A cura
del Laboratorio di didattica della matematica

Bollettino dei docenti di matematica

48

Maggio
2004

Ufficio
dell'insegnamento medio
Centro
didattico cantonale

Bollettino
dei docenti di matematica
48

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport

ISBN 88-86486-70-7

Bollettino dei docenti di matematica 48

Maggio
2004

Ufficio dell’insegnamento medio
Centro didattico cantonale

Indice

Prefazione

La novità di questo numero è costituita dalla presenza di due articoli interamente dedicati alla scuola elementare, settore importante e delicato per quel che concerne l'educazione al pensiero matematico. L'iniziativa non vuole essere un episodio isolato, ma aprire un importante campo di riflessione e di ricerca, per il quale ci aspettiamo, oltre ai contributi dei didatti disciplinari, anche segnalazioni da parte degli insegnanti di scuola elementare di attività ben riuscite, di materiali didattici originali, di nuove idee. La strada è aperta da Gianfranco Arrigo con due contributi: il primo, all'inizio, presenta una riflessione didattica accompagnata da proposte concrete per un ripensamento dei (vecchi) programmi di matematica della nostra scuola elementare. Il secondo, dello stesso autore, è costituito di una serie di problemi di laboratorio matematico, espressamente pensati per far vivere agli allievi momenti di matematica in diretta: per dirla con Bruno D'Amore, momenti *a-didattici* nei quali l'insegnante scompare dietro le quinte e l'alunno si prende a carico la responsabilità del proprio lavoro di apprendimento.

La rubrica Varia è arricchita dai contributi di Giorgio T. Bagni che ci offre un delizioso saggio sul matematico indiano Srinivasa Ramanujan, di Giorgio Mainini con un esemplare e illuminante studio dell'attualissimo problema concernente il contenimento della spesa (pubblica o privata). Si finisce con Alberto Piatti che ci presenta una novità nel campo della matematica: il concetto di *probabilità imprecisa*, che permette, fra l'altro, di modellare l'ignoranza, cioè di costruire modelli probabilistici anche in assenza di informazioni complete. Didatticamente se ne potrebbe dedurre un concetto di probabilità matematica più credibile da parte degli allievi: è ciò che si propongono di ricercare Alberto Piatti e Gianfranco Arrigo che lanciano un messaggio esplicito a tutti coloro che sono disposti a collaborare. La sezione intitolata alla didattica presenta un contributo di notevole interesse dell'infaticabile Manuela Gerber che ci descrive i primi passi di una seconda media in campo statistico, seguito dalla presentazione di Gianfranco Arrigo del primo volume «Atolli matematici 3» (per le terze medie), apripista della nuova serie di manuali per la scuola media, destinata a sostituire l'ormai vecchiotta «Dimensione matematica».

L’intermezzo costituito dal Quiz 31 di Aldo Frapolli è come sempre stimolante, avvincente, tutto da vivere.

La seconda parte è aperta dalla Bricolla di Giorgio Mainini, che ci scodella un’ottima situazione probabilistica condita con salsa a base di paradosso.

Il Laboratorio matematico, oltre alle proposte per la scuola elementare, presenta una serie di interessanti stimolazioni inviateci da tre giovani autori: Lara Zamboni, Alberto Piatti e Filippo Siegenthaler.

Notevoli, questa volta, le segnalazioni di convegni. Si inizia con quello di Locarno che si terrà il 24 e il 25 settembre 2004: una rara e ghiotta occasione di conoscere figure emergenti della didattica della matematica a livello internazionale. Si continua con l’abituale «convegnone» di Castel San Pietro Terme (Bo) che avrà luogo nei giorni 5-6-7 novembre 2004, al quale partecipa sempre una nutrita schiera di docenti ticinesi. La settimana successiva ci si sposterà a Verbania, località a noi molto vicina, dove si svolgerà la seconda edizione di «Incontri con le scienze», col titolo accattivante «Il piacere e lo stupore», organizzato dall’Università degli studi Torino. Infine viene segnalato un importante Simposio che si terrà dal 3 al 6 maggio 2005, a Chivilcoy (Buenos Aires, Repubblica Argentina), al quale è stato invitato a tenere una conferenza e un seminario Gianfranco Arrigo, grazie in particolare alle ricerche sull’infinito svolte in collaborazione con Bruno D’Amore.

Chiudono come sempre alcune recensioni che questa volta pubblichiamo con l’intenzione di aiutare gli insegnanti a scegliersi le letture estive.

1. Quale matematica per la scuola elementare?[1]

Gianfranco Arrigo

In the past decades the didactic theory has put learning at the heart of the matter, that is the pupil with his characteristics, his real life, his psychology, his social conditions, etc. At the same time, school work has been concentrating on the construction of knowledge by the pupil. Taking this into consideration, a school curriculum (of mathematics) cannot be restricted to the traditional list of contents, even if coupled with considerations on method and on evaluation, but it must be oriented towards the concept of competence.

The article presents new suggestions for the renewal of the programme of mathematics for the elementary school.

1. Un progetto educativo

Da qualche decennio la ricerca didattica – in particolare quella relativa alla matematica – e la letteratura specialistica rivolta agli insegnanti mettono in primo piano l'apprendimento, o, se si preferisce, l'allievo con le sue peculiarità, il suo vissuto (scolastico e no), la sua psicologia (a volte fragile o turbata; sempre in evoluzione), le sue condizioni sociali, ecc. Parallelamente, nella prassi didattica, ci si concentra sulla costruzione del sapere da parte dell'allievo, cercando da un lato le modalità più adatte per ottenere la migliore qualità dell'apprendimento, dall'altro di identificare gli ostacoli che vi si possono frapporre.

Se si accetta questa idea di fondo, si deve pure riconoscere che un curricolo scolastico (per esempio di matematica) non può limitarsi al tradizionale elenco dei contenuti, anche se questo dovesse essere accompagnato da considerazioni sul metodo e sulla valutazione. A giusta ragione si ritiene che un tale documento conceda troppo alla logica disciplinare, al «sapere» e, anche se in modo implicito, metta in primo piano l'insegnamento, a scapito dell'apprendimento.

Su un piano più specifico, si va dicendo che il soggetto che apprende dev'essere convenientemente stimolato e messo in condizione di contribuire in prima persona alla costruzione del proprio sapere, in modo che possa agire con una certa autonomia, sentirsi protagonista e riflettere su ciò che ha fatto, che sta facendo, che potrà fare.

La mia impressione è che gli insegnanti – chi più, chi meno – abbiano colto questo nuovo messaggio e cerchino di applicarlo meglio che possono in classe. Si trovano però a dover fare i conti con programmi obsoleti sia per quel che concerne i contenuti sia nella concezione pedagogico-filosofica, ancor troppo legata all'idea di portare gli allievi al raggiungimento di una lista di obiettivi contenutistici. Non è

1. L'articolo è la rielaborazione della relazione che l'autore ha pronunciato alla «Giornata di riflessione-formazione per i direttori delle Scuole comunali», svoltasi presso la sede luganese dell'Università della Svizzera Italiana, il 6 maggio 2004.

difficile capire che fin quando si continuerà a considerare l'insegnante un trasmettitore di conoscenza, convenientemente ruminata e pronta per essere assunta da allievi perfetti ricevitori, non si potrà ottenere il cambiamento al quale abbiamo appena accennato.

Occorre quindi che già nei programmi scolastici siano esplicitati chiaramente i nuovi ruoli che insegnanti e allievi sono chiamati ad assumere. L'insegnante non deve più essere depositario/trasmettitore di conoscenze, né responsabile unico dell'apprendimento di tutti, ma *ideatore*, *organizzatore, stimolatore* di attività che permettano agli allievi di costruirsi responsabilmente la propria conoscenza. D'altra parte l'allievo non deve più essere passivo ascoltatore, né diligente imitatore, né fedele riproduttore della conoscenza presentata dall'insegnante; al contrario, deve diventare *attivo, interessato, responsabile* e *cosciente del proprio apprendimento*, nel limite del possibile, ma in misura sempre maggiore.

Allora l'apprendimento assume l'aspetto di una partita giocata sull'acquisizione di un *modo di pensare matematico*, improntata allo sviluppo di *interessi,* di abilità *ragionative, intuitive, creative*.

Un tale progetto educativo deve poter contribuire – attraverso la pratica della matematica – alla formazione della personalità razionale, al consolidamento della fiducia in se stessi, allo sviluppo di un gusto estetico (anche di carattere matematico), al raggiungimento di una cultura matematica.

2. Quali contenuti?

Anche se finora ho insistito sulle finalità formative, affermo che i contenuti specificamente matematici non vanno certo trascurati: non si può fare matematica prescindendo da un certo tessuto di conoscenze specifiche. Quest'ultimo però dev'essere funzionale all'apprendimento.

Dagli anni Sessanta agli anni Ottanta gli insegnanti hanno vissuto un periodo di grandi stravolgimenti dei contenuti scolastici di matematica. In brevissimo tempo si è passati da una matematica pratica, legata a un mondo contadino-artigianale (per chi si ricorda: i problemi del «tre semplice», del «tre composto», di miscuglio, di alligazione, di ripartizione proporzionale, ecc.) alla Matematica con la «M» maiuscola introdotta dalla riforma internazionale «Matematica moderna» degli anni Sessanta (in pratica si sono travasati contenuti tradizionalmente universitari nelle scuole secondarie ed elementari), per giungere infine a un caotico movimento di riflusso che ha portato al deprecabile gonfiamento dei programmi scolastici, ancora oggi sotto l'occhio di tutti.

Bastano questi pochi cenni di storia recente per capire che assumere la logica dei contenuti come strumento principale nella definizione di un programma scolastico di matematica è operazione destinata al fallimento. A scanso di equivoci, intendo dire che se da un lato è umanamente impossibile (ed anche irragionevole) fissare su carta i contenuti ritenuti utili e importanti, dall'altro è pure illusorio voler fissare un elenco di «contenuti minimi». Chi ha tentato simili operazioni è tornato presto sui propri passi. Si potrebbe insomma azzardare (con la cautela del caso) che oggi tutto può essere utile e nulla indispensabile.

D'altra parte, non condivido nemmeno la posizione di chi sostiene che un contenuto vale l'altro e che, di conseguenza, ogni insegnante dev'essere lasciato libero di scegliere i concetti e le procedure matematiche da proporre in classe. O meglio: una possibilità di scelta la lascerei, ma mi preoccuperei che ciascun insegnante si appropriasse di solidi e corretti criteri di scelta conosciuti e condivisibili da tutti.

Quali possono essere questi criteri?

Per coerenza, iniziamo dall'allievo e chiediamoci **quali contenuti matematici potrebbero stimolare il suo interesse e quindi il piacere di apprendere**. Per esempio, ma senza anticipare nulla, ritengo che difficilmente l'alunno della scuola elementare si sentirebbe attratto a imparare l'algoritmo arabico della moltiplicazione (comunemente detto moltiplicazione in colonna), mentre invece potrebbe provare il desiderio spontaneo di imparare ad usare la calcolatrice o il computer.

Un secondo criterio può sicuramente concernere la cosiddetta **logica disciplinare** (cioè la matematica in quanto scienza finemente strutturata). Per esempio, mi sembra fuori di dubbio che, nella scuola elementare, non abbia senso apprendere la moltiplicazione prima dell'addizione. Ciò può portare anche alla scelta di contenuti che non passerebbero al vaglio del primo criterio. Da questo lato, apprendere la matematica è paragonabile a imparare a suonare uno strumento musicale. Soprattutto all'inizio, occorre pazientemente appropriarsi di conoscenze e tecniche anche se non si riesce ancora a vederne l'utilità. Ma, come succede allo strumentista in erba, che, tra un esercizio di solfeggio e l'esecuzione di una scala si diletta a suonare qualche frammento di musica gradevole, anche l'allievo che sta compiendo i primi passi in matematica deve potere provare il piacere di fare matematica, di vivere la matematica in prima persona, di lasciarsi affascinare da un'avventura nella quale è libero di pensare, di agire, di costruire. Questo può significare, per esempio, che all'allievo impegnato ad imparare le tabelline siano proposte stimolanti questioni riguardanti multipli e divisori di un numero, numeri primi e numeri composti, situazioni combinatorie, ecc. Come l'apprendista pianista, che non riesce ad eseguire un passaggio di una sonata di Mozart, si dedica con rinnovato spirito agli esercizi di base – sorretto dalla speranza di tornare con successo sul brano di Mozart –, così il piccolo apprendista matematico che non riesce a concretizzare una sua congettura, per esempio sulla relazione di divisibilità, torna con determinazione a ristudiarsi le tabelline e quindi le relazioni fra divisori e multipli di un numero, allo scopo di acquisire importanti elementi per meglio precisare la congettura lasciata in sospeso.

Quest'ultima osservazione mi permette di presentare il terzo criterio che entra in gioco nella scelta dei contenuti, senza dubbio il più delicato e importante, ancorché poco adottato. Si tratta dell'**importanza culturale di ciò che s'intende insegnare**. Risulta evidente, per esempio, che il teorema di Euclide sull'infinità dei numeri primi racchiude in sé una valenza culturale ben maggiore della formula per il calcolo dell'area di un triangolo. Sarebbe estremamente scorretto ritenere che la scuola elementare non sia la sede adatta almeno per iniziare questo tipo di discorso. Lo sanno bene gli insegnanti abituati ad indagare sulle immagini mentali che i propri allievi si costruiscono: immagini grezze ma ricche di elementi, fra i quali anche rappresentazioni dell'infinito potenziale, che permettono loro di captare, per esempio, l'importanza del ragionamento di Euclide sull'esistenza di infiniti numeri primi.

Aggiungerei ancora un quarto criterio, con la consapevolezza di non essere stato esaustivo, ma di aver elencato – spero – i più importanti: il **criterio di utilità** del contenuto rispetto alle esigenze che la società richiede al futuro cittadino. In questo senso, per esempio, può essere più utile saper calcolare quanto tempo è trascorso tra le 7.45 e le 16.30, piuttosto che aver capito il senso del ragionamento di Euclide sulla numerosità dei numeri primi.

Comunque vengano scelti i contenuti, quelli relativi alla scuola elementare dovrebbero essere ben distribuiti fra le seguenti tre grandi categorie:

- Numeri
- Geometria
- Logica, combinatoria, probabilità

Occorre perciò sostituire il segmento tradizionale «numeri-geometria» col triangolo appena citato. Il che non significa – si badi bene – riproporre l'accozzaglia di contenuti verificatasi dopo la riforma «Matematica moderna», ma dare spazio, in misura equilibrata alla terza categoria di contenuti, che si distingue dalle altre due per il suo carattere maggiormente formativo, culturale, stimolante per l'allievo.

2.1. Numeri

Comincio col dire che i numeri della scuola elementare sono fondamentalmente i numeri naturali. È pur vero che verso la quarta classe gli insegnanti introducono i numeri «con la virgola», cioè, più correttamente, i numeri «decimali», quelli che scritti in forma decimale hanno un numero finito di cifre dopo la virgola. Per il matematico sono i numeri razionali rappresentabili in forma frazionaria con il denominatore del tipo $2^k \cdot 5^h$ (k, h numeri naturali). Dico così per poter aggiungere che il passaggio ai numeri decimali non costituisce alcun ostacolo epistemologico di rilievo. In questa ottica, il numero 3,75 non è altro che 375 centesimi. Per esempio,

se siamo in grado di calcolare
$375 \cdot 2 = 750$
possiamo facilmente dedurre che
$3{,}75 \cdot 2$
è uguale a
$375 \cdot 2 = 750$ centesimi, cioè 7,5 unità.

Se dovessero insorgere particolari difficoltà nell'uso dei numeri decimali, occorre prendere atto che l'ostacolo è essenzialmente di natura didattica.

Un modo per introdurre sensatamente i numeri decimali consiste nel far capo alle misure delle grandezze. Per esempio,

36 mm sono 3 cm e 6 mm, cioè 3,6 cm,
3,75 franchi sono 375 centesimi.

Dunque, chi sa calcolare bene con i numeri naturali, può abbastanza facilmente estendere le proprie capacità al calcolo con numeri decimali.

Detto ciò, risulta evidente che l'apprendimento del calcolo va costruito essenzialmente nell'insieme dei numeri naturali.

La mia proposta è semplice, ma – purtroppo – la sua attuazione risulta delicata, per motivi estranei alla matematica. Eccola schematicamente:

- Potenziare il calcolo mentale facendo uso della scrittura matematica
- Abituare gli allievi a stimare i risultati usando convenienti arrotondamenti
- Insegnare ad usare convenientemente la calcolatrice.

Qualcuno penserà che non vi è nulla di nuovo nella mia proposta. Certo, ma la novità più difficile da accettare sta proprio in ciò che ho omesso: le operazioni in colonna. La mia proposta è di eliminarle dal programma.

Faccio seguire qualche esempio illustrativo della proposta.

Esempio 1
$27 + 33 = \dots$
$= 20 + 7 + 30 + 3 = (20 + 30) + (7 + 3) = 50 + 10 = 60$
$= (27 + 30) + 3 = 57 + 3 = 60$
$= (33 + 20) + 7 = \dots$
$= 33 + (30 - 3) = (33 + 30) - 3 = \dots$
(…)
Analogamente: $270 + 330 = \dots$ (sono 60 decine, cioè 600 unità).

Esempio 2
$35{,}70 + 78{,}40 + 11{,}30 + 265{,}80 =$
$= (35 + 265) + (78 +11) + (0{,}70 + 0{,}30 + 0{,}40 + 0{,}80) =$
$= 300 + 78 + 2 + 9 + 1 + 0{,}40 + 0{,}60 + 0{,}20 = 390 + 1{,}20 = 391{,}20$

Esempio 3
$54 - 19 = \dots$
$= (54 - 10) - 9 = 44 - 9 = (44 - 4) - 5 = 40 - 5 = 35$
oppure:
$19 + 1 = 20 \rightarrow 20 + 34 = 54 \rightarrow 54 - 19 = 1 + 34 = 35$
(…)
Analogamente: $540 - 190 = \dots$ (sono 35 decine, cioè 350 unità).

Esempio 4
$7 \cdot 8 = 56$ (risultato memorizzato)
Analogamente:
$70 \cdot 8 = 560 = 7 \cdot 80$
$70 \cdot 80 = 5600$
(…)

Esempio 5
$43 \cdot 6 = (40 + 3) \cdot 6 = 40 \cdot 6 + 3 \cdot 6 = 240 + 18 = 258$
$254 \cdot 9 = (200+50+4) \cdot 9 = 200 \cdot 9 + 50 \cdot 9 + 4 \cdot 9 = 1800 + 450 + 81 =$
$= 2250 + 36 = 2286$
oppure:
$254 \cdot 9 = 254 \cdot (10 - 1) = 2540 - 254 = \dots$

Esempio 6
63 : 7 = 9
Analogamente:
630 : 7 = 90
630 : 70 = 9
63 : 70 = 0,9 = 6,3 : 7
0,63 : 7 = 0,09
(…)

Esempio 7
657 : 7 = ?
(630 + 27) : 7 = 630 : 7 + 27 : 7 = 90 + 3 resto 6 = 93 resto 6
oppure:
= 93 + 6 : 7 = 93, 8 resto 0,4
(…)

Esempio 8
657 : 71 = ?
Lo eseguiamo con la calcolatrice, ma…
siamo in grado di capire che il risultato è vicino a
630 : 70 = 9
La calcolatrice dà 9,253521…
(…)

In ciò che propongo vi sono due principi che non ho ancora espresso:

1. la calcolatrice è scomoda da usare, perciò il suo impiego dev'essere limitato: essenzialmente quando i numeri che entrano nel calcolo sono «complicati» e a condizione che si desideri ottenere un risultato esatto;
2. l'uso della calcolatrice non è molto affidabile, deve perciò essere accompagnato da una stima (anche grossolana) dei risultati.

La scomodità della calcolatrice consiste nel fatto che bisogna introdurre tutti i numeri che intervengono nel calcolo e poi, a seconda delle operazioni che si vogliono compiere, occorre usare in modo corretto i tasti relativi. Ciò da un lato rallenta sensibilmente il tempo reale di calcolo (che non è la frazione di secondo che i circuiti integrati impiegano per dare il risultato una volta premuto il tasto «=», ma il tempo che trascorre dal momento che viene assegnato il calcolo all'istante in cui appare il risultato sul display) e dall'altro introduce una tutt'altro che trascurabile probabilità di errore, che causa la citata inaffidabilità.

La credenza comune che la calcolatrice sia facile da usare e per di più diseducativa, dovrebbe a questo punto rivelarsi inconfutabilmente falsa. Essa si basa sull'idea comune che i calcoli concernano sempre due soli numeri: in questi casi la calcolatrice è (quasi) sempre vincente e convengo che la macchina può dare l'impressione di essere al servizio della pigrizia mentale. Ma, per fortuna nostra, se si pratica la matematica nel senso descritto in precedenza, si arriva ben presto (già nella scuola elementare) a dover eseguire algoritmi di una certa complessità, con più di due numeri. In questa situazione, l'uso della calcolatrice è basato sulle proprietà dell'aritmetica e il calcolo con la macchina si svolge nello stesso modo usato per calcolare espressioni numeriche e letterali, per risolvere equazioni, per manipolare formule, ecc.: insomma, si usa la calcolatrice e si fa matematica.

Per esempio, anche solo per calcolare
(72,90 + 12,30) : 3
non posso pigramente pigiare nell'ordine i tasti…

$\boxed{7}\ \boxed{2}\ \boxed{.}\ \boxed{9}\ \boxed{+}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{.}\ \boxed{3}\ \boxed{:}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$

… ma devo interpretare correttamente le parentesi, cioè devo capire il linguaggio matematico e operare per esempio così

$\boxed{7}\ \boxed{2}\ \boxed{.}\ \boxed{9}\ \boxed{+}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{.}\ \boxed{3}\ \boxed{=}\ \boxed{:}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$

Altro esempio:
455 : (43,8 + 47,2) = ?
anche in questo caso devo interpretare ben la scrittura matematica e agire per esempio così:

$\boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{5}\ \boxed{:}\ \boxed{(}\ \boxed{4}\ \boxed{3}\ \boxed{.}\ \boxed{8}\ \boxed{+}\ \boxed{4}\ \boxed{7}\ \boxed{.}\ \boxed{2}\ \boxed{)}\ \boxed{=}$

oppure

$\boxed{4}\ \boxed{3}\ \boxed{.}\ \boxed{8}\ \boxed{+}\ \boxed{4}\ \boxed{7}\ \boxed{.}\ \boxed{2}\ \boxed{=}\ \boxed{:}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{5}\ \boxed{=}\ \boxed{1/x}$

Oltre all'aspetto non indifferente dell'educazione alla scrittura matematica, il secondo modo mostra come anche nell'esecuzione di calcoli usuali (con la calcolatrice) possano celarsi occasioni per sviluppare la creatività.

Considerazioni analoghe non si possono fare per le operazioni in colonna. Anzi, come è già stato fatto notare da più parti, questo modo di calcolare tende a nascondere la matematica che soggiace. Basterebbe chiedere a un qualunque allievo di quinta elementare perché nella moltiplicazione in colonna, ad ogni riga successiva, si deve spostare la stringa di cifre di un posto a sinistra. O ancora, perché, alla fine si deve addizionare.

Altra considerazione: nell'addizione in colonna si inizia dalle unità. Ciò comporta un inconveniente tutt'altro che secondario: un errore sul riporto dalle unità influisce sulle decine (dunque viene moltiplicato per 10), il conseguente errore sul riporto alle centinaia viene di nuovo decuplicato e così via. Questo non succede ovviamente nel calcolo con la calcolatrice, ma nemmeno nel calcolo mentale, espresso con la scrittura matematica. Se si ritorna agli esempi 1, 2 e 5 si vede che né si corre il rischio della propagazione dell'errore né si lavora «a scatola chiusa», perché si è obbligati ad applicare le proprietà aritmetiche.

Vi sono parecchie situazioni nelle quali la calcolatrice risulta perdente nei confronti del calcolo mentale. Queste vanno sfruttate per creare una sorta di sfida alla calcolatrice e per mostrare che non sempre vale la pena ricorrere a questo mezzo di calcolo. Ecco qualche esempio:

$24 + 38 + 16 = (24 + 16) + 38 = 40 + 38 = 78$

con un po' di allenamento, questo calcolo può essere eseguito (senza scrivere nulla) in due secondi; in questo tempo nessuno riesce a introdurre nella calcolatrice i tre addendi e i comandi necessari per ottenere la somma desiderata.

$25 \cdot 57 \cdot 4 = (25 \cdot 4) \cdot 57 = 100 \cdot 57 = 5700$

questo calcolo può essere eseguito mentalmente in due secondi; con la calcolatrice…

$6 + 5 + 5 + 4 + 6 + 6 + 5 + 5 + 6 + 4 + 4 + 4 + 4 = 6 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 24 + 20 + 20 = 64$

questo calcolo può essere eseguito mentalmente con tutta calma, notando su un foglio anche tutti i passaggi, perché inserire correttamente 13 numeri in una calcolatrice richiede tempo e concentrazione massima e, se si sbaglia o si perde il segno, occorre ricominciare daccapo.

Ora, si potrebbe obiettare che i miei esempi sono casi particolari, scelti a proposito, situazioni che di solito non s'incontrano. Indubbiamente sono casi singolari (e ne avrei qualche altro da proporre), ma quando si conoscono bene, col gioco degli arrotondamenti, ogni calcolo, anche il più complicato, può essere ricondotto a uno di essi. Ovviamente, non pretendiamo di trovare il risultato esatto, ma una sua stima. Perché, se fosse importante conoscere il risultato esatto, useremmo la calcolatrice. Per esempio:

$23{,}78 \cdot 57 \cdot 4{,}03 = ?$

stima

$23{,}78 \cdot 57 \cdot 4{,}03 \cong 25 \cdot 57 \cdot 4 = (25 \cdot 4) \cdot 57 = 100 \cdot 57 = 5700$

calcolo esatto con la calcolatrice

$23{,}78 \cdot 57 \cdot 4{,}23 = 5462{,}5038$

Altro esempio: gli allievi hanno il compito di misurare con la massima precisione la lunghezza dell'aula. Alcuni usano una bindella, altri la riga della lavagna, altri il centimetro del sarto, ecc. Alla fine si raccolgono i risultati e si calcola la media aritmetica, che è ritenuta la misura più credibile.

Misure ottenute (in metri)

5,85 ; 5,20 ; 5,12 ; 4,0 ; 6,0 ; 6,20 ; 4,95 ; 4,98 ; 5,9 ; 3,9 ; 4,2 ; 4,0 ; 4,5

stima della somma

$\cong 6 + 5 + 5 + 4 + 6 + 6 + 5 + 5 + 6 + 4 + 4 + 4 + 4 = 6 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 24 + 20 + 20 = 64$

stima della media (al posto di 64 usiamo 65, che è il multiplo di 13 più vicino)

$65 : 13 = 5$

calcolo della media (con la calcolatrice)

Media (5,85 ; 5,20 ; 5,12 ; 4 ; 6,0 ; 6,20 ; 4,95 ; 4,98 ; 5,9 ; 3,9 ; 4,2 ; 4,0 ; 4,5) = 4,98…

Si noti che in questo caso la stima è addirittura più credibile della media, perché con scarti così grandi tra le varie misure e la media, non ha senso la precisione a meno di un centimetro.

Se ancora non si è convinti che non vale più la pena di introdurre le operazioni in colonna, per convincersene, basterebbe passarle al vaglio dei criteri stabiliti in precedenza.

Le operazioni in colonna:

- difficilmente stimolano nell'allievo interesse e piacere di apprendere;
- dal punto di vista strettamente matematico non hanno alcun interesse;
- non hanno un gran valore culturale, se si esclude un certo interesse storico; ma in questo caso dovrebbero essere inquadrate in un discorso più ampio, che tocchi altri interessanti algoritmi di calcolo sviluppati nell'antichità;
- non sono più utili, perché cadute in totale disuso.

2.2. Geometria

La mia proposta consiste nell'introdurre l'educazione geometrica come rappresentazione della realtà tridimensionale già a partire dalla prima classe. L'apprendimento dev'essere improntato all'attività euristica del reale, con frequenti passaggi dal mondo tridimensionale a quello bidimensionale, e viceversa, ripetendo questi passaggi ogni volta che se ne presenta l'opportunità. In quest'ottica, la geometria è vista essenzialmente come modello matematico della realtà fisica (G. Arrigo-S. Sbaragli, 2004). Le forme geometriche sono caratteristiche degli oggetti reali; esse vengono rappresentate dapprima mediante modellini concreti (modelli scheletrati, oppure costruiti con plastilina, con cartoncino, ecc.), poi mediante disegni bidimensionali (schizzi a mano libera, disegni fatti con gli strumenti geometrici tradizionali, disegni realizzati su computer, ecc.). I problemi nascono nella realtà, vengono tradotti in problemi matematici (con l'ausilio di modellini o disegni), vengono risolti matematicamente: infine la soluzione va tradotta e adattata alla situazione reale.

Fin dalla prima classe, suggerisco di iniziare dall'osservazione di oggetti comuni, scatole, recipienti, elementi architettonici, con i quali i bambini possono giocare liberamente per effettuare le prime scoperte e analisi relative alle proprietà delle figure solide. Per poter eseguire le osservazioni è bene manipolare questi oggetti, farli rotolare, per scoprire ad esempio che il cilindro ha qualcosa di diverso dal parallelepipedo: il primo rotola con facilità, il secondo lo fa con non poche difficoltà. Si può così fare conoscenza con gli spigoli e le facce dei poliedri e con altri solidi non poliedrici.

Per ciascun solido a disposizione si cercano relazioni fra gli elementi. In particolare, per i poliedri, si può concentrare l'attenzione sulle facce, che sono poligoni (quindi figure piane), oppure sui vertici e sugli spigoli con l'aiuto di modelli scheletrati. Da questi si può poi passare ai modelli in cartoncino, che evidenziano la superficie, e infine, mediante opportuni tagli, ai loro sviluppi (e di nuovo ci si trova sul piano).

Queste attività vanno però inquadrate in un ambito di risoluzione di problemi. Interessanti esempi in tal senso si trovano, per esempio, sul testo già citato (G. Arrigo-S. Sbaragli, 2004).

La geometria ha anche il suo aspetto metrico: in tal senso offre un'ottima occasione per apprendere i rudimenti su grandezze, unità di misura e misure. Le lunghezze, per prima cosa, come grandezze legate all'estensione di segmenti di linea (in particolare retta). Molto importante è il caso dell'area. Punto di partenza è senza dubbio la determinazione dell'area di un rettangolo: ossia il problema delle «tavolette di cioccolata», come si può scherzosamente chiamarlo[2]. Presuppone attività di ricoprimento del piano che aiutano a capire la relazione basilare esistente fra la grandezza area (A), l'unità di misura (U) e la misura dell'area (m):

$$A = m\,U$$

relazione identica a quella più scontata riferita alle lunghezze.

Anche se non formalizzata, la comprensione di questa semplice quanto fondamentale relazione apre la strada all'estensione di questi concetti alle altre grandezze geometriche e ad alcune fisiche. In questo ambito si inseriscono anche le famigerate trasformazioni di unità di misura, da adottare con parsimonia.

Ma la proprietà più importante della misura (di qualunque grandezza) è l'additività. Per grandezze geometriche (lunghezze, ampiezze, aree, volumi) può essere espressa così. Siano F, F_1 e F_2 tre grandezze omogenee qualsiasi (omogenee significa della stessa natura; per esempio: tre lunghezze, tre aree, ecc.). Allora si ha:

$$\begin{cases} F = F_1 \\ F_1 \cap F_2 \end{cases} \begin{cases} F = F_1 \cup F_2 \\ F_1 \cap F_2 = \varnothing \end{cases} \Rightarrow F\ m(F) = m(F_1) + m(F_2) \qquad [m(F_1) = m(F) - m(F_2)]$$

Con gli allievi non è il caso di parlare di additività: in fondo fa parte del senso comune. È però importante che li si abitui a scomporre figure applicando concretamente la proprietà. Questa procedura matematica è particolarmente utile per il calcolo delle aree (e più tardi, nella scuola media, lo sarà per i volumi).

In teoria, chi ha acquisito una buona padronanza nella scomposizione di figure può permettersi di memorizzare soltanto la formula dell'area del rettangolo (tavoletta di cioccolata), perché da essa scaturiscono direttamente per additività le formule relative al parallelogrammo generico e al triangolo. Le altre figure, spesso celebrate come se fossero casi totalmente diversi, si possono ottenere pure per additività. Anzi, sostengo che è addirittura sconveniente memorizzare la formula che dà l'area del trapezio, così come quella dell'area dell'aquilone (caso particolare rombo) in funzione delle diagonali. Con ciò si fanno parecchi danni:

- si intasa la memoria inutilmente;
- si dà l'impressione che ciascun caso sia a sé stante, rafforzando così l'idea che la matematica sia una somma di nozioni sconnesse;
- si perde l'occasione di far acquisire agli allievi un metodo (della scomposizione) applicabile in generale.

