$

La trasformazione  $\varphi \rightarrow \varphi + \delta\varphi$  lascia invariati il termine di sinistra e il termine  $\pi_S T_2$ , e quindi i casi sono due: o  $\pi_Q = 0$ , e quindi  $\varphi \rightarrow \varphi + \delta\varphi$  lascia invariato il sistema, oppure  $\pi_Q \neq 0$ , e in tal caso il potenziale  $\varphi$  deve essere assoluto.  $\square$

**Proposition 8.** *(Processi spontanei) Se  $\pi_Q = 0$  e  $T_1 = T_2 = T$ , la corrente  $\mathcal{I}_Q$  scorre dal potenziale maggiore al potenziale minore, ossia  $\varphi_1 > \varphi_2$ .*

*Dimostrazione.* In questo caso l'equazione di processo è

$$(\varphi_2 - \varphi_1) \mathcal{I}_Q + T \pi_S = 0$$

e dal momento che, per il II principio della Termodinamica, deve essere  $\pi_S > 0$ , il primo addendo deve essere negativo, e quindi  $\varphi_1 > \varphi_2$ .  $\square$

## D.2 Disomogeneità

Ora rivolgiamo la nostra attenzione al caso di sistemi non omogenei in interazione. Per caratterizzare senza ambiguità ed inutili giri di parole questi sistemi, mi riferirò ad essi tramite la loro funzione di Gibbs; nelle prossime dimostrazioni assumo, per semplicità, che le capacità termiche siano indipendenti dalla temperatura, e indico con  $U^0(S)$  la funzione di Gibbs di un sistema all'equilibrio termico interno.

**Proposition 9.** *Dato un sistema descritto dalla funzione di Gibbs  $\mathcal{E} = \sum_i U_i^0(S_i)$ , la variazione di entropia in un processo di riscaldamento puramente termico dipende solo dai valori iniziale e finale della temperatura, e non dal dettaglio del processo.*

*Dimostrazione.* Quando riscaldiamo un corpo, inizialmente a temperatura uniforme  $T_{in}$ , ponendolo a contatto con una o più sorgenti a temperatura maggiore, da ciascuna sorgente fluisce una corrente di energia  $\mathcal{I}_{\mathcal{E}}$  trasportata da una corrente di entropia  $\mathcal{I}_S$ ; allo stesso tempo il corpo si suddivide in diversi sottosistemi omogenei, e la temperatura di ciascuno di essi aumenta con differente rapidità; questo significa che verrà prodotta entropia nelle interfacce tra le parti. L'entropia totale che verrà accumulata nel sistema sarà quindi una somma di diversi contributi, tutti i trasferimenti più tutte le quantità create nelle interfacce (in figura 127 potete vedere l'esempio con tre sottosistemi). Tanto più grandi saranno le disomogeneità, tanto maggiori saranno le correnti termiche interne: durante questo processo il sistema si avvia asintoticamente ad una situazione in cui le differenze di temperatura interna si appiattiscono. Supponiamo pertanto che la temperatura finale sia  $T_{fin}$ .

Dimostriamo che l'entropia accumulata nel sistema dipende solo da  $T_{in}$  e  $T_{fin}$  e non dal dettaglio del processo.

Sia  $C_i$  la capacità termica della parte  $i$ -esima e  $C_{tot} = \sum_i C_i$  la capacità totale del sistema. Ciascuna delle parti passa da  $T_{in}$  a  $T_{fin}$  e accumula la quantità di entropia

$$S_{i,fin} - S_{i,in} = C_i \ln \frac{T_{fin}}{T_{in}}$$

Se sommiamo tutti gli accumuli di entropia troviamo

$$S_{fin} - S_{in} = \left( \sum_i C_i \right) \ln \frac{T_{fin}}{T_{in}} = C_{tot} \ln \frac{T_{fin}}{T_{in}}$$

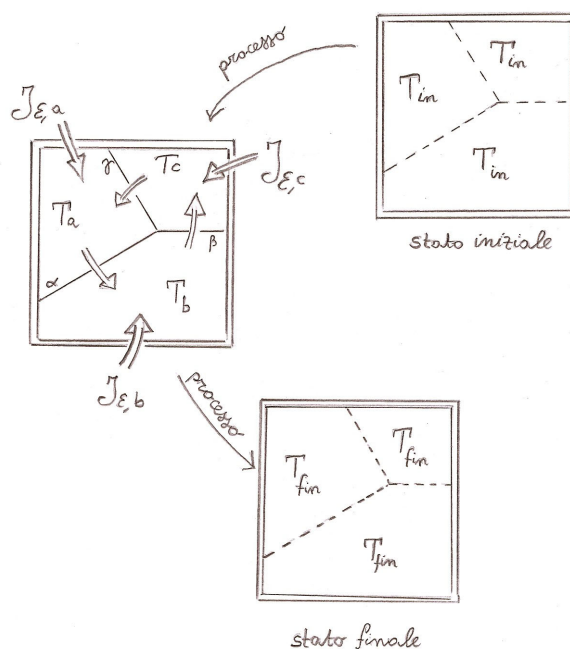


Figura 127: Un corpo è costituito da tre parti omogenee, ciascuna delle quali ha temperatura iniziale  $T_{in}$ . Durante il processo di riscaldamento tre correnti di energia vengono trasferite dall'esterno, una per ciascuna delle parti; le tre temperature aumentano a tassi differenti e si stabiliscono delle correnti termiche attraverso le interfacce.

e questo risultato è indipendente dalla particolare ripartizione del processo nei vari sottosistemi.  $\square$

Questa è la dimostrazione, ed è molto semplice, al limite della banalità; può d'altra parte essere interessante seguire il dettaglio del processo.

Faccio riferimento al caso particolare della figura 127 per evitare inutili complicazioni tecniche.

Indichiamo con  $\mathcal{I}_{E,a}$ ,  $\mathcal{I}_{E,b}$  e  $\mathcal{I}_{E,c}$  le correnti di energia che fluiscono dall'esterno nei sottosistemi  $a$ ,  $b$  e  $c$ ; indichiamo inoltre con  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  le interfacce tra i sottosistemi e con  $\mathcal{I}_{E,\alpha}$ ,  $\mathcal{I}_{E,\beta}$  e  $\mathcal{I}_{E,\gamma}$  le correnti di energia che le attraversano; analoghe convenzioni valgono per le correnti di entropia e per i tassi di produzione.

Ciò detto, è facile vedere che la rapidità con cui l'entropia si accumula

nel corpo è

$$\dot{S} = \underbrace{\left(\frac{1}{T_b} - \frac{1}{T_a}\right) \mathcal{I}_{\mathcal{E},\alpha}}_{\pi_{S,\alpha}} + \underbrace{\left(\frac{1}{T_c} - \frac{1}{T_b}\right) \mathcal{I}_{\mathcal{E},\beta}}_{\pi_{S,\beta}} + \underbrace{\left(\frac{1}{T_a} - \frac{1}{T_c}\right) \mathcal{I}_{\mathcal{E},\gamma}}_{\pi_{S,\gamma}} + \underbrace{\frac{\mathcal{I}_{\mathcal{E},a}}{T_a} + \frac{\mathcal{I}_{\mathcal{E},b}}{T_b} + \frac{\mathcal{I}_{\mathcal{E},c}}{T_c}}_{\mathcal{I}_{S,ext}}$$

Rimaneggiando opportunamente tutti i termini si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{S} = & + \frac{1}{T_a} (\mathcal{I}_{\mathcal{E},a} + \mathcal{I}_{\mathcal{E},\gamma} - \mathcal{I}_{\mathcal{E},\alpha}) + \\ & + \frac{1}{T_b} (\mathcal{I}_{\mathcal{E},b} + \mathcal{I}_{\mathcal{E},\alpha} - \mathcal{I}_{\mathcal{E},\beta}) + \\ & + \frac{1}{T_c} (\mathcal{I}_{\mathcal{E},c} + \mathcal{I}_{\mathcal{E},\beta} - \mathcal{I}_{\mathcal{E},\gamma}) \end{aligned}$$

e infine, usando le equazioni di bilancio dell'energia e la relazione tra energia e temperatura:

$$\dot{S} = \frac{C_a \dot{T}_a}{T_a} + \frac{C_b \dot{T}_b}{T_b} + \frac{C_c \dot{T}_c}{T_c}$$

Questa equazione può facilmente essere integrata fino ad ottenere il risultato finale:

$$S_{fin} - S_{in} = C_{tot} \ln \frac{T_{fin}}{T_{in}}$$

Ora generalizziamo questo risultato al caso di due sistemi in interazione.

