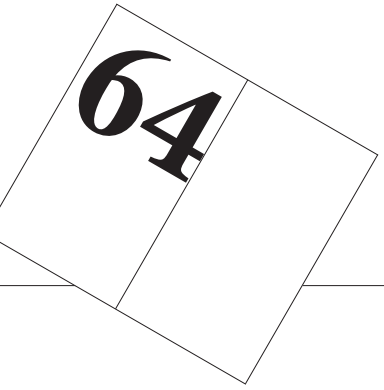
A cura
del Laboratorio di didattica della matematica

Bollettino dei docenti di matematica



Maggio
2012

Ufficio
dell'insegnamento medio
Centro
didattico cantonale

Bollettino
dei docenti di matematica
64

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport

© 2012
Divisione della Scuola
Centro didattico cantonale

ISBN 978-88-86486-85-9

Bollettino dei docenti di matematica 64

Maggio
2012

Ufficio dell'insegnamento medio
Centro didattico cantonale

Indice

	Prefazione	7
I.	Varia	
1.	André Delessert, o la vocazione pedagogica Matematica e scultura Jean-Claude Pont	9
2.	La matematica pura come rifugio in tempi tragici Jean Dhombres	21
II.	Didattica	
1.	Su alcune D in didattica della matematica: designazione, denotazione, denominazione, descrizione, definizione, dimostrazione Riflessioni matematiche e didattiche che possono portare lontano Bruno D'Amore – Martha Isabel Fandiño Pinilla	33
2.	Il gioco della metà: una intera situazione Esperienze ludiche concernenti rappresentazioni e operazioni di frazioni sulla retta numerica Stefan Meyer	47
3.	Sperimentazione sul calcolo numerico Introduzione al calcolo strumentale nella scuola elementare Gianfranco Arrigo	55
4.	Chi ha paura dei numeri grandi? Mario Donati e Silvia Sbaragli	63
5.	Senso del numero, stima e controllo dei risultati in studenti di IV media Diana Cricchio	79
6.	La storia e l'epistemologia: una scelta didattica Trattazione del concetto di equazione di primo grado attraverso la sua evoluzione storica Katya Cattaneo Pedrazzini	98
III.	Giochi	
1.	Quiz numero 47 Aldo Frapolli	105

IV. Passeggiate matematiche

1. Proposte didattiche di analisi matematica per il liceo
Antonio Steiner e Gianfranco Arrigo 109

V. Segnalazioni

1. La didattica della matematica: insegnamento
e apprendimento a confronto
Convegno Nazionale n. 26: *Incontri con la Matematica* 117

2. L'invention des formules mathématiques élémentaires
Conferenza organizzata dalla Società Matematica
della Svizzera Italiana (SMASI) 121

3. Recensioni 123

4. Errata corrige 125

Prefazione

Il numero si apre con un articolo di Jean-Claude Pont su André Delessert, il nostro grande amico scomparso lo scorso anno. La sezione Varia propone anche un pregevole intervento di Jean Dhombres, scritto che può interessare anche gli storici e i filosofi perché entra nella questione delicata del comportamento di scienziati, e in particolare di matematici, «in tempi tragici».

Anche questo numero dà molto spazio alla Didattica. Lo facciamo con grande piacere perché, in una scuola come la nostra che vuole essere di qualità, la sensibilità didattica degli insegnanti dev'essere nutrita e vivacizzata costantemente. Troviamo nell'ordine un testo di D'Amore e Fandiño Pinilla su questioni di didattica teorica; un intervento di Stephan Meyer molto utile soprattutto per chi insegna ad allievi con grosse difficoltà di apprendimento (l'autore è docente della *Interkantonale Hochschule für Heilpädagogik* di Zurigo); una nuova puntata di Gianfranco Arrigo sulle sperimentazioni di un nuovo modo di interpretare e quindi di insegnare il calcolo numerico nella scuola elementare (che dovrebbe interessare anche gli insegnanti che operano nel primo biennio della scuola media); una bella riflessione di Mario Donati e Silvia Sbaragli sulle conoscenze pregresse e in atto dei bambini nel contesto dei cosiddetti numeri grandi (un filone di ricerca molto attuale); infine due sintesi di lavori di diploma svolti, nell'ambito dell'abilitazione all'insegnamento della matematica nella scuola media, da due ex corsiste del DFA, Diana Cricchio e Katia Cattaneo Pedrazzini. Lo spazio dedicato alle sintesi dei lavori di diploma ha soprattutto lo scopo di valorizzare e incoraggiare i giovani insegnanti affinché continuino, dopo l'assunzione, a riflettere sui numerosi problemi che la pratica di classe suggerisce.

Dopo l'immancabile Quiz di Aldo Frapolli, tornano le Passeggiate matematiche, elaborate da Gianfranco Arrigo, a partire da appunti manoscritti lasciatici da Antonio Steiner; questa volta le proposte didattiche concernono le ultime classi delle superiori.

Le Segnalazioni offrono come d'abitudine il lancio dell'annuale Convegno di Castel San Pietro Terme (BO) e in più l'annuncio della conferenza che Jean Dhombres terrà in Ticino il prossimo 2 ottobre (data da segnare sull'agenda!).

Le Recensioni propongono consigli su alcune recenti pubblicazioni che devono interessare soprattutto gli insegnanti.

Infine è doveroso pubblicare l'Errata corrige relativa all'errore di impaginazione occorso nel numero 63, nell'articolo di Marisa Ferrari.

1. André Delessert, o la vocazione pedagogica Matematica e scultura

Jean-Claude Pont[1]

«Zwei Seelen wohnen, ach! in meiner Brust[2]» (Goethe, Faust 1, Vers 1112-1117)

André Delessert was both professor of mathematics and rector at the University of Lausanne. He became known especially through the publication of an elementary geometry textbook, which renewed the teaching of this discipline. Written in the 1960s, while the reform of the so-called «new math» was in full swing, this book and its text provides valuable information on the history of mathematics education. André Delessert was also a talented sculptor, vowing to his art a passion at least equal to that he felt for mathematics.

Originario di Peney-le-Jorat (VD), André (-Edmond) Delessert è nato il 2 luglio 1923 a Losanna. È morto il 19 ottobre 2010 à Mézières. Ha vissuto a Parigi dal 1924 al 1930, poi a Mulhouse dal 1930 al 1933, dove frequentò il Liceo tecnico[3].

André Delessert ottiene la laurea in scienze all'Università di Losanna nel 1945. In seguito si trasferisce a Parigi per due o tre anni, seguendo in particolare alcuni corsi all'Istituto *Henri Poincaré* e al *Collège de France*. Di ritorno, assume diverse cariche di collaboratore all'Università di Losanna (si sa che assunse una supplenza di Georges de Rham in teoria delle funzioni), poi accetta un posto di insegnante di matematica al *Gymnase de la Cité* a Losanna. Nello stesso periodo prepara la tesi di dottorato che sostiene nel 1962, un lavoro intitolato *Una costruzione della geometria elementare fondata sulla nozione di riflessione*[4] (Genève, L'Enseignement mathématique, 1963). Nel 1969 è nominato professore ordinario di matematica all'Università di Losanna, posto che occuperà fino al pensionamento nel 1988. Durante la sua carriera universitaria, assume diverse funzioni amministrative: presidente della Sezione di matematica (1972-1975), decano de la Facoltà di scienze (1974-1976), presidente del Senato accademico (1978-1980), rettore dell'Università (1983-1987). Fu anche presidente della «Società matematica svizzera» (1977-1978). Molto attento alle questioni di didattica della matematica, assuma il segretariato della *«Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique»* (1964-1972).

Ma André Delessert, oltre alla matematica, aveva una seconda passione, la scultura. Durante il periodo di soggiorno a Parigi frequentò l'Accademia della *Grande Chaumière*, una scuola d'arte fondata nel 1904 da Martha Stettler, scuola che ebbe come allievi, fra gli altri, Balthus e Alberto Giacometti. A Losanna conobbe Claude Gisin-

1. Professore emerito dell'Università di Ginevra.
2. *Due anime abitano, ahimé! il mio corpo.*
3. Ringrazio Edith Samba-Delessert, figlia di André, per le preziose informazioni fornitemi.
4. La trasformazione geometrica chiamata simmetria assiale.

ger, che sposò nel 1950, dal matrimonio nacque la figlia Edith (-Samba). Claude non fu solo la compagna della vita, ma è con lei che, in perfetta simbiosi, André produsse molte opere scultoree; una produzione ricca e variata che presentò in parecchie esposizioni, insieme alle pitture di sua moglie. Edith Samba conserva nella casa di famiglia di Servion numerose opere dei suoi genitori (vedere foto alla fine).

André Delessert e la geometria elementare

Se si fa astrazione dell'attività di insegnante, svolta sia come professore alla Sezione di matematica dell'Università di Losanna sia nella scuola secondaria, la parte più importante della sua attività è costituita dallo studio dei vari problemi posti dalla didattica della matematica, a cominciare dalla sua opera *Géométrie plane* del 1960, che conobbe un grande successo e per mezzo della quale un'intera generazione di studenti imparò la geometria. Io stesso l'ho utilizzata con profitto con i miei allievi della sezione scientifica negli anni 1980-1985.

Sempre grazie alla sua vocazione di insegnante, André Delessert ha pubblicato, alcuni anni più tardi (1988), la sua *Introduzione alla logica*, un libro destinato a mostrare a una larga parte di lettori le grandi conquiste e le idee basilari della logica del secolo XX.

André Delessert è dunque stato prima di tutto un insegnante. Un insegnante che non si è accontentato di svolgere normalmente la sua attività didattica, ma che si è anche impegnato profondamente nella riflessione pedagogica relativa all'insegnamento della geometria elementare nei primi anni del liceo. È importante osservare che la sua attività «parallela», nel campo delle arti plastiche, lo ha egualmente messo in stretto contatto con lo spazio, i corpi solidi e i relativi problemi di rappresentazione.

Ogni insegnante di geometria conosce la difficoltà che si incontra nel proporre questa disciplina a giovani allievi e ognuno vi riflette a suo modo, adottando le soluzioni suggeritegli dalla propria percezione pedagogica. Sono tuttavia rari quelli che estendono e approfondiscono la propria riflessione fino a giungere alla redazione di un manuale originale. Ciò che fece André Delessert. Il suo libro *Géométrie élémentaire* ci interessa particolarmente perché fu scritto in un momento delicato e decisivo della storia dell'insegnamento della matematica.