Ma la geometria offre altri interessanti settori da scoprire, fra i quali mi sembra ragionevole citare:

- la trasformazione di un poliedro in un grafo (operazione che simula lo schiacciamento del poliedro su un piano);

2. Ovviamente, nella scuola elementare non ha senso considerare il caso di rettangoli con dimensioni incommensurabili.

- la colorazione delle facce di un poliedro o di un grafo (ricerca del numero minimo di colori);
- la ricerca di una relazione fra i numeri di vertici, di spigoli e di facce in un poliedro (formula di Euler);
- la ricerca di percorsi minimi lungo gli spigoli o sulla superficie di un poliedro;
- il problema (particolare ma interessante) delle diagonali di un cubo.

2.3. Logica, Combinatoria, Probabilità

È in questo ambito che troviamo forse gli elementi più innovativi della mia proposta. A differenza dei primi due (Numeri e Geometria) non vi sono contenuti specifici, ma abitudini mentali da acquisire, forme di ragionamento da padroneggiare, forme espressive e rappresentazioni schematiche da assumere con consapevolezza.

2.3.1. Logica

Da un lato dobbiamo curare l'espressione di proposizioni logiche mediante affermazioni del linguaggio naturale. Fra l'altro, questa è un'importante occasione di interdisciplinarità tra matematica e lingua materna. Fra le varie possibilità, citerei:

- la differenza tra le congiunzioni, «e» da una parte, e le disgiunzioni, «o inclusivo» (oppure, *wel*), «o esclusivo» (*aut*), dall'altra;
- la negazione;
- il «se …, allora…»;
- i quantificatori «almeno…», «al massimo…», «solo…», (o «esattamente…»), «tutti».

D'altra parte è pure utile fornire agli allievi elementi per la schematizzazione del ragionamento logico. Suggerisco di usare opportunamente le tabelle a doppia entrata e i diagrammi di Euler-Venn.

Esempio 1
Fabio, Giulia, Mauro e Nadia possiedono, ciascuno, **un solo** animale.
I loro animali sono un cane, un canarino, un gatto e un pesce.
L'animale di Mauro ha il pelo.
Quello di Fabio ha 4 zampe.
Nadia ha un uccellino.
Giulia **e** Mauro **non** possiedono gatti.

La soluzione può essere trovata mediante una tabella a doppia entrata nella quale si inseriscono, una dopo l'altra, le informazioni date (in esse notiamo tre importanti elementi logici, in grassetto).

Ecco la tabella completata:

	Fabio	Giulia	Mauro	Nadia
pesce	×	○	×	×
gatto	○	×	×	×
canarino	×	×	×	○
cane	×	×	○	×

(I cerchietti indicano la giusta appartenenza.)

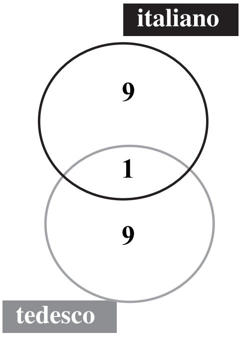
Esempio 2

In una classe di 19 allievi, 10 parlano italiano e 10 parlano tedesco.

È possibile? Che cosa si può dire delle lingue parlate da questi allievi?

La prima reazione consiste nel far notare che 10+10=20 e non 19, quindi che il problema sembra contenere un errore nei dati.

Dicendo però «parlano italiano» non si dice «parlano **solo** italiano», dunque non si esclude che **almeno un** allievo parli due lingue. La situazione può essere espressa, per esempio, con l'ausilio di un diagramma di Venn…



… che ci fa capire che in quella classe esiste un solo allievo che parla le due lingue.

Come mostrano gli esempi prodotti, non si tratta di far apprendere determinate nozioni né particolari procedure frutto di una trasposizione didattica della logica simbolica, bensì di far acquisire agli allievi dei «saper fare» procedurali e strategici che stanno alla base del ragionamento matematico e che sono anche strumenti importanti nella risoluzione di problemi.

2.3.2. Combinatoria

Un discorso analogo può essere fatto anche per l'educazione al pensiero combinatorio. Ritengo sia importante, oggi, abituare l'allievo ad affrontare (semplici) problemi di matematica discreta. Più che altro, è necessario che l'insegnante sia cosciente dell'esistenza di questo aspetto dell'apprendimento e sappia cogliere e sfruttare convenientemente le innumerevoli occasioni che si prestano per sviluppare un ragionamento combinatorio.

In sostanza, alla scuola elementare, ci si può limitare a porsi domande del tipo:

- quali sono?
- quanti sono?
- come continua la successione?

Domande, queste, che si devono proporre agli allievi tempestivamente e in modo che risultino pertinenti all'attività che si sta svolgendo. Con ciò non voglio escludere che qualche volta si possa eseguire in classe un lavoro essenzialmente centrato su questioni combinatorie, purché non sia la norma. Occorre infatti evitare il pericolo che l'allievo si convinca che questo tipo di ragionamento sia isolato dal resto della matematica che sta imparando. Il pensiero logico e quello combinatorio dovrebbero diventare strumenti familiari di lavoro, come le nozioni e le procedure correnti della matematica scolastica. L'obiettivo finale (la competenza verso la quale tendere) dovrebbe essere l'atteggiamento dell'allievo che, di fronte a una situazione non dichiaratamente combinatoria, ma che contenga elementi di questa natura, si ponga autonomamente le domande sopraccitate e imposti di conseguenza un iter risolutivo.

Esempio 1

Nel calcolo mentale sono importanti le scomposizioni additive e moltiplicative di un numero. Nel primo ciclo della scuola elementare si potrebbe assegnare agli allievi il seguente compito:

Completa la «margherita del 12», con riferimento alla figura 1.

Oltre all'invitare l'allievo a trovare divisori di 12, la domanda posta esige che siano trovate **tutte** le possibili scomposizioni.

Tentare a caso di trovarne qualcuna può anche essere un modo di iniziare, ma per raggiungere la certezza di trovarle tutte, occorre, per esempio, stabilire un criterio sistematico per generare i vari prodotti di due fattori. Uno di questi è indicato nella figura 2.

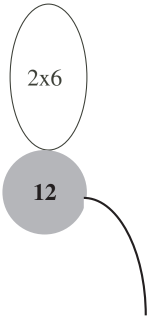


figura 1

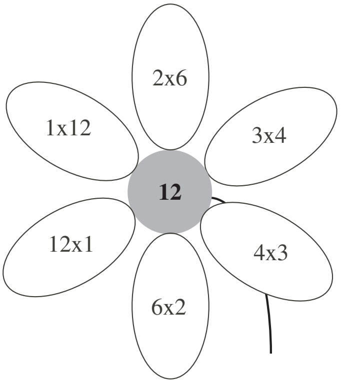


figura 2

Il ragionamento combinatorio può essere impostato così:

inizio da 1	1 x 12
poi passo a 2	2 x 6
poi vado a 3	3 x 4
continuo con 4	4 x 3
con 5 non va!	
con 6	6 x 2
con 7 non va!	
con 8 non va!	
con 9 non va!	
con 10 non va!	
con 11 non va!	
con 12	12 x 1

e ho finito.

Il ragionamento combinatorio mi permette di dire con sicurezza che non vi sono altre possibilità – al di fuori di quelle trovate – di esprimere il numero 12 come prodotto di due numeri naturali.

Esempio 2

In una classe è stato assegnato il seguente (tradizionale) problema:

Il signor Calice ha acquistato 400 bicchieri che gli sono costati 3,60 Fr l'uno.

Durante il trasporto ne ha però rotti 24.

Nonostante l'inconveniente decide che dalla vendita dei bicchieri vuole guadagnare la somma stabilita in precedenza, cioè 910 Fr.

A quanti franchi dovrà vendere ogni bicchiere?

Un rapido calcolo porta alla soluzione

$$\left(3{,}60\cdot 400+910\right):\left(400-24\right)=6{,}25 \quad [\mathrm{Fr}]$$

Ma non è ciò che interessa al momento. Un'attività combinatoria interessante può iniziare, una volta che gli allievi hanno raggiunto la soluzione.

In questo problema entrano in gioco i seguenti elementi:

- il numero di bicchieri acquistati (NUBI)
- il costo al pezzo (COPE)
- il numero di bicchieri rotti nel trasporto (BIRO)
- la somma che il negoziante vuole guadagnare (GUAD)
- il prezzo di vendita di un bicchiere (PREZ)

Se si conoscono 4 di questi elementi, si può trovare il quinto. Nasce allora la seguente domanda: quanti tipi di problema si possono costruire partendo da questa situazione?

Ecco individuato una possibile attività combinatoria, che può essere affrontata con l'ausilio di una tabella a doppia entrata:

NUBI	**COPE**	**BIRO**	**GUAD**	**PREZ**
dato	dato	dato	dato	**?**
dato	dato	dato	**?**	dato
dato	dato	**?**	dato	dato
dato	**?**	dato	dato	dato
?	dato	dato	dato	dato

La tabella mi garantisce che non vi sono altri tipi di problema con solo questi elementi.

Vi sono casi più interessanti: quelli in cui i dati indipendenti sono di meno. Per esempio, nel caso di calcoli di natura metrica concernenti un rettangolo, si possono considerare i seguenti elementi: base (BASE), altezza (ALTE), perimetro (PERI), area (AREA). La novità è che in questo caso basta assegnare **due** di questi dati. La tabella può essere costruita nel modo seguente:

BASE	**ALTE**	**PERI**	**AREA**
dato	dato	?	?
dato	?	dato	?
dato	?	?	dato
?	?	dato	dato
?	dato	?	dato
?	dato	dato	?

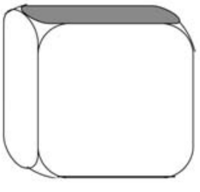
Non vi sono altre possibilità. Un buon esercizio di contorno potrebbe consistere nel far costruire agli allievi un problema per ciascun caso (che siano in grado di risolvere).

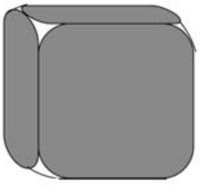
2.3.3. Probabilità

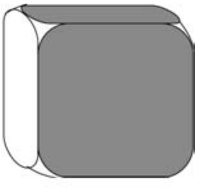
Una componente essenziale della matematica dei nostri giorni è il calcolo delle probabilità. Questa teoria può essere definita come la matematizzazione della casualità. Il caso, l'evento casuale (o aleatorio: termine dotto che deriva dal latino *alea* che significa gioco di dadi, rischio) ha sempre affascinato l'uomo e in particolare gli spiriti matematici. Questi, nel corso dei millenni, ma in modo accentuato a partire dal XVI secolo, hanno cercato a più riprese di dare una sistemazione matematica al concetto soggettivo di probabilità. Solo nel XX secolo, grazie al russo Andrei N. Kolmogorov, fu raggiunta una sistemazione assiomatica che promosse la disciplina «calcolo delle probabilità» a branca della matematica al pari delle altre (teoria dei numeri, algebra, geometria, ecc.). Agli inizi ci si preoccupò quasi esclusivamente di risolvere problemi che assillavano i giocatori d'azzardo. Molto conosciuta è la storia che, a metà del XVII secolo, vede protagonisti un accanito giocatore d'azzardo, il Cavaliere de Méré, Pascal e Fermat. Il primo sapeva riflettere sulle varie situazioni che nascevano nell'ambito del gioco e comunicava poi i suoi dubbi, le sue perplessità, i suoi problemi a quella grande mente che era Blaise Pascal, il quale, a sua volta, stimolava l'amico e matematico Pierre de Fermat. Inutile dire che queste relazioni produssero parecchia conoscenza matematica e prepararono il terreno a Pierre Simon de Laplace (grande figura della Rivoluzione francese), il quale costruì una prima chiara definizione di probabilità matematica, che oggi si usa indicare con l'appellativo «probabilità classica». Essa è valida solo in ambito finito e contiene il vizio logico di definire la probabilità di un evento, basandola su eventi elementari dichiarati a priori equiprobabili. A partire dal XX secolo, il calcolo delle probabilità s'impone non solo come strumento per indagare fenomeni casuali, ma anche per matematizzare fenomeni deterministici, troppo complessi per essere trattati con metodi matematici esatti. Oggi il calcolo delle probabilità è alla base della fisica, rende plausibile l'inferenza statistica, entra nelle modellizzazioni economiche e finanziarie, così come in quelle della biologia e persino delle scienze umane.

Parallelamente, il calcolo delle probabilità tocca da vicino anche il cittadino comune, il quale viene sempre più messo a confronto con i risultati di indagini demoscopiche, di previsioni e di proiezioni, che non sempre sa interpretare in modo corretto. Da qui nasce la necessità di educare i giovani al pensiero probabilistico già nella scuola obbligatoria, iniziando se possibile nella scuola elementare. Non si creda che l'idea di probabilità sia estranea al mondo infantile: anzi, l'idea soggettiva di probabilità è molto sviluppata nei bambini. Essi la affinano soprattutto nel gioco, quando devono operare scelte suscettibili di aumentare la probabilità di vincere, oppure prima di impegnarsi in una scommessa. La scuola può fare leva su queste idee pregresse e portare l'allievo a oggettivare maggiormente la stima dei valori di probabilità. Tutto ciò, come già detto, attraverso giochi e attività in situazione, senza la pretesa di giungere a formalizzazioni, ma con l'obiettivo di costruire abiti mentali che a poco a poco aiuteranno l'allievo, quando sarà il momento, a dare senso ai concetti e alle procedure tipiche di questa importante branca della matematica.

Esempio 1







primo dado	**secondo dado**	**terzo dado**
2 facce bianche	3 facce bianche	4 facce bianche
4 facce grigie	3 facce grigie	2 facce grigie

L'allievo è invitato a scegliere uno dei tre dadi e a lanciarlo. Se il risultato è «grigio», riceve un dolce; se il risultato è bianco, non riceve nulla.

Quale dado conviene scegliere, per avere maggiore probabilità di ricevere il dolce?

Quale invece scegliere, se non si vorrebbe ricevere il dolce?

È molto probabile che all'inizio gli allievi scelgano a caso, oppure fidandosi solo delle tre facce visibili. Ma col passare del tempo, se il gioco viene ripetuto più volte, gli allievi si indirizzeranno sui dadi che hanno più facce del colore desiderato.

Per chi ama i dolci, le cose appaiono così:

- il primo dado dà 4 possibilità su 6 di ricevere il dolce
- il secondo dado dà 3 possibilità su 6 di ricevere il dolce
- il terzo dado dà 2 possibilità su 6 di ricevere il dolce.

Normalmente, il bambino, dopo qualche tentativo, si orienterà verso il primo dado.

Il passaggio alla probabilità matematica (classica), se lo si vuole fare, può avvenire nel modo seguente:

$$4 \text{ possibilità su } 6 \longrightarrow \text{probabilità} = \frac{4}{6}$$

$$3 \text{ possibilità su } 6 \longrightarrow \text{probabilità} = \frac{3}{6}$$

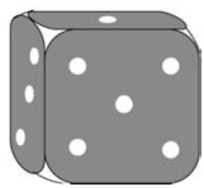
$$2 \text{ possibilità su } 6 \longrightarrow \text{probabilità} = \frac{2}{6}$$

Come già accennato, questi valori di probabilità sono corretti a condizione che le sei facce del dado abbiano la stessa probabilità di uscire. Un tale dado, in realtà, non esiste, ma lo si può considerare un modello matematico e come tale atto a descrivere la realtà in modo più o meno fedele.

Esempio 2

Lanciamo due dadi (distinguibili per ragioni didattiche) con le facce numerate da 1 a 6.

Ammettiamo che ciascuna faccia di ciascun dado abbia probabilità 1/6 di apparire (dado ideale). Per ogni lancio calcoliamo la somma dei punti usciti sui due dadi: qual è la somma più probabile?



Un modo per rispondere alla domanda consiste nell'aiutarsi con due tabelle a doppia entrata; una che simuli tutti i casi possibili (tabella a), l'altra dedotta dalla prima sostituendo le coppie di numeri con la loro somma (tabella b).

	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

tabella a

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

tabella b

Risulta facile allora concludere che la somma più probabile è 7, che 2 e 12 sono le meno probabili, che 6 è più probabile di 4, che esiste una simmetria nella distribuzione di probabilità, e così via.

Ma tutte le considerazioni fatte si riferiscono a un dado ideale, dunque irreale; che cosa succede se usiamo un dado «vero»? È l'inizio di un bel lavoro statistco, di una bella riflessione metacognitiva sulla diversa natura del modello matematico e del fenomeno reale. Una riflessione che può essere ripresa e proposta in altre occasioni e che aiuta l'allievo a dare senso alla matematica che affronta a scuola.

3. Come imparare?

3.1. Verso la competenza

Vogliamo decisamente e coscientemente impostare l'insegnamento della matematica nella scuola elementare ispirandoci al concetto di competenza? Mi sembra più di una proposta: una necessità. Sul piano teorico vorrebbe dire tenere conto degli sviluppi e dei risultati più recenti della didattica, e quindi proporre un insegnamento aggiornato. Inoltre, finalmente, ciò porterebbe a un'impostazione unitaria dell'insegnamento su tutto l'arco della scolarità obbligatoria, visto che tale impostazione, almeno nelle intenzioni programmatiche, è stata abbracciata dalla scuola media con l'introduzione del nuovo «Piano di formazione».

Se siamo d'accordo con questa scelta, dobbiamo seriamente riflettere su come operare per fare in modo che gli insegnanti colgano correttamente i principi che stanno alla base della «competenza» e sappiano agire di conseguenza nella loro prassi didattica.

Iniziamo dai principi teorici. Dico subito che il concetto di competenza non è del tutto nuovo: ciò dovrebbe tranquillizzare gli insegnanti. Non è altro che la sistemazione teorica, la formalizzazione, di diversi aspetti del processo di apprendimento, che in misura più o meno esplicita sono già conosciuti dagli insegnanti. Fra le varie teorizzazioni, trovo esemplare per chiarezza e precisione la sistemazione di Bruno D'Amore (D'Amore, Godino, Arrigo, Fandiño Pinilla, 2003). Eccola in sintesi:

- Un **contenuto** è una porzione limitata di sapere, ristretta ad un certo ambito e limitata ad un certo soggetto, un certo tema specifico, un certo elemento di tale sapere.
- Una **conoscenza** è, allo stesso tempo:
  - la rielaborazione di contenuti in modo autonomo, per raggiungere una meta;
  - il risultato di tale elaborazione.

  Una conoscenza può coinvolgere uno o più contenuti.
- La **competenza** è un concetto complesso e dinamico:
  - complesso perché è l'insieme di due componenti: uso (esogeno) e padronanza (endogena), anche elaborativi, interpretativi e creativi, di conoscenze che collegano contenuti diversi;
  - dinamico: perché la competenza racchiude in sé come oggetto non solo le conoscenze chiamate in causa, ma fattori metaconoscitivi: l'accettazione dello stimolo a farne uso, il desiderio di farlo, il desiderio di completare le conoscenze che si rivelassero, alla prova dei fatti, insufficienti e dunque lo stesso desiderio di aumentare la propria competenza.

Per esempio, fra i pochi automatismi di calcolo che i bambini della scuola elementare devono raggiungere, vi sono sempre state – e continuano ad esserci – le cosiddette *tabelline*. Queste costituiscono un contenuto. Diventano conoscenza quando gli allievi elaborano questa conoscenza. Possono dapprima mettere in relazione la moltiplicazione tra numeri naturali con un'addizione nella quale tutti gli addendi sono uguali.

Così: $5 \cdot 3 = 5+5+5$ oppure $5 \cdot 3=3+3+3+3+3$.

Questa osservazione è importante perché costituisce uno dei due strumenti che permettono di costruire le tabelline. Infatti, se so che $5 \cdot 3=15$ e non mi ricordo il prodotto $5 \cdot 4$, basta che addizioni 5 al 15 e ottengo 20. Chiamo questo modo di fare «metodo additivo».

C'è però un altro strumento che permette di costruire tabelline. Se conosco $5 \cdot 3=15$ e voglio sapere il prodotto $5 \cdot 6$, siccome $6=3 \cdot 2$, basta moltiplicare per 2 il 15 e ottengo $5 \cdot 6=30$. Chiamo questo modo di fare «metodo moltiplicativo».

Inoltre è utile che, già in questa fase, gli allievi conoscano l'automatismo della moltiplicazione per 10 e la scomposizione di un numero in decine e unità (che include ciò che più tardi chiameranno proprietà distributiva). Potranno così facilmente calcolare prodotti oltre il 100. Per esempio:

$26 \cdot 4 = (20 + 6) \cdot 4 = 20 \cdot 4 + 6 \cdot 4 = 80 + 24 = 104.$

Un primo livello di competenza viene raggiunto quando l'allievo, di fronte a una situazione che comprende anche la necessità di eseguire (semplici) moltiplicazioni, decide di calcolare mentalmente, è in grado di scegliere le strategie di calcolo opportune, prova piacere nel calcolare mentalmente e si sente di sfidare un compagno che usa la calcolatrice.

3.2. Matematica viva, matematica inerte

Per chi avesse ancora qualche perplessità…

La matematica è bella. Lo è perché è viva. È viva se la si pratica, non se si è costretti ad assistere a una sua presentazione fatta da un adulto, che si esprime in un linguaggio adulto, giustificato da pretese esigenze di rigore.

La matematica inerte è fatta di paginate di calcoli numerici o letterali, di teoremi completi di ipotesi/tesi/dimostrazione, di teorie fatte di definizioni/lemmi/teoremi.

La matematica viva è alimentata dalla curiosità, dal bisogno di conoscere, dalla necessità di capire il mondo che ci circonda ed è fatta di problemi, di situazioni problematiche, di interrogativi.

La matematica inerte viene subita dall'allievo, il quale anche se riesce a capirne i dettagli tecnici non capisce la necessità di affrontare i vari argomenti, non riesce a dare senso a ciò che sta imparando. In questo senso è significativa la domanda che gli allievi pongono «a che cosa serve tutto ciò?», domanda alla quale qualche insegnante pensa, illudendosi, di poter rispondere con un classico «abbiate pazienza, lo vedrete più tardi».

Vivere la matematica significa educare la mente a pensare in modo razionale, a porsi domande e a cercare di rispondere senza conoscere la soluzione fornita dalla matematica ufficiale; significa sviluppare le capacità di analizzare, di sintetizzare/schematizzare, di tentare soluzioni, di formulare ipotesi, di verificare, di intuire, di creare le proprie immagini mentali dei vari concetti. Significa giungere alla concettualizzazione, alla teorizzazione, alle regole e ai teoremi, che però sono situati alla fine di un percorso e perciò immersi in un contesto che dà loro senso e sostanza.

Vivere la matematica è anche praticarla con piacere, con desiderio di conoscere sempre di più, di raggiungere nuovi livelli di competenza; è sviluppare armoniosamente le capacità potenziali dei giovani; è provare piacere per la ricerca; è preparare i giovani ad affrontare positivamente la complessa realtà del mondo di oggi.

Facciamo in modo che a scuola viva la matematica.

Bibliografia

Arrigo G.
Il calcolo a scuola, ovvero: l'inizio di un cambiamento epocale, Bollettino dei docenti di matematica, nr. 40 maggio 2000, UIM/CDC Bellinzona.

Arrigo G.
Il calcolo a scuola (2): l'uso della calcolatrice, Bollettino dei docenti di matematica, nr. 43 dicembre 2001, UIM/CDC Bellinzona.

Arrigo G., Sbaragli S.
Salviamo la geometria dello spazio!, Carocci editore, Roma, (in corso di pubblicazione)

Bozzolo Colombo C. – Costa A. (a cura di), Collana «*Ricostruiamo la matematica*», «*Nel mondo dei numeri e delle operazioni*» volumi 1-6, «*Nel mondo della geometria*» volumi 1-5, «*Nel mondo della matematica*» volumi 1-2, Erickson, Gardolo – Trento, 2002/3/4.

D'Amore B.
Problemi di matematica nella scuola primaria, Pitagora Editrice, Bologna, 2003.

D'Amore B.
Godino J. D., Arrigo G., Fandiño Pinilla M., *Competenze in matematica*, Pitagora editrice, Bologna, 2003.

2. «…ma la perdita sarebbe stata maggiore del guadagno»

Giorgio T. Bagni[1]

In this paper, we briefly consider the geographical distribution of main mathematical experiences in the History. Some results by S. Ramanujan are presented, in order to present some moments of the life of the great Indian mathematician and to underline the importance of the safeguard of cultural roots, that allow the full expression of the mathematical creativity.

«La formula [di Ramanujan]:

$$\int_0^\infty e^{-3\pi x^2}\frac{\sinh(\pi x)}{\sinh(3\pi x)}dx = e^{-\frac{2\pi}{3}}\sqrt{\frac{1}{3}}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n(n+1)\pi}\left(1+e^{-\pi}\right)^{-2}\left(1+e^{-3\pi}\right)^{-2}\ldots\left(1+e^{-(2n+1)\pi}\right)^{-2}$$

mi dà un'emozione che è indistinguibile da quella che provo quando entro nella Sagrestia Nuova di S. Lorenzo a Firenze e vedo dinanzi a me l'austera bellezza del Giorno, della Notte, del Crepuscolo e dell'Aurora che Michelangelo ha posto sulle tombe di Giuliano e di Lorenzo de' Medici».

George Neville Watson (1886-1965) (cit. in: Chandrasekhar, 1990, p. 101).

La frase che intitola il presente lavoro chiude la presentazione di Godfrey Harold Hardy (1877-1947) al volume *Collected Papers of Srinivasa Ramanujan* (Hardy, Seshu Aiyar & Wilson, 1927), pubblicato a Cambridge nel 1927, appena sette anni dopo la morte di Srinivasa Ayyangar Ramanujan (1887-1920).

Prima di occuparci della vita e dell'opera del grande matematico indiano, esponiamo alcune riflessioni riguardanti la storia e la geografia della Matematica.

1. La storiografia e le grandi tradizioni matematiche

Intorno al 3000 a.C. può essere collocata la prima testimonianza matematica scritta conosciuta: sulla sommità dello scettro di Menes, rappresentante della prima dinastia dei Faraoni, troviamo registrate numericamente alcune prede di guerra: il bottino del Faraone vincitore comprendeva 400 000 buoi, 1 422 000 capre e 120 000 prigionieri (Bunt, Jones & Bedient, 1983)[2]. Da quell'antica testimonianza prendono le

1. Dipartimento di Matematica, Università di Roma «La Sapienza».

2. Ma è corretto limitare lo studio delle radici storiche della Matematica alle testimonianze scritte? G.G. Joseph esprime qualche dubbio: «Per quanto è dato sapere, non è mai esistita una società che non abbia utilizzato qualche forma di conteggio o di riscontro (che

mosse, spesso, i più autorevoli testi di Storia della Matematica: all'Egitto e alla Mesopotamia seguono, come teatro mondiale della ricerca matematica, la Grecia e l'Europa.

In larga parte, la storia della Matematica come oggi la intendiamo è patrimonio della tradizione occidentale: alcuni settori fondamentali della Matematica contemporanea si sono sviluppati in ambito europeo, come l'Analisi[3]. Per questo motivo le opere storiche generali sulla Matematica riservano alla tradizione ellenica ed europea la maggiore attenzione; altre tradizioni culturali vengono comunque segnalate e studiate: si parla così della Matematica araba, della Matematica indiana, della Matematica cinese, della Matematica dell'America precolombiana.

Una valutazione sommaria dello «spazio» concesso da alcuni celebri trattati di storia della Matematica alle tradizioni extraeuropee può essere ricavata dalla tabella seguente, in cui abbiamo riportato le percentuali delle pagine dedicate ad alcune grandi tradizioni matematiche rispetto al totale delle pagine dell'opera (il riferimento è alle traduzioni italiane, se disponibili):

	Matematica cinese	Matematica indiana	Matematica araba	Matematica dell'America precolombiana
Loria (1933)	3%	2%	2%	–
Struik (1948)	1%	1%	1%	–
Boyer (1968)	1%	3%	4%	cenni
Kline (1972)	–	1%	1%	–
Anglin (1994)	1%	2%	2%	–

non abbia cioè accompagnato una raccolta di oggetti con gruppi di segni facilmente manipolabili, quali pietre, nodi, o intagli su legno o su ossa). Se definiamo la Matematica come un'attività che scaturisce da concetti relativi a configurazioni numeriche o spaziali ovvero contribuisce a generarli e li impiega in connessione con qualche forma di logica, possiamo legittimamente includere nel nostro studio la proto-matematica, che esisteva quando non erano ancora disponibili forme di registrazione scritta» (Joseph, 2000, p. 38).

3. Tuttavia alcuni importanti contributi delle tradizioni matematiche extraeuropee non dovrebbero essere trascurati: ad esempio, in Brahmagupta (VII-VIII secolo), in Mahavira (IX secolo) ed in Bhaskara (1114-1185) troviamo alcune regole di calcolo con lo zero: «Bhaskara, parlando di una frazione il cui denominatore è uguale a 0, dice che questa frazione rimane la stessa qualunque cosa le si aggiunga o le si sottragga, proprio come nessun mutamento ha luogo nella Divinità immutabile quando vengono creati o distrutti dei mondi. Un numero diviso per zero, aggiunge, viene chiamato una quantità infinita» (Kline, 1991, I, p. 216). Importante è anche il contributo dell'Astronomia indiana: la considerazione del moto istantaneo della Luna per determinare i momenti esatti in cui si verificano le eclissi portò Brahmagupta e più ancora Manjula (operante intorno al 930 d.C.) a considerare alcune quantità dal punto di vista differenziale.
Circa un secolo più tardi, Bhaskara utilizzò la formula che scriveremmo modernamente: $d(\sin x) = \cos x\, dx$ e nel proprio *Siddhanta Siromani* si mostrò consapevole che quando una variabile raggiunge il valore massimo il suo differenziale si annulla (alcune sue annotazioni possono essere interpretate in analogia con il teorema di Rolle, del 1691: Joseph, 2000, pp. 294-295). Una menzione meritano infine gli sviluppi in serie infinite presenti in opere cinesi tra il XVII ed il XVIII secolo, ad esempio di Mei Wending e di suo nipote Mei Juecheng (1681-1763: Martzloff, 1997, p. 353). Possiamo, dunque, concludere che nell'ambito della Matematica orientale si è sviluppato un Calcolo infinitesimale propriamente detto? Tale affermazione, sulla base delle conoscenze disponibili, sarebbe azzardata. Ma altrettanto discutibile sarebbe ignorare completamente i contributi orientali ad uno dei settori più importanti della Matematica.

Sebbene i dati precedenti siano soltanto indicativi, non possiamo non notare che la presenza delle tradizioni matematiche diverse da quella occidentale è estremamente contenuta[4]. Tuttavia un esame obiettivo della storia della Matematica prova che la nostra disciplina non può essere considerata patrimonio esclusivo di una sola tradizione culturale.

2. Contatti e «contaminazioni»

Se non è difficile riconoscere che i più elevati risultati della Matematica contemporanea sono maturati nell'ambito della cultura occidentale, infatti, è parallelamente indispensabile rendersi conto che la storia della Matematica non può non essere concepita in termini di evoluzione delle diverse istituzioni culturali e dunque delle varie tradizioni. La considerazione e la piena valorizzazione di tali diversità appare elemento essenziale per comprendere correttamente la ricchezza di tradizioni che talvolta sono troppo frettolosamente considerate secondarie (e tali considerazioni, come vedremo, hanno ruoli importanti anche in ambito didattico).

Inoltre, proprio l'interazione di tradizioni matematiche diverse ha reso possibili, sia nei secoli passati che recentemente, alcuni momenti di crescita straordinariamente importanti. Sarebbe difficile immaginare lo sviluppo della Matematica occidentale senza il formidabile impulso determinato dalla diffusione della notazione numerica posizionale, introdotta nell'Europa medievale dalla semisconosciuta Matematica indiana grazie alla mediazione degli studiosi mediorientali. Come sarebbe imbarazzante pensare all'irreparabile impoverimento della Matematica mondiale che sarebbe stato causato dalla perdita di quei capolavori del mondo antico che tutti noi abbiamo potuto conoscere ed apprezzare solo grazie all'opera dei traduttori arabi (Kline, 1991, I).