**Proposition 10.** *Siano A e B due sistemi in interazione, isolati dall'ambiente circostante, descritti dalle funzioni di Gibbs  $\mathcal{E}_A = \sum_i U_i^0(S_i)$  e  $\mathcal{E}_B = \sum_j U_j^0(S_j)$ . Supponiamo che all'inizio dell'interazione ciascuno dei due sistemi sia all'equilibrio termico interno. Si dimostra che: (1) avremo un trasferimento netto di energia dal sistema a temperatura iniziale maggiore all'altro sistema; (2) una certa quantità di entropia abbandona il sistema a temperatura maggiore, e una quantità di entropia più grande entra nel sistema a temperatura minore; (3) l'entropia viene prodotta nell'interfaccia tra i due sistemi, ed è indipendente dal dettaglio del processo.*

*Dimostrazione.* Siano  $C_A$  e  $C_B$  le capacità termiche totali dei due sistemi,  $T_{A,in}$  e  $T_{B,in}$  le due temperature equivalenti e  $T_{fin}$  la temperatura finale di equilibrio;

per fissare le idee ammettiamo che sia  $T_{A,in} > T_{B,in}$ .

La prima parte della proposizione è immediata, e discende dalla definizione di capacità termica totale di un sistema.

Come nella proposizione precedente, dimostriamo che le variazioni di entropia dipendono solo dai valori iniziali e finali di  $T_A$  e  $T_B$  e non dal dettaglio del processo: ciascuna delle parti raggiunge la temperatura  $T_{fin}$  e le variazioni di entropia sono

$$S_{A,fin} - S_{A,in} = C_A \ln \frac{T_{fin}}{T_{A,in}} < 0$$

$$S_{B,fin} - S_{B,in} = C_B \ln \frac{T_{fin}}{T_{B,in}} > 0$$

e questi risultati sono indipendenti dalla particolare ripartizione del processo nei vari sottosistemi; abbiamo così dimostrato anche la seconda parte della proposizione.

Anche la terza parte è dimostrata, perché la differenza tra le due variazioni di entropia non dipende dalla presenza di disomogeneità interne nei due sistemi durante il processo, ma solo dagli stati iniziali e finale: questo significa che coincide con la quantità di entropia creata nell'interfaccia nel caso speciale che ognuno dei due sistemi sia istantaneamente all'equilibrio termico interno.  $\square$

Possiamo generalizzare la proposizione 9 anche al caso di un processo di riscaldamento ottenuto con mezzi meccanici.

**Proposition 11.** *Dato un sistema con capacità termica costante, l'incremento di entropia in un processo di riscaldamento qualsiasi dipende solo dai valori iniziale e finale della temperatura.*

*Dimostrazione.* L'essenza delle esperienze come quella del mulinello di Joule è che l'accumulo di energia nell'interfaccia determinato dal processo  $\mathcal{P}_{term} + \mathcal{P}_{mecc} = 0$  è proporzionale alla temperatura; passando dalle variazioni complessive a quelle istantanee otteniamo

$$T_3 \pi_S = C_3 \dot{T}_3$$

Consideriamo ora un processo come quello dell'esperienza delle due mani sfregate tra loro (figura 128); l'entropia viene continuamente prodotta nell'interfaccia e trasferita ai due corpi a temperatura inferiore, e le equazioni di bilancio che



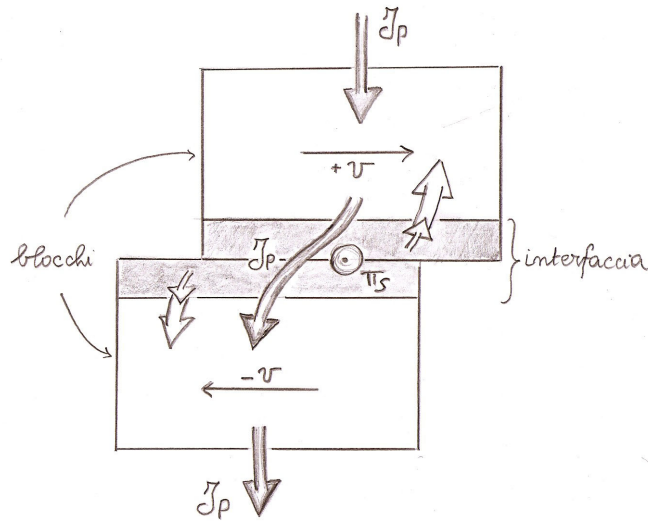


Figura 128: Qui schematizzo le due mani con due blocchi omogenei identici che sfregano l'uno sull'altro, muovendosi con velocità opposte e di pari entità lungo l'asse  $x$  (che qui, come altrove, è orientato da sinistra verso destra). Ho rappresentato la corrente di quantità di moto che attraverso il sistema: le due frecce esterne rappresentano le coppie azione-reazione tra mani e apparato locomotore, mentre quella interna rappresenta la coppia azione-reazione di attrito. Ho rappresentato anche i trasferimenti di entropia e la creazione di entropia legata alla perdita di energia della corrente di quantità di moto:  $\pi_S = \frac{2v\mathcal{I}_3}{T_3}$ .

descrivono il processo sono

$$\begin{aligned}\dot{S}_1 &= \frac{T_3}{T_1} \mathcal{I}_{S,1} \\ \dot{S}_2 &= \frac{T_3}{T_2} \mathcal{I}_{S,2} \\ \dot{S}_3 &= \pi_S - \mathcal{I}_{S,1} - \mathcal{I}_{S,2}\end{aligned}$$

Introduciamo la relazione tra energia ed entropia, indicando con  $\mathcal{P}$  la potenza (positiva) sviluppata nell'interfaccia a causa dell'attrito

$$\begin{aligned}\dot{S}_1 &= \frac{\mathcal{I}_{\mathcal{E},1}}{T_1} \\ \dot{S}_2 &= \frac{\mathcal{I}_{\mathcal{E},2}}{T_2} \\ \dot{S}_3 &= \frac{\mathcal{P} - \mathcal{I}_{\mathcal{E},1} - \mathcal{I}_{\mathcal{E},2}}{T_3}\end{aligned}$$

A questo punto basta sostituire in ciascuna equazione la corrispondente equa-

zione di bilancio dell'energia e la relazione tra energia e temperatura,

$$\begin{aligned}\dot{S}_1 &= \frac{C_1 \dot{T}_1}{T_1} \\ \dot{S}_2 &= \frac{C_2 \dot{T}_2}{T_2} \\ \dot{S}_3 &= \frac{C_3 \dot{T}_3}{T_3}\end{aligned}$$

e la proposizione iniziale è dimostrata.  $\square$

La dimostrazione può essere facilmente generalizzata a processi qualsiasi (non necessariamente termomeccanici) e a un numero qualsiasi di parti del sistema, ed anche al caso in cui la capacità termica non sia costante (posto che per definizione essa dipende solo dallo stato del sistema).