Cenni di storia dei manuali di geometria elementare fin verso la metà del secolo XX

Fin verso gli anni 1960, l'insegnamento della geometria non si è affatto evoluto per ciò che riguarda il metodo e lo spirito. A partire dal 1794 e per buona parte del secolo XIX, è il trattato di quel grande matematico che fu Adrien Marie Legendre (1752-1833), *Les Eléments de géométrie*, che segnò la strada. Pubblicato per la prima volta nel 1794 su richiesta della *Convention nationale*, l'opera conobbe quindici edizioni durante la vita del suo autore e numerose traduzioni, ma il suo succsso si prolungò ben oltre. Essenzialmente, l'obiettivo del «Legendre» era di presentare i punti forti del

corpus euclideo, semplificando e riducendo. Un insieme di note, preziose e originali, forniva complementi dettati dalle ricerche personali di Legendre (in particolare a proposito della teoria delle parallele e del relativo postulato di Euclide) o nuovi punti di vista emersi nel frattempo. Si può ancora citare il trattato di Eugène Rouché e Charles de Comberousse del 1866 (7a edizione, 1900). All'inizio del secolo XX, due importanti matematici, Jacques Hadamard (1898)[5] – che fu uno dei più grandi del secolo – e Charles Méray (1906) pubblicarono manuali che, senza cambiare veramente lo spirito tradizionale, rinfrescarono la presentazione con giudiziose spiegazioni. Il libro di Hadamard è probabilmente il miglior manuale di geometria elementare della vecchia tradizione. Curiosamente, Hadamard tratta del «metodo matematico» nella Prefazione e gli consacra una nota importante (p. 261-278), ma la parola «assioma» è utilizzato una sola volta per indicare il «postulato di Euclide», senza il minimo commento sul significato del termine e sulla sua funzione. Le sue opere erano indirizzate agli allievi del filone scolastico che in Francia si chiamava «Matematica elementare» e che preparava alle classi di «Matematica speciale». È proprio a un manuale di questo genere, redatto da un «gruppo di professori» (500 pagine, circa 230 consacrate alla geometria dello spazio, con esercizi talvolta tosti), che devo – come del resto tutti quelli della mia generazione – la mia formazione in geometria elementare.

Sulle scoperte matematiche che avrebbero potuto cambiare il modo di affrontare la Geometria

Per ciò che ci interessa, numerose scoperte di primo piano, risalenti alla fine del secolo XIX e all'inizio del XX, inducono una rivoluzione nella nostra relazione con la geometria e avrebbero potuto cambiare drasticamente l'impostazione dei manuali.

Prima di tutto la nozione di «trasformazione geometrica», che apparve lentamente e sporadicamente nel corso della seconda metà del secolo XIX. Essa permise, nei manuali della seconda metà del secolo XX, di sostituire il punto di vista statico, che faceva ricorso ai casi di uguaglianza dei triangoli con quello dinamico delle isometrie.

In secondo luogo la rivoluzione non euclidea, che scoppia negli anni 1870[6]. Essa conduce a sua volta David Hilbert a ideare il corso che tenne negli anni 1898-1899 sui fondamenti della geometria, che sfocerà nel suo capolavoro del 1900, *Grundlagen der Geometrie*[7]. L'idea stessa di assiomatica – che si credeva euclidea dai tempi di Euclide – subisce una metamorfosi completa; e, in questo ambito, nulla sarà più come prima.

Queste profonde mutazioni non ebbero alcun effetto sui manuali di geometria elementare. Bisognerà attendere il decennio 1950-1960 per vedere le prime reazioni e queste «novità» influenzare la presentazione della geometria.

5. *Leçons de géométrie élémentaire*, Paris, Armand Colin, 1898.
6. Se la scoperta della geometria non euclidea risale agli anni 1825-1830, non è percepita dal mondo matematico e non esercita dunque alcuna influenza. Bisogna attendere il 1870 affinché questa nuova disciplina s'installi completamente nel *continuum* del pensiero matematico.
7. *Fondamenti di geometria.*

Osserviamo tuttavia che il sogno «idealista» di un insegnamento assiomatizzato della geometria, a livello elementare, non ha mai attecchito sul serio, nonostante la convinzione di David Hilbert stesso. Nel 1904, George-Bruce Halsted, un pioniere promotore della geometria non euclidea, pubblica un'opera (tradotta nel 1911) – «Geometria razionale». Trattato elementare di scienza dello spazio -che vuol essere un manuale e che introduce dall'inizio l'assiomatica di Hilbert. Nella prefazione dell'edizione inglese, Halsted cita il passaggio seguente da una lettera indirizzatagli da Hilbert: «Sono molto contento della vostra idea di fare delle mie *Grundlagen* una «geometria per la scuola [Schul-Geometrie]». Credo anche che questi 'Fondamenti' siano adatti a questo scopo.»

Per dare un esempio del ritardo dei manuali rispetto a queste grandi scoperte, mi rifaccio ancora al testo prodotto dal «gruppo di professori» precedentemente citato. Non vi si trovano, certamente, né trasformazioni né isometrie. Quanto all'idea di metodo assiomatico, è trattata con la massima disinvoltura e vale la pena di soffermarcisi. Se il termine «assiomatico» – e non tanto il metodo – non appare da nessuna parte nelle circa 500 pagine, si incontra per contro, e come un capello nella minestra, il termine «postulato». Nel capitolo «Parallele» (p. 49) si legge infatti: «Postulato di Euclide. Da un punto dato, non si può condurre che una sola parallela a una retta data.» Con questo delizioso commento: *«Si ammette il postulato senza dimostrazione»*. Senza nemmeno segnalare che l'esistenza di almeno una parallela per un punto a una retta si dimostra facilmente per mezzo dei teoremi che sono sviluppati nelle pagine seguenti.

Il contesto del Manuale di Geometria di André Delessert

Dal punto di vista dell'insegnamento della matematica, a metà del secolo XX appare l'episodio chiamato «matematica moderna». Si tratta di una concezione completamente nuova della pedagogia matematica, derivata principalmente dal movimento *bourbakista* e pilotata da una pleiade di matematici di primo piano, come Gustave Choquet o il suo allievo André Revuz, o ancora il burrascoso Jean Dieudonné. Il suo motto *Abbasso Euclide!*, lanciato nel famoso colloquio di Royaumont del 1959 servì in qualche modo da collante[8]. Ecco alcuni dettagli sull'organizzazione di questi incontri[9]:

«Dal 1958, l'O.E.C.E. crea un 'Ufficio del Personale Scientifico e Tecnico, uno degli obiettivi del quale è di *«rendere più efficace l'insegnamento delle scienze e della matematica»*. Nel novembre del 1959, l'O.E.C.E.. organizza un seminario di dieci giorni, il *Colloque de Royaumont*, animato da Marshall H. Stone, dell'Università di Chicago. L'obiettivo del colloquio è di promuovere una riforma dei contenuti e dei metodi dell'insegnamento della matematica nella scuola secondaria

8. L'importanza del movimento attorno alla riforma della matematica negli anni '50-'60 è ben messa in evidenza dal livello dei matematici che vi hanno partecipato: H. Behnke, K. Chandrasekhara, G. Choquet, G. de Rham, J. Dieudonné, B. Eckmann, H. Freudenthal, G. Kemeny, A. Kolmogorov, A. Lichnerowicz, E. Moise, A. Pfluger, C. Pisot, M. Rueff, E. Stiefel, M. Stone, E. Trost, …
9. Estratto da Bernard Charlot, *«Le virage des Mathématiques modernes. Histoire d'une réforme: idées directrices et contexte»*, 1984. (http://membres.multimania.fr/ sauvezlesmaths/Textes/IVoltaire/charlot84.htm)

(12-19 anni). G. Choquet presenta un programma per l'insegnamento primario e secondario et J. Dieudonné lancia un *Abbasso Euclide!* che diventa subito celebre. D'un tratto, la geometria di Euclide appare come il simbolo della matematica classica. A seguito del colloquio di Royaumont, l'O.E.C.E. riunisce in Yugoslavia, durante quattro settimane, una dozzina di esperti. Diretti da M.H. Stone, questi esperti stabiliscono un «Programma moderno di matematica per l'insegnamento secondario», pubblicato nel 1961 a Parigi col nome di *«Mathématiques nouvelles»*. Gli esperti si mettono d'accordo sull'introduzione alla teoria degli insiemi, all'algebra, all'analisi, al calcolo delle probabilità e alla statistica, ma rimangono divisi sull'insegnamento della geometria, punto caldo del dibattito. Si sono tuttavia trovati d'accordo nel rifiutare lo studio assiomatico della geometria prima dei 18 anni.

È in questo contesto che André Delessert pubblica la sua opera *Géométrie plane*. La composizione del libro ha chiaramente subito l'influenza della citata corrente di ricerca pedagogica della matematica, anche se Delessert stesso non è molto favorevole alla riforme nel modo proposto per esempio da Dieudonné e dai suoi amici.

È importante tuttavia approfondire il loro punto di vista per non additarli quali colpevoli di tutte le esagerazioni che caratterizzarono l'episodio «matematica moderna». Ecco ciò che scriveva al proposito Gustave Choquet (1915-2006)[10]:

«Sono esterrefatto da quello che constato nell'insegnamento nella scuola primaria e nel primo ciclo della scuola secondaria. Certo, sono stato uno dei promotori della riforma dell'insegnamento matematico, ma ciò che preconizzavo era semplicemente un taglio di alcuni rami secchi e ingombranti, e l'introduzione di un po' di algebra (…). Certamente, in sé i nuovi programmi e le relative istruzioni sono – malgrado qualche errore – di buona qualità, più soddisfacenti di quelli vecchi; ma c'è stata tutta un'atmosfera nociva che ha accompagnato la loro realizzazione: in particolare un attacco contro la geometria e contro il ricorso all'intuizione; si è detto agli insegnanti che sarebbero stati deplorevoli se avessero continuato a far studiare i triangoli, che l'algebra lineare sostituiva interamente la vecchia geometria (…). Il risultato è tale che, senza una sana reazione della base, penso che la generazione attuale dei nostri studenti riceverà una formazione matematica che non li preparerà, né alla ricerca matematica, né all'utilizzazione della matematica nella tecnica o nelle scienze sperimentali».

L'opera preparatoria di Gustave Choquet in geometria elementare

È senza dubbio nel lavoro di Gustave Choquet e nei contatti personali che André Delessert trarrà alcune delle idee direttrici del suo manuale[11]. Nella Prefazione, dopo i ringraziamenti generosi ai matematici dell'Università di Losanna – Georges de Rham et Jean de Siebenthal –, Delessert prosegue così:

10. Bernard Charlot, op. cit.
11. Gli archivi di André Delessert mostreranno forse alcune informazioni interessanti sulla storia di questo manuale. Attualmente sono dispersi in vari siti e si spera di poterli vedere di nuovo riuniti. I servizi degli Archivi dell'Università di Losanna, depositari della maggior parte dei documenti di André Delessert, dovrebbero procedere prossimamente al riordino di questo carteggio.