Notiamo poi che l'interazione di tradizioni culturali diverse non è storicamente avvenuta, né può realizzarsi ai giorni nostri, attraverso semplici contatti istituzionali o, comunque, senza il diretto coinvolgimento personale di singoli soggetti: pensatori, ricercatori, docenti, studenti, divulgatori. È proprio mediante il confronto diretto, infatti, che vengono a crearsi le condizioni per stimolare il dialogo più fecondo e quindi per ottenere un reciproco arricchimento[5]. Ma tale situazione richiede che venga

4. Tuttavia le stesse tradizioni culturali extraeuropee sono talvolta studiate con riferimento primario, se non esclusivo, ad alcune aree principali; nota ad esempio G.G. Joseph: «Negli studi sulla Matematica araba vi è una tendenza a confinare l'attenzione alle attività che si svolsero intorno al Medio Oriente e alla Spagna e a ignorare il lavoro che fu condotto, nell'ambito della tradizione islamica, nell'Africa settentrionale e occidentale, cioè in quell'ampia regione del Nord-Ovest definita col nome di Maghreb» (Joseph, 2000, p. 416). Anche la matematica ebraica produsse risultati significativi. In termini del tutto analoghi, notiamo che sarebbe opportuno e interessante lo studio delle tradizioni matematiche che si sono sviluppate in aree geografiche influenzate dalla Matematica cinese, come la Corea, il Giappone, la Mongolia, il Tibet e il Vietnam (Martzloff, 1997, pp. 105-110; Needham, 1985). Per quanto riguarda la geografia della Matematica, dunque, sono ancora molte le terre che attendono di essere esplorate.
5. Un ricco volume curato da Jean-Luc Chabert (pubblicato in francese nel 1994 e in inglese nel 1999) è dedicato alla storia degli algoritmi. Nel brano seguente viene evidenziata l'importanza della diffusione geografica dei principali algoritmi elementari: «Dato che la trasmissione degli algoritmi è avvenuta in conseguenza di contatti tra persone, e necessariamente in termini casuali, quelli che sono ricordati e che si sono sviluppati non

salvaguardata ed apprezzata l'identità di tutti i soggetti a qualsiasi titolo coinvolti: dunque è indispensabile creare le condizioni, dai punti di vista propriamente scientifico, ma anche generalmente culturale e sociale, per il mantenimento di tale identità.

Illustreremo quanto ora affermato ripercorrendo brevemente la vicenda di un grande matematico del XX secolo: Srinivasa Ayyangar Ramanujan.

3. Un brahmano a Cambridge

Gli eccezionali risultati di Ramanujan possono essere apprezzati soltanto da pochi specialisti in tutto il mondo. Ma la sua breve, straordinaria vita affascina anche i non addetti ai lavori: pressoché autodidatta, si formò inizialmente sulla *Synopsis* di G.S. Carr, un compendio (non molto avvincente, ha osservato qualche storico) di risultati elementari nella Matematica pura ed applicata; con notevoli difficoltà riuscì ad ottenere un oscuro posto di contabile e continuò a dedicarsi allo studio della Matematica, senza seguire un percorso di ricerca accademicamente riconosciuto.

Tuttavia il giovane impiegato di Madras sentiva l'urgente bisogno di confrontarsi con gli esponenti di quella comunità scientifica internazionale la cui importanza riusciva appena a intravvedere: scrisse ad alcuni dei più influenti matematici dell'inizio del secolo, a Cambridge; ma alcuni degli studiosi interpellati (H.F. Baker ed E.W. Hobsen) non ritennero opportuno rispondergli. G.H. Hardy, invece, rispose a Ramanujan, colpito dagli incredibili risultati intuiti dallo sconosciuto matematico dilettante, privi di una rigorosa dimostrazione tradizionale eppure eccezionalmente stimolanti e promettenti. Iniziò così una delle più feconde collaborazioni che la storia della Matematica ricordi, collaborazione resa possibile dal viaggio di Ramanujan in Inghilterra, fermamente voluto da Hardy, e dal successivo quinquennio di permanenza del matematico indiano a Cambridge.

La storia di Srinivasa Ramanujan non è solo una storia di grandi risultati matematici: è anche un'emozionante avventura umana, caratterizzata dal confronto di uomini come Ramanujan ed Hardy, vere personificazioni, rispettivamente, di intuizione e di rigore. Un'avventura caratterizzata dall'interazione di due realtà scientifiche e più in generale culturali per molti versi opposte, quella indiana e quella inglese dell'inizio del XX secolo, che tuttavia riuscirono a parlarsi, a capirsi, dunque a crescere insieme: e che si integrarono perfettamente attraverso le figure-simbolo dei due matematici, sotto le ricche volte del Trinity College, negli anni tristi della Prima Guerra Mondiale.

Il genio di Ramanujan ottenne infine il pieno riconoscimento a livello internazionale: lo sconosciuto contabile, «il povero e solitario indù che contrapponeva il suo ingegno alla tradizione della saggezza europea» (nelle parole di Hardy) giunse ad essere nominato *Fellow* della Royal Society, il massimo onore per uno scienziato dell'area culturale britannica, uno dei titoli più ambiti del mondo. Ma la sua vicenda umana si avviava ad una prematura conclusione: la sua salute peggiorò, forse minata dalla tu-

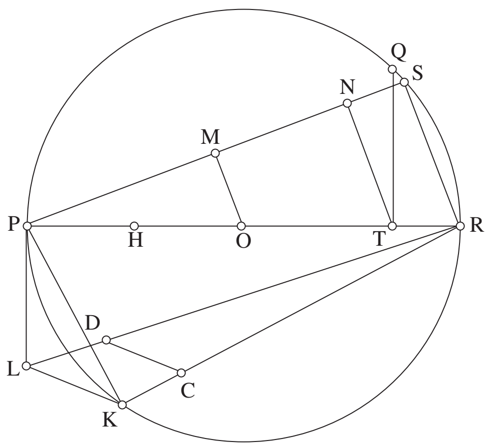
sono necessariamente i più rilevanti (dal nostro punto di vista), ma quelli meglio compresi e più diffusi nei periodi considerati. Un metodo algoritmico riscuote un buon successo quando le tecniche impiegate corrispondono alle necessità del tempo» (Chabert, 1999, p. 7, traduzione di G.T. Bagni). Dal brano emerge con forza il ruolo essenziale delle «persone» nella stessa elaborazione del pensiero matematico e nella sua trasmissione.

bercolosi. Poco dopo il ritorno in patria, Ramanujan morì: non aveva ancora compiuto trentatré anni.

Srinivasa Ramanujan è un uomo che ha liberamente accettato il confronto aperto con un mondo scientifico e culturale immenso e radicalmente diverso dal proprio; che ha scelto di discutere, sorretto solo della propria straordinaria intuizione, con gli studiosi formati nelle più rigorose scuole matematiche del mondo occidentale. Ma che mai ha rinunciato al proprio modo di ricercare e di argomentare tutt'altro che ortodosso, alle proprie radici, al ricordo delle esperienze matematiche dei propri grandi compatrioti, come gli antichi Aryabhata, Brahmagupta e Bhaskara. Dunque al proprio essere Indiano.

4. Una ricerca geometrica di Ramanujan

Presenteremo ora alcuni risultati di Ramanujan. Il primo è collegato all'antico problema della quadratura del cerchio; nell'articolo *Squaring the Circle*, pubblicato nel 1913 (e riedito in: Hardy, Seshu Aiyar & Wilson, 1927, p. 22), Ramanujan scrive:



«Dato il cerchio di centro O e diametro PR, sia H punto medio di PO e T tale che OT=2TR. Sia TQ la semicorda perpendicolare a PR e RS corda tale che RS=TQ.

Siano M, N punti di PS in modo che OM e TN siano parallele a RS. Si traccino come nella figura la corda PK=PM, la tangente PL=MN e i segmenti RL, LK, KR. Sia RC=RH. Si conduca infine la parallela CD a KL che incontra RL nel punto D.

Allora il quadrato costruito su RD sarà approssimativamente equivalente al cerchio assegnato» (Ramanujan, 1913, p. 132, traduzione di G.T. Bagni).

Posto dunque PR = d, l'Autore nota che:

$$RS^2 = \frac{5}{36} d^2$$

quindi:

$$PS^2 = \frac{31}{36} d^2$$

e dall'uguaglianza di PL e PK a MN e PM rispettivamente segue che:

$$PK^2 = \frac{31}{144} d^2 \qquad e \qquad PL^2 = \frac{31}{324} d^2$$

pertanto:

$$RK^2 = PR^2 - PK^2 = \frac{113}{144} d^2$$

nonché:

$$RL^2 = PR^2 + PL^2 = \frac{355}{324} d^2$$

A questo punto, essendo:

$$\frac{RK}{RL} = \frac{RC}{RD} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{113}{355}} \qquad e \qquad RC = \frac{3}{4} d$$

risulta infine:

$$RD = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{355}{113}}, \text{ molto vicino a } \frac{d}{2}\sqrt{\pi}.$$

Infatti:

$$\frac{355}{113} = 3{,}14159292$$

e la sua differenza da π è 0,00000026... Lo stesso Ramanujan osserva, in una nota, che «se l'area del cerchio considerato è di 140000 miglia quadrate, allora RD risulta una valutazione per eccesso di circa un pollice» (Ramanujan, 1913, p. 132).

Osserviamo che, dal punto di vista numerico, il valore

$$\frac{355}{113}$$

può essere desunto dalle ricerche di Tolomeo e di Aryabhata e può essere ricavato dallo sviluppo di π in frazione continua (Struik, 1981, p. 106). Tutto ciò ovviamente non sminuisce il valore della bella costruzione geometrica di Ramanujan, la cui semplicità consentirebbe una presentazione didattica anche a livello della scuola secondaria!

Osserviamo infine che la ricerca di approssimazioni di π (un classico tema dell'antica ricerca matematica orientale, dalla Cina all'India; si veda: Needham, 1985; Martzloff, 1997; Joseph, 2000) compare in molti altri lavori di Ramanujan; un'altra interessante approssimazione è ad esempio:

$$\left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{\frac{1}{4}} = 3{,}14159265262\ldots$$

che l'Autore afferma di avere ricavato «empiricamente» (Hardy, Seshu Aiyar & Wilson, 1927, p. 35).

5. Ramanujan e la Teoria dei Numeri

Molte ricerche di Ramanujan sono collegate alla Teoria dei Numeri (Weil, 1994)[6]. Concetti e tecniche presenti in molti enunciati e nelle dimostrazioni rendono però improponibile la completa considerazione dei risultati del matematico indiano ai non specialisti. Presentiamo però in termini generali un lavoro interessante (*Proceedings of the London Mathematical* Society, 2, XVI, 17, in: Hardy, Seshu Aiyar & Wilson, 1927, pp. 242-243) che trae ancora una volta spunto da osservazioni empiriche.

Il rilevamento pratico di una regolarità offre infatti l'occasione per la ricerca: alcuni numeri naturali sono il prodotto di molti fattori relativamente piccoli (l'Autore indica tali numeri con il termine *round numbers*); ad esempio $1200 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$. Ma una verifica «empirica» mostra che tali numeri sono rari (e «tale fatto può essere verificato da chiunque faccia pratica di scomposizione in fattori primi di numeri osservati a caso, come numeri di taxi o di vetture ferroviarie», osserva lo stesso Ramanujan in: Hardy, Seshu Aiyar & Wilson, 1927, p. 242). Per spiegare matematicamente tale fenomeno, l'Autore dimostra un risultato che riprende alcuni precedenti studi di Edmund Landau (1887-1938).

Premettiamo un'annotazione terminologica. Si considerino tutti i numeri naturali n non superiori a x e sia x_P il numero di essi che godono della proprietà P. Se al tendere di x all'infinito il rapporto x_P/x tende a 1, diciamo che *quasi tutti i numeri hanno la proprietà P*. Ramanujan dimostra allora che:

quasi tutti i numeri naturali n sono il prodotto:

- di più di $\log(\log n) - \Phi(n)\sqrt{\log(\log n)}$ fattori primi
- e di meno di $\log(\log n) + \Phi(n)\sqrt{\log(\log n)}$ fattori primi

dove $\Phi(n)$ è una funzione che tende all'infinito al tendere all'infinito di n.

Dato che la funzione log(log n) tende all'infinito con estrema lentezza, il risultato spiega l'osservazione empirica precedentemente descritta.

Come valutare l'approccio di Ramanujan alla Matematica? Scrive George Gheverghese Joseph:

«Lo stile di Ramanujan nel fare Matematica era molto diverso da quello del matematico tradizionale, allenato al metodo di dimostrazione deduttivo assiomatico. Secondo i resoconti della moglie e degli stretti collaboratori, egli faceva grande uso di una lavagna sulla quale annotava e cancellava in continuazione quelle che sua moglie chiamava *addizioni*, per poi trasferire qualche risultato finale nel suo taccuino, quando era soddisfatto delle conclusioni. Non sentiva alcun obbligo di dimostrare che i risultati fossero esatti: ciò che gli premeva di più erano i risultati stessi» (Joseph, 2000, p. 12).

6. Nella ricerche di Teoria dei Numeri di Ramanujan non si rileva alcuna particolare prospettiva di tipo applicativo: «Ciò che rende l'opera di Ramanujan così affascinante non è la prospettiva di un suo uso nella soluzione dei problemi del mondo reale, bensì la sua ricchezza, la sua bellezza e il suo mistero: la sua grazia matematica pura e semplice» (Kanigel, 2003, pp. 349-350).

Nel brano seguente, Godfrey Harold Hardy ricorda il collega indiano con ammirazione e rispetto, e riconosce che una formazione tradizionale avrebbe portato Ramanujan al raggiungimento di risultati scientifici di eccezionale livello:

«Mi è stato frequentemente chiesto se Ramanujan avesse qualche speciale segreto, se i suoi metodi differissero da quelli degli altri matematici; se ci fosse qualcosa di davvero anomalo nel suo modo di ragionare. (...) La sua capacità di gestire le formule algebriche, le trasformazioni di serie infinite e via di seguito era davvero sorprendente. Da questo punto di vista mai ebbi occasione di incontrare un matematico della sua abilità, e potrei pensare di confrontarlo solo con Euler o con Jacobi. Operava, in misura ben maggiore di quanto non facciano gli altri matematici di oggi, per induzione partendo da esempi numerici: tutte le sue proprietà di congruenza per le partizioni, ad esempio, sono state scoperte così. (...) I risultati di Ramanujan non hanno la semplicità e l'universalità proprie delle grandi opere: la loro importanza sarebbe maggiore se minore fosse la loro stranezza. Un pregio che nessuno può negare ad essi è la loro profonda, inarrivabile originalità. Forse egli sarebbe stato un matematico più grande se fosse stato formato, inquadrato da giovane. Avrebbe scoperto molte cose nuove, e di grande importanza. Del resto in questo caso sarebbe diventato più un professore europeo e meno Ramanujan. Ma la perdita sarebbe stata maggiore del guadagno» (Hardy, Seshu Aiyar & Wilson, 1927, pp. XXXV-XXXVI).

Condividiamo senza alcuna riserva la conclusione di Hardy.

6. Riflessioni didattiche

Quanti potenziali Ramanujan hanno preferito trasformarsi nella figura tradizionale del ricercatore occidentale? E, facendo ciò, quanti hanno costretto la propria intuizione entro binari che hanno finito per limitare o per sterilizzare le naturali, originali capacità? Non intendiamo ovviamente dare delle risposte categoriche a questi interrogativi: non abbiamo elementi per farlo in termini generali[7]. Certamente però le influenze culturali della tradizione indiana furono fondamentali per garantire l'originalità delle ricerche e dei risultati di Ramanujan: egli riuscì a restare se stesso, anche di fronte agli stimoli di una tradizione matematica antica e potente come quella occi-

7. La storia della Matematica fornisce molti altri esempi di studiosi che, per motivi diversi, si sono trovati a vivere esperienze di confronto prolungato con tradizioni culturali diverse. Le conseguenze derivate da tali situazioni possono essere state ovviamente varie: in alcuni casi le difficoltà hanno ostacolato l'opera dei soggetti interessati; in altri si possono invece riscontrare straordinarie possibilità di arricchimento culturale e di stimolo. Un esempio estremamente interessante è costituito dal soggiorno del ventitreenne André Weil (1906-1998) nella città indiana di Aligarh, non lontana da Delhi: dopo la formazione all'École Normale, l'esperienza indiana si rivelerà per il giovane matematico un'occasione preziosa sia dal punto di vista umano che da quello della produzione scientifica: la «nuova teoria delle funzioni di più variabili complesse», nata proprio ad Aligarh durante uno stato «di lucida esaltazione nei quali i pensieri si concatenano come per miracolo» esercitò «un ruolo di importanza pressoché cruciale» in importanti settori della Matematica del Novecento (si veda: *Ricordi di apprendistato*, l'autobiografia di André Weil pubblicata nel 1991 e nel 1994 in traduzione italiana: Weil, 1994, pp. 98-99).

dentale[8]. Osservazione come le precedenti possono essere utilmente riproposte in chiave didattica. La rivalutazione dell'impostazione multiculturale sta infatti assumedo, per quanto riguarda specificamente la Matematica, importanza crescente nel panorama della ricerca contemporanea. Molti convegni internazionali riservano a tali questioni spazi sempre più rilevanti: faremo ad esempio riferimento a *Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues*, sezione curata da Lucia Grugnetti e da Leo Rogers in *History in Mathematics Education. The ICMI Study* (Fauvel & van Maanen, 2000, pp. 39-62; nel seguito le traduzioni sono nostre)[9]:

«Nel XX secolo si sono verificati cambiamenti molto significativi nel modo di considerare i contributi delle diverse culture alla nostra storia. È importante che la Matematica, come ogni altra disciplina, sia sensibile a queste nuove istanze. Mostrare come il pensiero matematico si sia sviluppato nelle differenze culture, come risposta alle necessità ed alle idee presenti in società diverse, non solo rende possibile una più profonda comprensione dei concetti matematici, ma incoraggia una maggiore creatività nella loro applicazione in settori diversi. Una storia che mostri la diversità, piuttosto che l'universalità, dello sviluppo matematico aggiunge una dimensione stimolante alla disciplina stessa. In particolare, rende possibile l'ingresso in classe del mondo e della sua storia, in modo da contrastare ogni ristretta visione etnocentrica» (Fauvel & van Maanen, 2000, p. 46).

Certamente la storia della Matematica fornisce importanti opportunità di considerare situazioni ed elementi tratti da culture diverse e di proporre efficacemente tali contributi agli allievi, nei vari livelli scolastici (citiamo ad esempio: Fauvel & van Maanen, 1997; Furinghetti, 1993; Furinghetti & Somaglia, 1997; Grugnetti, 2000; Pepe 1990; Swetz, 1989 e 1995). Tuttavia è indispensabile preparare adeguatamente tale introduzione, in particolare senza mai dimenticare la precisazione dei rispettivi contesti[10].

8. Citiamo ancora G.G. Joseph: «In che misura le influenze culturali hanno determinato la scelta delle materie e dei metodi di Ramanujan? A questo proposito è interessante il fatto che Ramanujan appartenga alla casta dei brahmani Ayyangar dei Tamil Nadu dell'India meridionale, un gruppo che godeva di uno status sociale elevato grazie alla sua tradizionale erudizione ed ai suoi costumi religiosi. Con questo retroterra culturale l'inclinazione di Ramanujan ad attribuire le sue scoperte all'intervento della dea di famiglia, Namagiri, appare comprensibile. (...) Il carattere matematico occidentale trova difficile venire a patti con gli elementi speculativi, extrarazionali e intuitivi della formazione di Ramanujan. Ad un altro livello, l'esempio di Ramanujan mostra indubbiamente che in campo matematico anche chi è stato istruito ed allevato secondo tradizioni e in ambienti decisamente estranei alla società occidentale può raggiungere dei risultati eccellenti» (Joseph, 2000, p. 13).
9. La sezione *Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: from philogenesis and ontogenesis theory to classroom practice*, curata da Fulvia Furinghetti e da Luis Radford in *Handbook of International Research in Mathematics Education*, edito da Lyn English (Furinghetti & Radford, 2002), è un ulteriore significativo esempio dell'attenzione con cui la ricerca internazionale segue le questioni presentate.
10. Un'osservazione importante riguarda il linguaggio: «Non è sempre semplice tradurre la Matematica europea nel linguaggio delle popolazioni indigene. Ad esempio, in inglese il termine *uguale* ha significati differenti se considerato nell'ambito dei numeri o in quello degli insiemi. In alcune lingue si usa la stessa parola per indicare molte relazioni (eguale, congruente, equivalente, simile) e dunque la traduzione del linguaggio matematico può comportare problemi» (Fauvel & van Maanen, 2000, p. 48).

A tale proposito citiamo ancora L. Grugnetti e L. Rogers:

«Ad esempio, alcune etichette come *etnomatematica* o *la matematica delle donne* sono spesso utili per sottolineare l'importanza di settori particolari, ma potrebbero portare a situazioni di radicalizzazione con il pericolo di isolare certi gruppi dalla più ampia comunità matematica" (Fauvel & van Maanen, 2000, p. 50).

Dunque l'inserimento dei contributi collegati alle varie culture nella comunità matematica deve scongiurare rischi per molti versi opposti: da un lato, l'inglobamento di una comunità culturale in un'altra, o nella cosiddetta *comunità internazionale*, con le conseguenti perdite di originalità che possono portare addirittura a fenomeni di sterilizzazione; ma d'altro canto deve essere evitato che la proclamazione delle diversità sia causa dell'isolamento culturale di un gruppo. Il confronto dialettico tra gruppi di ricercatori e di studenti appartenenti a tradizioni diverse può invece, come ricordato, portare al reciproco sostanziale arricchimento, allo stimolo di una visione generale ben più ampia ed articolata che risulta certamente più feconda.

La crescente attenzione da parte della comunità scientifica internazionale testimoniata dalle precedenti citazioni non esaurisce, naturalmente, il problema: la creazione di una società in cui i contributi delle varie culture siano visti come autentici arricchimenti resta naturalmente un procedimento lungo e difficoltoso, anche dal punto di vista sociale ed economico[11]. Ma riteniamo che un corretto approccio culturale alle molte questioni coinvolte, un approccio ad esempio che tragga origine dal mondo della scuola e che nel mondo della scuola possa radicarsi, costituisca una premessa importante per la nascita di una generale mentalità tesa a valorizzare «la diversità, piuttosto che l'universalità» (Fauvel & van Maanen, 2000, p. 46).

11. Segnaliamo infine l'importanza dello studio delle caratteristiche dei differenti contesti politici in cui l'educazione matematica si sviluppa oggi nei paesi del mondo (di particolare interesse, ad esempio, può essere il confronto tra i programmi scolastici). A tale riguardo si potrà fare riferimento a *The political context*, sezione curata da Florence Fasanelli nel citato volume *History in Mathematics Education. The ICMI Study* (Fauvel & van Maanen, 2000, pp. 1-38). F. Fasanelli osserva: «La gente ha studiato, imparato, utilizzato la Matematica per più di quattromila anni, sebbene sia solo relativamente da poco tempo che la Matematica viene insegnata, in molti paesi, ad una rilevante parte della popolazione. Con la diffusione dell'istruzione, maggiore attenzione viene specificamente dedicata a che cosa viene insegnato ed ai motivi di tali scelte. Queste decisioni sono in ultima analisi di carattere politico, influenzate da molti fattori tra i quali l'esperienza degli insegnanti, le attese dei genitori e dei datori di lavoro, il contesto sociale» (Fauvel & van Maanen, 2000, p. 1; la traduzioni è nostra).

Anglin, W.S.
Mathematics. A Concise History and Philosophy, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 1994.

Boyer, C.B.
Storia della Matematica, Mondadori, Milano (edizione originale: *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York 1968), 1982.

Bunt, L.N.H; Jones, P.S. & Bedient, J.D
Le radici storiche della Matematiche elementari, Zanichelli, Bologna, 1983.

Chabert, J.-L. (a cura di)
A History of Algorithms. From the Pebble to the Microchip, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg (edizione originale: *Histoire d'algorithmes. Du caillou à la puce*, Éditions Belin, Paris 1994), 1998.

Chandrasekhar, S.
Verità e bellezza, Garzanti, Milano, 1990.

Fauvel, J. & van Maanen, J.
Storia e didattica della matematica, *Lettera Pristem*, 23, 8-13, 1997.

Fauvel, J. & van Maanen, J. (a cura di)
History in Mathematics Education. The ICMI Study, Kluwer, Dodrecht, 2000.

Furinghetti, F. & Radford, L.
Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: from philogenesis and ontogenesis theory to classroom practice, English, L. (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 631-654, Lawrence Erlbaum, New Jersey, 2002.

Furinghetti, F. & Somaglia, A.
Storia della matematica in classe, *L'educazione matematica*, XVIII, V, 2, 1, 1997.

Furinghetti, F
Insegnare matematica in una prospettiva storica, *L'educazione matematica*, III, IV, 123-134, 1993.

Grugnetti, L.
The history of Mathematics and its Influence on Pedagogical Problems, Kats, J. (Ed.), *Using History to Teach Mathematics. An International Perspective*, The Mathematical Association of America, 29-35, 2000.

Hardy, G.H.; Seshu Aiyar, P.V. & Wilson, B.M.
Collected Papers of Srinivasa Ramanujan, University Press, Cambridge, 1927.

Joseph, G.G.
C'era una volta un numero. La vera storia della Matematica, Il Saggiatore, Milano (edizione originale: *The Crest of the Peacock. Non-European Roots of Mathematics*, 1991), 2000.

Kanigel, R.
L'uomo che vide l'infinito. La vita breve di Srinivasa Ramanujan, genio della Matematica, Rizzoli, Milano (edizione originale: 1991), 2003.

Kline, M.
Storia del pensiero matematico, I-II, Einaudi, Torino (edizione originale: *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Un. Press, New York 1972), 1991.

Loria, G.
Storia delle Matematiche dall'alba delle civiltà al tramonto del secolo XIX, Sten, Torino (riedizione: Hoepli, Milano 1950; ristampa anastatica: Cisalpino-Goliardica, Milano 1982), 1929-1933.

Martzloff, J.-C.
A History of Chinese Mathematics, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg (edizione originale francese: *Histoire des Mathématiques chinoises*, Masson, Paris 1987), 1997.

Needham, J.
Scienza e civiltà in Cina, III, La Matematica e le scienze del cielo e della terra, I, Matematica e astronomia, Einaudi, Torino (edizione originale: *Science and civilisation in China*, Cambridge University Press 1959), 1985.

Pepe, L.
Storia e didattica della matematica, *L'educazione matematica*, III, I-2, 23-33, 1990.

Ramanujan, S.
Squaring the Circle, *Journal of the Indian Mathematical Society*, V, 132, 1913.

Struik, D.J.
Matematica: un profilo storico, Il Mulino, Bologna (edizione originale: *A Concise History of Mathematics*, Dover, New York 1948), 1981.

Swetz, F.J.
Using problems from the history of mathematics in classroom instruction, *Mathematics Teacher*, 82, 370-377, 1989.

Swetz, F.J.
To know and to teach: mathematical pedagogy from a historical context, *Educational Studies in Mathematics*, 29, 73-88, 1995.

Weil, A.
La teoria dei numeri, Einaudi, Torino, 1994.

3. Contenimento di spesa[1]

Giorgio Mainini

The article illustrates some interesting alternatives to the linear cut in public expenditures, nowadays so often made by either private enterprises or the State. The purpose is to show how the same amount of money can be saved through more intelligent and responsible policies.

Immaginiamo che una ditta abbia 10 dipendenti, che ricevono i seguenti stipendi annui:

Dipendente	**Stipendio**
D1	56000.–
D2	60000.–
D3	62000.–
D4	65000.–
D5	66000.–
D6	72000.–
D7	77000.–
D8	81000.–
D9	84000.–
D10	97000.–
Totale	720000.–

Per motivi che il lettore può immaginare, il Consiglio d'Amministrazione (CdA) decide che la massa salariale è eccessiva e che va ridotta, poniamo del 10%.

Siccome i consiglieri non sono ferratissimi in matematica (e non solo…), la decisione è semplice: taglio «lineare» del 10%. Cioè, come avrebbe detto mia mamma, ogni stipendio viene decurtato del 10%.

1. Qualche lettore potrebbe sospettare che il presente contributo abbia a che fare con scelte operate in un Cantone a noi caro. L'autore desidera rassicurarlo: i suoi sospetti non sono necessariamente privi di fondamento.

La tabella precedente diventa dunque

Dipendente	**Stipendio vecchio**	**Taglio**	**Stipendio nuovo**
D1	56000.–	5600.–	50400.–
D2	60000.–	6000.–	54000.–
D3	62000.–	6200.–	55800.–
D4	65000.–	6500.–	58500.–
D5	66000.–	6600.–	59400.–
D6	72000.–	7200.–	64800.–
D7	77000.–	7700.–	69300.–
D8	81000.–	8100.–	72900.–
D9	84000.–	8400.–	75600.–
D10	97000.–	9700.–	87300.–
Totale	720000.–	72000.–	648000.–

Il sindacalista che rappresenta i dipendenti, chiamiamolo L, però, non è d'accordo: secondo lui non è giusto tagliare tutti gli stipendi della stessa percentuale, per questo e per quest'altro motivo. Messo di fronte all'osservazione che, se non si taglia il 10%, la ditta deve procedere a licenziamenti, L propone di tagliare sì la massa salariale di 72000 Fr., ma in modo progressivo. Con ciò egli intende che, quanto maggiore è lo stipendio di un dipendente, tanto maggiore deve essere la percentuale di taglio. «Molto bene», gli risponde la controparte, «si può discutere, ma *di quanto* dovrà crescere la percentuale, "salendo" nella scala degli stipendi?». L, che a sua volta non è, in matematica, un fulmine di guerra, si è rivolto all'autore, che si è dato da fare: ecco il risultato delle sue pensate.

Premessa

La soluzione dipende da parecchi fattori: come sono distribuiti gli stipendi? Sono tutti diversi o si possono raggruppare in classi? Crescono seguendo una qualche regola o no? L'incremento di percentuale deve essere costante o deve essere proporzionale agli stipendi corrispondenti? E altro ancora. Siccome le risposte possibili sono veramente troppe, l'autore ha operato delle scelte e le ha presentate a L.

In ogni caso, bisogna tener conto che, nell'ipotesi iniziale del CdA, se α è la percentuale fissa e se gli stipendi degli n dipendenti sono $s_1, s_2, \ldots, s_n$, il taglio totale sarà

$$\alpha\, s_1 + \alpha\, s_2 + \ldots + \alpha\, s_n = \alpha\,(s_1 + s_2 + \ldots + s_n) = \alpha\, S$$
(con $s_{j+1} > s_j$ per tutti gli j)

Qualsiasi soluzione deve garantire che il valore $\alpha \cdot S$ sia mantenuto.

Variante 1

Tutti gli stipendi sono diversi fra loro.

I casi considerati sono descritti dalla seguente tabella:

		Crescita degli stipendi		
		Progr. aritm.	Progr. geom.	Senza regole
Crescita delle percentuali	Progr. aritm.	Caso 1	Caso 4	Caso 7
	Progr. geom.	Caso 2	Caso 5	Caso 8
	Proporzionale	Caso 3	Caso 6	Caso 9

Nel seguito gli a_j indicheranno sempre le percentuali di taglio dei rispettivi s_j.

Caso 1
Caratteristica:
$s_{j+1} = s_j + f \quad , \quad s_1 = b$
$a_{j+1} = a_j + d \quad , \quad a_1 = t$

Si ha

$$a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 + ... + a_n s_n = t b + (t + d)(b + f) + (t + 2 d)(b + 2 f) + ... + [t + (n-1) d][b + (n-1) f] =$$
$$= t b + t b + t f + d b + d f + t b + 2 t f + + 2 d b + 4 d f + ... + t b + (n-1) t f + (n-1) d b + (n-1)^2 d f =$$
$$= n t b + t f [1 + 2 + ... + (n-1)] + d b [1 + 2 + ... + (n-1)] + d f [1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2] =$$
$$= n t b + t f \sum_{j=1}^{n-1} j + d b \sum_{j=1}^{n-1} j + d f \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \alpha S$$

da cui

$$d \left(b \sum_{j=1}^{n-1} j + f \sum_{j=1}^{n-1} j^2 \right) = \alpha S - n t b - t f \sum_{j=1}^{n-1} j$$

e infine

$$d = \frac{\alpha S - n t b - t f \sum_{j=1}^{n-1} j}{b \sum_{j=1}^{n-1} j + f \sum_{j=1}^{n-1} j^2}$$

Si ricordi che

$$\sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{2}$$

e che

$$\sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

Visto questo risultato, L ha pensato che, se l'avesse mostrato al CdA, sarebbe stato immediatamente ricoverato. Allora, per il bene suo e per quello del dipendente D_1, con lo stipendio minimo, ha pensato di porre una condizione supplementare: a D_1 lo stipendio non va decurtato, il che equivale a dire che deve essere $t = 0$.