In definitiva, ho tratteggiato un percorso che si può intraprendere per dimostrare che l'entropia, definita attraverso l'equazione di continuità e l'idea di interfaccia, è una grandezza di stato. Molto c'è ancora da fare per completare il percorso.

### D.3 Cicli termodinamici

Ora affiniamo l'idea di interfaccia, per dimostrare e interpretare correttamente due risultati che hanno una grande importanza storica, e che sono alla base degli sviluppi tecnologici avviati nell'ultima parte del XIX secolo.

Fino ad ora abbiamo considerato la possibilità che l'interfaccia accumuli temporaneamente energia attraverso la creazione di entropia, ma ci siamo disinteressati del suo stato. Ora ammettiamo che essa sia descritta dalla funzione di Gibbs

$$\mathcal{E}_{int} = U(Q_i, S)$$

(con  $(\varphi_i, Q_i)$  indichiamo le coppie potenziale-portatore non termine che la caratterizzano).

Ad esempio, per un gas queste coppie sono  $(P, V)$  e  $(\mu, n)$ .

L'interfaccia che prendiamo in considerazione ha una coppia di terminali termici e una coppia di terminali meccanici.

I due terminali termici permettono di interporla tra due serbatoi a temperatura uniforme  $T_1$  e  $T_2$ : per fissare le idee diciamo che  $T_1 > T_2$ . A scanso di equivoci ricordiamo che un serbatoio ha capacità termica infinita, e quindi le variazioni di entropia non provocano variazioni di temperatura.

I due terminali meccanici permettono di interporre l'interfaccia tra due sistemi meccanici, uno in movimento a velocità  $v_A$  e l'altro in movimento a velocità  $v_B$ : per fissare le idee diciamo che  $v_A > v_B$ .

Ad esempio, se l'interfaccia è il gas contenuto in un cilindro di un motore "fronte di marcia",  $v_B$  è la velocità del veicolo e  $v_A = v_B + v_{rel}$  è la velocità del pistone rispetto al suolo, mentre  $v_{rel}$  è la velocità del pistone rispetto al veicolo.

Un processo che coinvolge i due sistemi meccanici e i due serbatoi determina, in generale, un cambiamento di stato dell'interfaccia. Ammettiamo di qui in avanti l'esistenza di una equazione di stato, che lega i gradi di libertà dell'interfaccia quando essa si trova in uno stato di equilibrio interno.

Supponiamo che il tutto attraversi una sequenza di cicli meccanici di periodo  $\tau$ : alla fine di ogni ciclo i due sistemi meccanici sono tornati nello stato iniziale.

**Proposition 12.** *In generale deve essere  $\Delta\mathcal{E}_{int} \geq 0$ , e l'uguaglianza è verificata solo quando l'interfaccia attraversa una successione di stati di equilibrio interno.*

*Dimostrazione.* Se l'interfaccia attraversa una successione di stati di equilibrio interno ogni sua porzione ha la stessa temperatura uniforme  $T(t)$  e gli stessi valori  $\varphi_i(t)$  dei potenziali non termici. I gradi di libertà non termici sono accoppiati ai gradi di libertà meccanici esterni, e quindi sono funzioni periodiche; i gradi di libertà termici sono legati agli altri attraverso l'equazione di stato e quindi sono anch'esse funzioni periodiche. In questo caso pertanto tutti i portatori tornano al valore iniziale alla fine del ciclo, e non possono determinare un'accumulo netto di energia nell'interfaccia: vale così l'uguaglianza della proposizione.

In generale l'interfaccia deve essere suddivisa in porzioni omogenee, e quindi dobbiamo includere termini interni di creazione dell'entropia, e l'accumulo di energia in un ciclo è

$$\Delta\mathcal{E}_{int} = \sum_i \int_0^\tau T_i \pi_i dt \geq 0$$

(la sommatoria è estesa a tutte le parti omogenee nelle quali ripartiamo l'interfaccia); abbiamo così concluso la dimostrazione.  $\square$

Quando vale l'uguaglianza l'interfaccia torna, ad ogni ciclo meccanico, allo stato precedente, e quindi ha percorso ciò che si chiama **ciclo termodinamico**.

Nel caso l'uguaglianza non sia soddisfatta, si deve fare una precisazione.

Ho detto che l'interfaccia ha due terminali termici: durante il ciclo la sua frontiera ha sempre una temperatura uniforme infinitamente prossima a quella di uno dei due serbatoi, e che le disomogeneità sono imprigionate all'interno dell'interfaccia.

Questo significa che le due correnti termiche sono, per l'idea stessa di interfaccia, indipendenti dal suo stato interno: esso sono univocamente determinate dalla particolare struttura del ciclo che è stato realizzato. Quando parleremo di entropia ricevuta dall'interfaccia, o ceduta dall'interfaccia, questa coinciderà con l'entropia ceduta o acquistata dal serbatoio corrispondente: non dobbiamo includere i termini di creazione, se ci sono sono interni.

Esistono due possibili cicli termodinamici: la **macchina termica ideale** (figura 129a) e la **pompa termica ideale** (129b).

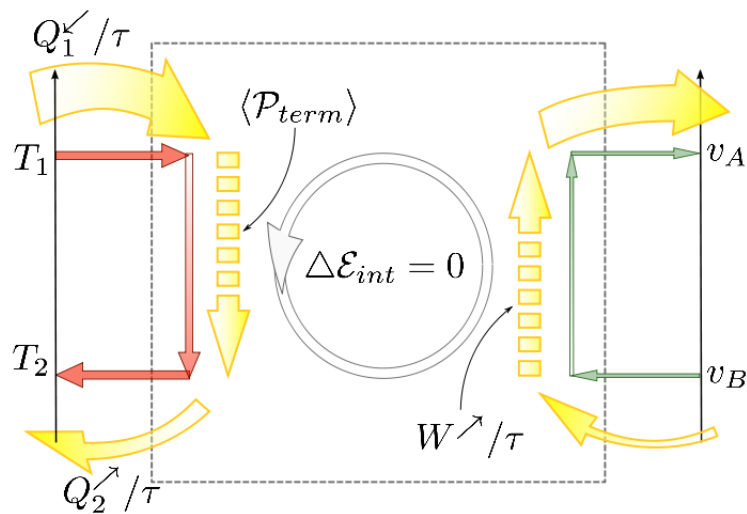
Per sviluppare più agevolmente le considerazioni che seguono, introduciamo le nozioni classiche di lavoro e calore; al fine di districarmi nella giungla dei segni, ho allestito una tabella nella quale raduno le definizioni per i due possibili cicli termodinamici.