«Desidero esprimere la gratitudine particolare che devo al signor Gustave Choquet, professore alla Sorbona. Si sa dell'interesse attivo che Choquet dà all'insegnamento della geometria elementare. I consigli e le garbate osservazioni che mi ha elargito hanno profondamente marcato questa opera».

Occupiamoci ora del credo di Gustave Choquet in materia d'insegnamento della geometria. Lo si può scoprire nel piccolo trattato che pubblica da Hermann nel 1964, con il titolo «L'insegnamento della geometria», del quale aveva presentato le idee direttrici già qualche anno prima, al *Colloque de Royaumont*, come si legge nell'introduzione. Lo presento a partire dalla citata introduzione.

1. Per i giovani – età dai 13 ai 16 anni – «l'insegnamento della geometria non può essere deduttivo».
2. È «indispensabile che l'insegnante di questi allievi disponga di un'assiomatica sotto-giacente completa».
3. «È necessario dunque trovare un'assiomatica semplice, dagli assiomi forti, cioè che dia molto presto l'accesso a teoremi non evidenti, e intuitivi, cioè che traducano proprietà dello spazio che ci circonda, facili a verificare».
4. «Non importa che [gli assiomi] non siano indipendenti».

Lo scopo di questa assiomatica è di «permettere di scoprire comodamente la struttura vettoriale dello spazio così come l'esistenza e le proprietà del prodotto scalare». L'obiettivo di André Delessert è diverso, perché non include la struttura di spazio vettoriale. Un'altra osservazione di Choquet gli è stata utile:

«I manuali d'insegnamento utilizzano tutti la simmetria – non potrebbero evitarlo – ma pochi la fanno intervenire negli assiomi scelti; la loro assiomatica esplicita è dunque insufficiente, e così si privano di uno strumento potente. Molti professori considerano che la nozione di simmetria è delicata e abituano gli allievi a utilizzare sistematicamente i criteri di uguaglianza dei triangoli, anche nei casi nei quali una simmetria evidente fornirebbe una soluzione immediata. (…) Bisogna dunque reagire energicamente contro questa paura della simmetria e assegnarle, dall'inizio, il posto importante che merita».

Il messaggio è ricevuto cinque su cinque, come si usa dire, e «l'assioma della simmetria» regnerà nel cuore del dispositivo messo in atto da Delessert nel suo manuale.

Il «Delessert»

Lo storico della pedagogia della matematica di oggi, e che fu giovane molto tempo fa, leggendo *Géométrie plane* di André Delessert prova un duplice sentimento di meraviglia.

Il primo ha origine nel coraggio intellettuale manifestato da André Delessert che, esattamente mezzo secolo fa, osa pubblicare un'opera che si distanzia totalmente da una tradizione ben ancorata che dura da almeno duecento anni.

Il secondo è basato su una ragione inversa rispetto alla prima. Le riflessioni attorno alla riforma dell'insegnamento della matematica avevano messo in evidenza tecniche regolarmente utilizzate dai matematici – in particolare attinenti ai lavori della scuola Bourbaki, fondata nel 1935 – , tecniche suscettibili di integrarsi nell'insegnamento elementare (nozione di applicazione, di prodotto di applicazioni, di relazione, ecc.). Delessert vi fa capo solo marginalmente e la loro assenza sistematica lascia un'impressione di incompiutezza, il senso di una riforma che marcia sul posto. Si ha talvolta l'impressione che l'autore non abbia osato «lasciarsi andare», come si dice perfidamente oggi. Notiamo tuttavia che il primo paragrafo dell'opera intitolato «Generalità» inizia con nozioni di base dell'algebra degli insiemi (insieme, insieme vuoto, sotto-insieme, unione, intersezione); e ci si domanda perché fermarsi qui in questo bel cammino. Come se la mano destra ignorasse ciò che faceva la mano sinistra. In effetti, succede quasi sempre così in storia delle scienze quando si valuta una dottrina vecchia di qualche decennio per mezzo di un sapere del quale la dottrina è costitutiva.

Una prima ragione di questa rinuncia risiede probabilmente nell'attitudine di Delessert nei confronti delle esagerazioni della riforma degli anni '50 – esagerazioni alle quali ho accennato in precedenza – e sulle quali si era chiaramente espresso in una intervista rilasciata al giornale *L'Hebdo* del 28 aprile 1994.

Vorrei aggiungere qualche parola su questa rinuncia. Mi baso in parte su una simile rinuncia che ho approvato negli anni 1970, quando ebbi a insegnare questi argomenti. È soltanto dopo aver pubblicato un'opera[12] di riflessione sull'insegnamento della matematica all'attenzione degli insegnanti, che ho potuto superare questo blocco. Nella Prefazione, scrivevo infatti:

«Come indica il titolo, [l'opera] si propone di studiare i metodi che si possono convenientemente de qualificare di moderni, e di mostrare la loro efficacia nello studio di alcuni temi di matematica elementare».

Diamo dapprima una traccia dell'opera *Géométrie plane* per ciò che riguarda i passaggi nei quali la rinuncia è evidente. Il §2 porta il titolo «Trasformazioni geometriche» con due sotto-titoli: «Simmetria assiale» e «Perpendicolarità». Si trova un'introduzione, che è una lunga digressione sulla nozione di «trasformazione»; è seguita da una definizione precisa accompagnata da una messa a punto della terminologia, poi da una definizione di identità, di l'isometria, di prodotto «di due spostamenti», dall'uguaglianza e infine dall'enunciato dell'«assioma della simmetria» (assioma VIII). Ma è solo dopo circa 250 pagine che Delessert ritorna sulle trasformazioni, con un paragrafo intitolato «Le isometrie piane». Vi introduce la nozione di prodotto di «spostamenti», la rotazione, la traslazione, poi dimostra che ogni isometria è il prodotto di due o tre riflessioni, per concludere con il teorema 70, che segna la fine dell'opera: *«Il prodotto di tre riflessioni non è né una rotazione né una traslazione»*.

Il dispositivo costruito attorno alla «trasformazione», così come la terminologia utilizzata, mi sembrano rivelatori di un'attitudine psicologica, testimone dei

12. Jean-Claude Pont et Marc-André Pichard, *Méthodes modernes en mathématique élémentaire*, Lausanne-Paris, 1972.

profondi mutamenti che si giocano sulla scena della pedagogia della matematica all'inizio della seconda metà del secolo XX. Mi soffermo un istante.

Per ciò che concerne l'insegnamento della matematica, il libro di André Delessert si situa alla connessione fra due mondi. Il nuovo è ben visibile, ma il cordone ombelicale non è stato tagliato, gli ormeggi non sono stati sciolti. La grande preoccupazione dell'innovatore non è forse di conservare un legame con il vecchio, per non perdere o sconnettere subito i lettori? Potrebbe essere che la marcia indietro di André Delessert di fronte all'ineluttabile concessione alla «modernità» sia proprio una sottomissione di questo genere. Nella tradizione antica – difficile da datare, ma che risale alle origini – la geometria si rifiuta di fare ricorso a concetti esterni; e ciò per ragioni storicamente chiare e pertinenti. Già Euclide ha accuratamente evitato di parlare di movimento (eccezioni note nell'insieme dei tredici libri: la definizione dell'uguaglianza e la dimostrazione del teorema 4 del libro I). Il «blocco» è stato sciolto solo verso la fine del secolo XIX, con l'introduzione dell'idea di corrispondenza fra figure, e della trasformazione che è il suo primo *avatar*. La trasformazione, per via della sua subordinazione al movimento, conserva ancora il contatto con lo spazio, del quale la geometria vuole essere lo studio. Ma, in casa della sua vicina, l'analisi, la funzione che, fino ad allora, pareva concernere solo i numeri, prende un nuovo volto assumendo un nuovo carattere, quello di applicazione. Questa non ha rapporto con lo spazio, né d'altronde con l'analisi: è in un certo senso neutra, e la sua entrata nella geometria avrebbe potuto lasciare l'impressione di uno strappo alla correttezza, o meglio, un miscuglio di genere che farebbe cattivo genere! È un po' come l'evoluzione nel mondo animale: qua e là appaiono i primi fremiti, si vede la nuova forma vacillare e scricchiolare, per poi concretarsi nella piena luce della nuova specie. In fondo, il termine «applicazione» sarebbe stato troppo nuovo, sarebbe venuto da un ambito troppo diverso, troppo estraneo alla geometria, e lo si sostituisce con l'«eufemismo» «corrispondenza».

Il capitolo sull'omotetia e la similitudine (p. 250 e seguenti) si presta a commenti analoghi. La similitudine è definita a partire dall'omotetia e dallo spostamento, senza ricorrere all'idea di prodotto di trasformazioni; e due figure sono dette «simili» quando «esiste fra loro una corrispondenza puntuale» che soddisfa alcune condizioni date. Dunque si è di nuovo in presenza di questo matrimonio, un po' contro natura, con una «corrispondenza», cioè un procedimento che non concerne né «movimento» e nemmeno uno «spostamento», che è un caso particolare di movimento.

Quando, negli anni 1980, mi si permise di utilizzare il «Delessert» nelle mie classi della sezione scientifica, il linguaggio delle applicazioni e delle relazioni, proveniente dall'algebra, era già stato studiato in dettaglio in un corso generale – fino alla struttura di gruppo – e tutte queste circonlocuzioni divennero inutili.

Questa breve panoramica dell'opera *Géométrie plane* dev'essere completata in almeno un punto. Nel libro, André Delessert si è fatto accompagnare da un piccolo personaggio chiamato «Zosime». Il suo ruolo è di interrompere l'autore ogni volta che si presenta un punto meritevole di complemento d'informazione. Zosime è un falso ingenuo che permette all'autore di sollevare questioni delicate, che non possono integrarsi nel testo geometrico stesso. Le domande falsamente ingenue di Zosime sono talvolta occasione per un giudizioso sviluppo storico. Con questa presenza, l'autore si dà forse anche la possibilità di aprire lo spirito degli insegnanti stessi, su aspetti sovente dimenticati. Mi è parso infatti che le digressioni del piccolo personaggio siano prima di tutto destinate agli insegnanti, solo secondariamente agli allievi.