La formula per d diventa, in tal caso

$$d = \frac{\alpha S}{b \sum_{j=1}^{n-1} j + f \sum_{j=1}^{n-1} j^2}$$

Caso 2

Caratteristica:

$s_{j+1} = s_j + f \quad , \quad s_1 = b$

$a_{j+1} = k\, a_j \quad , \quad a_1 = t$

Si ha

$$a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 + ... + a_n s_n = t\,b + k\,t\,(b+f) + k^2\,t\,(b+2\,f) + ... + k^{n-1}\,t\left[b+(n-1)\right]f =$$

$$= t\,b + k\,t\,b + k\,t\,f + k^2\,t\,b + 2\,k^2\,t\,f + ... + k^{n-1}\,t\,b + (n-1)\,k^{n-1}\,t\,f =$$

$$= t\,b\left(1+k+k^2+..k^{n-1}\right) + t\,f\left[k+2k^2+...+(n-1)^{n-1}\right] =$$

$$= t\,b\sum_{j=1}^{n-1} k^j + t\,f\sum_{j=1}^{n-1}\left(j\,k^j\right) = t\left(b\sum_{j=1}^{n-1} k^j + f\sum_{j=1}^{n-1}\left(j\,k^j\right)\right) = \alpha\,S$$

da cui

$$t = \frac{\alpha\,S}{b\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} k^j + f\sum_{j=1}^{n-1}\left(j\,k^j\right)}$$

Si osservi che nel Caso 1 si poteva scegliere t e calcolare d: in questo caso, invece, t deve essere calcolato, avendo scelto k. Tentare di ricavare k, scelto t, come ci si potrebbe aspettare, è impresa eccessivamente ardua, vista la «posizione» di k dentro le sommatorie (a meno di ricorrere a metodi di approssimazioni successive – vedi, ad esempio, in seguito: «**Per chi non vuole faticare troppo…**»). Per pura curiosità, difatti, si ha

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left(j\,k^j\right) = \frac{k^n\,\left(k\,(n-1)-n\right)+k}{(k-1)^2}$$

Caso 3

Caratteristica:

$s_{j+1} = s_j + f \quad , \quad s_1 = b$

$$\frac{a_{j+1}}{a_j} = \frac{s_{j+1}}{s_j} \quad \text{da cui} \quad a_{j+1} = \frac{a_j\, s_{j+1}}{s_j} \quad , \quad a_1 = t$$

Si ha

$a_1 = t$	$s_1 = b$
$a_2 = \dfrac{a_1\, s_2}{s_1} = \dfrac{t(b+f)}{b}$	$s_2 = b + f$
$a_3 = \dfrac{t(b+f)}{b}\,\dfrac{b+2\,f}{b+f} = \dfrac{t(b+2\,f)}{b}$	$s_3 = b + 2\,f$

$a_4 = \frac{t(b+2\,f)}{b}\frac{b+3\,f}{b+2f} = \frac{t(b+3\,f)}{b}$	$s_4 = b + 3\,f$
…..	…..
$a_n = \frac{t\left(b+(n-1)\,f\right)}{b}$	$s_n = b + (n\text{-}1)\,f$

Segue

$$a_1\,s_1 + a_2\,s_2 + a_3\,s_3 + ... + a_n\,s_n = t\,b + \frac{t\,(b+f)}{b}(b+f) + \frac{t\,(b+2\,f)}{b}(b+2\,f) + ... + \frac{t\left[b+(n-1)\,f\right]}{b}\left[b+(n-1)\,f\right] =$$

$$= t\,b + \frac{t\,(b+f)^2}{b} + \frac{t\,(b+2\,f)^2}{b} + ... + \frac{t\left(b+(n-1)\,f\right)^2}{b} = \frac{t}{b}\left[b^2 + (b+f)^2 + (b+2\,f)^2 + ... + \left(b+(n-1)\,f\right)^2\right] =$$

$$= \frac{t}{b}\sum_{j=0}^{n-1}(b+j\,f)^2 = \alpha\,S$$

da cui

$$t = \frac{\alpha\,b\,S}{\sum_{j=0}^{n-1}(b+j\,f)^2}$$

Anche in questo caso l'unico valore determinabile è quello di t, non per difficoltà tecniche, come nel Caso 2, ma perché tutti gli altri valori sono dati.

Ancora per pura curiosità si ha

$$\sum_{j=0}^{n-1}(b+jf)^2 = \frac{n\left(6\,b^2 + 6\,b\,f\,(n-1) + f^2\left(2\,n^2 - 3\,n + 1\right)\right)}{6}$$

Caso 4

Caratteristica:

$s_{j+1} = h\,s_j \quad , \quad s_1 = b$

$a_{j+1} = a_j + d\,, \quad a_1 = t$

Si ha

$$a_1\,s_1 + a_2\,s_2 + a_3\,s_3 + ... + a_n\,s_n = t\,b + (t+d)\,h\,b + (t+2\,d)\,h^2\,b + (t+3\,d)\,h^3\,b + ... + \left[t+(n-1)\,d\right]h^{n-1}\,b =$$

$$= t\,b + h\,t\,b + h^2\,t\,b + +h^3\,t\,b + ... + h^{n-1}\,t\,b + h\,d\,b + 2\,h^2\,d\,b + 3\,h^3\,d\,b + ... + (n-1)\,h^{n-1}\,d\,b =$$

$$= t\,b\left(1+h+h^2+h^3+...+h^{n-1}\right) + d\,b\left[h + 2\,h^2 + 3\,h^3 + ... + (n-1)\,h^{n-1}\right] =$$

$$= t\,b\sum_{j=0}^{n-1}h^j + d\,b\sum_{j=1}^{n-1}\left(j\,h^j\right) = \alpha\,S$$

da cui

$$d\,b\sum_{j=1}^{n-1}\left(j\,h^j\right) = \alpha\,S - t\,b\sum_{j=0}^{n-1}h^j$$

e infine

$$d=\frac{\alpha\,S-t\,b\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}h^j}{b\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}\left(j\,h^j\right)}$$

Caso 5

Caratteristica:

$s_{j+1}=h\,s_j \quad , \quad s_1=b$

$a_{j+1}=k\,a_j \quad , \quad a_1=t$

Si ha

$$a_1\,s_1+a_2\,s_2+a_3\,s_3+...+a_n\,s_n=t\,b+k\,t\,h\,b+k^2\,t\,h^2\,b+...+k^{n-1}\,t\,h^{n-1}\,b=$$

$$=t\,b\left(1+k\,h+k^2\,h^2+...+k^{n-1}\,h^{n-1}\right)=t\,b\sum_{j=0}^{n-1}(k\,h)^j=\alpha\,S$$

Da cui

$$t=\frac{\alpha\,S}{b\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}(k\,h)^j}$$

Vedi l'osservazione alla fine di Caso 2.

Caso 6

Caratteristica:

$s_{j+1}=h\,s_j \quad , \quad s_1=b$

$\dfrac{a_{j+1}}{a_j}=\dfrac{s_{j+1}}{s_j}$ da cui $a_{j+1}=\dfrac{a_j\,s_{j+1}}{s_j} \quad , \quad a_1=t$

Si ha

$a_1=t$	$s_1=b$
$a_2=\dfrac{t\,h\,b}{b}=t\,h$	$s_2=h\,b$
$a_3=\dfrac{t\,h\,h^2\,b}{h\,b}=t\,h^2$	$s_3=h^2\,b$
$a_4=\dfrac{t\,h^2\,h^3\,b}{h^2\,b}=t\,h^3$	$s_4=h^3\,b$
…..	…..
$a_n=t\,h^{n-1}$	$s_n=h^{n-1}\,b$

Si ha

$$a_1\,s_1 + a_2\,s_2 + a_3\,s_3 + ... + a_n\,s_n = t\,b + t\,h\,h\,b + t\,h^2\,h^2\,b + ... + t\,h^{n-1}\,h^{n-1}\,b =$$

$$= t\,b\left[1 + h^2 + h^4 + ... + h^{2(n-1)}\right] = t\,b\sum_{j=0}^{n-1} h^{2j} = \alpha\,S$$

Da cui

$$t = \frac{\alpha\,S}{b\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} h^{2j}}$$

Ancora per curiosità si ha, ponendo $2\,j = m$, …

Caso 7

Caratteristica:

s_j qualunque, purché $s_{j+1} > s_j$

$a_{j+1} = a_j + d \quad , \quad a_1 = t$

Si ha

$$a_1\,s_1 + a_2\,s_2 + a_3\,s_3 + ... + a_n\,s_n = t\,s_1 + (t+d)s_2 + (t+2\,d)\,s_3 + ... + \left[t + (n-1)\,d\right]s_n =$$

$$= t\,s_1 + t\,s_2 + t\,s_3 + ... + d\,s_2 + 2\,d\,s_3 + ... + (n-1)\,d\,s_n =$$

$$= t\,(s_1 + s_2 + s_3 + ... + s_n) + d\left[s_2 + 2\,s_3 + ... + (n-1)\,s_n\right] =$$

$$= t\,S + d\sum_{j=1}^{n-1}\left(j\,s_{j+1}\right) = \alpha\,S$$

Da cui

$$d\sum_{j=1}^{n-1}\left(j\,s_{j+1}\right) = \alpha\,S - t\,S$$

e infine

$$d = \frac{S\,(\alpha - t)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}\left(j\,s_{j+1}\right)}$$

che *sembra* una formula compatta. In realtà non lo è, perché, vista l'irregolarità degli s_j, la sommatoria al denominatore va calcolata di santa pazienza.

Caso 8

Caratteristica:

s_j qualunque, purché $s_{j+1} > s_j$

$a_{j+1} = k\,a_j \quad , \quad a_1 = t$

Si ha

$$a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 + ... + a_n s_n = t s_1 + k t s_2 + k^2 t s_3 + ... + k^{n-1} t s_n =$$
$$= t\left(s_1 + k s_2 + k^2 s_3 + ... + k^{n-1} s_n\right) = t \sum_{j=0}^{n-1}\left(k^j s_{j+1}\right) = \alpha S$$

Da cui

$$t = \frac{\alpha S}{\sum_{j=0}^{n-1}\left(k^j s_{j+1}\right)}$$

e vale ancora l'osservazione alla fine del Caso 7.

Caso 9

Caratteristica:

s_j qualunque, purché $s_{j+1} > s_j$

$$\frac{a_{j+1}}{a_j} = \frac{s_{j+1}}{s_j} \quad \text{da cui} \quad a_{j+1} = \frac{a_j s_{j+1}}{s_j} \quad , \quad a_1 = t$$

Si ha

$a_1 = t$	$s_1 = s_1$
$a_2 = \frac{t s_2}{s_1}$	$s_2 = s_2$
$a_3 = \frac{t s_2}{s_1}\frac{s_3}{s_2} = \frac{t s_3}{s_1}$	$s_3 = s_3$
$a_4 = \frac{t s_3}{s_1}\frac{s_4}{s_3} = \frac{t s_4}{s_1}$	$s_4 = s_4$
…..	…..
$a_n = \frac{t s_n}{s_1}$	$s_n = s_n$

Si ha

$$a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 + ... + a_n s_n = t s_1 + \frac{t s_2}{s_1} s_2 + \frac{t s_3}{s_1} s_3 + ... + \frac{t s_n}{s_1} s_n =$$
$$= \frac{t}{s_1}\left(s_1^{\ 2} + s_2^{\ 2} + s_3^{\ 2} + ... + s_n^{\ 2}\right) = \frac{t}{s_1}\sum_{j=1}^{n} s_j^{\ 2} = \alpha S$$

Da cui

$$t = \frac{\alpha\, s_1\, S}{\sum_{j=1}^{n} s_j^{\,2}}$$

e, naturalmente, vale ancora l'osservazione alla fine del Caso 7.

Osservazione tecnica

Negli ultimi tre casi si può sempre trovare una funzione polinomiale che descriva, *a posteriori*, la crescita degli s_j. In effetti, per grande che sia n, con un sistema di primo grado si possono trovare i coefficienti della polinomiale che passa per gli n punti $(j\ ,\ s_j)$, $j = 1 \dots n$. Non è detto che ne valga la pena, ma la cosa è possibile.

Osservazione didattica

Alcuni dei risultati precedenti hanno un aspetto decisamente poco amichevole. Quasi tutti, però, si rivelano essere soluzioni di problemi di primo grado. Se si sostituiscono le lettere con numeri, forse non saranno ancora alla portata di *tutti* gli allievi di scuola media ma, mi piace crederlo, almeno di quelli dotati di spiccata vivacità intellettuale.

Osservazione metodologica

È pensabile che, metodologicamente parlando, si sarebbe dovuto partire dai casi più generali 7, 8 e 9 e poi scendere agli altri, «particolarizzando» i risultati ottenuti. È sicuramente pensabile, ma ho preferito procedere come ho fatto perché, immagino, più vicino al modo di pensare di un allievo. E poi, *de gustibus*…

Per chi non vuole faticare troppo…

… esistono i fogli di calcolo, in particolare Excel.

In tal caso, si possono lasciar perdere del tutto le formulacce trovate sopra e procedere per fasi successive. Qui si mostra come ottenere «empiricamente» il risultato trovato nel Caso 7.

Fase 1

Si impostano i calcoli iniziali del CdA

◇	A	B	C	D	E	F	G	H
1		**Dipendente**	**Stipendio vecchio**	**Taglio**	**Stipendio nuovo**		**a =**	10
2								
3		D1	56000.00	5600.00	50400.00			
4		D2	60000.00	6000.00	54000.00			
5		D3	62000.00	6200.00	55800.00			
6		D4	65000.00	6500.00	58500.00			
7		D5	66000.00	6600.00	59400.00			
8		D6	72000.00	7200.00	64800.00			
9		D7	77000.00	7700.00	69300.00			
10		D8	81000.00	8100.00	72900.00			
11		D9	84000.00	8400.00	75600.00			
12		D10	97000.00	9700.00	87300.00			
13								
14		**Totali**	720000.00	72000.00	648000.00			
15								

Fase 2

Si reimpostano le intestazioni delle colonne,
nella colonna A si mettono i numeri da 0 a 9,
in H2 si mette il valore di t che si suppone sia stato contrattato, ad esempio 4,
in H3 si mette un valore qualunque di d, ad esempio 3,
in E3 si mette **=C3-D3** e si copia in basso
in F3 si mette **=C3*(H$2+A3*H$3)/**100 e si ricopia in basso,
in E14 si mette **=SOMMA(E3:E13)** e si copia a destra.

◇	A	B	C	D	E	F	G	H
1		**Dipendente**	**Stipendio vecchio**	**Taglio**	**Stipendio calc.**	**Taglio calc.**	**a =**	10
2							**t =**	4
3	0	D1	56000.00	5600.00	50400.00	2240.00	**d =**	3
4	1	D2	60000.00	6000.00	54000.00	4200.00		
5	2	D3	62000.00	6200.00	55800.00	6200.00		
6	3	D4	65000.00	6500.00	58500.00	8450.00		
7	4	D5	66000.00	6600.00	59400.00	10560.00		
8	5	D6	72000.00	7200.00	64800.00	13680.00		
9	6	D7	77000.00	7700.00	69300.00	16940.00		
10	7	D8	81000.00	8100.00	72900.00	20250.00		
11	8	D9	84000.00	8400.00	75600.00	23520.00		
12	9	D10	97000.00	9700.00	87300.00	30070.00		
13								
14		**Totali**	720000.00	72000.00	648000.00	136110.00		
15								

Si osservi che il nuovo taglio totale, 136110.– Fr., è troppo alto. Ciò significa che il valore scelto di d (3) è troppo grande.

Fase 3

Si mette il cursore nella cella F14,
si seleziona **Strumenti** e, nel menu a discesa **Ricerca obiettivo…**,
nella finestrina che si apre
  in **Imposta la cella** è già selezionata la cella giusta (F14),
  in **Al valore:** si scrive 72000, cioè il taglio totale desiderato,
  in **Cambiando la cella:** si scrive H3, (o si clicca in H3) dove c'è il 3, valore eccessivo,
si clicca su **OK**.

Fase 4

Fa tutto Excel, che modifica i dati (dopo aver chiesto la vostra conferma) generando la seguente tabella, dove l'incremento costante cercato, d, compare in H3.

◇	A	B	C	D	E	F	G	H
1		**Dipendente**	**Stipendio vecchio**	**Taglio**	**Stipendio calc.**	**Taglio calc.**	**a =**	10
2							**t =**	4
3	0	D1	56000.00	5600.00	50400.00	2240.00	**d =**	1.20771596
4	1	D2	60000.00	6000.00	54000.00	3124.63		
5	2	D3	62000.00	6200.00	55800.00	3977.57		
6	3	D4	65000.00	6500.00	58500.00	4955.05		
7	4	D5	66000.00	6600.00	59400.00	5828.37		
8	5	D6	72000.00	7200.00	64800.00	7227.78		
9	6	D7	77000.00	7700.00	69300.00	8659.65		
10	7	D8	81000.00	8100.00	72900.00	10087.75		
11	8	D9	84000.00	8400.00	75600.00	11475.85		
12	9	D10	97000.00	9700.00	87300.00	14423.36		
13								
14		**Totali**	720000.00	72000.00	648000.00	72000.00		
15								

Fase 5 (per i San Tommaso…)

Si mette in qualche cella l'equivalente della formula trovata nel Caso 7 e si controlla.

Variante 2

Non tutti gli stipendi sono diversi fra loro e si possono quindi raggruppare in classi.

Anche qui si supporrà che gli stipendi siano in ordine crescente da s_1 a s_n.

Per non appesantire troppo il contributo, tratterò, a titolo di esempio, un solo caso, poiché, trovato il «trucco», gli altri differiscono, tutto sommato, solo per dettagli.

Caso «esemplare»

Caratteristica:

s_j qualunque, purché $s_{j+1} > s_j$ e sia k_i il numero degli stipendi s_i

$a_{j+1} = a_j + d \quad , \quad a_1 = t$

Si ha

$$k_1 a_1 s_1 + k_2 a_2 s_2 + k_3 a_3 s_3 + ..k_n a_n s_n = t k_1 s_1 + (t+d) k_2 s_2 + (t+2d) k_3 s_3 + ... + [t+(n-1)d] k_n s_n =$$
$$= t k_1 s_1 + t k_2 s_2 + t k_3 s_3 + ..t k_n s_n + ... + d k_2 s_2 + 2d k_3 s_3 + ... + (n-1) d k_n s_n =$$
$$= t (k_1 s_1 + k_2 s_2 + k_3 s_3 + ... + k_n s_n) + d [k_2 s_2 + 2 k_3 s_3 + ... + (n-1) k_n s_n] =$$
$$= t S + d \sum_{j=2}^{n} [(j-1) k_j s_j] = \alpha S$$

da cui

$$d = \frac{S(\alpha - t)}{\sum_{j=2}^{n} [(j-1) k_j s_j]}$$

Valgono anche qui l'osservazione alla fine del Caso 7 e l'«osservazione tecnica».

Osservazioni finali

I casi scelti, di tutta evidenza, non sono esaustivi: si sarebbero potuto immaginare crescite, sia degli stipendi sia delle percentuali, di molti altri tipi: esponenziali, logaritmiche, polinomiali di vario grado e altre ancora. Si è solo voluto mostrare che, chi dovesse adottare esclusivamente metodi lineari, o non sa la matematica o non la vuole applicare.

Un ultimo dettaglio: dai modelli matematici si può cavare solo ciò che, magari senza rendersi conto, si è introdotto. Nel problema in esame **non** si è introdotta alcuna condizione relativa agli stipendi ricalcolati: dunque **non** si può desumere che, se $s_i > s_j$, anche $a_i \cdot s_i > a_j \cdot s_j$. Il lettore può facilmente controllare quanto avviene ponendo qualche s_{j+1} di pochissimo maggiore di s_j. Ad una sola condizione, fra quelle considerate qui, della crescita degli a_j l'ordinamento si mantiene: non è difficile né trovare la condizione né dimostrare quanto affermato.

4. Modellare l'ignoranza in probabilità Sintesi teorica e riflessione didattica

Alberto Piatti[1], Gianfranco Arrigo

The first four sections of this paper are a summary of a paper by Walley (1996) about the inference from multinomial. In these sections we introduce the important concept of *imprecise probability*. In the fifth section we propose an original general approach to the teaching of probability theory based on the rational use of information. We argue that this approach could partially solve some of the main problems involved in the teaching of probability. Readers interested only in the teaching aspects can read the Introduction, Section 5 and the Conclusions.

1. Introduzione

Consideriamo il seguente problema:

Il pescatore Gigi decide di pescare in un nuovo lago di cui non conosce nulla. Quanto vale la probabilità che peschi come primo pesce un pesce persico?

In questo problema l'unica soluzione che utilizza in maniera razionale l'informazione in nostro possesso è la soluzione vacua: non possiamo dire niente sulla probabilità. Per poter ottenere una soluzione più significativa dovremmo forzare alcune ipotesi. Se volessimo seguire un classico approccio Bayesiano, dovremmo definire uno spazio campionario, ad esempio:

$$\Omega = \{\text{Pesci persici, Altri pesci}\}$$

in questo caso non potendo preferire uno dei due risultati dovremmo, seguendo il principio di simmetria, associare la stessa probabilità ad entrambi gli esiti possibili e di conseguenza avremmo:

$$P(\text{Pesce persico}) = 0{,}5$$

Lo stesso ragionamento però varrebbe anche se definissimo come spazio campionario

$$\Omega = \{\text{Pesci persici, Trote, Altri pesci}\}$$

In questo caso avremmo però

$$P(\text{Pesce persico}) = \frac{1}{3}$$

1. Docente alla SUPSI di Manno e dottorando all'USI Lugano.

Evidentemente con l'informazione in nostro possesso qualsiasi probabilità precisa assegnata all'evento *pescare un pesce persico* non può che essere frutto di un'ipotesi arbitraria. Per poter utilizzare in maniera razionale l'informazione (vacua) in nostro possesso dobbiamo far capo non a *probabilità precise* ma a intervalli di probabilità, ossia un esempio di modello tratto dal campo delle *probabilità imprecise*.

In generale con il termine probabilità imprecise si intende tutta una serie di modelli, anche molto diversi tra di loro, che non fanno uso esclusivamente di probabilità espresse con un numero preciso. Tra questi modelli troviamo gli intervalli di probabilità, ma anche i modelli basati su insiemi di distribuzioni di probabilità (come il modello di Dirichlet impreciso), le belief functions e diversi altri modelli. Per una panoramica completa consigliamo di visionare il sito internet della SIPTA (Society for Imprecise Probability Theory and Applications): www.sipta.org.

Riprendendo il nostro problema iniziale: sappiamo solo che se nel lago ci fossero solo pesci persici la probabilità cercata sarebbe uno; se invece non ci fossero pesci persici la probabilità sarebbe zero. Con le informazioni in nostro possesso non possiamo escludere nemmeno questi due casi estremi. Con gli intervalli di probabilità potremmo esprimere questa soluzione mediante l'intervallo

$$P(\text{Pesce persico}) \in [0,1]$$

La soluzione è chiaramente banale ma l'informazione in nostro possesso non ci permette di trovare una soluzione più dettagliata senza commettere arbitrii. È importante notare che la soluzione non dipende da W. Per poter risolvere il problema in maniera più soddisfacente dovremmo acquisire maggiore informazione.

2. Intervalli di probabilità

In questo articolo con il termine probabilità intendiamo la probabilità *epistemica*, in altre parole una probabilità che l'individuo costruisce per prendere una decisione alla luce di tutta la conoscenza in suo possesso (che può anche essere incompleta e/o ambigua).

La probabilità epistemica è in generale diversa dalla probabilità *fisica* o *aleatoria* che è quella tipicamente usata in didattica.

La probabilità epistemica associata a un fenomeno da parte di un individuo è una probabilità soggettiva, nel senso che viene costruita dall'individuo per prendere una decisione. La probabilità epistemica viene solitamente descritta come la *desiderabilità* nei confronti di una *lotteria*[2]. Per una discussione più dettagliata di questi aspetti rimandiamo a Walley (1991).

---

2. Col termine *lotteria* si indica un qualsiasi gioco d'azzardo, cioè un gioco nel quale si distinguono due ruoli:
   - quello di giocatore, che paga una certa somma di denaro per poter giocare e può vincere denaro;
   - quello di possessore del gioco, che si fa pagare una certa somma da ogni giocatore e che può distribuire una certa vincita in denaro.

   La *desiderabilità* nei confronti di una lotteria è la probabilità che un individuo accetti di assumere uno dei due ruoli. Quando un individuo accetta di giocare a una lotteria si dice che «*acquista*» la lotteria; quando un individuo accetta il ruolo di possessore del gioco si dice che «*vende*» il gioco.

Consideriamo ad esempio la seguente semplice lotteria:

- Se domani piove, il giocatore vince 100 Fr.
- Se domani non piove, il giocatore non vince nulla.

Secondo la probabilità classica esiste un prezzo, detto prezzo *leale*, che corrisponde al valore atteso della vincita. Nel nostro esempio questo corrisponde a

$100 \cdot P(\text{Domani piove})$

In altre parole: per quale somma sareste disposti ad acquistare la lotteria, oppure quanto vorreste essere pagati come possessore da un individuo che volesse giocare.

Verosimilmente però i prezzi *soggettivi* di acquisto e vendita non corrispondono necessariamente: si tende sempre a vendere a prezzi maggiori della somma per la quale si è disposti ad acquistare, e questo non solo per avidità ma anche perché non si conosce la probabilità precisa dell'evento dal quale dipende l'esito della lotteria. In pratica se si compra la lotteria ci si vuole cautelare dal risultato peggiore e in un certo senso si considera quella che riteniamo essere la *probabilità minima* dell'evento, che indichiamo con $\underline{p}$. Se invece si vuole vendere la lotteria allora bisogna cautelarsi dal caso più vantaggioso per il compratore ossia dalla probabilità massima, che indichiamo con $\overline{p}$. Con questa interpretazione non associamo al nostro evento una probabilità precisa bensì un intervallo di probabilità. Nel nostro esempio abbiamo:

$$P(\text{Domani piove}) \in [\underline{p}, \overline{p}]$$

il prezzo massimo di acquisto è

$100 \cdot \underline{p}$

e il prezzo minimo di vendita è

$100 \cdot \overline{p}$

Naturalmente se avessimo una probabilità precisa per l'evento *Domani piove* avremmo

$\underline{p} = \overline{p}$

e quindi i prezzi di vendita e acquisto sarebbero uguali: avremmo il cosiddetto *prezzo leale* utilizzato in probabilità classica. Solitamente, più siamo ignoranti sulla probabilità di un evento, più l'intervallo di probabilità che associamo all'evento risulta ampio. Possiamo definire il *grado di imprecisione* calcolando semplicemente questa ampiezza, cioè:

$$\overline{p} - \underline{p}$$

Questa misura può essere utilizzata come *indicatore dell'ignoranza*. Nel caso di ignoranza completa il grado di imprecisione è 1 come nella soluzione del problema dell'Introduzione.

3. Inferenza imprecisa

Torniamo al problema dell'Introduzione: per risolverlo in maniera più soddisfacente dobbiamo ricevere maggiori informazioni sulla fauna del lago.

Se non c'è nessuno che ci può aiutare, ad esempio un pescatore conoscitore di questo lago, allora non possiamo fare altro che incominciare a pescare e vedere che pesci abboccano. Supponiamo che per fare questa indagine Gigi ributti i pesci pescati nel lago: evitiamo così alcuni fastidiosi casi particolari e possiamo fare un'ipotesi di distribuzione multinomiale in seguito. In realtà questa ipotesi è una buona approssimazione se il numero di pesci del lago è sufficientemente grande.

Supponiamo che Gigi peschi come primo pesce una trota; che informazioni ci dà questo evento?

Le uniche informazioni sicure sono le seguenti:

- Nel lago ci sono dei pesci (Gigi non è venuto per niente).
- Nel lago ci sono delle trote e quindi P(Trota)>0
- Nel lago non ci sono solo pesci persici e quindi P(Pesce persico)<1

Come possiamo inserire ora questa informazione nei nostri intervalli di probabilità in modo che:

- la probabilità (l'intervallo di probabilità) di pescare un pesce persico non dipenda da come è stato definito lo spazio campionario Ω (*Representation Invariance Principle*)?
- non si assegnino due intervalli di probabilità diversi a due eventi di cui abbiamo la stessa informazione (*Simmetry Principle*)?

Una risposta possibile, e per il momento l'unica per quanto ne sappiamo, è espressa dal *modello di Dirichlet impreciso*.

4. Il modello di Dirichlet impreciso

4.1. Campionamento multinomiale

Consideriamo uno spazio campionario

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\}$$

con $k \geq 2$ e supponiamo che ogni evento di interesse possa essere costruito come sottoinsieme di Ω.

Nel campionamento multinomiale si osservano i risultati di N esperimenti indipendenti in Ω con probabilità

$$P(\omega_j) = \theta_j$$

$$\text{dove } \theta_j \geq 0 \text{ e } \sum_j \theta_j = 1$$

Indichiamo con n_j il numero di volte che si è osservato l'evento ω_j su N tentativi; si ha

$$\sum_j n_j = N$$

Utilizzando la notazione

$$\theta = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k\} \qquad n = \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$$

otteniamo la *funzione di verosimiglianza*

$$L(\theta \mid n) = \prod_{j=1}^{k} \theta_j^{n_j}$$

4.2. Distribuzioni di Dirichlet

Una scelta tipica per la distribuzione *a priori*[3] di θ è la distribuzione di Dirichlet(s,t)

$$\pi(\theta) \propto \prod_{j=1}^{k} \theta_j^{s t_j - 1} \qquad \text{con} \qquad s > 0 \ , \ 0 < t_j < 1 \ , \ \sum_{j=1}^{k} t_j = 1$$

dove t_j è la media di θ_j rispetto alla distribuzione di Dirichlet e s quantifica l'influsso della distibuzione a priori sulla distribuzione *a posteriori*[4] come vedremo in seguito. Il simbolo ∝ indica che la distribuzione è proporzionale all'espressione che segue. Per poter indicare l'uguaglianza dovremmo trovare una costante in modo che l'integrale di π(θ) sul simplesso[5] dei possibili valori di θ sia uguale a uno.

Calcolando la distribuzione a posteriori, ossia moltiplicando la distribuzione di Dirichlet a priori per la funzione di verosimiglianza trovata nel campionamento multinomiale, otteniamo nuovamente una distribuzione di Dirichlet:

$$\pi(\theta \mid n) \propto \prod_{j=1}^{k} \theta_j^{n_j + s t_j - 1}$$

In particolare otteniamo una distribuzione di Dirichlet(N+s ; t^*) con

$$t_j^* = \frac{n_j + s\,t_j}{N + s}$$

I vantaggi di scegliere una distribuzione di Dirichlet come distribuzione a priori sono molteplici; i principali sono:

- otteniamo distribuzioni a posteriori che sono ancora distribuzioni di Dirichlet;

3. Ossia la distribuzione che viene assegnata ai parametri prima delle osservazioni.
4. Ossia la distribuzione ottenuta modificando la distribuzione a priori, alla luce delle osservazioni fatte.
5. In questo caso il simplesso è l'insieme dei vettori a k dimensioni con somma delle componenti uguale a uno.

- cambiando lo spazio campionario, in particolare fondendo assieme diverse categorie, la distribuzione di Dirichlet associata viene trasformata in un'altra distribuzione di Dirichlet;
- nei principali modelli bayesiani di inferenza con ignoranza a priori si usano distribuzioni di Dirichlet.

4.3. Modello di Dirichlet impreciso

L'idea alla base del *modello di Dirichlet impreciso* è di non prendere come distribuzione a priori una sola distribuzione di Dirichlet, bensì tutte le distribuzioni di Dirichlet con un dato *s* scelto in precedenza. Infatti avendo ignoranza a priori non possiamo preferire una distribuzione a priori ad un'altra. La scelta di utilizzare distribuzioni di Dirichlet è legata a diversi fattori che abbiamo elencato in precedenza. In pratica abbiamo un insieme M_0 di ditribuzioni a priori di Dirichlet:

$$M_0 = \left\{ \mathrm{Dirichlet}(s\,;t) \mid \sum_{j=1}^{k} t_j = 1 \right\}$$

Se calcoliamo la distribuzione a posteriori utilizzando come distribuzione a priori ognuna delle distribuzioni contenute in M_0 otteniamo un insieme di distribuzioni a posteriori formato da tutte le distribuzioni Dirichlet(N +s; t^*), nelle quali

$$t_j^* = \frac{n_j + s\,t_j}{N + s}$$

è la media a posteriori di θ_j come calcolato in precedenza. Di tutte queste distribuzioni a posteriori ce ne saranno alcune che assegneranno a t_j^* un valore minimo, ossia quelle con

$t_j \to 0$, e altre che assegneranno a t_j^* un valore massimo, ossia quando $t_j \to 1$.

Supponiamo ora di voler calcolare la probabilità a posteriori dell'evento $\{\omega_j\}$ che indichiamo semplicemente con ω_j. Visto che a posteriori abbiamo una famiglia di probabilità potremo indicare solo una probabilità minima

$$\underline{P}(\omega_j \mid n)$$

e una probabilità massima

$$\overline{P}(\omega_j \mid n)$$

Queste probabilità possono essere ottenute rispettivamente minimizzando o massimizzando t_j^* rispetto a t_j. Si ottiene così:

$$\underline{P}(\omega_j \mid n) = \frac{n_j}{N + s} \qquad \text{quando } t_j \to 0$$

$$\overline{P}(\omega_j \mid n) = \frac{n_j + s}{N + s} \qquad \text{quando } t_j \to 1$$

In generale per calcolare le probabilità minime e massime di un certo evento A è sufficiente contare il numero n(A) di volte in cui si osserva l'evento A su N esperimenti e quindi calcolare:

$$\underline{P}(A \mid n) = \frac{n(A)}{N+s}$$

$$\overline{P}(A \mid n) = \frac{n(A)+s}{N+s}$$

Osservazioni

s può essere interpretato come numero di osservazioni nascoste. Avendo s osservazioni di cui non conosciamo il risultato e applicando una semplice inferenza frequentista otterremmo la probabilità minima supponendo che nessuna delle osservazioni nascoste abbia il risultato sperato e la probabilità massima supponendo che tutte le osservazioni nascoste abbiano il risultato sperato.