<b>Macchina termica</b>			
$W$	$\nearrow$	$\stackrel{def}{=} + \int_0^\tau \mathcal{P}_{mecc} dt$	
$Q_1$	$\swarrow$	$\stackrel{def}{=} \int_0^\tau T_1 \mathcal{I}_{S,1} dt$	$= -T_1 \Delta S_1$
$Q_2$	$\nearrow$	$\stackrel{def}{=} \int_0^\tau T_2 \mathcal{I}_{S,2} dt$	$= +T_2 \Delta S_2$
<b>Frigorifero</b>			
$W$	$\swarrow$	$\stackrel{def}{=} - \int_0^\tau \mathcal{P}_{mecc} dt$	
$Q_1$	$\nearrow$	$\stackrel{def}{=} \int_0^\tau T_1 \mathcal{I}_{S,1} dt$	$= +T_1 \Delta S_1$
$Q_2$	$\swarrow$	$\stackrel{def}{=} \int_0^\tau T_2 \mathcal{I}_{S,2} dt$	$= -T_2 \Delta S_2$

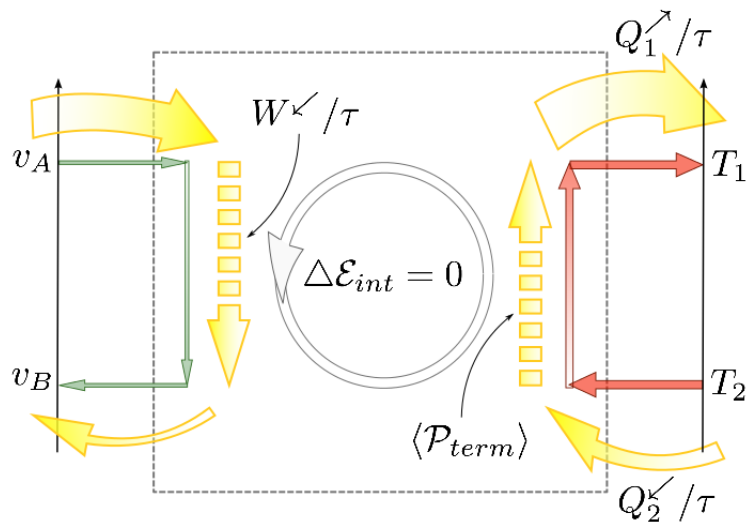
Notate che le temperature dei due serbatoi sono costanti e quindi possono essere portate fuori dal segno di integrazione.

In uno qualsiasi dei due cicli termodinamici, possiamo assumere che una certa quantità di entropia passi da un serbatoio all'altro inalterata, ossia che  $\left| \frac{\Delta S_1}{\Delta S_2} \right| = 1$ ; se il ciclo non è ideale, i trasferimenti di entropia da o verso i due serbatoi avranno sempre la stessa entità, e la creazione di entropia riguarderà solo l'interfaccia.

Ora possiamo dimostrare tre proposizioni.



(a) Ad ogni ciclo, l'entropia fluisce dal serbatoio a temperatura maggiore al serbatoio a temperatura minore, attraversando l'interfaccia. La potenza termica media negativa garantisce una uguale potenza meccanica media positiva, che consente il passaggio della quantità di moto dal sistema più lento a quello più veloce.



(b) Ad ogni ciclo, la quantità di moto fluisce dal sistema più veloce a quello più lento, attraversando l'interfaccia. La potenza meccanica negativa garantisce un'uguale potenza meccanica termica, che consente il passaggio di entropia dal serbatoio a temperatura minore al serbatoio a temperatura maggiore.

Figura 129: **Cicli Termodinamici (medie su un periodo)**. Il processo in cui l'energia viene scambiata tra i due portatori, quello termico e quello meccanico, viene completato ad ogni ciclo; l'equazione istantanea di processo deve includere anche la rapidità di variazione dell'energia dell'interfaccia. La stessa quantità di entropia esce da un serbatoio ed entra nell'altro, e quindi l'entropia totale del sistema rimane invariata.

**Proposition 13.** *In un ciclo il rapporto tra la quantità di energia trasferita al potenziale meccanico e la quantità di energia assorbita dalla sorgente a temperatura maggiore non può superare il valore  $1 - \frac{T_2}{T_1}$ .*

*Dimostrazione.* In un ciclo completo il bilancio dell'energia è espresso dall'equazione

$$\Delta\mathcal{E}_{int} - W^{\nearrow} + Q_1^{\swarrow} - Q_2^{\nearrow} = 0$$

L'equazione di bilancio energetico e la proposizione 115 mostrano che deve essere

$$W^{\nearrow} \leq Q_1^{\swarrow} - Q_2^{\nearrow}$$

Dividendo entrambi i membri per  $Q_1^{\swarrow}$  otteniamo

$$\frac{W^{\nearrow}}{Q_1^{\swarrow}} \leq 1 - \frac{Q_2^{\nearrow}}{Q_1^{\swarrow}}$$

l'ultimo rapporto coincide con  $\frac{T_2}{T_1}$  nel caso di processo reversibile; se invece il processo è irreversibile, l'entropia prodotta nell'interfaccia deve essere caricata nella corrente in uscita, per poter riportare il sistema nelle condizioni iniziali del ciclo: in questo caso  $\Delta S_2 \geq \Delta S_1$  e in questo caso

$$\frac{Q_2^{\nearrow}}{Q_1^{\swarrow}} = \frac{T_2 \Delta S_2}{T_1 \Delta S_1} \geq \frac{T_2}{T_1}$$

e pertanto

$$\frac{W^{\nearrow}}{Q_1^{\swarrow}} \leq 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

□

**Proposition 14.** *È impossibile realizzare una trasformazione il cui unico risultato sia prelevare una corrente termica da una sorgente a temperatura uniforme e trasferire completamente l'energia associata al portatore meccanico.*

*Dimostrazione.* In buona sostanza, se fosse possibile realizzare tale trasformazione il risultato netto sarebbe prelevare una certa quantità di entropia dalla sorgente a temperatura maggiore senza cederla all'altra sorgente o accumularla nell'interfaccia: ciò comporterebbe una diminuzione di entropia dell'intero sistema, il che, ovviamente, è impossibile.

La dimostrazione discende immediatamente dalla proposizione 13. □

**Proposition 15.** *È impossibile realizzare una trasformazione il cui unico risultato sia il passaggio di una corrente termica da una sorgente a temperatura uniforme maggiore ad una sorgente a temperatura uniforme maggiore.*

*Dimostrazione.* Per assurdo, supponiamo che l'entropia passi dalla sorgente a temperatura  $T_2$  alla sorgente a temperatura  $T_1$ , che non vi sia un trasferimento netto di energia da o verso il portatore meccanico e che l'interfaccia percorra un ciclo termodinamico.

In tal caso deve essere essere per ipotesi

$$\Delta\mathcal{E}_{int} = 0, \quad \int_0^\tau \mathcal{P}_{mecc} dt = 0$$

e quindi l'equazione di bilancio si riduce a due termini:

$$T_1\Delta S_1 + T_2\Delta S_2 = 0$$

Da qui deduciamo immediatamente che

$$\left| \frac{\Delta S_1}{\Delta S_2} \right| = \frac{T_2}{T_1} < 1$$

Questo significa che l'entropia totale del sistema sta diminuendo, il che è impossibile.  $\square$

Notiamo che il passaggio è possibile se ammettiamo un accumulo di entropia nell'interfaccia, che quindi non percorre un ciclo completo.

## E Stechiometria

In questa sezione voglio descrivere nel dettaglio il modo in cui tratto le reazioni chimiche utilizzando solo quantità conservate.

Attualmente stiamo dibattendo, all'interno del gruppo, se sia preferibile questo approccio, ovvero quello basato sui termini di produzione/annichilazione.

Io propendo decisamente per la via più semplice, che a mio avviso discende in modo naturale (come già argomentato nella sottosezione 5.4) sia dalla stechiometria delle reazioni, sia dalle caratteristiche generali della funzione di Gibbs).

Rimane aperta una questione: come dovremo trattare le reazioni nucleari?

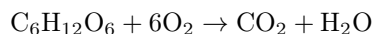
Penso che in quel contesto potremo mantenere l'idea di grandezze conservate se ci riferiremo alla correnti di leptoni e di barioni, mentre dovremo necessariamente includere termini di produzione/annichilazione per i fotoni.

Il punto, tuttavia, deve ancora essere affrontato nel dettaglio.

Quanto segue è dedicato in primo luogo ai non addetti al settore, e quindi ai fisici e ai biologi; i chimici potranno, leggendo questa appendice, riconciliare il mio linguaggio con quello che abitualmente utilizzano nelle loro esposizioni.