André Delessert. Introduzione alla logica

Nell'anno accademico 1982-1983, André Delessert ha tenuto un corso pubblico di logica all'Università di Losanna. Ne è seguita un'opera pubblicata dalle *Presses polytechniques romandes* nel 1988: *Introduction à la logique*, un libro che dedica alla sua sposa Claude. Questa «opera modesta», come André Delessert amava qualificarla, conta circa 200 pagine. Si tratta di una presentazione curata delle grandi conquiste della logica del secolo XX. Vi si trovano, in particolare, una dimostrazione del teorema di completezza della logica del primo ordine di Gödel, i teoremi di compattezza e di Löwenheim-Skolem e una bella applicazione della dimostrazione dell'esistenza di un gruppo senza torsioni, una dimostrazione «senza mostrarne né nominarne nemmeno uno» (p. 82). Oltre che per la sua chiarezza didattica, questa opera si distingue dalle sue simili per la presenza di numerose note e osservazioni: è come se si sentisse la presenza di uno Zosime nascosto, che non dice mai il suo nome.

Così convivono nell'opera di André Delessert un manuale di geometria, nel quale la figura, l'immaginazione e l'intuizione spaziali sono regine, e un'opera di logica, che tratta la parte più astratta della matematica, regno del simbolo puro, senza anima e privo di ogni pensiero sostanziale. Una dimostrazione di grande dinamicità di spirito. La logica, nel suo aspetto di formalizzazione della matematica, era forse per André Delessert una sorta di male necessario. È almeno così che interpreterei il seguente passaggio di pagina 154, nel quale egli scrive che la formalizzazione della logica propria dei ragionamenti matematici è «utile ma laboriosa, e rifiutata da parecchi matematici». Prosegue citando Paul R. Halmos, che ha insegnato per molto tempo la logica, e che afferma «che più studia la logica formale, meno gli piace».

André Delessert doveva tornare, alcuni anni dopo, sui problemi della logica, con il sotto-titolo: «Saggio sulle conseguenze scientifiche e filosofiche dei teoremi di Gödel». La parte consacrata alla logica e a Gödel inizia solo dopo 150 pagine di preparazione. La prima parte è uno studio lungo e dettagliato della storia del numero e dei suoi avatar, un autentico pezzo di storia della matematica. La teoria dei numeri transfiniti di Cantor rappresenta la congiunzione tra i due domini del numero e della logica. I numeri transfiniti appartengono, infatti, al campo del numero per le analogie strutturali ma conducono, d'altra parte, alla logica moderna attraverso i paradossi della teoria degli insiemi, segnatamente i problemi di consistenza o di esistenza che sorgono nel transfinito, attorno al buon ordine o all'assioma della scelta[13].

André Delessert, pensieri

Nel 2007, tre anni prima di morire, André Delessert pubblica nelle edizioni *L'Aire* un saggio di 325 pagine intitolato *Le règne de la frivolité*, con il quale ci trasmette il suo sentimento sul mondo moderno. Delessert fustiga il «frastuono delle

13. Un'analisi di questo libro si trova in: Jérôme Segal, «Gödel: une révolution en mathématiques. Essai sur les conséquences scientifiques et philosophiques des théorèmes gödeliens», *La revue pour l'histoire du CNRS* [En ligne], 4 | 2001. (URL: http://histoire-cnrs.revues.org/387)

istituzioni che hanno come obiettivo di banalizzare le nostre sensibilità e di alterare le nostre immaginazioni» (p. 8). Questo saggio, che è un grido di disillusione, tratta dunque di «alcuni dogmi fallaci» del nostro tempo: culto della novità, religione della velocità, salvezza mediante la tecnica, pigrizia intellettuale[14].

Il rettorato di André Delessert. L'*affaire* Mussolini

Nel 1937, l'Università di Losanna ha attribuito un dottorato *honoris causa* al dittatore italiano Benito Mussolini. Questo atto, incomprensibile per molti, aveva valso al rettorato dell'epoca una ricca contropartita e diverse interessanti relazioni. L'approssimarsi del 450° anniversario dell'Università di Losanna doveva risvegliare certe passioni e attizzarne altre. Per tranquillizzare le acque, bisognava chiarire la situazione. Si optò per la trasparenza. Venne il tempo del Rettorato di André Delessert. Con l'aiuto decisivo del suo vice-rettore Pierre Ducrey e dell'attuale archivista dell'Università, Olivier Robert, André Delessert decise la pubblicazione di un libro bianco che riproduceva tutti i documenti del dossier con i necessari commenti. La trasparenza pagò e il 450° anniversario poté essere festeggiato nella desiderata serenità[15].

Qualche parola per concludere

Bisogna visitare l'atelier di André Delessert – dove si ammucchiano parecchie decine di pezzi – per rendersi conto del posto che la scultura occupava nella sua vita. Si può seguire l'evoluzione della sua sensibilità estetica, la migrazione dalle forme figurative e accademiche degli inizi alle creazioni astratte, dove la sola forma domina. Questa evoluzione sembra mimare il passaggio dalle forme concrete della geometria alle strutture scarne della logica. Come se vi fosse una sorta di movimento parallelo nell'evoluzione dei due mondi di André Delessert. Ma è solo un'impressione, senza fondamento ontologico. Sempre che si abbia il diritto di chiedersi se due passioni così marcate possano occupare lo stesso spirito senza interferire, almeno nel subcosciente. La vita di André Delessert richiama questo celebre pensiero del Faust di Goethe, che ho scelto come motto: *«Zwei Seelen wohnen, ach! in meiner Brust»*.

Per finire, una vita ricca e variata, aperta su orizzonti diversi, una vita ricca e variata al servizio di convinzioni profonde e autentiche.

14. Si veda anche l'articolo di André Delessert, Il culto del Cambiamento ovvero i baffi della Gioconda, Bollettino dei docenti di matematica, nr. 46, maggio 2003.
15. Il libro bianco può essere ottenuto presso il Servizio degli Archivi dell'Università di Losanna.

Galleria

Figura 1. André Delessert nel suo studio.

Figura 2. Sculture.

2. La matematica pura come rifugio in tempi tragici[1]

Jean Dhombres[2]

The purpose of this short paper is to better look for reasons why men and women devote their life to science. Two special, or even extreme situations, have been chosen, within the context of the early seventeenth century, and in France during the Vichy govenrment and the German occupation. The paper focuses on mathematicians, as it is tried to check the meaning one may give to a refuge in pure mathematics.

Introduzione

In occasione delle *Rencontres Jules Verne* dedicate quest'anno alla responsabilità scientifica, l'accento dev'essere posto sugli interrogativi politici ed etici sollevati dalle idee attuali di governare che concernono il senso di una responsabilità collettiva delle risorse e le previsioni degli scienziati sui rischi a lungo termine. Ma parrebbe ugualmente utile evocare, a monte di questi, le reazioni responsabili di questi ultimi in periodi tragici. Tra questi, i tempi della Contro Riforma cattolica nell'ambito di ciò che è stato definito «l'affare Galileo» e sicuramente quelli relativi ai fascismi del XX secolo. Non è mia intenzione farne una tipologia, perché voglio parlare di una sola attitudine, quella di matematici che si rifugiano nel pensiero astratto puro, al fine di volere o poter tentare di liberarsi dalle catene di una situazione propriamente tragica. Si potrebbe «elevare» il dibattito filosoficamente o sociologicamente giocando su uno dei luoghi comuni più antichi con l'immagine della «torre d'avorio», nella quale si rifugerebbe sempre il matematico quando è considerato il *«realtype»* dell'intellettuale contemplativo che ignora sdegnosamente e irresponsabilmente l'attualità. Questa figura mi parrebbe essere più spesso quella del disprezzo di ogni pensiero non direttamente efficace; tento un'altra interpretazione con l'idea di un rifugio, cioè di una nobile reazione di sopravvivenza di fronte al totalitarismo, che sia quello dell'Inquisizione o della forma di fascismo adottata a Vichy dal 1940 al 1944. Questi saranno i miei due terreni storici; e si capirà che non voglio per nulla dipingere un quadro preciso di quei periodi sui quali esiste un'abbondante letteratura.

1. Traduzione redazionale dal francese di un articolo pubblicato sugli atti del convegno *«Jules Verne. Science, technique et société: de quoi sommes-nous responsables?»* tenutosi nei giorni 25 e 26 novembre 2010 all'*École Centrale* di Nantes. Si ringraziano l'autore e *Coiffard libraire éditeur* per aver concesso la traduzione.
2. Centre Alexandre Koyré, 27, rue Damesme, F-75013 Paris.

Dalla costrizione al rifugio

Devo giustificare perché ne parlo *hic et nunc*. Non si tratta più, in effetti, di raccontare solo storie per far conoscere le gesta di uomini ammirevoli, secondo la vecchia tradizione della storia delle scienze ancora presente oggi. Voglio tentare, attraverso la gravità di situazioni tragiche, di capire meglio le ragioni che hanno condotto e conducono uomini e donne a fare scienza, consacrandone la vita intera. In tempi normali si possono anche non notare, considerando le loro scelte dovute alla volontà di ricevere un premio Nobel e i suoi milioni, o una medaglia Fields, o, nel passato, rincorrere la notorietà dei salotti, la gloria delle accademie e dei premi o le corti principesche. Capire la strutturazione della mentalità che sorregge lo scienziato, meglio dell'evoluzione storica fino a oggi di questa mentalità, mi sembrerebbe indispensabile per ogni riflessione sulla *gouvernance*[3] e su ogni nuova forma di inserimento dello scienziato nella vita della città. Se le «social science studies on science» hanno condotto alla profonda rimessa in causa della posizione di esperto disinteressato che parrebbe essere l'equilibrio raggiunto nella seconda metà del secolo scorso, non hanno sufficientemente esaminato ciò che può significare una vita per la scienza. L'«affare Galileo» è in ogni caso rimasto celebre, ben al di là della disputa cosmologica sull'eliocentrismo che Comte ha raccontato come una grande saga positivista, perché porta il nome di una sola persona, il nome di colui che ebbe a subire l'iniquità di un giudizio della corte romana e che, per salvare la testa, ma purtroppo non la sua libertà, dovette pubblicamente ritrattare idee e argomentazioni che costituivano l'obiettivo di tutta la sua vita. Il suo rifugio fu dapprima una negazione, ma che poi ritrattò pubblicando a Leida in Olanda, lontano da Roma, i suoi «Discorsi e dimostrazioni matematiche».