È interessante notare che il grado di imprecisione nel modello di Dirichlet è una variabile dipendente da s e N e quindi non dalla scelta di Ω; infatti

$$\overline{P}(A \mid n) - \underline{P}(A \mid n) = \frac{s}{N+s}$$

Giustamente, tanto più N cresce (e quindi tanto più cresce l'informazione) quanto più il grado di imprecisione risulta ridotto.

Il parametro s può in teoria assumere qualsiasi valore s>0. In pratica, il parametro s indica una sorta di «*cautela nell'inferenza*» e regola la convergenza delle probabilità minima e massima al crescere di N.

Scegliendo valori di s tra 1 e 2 il modello di Dirichlet impreciso include molti dei modelli oggettivi di inferenza precisa, sia frequentisti sia bayesiani.

Solitamente, in pratica, per un'inferenza «cauta» viene scelto s = 2, mentre per un'inferenza «meno cauta» viene scelto s = 1.

In mancanza di osservazioni, ossia per N = 0, si ottiene

$$\underline{P}(A) = 0$$

$$\overline{P}(A) = 1$$

per ogni evento *A*.

La soluzione che ci aspettiamo in presenza di ignoranza a priori.

5. Considerazioni didattiche

5.1. Conoscenza completa e conoscenza incompleta

In pratica la probabilità viene usata per modellare fenomeni, sia aleatori sia deterministici dei quali possediamo solo una conoscenza incompleta.

È importante però non confondere l'utilizzo della probabilità con l'ignoranza.

Per assegnare una probabilità precisa, ossia una distribuzione di probabilità, a un dato fenomeno aleatorio è necessaria una conoscenza molto approfondita del fenomeno, simile o ancora superiore a quella necessaria per costruire un buon modello di un fenomeno deterministico. Purtroppo, spesso, per poter utilizzare probabilità precise, bisogna far capo a ipotesi arbitrarie e non realistiche.

Possiamo riassumere i diversi approcci nei seguenti due schemi. Se abbiamo a che fare con fenomeni deterministici abbiamo i seguenti possibili approcci:

Conoscenza completa	**Conoscenza incompleta**
Modello deterministico	Modello semplificato
	Modello probabilistico impreciso
	Modello probabilistico (arbitrariamente) preciso

mentre se abbiamo a che fare con fenomeni aletori possiamo seguire i seguenti possibili approcci:

Conoscenza completa	**Conoscenza incompleta**
Modello probabilistico preciso	Modello probabilistico impreciso
	Modello probabilistico (arbitrariamente) preciso

L'atteggiamento di creare modelli probabilistici precisi attraverso ipotesi più o meno arbitrarie può avere molti vantaggi in certe applicazioni pratiche ed essere poco felice in altre. Occorre dire però che i matematici o le persone che modellano fenomeni reali sono solitamente in grado di considerare opportunamente le conseguenze delle loro ipotesi nella valutazione dei risultati.

Questo modo di procedere può invece creare grossi problemi nella didattica, perché gli studenti non sono in grado di comprendere il motivo di certe ipotesi. Consideriamo ad esempio il seguente problema:

Il pescatore Gigi va a pescare in un lago per il quale le probabilità di pescare i diversi tipi di pesce sono conosciute:

P(Pesce persico) = 0,4
P(Trota) = 0,3
P(Altri pesci) = 0,3
Domanda:
che probabilità ha Gigi di pescare tre pesci persici consecutivamente?

Problemi di questo genere sono molto presenti nella didattica classica. Apparentemente il problema è posto correttamente, ma lo studente chiamato a risolverlo potrebbe avere grossi problemi a capire chi e come ha potuto costruire le probabilità precise di pescare ogni pesce. Lo studente avrebbe mille ragioni di dubitare. Infatti per poter costruire queste probabilità in maniera precisa bisognerebbe conoscere alla perfezione la fauna del lago. Nello scrivere questo problema, in un certo senso, si è imbrogliato, e questo imbroglio può avere effetti negativi sul cammino di apprendimento della probabilità da parte degli studenti.

5.2. Conoscenza incompleta in classe

Anche se all’apparenza potrebbe sembrare contradditorio, ipotizziamo che inserire nell’insegnamento situazioni in cui si ha un’informazione incompleta, e quindi si è costretti a lavorare con intervalli di probabilità o con probabilità minime e massime, potrebbe dare maggiore credibilità all’applicazione del concetto di probabilità e rendere più stabile e robusto l’apprendimento dei concetti di base di questa teoria.

In altre parole, l’inserimento delle probabilità imprecise nell’insegnamento avrebbe il vantaggio di rendere la probabilità agli occhi dello studente uno strumento molto più flessibile e realistico e di conseguenza molto più significativo e realistico.

Facciamo seguire un esempio di attività di laboratorio matematico che potrebbe essere svolta, pensiamo, nel secondo biennio della scuola media, per dimostrare che, dopo tutto, la trattazione di aspetti legati alla probabilità imprecisa non è cosa tanto astrusa e nemmeno lontana dall’esperienza di vita degli allievi e non richiede particolare preparazione.

Situazione

Ci sono tre sacchetti contenenti biglie di colore rosso, verde, blu e biglie trasparenti.

Il primo sacchetto contiene:
- 4 biglie rosse
- 3 biglie blu
- 2 biglie verdi
- 5 biglie trasparenti

Nel secondo sacchetto ci sono:
- 4 biglie rosse
- 8 biglie blu
- 3 biglie trasparenti
- 9 biglie di cui non conosciamo il colore

Nel terzo sacchetto ci sono:
- 3 biglie rosse
- 12 biglie verdi
- 5 biglie blu
- 2 biglie trasparenti
- 3 biglie di cui non conosciamo il colore

Un tuo amico ti propone un gioco: puoi pescare a caso una biglia da un sacchetto a tua scelta dei tre descritti sopra. Se peschi una biglia rossa vinci tu, mentre se peschi una biglia di un altro colore vince lui.

Domande:
Che sacchetto sceglieresti?
Trovi che sia un gioco leale?

Discussione della situazione

Del primo sacchetto si conosce tutto quanto è necessario per rispondere alle domande. È una tipica situazione di conoscenza completa. Possiamo quindi costruire una probabilità precisa per l'evento *Pesco una biglia rossa*:

$$P_1(\text{Biglia rossa}) = \frac{4}{14} \cong 0{,}28$$

È importante notare che in questo caso lo spazio campionario è noto:

$$\Omega = \{\text{blu, rosso, verde, trasparente}\}$$

Si potrebbe estendere la situazione al caso in cui c'è una certa ignoranza su W. La soluzione rimarrebbe la medesima, infatti non utilizziamo tutte le informazioni dello spazio campionario per risolvere il problema.

Nel secondo sacchetto sappiamo che, al minimo, ci sono 4 biglie rosse e, al massimo – se tutte le biglie sconosciute sono rosse – ne abbiamo 13.
Quindi

$$\underline{P_2}(\text{Biglia rossa}) = \frac{4}{24} \cong 0{,}17$$

$$\overline{P_2}(\text{Biglia rossa}) = \frac{13}{24} \cong 0{,}54$$

Nel terzo sacchetto analogamente otteniamo

$$\underline{P_3}(\text{Biglia rossa}) = \frac{3}{25} \cong 0{,}12$$

$$\overline{P_3}(\text{Biglia rossa}) = \frac{6}{25} \cong 0{,}24$$

Evidentemente il primo sacchetto è preferibile al terzo, infatti

$$\overline{P_3}(\text{Biglia rossa}) = 0{,}24 < 0{,}28 = P_1(\text{Biglia rossa}) = \underline{P_1}(\text{Biglia rossa})$$

mentre tra il primo e il secondo sacchetto non possiamo distinguere senza ulteriore informazione.

Sarà interessante allora studiare la reazione degli studenti di fronte a questo fatto.

Probabilmente tenderanno a scegliere il primo anche se la scelta del secondo potrebbe essere molto più vantaggioso: gli psicologi ci dicono che le persone comuni sono avverse al rischio e all'ambiguità.

Ancora più interessante sarebbe valutare le risposte riguardo alla lealtà del gioco: è importante notare che questo gioco sarebbe leale, nel senso classico del termine, solo se nel secondo sacchetto esattamente 8 delle 9 biglie di colore sconosciuto fossero rosse.

6. Conclusioni e proposte di ricerca

Costatiamo che l'insegnamento della probabilità nelle scuole ticinesi (e non solo!) abbia finora ignorato in gran parte il problema dell'informazione incompleta e di conseguenza della probabilità imprecisa.

Questo atteggiamento potrebbe aver portato a una trasposizione didattica eccessiva e irreversibile di situazioni reali e di conseguenza a un uso poco credibile e convincente della teoria della probabilità.

Riteniamo che una trattazione più ampia della probabilità, che includa la probabilità imprecisa e che abitui lo studente a trattare casi di informazione incompleta potrebbe migliorare considerevolmente l'atteggiamento dello stesso nei confronti di tutta la teoria della probabilità poiché la renderebbe meno estranea alla realtà.

Naturalmente per verificare queste ipotesi è necessario effettuare un'attenta sperimentazione didattica che speriamo di poter compiere, almeno su scala cantonale, nel prossimo futuro.

Da queste righe lanciamo l'invito a tutti coloro che fossero interessati ad una eventuale sperimentazione didattica, o che avessero già provato approcci simili, a volerci contattare.

Riferimenti

P. Walley

Inferences from multinomial data: Learning about a bag of marbles, Journal of the royal statistical society 58, No 1, pp 3-57, 1996.

P. Walley

Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities, Chapman and Hall, 1991.

Ringraziamenti

Alberto Piatti ringrazia sentitamente il prof. dr. Fabio Trojani (USI Lugano) e il dr. Marco Zaffalon (IDSIA, Manno) per avergli permesso di entrare in contatto con questa affascinante e promettente teoria.

1. I primi passi di una seconda media nel campo statistico

Manuela Gerber

The article presents a didactic activity on the theme of water, carried out according to research principles which let every pupil face reality. The activity has been proposed to a class of the seventh grade during mathematics lessons. It is a sequence of lessons which allow the pupil to apply the disciplinary contents of the programme and to develop the affective component towards mathematics. It has been done with the use of IT, above all Internet for the collection of data and the electronic sheet for the statistic elaboration.

Necessità di una didattica non tradizionale

Con questo articolo voglio presentare un'attività didattica che ruota attorno al tema dell'acqua, svolta seguendo una modalità di ricerca e di elaborazione di dati e di sviluppo che permette ad ogni allievo il confronto personale con una situazione reale: molto in sintesi è quanto sta dietro al percorso proposto ad una classe di seconda media durante le lezioni di matematica per completare un classico cammino di apprendimento. È una successione di lezioni di matematica che trattano ed applicano i contenuti disciplinari del programma, ma che al tempo stesso sviluppano l'elemento affettivo verso la matematica, allo scopo di aiutare gli allievi maggiormente in difficoltà e promuovere una formazione ottimale per tutti.

L'insegnante in classe si trova di fronte a un certo numero di allievi che faticano in matematica, ad altri che riescono discretamente e ad altri ancora che possiedono buone capacità; categoria, quest'ultima, che comprende sia «bravi tecnici» che spiriti intuitivi. Nella casistica appena descritta, manca il caso dell'allievo che, pur disponendo delle conoscenze necessarie, non sa utilizzarle al momento opportuno; è il caso più «favorevole» alla nascita di sentimenti di frustrazione nell'allievo e, parallelamente, di impotenza nell'insegnante.

Se confrontiamo il comportamento di chi «riesce» con quello di chi «fallisce» vediamo chiaramente che, al di là delle conoscenze possedute dall'allievo, il successo nell'affrontare situazioni nuove sta nella capacità di gestire le proprie risorse e di incrementarle. Secondo me, questo è il fenomeno più interessante legato al concetto di competenza. Gli allievi che avvertono questa necessità ritornano spontaneamente sui loro passi per consolidare elementi di apprendimento non ancora fondati, che loro stessi definiscono «traballanti».

Ma che cosa comporta nello sviluppo del «sapere» e del «fare» la capacità di gestire e di incrementare le proprie risorse? Molti aspetti, fra i quali i processi di controllo della propria azione e di regolazione tra le richieste esterne e le proprie risorse (un esame dei propri punti forti e deboli).

Per avere «successo», o almeno un parziale «riscontro positivo» in matematica, l'allievo deve quindi essere consapevole delle sue conoscenze e dei suoi processi di pensiero, deve saper pianificare e verificare la propria attività. In questo ambito è importante la riflessione metacognitiva, operata, sì, dall'allievo, ma stimolata e facilitata dall'insegnante. Un modo di favorire un buon apprendimento negli allievi è quello di abituarli a sviluppare questi «saper fare» strategici e metacognitivi sin da piccoli: formulare ipotesi, progettare, descrivere i ragionamenti, controllare i percorsi fatti,…

Questi obiettivi trovano un terreno favorevole di sviluppo nelle attività che la didattica della matematica chiama «situazioni» (nel senso di Brousseau) e nei «laboratori matematici», attività nelle quali si offre all'allievo la possibilità di affrontare problemi stimolanti, di vivere momenti a-didattici nei quali è chiamato ad assumere la responsabilità del proprio apprendimento, ad agire autonomamente, a prendere decisioni senza l'aiuto dell'insegnante. Un ambiente che deve anche dargli soddisfazione e fargli apprezzare il piacere della ricerca in matematica.

Il laboratorio di matematica è già inserito nel programma della nostra scuola media, per ogni classe, e il suo svolgimento è previsto nel corso di tutto l'anno. L'organizzazione pratica, le modalità e la distribuzione oraria sono lasciate alla discrezione del docente. Questo spazio didattico è stato definito come «un insieme di attività dove gli allievi lavorano attorno a stimolazioni di carattere aperto, su argomenti non noti ma accattivanti, dove l'allievo sviluppa apprendimenti superiori convergenti (analisi, sintesi, riflessioni sul metodo) e divergenti (intuizione e invenzione)».

Fondamentale per questa attività è il clima di classe, che deve mettere l'allievo in uno stato d'animo il più possibile stimolante, divertito e privo di elementi inibitori. Sul piano didattico, all'insegnante si offre l'occasione di conoscere il modello mentale del singolo allievo, che è un elemento ben più importante della semplice verifica della riproduzione della conoscenza appresa. Occorre anche aggiungere che gli studenti non hanno molte possibilità a scuola di farsi un'idea corretta del legame esistente tra matematica e realtà, tra modello matematico e fenomeno reale. Questo fatto contribuisce a svuotare di senso la conoscenza matematica e ciò accade soprattutto agli allievi che incontrano maggiori difficoltà. È un ciclo chiuso: chi ha difficoltà ad apprendere la matematica non riesce a dare senso a ciò che sta apprendendo, d'altra parte chi non riesce a dare senso al proprio apprendimento non apprende in modo cosciente e robusto.

Durante il laboratorio di matematica gli allievi sono stimolati a formulare ipotesi e a mettere in discussione le loro convinzioni: si creano così nuove idee che contribuiscono alla conquista della conoscenza. Le conseguenti ricadute di carattere cognitivo e affettivo sono sicuramente positive e importanti. La percezione di sé e l'autostima vengono sicuramente incrementate: questo sembra essere il valore aggiunto più importante e qualificante di queste attività, valore che difficilmente può essere legato ad altre forme di attività didattica.

Il percorso degli allievi

Immersione nella situazione

Per affrontare l'argomento in modo diretto, l'insegnante ha chiesto agli allievi quali immagini o tematiche nascono nelle loro menti pensando alla parola «acqua».

A seguito di una discussione in classe, i contributi dei ragazzi sono stati classificati ed esemplificati con immagini commentate da loro stessi (link di descrizione per ogni immagine), dopo aver svolto una ricerca nella Rete.

Il risultato prodotto consiste in un documento creato dal contributo individualizzato e diversificato di ogni coppia di ragazzi.

L'obiettivo di questa prima parte del lavoro è definire o ridefinire (rifacendosi al 2003, anno dedicato all'acqua) il concetto di base «acqua: una delle risorse vitali più importanti».

Dati alla mano: il confronto critico con la situazione

Il secondo obiettivo da raggiungere è porsi in modo critico di fronte al consumo quotidiano, elaborando e sperimentando dati e regole di comportamento per assumere un'attitudine ecologicamente responsabile nei confronti di questa risorsa naturale.

Ed è proprio in questo ambito che la matematica assume un ruolo preponderante. Alla classe è posto l'interrogativo «quanta acqua pensi di consumare in un giorno?». Le risposte variano da un minimo di 100 a un massimo di 300 litri. Chiamati a motivare la natura di questa stima però gli allievi non riescono a dare ragioni precise. La consegna della seconda fase di lavoro diventa perciò di misurare il consumo quotidiano individuale. Nascono evidentemente numerosi interrogativi, che cosa e come misurare per confrontarsi tra di loro e, grazie alla Rete, con le statistiche mondiali.

Un primo passo consiste quindi nel concordare un elenco comune di consumi da studiare. Seguono le sperimentazioni e la raccolta di dati nella realtà, che sicuramente pongono interessanti problemi da risolvere. Ad esempio, come misurare «quanta acqua si consuma lavando i denti?», oppure «quanto incide ogni componente della famiglia nel consumo di acqua necessario per tutti i programmi delle lavatrici in una settimana? Come calcolare una media giornaliera?» o ancora quanta acqua si consuma «per la cura e l'igiene del corpo?». Una splendida occasione per sentire proposte quali «misuro quanta acqua eroga il rubinetto (dopo aver animatamente discusso sul flusso dell'acqua) in 5 secondi, rilevo quanto tempo impiego per lavare i denti (che si interrompa il flusso dell'acqua o no) e poi calcolo», ecc. E senza accorgersi gli allievi sviluppano ragionamenti, ipotesi, provano, utilizzando evidentemente molti argomenti del programma.

La raccolta dei dati di ognuno porta all'allestimento di un foglio elettronico, che permette di giungere alla stima del consumo totale giornaliero di ogni singolo allievo: un primo dato abbastanza concreto da confrontare con il valore che ognuno ha stimato all'inizio dell'attività.

Strumenti matematici di confronto

La terza fase è il confronto in classe. Occorre perciò riunire in un foglio elettronico i risultati concernenti i consumi totali individuali e studiare questo grande insieme di dati. Come fare? Nascono e vengono precisati i concetti di media, moda, mediana, scarto e ripartizione dei dati in classi, che gli allievi devono poi utilizzare in modo opportuno per tracciare un profilo di consumo di acqua della classe.

Pubblicazione sul sito della scuola

Per pubblicare il rapporto della ricerca e i particolari dell'elaborazione matematica, abbiamo scelto il supporto elettronico e sfruttato il sito della scuola, raggiungibile all'indirizzo

http://magistrale.ti-edu.ch/sm/Statistica2A03-04/start.htm

Tutti gli allievi, chi più chi meno, hanno contribuito a inserire i vari materiali prodotti e perfezionati in seguito alla messa in comune dei lavori dei vari gruppi. Ovviamente è stata anche curata la veste grafica, la correttezza linguistica e la qualità delle immagini pubblicate: un ottimo esempio di attività interdisciplinare.

Infine non si è persa l'occasione di creare una piccola pagina di link a portali che trattano il tema «acqua» e a portali di matematica: un'opportunità per dare agli allievi una visione diversa della Rete e per fornire strumenti di lavoro e di ricerca di materiali per la matematica e per altre discipline.

Ulteriori sviluppi

Come spesso succede quando a scuola si realizza un prodotto frutto di un lavoro di una certa portata, ci si accorge che lo stesso può avere altri sviluppi anche in altre discipline, come ad esempio il confronto con classi che vivono altrove, lo studio di leggende e racconti legati all'acqua, il significato e l'utilizzo dell'acqua in altre culture, o ancora la creazione di messaggi pubblicitari, e così via.

2. Nuova collana di testi di Matematica per la Scuola Media: Atolli Matematici 1, 2, 3, 4[1]

Gianfranco Arrigo

Starting from next September, the first volume of the new series of textbooks "Atolli matematici 1,2,3,4" will be available. It will gradually substitute the present series "Dimensione matematica I,II,III,IV". This new publishing production is meant to be a powerful didactic tool in relation to the new training programmes of the Scuola Media of Canton Ticino. The term "atollo" (atoll) means "family of situations", i.e. a set of didactic situations which helps achieving a specific level of competence in a definite core of the subject matter.

La collana

A partire dal prossimo mese di settembre verrà fornito alle scuole che ne faranno richiesta il primo volume della nuova serie di testi «Atolli matematici 1, 2, 3, 4» (AM 1, 2, 3, 4), curata da Gianfranco Arrigo, che sostituirà gradatamente l'attuale collana «Dimensione matematica I, II, III, IV». Come tradizione vuole, il primo volume pubblicato è dedicato alle terze medie e conta fra i coautori, oltre al curatore della collana, i signori Claudio Beretta, Giorgio Mainini e Remigio Tartini. Seguiranno, nell'ordine, i volumi AM 4 (settembre 2005), AM 1 (settembre 2006) e AM 2 (settembre 2007).

La nuova collana vuole essere un valido strumento didattico nell'ottica del «Piano di formazione della Scuola Media». Il termine «atollo» significa «famiglia di situazioni», così come è intesa nell'attuale programma di matematica, cioè un insieme di situazioni didattiche che contribuisce a far raggiungere un determinato livello di competenza, nel dato ambito contenutistico. Il testo di terza prevede tre atolli:

- Numeri
- Geometria
- Laboratorio matematico

L'atollo «Numeri»

È centrato sui numeri razionali sia in forma decimale sia in forma frazionaria, contiene un cenno ai numeri irrazionali e le prime formalizzazioni relative al calcolo letterale e alla risoluzione delle equazioni. Le situazioni di questo atollo portano i titoli seguenti:

- Sconti
- Ingranaggi e rapporti
- Carte topografiche e stradali

1. La collana è pubblicata dall'editore Giampiero Casagrande, Lugano.

- Miscele e leghe
- Misure sessagesimali
- La pendenza
- Numeri razionali e irrazionali; radici
- La frazione come misura di probabilità
- Elaborazioni statistiche
- Calcolo letterale ed equazioni

L'atollo «Numeri» inizia così:

Il Grande Magazzino dell'Atollo concede uno sconto del 35% su tutti gli articoli di abbigliamento.

ATTIVITÀ A

Un impiegato ha preparato quattro cartellini da apporre a quattro capi di abbigliamento: su ciascuno figura il prezzo di listino cancellato e sotto il prezzo scontato.

Controlla se ha svolto bene il suo compito; se trovi dei prezzi errati, correggili e cerca di capire che tipo di errore è stato commesso.

~~124.-~~	**~~18.-~~**	**~~550.-~~**	**~~115.70~~**
80.60	**6.30**	**742.50**	**178.-**

Lo stesso impiegato deve preparare altri cartellini. Ora però non può più sbagliare, pena una lavata di capo.

Aiutalo tu, redigendo una spiegazione o uno schema di calcolo che permettano di calcolare il prezzo scontato di qualsiasi articolo.

L'atollo «Geometria»

Ha come punto di riferimento il teorema di Pitagora e il suo inverso, principi che vengono applicati sia alle figure piane, sia a quelle tridimensionali, seguendo gli insegnamenti della ricerca didattica, che consiglia di far lavorare gli allievi parallelamente nel piano e nello spazio. Le situazioni di questo atollo portano i titoli seguenti:

- Esiste il triangolo?
- È un triangolo rettangolo?
- Usiamo il teorema di Pitagora quando si può…
- Prismi
- Piramidi
- Solidi di rotazione

L'atollo «Geometria» inizia così:

Scelti a caso tre segmenti, esiste sempre un triangolo che ha come lati questi segmenti?

ATTIVITÀ A

Esamina le terne di lunghezze seguenti: possono essere quelle dei lati di un triangolo?

a	b	c
e	f	g

$p = 3\ cm$ $\quad q = 5\ cm$ $\quad r = 8\ cm$

Che cosa puoi dedurre da questi tre casi?

L'atollo «Laboratorio matematico»

Come già nella collana «Dimensione matematica», il laboratorio propone interessanti e variate attività formative, in parte anche eseguibili con l'ausilio del mezzo elettronico. Le situazioni di questo atollo portano i titoli seguenti:

- Divertiamoci con i numeri
- Nel mondo delle figure geometriche
- Questioni combinatorie e probabilistiche
- Di tutto, di più

L'atollo «Laboratorio matematico» inizia così:

Uno strano numero

– *Traccia una riga di frazione,*
– *metti un numero naturale al denominatore,*
– *metti il suo successivo al numeratore,*
– *metti lo stesso numero all'esponente della frazione (che avrai racchiuso tra parentesi),*
– *calcola il valore dell'espressione.*

Come varia il risultato al variare del numero scelto?

Se scegli dei numeri parecchio grandi (ma veramente «parecchio»), che cosa osservi?

Chiedi alla tua calcolatrice il valore di e^x, per $x=1$: che cosa osservi?

Rispetto alla serie «Dimensione matematica» è scomparsa la parte di presentazione teorica (poco usata), sostituita da una «Sintesi teorica», una sorta di formulario ragionato.

Ecco i titoli della Sintesi teorica dell'atollo «Numeri»:

- I numeri razionali: che cosa sono, a che cosa servono
- Calcolare con i numeri razionali
- Calcolo con lettere ed equazioni in Q
- Numeri reali

Uno scorcio della «Sintesi teorica Numeri»:

Numeri reali

Abbiamo visto che i numeri razionali scritti in forma decimale possono essere solo di due tipi:

- i decimali finiti, *come per esempio*

$$\frac{3}{25}=\frac{12}{100}=0{,}12$$

- *i* ***decimali periodici****, come per esempio*

$$\frac{9}{13}=0{,}692307692307\ldots=0{,}\overline{692307}$$

Si possono però scrivere forme decimali di tipo diverso: né finite né periodiche. Esempi:

$0{,}12345678910111213141516171819202122232425262728293031323333435363738\ldots$

$0{,}101001000100001000001000000100000001000000001000000000100000000001\ldots$

$\pi=3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459 23\ldots$

$\sqrt{2}=1{,}4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797 38\ldots$

$\sqrt{5}=2{,}2360679774997896964091736687312762354406183596115257242708972454\ldots$

Questi numeri si dicono ***irrazionali*** *(cioè non razionali).*

Un numero irrazionale non è rappresentabile esattamente mediante la sua forma decimale: a un certo punto si è obbligati a tagliare la sequenza di cifre decimali. Si ottiene così una forma decimale finita, quindi un numero razionale, detto ***approssimazione*** *del numero irrazionale. Più il taglio viene spinto verso destra, maggiore è la precisione dell'approssimazione.*

Esempi:

tipo di approssimazione	π	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$
al decimo	3,1	1,4	2,2
al centesimo	3,14	1,41	2,24
al millesimo	3,141	1,414	2,236
al decimillesimo	3,1416	1,4142	2,2360
al centimillesimo	3,14159	1,41421	2,23610

Nella tabella l'approssimazione non è stata ottenuta semplicemente troncando la sequenza di decimali: l'ultima cifra è stata scelta in modo da ridurre al minimo l'errore.

I numeri irrazionali occupano determinati posti (punti) sulla retta dei numeri: posti lasciati liberi dai razionali. Per contro, razionali e irrazionali insieme occupano tutti i punti della retta.

A causa della forma decimale infinita e non periodica, questi numeri possono essere rappresentati o in forma simbolica oppure mediante un'approssimazione razionale.

Esempi:

grandezza	valore esatto (irrazionale)	valore approssimato (razionale)
ipotenusa i del triangolo rettangolo di cateti 7 cm e 9 cm	$i = \sqrt{49+81} = \sqrt{130}\ [cm]$	$i \cong 11{,}4\ cm$
A = area del cerchio di raggio 5 cm	$A = \pi \cdot 25\ cm^2$	$A \cong 78{,}54\ cm^2$

L'insieme dei numeri razionali e irrazionali si dice insieme dei numeri reali e si indica con la lettera R. Rispetto alle operazioni viste finora, l'insieme R dei numeri reali ha le stesse proprietà dell'insieme Q.

Questi i titoli della sintesi teorica dell'atollo «Geometria»:

- Triangoli
- Il teorema di Pitagora
- I prismi
- Le piramidi
- I solidi di rotazione

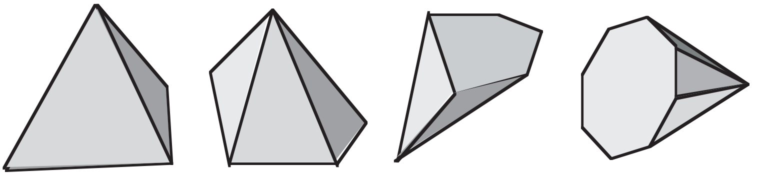
Uno scorcio della «Sintesi teorica Geometria»:

Le piramidi

Che cosa sono?

*Sono solidi che si ottengono a partire da un poligono (detto **base della piramide**) e da un punto fuori dal piano (detto **vertice della piramide**) che viene collegato con ciascun vertice della base mediante segmenti detti **spigoli laterali**. Questi a loro volta delimitano le **facce laterali** della piramide, che sono triangoli. Base e facce laterali delimitano una porzione di spazio detto appunto piramide.*

Ecco alcune figure che rappresentano altrettante piramidi.



Le piramidi prendono il nome dal tipo di poligono che è la base, come i prismi.

L'altezza della piramide è il segmento della perpendicolare alla base, uscente dal vertice.

Una piramide si dice regolare se ha come base un poligono regolare regolare e se l'altezza cade nel centro della base.

Misurare le piramidi

Le facce laterali di una piramide regolare sono triangoli isosceli, fra loro isometrici. L'altezza di questi triangoli si dice ***apotema della piramide****.*

V: volume della piramide
A_b: area di base
A_{lat}: area laterale
Σ_s: somma lunghezze spigoli del prisma
n: numero lati del poligono di base
h: altezza della piramide
a: apotema della piramide regolare
a_b: apotema della base di una piramide regolare
r: raggio del poligono circoscritto alla base di una piramide regolare
b: spigolo laterale di una piramide regolare
s: spigolo di base della piramide regolare

Formule interessanti:

piramide qualunque

$$V = \frac{1}{3} A_b\, h$$

piramide regolare

$$V = \frac{1}{3} A_b\, h$$

$$A_{lat} = \frac{n\, s\, a}{2}$$

$$\Sigma_s = n\, s + n\, b = n\left(s + b\right)$$

$$r^2 + h^2 = s^2$$

$$a_b{}^2 + h^2 = a^2$$

La «Palestra matematica» è ora presente anche nei volumi delle classi terza e quarta ed è seguita da un test di autocorrezione che dà come risultato nome e cognome di un matematico. Ecco i titoli della Palestra matematica dell'atollo «Numeri»:

- Operatore frazionario
- Problemi sulle frazioni e sulle percentuali
- Numeri razionali ed equazioni
- Quando le equazioni sono un gioco…
- Problemi con numeri grandi
- È probabile?
- Esplorazione di dati statistici
- Solo per matematici in erba…

Uno scorcio della «Palestra Numeri»:

In vacanza

La spiaggia delle nostre vacanze è distante 483 km. Partiti di buon mattino, dopo un po' ci si ferma per un caffè. «Abbiamo già percorso i 2/3 di strada», dice l'autista con tono soddisfatto.

Quanti km abbiamo percorso? Quanta strada rimane da fare?

I caffè e i pasticcini ci sono costati 12,80 euro. «Per sapere quanto farebbe in franchi basta calcolare i 3/2», suggerisce l'autista, che sembra essere bene informato.

Quanti franchi avremmo speso?

Prima di ripartire, l'autista accosta alla pompa di benzina per fare il pieno. «Abbiamo consumato 24,150 L di benzina», informa il nostro autista con la precisione che lo distingue.

Quanto ha consumato la macchina in litri per 100 km?

«Con la mia utilitaria, con un litro di benzina, percorro quasi 13 km», dice uno dei passeggeri.

Quale delle due auto consuma meno?

«Wow, la temperatura esterna è di 35°», dice sorpresa una delle passeggere, ma l'amico americano non capisce. Lui è abituato ai gradi Fahrenheit. «Sono gradi Celsius. Per trasformarli in gradi Fahrenheit, devi calcolare i 9/5 e poi aggiungere 32», ribatte il solito informatissimo autista.

Quanti gradi Fahrenheit si avranno esternamente?

Giunti a destinazione, l'albergatore promette all'allegra comitiva uno sconto del 15%, a condizione che si fermino per almeno 18 giorni. I nostri amici fanno i calcoli. Chi ha la mezza pensione spende 65 euro al giorno; quelli della pensione completa spendono 75 euro al giorno.

Quale sarebbe l'ammontare totale dello sconto (per una mezza pensione e per una pensione completa) in euro e in franchi, ammesso che si fermino tutti 18 giorni?

Questi i titoli della Palestra matematica dell'atollo «Geometria»:

- Problemi senza parole
- Semplice geometria
- Geometria applicata
- Quando la geometria è un gioco…
- Triangoli grandi
- Solo per geometri in erba…

Uno scorcio della «Palestra Geometria»:

Semplice geometria
Un cubo ha lo spigolo di 10 cm.
Quanto è lunga la sua diagonale?
E se indichiamo con s la misura dello spigolo, come si può esprimere quella della diagonale?