### E.1 Quantità chimica nelle reazioni

Consideriamo, a titolo di esempio, la reazione di glicolisi



Nella reazione una certa quantità di reagenti scompare ogni secondo, e contemporaneamente compare una corrispondente quantità di prodotti.

Se indichiamo, come si fa di solito, la quantità chimica di una determinata specie (in questa reazione vi sono in tutto quattro specie, il glucosio, il diossigeno, l'anidride carbonica e l'acqua) con il simbolo  $n$ , allora la rapidità di variazione di questa grandezza deve essere indicata con il simbolo  $\dot{n}$ , la cui unità di misura è

$$[\dot{n}] = \frac{\text{mol}}{\text{s}}$$

#### ESEMPIO

Supponiamo che ogni secondo vengano consumate 0.24 mol di glucosio (questo è un valore qualsiasi, scelto a titolo di esempio). Possiamo esprimere



ciò scrivendo

$$\dot{n}_{\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6} = -0.24 \frac{\text{mol}}{\text{s}}$$

Ora, con ogni mole di glucosio ne scompaiono sei di diossigeno, e pertanto la rapidità di variazione della quantità chimica di ossigeno si ottiene moltiplicando per sei il valore precedente:

$$\dot{n}_{\text{O}_2} = -1.44 \frac{\text{mol}}{\text{s}}$$

Possiamo procedere ragionando allo stesso modo per ricavare la rapidità di variazione della quantità chimica di anidride carbonica e della quantità chimica di acqua; questa volta, però, i valori sono positivi perché si tratta di produzione:

$$\begin{aligned} \dot{n}_{\text{CO}_2} &= +1.44 \frac{\text{mol}}{\text{s}} \\ \dot{n}_{\text{H}_2\text{O}} &= +1.44 \frac{\text{mol}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Abbiamo, in linea di principio, una rapidità di variazione della quantità chimica per ciascuna delle specie coinvolte nella reazione (in questo caso quattro, di cui tre uguali per via dei coefficienti stechiometrici).

Per trattare più agevolmente gli aspetti energetici delle reazioni chimiche, d'altra parte, conviene introdurre una sola quantità per i prodotti, e una sola quantità per i reagenti, in modo che potremo misurare una "rapidità di variazione dei reagenti", negativa ed opposta ad una "rapidità di variazione dei prodotti".

Va detto subito che sommare tutte le  $\dot{n}$  dei reagenti, da una parte, e le  $\dot{n}$  dei prodotti, dall'altra, non è il modo giusto di operare, e non conduce ad alcunché di significativo.

Come procedere, allora?

Notiamo che se dividiamo la rapidità di ciascuna specie per il coefficiente stechiometrico corrispondente otteniamo, a meno del segno, lo stesso risultato:

$$\frac{\dot{n}_{\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6}}{1} = \frac{\dot{n}_{\text{O}_2}}{6} = -0.24 \frac{\text{mol}}{\text{s}}$$

$$\frac{\dot{n}_{\text{CO}_2}}{6} = \frac{\dot{n}_{\text{H}_2\text{O}}}{6} = +0.24 \frac{\text{mol}}{\text{s}}$$

Questa circostanza è verificata in tutte le reazioni chimiche, basta usare i giusti coefficienti stechiometrici. Possiamo così introdurre la nozione di "unità

di reagenti” e quelle di “unità di prodotti” in questo modo:

$$1 \text{ unità di reagenti} = \begin{cases} 1 \text{ molecola di } & \text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6 \\ 6 \text{ molecole di } & \text{O}_2 \end{cases}$$

$$1 \text{ unità di prodotti} = \begin{cases} 1 \text{ molecola di } & \text{CO}_2 \\ 6 \text{ molecole di } & \text{H}_2\text{O} \end{cases}$$

In una reazione chimica, allora, per ogni unità di reagenti scomparsa ne appare una di prodotti.

La **quantità chimica dei reagenti** è per definizione il “numero di moli” di unità di reagenti; se diciamo che l’entità dei reagenti è  $n_{\text{reag}}$ , questo significa che prevediamo la scomparsa di

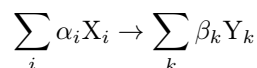
$$\begin{cases} 1 \cdot n_{\text{reag.}} & \text{mol di } \text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6 \\ 6 \cdot n_{\text{reag.}} & \text{mol di } \text{O}_6 \end{cases}$$

Allo stesso modo è definita la **quantità chimica dei prodotti**; se diciamo che la quantità di prodotti è  $n_{\text{prod.}}$ , vogliamo dire che la reazione ha prodotto

$$\begin{cases} 6 \cdot n_{\text{prod.}} & \text{mol di } \text{CO}_2 \\ 6 \cdot n_{\text{prod.}} & \text{mol di } \text{H}_2\text{O} \end{cases}$$

In una reazione chimica la rapidità di variazione di  $n_{\text{reag.}}$  è negativa, mentre la rapidità di variazione di  $n_{\text{prod.}}$  è positiva; inoltre, ed è questo il senso dei coefficienti stechiometrici, queste due rapidità sono l’una l’opposta dell’altra: tanto rapidamente scompaiono le unità di reagenti e tanto rapidamente compaiono, al loro posto, le unità di prodotti.

Più in generale, se una reazione chimica è espressa dall’equazione



nella quale le X indicano le specie chimiche reagenti, le Y le specie chimiche prodotte mentre  $\alpha$  e  $\beta$  rappresentano i coefficienti stechiometrici, allora la quantità chimica di reagenti è definita implicitamente dalla catena di rapporti

$$\dot{n}_{\text{reag.}} = \frac{\dot{n}_1}{\alpha_1} = \frac{\dot{n}_2}{\alpha_2} = \dots = \frac{\dot{n}_i}{\alpha_k} = \dots$$

quella dei prodotti dalla catena

$$\dot{n}_{\text{prod.}} = \frac{\dot{n}_1}{\beta_1} = \frac{\dot{n}_2}{\beta_2} = \dots = \frac{\dot{n}_i}{\beta_k} = \dots$$

e, per la natura stessa del bilancio,

$$\dot{n}_{\text{reag.}} = -\dot{n}_{\text{prod.}}$$

L'ultima equazione può essere interpretata dicendo che la quantità chimica passa dal sistema dei reagenti al sistema dei prodotti, e possiamo partire di qui per introdurre la nozione di corrente chimica.

## E.2 Equazioni di continuità

Possiamo interpretare il tutto dicendo che una corrente chimica abbandona il sistema dei reagenti ed entra nel sistema dei prodotti: indichiamo con il simbolo  $\mathcal{I}_n$  l'intensità di corrente chimica.

Tutte le considerazioni precedenti possono difatti essere riassunte con due equazioni:

$$\dot{n}_{\text{reag.}} = -\mathcal{I}_n$$

$$\dot{n}_{\text{prod.}} = +\mathcal{I}_n$$

L'unità di misura dell'intensità di corrente chimica è, ovviamente mol/s. Bisogna notare che questa non è la definizione operativa di corrente chimica: ci siamo per il momento limitati a stabilire la relazione tra la corrente e le quantità chimiche di reagenti e prodotti.