Analogamente, quando poco prima della guerra 39-45, la scienza cominciò ad essere oggetto di studio per i sociologi, Robert K. Menton, considerato marxista, fu molto attento a definire la deontologia dello scienziato come persona socializzata. La società scientifica organizzata, diversamente dalla *Res publica litterarum*, gli apparve portatrice di valori propri sia nell'ambito del sapere propriamente detto, particolarmente in relazione con altri scienziati e con le corrispondenti istituzioni, cioè le Accademie –vero suo obiettivo- sia come condizione umana dello scienziato, nei suoi legami con i poteri politici, religiosi o economici. L'evoluzione di questi studi sulle scienze e le tecniche, focalizzandosi su questioni come le controversie scientifiche, condusse alcuni ricercatori a prendere alla lettera l'aspetto conflittuale di queste polemiche e a descriverle subito come facevano gli storici con le battaglie per renderle interessanti: presentavano, per così dire, due tempi alla pari subito prima della battaglia cruciale. Nell'affare Galileo, si è recentemente notato come si sia parlato della sua eroica solitudine[4], per presentare una contesa alla pari, molto prima che iniziasse il processo, tra lui e uno dei suoi maggiori censori, il cardinale Bellarmino che la Chiesa ha in seguito beatificato[5]. Bellarmino aveva argo-

3. [NdT] Sotto l'*Ancien Régime* era il nome delle giurisdizioni di Lille, Doual, Arras e Béthune.
4. G. de Santillana, *The crime of Galileo*, University of Chicago Press, 1955, *Le procès de Galilée*, trad. dall'inglese di A. Salem, rivista dall'autore e da J.-J. Salomon, Paris, Club du Livre, 1968; W. Shea, *Galileo's Intellectual Revolution*, London, Macmillan, 1991.
5. La tesi principale della beatificazione di questo teologo gesuita poggia sul fatto che egli aveva fortemente definito la supremazia del papato romano sui regnanti.

menti scritturali, Galileo argomenti scientifici: ecco l'affare interpretato come contesa ad armi pari, che provvisoriamente sarebbe stata vinta dal teologo sullo scienziato[6].

Descrivere sommariamente in questo modo significa dimenticare che Comte raccontava la storia dello spirito umano verso il progresso come un'avanzata per difetto, all'occorrenza come un necessario abbandono dell'età metafisica, età che comunque è stata utile a un certo stadio, ma che più tardi si è rivelata nociva. Altrimenti detto, nell'affare Galileo si definiva l'epistemologia positiva. Senza malintesi, né alcun cenno in questa contesa alla condizione di armi pari[7]. Evidentemente, se, in nome dell'autorità, Bellarmino avvisa Galileo di non presentare pubblicamente i suoi risultati, è perché egli sa benissimo che non vi sono armi pari e che gli argomenti scritturali richiedevano sottili interpretazioni. Mentre la posizione di Galileo conduce semplicemente a impedire di tornare indietro di fronte a idee completamente delineate.

Precisamente gli storici, e qui mi rifaccio alle tesi di Lucien Febvre e Marc Bloch sulle mentalità e gli strumenti mentali, erano partiti dai documenti diplomatici e avevano tentato, senza per altro perdere la nozione di rapporti di forza, di stabilire gli sviluppi a lungo termine, che a volte si perdono a corto termine. Ecco la linea che vorrei seguire parlando dei matematici nel corso dei periodi storici tragici[8]. Non mi sembrerebbe infatti sufficiente evocare solo rapporti in un mondo di matematici copiato dalla società civile, per esempio preso dai costumi della *«gentry*[9]*»* inglese vista come una *«gentility»* al servizio della verità, anche nel senso abbastanza vago di «raffinatezza» o di «civiltà» del termine, dimenticando così che questa civiltà fu in verità concepita come reazione dopo l'episodio rivoluzionario di Cromwell; non è certo la continuazione dei manuali del buon vivere del cortigiano. E, d'un tratto, in una situazione tragica, questa «civiltà» scoppia. C'è dunque dell'altro da capire nell'attività dello scienziato[10].

Devo infine precisare, non più i due terreni storici scelti, ma ciò che cerco di analizzare e che in questa sede non può che essere riassunto. Il primo terreno sarà quello di un gruppo gesuita marginale al XVII secolo, perché difende le tesi di Galileo anche dopo la sua condanna nel 1633. Questo gruppo fu costretto ad abbandonare il mondo della fisica, ambito rifiutato a causa della sua troppo marcata pretesa di rappresentare il mondo reale, e dovette occuparsi di una matematica che possiamo denominare pura, nel senso che nasce da un immaginario fittizio, in certi casi contrario al buon senso fisico di un tempo, per esempio trattando gli «indivisibili», rispettando però

6. R. Rorty, *Philosophy and the Mirror of Nature*, 1979: La filosofia e lo specchio della natura, trad. it di G. Millone e R. Salizzoni, Milano, Bompiani, 1980; *L'homme spéculaire*, trad. fr. T. Marchaise, Paris, Seuil, 1990, pp. 363-365.
7. L'uguaglianza, che prende il nome di «simmetria» in alcune teorie generali di storia della scienza, implica di soffermarsi su una qualunque specificità dell'attività scientifica, perché così utilizzerebbe, senza altri apporti, le stesse armi degli altri, fino a quelle politiche, così come l'arma che permette di tessere reti, creando ciò che i Cinesi chiamano *guangxi*, cioè il gioco dei regali fatti all'avversario, per metterlo in obbligo e che prosaicamente si può chiamare corruzione.
8. Dalle mentalità ho tolto l'aspetto disagevole che le considererebbe idee uniformi di un'intera epoca e di un'intera società, perché le colloco in seno a un gruppo di matematici in un periodo determinato e non le estendo in nessun modo al matematico in generale.
9. La piccola nobiltà.
10. S. Shapin, *A Social History of Truth: Civility and Science in Seventeenth-century England*, Chicago University Press, 1994.

il canone del rigore messo a punto nell'Antichità greca. Oggetto della mia analisi è unicamente l'espressione di una «costrizione» e sfocerò nell'idea di rifugio. Il secondo terreno sarà anch'esso marginale, almeno per il numero di persone implicate, e comprenderà una parte dei matematici francesi che, durante l'occupazione tedesca e sotto il governo Pétain, hanno scelto di sviluppare ugualmente una matematica pura, lontana *a priori* da ogni applicazione, in ogni caso di svolgere attività non suscettibili di essere recuperate dalla «rivoluzione nazionale» sorta nel luglio del 1940, che è indissociabile dalla «collaborazione», cioè dal cambiamento brutale delle alleanze. Uno dei membri importanti del consiglio voluto da Vichy era Louis de Broglie, premio Nobel per la fisica in virtù della sua Teoria ondulatoria della luce, diventato nel 1942 segretario perpetuo dell'*Académie des sciences*, malgrado un'opposizione, fatto mai accaduto prima in quel consesso. Nel caso dell'amministrazione di Vichy, se il termine costrizione è idoneo, non ci dev'essere stata alcuna scelta deliberata, nella misura in cui gli attori matematici non ne parlano apertamente. È pertanto questo aspetto attinente allo «spirito del tempo» che mi interessa particolarmente e che può essere meglio descritto come un rifugio. Ci sarà stato un adattamento quasi naturale per evitare ogni partecipazione all'ideologia della rivoluzione nazionale. Brevemente, in conclusione, la «torre d'avorio» dei matematici dovrà essere considerata come effetto diverso dal lungo termine, o la loro indifferenza all'utilità e ai tempi che vivono.

Alcune tesi di statica, da quella sul movimento galileiano del 1624 alla provocante quadratura del cerchio del 1647: l'itinerario del gesuita Grégoire de Saint-Vincent[11]

Per guadagnare tempo e beneficiare della suggestione delle immagini sovrappongo due illustrazioni. Una rappresenta quello che dopo Albert Einstein si chiama «principio di relatività»: un'esperienza di fisica, qui la caduta di un corpo lungo un piano inclinato, segue la stessa legge che si realizza a terra o a bordo di un battello in movimento rettilineo uniforme (Figura 1). Questa immagine è tolta da una tesi presieduta nel 1624 a Lovanio da Grégoire de Saint-Vincent, gesuita allora quarantenne, tornato da un lungo soggiorno a Roma, dove in particolare, più di dieci anni prima aveva accuratamente organizzato la visita di Galileo al Collegio romano. In quell'occasione fu definita da Bellarmino la posizione che, infine, avrebbe schiacciato Galileo e alla definizione della quale Grégoire fu testimone interno, anche se impotente nel far cambiare le cose. Perché mai Bellarmino si rivolse ai gesuiti del collegio romano se non trattandoli da esperti di secondo grado e non come esperti di teologia? La seconda illustrazione è tolta dal libro più famoso di Grégoire, pubblicato ad Anversa nel 1647, *Oeuvre géométrique de la quadrature du cercle et des sections du cône*, dove nel titolo è annunciata la temuta quadratura del cerchio, oggetto di litigi fra i matematici sin dall'Antichità. In quest'ultimo libro in ogni caso non è rappresentata alcuna realtà fisica e appare una sequenza interminabile di teoremi e dimostrazioni, con calcoli talmente complessi da far pensare che la pratica dell'algebra non era proprio ben vista da Gré-

11. J. Dhombres, P. Radelet-de-Grave, *Une mécanique donnée à voir. Les thèses illustrées défendues à Louvain en 1631 par Grégoire de Saint-Vincent*, Turnhout, Brepols, 2009.

goire. Per rendersi conto del genere di matematica pura praticata, mostro una sola pagina, verso la settecentesima (Figura 2), sia riguardo alla parabola (diventata da Galileo in poi la curva relativa alla caduta dei corpi) sia concernente la spirale nella quale, si legge alla proposizione XXVI), intervengono anche successioni geometriche (*continue proportionalis*).

Figura 1. Illustrazione che accompagna il teorema 4 in *Theoremata mathematica scientiae staticae de ductu ponderum per planitiem recta et oblique horizontem decussantem*…, Lovanio, 1624.

PROPOSITIO XXVI.

Data sit parabola AMP, quam tangat AH divisa in continuè proportionales AB, AC, AD, &c. ductisque diametris BI, CK, DL, EM, &c. iungo AI, AK, AL, AM, &c.

Dico segmenta omnia parabolica AI, AIK, AKL, AIKLM, AIKLMN, esse continuè proportionalia.

Demonstratio.

[illegible]

APPLICATVR SPIRALI.

Data sit spiralis AINH, cuius linea, quae est in principio circulationis, nempe AH divisa sit in continuè proportionales AB, AC, AD, &c. & centro A intervallis B,C,D,E, F, G descriptis circulis qui spiram secent in I,K,L,M,N,O, iungantur AI, AK, AL, &c.

Dico segmenta omnia spiralia AI, AIK, AIKL, AIKLM, &c. esse continuè proportionalia.

Demonstratio.

[illegible]

Figura 2. La pagina 697 dell'*Opus geometricum quadraturae circuli et sectionem coni*, di Grégoire de Saint-Vincent, concernente la simbolizzazione della parabola nella spirale.