Un rombo ha il lato di 10,5 cm e una diagonale che è i 3/4 dell'altra.
Qual è la sua area?

Un parallelepipedo rettangolo ha gli spigoli che misurano 4,2 m, 5,6 m e 8,05 m.
Quanto è lunga la sua diagonale? E se indichiamo con a, b, c le misure degli spigoli, come si può esprimere quella della diagonale?

Un prisma ha come base un triangolo rettangolo avente l'ipotenusa di 36,55 m e un altro lato di 32,25 m. La sua altezza è 10 m.
Qual è il suo volume?
Generalizza il problema sostituendo i dati numerici ordinatamente con le lettere a, b, h.

Una piramide quadrangolare regolare ha tutti gli spigoli che misurano 12 cm.
Qual è il suo volume? E l'area della sua superficie?
Generalizza il problema sostituendo il dato numerico con la lettera s.

In ciascuno dei quattro volumi si propone la metafora della crociera da un atollo all'altro. Personaggio fisso è il capitano Maths, comandante della nave. Ogni anno ci saranno passeggeri diversi; in terza il capitano è accompagnato da due giovani quattordicenni, Titti e Pippo. I dialoghi di questi personaggi servono per dare senso alle attività immediatamente seguenti.

I contenuti del volume di terza sono stati provati in classe, durante il corrente anno scolastico, da una dozzina di docenti sperimentatori, ai quali vanno i ringraziamenti per l'ottimo lavoro svolto. Grazie alle loro osservazioni è stato possibile venire incontro a particolari esigenze che gli autori non avevano considerato. Si sono così accentuati gli sforzi per consentire un uso molto diversificato del testo, che secondo gli autori può essere usato sia nei corsi base sia in quelli attitudinali.

Durante il prossimo anno scolastico, nell'ambito dei corsi di aggiornamento organizzati dall'ASP, sarà proposto anche un corso dedicato all'uso di materiale didattico appositamente studiato nell'ottica del raggiungimento di determinati livelli di competenza. In quella sede ci si riferirà particolarmente al testo «Atolli matematici 3» e si daranno parecchi consigli ed esempi relativi all'uso del testo in classe.

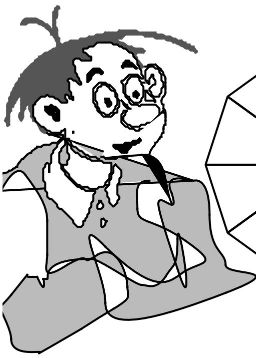
L'editore, il curatore della collana e i coautori sono sicuri che la nuova serie di manuali incontrerà il gradimento della maggior parte degli insegnanti di matematica, che saprà apprezzarne il valore culturale, l'interesse didattico e l'elegante veste tipografica.

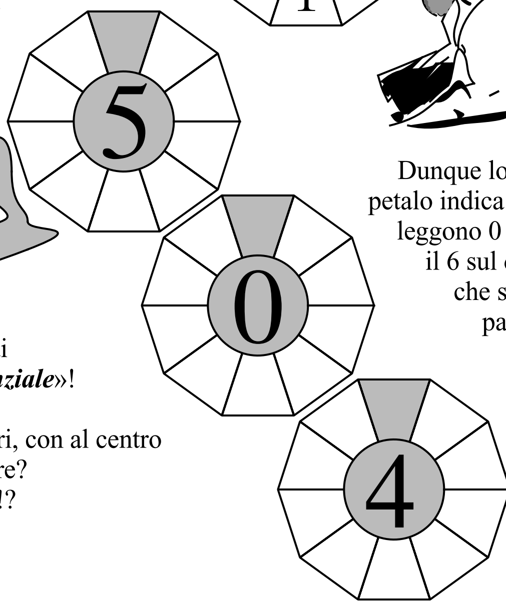
Quiz numero 31

Aldo Frapolli

Caro Archie, osserva bene questo «fiore» con al centro il numero 1 e, sui dieci petali che lo circondano, dei numeri interi compresi fra 0 e 9.

Noterai che sul primo petalo – quello scuro – sta il numero di «1» che si trovano sul fiore; sul secondo petalo – procedendo di un passo in senso orario – sta il numero di «2» che si trovano sul fiore, e così via, fino al decimo petalo che porta il numero di «0» che stanno sul fiore.





Dunque lo 0 situato sul nono petalo indica che sul fiore si leggono 0 «9» mentre il 6 sul decimo petalo ... che sul fiore compaiono 6 «0».

Una bella specie di «***fiore autoreferenziale***»!

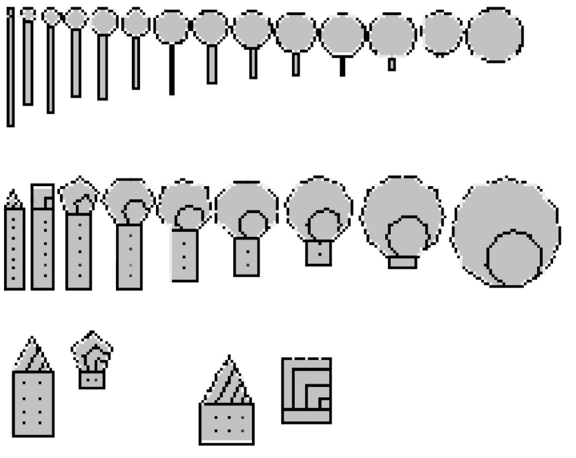
Ne esisteranno altri, con al centro una delle dieci cifre? Vediamo un po’...!?

Dunque ... tutti alla ricerca di «fiori autoreferenziali»!
Spediteci il vostro raccolto per posta. Naturalmente avremmo piacere se, assieme ai fiori, ci recapitaste anche le strategie segrete messe in atto per stanarli.

Come sempre il miglior contributo verrà premiato con un bel libro. Buon divertimento.

Soluzione del Quiz numero 30

Chi l'avrebbe pensato. Per festeggiare il «trentesimo» c'erano 27 possibili candeline diverse. Eccole in uno schizzo riassuntivo.



Fra coloro che hanno raccolto la sfida uno solo le ha individuate e descritte tutte nel dettaglio, fornendo anche una loro rappresentazione con Cabri. Si tratta di Paolo Hägler di Bellinzona, del quale vi proponiamo la soluzione. Eccola:

Consideriamo come unità la distanza di due puntini lungo una linea.
Abbiamo 4 variabili diverse, ossia:
il numero k di lati del poligono regolare nella fiamma, il numero m di poligoni regolari di k lati nella fiamma, l'altezza h della candela (fiamma esclusa) e il numero totale t dei puntini
Il numero di puntini nella candela (senza la fiamma) è h(m+1).

Il numero di puntini nel poligono regolare più piccolo della fiamma è k; il numero di puntini nel secondo poligono regolare (se m ≥ 2) è 2k (3 dei quali coincidono con dei puntini del primo poligono); il numero di puntini nel terzo poligono regolare (se m ≥ 3) è 3k (5 dei quali coincidono con dei puntini del primo o del secondo poligono) ed in generale il numero di puntini nel j-esimo poligono regolare (se m ≥ j) è jk (2j-1), dei quali coincidono con dei puntini di poligoni precedenti.

Quindi il numero totale di puntini è:

$$t = h(m+1) + k + \sum_{j=2}^{m} jk - 2j + 1$$

Uguaglianza che opportunamente rielaborata è equivalente a:

$$h(m+1)-1+\sum_{j=1}^{m} jk-2j+1=t$$

$$h(m+1)-1+k\frac{m(m+1)}{2}-2\frac{m(m+1)}{2}+m=t$$

$$2h(m+1)-2+km(m+1)-2m(m+1)+2m=2t$$

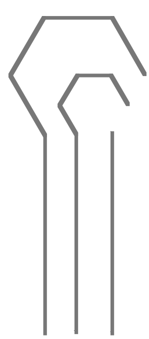
$$(m+1)\left[2(h+1)+m(k-2)\right]=2t$$

Osserviamo che di conseguenza (m + 1) dev'essere un divisore di 2t, poiché le 4 variabili rapresentano dei numeri naturali non nulli.
Inoltre, siccome k > 2, deve'essere (m + 1)(2 +m) < 2t.

Se vogliamo confezionare una candela con 30 puntini dobbiamo quindi scegliere m nell'insieme {1; 2; 3; 4; 5}.

Se m=1 abbiamo 2(2h + k) = 60 da cui 2h + k = 30.
Quindi k deve essere pari compreso tra 4 e 30 (figure 1 - 14 , casi poco interessanti).
Se m=2 abbiamo 3(2h - 2 + 2k) = 60 da cui h + k = 11.
Quindi k deve essere compreso tra 3 e 11 (figure 15 - 23).
Se m=3 abbiamo 4(2h - 4 + 3k) = 60 da cui 2h + 3k = 19.
Quindi k deve essere dispari compreso tra 3 e 5 (figure 24 - 25).
Se m=4 abbiamo 5(2h - 6 + 4k) = 60 da cui h + 2k = 9.
Quindi k può valere solo 3 oppure 4 (figure 26 - 27).
Se m=5 abbiamo 6(2h - 8 + 5k) = 60 da cui 2h + 5k = 18.
Quindi k deve essere pari ma inferiore a 4. Non vi è quindi alcuna soluzione.

Grazie e complimenti al nostro vincitore.



Da parte nostra vorremmo suggerire un approccio risolutivo un po' diverso, attirando l'attenzione su una caratteristica molto interessante delle candele proposte: la loro struttura «a cipolla», in cui vari strati si avviluppano l'uno sull'altro formando il prodotto finale (vedi figura a lato). È così possibile osservare che i numeri di punti che formano i vari strati di una candela formano una successione aritmetica e che i numeri di punti racchiusi entro un determinato strato costituiscono i termini della successione delle somme parziali di tale successione aritmetica. In particolare:

(a_n)= 6, 10, 14, 18, ... (S_n)= 6, 16, **30**, 48, ..
(b_n)= 3, 6, 9, 12, 15, ... (S_n)= 3, 9, 18, **30**, 45 ...
(c_n)= 3, 10, 17, 24, ... (S_n)= 3, 13, **30**, 54, ...
In generale siamo di fronte alle successioni:
(a_n)=p+nr, con primo termine p e ragione r

$$(S_n)=(a_1+a_n)\frac{n}{2}=\left[(n-1)r+2p\right]\frac{n}{2}$$

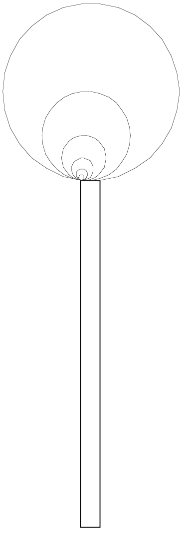
In tale ottica la domanda del Quiz era equivalente al problema di individuare quali sucessioni aritmentiche presentavano il numero 30 come somma parziale. Le possibili risposte sono dunque le soluzioni dell'equazione $S_n=30$, calcolabili tenendo conto del fatto che le incognite p, r , n sono numeri naturali con r≥3 e procedendo in modo molto simile a quello proposto dal nostro vincitore.

Sulla scorta delle sue conclusioni generali, P. Hägler si è cimentato anche con la candela del 2004, giungendo alle seguenti conclusioni:

Se vogliamo confezionare una candela con 2004 puntini dobbiamo invece scegliere m nell'insieme {1; 2; 3; 5; 7; 11; 23}.

Se m=1 abbiamo 2(2h + k) = 4008 da cui 2h + k = 2004.
Quindi k deve essere pari compreso tra 4 e 2004 (casi poco interessanti).
Se m=2 abbiamo 3(2h - 2 + 2k) = 4008 da cui h + k = 669.
Quindi k deve essere compreso tra 3 e 669.
Se m=3 abbiamo 4(2h - 4 + 3k) = 4008 da cui 2h + 3k = 1006.
Quindi k deve essere pari compreso tra 4 e 334.
Se m=5 abbiamo 6(2h - 8 + 5k) = 4008 da cui 2h + 5k = 676.
Quindi k deve essere pari compreso tra 4 e 134.
Se m=11 abbiamo 12(2h - 20 + 11k) = 4008 da cui 2h + 11k = 354.
Quindi k deve essere pari compreso tra 4 e 32.
Se m=23 abbiamo 24(2h - 44 + 23k) = 4008 da cui 2h + 23k = 211.
Quindi k deve essere dispari compreso tra 3 e 9.

Vi proponiamo a lato lo schizzo di una delle molte candele possibili, scelta fra quelle esteticamente più belle e calcolata a partire dalla soluzione particolare m=5, k=30, h=263 nel primo modello corrispondente a n=6, p=264, r=28 nel secondo modello.



Il numero di punti della candela proposta è pari alla somma dei primi 6 termini della successione aritmetica $(a_n)=264+28n$, vale a dire a $S_6=2004$ puntini.

La «parte in cera» della candela è un rettangolo di 6x263 punti, mentre la «fiamma» è composta da 426 punti situati su 5 poligoni regolari di 30 lati, su ognuno dei quali si trovano distribuiti nell'ordine 28, 56, 84, 112, 140 punti.

IV. Dalla bricolla

1. L'unione fa la forza, ma non sempre[1]

Giorgio Mainini

Idea base
Su un tavolino, T1, ci sono due cappelli, uno nero e uno grigio:
quello nero contiene 5 palline rosse e 6 palline bianche,
quello grigio contiene 3 palline rosse e 4 palline bianche;

Su un altro tavolino, T2, ci sono due cappelli, uno nero e uno grigio:
quello nero contiene 6 palline rosse e 3 palline bianche,
quello grigio contiene 9 palline rosse e 5 palline bianche.

Si vuole massimizzare la probabilità di estrarre una pallina rossa:
da quale cappello su T1 conviene estrarre?
da quale cappello su T2 conviene estrarre?

Non è difficile:

su T1, la probabilità di estrarre una pallina rossa dal cappello nero è $p_{T1,N}(r)= \frac{5}{11}$,
su T1, la probabilità di estrarre una pallina rossa dal cappello grigio è $p_{T1,G}(r)= \frac{3}{7}$,

e, poiché $\frac{5}{11} > \frac{3}{7}$, conviene pescare dal cappello nero;

su T2, la probabilità di estrarre una pallina rossa dal cappello nero è $p_{T2,N}(r)= \frac{6}{9}$,

1. Da un'idea di Martin Gardner.

su T2, la probabilità di estrarre una pallina rossa dal cappello grigio è $p_{T2,G}(r)= \frac{9}{14}$,

e, poiché $\frac{6}{9} > \frac{9}{14}$, conviene pescare dal cappello nero.

Diciamo, per semplificare, che «Nero batte Grigio su entrambi i tavoli».
Adesso si mettono tutte le palline dei cappelli neri in un solo cappello nero e tutte le palline dei cappelli grigi in un solo cappello grigio sul tavolo T.
Per massimizzare la probabilità di estrarre una pallina rossa su T, da quale cappello conviene pescare?
Visto che «Nero batte Grigio su entrambi i tavoli», pescare dal nero sembra una buona idea.
Controlliamo:
il nuovo cappello nero contiene (5+6=11) palline rosse e (6+3=9) palline bianche, e
il nuovo cappello grigio contiene (3+9=12) palline rosse e (4+5=9) palline bianche
dunque

$p_{T,N}(r)= \frac{11}{20}$ e $p_{T,G}(r)= \frac{12}{21}$

Poiché $\frac{12}{21} > \frac{11}{20}$, conviene pescare dal cappello grigio!

L'unione **non** ha fatto la forza…

Verso una generalizzazione
Vediamo se il paradosso si verifica anche con altre distribuzioni di palline nei cappelli su T1 e T2.
Si ha il seguente schema:

	T1		T2		T	
	nero	grigio	nero	grigio	nero	grigio
rosse (r)	5	3	6	9	11	12
bianche (b)	6	4	3	5	9	9

nel quale si vede una regolarità del tipo:

	T1		T2		T	
	nero	grigio	nero	grigio	nero	grigio
r	x+2	x	x+3	x+6	2x+5	2x+6
b	x+3	x+1	x	x+2	2x+3	2x+3
$\frac{r}{b}$	$\frac{x+2}{x+3}$	$\frac{x}{x+1}$	$\frac{x+3}{x}$	$\frac{x+6}{x+2}$	$\frac{2x+5}{2x+3}$	$\frac{2x+6}{2x+3}$

Si osservi che la riga «b» mostra quattro numeri consecutivi, ordinati al 4°, 2°, 1°, 3° posto.

La cosa è simpatica, se si osserva:

– da un lato che la probabilità di pescare una pallina rossa è strettamente legata al rapporto tra palline rosse e palline bianche: la probabilità cresce al crescere del rapporto (difatti, indicando con r_1, r_2, b_1 e b_2 il numero di palline rispettivamente rosse e bianche in due cappelli, se

$\frac{r_1}{b_1} > \frac{r_2}{b_2}$, allora, come è noto,

$\frac{r_1}{r_1+b_1} > \frac{r_2}{r_2+b_2}$, e $\frac{r_1}{r_1+b_1}$ e $\frac{r_2}{r_2+b_2}$ sono

le probabilità di estrarre una pallina rossa da cappelli con il numero indicato di palline);

(Ai … tempi delle proporzioni, questa veniva chiamata «proprietà del comporre»).

– dall'altro che la somma del primo e del quarto di quattro numeri successivi è uguale alla somma del secondo e del terzo: ciò consente un facile confronto delle probabilità su T.

Ciò che avviene su T è evidente dalla tabella (caselle a sfondo grigio).
Ci si deve però assicurare, affinché il paradosso regga, che

$\frac{x+2}{x+3} > \frac{x}{x+1}$ e $\frac{x+3}{x} > \frac{x+6}{x+2}$

Ora, tenendo conto che deve essere $x>0$,
la 1) è soddisfatta sempre
la 2) è soddisfatta solo se $x<6$

Di conseguenza, lo schema funziona solo se $x<6$.

Per curiosità, vediamo che cosa capita se $x=6$:

	T1		T2		T	
	nero	grigio	nero	grigio	nero	grigio
r	8	6	9	12	17	18
b	9	7	6	8	15	15
$\frac{r}{b}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$	$\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$	$\frac{17}{15}$	$\frac{18}{15}$

Quindi, su T2 non è più vero che si «deve» pescare dal cappello nero: è «indifferente» da quale cappello si peschi, e il paradosso cade.
Si lascia al lettore il gusto di verificare che cosa accade se $x>6$.
Insomma: lo schema non funziona sempre, ma ci permette almeno di trovare altre distribuzioni di palline, per $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Alla ricerca di schemi più efficienti

Ciò che riduce l'efficienza dello schema visto sopra è la disequazione

$$\frac{x+3}{x} > \frac{x+6}{x+2}$$

la cui soluzione, sotto la condizione x>0, ricordo, è x<6.
E se fosse

$$\frac{x+4}{x} > \frac{x+7}{x+2} \quad ?$$

Mica male: la sua soluzione è x<8, alla solita condizione, che non citerò più, x>0. Ci abbiamo guadagnato!
E allora avanti, senza esagerare con i numeri. La disequazione

$$\frac{x+a}{x} > \frac{x+a+3}{x+2}$$

bello!, ha la soluzione x<2a.
Quindi, se vogliamo che il paradosso funzioni per x<100, basta porre a=50, eccetera.
Non abbiamo più limiti!

Altri schemi?

Per esser bello, un gioco deve durar poco!
Io ho dato uno stimolo: chi vuole, continui. Auguri!

Un problema «bonsai»

La prima soluzione fornita prevede l'uso di 41 palline: qual è il numero minimo di palline per il quale il paradosso funziona?

1. Attività di laboratorio matematico per la scuola elementare

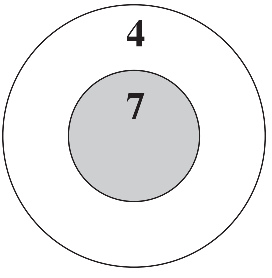
Gianfranco Arrigo

A. Proposte per attività in classe

Proposta 1
Composizioni e scomposizioni additive

1.1. Tiro con le freccette

Si possono fare tutti i tiri che si vogliono sul seguente bersaglio:



Domanda: addizionando i punteggi conseguiti, quali somme **non** è possibile ottenere?

1.2. Monete

Usando solo monete da 2 Fr e da 5 Fr, in quanti modi è possibile formare la somma di 57 Fr?

1.3. Formare quadrati

Anna, Bob e Carolina hanno lo stesso numero di piastrelle quadrate. Usando tutte le sue, Anna ha costruito due quadrati: uno di 9x9, l'altro di 2x2.

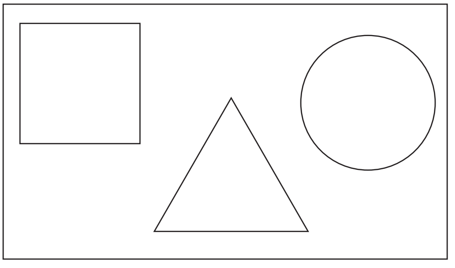
Bob, anche lui utilizzando tutte le sue piastrelle, ha costruito due quadrati diversi da quelli di Anna.

Carolina dice di voler costruire, con tutte le sue piastrelle, tre quadrati.
Prima domanda: quali quadrati può aver costruito Bob?
Seconda domanda: riuscirà Carolina nel suo intento?

Proposta 2
Combinarne di tutti i colori

2.1. Tutti diversi?

La maestra ha distribuito a ciascun allievo della sua classe un foglio con disegnate tre figure geometriche diverse.



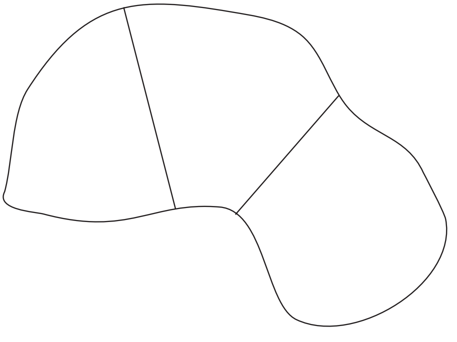
I 23 alunni ricevono la consegna di colorare ciascuna figura con un colore diverso dalle altre, scegliendo fra i seguenti colori: rosso, blu, verde, giallo.

Prima domanda: è possibile che tutti i fogli vengano colorati diversamente?

Seconda domanda: a partire da quanti alunni questo fatto non può verificarsi?

2.2. Colorare carte geografiche

L'isola Albatros è suddivisa in tre regioni, come mostra la cartina seguente:



Si hanno a disposizione 4 colori. Si tratta di colorare ciascuna regione con uno di questi colori in modo che due regioni confinanti non abbiano lo stesso colore.

Domanda: in quanti modi diversi può essere fatta la colorazione?

Proposta 3
Ordinamenti

3.1. Le età delle 4 amiche

Annalisa, Barbara, Clara e Dafne hanno tutte età diverse.
Si sa che:

- Dafne è più giovane di Annalisa
- Clara è più giovane di Dafne
- Barbara è più vecchia di Annalisa

Domanda: è possibile con queste informazioni mettere in fila le quattro ragazze, dalla minore alla maggiore?

Variante:

- Dafne è più giovane di Annalisa
- Clara è più giovane di Dafne
- Barbara è più vecchia di Dafne

3.2. La linea ferroviaria

Casale, Ermelle, Fermo, Malerna, Vetto sono stazioni di una linea ferroviaria.

Marina sale tutti i giorni a Malerna per recarsi a Fermo, dove lavora. Nel suo viaggio passa sempre da Ermelle, ma non ha mai visto né la stazione di Vetto né quella di Casale.

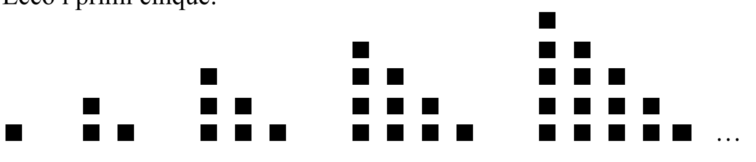
Dario prende tutti i giorni lo stesso treno di Marina, ma sale a Vetto e scende a Casale.

Domanda: è possibile con queste informazioni collocare in ordine, lungo la linea ferroviaria, le stazioni di queste località?

Proposta 4
Successioni

4.1. I numeri triangolari

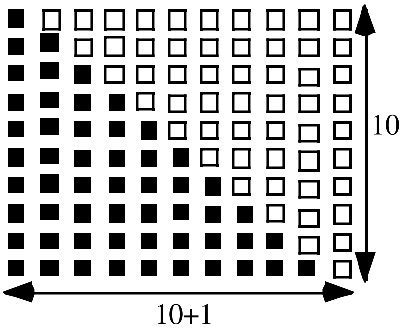
Ecco i primi cinque:



1 **3**=1+2 **6**=1+2+3 **10**=1+2+3+4 **15**=1+2+3+4+5 …

Prima domanda: disegna il decimo numero triangolare e scrivilo in cifre.

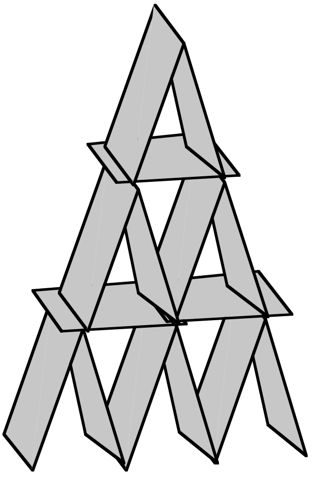
Seconda domanda: guarda bene la figura che segue: ti può aiutare per rispondere facilmente alla prima domanda, non solo, ma per calcolare qualsiasi numero triangolare. Come?



Terza domanda: il centesimo numero triangolare non riesci a disegnarlo: ci vuole troppa pazienza; però lo puoi calcolare…

4.2. Castelli di carte

Marco ha costruito un castello a 3 piani con le carte da gioco:



Prima domanda: quante carte ha usato?

Seconda domanda: quante ne occorrono per costruire un castello di 4 piani?

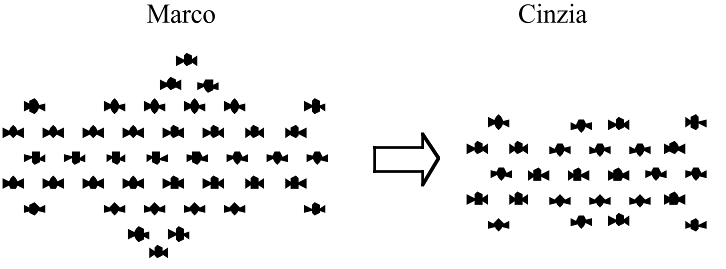
Terza domanda: quante ne occorrono per costruire un castello di 10 piani?

Proposta 5
Suddivisioni

5.1. Bipartizione equa

Marco ha 42 caramelle, Cinzia ne ha 24.

Quante caramelle deve dare Marco a Cinzia in modo che tutti e due ne posseggano un ugual numero?



5.2. Bipartizione «2 a 1» (2:1)

Marco ha un sacchetto contenente 66 caramelle. Le vuole ripartire in due sacchetti, in modo che nel primo vi sia un numero di caramelle doppio del secondo.

Quante caramelle deve mettere in ciascun sacchetto?

5.3. Bipartizione «5 a 1» (5:1)

Marco ha un sacchetto contenente 66 caramelle. Le vuole ripartire in due sacchetti, in modo che nel primo vi sia un numero di caramelle quintuplo del secondo.

Quante caramelle deve mettere in ciascun sacchetto?

5.4. Bipartizione «10 a 1» (10:1)

Marco ha un sacchetto contenente 66 caramelle. Le vuole ripartire in due sacchetti, in modo che nel primo vi sia un numero di caramelle decuplo del secondo.

Quante caramelle deve mettere in ciascun sacchetto?

5.5. Bipartizione «n a 1» (n:1)

Con 66 caramelle, quali altre diverse ripartizioni «n a 1» sono possibili?

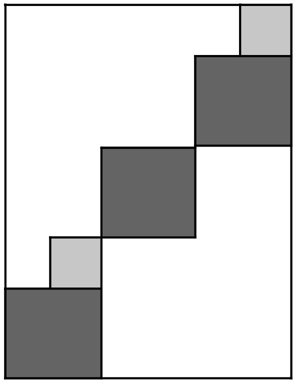
5.6. Tripartizione «1 a 2 a 4» (1:2:4)

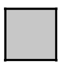
Si vogliono ripartire 49 biglie in tre scatole in modo che la prima scatola contenga la metà delle biglie della seconda e la seconda la metà delle biglie della terza.

Quante biglie dovrà contenere la terza scatola?

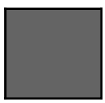
Proposta 6
Perimetri e aree

6.1. Dipinti geometrici a due elementi





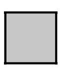
è un quadrato di lato **1 cm**



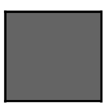
è un quadrato di lato **2 cm**

Prima domanda: qual è il perimetro del dipinto?
Seconda domanda: qual è l'area del dipinto?

Cambiamo l'unità di misura:



è un quadrato di area **1 quadretto**

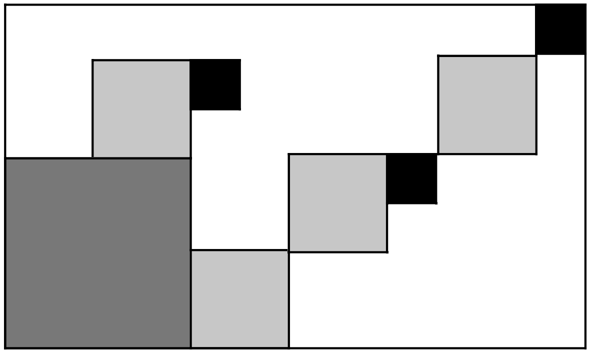


è un quadrato avente il lato doppio del precedente di area **1 quadrone**

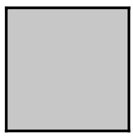
Terza domanda: qual è l'area del dipinto in **quadretti** e qual è l'area del dipinto in **quadroni**?

Quarta domanda: componi un dipinto a due elementi, seguendo il tuo estro, e dallo a un tuo compagno con la richiesta di rispondere alle domande precedenti.

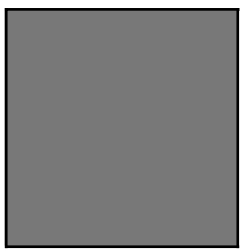
6.2. Dipinti geometrici a tre elementi



è un quadrato di area **1 quadretto**



è un quadrato avente il lato doppio del precedente e di area **1 quadrone**.



è un quadrato avente il lato doppio del precedente e di area **1 superquadro**

Prima domanda: qual è l'area del dipinto in **quadretti**? quale in **quadroni**? quale in **superquadroni**?

Seconda domanda: se il lato di un quadretto è 1 cm, quello di un quadrone 2 cm e quello di un superquadro 4 cm, calcola perimetro e area del dipinto[1].

Terza domanda: componi un dipinto a tre elementi, seguendo il tuo estro, e dallo a un tuo compagno con la richiesta di rispondere alle domande precedenti.

6.3. Partendo da un quadrato…

Disegna su un foglio di carta colorata un quadrato e le sue diagonali. Con un paio di forbici esegui due tagli lungo le diagonali: ottieni quattro triangoli.

Quali altre figure si possono comporre usando tutti e quattro i triangoli? (Attenzione: ogni triangolo deve avere un intero lato in comune con un altro)

Che cosa hanno in comune le diverse figure trovate?

1. Per semplicità di linguaggio, si sono identificate le unità di misura (quadretto, quadrone e superquadro) con i quadrati rappresentativi.

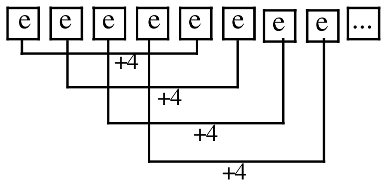
B. Cenni sulle soluzioni e commenti didattici

1.1.

Si può iniziare scrivendo un segmento iniziale della successione dei numeri naturali e poi, per ciascun numero scritto, si determina se corrisponde a un punteggio ottenibile oppure no. Di seguito sono inquadrati i punteggi **non** ottenibili…

$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}$ 4 $\boxed{5}\ \boxed{6}$ 7 8 $\boxed{9}\ \boxed{10}$ 11 12 $\boxed{13}$ 14 15 16 $\boxed{17}$ 18 19 20 21 22 …

Quando si trovano quattro risultati possibili consecutivi, la ricerca è conclusa. Infatti…



… se, a un certo punto, vi sono quattro risultati possibili consecutivi (4 è il punteggio minore indicato sul bersaglio), saranno possibili anche i quattro prossimi e via di seguito. Continuando è sicuro che non si trovano più numeri non esprimibili come combinazione lineare di 4 e di 7. Dunque si hanno solo 9 soluzioni.

Ovviamente, queste sono considerazioni per l'insegnante, ma chi ha provato a proporre questa attività in classe (dalla classe terza in avanti) assicura che gli alunni della scuola elementare non impiegano molto a intuire questo fatto e lo spiegano, correttamente, a modo loro.

1.2.