### ESEMPIO

Supponiamo che ad un dato istante la corrente chimica nella reazione di glicolisi abbia intensità

$$\mathcal{I}_n = 1.2 \frac{\text{mol}}{\text{s}}$$

Ciò significa che

$$\dot{n}_{\text{reag.}} = -1.2 \frac{\text{mol}}{\text{s}}$$

$$\dot{n}_{\text{prod.}} = +1.2 \frac{\text{mol}}{\text{s}}$$

Possiamo così calcolare, utilizzando i coefficienti stechiometrici della reazione, le rapidità di variazione di tutte le specie coinvolte:

$$\begin{cases} \dot{n}_{\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6} &= -1.2 \frac{\text{mol}}{\text{s}} \\ \dot{n}_{\text{O}_2} &= -7.2 \frac{\text{mol}}{\text{s}} \\ \dot{n}_{\text{CO}_2} &= +7.2 \frac{\text{mol}}{\text{s}} \\ \dot{n}_{\text{H}_2\text{O}} &= +7.2 \frac{\text{mol}}{\text{s}} \end{cases}$$

### E.3 Conservazione della massa

Nelle reazioni chimiche la massa è conservata: ciò significa se scompare, ad esempio 1 g di reagenti, al suo posto compare 1 g di prodotti. Questo principio è già in qualche modo sottinteso nella scrittura delle formule chimiche: difatti esse suggeriscono che le unità delle stesse specie (idrogeno, ossigeno e carbonio, nell'esempio della glicolisi) non facciano altro che ricombinarsi per formare nuovi composti, e pertanto la massa totale non può cambiare.

La massa di una singola specie, invece, può cambiare; se X è la specie chimica in questione la sua massa complessiva è

$$m_X = M_X n_X$$

e allo stesso modo la rapidità di variazione della massa si calcola così:

$$\dot{m}_X = M_X \dot{n}_X$$

#### ESEMPIO

Nell'esempio precedente, le rapidità di variazione delle quantità chimiche erano

$$\begin{cases} \dot{n}_{\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6} &= -1.2 \frac{\text{mol}}{\text{s}} \\ \dot{n}_{\text{O}_2} &= -7.2 \frac{\text{mol}}{\text{s}} \\ \dot{n}_{\text{CO}_2} &= +7.2 \frac{\text{mol}}{\text{s}} \\ \dot{n}_{\text{H}_2\text{O}} &= +7.2 \frac{\text{mol}}{\text{s}} \end{cases}$$

Le masse molari di queste quattro specie sono

$$\begin{cases} M_{\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6} &= 180 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \\ M_{\text{O}_2} &= 32 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \\ M_{\text{CO}_2} &= 44 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \\ M_{\text{H}_2\text{O}} &= 18 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \end{cases}$$

Calcoliamo la rapidità di variazione della massa di glucosio:

$$\begin{aligned} \dot{m}_{\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6} &= 180 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \cdot \left( -1.2 \frac{\text{mol}}{\text{s}} \right) = \\ &= -216 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \cdot \frac{\text{mol}}{\text{s}} = \\ &= -216 \frac{\text{g}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Allo stesso modo si determinano le altre tre rapidità di variazione:

$$\begin{cases} \dot{m}_{\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6} &= -216 \frac{\text{g}}{\text{s}} \\ \dot{m}_{\text{O}_2} &= -230.4 \frac{\text{g}}{\text{s}} \\ \dot{m}_{\text{CO}_2} &= +316.8 \frac{\text{g}}{\text{s}} \\ \dot{m}_{\text{H}_2\text{O}} &= +129.6 \frac{\text{g}}{\text{s}} \end{cases}$$

*Domanda.* Se ora sommiamo tutte le rapidità di variazione delle masse, cosa otteniamo?

*Risposta.* Dato che la massa si conserva, deve essere  $\dot{m}_{\text{tot}} = 0 \text{ g/s}$ . Facciamo la somma per verificare questa idea:

$$-216 \frac{\text{g}}{\text{s}} - 230.4 \frac{\text{g}}{\text{s}} + 316.8 \frac{\text{g}}{\text{s}} + 129.6 \frac{\text{g}}{\text{s}} = 0 \frac{\text{g}}{\text{s}}$$

Se usiamo l'equazione di continuità, possiamo scrivere la legge di conservazione di massa nella forma

$$\dot{m}_{X_i} = -\alpha_i M_i \cdot \mathcal{I}_n$$

per ciascun reagente, e

$$\dot{m}_{Y_i} = +\beta_k M_k \cdot \mathcal{I}_n$$

per ciascun prodotto.

In questa forma è immediato verificare la conservazione complessiva, poiché

$$\dot{m}_{\text{tot}} = \left( - \sum_i \alpha_i M_i + \sum_k \beta_k M_k \right) \mathcal{I}_n$$

e il termine in parentesi è uguale a zero per il significato stesso di bilanciamento della reazione.

#### E.4 Termini di produzione/annichilazione

Se facciamo riferimento ai due sistemi, quello dei reagenti e quello dei prodotti, possiamo individuare, grazie ai coefficienti stechiometrici, una corrente chimica che fluisce da un sistema all'altro.

Se invece consideriamo, una alla volta, le singole specie coinvolte nella reazione, assistiamo all'annichilazione di ciascun reagente e alla produzione di ciascun prodotto.

Da questo punto di vista siamo indotti ad introdurre una reazione di bilancio per ogni specie chimica che coinvolge termini di produzione/annichilazione, ossia

$$\begin{aligned} \dot{n}_{X_i} &= \pi_{X_i}^- \\ \pi_{X_i}^- &= -\alpha_i \mathcal{I}_n < 0 \end{aligned}$$

per i reagenti e

$$\begin{aligned} \dot{n}_{Y_k} &= \pi_{Y_k}^+ \\ \pi_{Y_k}^+ &= +\beta_k \mathcal{I}_n < 0 \end{aligned}$$

per i prodotti.

Una reazione chimica può comportare, pertanto, una variazione complessiva della quantità chimica del sistema che include sia i reagenti, sia i prodotti, al tasso temporale

$$\pi_n = \sum_i \pi_{X_i}^- + \sum_k \pi_{Y_k}^+$$

Il termine  $\pi_n$  può essere sia positivo, sia negativo.

A livello formale, i due punti di vista sono equivalenti: possiamo parlare sia di corrente di reazione che fluisce da un sistema all'altro, sia di produzione/annichilazione di specie chimiche nel corso della reazione.

Nel prossimo paragrafo, d'altra parte, cercherò di mostrare che l'idea dei due sistemi che interagiscono attraverso una corrente chimica ha il pregio di

una maggior semplicità e si inserisce in modo naturale dello schema generale di Karlsruhe.

### ESEMPIO

Notiamo che sommando le rapidità di variazione delle quantità chimiche delle singole specie non risulta 0 mol/s:

$$\dot{n}_{\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6} + \dot{n}_{\text{O}_2} + \dot{n}_{\text{CO}_2} + \dot{n}_{\text{H}_2\text{O}} = +6.0 \frac{\text{mol}}{\text{s}}$$

Per questo motivo si può dire che la quantità chimica non si conserva, ed alcuni autori introducono a questo punto un termine di **produzione**:

$$\pi_n = +6.0 \frac{\text{mol}}{\text{s}}$$

In altre parole, questa è la rapidità con la quale viene prodotta quantità chimica nella glicolisi; in altre reazioni la quantità chimica viene distrutta, e in tal caso  $\pi_n < 0$ .

Dal punto di vista esposto, invece, ciò che conta non è la quantità chimica delle singole specie, ma solo quella dei reagenti nel loro complesso, e nei prodotti nel loro complesso.

Questa quantità è conservata: tanto perde l'insieme dei reagenti e tanto acquista l'insieme dei prodotti.