Bisogna evocare il contesto epistemologico, che è culturale e politico. Infatti l'immagine del battello è un magnifico esperimento di pensiero (*Gedankenexperiment*) del quale Galileo parlerà nei suoi «Discorsi» del 1638. D'altra parte potrà avere una concretizzazione sperimentale grazie a Mersenne. Questa immagine fornisce un'arma considerevole alla possibilità ragionevole del movimento della Terra: non è in ogni caso con un esperimento ordinario che si potrebbe provarlo, perché il movimento del battello non si osserva facendo scendere dei pesi lungo un piano inclinato. L'immagine infrange dunque, anche se in modo implicito, il divieto del 1616 che fu segnalato a Galileo dal cardinale Bellarmino e che imponeva di non rendere pubblica l'opinione della mobilità della Terra. Da allora è indispensabile segnalare i termini stessi della condanna di Galileo del giugno 1633:

> – Costatato che tu [Galileo] avevi dei discepoli ai quali insegnavi la stessa dottrina, e che, sullo stesso soggetto, avevi una corrispondenza con i matematici di Germania […]
> – La proposizione secondo la quale la Terra non è al centro del mondo e nemmeno è immobile, ma che si muove di un moto diurno, è ugualmente assurda e falsa in filosofia e considerata in teologia almeno come errata secondo la fede […]
> – Noi ti condanniamo alla prigione formale di questo Santo Uffizio, a nostro unico arbitrio.

La costrizione essendo così stabilita, rimangono da spiegare le modalità secondo le quali Grégoire de Saint-Vincent passò dalla fisica dei gravi, e dunque dalla riforma alla Galileo della filosofia naturale, alla matematica pura. In questo movimento stabilirà l'integrazione della funzione 1/x sotto forma di logaritmo, che si dirà «naturale», e l'esponenziale, ma si perderà nella quadratura del cerchio. Prima del 1630 il suo pensiero si centra su problemi di calcolo di aree, ma essenziale per lui rimane la fisica di ciò che cade: ha allievi e promuove tesi, fra le quali quella del 1624. Poi, e malgrado il mantenimento in petto dell'eliocentrismo – lo sappiamo attraverso lettere tardivamente scambiate con Huygens –, Grégoire si preoccupa esclusivamente delle quadrature e della loro formalizzazione rigorosa. Facendo ciò sapeva di non rischiare di essere accusato similmente a Galileo. Grégoire de Saint-Vincent si mantiene così in disparte, a Gand, e non risiede più a Lovanio presso la famosa università dove alcuni anni prima organizzava conferenze pubbliche sulla nuova scienza[12].

Nello stesso tempo, Descartes abbandona la pubblicazione di un libro sul *Système du monde*, al fine di evitare una condanna dall'*Université de Paris*. La costrizione che obbliga Grégoire a rifugiarsi nella matematica pura è dunque, tenuto conto delle circostanze, un notevole adattamento di un gesuita sia al suo voto di obbedienza religiosa sia alle sue qualità matematiche. L'orientamento esplicitato e mantenuto verso la quadratura, che gli è valso uno scadimento nella memoria scientifica, testimonia pubblicamente, in un certo modo, il disagio che provava nel fare della matematica pura un rifugio. Ma è un modo tipicamente barocco, dunque nel corso di quei tempi, quello di voler conciliare due movimenti contraddittori, come l'appartenenza a un ordine religioso fermo su posizioni dogmatiche e la pratica della ricerca.

12. Grégoire de Saint-Vincent, uno degli «allievi di Clavius», del quale si poteva pensare che diventasse una maglia di una vasta rete per favorire la pratica scientifica nella Compagnia, non cercava più, a partire dal 1630, di tessere una rete europea con la quale avrebbe potuto tentare di far passare le sue idee. Ma formò parecchi allievi nell'ambito della matematica pura che praticava.

Quale matematica fare sotto Vichy?

Nel 1996, Laurent Schwartz descriveva le mentalità di un parigino, allievo di una scuola normale, diventato trotzkista verso il 1950, che adottava se non il pacifismo, come avrebbe voluto il vocabolario di allora, ma piuttosto la non violenza alla Bertrand Russell, dove è possibile vedere un'influenza di Gandhi. Schwartz considerava in ogni caso l'impegno politico come parte fondamentale dell'intera sua vita. Tuttavia, organizzando i suoi ricordi, collocava la matematica in un altro mondo e di questo aveva fatto una scelta prioritaria. Cosa che forse attiene all'estetica e potrebbe così opporsi a una morale di azione militante:

> *«Sono profondamente non violento, odio la violenza. Ma nel mondo che scoprivo regnava una violenza spaventosa: lo sfruttamento capitalista, il colonialismo, il fascismo, lo stalinismo, la guerra del 14-18 e quella che si preparava. La rivoluzione era nell'aria di quel tempo, all'ordine del giorno, inevitabile, e il prestigio della rivoluzione russa era gigantesco* […]. *Ma certamente la matematica è rimasta primordiale*[13]*».*

In questo testo, nel quale il presente quasi eterno coabita con l'imperfetto datato, si capisce che Schwartz non cita esplicitamente una delle rivoluzioni che ha vissuto, la «rivoluzione nazionale» del maresciallo Pétain del luglio 1940, tanto era diventata odiosa a molti francesi. Ma ne ha comunque captato la moda, che si trova così ben spiegata dall'americano Robert O. Paxton, colui che ha radicalmente cambiato la percezione su Vichy nel suo *Vichy France, Old Guard and New Order* e di conseguenza indotto studi storici finalmente liberati dal fardello della guerra. Lo storico consacra infatti un lungo capitolo alla cosiddetta rivoluzione nazionale:

> *«Anche chi propendeva per lo status quo* [nel luglio 1940] *pensava che non si sarebbe potuto salvarlo se non rinnovandolo profondamente. Nella loro esaltazione, i Francesi di Vichy commisero una grande imprudenza: impazienti di seppellire vecchi rancori e di modificare ciò che aveva condotto alla disfatta, rivoluzionarono le strutture del paese sotto l'occhio del nemico*[14]*».*

Altrove, e indipendentemente da ciò che aveva appena detto, Laurent Schwartz, che ottenne la medaglia Fields nel 1950 per la teoria delle distribuzioni, esprimeva l'importanza che ebbe per lui il gruppo Bourbaki, perché promuoveva una rivoluzione favorevole all'invenzione stessa. Ma Schwartz in principio non segnalava la mancanza di interesse del gruppo per una qualunque applicazione delle teorie in gioco. Tutto era posto sul fronte epistemologico della classificazione delle discipline matematiche nell'imbrigliamento delle strutture e mai basandosi sulla data nella quale Schwartz le scoprì come veramente utili per la sua opera. Fu nel 1940, al tempo del ri-

13. L. Schwartz, *Un mathématicien aux prises avec le siècle*, Paris, Odile Jacob, 1997, chap. III.
14. R.O. Paxton, *La France de Vichy, 1940-1944*, traduzione dall'americano di Stanley Hoffmann, 2è ed., Paris, Seuil, 1999, p. 186.

piegamento delle università di Nancy e di Strasburgo a Clermont-Ferrand: e così fu sua moglie Marie-Hélène che seguì un corso di Jean Dieudonné sugli spazi vettoriali topologici, perché lui evitava di mostrarsi in pubblico, visto lo statuto degli ebrei decretato da Pétain nell'ottobre 1940, anche se continuava a percepire un trattamento dall'equivalente del CNRS, «protetto», se possiamo dire, dal fatto che l'organismo non comportava lo statuto di funzione pubblica. Gli spazi vettoriali topologici lo condurranno all'esposizione della teoria delle distribuzioni nella sua tesi del 1943. Schwartz dice di essere stato «cavia» di Bourbaki dal 1940 al 1942 e apprezzò la formazione così ricevuta[15]. Nella sua critica successiva a Bourbaki, menziona pertanto la presenza di «evidenti errori», fra i quali il privilegio accordato alle misure di Radon su quelle astratte, così indispensabili alle probabilità[16]. Nessun accenno al fatto che le probabilità nascono dal mondo delle applicazioni e non da quello della matematica pura[17]; nessun accenno di spiegazione nemmeno del fatto che ci fu un ripensamento nello sviluppo intellettuale dell'uomo ancora giovane che pubblicava nel marzo 1941 sui *Comptes rendus* dell'*Académie des sciences de Paris* un articolo concernente il calcolo delle probabilità[18]. Prima ancora di citare Schwartz, e per poterlo rendere comprensibile, ho voluto dare le spiegazioni tecniche indispensabili, ma ora vorrei proprio sottolineare il termine «entusiasmo» nello stesso periodo nel quale Paxton parla di «esaltazione» e di «febbre»:

> *«Ho adottato con entusiasmo, nel 1940, la teoria delle misure di Radon sugli spazi localmente compatti, facilmente, così come avevo fatto per le probabilità che avevo studiato prima della guerra con Paul Lévy, teoria che non considerava misure generali, men che meno le tribù».*

Nello stesso paragrafo della sua autobiografia, nel quale esprime il suo allontanamento dalle probabilità, per ragioni di servizio militare, dice, accenna all'incontro inopinato con Bourbaki, causato dell'occupazione tedesca, e infine all'elaborazione

15. Nel suo *Souvenirs d'apprentissage* (Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 1991), André Weil parla di Bourbaki prima della guerra, ma anche del «congresso» bourbakista di Clermont-Ferrand dell'autunno 1940, al quale partecipò Schwartz, *«alors brillant débutant, qui était dans la région»* (p. 177). Anche se Weil si lamenta perché nessun decano delle università francesi ha avuto il coraggio di annunciare le proprie dimissioni per non dover applicare il decreto sugli ebrei, non menziona alcun cambiamento nell'attività propriamente intellettuale di Bourbaki. Weil lascerà la Francia partendo da Marsiglia.
16. Devo aggiungere tecnicamente che la compattezza locale necessaria alle misure di Radon impone che gli spazi vettoriali considerati abbiano dimensione finita e dunque non concernono le probabilità a dimensione infinita, considerate giustamente indispensabili.
17. Si potrebbe forse considerare la posizione elitaria di Bourbaki di fronte alle applicazioni come una delle facce del conflitto prolungato fino ad oggi tra Platone e Aristotele su ciò che produce l'ispirazione nell'invenzione matematica. Si potrebbe anche parlare, come fa Pierre Bourdieu, di un diritto d'entrata –la sofisticazione bourbakista- imposta da alcuni giovani agli inizi degli anni 30 nel tentativo di creare un nuovo campo (vedere P. Bourdieu, Le champ scientifique, *Actes de la recherche en sciences sociales*, juin 1976, no 2/3, pp. 88-132). Ma si è scelto precisamente il caso di Laurent Schwartz perché, oltre al fatto che è un matematico fuori dal comune, ha rinunciato alla matematica applicata, una volta uscito dalla Scuola normale superiore e ricevuto l'*«agrégation»* nel 1937. Ha incontrato Bourbaki solo nel 1940.
18. L. Schwartz, Sur le module de la fonction caractéristique du calcul des probabilités, *Comptes rendus Acad. Sc.*, marzo 1941, pp. 418-421.