Le soluzioni sono 6:

monete da 2 Fr	monete da 5 Fr	Totale Fr
1	11	57
6	9	57
11	7	57
16	5	57
21	3	57
26	1	57

Si inizia per esempio con 1 moneta da 2 Fr.: va bene e ce ne vogliono 11 da 5 Fr. Il prossimo numero di monete da 2 Fr. dev'essere scelto tenendo presente che ci si deve muovere tra i multipli di 5; ora, il più piccolo multiplo di 5 composto di una somma di addendi tutti uguali a 2 è 10. Dunque i prossimi quantitativi di monete da 2 Fr. si ottengono addizionando ogni volta 5. Anche questo è un ragionamento da adulti; ma gli alunni della scuola elementare, se opportunamente stimolati, riescono a trovare tutte le soluzioni e arrivano a intuire che non ce ne sono altre. Questo aspetto è strettamente legato al primo sviluppo dell'educazione al pensiero combinatorio.

1.3.

Ogni bambino ha 81+4=85 piastrelle.

Il problema consiste nel trovare una scomposizione additiva di 85 in due addendi quadrati. Il primo quadrato costruito da Bob può essere uno dei seguenti:

64, 49, 36, 25, 16, 9

Se si fanno bene i calcoli, si vede che l'unica possibilità è di formare un quadrato di 49 e uno di 36. Un ragionamento analogo porta alla conclusione che 85 non può essere scomposto nella somma di tre addendi quadrati; non diciamolo agli allievi, anzi lasciamo loro credere che esiste una soluzione. In questo modo saranno stimolati non solo a cercare per tentativi, ma a trovare un modo sistematico di ricerca che permetta di affermare con sicurezza la non esistenza.

2.1.

Esistono

$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

diverse possibilità di colorare. A partire da 25 alunni ci sono sicuramente almeno due colorazioni identiche.

Qui è basilare il ragionamento combinatorio: per colorare la prima figura posso scegliere fra 4 colori; per ciascuna di queste ho solo 3 possibilità di scelta per colorare la seconda figura; per ciascuno dei casi precedenti ho ancora solo 2 scelte per colorare la terza figura.

2.2.

Con tre colori esistono

$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

colorazioni diverse.

Con due colori esistono

$4 \cdot 3 = 12$

colorazioni diverse.

In totale esistono $24 + 12 = 36$ modi diversi di colorare la cartina.

Anche qui il ragionamento combinatorio è basilare.

3.1.

Dalla più giovane alla meno giovane:

Clara, Dafne, Annalisa, Barbara.

Nella variante vi sono due possibilità:

Clara, Dafne, Annalisa, Barbara oppure Clara, Dafne, Barbara, Annalisa.

Per risolvere questo problema è importante schematizzare ciascuna informazione.

3.2.

Successione delle stazioni:

Vetto, Malerna, Ermelle, Fermo, Casale.

Anche qui occorre schematizzare ciascuna informazione, con la difficoltà supplementare che queste ultime non sono ben scandite come in precedenza.

4.1.

posto occupato	numero triangolare
I	1
II	3 = 1 + 2
III	6 = 1 + 2 + 3
IV	10 = 1 + 2 + 3 + 4

(solo per gli insegnanti)

n $\qquad 1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$

10 $\qquad \dfrac{10\cdot(10+1)}{2}=55$

100 $\qquad \dfrac{100\cdot(100+1)}{2}=5050$

La difficoltà è mitigata dal suggerimento figurale.

4.2.

Per poter capire la legge di formazione della successione è importante lasciare indicati i calcoli:

numero piani	numero carte
1	2
2	$2+2\cdot 2+1$
3	$2+2\cdot 2+2\cdot 3+(1+2)$
4	$2+2\cdot 2+2\cdot 3+2\cdot 4+(1+2+3)$
…	…

(solo per gli insegnanti)

n $\qquad 2(1+2+\ldots+n)+(1+2+3+\ldots+n-1)=$

$$=2\ \frac{1+n}{2}\cdot n+\frac{1+n-1}{2}\cdot(n-1)=n+n^2+\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}=$$

$$=1{,}5\cdot n^2+0{,}5\cdot n$$

Per pura curiosità, inserendo la formula in un foglio elettronico, si può ottenere:

numero piani	numero carte
1	2
2	7
3	15
4	26
5	40
6	57
7	77
8	100
9	126
10	155

Problema molto difficile, ma stimolante.

5.1.
Marco dà 9 caramelle a Cinzia, così ne hanno 33 ciascuno.
$9 = (42 - 24) : 2$
Questo problema può anche essere risolto per tentativi, eventualmente effettuati mediante manipolazione concreta.

5.2.
$66 : 3 = 22$
Nel primo sacchetto Marco mette 44 caramelle, nel secondo 22.
Per capire la soluzione si può ricorrere a una schematizzazione:

$\boxed{22} \qquad \boxed{22}\boxed{22}$

5.3.
$66 : 6 = 11$
Nel primo sacchetto Marco mette 55 caramelle, nel secondo 11.
Anche qui è molto utile la schematizzazione.

5.4.
$66 : 11 = 6$
Nel primo sacchetto Marco mette 60 caramelle, nel secondo 6.
Anche qui è molto utile la schematizzazione.

5.5.
Occorre ricercare tutte le scomposizioni moltiplicative (non banali) di 66 in due fattori:
$2 \cdot 33$; $3 \cdot 22$; $6 \cdot 11$. I valori di n sono, nell'ordine: 2 , 3 , 6 , 11 , 22 , 33.
La procedura di risoluzione può essere dedotta dalle precedenti.

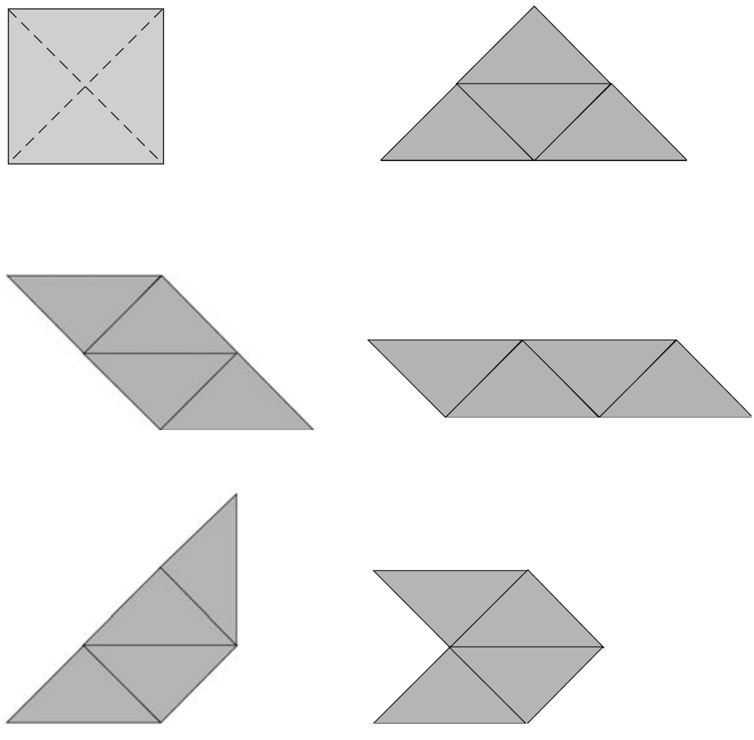
5.6.
$1 + 2 + 4 = 7$; $49 : 7 = 7$
Tripartizione corretta: 7 ; 14 ; 28
La procedura di risoluzione può essere dedotta dalle precedenti.

6.1.
Perimetro: 28 cm
Area: 48 cm^2
Area: 48 quadretti = 12 quadroni

6.2.
Area: 84 quadretti = 21 quadroni = 21/4 superquadri
Perimetro: 38 cm
Area: 84 cm^2

6.3.

Ecco alcuni esempi di figure che si possono trovare:



Se la cosa interessa, si potrebbe lanciare l’idea di trovarle tutte. In questo caso occorre stabilire che due figure vengono considerate diverse solo se non si possono sovrapporre esattamente (uguaglianza a meno di un’isometria).

2. Laboratorio matematico per la scuola secondaria

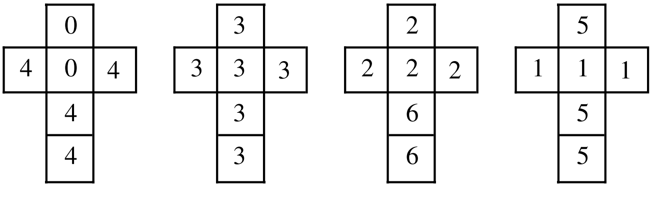
2.1. Attività sulla probabilità: quando un gioco è leale?

Alberto Piatti[1]

Primo gioco: i dadi strambi

Materiale

Quattro dadi strambi[2], cioè aventi i seguenti sviluppi:



Regole del gioco

Il primo giocatore sceglie un dado fra i quattro a disposizione e lo lancia. Il secondo giocatore sceglie uno dei tre dadi rimasti e lancia a sua volta. Vince chi ottiene il risultato più alto.

Secondo gioco: le scommesse

Materiale

Un dado normale.

1. Lavoro presentato agli abilitandi in matematica dell'ASP di Locarno nel mese di dicembre 2003.
2. Si tratta dei dadi di Bradley-Efron, presentati da Arthur Engel in *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*, Band 1, Klett Verlag, Stuttgart 1973 e ripresi da G. Arrigo sul BDM 38, maggio 1999, pag. 46-47.

Regole del gioco

Il primo giocatore sceglie un tipo di scommessa fra i sette possibili. Il secondo giocatore tira il dado. Entrambi annotano la propria vincita (o perdita), seguendo le indicazioni del tipo di scommessa scelta.

Scommesse possibili

(Il valore positivo significa ricevere la somma dall'altro giocatore, quello negativo significa dare la somma all'altro giocatore).

	Risultato	Giocatore 1	Giocatore 2
1.	Dispari	1 Fr.	–1 Fr.
	Pari	–1 Fr.	1 Fr.

	Risultato	Giocatore 1	Giocatore 2
2.	2;4	2 Fr.	–2 Fr.
	1;3;5;6	–1 Fr.	1 Fr.

	Risultato	Giocatore 1	Giocatore 2
3.	5	50 Fr.	–50 Fr.
	1;2;3;4;6	–10 Fr.	10 Fr.

	Risultato	Giocatore 1	Giocatore 2
4.	Dispari	150 Fr.	–150 Fr.
	Pari	–150 Fr.	150 Fr.

	Risultato	Giocatore 1	Giocatore 2
5.	1;3	40 Fr.	–40 Fr.
	2;4;5;6	–20 Fr.	20 Fr.

	Risultato	Giocatore 1	Giocatore 2
6	1;2	20 Fr.	–20 Fr.
	3;4	0 Fr.	0 Fr.
	5;6	–20 Fr.	20 Fr.

	Risultato	Giocatore 1	Giocatore 2
7.	4	40 Fr.	–40 Fr.
	1;2;6	0 Fr.	0 Fr.
	3;5	–20 Fr.	20 Fr.

Consegna

- Formate dei gruppi di quattro persone.
- All'interno del gruppo formate due coppie; ciascuna si occupa di un gioco.
- Giocate al gioco che avete scelto e provate a capire, discutendo con il vostro compagno di coppia, se si tratta di un **gioco leale**.
- Spiegate all'altra coppia del vostro gruppo il gioco che avete fatto e se si tratta di un gioco leale o no.
- Eleggete un capogruppo che presenti le conclusioni del vostro gruppo su che cos'è un **gioco leale**, riferendosi a uno dei due giochi (quello che pensate di avere capito meglio).

Commento

Questa attività è stata pensata per una classe di quarta media o di prima liceo con conoscenze scarse o nulle di probabilità. Lo scopo fondamentale è quello di evidenziare le diverse interpretazioni soggettive possibili della locuzione *gioco leale* e di trovare, mediante una discussione di classe, una certa omogeneità di vedute. Volutamente ho omesso qualsiasi istruzione o indicazione metodologica che potesse incanalare le discussioni degli allievi: ad esempio non ho indicato come scegliere chi gioca per primo. Il compito del docente in questa attività è principalmente quello di ascoltare le discussioni, fungere da moderatore durante la discussione di classe e non da ultimo quello di «avvocato del diavolo». Il docente non deve avere paura di insinuare dubbi durante i lavori di gruppo e durante le discussioni di classe, anche se gli allievi sono già giunti a soluzioni matematicamente corrette: tra il trovare una soluzione e l'esserne veramente convinti c'è una bella differenza…

Scheda tecnica

Svolgimento

- La classe si divide in gruppi di quattro allievi; gli eventuali allievi rimanenti si aggiungono ai gruppi già formati. All'interno di ogni gruppo si formano due coppie.
- All'interno del gruppo una coppia prova uno dei due giochi e l'altra coppia l'altro. Sempre in coppia si discute sulla lealtà del gioco.
- Il gruppo si riunisce: ogni coppia descrive all'altra il gioco fatto e le conclusioni che ha tratto. Si discute quindi insieme sulla lealtà dei due giochi.
- Ogni gruppo designa un rappresentante che presenti alla classe uno dei due giochi.
- I rappresentanti dei gruppi che illustrano il primo gioco espongono tutti insieme alla classe i loro risultati. Si discute quindi tutti insieme; gli allievi che sono al posto possono porre domande ai rappresentanti, ma non al docente.
- Idem per il secondo gioco.
- Durante la lezione successiva gli allievi scrivono un TEP[3] sui giochi leali.

Forme didattiche utilizzate

Lavoro a coppie, lavoro di gruppo, discussione di classe.

Durata

Due ore lezione per l'attività di laboratorio e la discussione, ulteriori trenta minuti per l'elaborazione dei TEP's.

Prerequisiti

Questo laboratorio non necessita di particolari prerequisiti. Naturalmente gli allievi devono essere in grado di lavorare autonomamente. Non userei questa attività con allievi non abituati a lavorare nel laboratorio matematico poiché richiede già due ore lezione di lavoro praticamente autonomo.

3. L'acronimo TEP (plurale TEP's) sta a indicare una produzione testuale autonoma dell'allievo. In merito si veda, ad esempio, l'articolo di G. Arrigo, *Verifica della qualità dell'apprendimento: le produzioni autonome degli allievi (TEPs)*, BDM numero 46, maggio 2003, pagine 67-72.

Materiale

Per venti allievi: cinque dadi standard numerati dall'uno al sei e cinque volte quattro dadi di Bradley-Efron.

Obiettivi del docente

- Confrontare le diverse interpretazioni soggettive del termine **gioco leale**.
- Stimolare gli allievi a studiare la probabilità.

Obiettivi didattici e mappa formativa[4]

Questa attività tocca tutti i punti della mappa formativa, in misura più o meno rilevante:

1.1. Usare il concetto di probabilità matematica.
1.2. Approcciare il concetto etico (e matematico) di gioco leale.
1.3. Capire e seguire regole precise.
2.1. Analizzare un gioco in tutte le sue componenti.
2.2. Esprimere un giudizio basato su dati sperimentali.
2.3. Collaborare e assumersi responsabilità all'interno di un gruppo.
3.1. Sviluppare la propria capacità di leggere e di valutare la realtà con l'ausilio di metodi matematici.
3.2. Incrementare la fiducia in se stessi.
3.3. Apprezzare le ragioni e i risultati trovati dagli altri compagni ed essere disposti a discuterle.

4. Si fa riferimento alla *Mappa formativa di matematica*, pubblicata nel *Piano formativo della scuola media*, UIM, Bellinzona, 2004. La numerazione coincide con quella della mappa citata.

2.2. Un'attività combinatoria
Il pieno di punti, ovvero: divertiamoci ragionando

Lara Zamboni[5]

La consegna

Il signor Vittorio nel suo negozio di giocattoli vende anche dadi (quelli da gioco, con le facce numerate da 1 a 6). Ne può sistemare esattamente 60 in una scatola trasparente a forma di parallelepipedo: 5 dadi in lunghezza, 4 in larghezza e 3 in altezza.

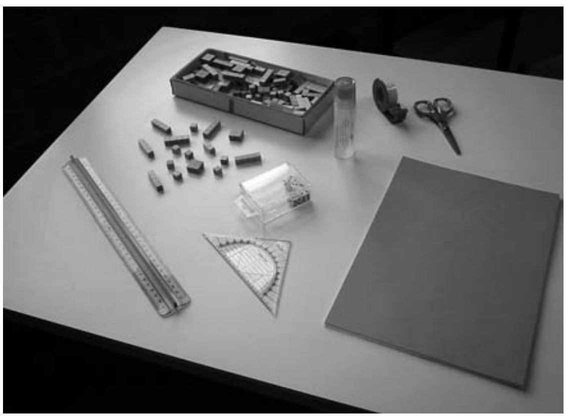
Nel riporli nella scatola sistema i dadi in modo che la somma dei punti visibili sulle sei facce della scatola stessa sia massima.

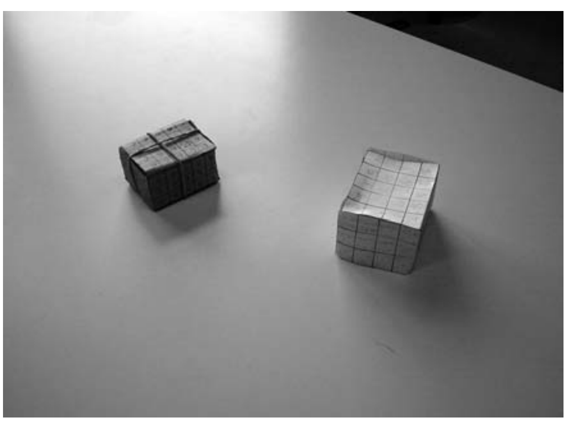
Qual è questa somma?

Motivate la risposta.

Commento

Il lavoro è stato assegnato a una seconda media. Gli allievi hanno lavorato in piccoli gruppi e si sono aiutati con materiale di manipolazione, in parte costruito da loro stessi (vedi foto seguenti).





5. Lavoro presentato agli abilitandi in matematica dell'ASP di Locarno nel mese di dicembre 2003.

Alla fine ogni allievo ha redatto una paginetta con i risultati trovati e il modo seguito per trovare la somma massima.

Si tratta di una tipica attività di laboratorio, perché, all'inizio, gli allievi non hanno nulla a cui appigliarsi. Iniziano per tentativi. La prima idea che viene in mente è di mettere all'esterno sempre le facce con il punteggio 6. Ben presto ci si rende conto che ciò non è possibile perché vi sono dadi che hanno due facce sulla superficie della scatola e altri addirittura tre. Quindi in certi casi appariranno all'esterno le facce con 5 e qualcuna con 4 punti.

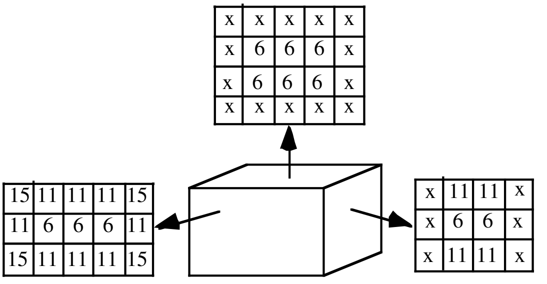
Tentando e ritentando, soprattutto aiutandosi con dei modellini, gli allievi giungono a trovare la soluzione. Il lavoro però non è finito: occorre presentare per iscritto il proprio iter risolutivo. Di seguito riproduco due soluzioni ideate dagli allievi. La prima testimonia un modo di procedere paziente e legato allo sviluppo del solido, quindi a un modello bidimensionale. La seconda, basata sul modello spaziale del parallelepipedo, mostra una buona dose di intuizione, di creatività e uno spirito matematico già ben formato. È interessante anche notare il modo col quale l'allievo ha proceduto nel calcolo: un bell'esempio di procedimento senza uso della calcolatrice.

Prima soluzione

					6	6	6	6	6					
A					6	6	6	6	6					
					6	6	6	6	6					
B					6	6	6	6	6					
	4	5	5	5	4	5	5	5	4	5	5	5	5	
D	5	6	6	6	5	6	6	6	6	5	6	6	6	C
	4	5	5	5	4	5	5	5	5	4	5	5	5	
					6	6	6	6	6					
E					6	6	6	6	6					
					6	6	6	6	6					
					6	6	6	6	6					
					5	5	5	5	4					
F					6	6	6	6	5					
					5	5	5	5	4					

$A = 20 \cdot 6 = 120$
$B = 76$
$C = 62$
$D = 61$
$E = 20 \cdot 6 = 120$
$F = 77$
$A + B + C + D + E + F = 516$

Seconda soluzione



Nella figura le x rappresentano numeri già sommati in precedenza.

Calcolo:

$$\{[(15\cdot 4)+(11\cdot 8)+6\cdot 3]\cdot 2\}+\{[(11\cdot 4)+(6\cdot 2)]\cdot 2\}+[(6\cdot 6)\cdot 2]=$$

$$=(60+88+18)\cdot 2+(44+12)\cdot 2+36\cdot 2=166\cdot 2+56\cdot 2+72=$$

$$=332+112+72=444+72=516$$

2.3. Un'attività introduttiva al calcolo con i valori assoluti (prima liceo)

Filippo Siegenthaler[6]

La consegna

Giorgio e Luca in una giornata di pioggia decidono di andare a curiosare in soffitta. Tra gli oggetti impolverati trovano una roulette. Sono subito attratti da questo oggetto, in cui compaiono scritti 37 numeri, e dalla pallina bianca che vi si può lanciare all'interno.

Decidono di giocare con questo aggeggio di cui avevano già sentito parlare, ma che non avevano mai avuto l'occasione di vedere. Per prima cosa stabiliscono le loro regole del gioco.

Decidono che il giocatore vince un numero di caramelle corrispondente al punteggio totalizzato con il lancio della pallina, diminuito di 18, se il risultato è un numero positivo.

Se il punteggio ottenuto con la pallina, diminuito di 18, risulta negativo il giocatore vince la quantità di caramelle corrispondente al risultato ottenuto, privato del segno meno.

Stabiliscono inoltre che ogni giocata costa 6 caramelle.

Giorgio decide di tenere il banco, Luca acconsente e i due si divertono a giocare.

Domande

a) Determina i punteggi che Luca deve ottenere lanciando la pallina, in modo che il suo guadagno risulti uguale alla metà del punteggio ottenuto.
b) Quali punteggi portano Luca a realizzare un guadagno?

Esempio di soluzione

a) Sia x il punteggio ottenuto da Luca lanciando la pallina. Si ha dunque l'equazione:

$$|x-18|-6=\frac{1}{2}x$$

$$\begin{cases}|x-18|-6=\frac{1}{2}x \\ x-18\geq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x-18-6=\frac{1}{2}x \\ x\geq 18\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=48 \\ x\geq 18\end{cases} \Rightarrow S_1=\{48\}$$

$$\begin{cases}|x-18|-6=\frac{1}{2}x \\ x-18<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-x+18-6=\frac{1}{2}x \\ x<18\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=8 \\ x<18\end{cases} \Rightarrow S_2=\{8\}$$

6. Questa proposta è stata presentata e discussa nell'ambito del corso di abilitazione per l'insegnamento della matematica negli istituti superiori, all'ASP di Locarno.

Insieme delle soluzioni del sistema:
$S = S_1 \cup S_2 = \{8;48\}$

L'unico punteggio che permette a Luca di realizzare un guadagno pari alla metà del punteggio ottenuto è 8 (perché 48 non è un risultato possibile della roulette).

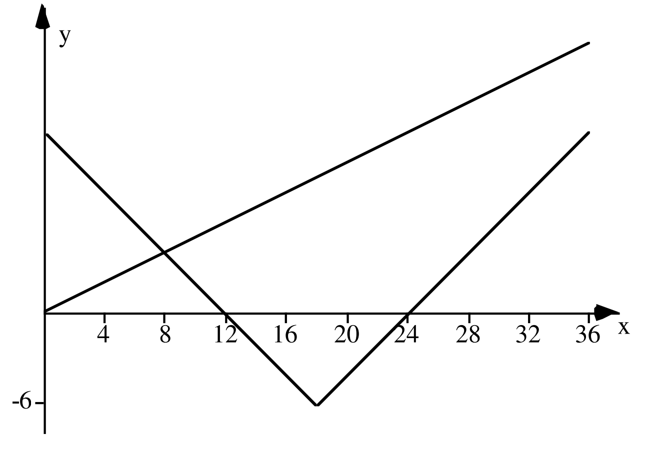
Si può anche risolvere mediante il metodo grafico. Basta rappresentare in un diagramma cartesiano le due funzioni reali a valori interi, aventi entrambe l'insieme di definizione

$D = \{x \in N \mid 0 \le x \le 36\} \ldots$

$g: x \mapsto g(x) = |x-18| - 6$

$p: x \mapsto p(x) = \frac{1}{2}x$

… e determinare le ascisse dei punti d'intersezione delle loro curve rappresentative.



Il grafico mostra bene come la sola soluzione accettabile sia x=8; infatti l'altra intersezione cade visibilmente fuori dall'insieme di definizione.

b) Per trovare quali punteggi ottenuti con il lancio della pallina portano ad un guadagno del giocatore, possiamo risolvere la disequazione:

$|x-18| - 6 > 0$

$$\begin{cases} |x-18|-6>0 \\ x-18>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-18-6>0 \\ x>18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>24 \\ x>18 \end{cases} \Rightarrow S_1 = \{x \in N \mid x>24\}$$

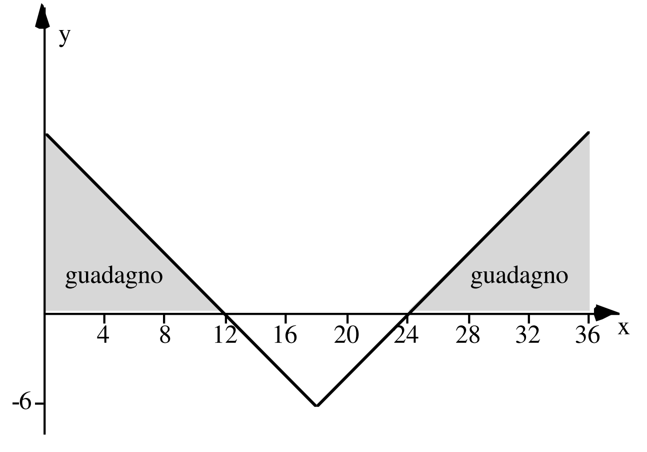
$$\begin{cases} |x-18|-6>0 \\ x-18<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+18-6>0 \\ x<18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<12 \\ x<18 \end{cases} \Rightarrow S_2 = \{x \in N \mid x<18\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 = \{x \in N \mid x < 12 \ \vee \ 24 < x \leq 36\} =$$

$$= \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36\}$$

C'è però ancora una limitazione al numero di risultati favorevoli: occorre escludere lo zero, perché non è possibile scommettere su questo numero (è riservato al casinò).

Ecco infine come appare la situazione graficamente:



Commento

L'apprendimento del calcolo con valori assoluti ha sempre costituito un ostacolo serio per gli studenti liceali. Attività come questa dovrebbero aiutare lo studente a dare senso concreto alle operazioni algebriche, troppo spesso usate mnemonicamente e… altrettanto rapidamente dimenticate.

VI. Segnalazioni

1. Convegno internazionale di didattica della matematica

Alta Scuola Pedagogica
Locarno, 24-25 settembre 2004

Conferenze e comunicazioni
Venerdì 24 settembre 2004

8.30-8.45	Saluto delle Autorità.
8.45-9.45	**Luis Radford** (Canada) *La generalizzazione matematica come processo semiotico.* In francese
10.15-11.15	**Ubiratan D'Ambrosio** (Brasile) *Una riflessione dell'Etnomatematica: perché insegnare matematica?*
11.15-11.55	Comunicazioni: **Martha Isabel Fandiño Pinilla** (Colombia-Italia) *Competenze matematiche e competenze in Matematica* **Giovanna Albano** (Italia) *Didattica assistita*
14.00-15.00	**Salvador Llinares** (Spagna) *La costruzione della conoscenza come aiuto per insegnare* In spagnolo, con traduzione simultanea
15.30-16.00	**Gianfranco Arrigo** (Svizzera) *Ostacoli epistemologici e didattici nell'apprendimento dell'infinito*
16.30-16.50	Comunicazione: **Silvia Sbaragli** (Italia) *Le convinzioni degli insegnanti sull'infinito matematico*
16.50-18.00	Visita guidata alla mostra – Rinfresco

Sabato 25 settembre 2004

8.30-9.30 Comunicazioni:
Aldo Frapolli (Svizzera)
Il piano formativo di matematica della scuola media ticinese
Alberto Piatti (Svizzera)
I miei primi contatti con la ricerca in didattica della matematica
Giorgio Mainini (Svizzera)
Gli atolli matematici: una nuova avventura per gli allievi della scuola media ticinese

9.30-10.30 **Guy Brousseau** (Francia)
I doppi giochi dell'insegnamento della matematica.
In francese

11.00-12.00 **André Delessert** (Svizzera)
Che cosa significa «eccetera»? In francese

14.00-14.20 Comunicazione:
Claudio Beretta (Svizzera)
Il ruolo della SSIMF nello Stato federale

14.20-15.20 **Bruno D'Amore** (Italia)
La noetica e la semiotica nell'apprendimento della matematica

15.20 Chiusura del convegno

Mostre didattiche

Il convegno è accompagnato da una mostra dedicata agli insegnanti, ai genitori e agli allievi delle nostre scuole. Essa è prodiga di stimoli che possono aiutare a rinnovare i materiali didattici, strumenti essenziali per un buon apprendimento.

Elenco delle esposizioni

Il gioco degli scacchi nella scuola dell'infanzia
R. Udriot, Scuola dell'infanzia, Sonvico-Dino
Prima elementare: i grandi numeri.
Dalle esperienze dei bambini alla scuola
I. Marazzani, NRD Bologna
Le idee e i percorsi di una divertente collaborazione tra....
M. Brambilla – Liceo classico «V. Emanuele II», Jesi (Ancona)

Mostre a cura di Silvia Sbaragli, NRD Bologna:
Un mondo elastico, forme e percorsi
Scuola dell'infanzia di Marghera (Venezia)
Matematica e lingua: una storia dentro l'altra
Istituto Comprensivo di Rescaldina (Milano)
Tipi rotondi e tipi spigolosi
Istituto Comprensivo di Corinaldo (Ancona)

«Giocando» con la matematica in continuità
Istituto Compensivo di San Marcello (Ancona)

Iscrizione
Per posta, per fax o per e-mail:
Alta Scuola Pedagogica
Piazza S. Francesco 19
CH-6600 Locarno
Fax: +41 91 816 02 19
Internet: http://asp.ti-edu.ch/mate04
e-mail: mate2004@asp.ti-edu.ch

Indicare a chiare lettere:
Nome – Cognome – Indirizzo – CAP – Località – Scuola – Telefono – e-mail.

Tassa iscrizione: 60.– SFR / 40.– €
La tassa dà diritto ad una copia degli atti e dev'essere versata sul conto:
CCP 65-188867-5
Alta Scuola Pedagogica
CH-6600 Locarno
entro il **31.8.2004**

Info Hotel
Ente Turistico Lago Maggiore
CH-6600 Locarno
Tel. +41 91 791 00 91
Fax +41 91 751 90 70
conventions@maggiore.ch
www.maggiore.ch

2. XVIII Convegno Nazionale Incontri con la Matematica La Didattica della matematica: una scienza per la scuola

Castel San Pietro Terme (Bologna)
5-6-7 novembre 2004

Conferenze
Venerdì 5 novembre, Centro Congressi (Hotel Castello)

Tutti gli ordini scolastici

14.30-15.30 **Inaugurazione** alla presenza delle Autorità
Saluto del Sindaco di Castel San Pietro Terme

15.30-16.15 **Maria Luisa Schubauer Leoni** (Università di Ginevra, Svizzera):
Capire l'azione del docente per interpretare l'attività dell'allievo in classe

16.45-17.30 **Ornella Robutti** (Università di Torino):
Apprendimento percettivo-motorio dalla scuola dell'infanzia alla scuola superiore

17.30-18.15 **Rosetta Zan** (Università di Pisa):
«Io e la matematica». Una, cento, mille storie

Sabato 6 novembre, Salone delle Terme (Albergo delle Terme)

Scuola dell'Infanzia

15.00-15.45 **Michele Pertichino, Antonella Montone e Rosa Laura Ancona** (Università di Bari): *Contare e misurare nella scuola dell'Infanzia*

15.45-16.30 **Maria Teresa Leone e Mariangela Di Nunzio** (Foma Rete Lucca):
In un mondo di solidi

17.00-17.45 **Carla Caredda** (Università di Cagliari):
Piccoli passi per un grande viaggio

17.45-18.30 **Paola Vighi e Igino Aschieri** (Università di Parma):
Dallo spazio dell'esperienza all'organizzazione spaziale

Sabato 6 novembre, Centro Congressi (Hotel Castello)

Scuola Elementare, Media e Superiore

15.00-15.45 **Giorgio Bagni** (Università di Roma I):
Storie matematiche, storia della matematica

15.45-16.30 **Jorge Rodriquez** (Università Distrital di Bogotà, Colombia):
Un possibile senso per i processi di formazione scolastica in matematica

17.00-17.45 **Lucilla Cannizzaro** (Università di Roma I):
Il concetto di funzione: molte facce, lenta costruzione e tendenza alla mutazione

17.45-18.15 **Colette Laborde** (Università di Grenoble, Francia):
Come la geometria dinamica può rinnovare i processi di mediazione delle conoscenze matematiche nella scuola primaria e secondaria

Seminari – Sabato 6 novembre, Istituto Alberghiero

Seminari per la Scuola dell'Infanzia

9.00-9.45 **M. Pertichino, A. Montone e R. L. Ancona** (Università di Bari):
Tu dai una cosa a me, io do una cosa a te, ovvero: l'arte del baratto si impara in sezione

9.45-10.30 **C. Caredda** (Università di Cagliari):
Un viaggio nel mondo della matematica

11.00-11.45 **I. Aschieri e P. Vighi** (Università di Parma):
Lo spazio dell'esperienza: attività concrete

11.45-14.00 **Visita alle mostre**

Sabato 6 novembre, Centro Congressi (Hotel Castello)

Seminari per la Scuola Elementare e Media

9.00-9.45 **G. Bruno** (Università Roma I):
Logica dell'incerto: perché insegnarla

9.45-10.30 **A. Giugliano e M. L. Schubauer Leoni**
(Università di Ginevra, Svizzera): *Processi comunicativi in lezioni di matematica alla scuola media*

11.00-11.45 **L. Prosdocimi** (R.S.D.D.M. Bologna):
I bambini delle elementari hanno «grandi numeri»?