## E.5 Aspetti energetici

Nella sottosezione 5.4 ho mostrato che ad ogni reazione possiamo associare la potenza chimica

$$\mathcal{P}_{\text{chim}} = (\mu_{\text{prod.}} - \mu_{\text{reag.}}) \mathcal{I}_n \quad (119)$$

Sostituiamo le espressioni per il calcolo di  $\mu_{\text{reag.}}$  e  $\mu_{\text{prod.}}$  e otteniamo

$$\mathcal{P}_{\text{chim}} = \left( \sum_i \alpha_i \mu_{X_i} - \sum_k \beta_k \mu_{Y_k} \right) \mathcal{I}_n$$

Ora distribuiamo il termine  $\mathcal{I}_n$  in tutti gli addendi e ricordiamo la definizione dei termini di produzione/annichilazione data sopra:

$$\mathcal{P}_{\text{chim}} = \sum_i \pi_{X_i}^- \mu_{X_i} - \sum_k \pi_{Y_k}^+ \mu_{Y_k} \quad (120)$$

Queste due equazioni devono essere interpretate in modi molto diversi:

1. la 119 esprime il passaggio di una corrente chimica da un certo potenziale (quello dei reagenti) ad un altro (quello dei prodotti);
2. la 120 invece associa ad ogni reagente una “potenza di annichilazione” negativa

$$\mathcal{P}_i^- = \pi_{X_i}^- \mu_{X_i}$$

e una “potenza di produzione” positiva

$$\mathcal{P}_k^+ = \pi_{Y_k}^+ \mu_{Y_k}$$

dobbia, in altri termini, parlare di potenza legata alla produzione/annichilazione di una data specie al proprio potenziale chimico.

Torniamo al caso di una reazione che avviene in un sistema isolato, e facciamo l'ipotesi che l'unico altro portatore coinvolto sia l'entropia.

Per rappresentare il contenuto della 119 possiamo tracciare un diagramma di processo molto semplice, in cui la corrente chimica “cade” dal potenziale (alto) dei reagenti al potenziale (basso) dei prodotti (e questo perché deve necessariamente essere  $\pi_S > 0$ : vedi figura 130, già proposta a pagina 93).

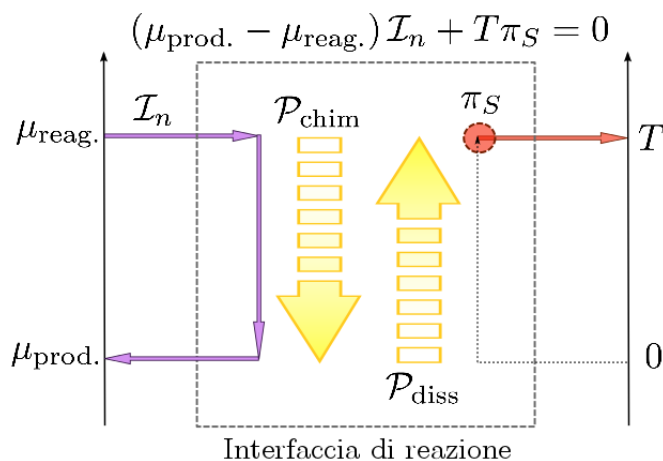


Figura 130: Possiamo tracciare questo diagramma solo se facciamo riferimento alla corrente di reazione, e quindi all'idea che esistano il sistema dei reagenti e quello dei prodotti, e che a ciascuno possano essere associati un'unica quantità chimica ed un unico potenziale.

Se invece vogliamo rappresentare lo stesso processo dal punto di vista della 120, possiamo costruire un diagramma con un termine di produzione/annichilazione per ogni specie, collocato all'altezza del potenziale chimico della specie stes-



sa; a ciascun termine associeremo una freccia di potenza e la potenza chimica complessiva è la somma algebrica di tutte queste frecce.

Questo diagramma è troppo complicato e, tra l'altro, ci sono due difficoltà:

1. non è possibile rappresentare direttamente il potenziale chimico dei reagenti né quello dei prodotti, poiché ciò che conta nella 120 sono i potenziali delle singole specie;
2. i termini di produzione/annichilazione sembrano quantità indipendenti mentre, anche solo per ragioni algebriche, sono tutte legate tra loro dai coefficienti stechiometrici, e vi è in tutto un solo grado di libertà.

Il punto fondamentale, qui, è che esiste un solo potenziale significativo che ha due valori diversi, uno per i reagenti e uno per i prodotti: la differenza tra questi due valori è la spinta per la corrente chimica.

Ad un solo potenziale può e deve essere associato uno e un solo portatore, e quindi dobbiamo rinunciare già per questo motivo a riferirci ai portatori delle singole specie. La stechiometria di reazione, come abbiamo visto, riduce i gradi di libertà indipendenti a uno soltanto, e per rappresentare questo grado di libertà possiamo scegliere proprio il portatore associato al potenziale.

Esiste un'ulteriore possibilità, formalmente giusta ma, a mio modo di vedere, poco sensata.

Possiamo in effetti dire che nel corso della reazione la quantità chimica dei reagenti viene annichilata, e che contemporaneamente viene creata la quantità chimica dei prodotti, secondo le equazioni

$$\begin{aligned}\dot{n}_{\text{reag.}} &= \pi_{\text{reag.}}^- \\ \dot{n}_{\text{prod.}} &= \pi_{\text{prod.}}^+\end{aligned}$$

I termini di annichilazione/produzione sono legati tra loro dall'equazione

$$\pi_{\text{prod.}}^+ + \pi_{\text{reag.}}^- = 0$$

In questo modo la potenza chimica dovrebbe essere espressa come somma di due termini, una potenza negativa corrispondente all'annichilazione, ed una potenza positiva corrispondente alla produzione:

$$\mathcal{P}_{\text{chim}} = \mu_{\text{reag.}} \pi_{\text{reag.}}^- + \mu_{\text{prod.}} \pi_{\text{prod.}}^+ \quad (121)$$

Stiamo in tal modo invocando una specie di "teletrasporto" della quantità chimica, che scompare dal sistema dei reagenti e riappare tale e quale nel sistema

dei prodotti. Dato che i due sistemi sono contigui non vi è davvero bisogno

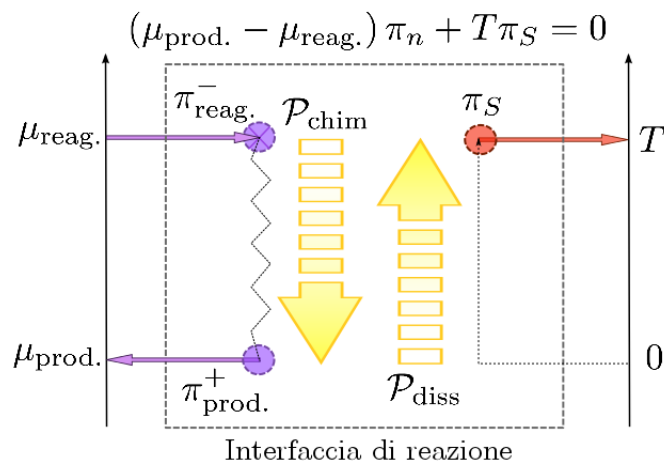


Figura 131: In questo diagramma ho introdotto una “rapidità di teletrasporto” della quantità chimica,  $\pi_n = |\pi_{\text{prod.}}^+| = |\pi_{\text{reag.}}^-|$ , che coincide numericamente con la corrente chimica  $\mathcal{I}_n$  ma ha un significato differente.

di questa complicazione concettuale, anche se dal punto di vista dei calcoli è impeccabile, ed il diagramma corrispondente è semplice quanto quello che ho proposto io (vedi figura 131).

I potenziali chimici sono quantità definite a meno di una costante additiva: per questo motivo il portatore associato deve essere conservato, e quindi non ha senso, a questo livello, insistere sul fatto che le singole quantità chimiche vengono prodotte e/o distrutte.

Quando vorremo includere le reazioni nucleari, avremo ancora portatori conservati (la carica leptonica e quella barionica) e dovremo accettare anche la possibilità di portatori non conservati (come il numero di fotoni): proprio questa circostanza stabilirà la differenza tra questi processi e le reazioni chimiche.