delle distribuzioni nell'ottica degli spazi vettoriali topologici di Bourbaki. Riconosce che sono molto astratti e difficili da capire e prosegue con un tono del tutto diverso:

> *«In sintesi, Bourbaki si è allontanato dalle probabilità, le ha rifiutate, le ha considerate non rigorose* […]. *Egli porta una pesante responsabilità, che condivido, nel ritardo del loro sviluppo in Francia, almeno per quello che concerne i processi* [stocastici]*, cioè gli sviluppi moderni.»*

Oggi verrebbe voglia di dire che, più o meno nella stessa epoca, Sobolev aveva aperto la strada verso le distribuzioni, a partire dal concetto di metrica, che possiamo considerare più concreto, nel senso che si iscrive nella continuità di pensiero dell'analisi delle funzioni e delle loro derivate[19]. Non si può pertanto parlare di una scelta effettiva di Schwartz tra due modi di fare, a meno di supporre malignamente che aveva coscientemente riconosciuto l'importanza del lavoro dei sovietici; è storicamente più efficace parlare di un cambiamento di mentalità nel solco del genere intellettuale lanciato da Bourbaki. Eppure Schwartz, che ha parlato di entusiasmo, non stabilisce alcun legame con l'élite francese di questo periodo in favore di un netto cambiamento cioè di una ricostruzione[20], nemmeno dunque con ciò che avrebbe potuto condurlo a rifugiarsi, in nome di questo entusiasmo, in un cammino il più lontano possibile dalle applicazioni. In ogni caso la questione delle applicazioni è soggiacente e crea disagio. Non un disagio nel giudizio che si può dare di Schwartz, ma nel racconto della sua storia.

La questione non appare pertanto quando Schwartz parla dell'ostracismo del quale fu vittima Paul Lévy, professore di analisi all'*École polytechnique*, ben presto licenziato a causa dell'origine ebrea e i cui lavori sulle probabilità erano conosciuti ma poco apprezzati[21]. Schwartz non giunge comunque alla «matematica applicata». Assicura che era stata molto feconda nei «periodi precedenti», cita Henri Poincaré, che non è particolarmente conosciuto per la sua propensione verso le applicazioni, e giudica empirista Joseph Fourier, per la mancanza di rigore[22]. Ma, prosegue Schwartz, que-

19. La nozione di concreto in matematica è sempre discutibile: Sobolev adottava un percorso di tipo hilbertiano in analisi funzionale, ma seguiva i metodi di Banach sulle operazioni lineari, metodi giudicati altamente astratti in una certa analisi funzionale ed erano ancor più generalizzati dagli spazi vettoriali topologici localmente convessi.
20. Oggi gli storici riconoscono come questo periodo fu fecondo sul piano culturale (per esempio per il cinema) ma anche quanti ingegneri elaborarono piani e pensarono alla ricostruzione. La poca cura nel mettere questa azione al servizio della rivoluzione nazionale è dovuta al fatto che questi progetti avevano oggettivamente il difetto di non poter essere realizzati nel periodo di occupazione nel quale le risorse francesi erano dirette per lo più verso la Germania. Questa forma di utopia degli ingegneri e degli scienziati, o comunque di progetti a lungo termine, può anche essere considerata una forma di rifugio. Non se ne è forse ancora abbastanza ben valutata l'efficacia sullo sviluppo francese degli anni 50. Senza dubbio il desiderio di questi anni di seguire i cambiamenti americani ha impedito di considerare i pensieri dell'epoca francese precedente: ma in matematica, proprio grazie a Bourbaki che fu adottato dagli americani, questa obliterazione non può funzionare.
21. Sarebbe utile approfondire perché l'opera originale di Paul Lévy sulle probabilità fu all'inizio messa da parte in Francia.
22. La pratica attuale ha restituito a Fourier un posto ben diverso e l'*Académie des sciences*, grazie a Jean-Pierre Kahane, ha saputo spiegare magistralmente la posizione di Fourier,

sta matematica applicata era sparita dalla Francia nel momento stesso della sua nascita e, senza citare Lévy a questo proposito, costata che sarà «sempre deliberatamente ignorata» da Bourbaki. Non ci saranno tentativi di spiegare questa «ignoranza», se non quello di considerarla un errore, ma un errore fuori dal tempo. Ciò che non gli impedisce di tornare sul suo primo entusiasmo, detto questa volta indipendentemente dalle circostanze precise della guerra:

> *«Bourbaki suscita in me un bello slancio e malgrado le orribili circostanze internazionali che mi frustavano mi rese veramente felice in questo periodo dal 1940 al 1942».*

Di questo entusiasmo per una nuova matematica fin nell'insegnamento, e dunque fino alla costruzione di un nuovo stato dello spirito e di un rinnovamento a partire dai giovani, sono testimoni, agli inizi del 1940, le note di un corso di René de Possel, momentaneamente bourbakista, per il primo anno della facoltà a Clermont-Ferrand[23]. Vi figurano le innovazioni della scrittura introdotte da Bourbaki, anche se allora ancora inedite, per esempio nella dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra. Questo corso, tagliato decisamente sulle materie usuali del certificato del calcolo differenziale, conserva ancora oggi il suo carattere entusiasmante. Per mostrare in modo più generale una mentalità, lo storico Paxton cita Jean Bichelonne, segretario di Stato alla Produzione industriale che, nel 1943, mirava con Albert Speer a una integrazione economica franco-tedesca e ci vedeva un ubriacante «fermento di progresso tecnico[24]». Di questo entusiasmo si potrebbe altrettanto parlare bene ricordando l'organizzazione della scuola dei quadri di Uriage fatta da Dunoyer de Segonzac a partire dal gennaio 1941, per formare l'élite della rivoluzione nazionale, o più semplicemente per trasformare la scuola politecnica resa civile da una clausola dell'armistizio e dalla quale Paul Lévy sarebbe stato escluso. Tutti segnali discorsivi per ciò che si considerava come l'entrata della Francia nell'età moderna[25]. Ma il gruppo di crisi, o Centro politecnico di studi economici, alcuni membri del quale si erano visti offrire posti nel governo di Vichy, aveva prodotto a partire dal 1933, per mezzo del suo bollettino mensile, molte analisi di «previsione ed evoluzione» con le quali le probabilità e le statistiche matemati-

che giungeva alle applicazioni numeriche più precise e in un certo senso «prevedeva» la teoria della convergenza delle distribuzioni messa a punto da Schwartz con le distribuzioni temperate. Prevedere: è in questo senso che Fourier pensava un isomorfismo per la trasformazione di Fourier del tipo di quello che Schwartz realizzò con le distribuzioni temperate. Si veda J. Dhombres, J.B. Robert, *Fourier, créateur de la physique mathématique*, Paris, Belin, 1998.

23. Il documento che è conservato nella biblioteca dell'università di Clermont-Ferrand meriterebbe uno studio a parte.
24. Si trova nella prefazione di Jean Bichelonne al libro di R. Catherine, *Economie de la répartition des produits industriels*, Paris, Presse Universitaires de France, 1943. È importante segnalare con la storiografia contemporanea che la diplomazia tedesca non si è mai minimamente interessata alle velleità francesi di alleanza. La Francia serviva l'economia tedesca di guerra, punto e basta.
25. J. Dhombres, The question of a renewal in the mathematical sciences seen from the attitude of French scientists in a group during the Vichy government», *Barcelona workshop on science, Discussion on the mechanisms for xxxxxx with politically incorrect pasts and confrontino unwanted traditions*, 1999.

che furono impiegate per «razionalizzare l'economia». È sintomatica la pubblicazione nel 1940 di un libro di G. e Ed. Guillaume, *Economique rationnelle*, presentato dalla *Revue des sciences*. Questo partito preso era tecnocratico e dunque anche «entusiasmante» perché «moderno»[26]. Pertanto il fisico Frédéric Joliot-Curie scriveva nel 1941, contro questa ideologia:

> *«L'abuso della matematica astratta aveva condotto i politecnici a scegliere sempre la soluzione teorica più perfetta ma a snobbare la soluzione più efficace industrialmente[27]».*

Al di là di una osservazione banalmente corporativistica del fisico contro la matematica, non è possibile vederci una condanna del prurito teorico che colpiva certi spiriti nell'entusiasmo degli anni '40? Non si può però parlare di dilemma concernente le applicazioni, perché è proprio di questo che si tratta: Joliot era reticente a ogni avvicinamento a Vichy e alla rivoluzione nazionale e contrattaccava parlando di un'incompetenza. Altri potevano pensarla diversamente e se chiedevano ancor più teoria era per evitare la nascita di applicazioni relativamente rapide. Schwartz non ne parla, ma si può pensare che il pétainista Louis de Broglie ci creda, anche se diventato segretario perpetuo, quando afferma che all'Accademia non si deve affatto «tracciare una linea di condotta» ma che è più conveniente per alcuni perseguire «ricerche scientifiche disinteressate[28]». Quest'ultimo termine non designa esattamente ricerche non aventi applicazioni dirette come scopo immediato? Sarebbe in contraddizione con la sua posizione nel Consiglio della rivoluzione nazionale, ma certamente in sintonia con quelli che potevano ancora mantenere un'attività di ricerca[29]. Una volta sostenuta la sua tesi, e pubblicata da Hermann, Schwartz sottolinea giustamente l'interruzione necessaria di ogni attività matematica dal marzo 1943 al settembre 1944, perché doveva sfuggire i rastrellamenti e mantenere un'attività di propaganda trotskista. La costrizione era sorta prima, perché sarebbe stato impossibile per Schwartz frequentare un eventuale gruppo di lavoro governativo sulla statistica. Analogamente, Bourbaki ha rappresentato l'occasione unica per un lavoro di apprendimento seguito. Si tratta proprio di un rifugio verso una struttura di accoglienza intelligente. Il prezzo da pagare –il disagio, per riprendere il termine utilizzato da Grégoire de Saint-Vincent- è allora la posizione nei confronti dell'applicazione. Si manifesta dopo la guerra, quando Laurent Schwartz sarà il promotore dei «metodi matematici applicati alla fisica», secondo il titolo di una delle sue opere più utilizzate.

26. G. Desaunay, *X-crise. Contribution à l'étude des idéologies économiques d'un groupe de polytechniciens durant la crise économique (1931-1939)*, thèse.
27. Citato da M. Pinault, *Frédéric Joliot-Curie*, Paris, Odile Jacob, 2000, chap. XII.
28. *Comptes-rendus Académie des sciences*, Paris, 4 janvier 1943, p. 19.
29. Michèle Audin ha analizzato i mezzi di diffusione delle ricerche matematiche in questo periodo relativamente ad alcuni casi, fra i quali quello di Schwartz, «pubblicato sotto l'occupazione. Attorno al caso di Jacques Feldbau e dell'accademia delle scienze», Revue d'histoire des mathématiques, vol. 15, 2009, pp. 5-57.