11.45-14.00 **Visita alle mostre**

Sabato 6 novembre, Sala Giardino (Albergo delle Terme)

Seminari per la Scuola Superiore

9.00-9.45 **G. Bagni** (Università di Roma I):
I quantificatori: logica e simboli nella scuola secondaria superiore

9.45-10.30 **P. Rojas** (Università Distrital di Bogotà, Colombia):
Usi ed interpretazioni del segno «uguale»: implicazioni nella transizione aritmetica-algebra

11.00-11.45 **A. Balderas** (Università Autonoma di Querétaro, Mexico):
Dalla teoria alla pratica: una metodologia di integrazione delle TIC in corsi regolari

11.45-14.00 **Visita alle mostre**

Domenica 7 novembre, Istituto Alberghiero

Seminari per la Scuola dell'Infanzia

9.00-9.45 **A. Angeli** (Forma Rete Lucca): *Il problema dei problemi*

9.45-10.30 **E. Fascinelli** (SdI Valeggio sul Mincio):
Posizioni, ordine, ritmo e... pop art

10.30-12.30 **Visita alle mostre**

Domenica 7 novembre, Centro Congressi (Hotel Castello)

Seminari per la Scuola Elementare e Media

9.00-9.45 **B. D'Amore, M.I. Fandiño Pinilla, I. Marazzani** (N.R.D. Bologna):
Gli «esercizi anticipati»

9.45-10.30 **G. Margiotta** (L.S. «Francesco d'Assisi», Roma):
Cabri in classe con le tecnologie portatili

11.00-11.45 **L. Maurizi e T. Minazzi** (R.S.D.D.M. Bologna):
«*Quando spiego capisco se ho imparato»: la comunicazione intenzionale in matematica*

11.45-12.30 **Visita alle mostre**

Domenica 7 novembre, Sala Giardino (Albergo delle Terme)

Seminari per la Scuola Superiore

9.00-9.45 **R. Fazio** (L.S. di Gioia del Colle):
Nuovi strumenti tecnologici integrati per lo studio del calcolo simbolico

9.45-10.30 **R. Zan** (Università di Pisa): *Difficoltà in matematica nel passaggio scuole superiori/università*.

11.00-11.45 **L. Cannizzaro e B. Cavallaio** (Università di Roma I): *Passare dalla descrizione alla deduzione lavorando alla costruzione del concetto di definizione.*

11.45-12.30 **Visita alle mostre**

Mostre e Laboratori, Istituto Alberghiero

Scuola dell'infanzia

- A. Donadel, E. Fabian e D. Coccia (SdI Marghera) (a cura di S. Sbaragli): *Un mondo in equilibrio*
- Scuola dell'infanzia «G. Rodari», Direzione Didattica di Gonzaga, con la collaborazione di D. Fontanesi: *Abbasso la noia, viva la matematica!*
- Scuole FISM di Arezzo con la collaborazione di M. Francini: *Alla scoperta… della matematica*

Scuola dell'infanzia e elementare

- Forma Rete Lucca con la collaborazione di I. Marazzani: *Passeggiando per il mondo*
- C. Lanciotti e I. Marazzani (R.S.D.D.M. Bologna): *Non solo la matematica è logica*
- I.C. di Corinaldo in rete con I.C. Ostra, I.C. Ripe, I.C. «Federico II» Jesi, D.D. Senigallia Sud: *Numeringioco*

Scuola dell'infanzia, elementare e media

- G. Gabellini e F. Masi (R.S.D.D.M. Bologna): *Puzzlemania*

Scuola elementare

- A. Monaco (198° Circolo didattico di Roma): *Il mercatino dell'euro... continua*

Scuola elementare e media

- M.P. Nannicini (Istituto Comprensivo «Giovanni XXIII», Terranuova Bracciolini), G. Ceccherini (Scuola Media «E. Fermi», Laterina): *Trasformando, trasformando…*

Scuola elementare, media e superiore

- A. Ferrini, M. Francini, A. Cini, E. Dal Corso, C. Stella, C. Nobis, (R.S.D.D.M. Bologna): *Uguale: procedurale o relazionale?*

Scuola elementare, media e superiore

- ITIS «Q. Sella» di Biella e Direzione Didattica Biella III con la collaborazione di I. Foresti: *Una proposta di itinerario sulla misura dalla scuola primaria a quella superiore*
- B. Jannamorelli e A. Strizzi (L. S. «E. Fermi», Sulmona): *Antichi strumenti di calcolo aritmetico e loro uso didattico*

- Studenti della classe V (Liceo della Comunicazione «S. Pio X», Castel San Pietro Terme) con la collaborazione di G. Nobili: *Cosa vedono le mie fosche pupille?*

Scuola superiore

- L'Officina del Cielo a cura di C. Zellermayer e O. Spazzoli: *Le misure del Cielo e della Terra*
- Studenti della classe V I (L.S. «E. Fermi», Bologna) con la collaborazione di F. Monari: *Il nostro portfolio di matematica*

Teatro matematico (per tutti)

- Istituto Comprensivo «A. Manzoni» di Rescaldina con la collaborazione di S. Sbaragli: *Corrispondiamo? Sì, infinitamente…* Percorsi teatrali realizzati da 250 bambini dai 3 ai 14 anni. Presso il Cinema Jolly, via Matteotti n. 99 (nel centro di Castel San Pietro)
  Orari spettacoli: sabato 6 novembre ore 13.00 e ore 16.45

Informazioni utili

Per gli italiani

È stato richiesto al Ministero della Pubblica Istruzione **l'esonero dal servizio** per la partecipazione al **Convegno** (per insegnanti di ogni ordine e grado e per il personale direttivo ed ispettivo).

Verrà rilasciato un attestato per n. 20 ore di **Aggiornamento**, in base alla CM 376, prot. 15218, del 23.12.1995 e successive modifiche.

Per avere ulteriori **informazioni**, ci si può rivolgere a:
Assessorato alla Cultura
Comune di Castel San Pietro Terme
piazza XX settembre n. 3
40024 Castel San Pietro Terme (Bo)
telefono 051.6954124 (ore ufficio), fax 051.6954180
e-mail: cultura1@cspietro.provincia.bo.it
http://www.dm.unibo.it
http://www.comune.castelsanpietroterme.bo.it

L'**iscrizione** avviene direttamente durante il Convegno. Non si accettano pre-iscrizioni. Saranno attivate varie sedi di segreteria, per rendere agevoli e rapide le pratiche di iscrizione.

La **segreteria organizzativa centrale** avrà sede presso l'Albergo delle Terme, viale delle Terme 1113. Al momento dell'iscrizione viene consegnata al Convegnista una cartella contenente vario materiale. A ciascun partecipante viene richiesto un contributo alle spese di organizzazione di 45 Euro (studenti e specializzandi con libretto 25 Euro). Si consigliano i Convegnisti di effettuare se possibile le iscrizioni Venerdì 5 Novembre tra le ore 11 e le 13, per evitare code. Prima delle 11 non verranno accettate iscrizioni.

La Pro Loco sarà a disposizione per **assistenza turistica** gratuita ai Convegnisti ed ai loro Accompagnatori e fornirà ogni indicazione relativa ad orari di aerei, treni e bus.

È assicurata **l'assistenza medica** per tutta la durata del Convegno.

Per tutta la durata del Convegno saranno attivi **servizi di trasporto gratuito** tra la sede della segreteria e le stazioni dei bus e ferroviaria di Castel San Pietro.

Gli **Atti**, pubblicati da Pitagora Ed. Bologna, saranno disponibili fin dal giorno della inaugurazione.

I Convegnisti dovranno provvedere per conto proprio alla **prenotazione alberghiera**. Poiché si prevede un afflusso notevole, si consiglia di provvedere al più presto. La segreteria declina ogni responsabilità per mancato alloggiamento.

Alberghi e Pensioni nel territorio di Castel San Pietro Terme

★★★★ Castello, viale Terme 1010, tel. 051 940138
★★★★ Gloria, [Toscanella], via Emilia 42, tel. 0542 673438
★★★ Delle Terme, viale Terme 1113, tel. 051 941140
★★★ Nuova Italia, via Cavour 73, tel. 051 941932
★★★ Parigi, viale Terme 860, tel. 051 943585
★★★ Park Hotel, viale Terme 1010, tel. 051 941101
★★ Corona, via dei Mille 48, tel. 051 941462
★★ Due Portoni, via Mazzini 133, tel. 051 941190
★★ Il Gallo, via Repubblica 34, tel. 051 941114
★★ La Torretta, viale Terme 1559, tel. 051 941340
★★ Terantiga, [Varignana], via di Jani 71, tel. 051 6957234
★ Arlecchino, via Repubblica 23, tel. 051 948519
★ Maraz, piazza Vittorio Veneto 1, tel. 051 941236.

Agriturismi

Rio Rosso, loc. Varignana Superiore, tel. 051.6957043
Rio Soglia, loc. Palesio, tel. 051.6957097
Agrituristica S. Martino, loc. San Martino, tel. 051.949766
Villaggio della salute Più, loc. S.Clemente, tel. 051.929791

Bed & Breakfast (Castel San Pietro Terme)

Antico Convento Cappuccini, via Vara 10, tel. 051 6951471
B&B di Laura Pulga, via Repubblica 67, tel. 051 941166
La Vela, via Ca' Priva 46/48, tel. 051 6951700
Per Cacciatori di Conchiglie, via Villalunga, loc. Varignana, tel. 051.6957259
Borro di Sopra, via Pania 1870, tel. 051 942444
Camere, via Corlo 120, tel. 0051 944191
Per ulteriori informazioni ci si può rivolgere a:
Ufficio IAT – Pro Loco
Piazza XX settembre 1, Castel San Pietro Terme
Tel e fax: 051 6942090

3. Incontri con le scienze: anno 2°
Il piacere e lo stupore

Convegno Nazionale organizzato dall'Università degli studi Torino,
Facoltà di Scienze MFN
Verbania, 12-13-14 novembre 2004
Villa Giulia

Programma

Venerdì 12 novembre

14.00 Accoglienza
14.30 Saluto delle Autorità e apertura dei lavori
15.00 **E. Predazzi** (Università di Torino)
Scienza, Università, Scuola: interessi comuni, sogni e realtà
15.30 **G. Giorello** (Università di Milano)
Il piacere e lo stupore dell'incontro
16.15 **T. Regge** (Politecnico di Milano)
Il colore della scienza: tra ricerca e scoperta
17.00 Pausa caffè
17.15 **C. Longo** (Università di Milano)
L'aspetto estetico delle Scienze
18.00 **M. Fierli** (già dirigente generale MIUR)
Come stupire nell'Era delle nuove tecnologie

Sabato 13 novembre

9-11.00 I laboratori e la mostra
11.00 **D. Fabbri** (Università di Ginevra)
Il piacere e lo stupore come attrattori cognitivi
11.45 **G. Arrigo** (A.S.P. Locarno, NRD Bologna)
La fascinazione... Matematica
12.30 Pausa pranzo
14.00 **E. Tiezzi, N. Marchettini** (Università di Siena)
Scienza e bellezza o scienza è bellezza?

14.45 **E. Morin (**École des Hautes Études en Sciences Sociales di Parigi)
Scienza: la passione tra ordine e disordine
15.30 **A. Munari** (Università di Ginevra)
La poesia e la prosa della Scienza
16.15 Pausa caffè
17.00 **T. Pera** (S.I.S. Torino)
L'Università della soddisfazione
17.45 **G. Nebbia** (Università di Bari)
Come riprender la Scienza per mano?

Domenica 14 novembre

9-11.00 I laboratori e la mostra
11.00 **G. Barbiero** (Università di Torino)
Ermes, Ares, Dioniso. L'evoluzione raccontata con i miti greci
11.45 **M. Tozzi** (C.N.R. Roma)
GAIA, un pianeta che vive in noi

Laboratori

Nell'ambito del Convegno, saranno attivati cinque laboratori interattivi rispettivamente dedicati alla Chimica, alla Fisica alle Scienze della Terra, della Vita e alla Matematica. In ognuno di questi, sotto la guida attenta di esperti del settore, sarà possibile per i convegnisti provare alcune **esperienze** che oltre alla valenza formativa offrano al docente il «gusto» ed il «piacere» di apprendere divertendosi. Si tratta di esperienze che i convegnisti potranno poi riproporre in classe.

I Laboratori
G. Rinaudo (Università di Torino)
La fisica in gioco...
R. Carpignano (Università di Torino)
La chimica in cucina
E. Ferrero (Università di Torino)
La bellezza nelle rocce
E. Camino (Università di Torino)
Esplorare il piccolo: indizi e rivelazioni sui viventi
L. Zamboni (Scuola Media Pregassona, Ticino)
Giochi combinatori e probabilità nella scuola media
A. Piatti (Scuola Universitaria Professionale, Lugano-Manno)
Che cosa significa «probabilità matematica?»
G. Mainini (già direttore della Scuola Media di Lugano-Besso)
Chi si fida delle statistiche?

Modalità di partecipazione

Saranno organizzati gruppetti di max 10 persone per volta. Ogni esperienza avrà una durata approssimativa di circa mezz'ora. Le richieste saranno raccolte il venerdì pomeriggio, all'atto dell'iscrizione. La partecipazione è gratuita.

La Mostra

Il Convegno ha voluto dedicare un'ampia vetrina ai lavori realizzati dalle scuole. La mostra sarà aperta da venerdì 12 fino a venerdì 19 novembre. Per aderire alla mostra contattare, entro il 30 maggio, le persone incaricate.

Insegnanti referenti

Giuseppina Rotta, pinubo@yahoo.it, cellulare 329 8466149
Patrizia Balzarini balzarini.patrizia@tin.it, cellulare 338 7945224
Benedetta De Vito cellulare 333 4535147

Per informazioni sul Convegno rivolgersi a

Lorella Maurizi
lorelmau@tin.it
cellulare 333 5958090

E per saperne di più

www.cobianchi.it/congresso_incontri_con_le_scienze

Informazioni utili per gli italiani

È stato richiesto al MIUR l'esonero dal servizio per la partecipazione al Convegno.
Verrà rilasciato un attestato per n. 20 ore di aggiornamento.
Le preiscrizioni si potranno effettuare versando 30 €
con bonifico bancario su
c/c bancario 010570990900 P-ABI 5547 CAB 22410
o sul c/c postale 15318280
intestati a
ITIS Cobianchi
Piazza Martiri di Trarego 8
28921 Verbania
causale: **iscrizione al convegno** entro il 1.10.2004.
È possibile iscriversi dopo tale data versando l'importo di 40 €.
I Convegnisti dovranno provvedere per conto proprio alla prenotazione alberghiera.
Informazioni:
Ufficio Turistico
tel. 0323 503249 o 0323 556669

4. VII Symposium of Mathematical Education (VII SEM)

Primo annuncio (maggio 2004). Dal 3 al 6 maggio 2005, a Chivilcoy (Buenos Aires, Repubblica Argentina) si terrà il VII Symposium of Mathematical Education che si ispirerà ai principi che hanno retto le edizioni precedenti (1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004). Quest'anno, come tema generale, è stato scelto un importante aspetto della ricerca: «La scoperta nella Didattica della Matematica».

Hanno accettato l'invito di tenere una conferenza, che definiranno nei prossimi mesi i contenuti dei loro interventi, i seguenti insegnanti-ricercatori:

- Gianfranco Arrigo (Alta Scuola Pedagogica di Locarno, Svizzera)
- Bruno D'Amore (Università di Bologna, Italia)
- Salvador Llinares (Università di Alicante, Spagna)

Il VII SEM è diretto, promosso e organizzato da un gruppo di ricercatori, insegnanti e laureati con la preziosa collaborazione di studenti del Centro Regional Chivilcoy of the Universidad Nacional de Luján ed è sponsorizzato da *EDUMAT (Legal personality No. 979, Buenos Aires, Argentine Republic)* e dal *Basic Sciences Department of the Universidad Nacional de Luján*, che si occupa della formazione e dell'educazione in matematica, in entrambi gli aspetti relativi all'apprendimento e alla ricerca didattica.

Progetti di attività accademiche

Gli insegnanti e i ricercatori di ogni livello scolastico sono invitati a proporre **progetti di attività accademiche** (seminari, lezioni, *workshops* e *discussion-working groups*) e a presentare scritti (fascicoli o poster) concernenti i seguenti temi:

Apprendimento cooperativo; Apprendimento e Matematica; Apprendimento della Matematica in classi virtuali; Conoscenza e Matematica; Costruzione di giochi didattici di carattere matematico; Sviluppo di software educativo di Matematica; Didattica della Matematica; Didattica computazionale della Matematica; Disegnare curricoli in Matematica; Educazione statistica; Educazione matematica nella formazione degli insegnanti; Etnomatematica; Formulazione di problemi; Storia della Matematica; Ricerca in Didattica della Matematica; Ricerca in educazione matematica; Ricerca sull'apprendimento di modelli matematici; Metodologie dell'insegnamento a distanza in Matematica; Metodologie dell'insegnamento in Matematica; Metodologie interattive: apprendimento cooperativo; Modellizzazione e risoluzione di problemi; Modellizzazione della conoscenza e dell'intelligenza logica; Modellizzazione dell'intelligenza matematica; Apprendimento di modelli statistici; Conoscenza di modelli matematici; *Teaching-learning processes* in Matematica; Tecnologia nell'educazione matematica; Trasferimento di modelli matematici nell'intelligenza artificiale; Valutazione dell'apprendimento in Matematica.

Le proposte inoltrate di attività accademiche saranno sottoposte ad arbitraggio da parte del *Programme Committee* (o *Academic Committee*), a condizione che soddisfino le condizioni minime poste dall'organizzazione del Simposio.

Anche gli scritti inviati (fascicoli o poster) saranno sottoposti ad arbitraggio da parte del *Programme Committee* (o *Academic Committee*) a condizione che soddisfino le condizioni minime poste dall'organizzazione del Simposio, che comprende le persone seguenti:

Arno Bayer (ULBRA, Brasil); Walter Beyer (UNA, Venezuela); María Salett Biembengut (Universidade Regional de Blumenau, Brasil); Guy Brousseau (Universidad de Bordeaux, Francia); Rodolfo Chaves (Universidade Federal de Viçosa, Brasil); Sandra Crespo (Michigan State University, Estados Unidos); Ubiratan D'Ambrosio (Universidade de Sao Paulo, Brasil); Bruno D'Amore (Universitá de Bologna, Italia); Juan Díaz Godino (Universidad de Granada, España); Marta Isabel Fandiño Pinilla (NRD, Universitá de Bologna, Italia); Fredy E. Gonzalez (ASOVEMAT, Venezuela); Hernán Gonzalez Guajardo (Universidad de Santiago de Chile, Chile); Carina González González (Universidad La Laguna, Is. Canarias, España); Guillermo Hansen (UBA/Universidad Nacional de Luján, Argentina); Ulrich Hoppe (Växjö University, Sweden); Carmen Kaiber da Silva (ULBRA, Brasil); Eduardo Luna (Barry University, Estados Unidos); Eduardo Mancera (UPN, México); Lorenzo Moreno Ruiz (Universidad de La Laguna, Is. Canarias, España); Castor David Mora (Universidad Mayor de San Andrés, Bolivia); Magdalena A. Moujan Otaño (UNLu, Argentina); Claudia Oliveira Groenwald (ULBRA, Brasil); Myriam Ortiz Hurtado (Fundación APRENDeS, Colombia); Fidel OTEIZA (Universidad de Santiago de Chile, Chile); Fausto Toranzos (Universidad de Buenos Aires, Argentina); Nelson Hein [Co-Chairman, Academic Committee from America] (Universidade Regional de Blumenau, Brasil); Marcelo F. Mildrad [Co-Chairman, Academic Committee from Europe] (Växjö University, Sweden); José María Turulltorres [Co-Chairman, Academic Committee from Oceanic] (Massey University, New Zealand); Jorge Enrique Sagula [Chairman, Academic Committee] (UNLu, Argentina).

Istruzioni

Di norma le presentazioni di progetti di attività accademiche riguardanti le varie tematiche sono da inviare per E-mail. Per l'invio di progetti di attività accademiche o di testi, sia su fogli normali sia in formato poster, occorre uniformarsi ad alcune condizioni tipografiche. Per ulteriori informazioni, rivolgersi a Gianfranco Arrigo (tel/fax: 091 9667212 ; e-mail <gianfranco.arrigo@span.ch).

Altre informazioni si trovano sul sito: www.edumat.com.ar

5. Recensioni

Giorgio T. Bagni, Giorgio Mainini, Francesco Cavalli

Bruno D'Amore – Problemi di matematica nella scuola primaria – Pitagora, Bologna, 2003, pag. 172, 11 €

Dieci anni or sono venne pubblicato *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica in attività di problem solving*, una delle più fortunate opere di Bruno D'Amore. Il libro, inserito come volume X-A nella giustamente celebre collana Ma.S.E., ebbe sei apprezzatissime edizioni in italiano e la traduzione in spagnolo; oggi l'Autore presenta una splendida ed aggiornatissima riedizione critica del lavoro; con Bruno D'Amore ha collaborato Ines Marazzani, maestra elementare e membro del Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica dell'Università di Bologna.

Basterà ripercorrere i contenuti dell'opera per rendersi conto ancora una volta dell'estremo interesse del lavoro per insegnanti, ricercatori e tutti coloro che intendono impostare ed approfondire una riflessione scientifica sull'apprendimento della matematica nella scuola primaria: il Capitolo 1 è dedicato a «problemi, esercizi e apprendimento»; il Capitolo 2 ad «apprendimento, sviluppo e problemi», il Capitolo 3 al «ruolo fondamentale della motivazione» ed il Capitolo 4 all'«intuizione». Il Capitolo 5 si intitola «Problemi», il Capitolo 6 «Problemi e lingua» ed il Capitolo 7 è dedicato ai «Campi concettuali». I Capitoli 8 e 9 sono dedicati a «Conflitti e ostacoli» che si manifestano rispettivamente «prima della risoluzione» ed «al momento della risoluzione». Infine il Capitolo 10 si intitola «Risoluzione dei problemi; atteggiamenti al contorno». Chiude il libro una completa ed aggiornata Bibliografia che riporta ben 85 pubblicazioni.

Scriveva dieci anni fa Gérard Vergnaud presentando l'opera di Bruno D'Amore: «Non ci sono domini che la scienza non possa penetrare, compresi quelli nei quali l'oggetto della ricerca sembra complesso, variabile e poco percepibile. È il caso dell'apprendimento della matematica. Oggi non è presuntuoso dire che si comincia ad avere un'idea relativamente chiara del modo in cui i bambini apprendono e comprendono la matematica, delle tappe attraverso le quali passano, degli errori nei quali cadono abbastanza regolarmente, delle difficoltà che incontrano e della maniera attraverso la quale essi pervengono a superarle, con l'aiuto degli insegnanti. (...) Quest'opera fa un buon punto sullo stato delle nostre conoscenze al riguardo» (dalla *Prefazione* di Gérard Vergnaud, pp. iv-v). Giustamente Bruno D'Amore ha scelto di mantenere la stessa prefazione anche in questa riedizione dell'opera: come accadeva dieci anni fa, infatti, anche oggi il rinnovato volume davvero fa il «punto sullo stato delle nostre conoscenze» a proposito della didattica della matematica, con riferimento ad un livello scolastico tra i più delicati ed importanti. (G.T.B.)

Carlo Bernardini, Tullio De Mauro – Contare e raccontare, Dialogo sulle due culture – Laterza, Roma-Bari, 2003, pag. 143, 9,50 €

Dalla quarta di copertina: «Carissimo Tullio, … voglio che quei testoni dei letterati e dei filosofi smettano di parlare come funzionari di una "cultura dominante" e, riconoscendo che noi scienziati siamo perfino in grado di vedere i nostri limiti, ci diano almeno "l'onore delle armi". In parole povere, che non ci considerino pregiudizialmente barbari…»; «Carissimo Carlo, onore delle armi agli scienziati? Sì, se tu darai l'onore delle armi anche a chi studia o insegna seriamente le lingue o la storia, la statistica sociale o la filologia, per fare qualche esempio. E non sei solo tu. Vorrei un ministro che non sghignazzasse sentendo parlare di "informatica umanistica". Voglio dire: non soffriamo di un deficit di scienze naturali, ma di un eccesso di pressappochismo: troppi devoti di santa Radegonda in giro … Ma di questo e di altro cercherò di discutere nel seguito…». Lo smilzo libretto (143 pagine, indici compresi!) mantiene le promesse: Carlo Bernardini, ordinario di Metodi matematici della fisica presso il Dipartimento di Fisica dell'Università di Roma La Sapienza e Tullio De Mauro, ordinario di Linguistica generale all'Università di Roma La Sapienza, sanno ciò che vogliono dire e lo dicono. Se si pensa allo status ufficiale del sapere scientifico nella società odierna (si veda la nostra commissione della cultura senza un rappresentante del mondo scientifico), la lettura e la diffusione del pensiero dei due Autori dovrebbero essere un obbligo (un *must*, visti i tempi…) di tutti i docenti. Tutti, non solo di quelli di Matematica e Italiano. (G.M.)

Rob Eastaway, Jeremy Wyndham – Probabilità, numeri e code – Edizioni Dedalo, Bari, 2003, pag. 231, 13,50 €

In questo agile libretto il docente di matematica potrà trovare un altissimo numero di esempi-stimolo per le sue lezioni. Le situazioni sono organizzate in modo quasi prêt-à-porter: basta leggerle, così come sono, per poterle poi presentare agli allievi. Una scorsa agli argomenti dovrebbe essere sufficiente: perché è più frequente trovare fiori con cinque petali che con sei? se la ruota è un mezzo di locomozione così efficiente, perché nessun animale si sposta su ruote? l'unica «ruota» possibile è circolare? grafi, sondaggi, test, scommesse; le coincidenze sono davvero «coincidenze»? sono davvero rare le coincidenze «rare»? cifrari e crittografia; problemi legati al traffico; come tagliare una torta in k fette, in modo che nessuno si lamenti di avere una fetta più piccola delle altre? la matematica delle classifiche sportive; perché, spesso, abbiamo l'impressione che gli altri siano più fortunati di noi? perché la doccia è sempre troppo fredda o troppo calda? percorsi critici; trucchi «magici» con i numeri. Insomma: siamo circondati dalla matematica: come si fa a non studiarla almeno un po'? (G.M.)

Gerd Gigerenzer – Quando i numeri ingannano – Raffaello Cortina Editore, Milano, 2003, pag. 352, 25,50 €

L’affermazione «Questo libro cambierà la vostra vita» è forse eccessiva, ma vi si trovano, oltre ad una proposta, ampiamente condivisibile, sul come insegnare probabilità e statistica, una tal quantità di informazioni su quali e quanti errori (di probabilità e statistica) si commettono nei più svariati campi dell’attività umana da lasciare letteralmente sbigottiti. E non sono campi da poco: in particolare l’autore tratta della medicina e della giustizia. I *case studies* che esamina sono tratti dalla vita vera: dagli *screenings* mammografici a quelli per le varie forme di cancro; dai rapporti costi/benefici indotti dagli *screenings* al processo a O. J. Simpson (il famoso ex giocatore di football americano assolto dall’accusa di aver ucciso la moglie e il di lei amante); dalle prove basate sulla concordanza di impronte digitali o, più recentemente, sui profili di DNA, alle (volute o no) vere frottole che ci inducono tutti i giorni ad adottare (o no) certi comportamenti; altro ancora. Credo opportuno sottolineare che, nella prefazione all’edizione italiana, Simona Morini, che suppongo sia una filosofa, visto che la collana è diretta da Giulio Giorello, critica certi aspetti epistemologici di quanto l’autore sostiene. Leggetela, la prefazione, ma poi leggete tutto il libro. Non so che effetto vi farà: io l’ho letto in due giorni, e una settimana dopo l’ho riletto. (G.M.)

Robert Kanigel – L’uomo che vide l’infinito. Vita di Srinivasa Ramanujan – Rizzoli, Milano, 2003, 19 €

La lettura di un testo su Ramanujan suscita inevitabilmente una certa commozione, da una parte per la sua breve e travagliata vita (1887-1920), dall’altra per il suo genio matematico, che si impose all’attenzione mondiale nonostante egli fosse sostanzialmente autodidatta. Il destino di Ramanujan richiama alla mente almeno due altri grandi matematici scomparsi in giovane età e che quindi non hanno potuto esprimere appieno la loro genialità: Niels Abel (1802-1829) e Evariste Galois (1811-1832).

Nei primi capitoli, il libro di Kanigel descrive gli anni giovanili, vissuti nella regione di Madras, in India, caratterizzati da una vita famigliare ancorata alla tradizione induista, da difficoltà economiche e sociali di vario genere, ma anche dalla passione per la matematica che Ramanujan scoprì attingendo a pochi testi, tra cui una raccolta di formule «Compendio di risultati elementari di matematica pura e applicata» di George S. Carr. Raccolse così in alcuni quaderni una notevole mole di appunti, che in seguito vennero riconosciuti come il frutto di geniali intuizioni.

La svolta nella vita di Ramanujan avvenne nel 1913, quando, dopo molti tentativi infruttuosi di farsi notare dagli ambienti accademici indiani e occidentali, ottenne finalmente una risposta da Godfrey H. Hardy, uno dei massimi matematici inglesi del XX secolo. A lui è dedicato un capitolo del libro.

Così Ramanujan si trasferì in Inghilterra, dove venne introdotto, da Hardy e dal suo collega e amico Littlewood, nell’ambiente di Cambridge, e poté iniziare a pubblicare articoli, ma dovette pure apprendere quel rigore nei procedimenti di dimostrazione che gli era quasi del tutto estraneo.

Ma il soggiorno inglese non ne fece un uomo felice: non si trovava a suo agio e la nostalgia per gli stili di vita della sua terra natale si fece ben presto sentire. Era il periodo del primo conflitto mondiale e quindi i contatti con la famiglia erano difficoltosi ed era praticamente impossibile trovare o ricevere i prodotti alimentari preferiti.

Non c'è certo da meravigliarsi se Ramanujan non si adattò mai alla cucina britannica! Così, complici anche le condizioni climatiche, la sua salute si deteriorò ben presto e la tubercolosi, allora molto diffusa e difficilmente curabile, lo costrinse prima a numerosi ricoveri e poi, nel 1919, al ritorno a Madras, dove morì un anno dopo.

Il libro si occupa evidentemente anche delle ricerche e delle scoperte di Ramanujan in campo matematico: teoria dei numeri, distribuzione dei numeri primi, frazioni continue, successioni e serie che convergono verso π, teoria delle partizioni, funzione Z di Riemann e altro ancora, ma senza eccedere nel linguaggio specialistico, e perciò risulta perfettamente accessibile anche a chi volesse interessarsi più all'uomo che al matematico.

Per concludere voglio citare il famoso aneddoto relativo ad un colloquio tra Hardy e Ramanujan in un ospedale di Londra. Hardy, tanto per avviare la conversazione disse: «Sono arrivato con il taxi numero 1729; mi sembra che sia un numero veramente insulso!» Ma Ramanujan ribattè immediatamente: «No, Hardy, si tratta invece di un numero molto interessante …». La soluzione è alle pagine 321 e 322. (F.C.)

Progetto grafico
Bruno Monguzzi
Fotocomposizione
Taiana
Stampa
Veladini

Redazione
Laboratorio di didattica della matematica
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera

Telefono
091 814 34 28/57/58
Fax
091 814 44 92

Amministrazione
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera
Fax
091 814 44 92

Esce due volte all'anno
a maggio e a dicembre

Abbonamento annuo
Sfr. 30.–
€ 16