## F Glossario

La definizione dei termini fondamentali del discorso coinvolge tutti i concetti evocati. Per questo motivo, e sperando di fornire un utile riferimento, ho allestito un piccolo glossario ragionato.

Tutte le definizioni dipendono dall'interpretazione dell'approccio di Karlsruhe che ho esposto in questo lavoro.

### Potenziale

Quando due sistemi sono in equilibrio con un terzo, allora sono in equilibrio tra loro, e sono caratterizzati da un comune valore del potenziale, funzione dello stato del terzo sistema.

### Portatore

È una grandezza fisica che può essere accumulata in un sistema e trasferita da un sistema all'altro. Agli accumuli e ai trasferimenti di portatore sono associati in modo univoco accumuli e trasferimenti di energia.

### Coppia potenziale-portatore

Ad ogni portatore corrisponde un potenziale, nel senso che il potenziale di un sistema all'equilibrio interno è determinato dall'entità dell'accumulo del portatore-partner. Se la relazione tra il potenziale e il portatore accumulato è  $Q = \kappa(\varphi)$ , la derivata  $\frac{d\kappa}{d\varphi}$  è la capacità del sistema.

Dal punto di vista dell'approccio di Gibbs, se  $U(\dots, Q_i, \dots)$  è la funzione energia del sistema e  $Q_i$  è uno dei portatori accumulati nel sistema, il potenziale associato è  $\varphi_i = \frac{\partial U}{\partial Q_i}$ .

### Interazione

Due sistemi interagiscono quando è possibile il trasferimento di portatore da un sistema all'altro. Questo trasferimento avviene o attraverso un sistema mediatore o attraverso un'interfaccia.

### Spinta

Poniamo che due sistemi in interazione siano caratterizzati da diversi valori del potenziale,  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ .

L'affermazione "la differenza di potenziale è la spinta per la corrente di portatore" può essere interpretata in due modi diversi.

- la tensione innesca una corrente di portatore da un sistema all'altro: questo significa che la rapidità di variazione della corrente è funzione della tensione,  $\frac{d\mathcal{I}_Q}{dt} = f(\varphi_1 - \varphi_2)$ , e la funzione  $f$  si annulla quando i due potenziali sono uguali; se scegliamo questa interpretazione possiamo caratterizzare tutti i processi;
- nelle situazioni di regime, la corrente è legata alla tensione dalla relazione  $\mathcal{I}_Q = \Omega(\varphi_1 - \varphi_2)$ , e la funzione  $\Omega$  si annulla quando i potenziali sono uguali ed è positiva se è positivo il suo argomento: in altri termini, in questo caso la corrente fluisce necessariamente dal potenziale maggiore a quello minore; se scegliamo questa interpretazione possiamo descrivere solo i processi spontanei.

### **Sistema mediatore**

Un sistema mediatore si interpone tra un coppia di corpi rigidi ed è in grado di trasmettere quantità di moto da un corpo all'altro senza accumularla. Quando attraversa il sistema mediatore la quantità di moto cede o acquista energia, pertanto questo sistema è in grado di accumulare energia.

I due esempi di sistema mediatore considerati in questo lavoro sono la molla e il campo di gravità. In generale i sistemi mediatori sono i campi di forze della dinamica.

Possiamo, d'altra, parte, individuare il portatore elastico ed il potenziale gravitazionale, e quindi in determinate circostanze possiamo elevare i sistemi mediatori allo stesso livello dei corpi.

### **Interfaccia**

L'interfaccia è la sede dei gradienti di tutti i potenziali che caratterizzano una coppia di sistemi in interazione.

In quanto tale, possiede una coppia di "terminali" per ciascuno dei potenziali coinvolti, e un terminale termico nel quale localizziamo la produzione di entropia.

### **Processo**

È il trasferimento di energia da un portatore ad un altro nell'interfaccia tra due sistemi.

### **Equazione di bilancio**

L'equazione di bilancio mette in relazione gli accumuli in un sistema con i trasferimenti da o verso il sistema:

1. se  $Q$  è un portatore conservato l'equazione di bilancio è  $\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{sistema} = \sum \mathcal{I}_{Q,ext}$ ;
2. per i portatori non conservati il termine di produzione è localizzato nell'interfaccia:  $\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{interfaccia} = \pi_Q$ ;
3. l'equazione di bilancio dell'energia è  $\left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_{sistema} = \sum_i \varphi_i \mathcal{I}_{Q,i}$ .

### **Potenza**

È la rapidità con la quale una corrente di portatore acquista energia quando attraversa un'interfaccia o un sistema mediatore per spostarsi da un sistema all'altro: è legata alla corrente e alla tensione dalla relazione  $\mathcal{P} = (\varphi_1 - \varphi_2) \mathcal{I}_Q$ .

### **Equazione di processo**

Tutte le potenze coinvolte in un processo sono legate dall'equazione

$$\sum_i (\varphi_{i,1} - \varphi_{i,2}) \mathcal{I}_Q + T_{interfaccia} \pi_S = 0$$

Se il processo avviene in un sistema mediatore, il termine di creazione dell'entropia è assente.

## Riferimenti bibliografici

- [1] S. Hawking, **Hawking on The Big Bang and Black Holes**, *Advanced Series in Astrophysics and Cosmology (vol. 8)*
- [2] F. Herrmann, **The Karlsruhe Physics Course**, *Eur. J. Phys.* 21 49 (2000)
- [3] F. Herrmann, **Was ist eine mengenartige Größe?** *Praxis der Naturwissenschaften*
- [4] F. Herrmann, **Equilibria in the Troposphere**, *Abteilung für Didaktik der Physik, Universität, 76128 Karlsruhe*
- [5] M. D'Anna, G. Laffranchi, P. Lubini, **Progetto StrIIT, vol. 1 "Il quadro concettuale"**, *Edizioni CDC (2011)*
- [6] M.W. Zemanski, **Calore e Termodinamica**, *Bollati Boringhieri*
- [7] I. Prigogine, D. Kondepudi, **Termodinamica**, *Bollati Boringhieri*
- [8] G. Falk, **Die begriffliche Struktur der Physik**, *Institut für Didaktik der Physik, Universität Karlsruhe*
- [9] E. Tiezzi, **Verso una fisica evolutiva**, *Donzelli Editore*
- [10] L. D. Landau, E. M. Lifšits, L.P. Pitaevskij, **Teoria dei Campi, vol. 8: Elettrodinamica dei mezzi continui**, *Editori Riuniti*
- [11] L. D. Landau, E. M. Lifšits, L.P. Pitaevskij, **Teoria dei Campi, vol. 5: Fisica Statistica**, *Editori Riuniti*
- [12] E. Fermi, **Termodinamica**, *Bollati Boringhieri*
- [13] Dick C.H. Poon, **Work, Energy Transfer, and Sliding Friction**, *The Physics Teacher, Vol. 44, Aprile 2006*
- [14] Max Plank, **Bemerkungen zum Prinzip der Aktion und Reaktion in der allgemeinen Dynamik**, *Physikalische Zeitschrift (1908)*
- [15] B. A. Sherwood, W. H. Bernard, **Work and heat transfer in the presence of sliding friction**, *Am. J. Phys.* 52 (11), November 1984
- [16] J. W. Gibbs, **The Scientific Papers of J. Willard Gibbs (vol.1: Thermodynamics)**, *Dover, New York, 1961*
- [17] J. W. Gibbs, **On the Equilibrium of Heterogeneous Substances** (estratto da "Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences", vol. 39), *The Academy, New Haven 1874-7*
- [18] A. Fasano, S. Marmi, **Meccanica Analitica**, *Bollati Boringhieri*