La torre d'avorio come rifugio

Figura 3. Un'illustrazione per una favola di La Fontaine del XVII secolo: l'astronomo che cade in un pozzo.

Offrendo alla lettura due esempi in situazioni particolarmente tragiche, ho trasformato la vecchia figura retorica della «torre d'avorio» del matematico in un rifugio. Ho dunque cercato di dimostrare che questo rifugio corrisponde a una costrizione, e naturalmente ho utilizzato il termine «rifugio» nel senso adottato dai protestanti francesi per indicare il rifugio di Ginevra durante le guerre di Cévennes, come una possibilità di agire altrimenti. Un'immagine che illustra una favola di La Fontaine sarà sufficiente per capire come il passato può stimolare reazioni (vedi Figura 3): si vede infatti un uomo cadere in un pozzo solo perché voleva guardare il cielo. L'illustrazione è piacevolmente classica, ma l'uomo che cade nel pozzo è un astronomo che ha in mano un cannocchiale, lo strumento che permise a Galileo di interpretare un nuovo mondo e di assicurare la rivoluzione scientifica. Rappresentarlo nella sua torre d'avorio di un castello che si scorge in secondo piano, significa affermare che la rivoluzione è di per sé incapace di cambiare il corso del mondo. Grégoire de Saint-Vincent e Schwartz sapevano che anche la matematica pura poteva rivelarsi particolarmente efficace, ma senza dubbio non generalmente efficace.

1. Su alcune D in didattica della matematica: designazione, denotazione, denominazione, descrizione, definizione, dimostrazione

Riflessioni matematiche e didattiche che possono portare lontano

Bruno D'Amore – Martha Isabel Fandiño Pinilla[1]

In the habitual classroom actions there are delicate moments to which one doesn't pay attention due to a lack of competence; for example, one doesn't pay attention to the actions of designation or denotation (and connotation), denomination and description; while operations of definition and demonstration are much more kept under observation. In this short text, we want to draw attention on all these mathematical moments of great significance.

1. Introduzione

La maggior parte di noi esseri umani confonde tra loro operazioni che i linguisti ed i filosofi studiano come non sinonime; lo fa nella vita quotidiana, lo fa nella pratica discorsiva, nella comunicazione… E lo fa quando insegna matematica. Siccome sempre più ci si accorge che eventuali insuccessi apprenditivi in matematica non sono necessariamente relazionati alla mancata comprensione della disciplina ma del linguaggio, dei linguaggi, delle azioni semiotiche, delle consuetudini implicite etc., che le ruotano attorno, ci è sembrato potesse rivestire un certo interesse distinguere ed evidenziare le operazioni di designazione, denotazione (e connotazione), di denominazione e di descrizione degli oggetti matematici, visto che ciascuna di esse ha una sua precisa funzione. Abbiamo anche voluto notare come questi termini richiamino attività legate alle pratiche del definire e del dimostrare, le cui difficoltà di apprendimento sono già state oggetto di moltissime ricerche specifiche.

En passant, abbiamo voluto far notare ancora una volta come questo genere di riflessioni, anche non troppo profonde, mostrino che l'atteggiamento pragmatista realizza e modellizza meglio di quello realista la nostra disciplina, la didattica della matematica. Per questo ci siamo serviti delle riflessioni di John Stuart Mill, economista e filosofo in grande auge negli anni '60, ma troppo presto dimenticato.

1. NRD, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia
MESCUD, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia

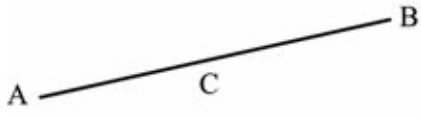
2. Designazione, denotazione (e connotazione), denominazione, descrizione e definizione.

2.1. Designazione

Designare ha vari significati: stabilire o fissare qualcosa (una data, un luogo per un appuntamento, persone cui affidare qualcosa …); ma anche indicare qualcosa con un termine opportuno; o scegliere qualcuno per un incarico, proporre un candidato.

Nella sua accezione più vicina alla matematica, designare indica la scelta opportuna per indicare qualche cosa.

Per esempio, sembra opportuno indicare un segmento con due lettere maiuscole che indicano i suoi (punti) estremi (*AB*) [che qualcuno stupidamente scrive $\overline{AB}$, confondendo il segmento con la sua misura]; mentre non sarebbe opportuno o necessario, per quanto non vietato, indicare un segmento con tre lettere maiuscole (*ACB*, basta che *C* appartenga ad *AB*…).



Ovviamente, nella situazione giusta, è altrettanto opportuno indicare un segmento con una lettera minuscola: il segmento s.

Naturalmente, la designazione è un fatto relativo e non assoluto; per esempio, nell'insieme di tutti i segmenti di un dato piano α, non è designazione significativa indicare un segmento dando la sua lunghezza (per es. 3m) dato che esistono infiniti segmenti che risponderebbero a quella designazione; ma in un insieme di segmenti dato, nel quale esiste un solo segmento lungo 3m, quella designazione sarebbe corretta.

La designazione non sempre è matematicamente ineccepibile, se fa uso di termini non matematicamente corretti; se, per esempio, lungo il corso di una pagina, appaiono due quadrati, uno dei quali alcune righe (tipografiche) dopo dell'altro, la designazione «il quadrato di sopra», sebbene nella lingua comune sia accettabile perché appunto designa uno dei due quadrati, non è ineccepibile sul piano squisitamente matematico se, per esempio, si volesse far riferimento a due quadrati complanari.

La designazione ha poco a che fare con la matematica; designare un oggetto matematico è un espediente comunicativo utile per poter far sì che emittente e ricevente si intendano. Eppure, spesso, nella pratica didattica l'emittente-insegnante s'intestardisce su questioni aventi a che fare con la designazione più che con la matematica, facendo credere al ricevente-allievo che il quid essenziale della matematica consista nelle designazioni. Per esempio, è inutile il simbolo di accento circonflesso che si mette sulla lettera *B* quando si vuol indicare l'angolo *ABC*, se appare esplicitamente la frase «il triangolo»; cioè, la scrittura: «l'angolo $A\hat{B}C$» è inutilmente ridondante, pedante. Ma di esempi così, nel linguaggio scolastico matematico, se ne posso fare parecchi.

2.2. Denotazione (e connotazione)

Dato un termine, per esempio l'aggettivo «coniglio», la denotazione è una frase che lo descrive, lo caratterizza, per esempio «roditore che…», tipica dei dizionari o delle enciclopedie. Non è raro trovare dizionari sui quali si denota in modo tale da creare un circolo vizioso:

– Circonferenza: curva che racchiude un cerchio;
– Cerchio: parte di piano racchiusa da una circonferenza.

Ma ogni termine del linguaggio porta con sé caratteristiche, spesso legate più ai sensi figurati che al vero e proprio significato, cioè significati che accompagnano quello basilare, attributi stilistici, affettivi o rinvii ad aspetti letterari (con sfumature migliorative o peggiorative o eufemistiche); per esempio «coniglio» comporta connotati di vigliaccheria o di mancanza di coraggio; si parla allora di connotazione.

Per esempio, la parola «retta» ha una sua denotazione: linea che può essere percorsa senza cambiare direzione (questa non è una definizione, ma solo una denotazione); ma comporta connotazioni dovute all'uso popolare e eufemistico: corretto, senza sbavature, onesto, che segue le regole etc.

Allo studio della connotazione si è dedicato il filosofo ed economista britannico John Stuart Mill (1806–1873) che distingue tra termini (puramente) denotativi (per esempio i nomi propri) e termini connotativi (attributi e nomi comuni che, oltre a denotare, connotano). Stuart Mill applicò questa distinzione alla sua particolare logica, pensata come vero e proprio strumento di pensiero, produttore di idee.

Distingue ancora tra:

– proposizioni verbali caratterizzate dal fatto che il predicato esprime un concetto già contenuto nel soggetto (gli uomini sono razionali: la razionalità è tipica dell'essere umano e dunque lo denota e lo connota) dunque di fatto prive di informazioni;
– proposizioni reali, quando il predicato esprime un concetto non contenuto nel soggetto.

Questo gli permette di aggiungere alla logica, considerata come deduttiva (deduzione: inferenza che va dal generale al particolare), o induttiva (induzione: inferenza che va dal particolare al generale), un terzo aspetto che pone a fondamento degli altri, la realtà basata su fatti empirici. A suo avviso, nei sillogismi la premessa maggiore (tutti gli uomini sono mortali) non è altro che una espressione generale che rappresenta un insieme di osservazioni particolari (qualsiasi essere umano che noi evidenziamo, è mortale). A suo avviso la conoscenza è dunque un dato empirico e le generalizzazioni sono null'altro se non elenchi compressi di casi particolari. Anche la matematica rientrerebbe per Stuart Mill in questa accezione: si parte da oggetti empirici sui quali si fa astrazione relativamente a certe proprietà (Stuart Mill, 1843).

2.3. Denominazione

Si tratta dell'attribuzione che viene data a un nome che serve a identificare o specificare l'oggetto o la persona o l'ente in questione. Nell'analisi logica pro-

pedeutica al latino, si parlava di complemento di denominazione come di quello che introduce una informazione che specifica qualcosa di significativo relativamente al termine cui si riferisce. «La città di Bogotá»: «di Bogotá» è il complemento di denominazione (in realtà in latino non c'è bisogno di tale complemento).

2.4. Descrizione

L'etimologia di questo termine è semplice ma problematica: viene dal latino «de» che indica compimento di azione e «scribere», scrivere. Ma sta ad indicare una cosa complessa che è quella di fare sì che un emittente faccia riferimento a fatto, persona, luogo, … e ne tracci con verosimiglianza una riproduzione in un qualche sistema descrittivo (per esempio semiotico) teso a far sì che il ricevente se ne possa fare un'immagine, un'idea, … figurale, o schematica, o foto-grafica che sostituisca l'originale.

In matematica non s'usa descrivere una figura geometrica, per esempio, ma si sostituisce questa attività con un'immagine visuale diretta o con una definizione. Ancora meno si descrivono altri oggetti matematici ma non geometrici, come una relazione binaria, o una funzione, o un'operazione aritmetica.

Ma la descrizione è a volte necessaria perché mette in rilievo proprietà degli oggetti che non saranno tutti elencati nella laconicità della definizione; per esempio, in geometria elementare, ecco una descrizione del quadrato:

quadrato è un rombo che ha tutti gli angoli della stessa ampiezza, le diagonali della stessa lunghezza, altri due assi di simmetria oltre alle diagonali…

Tale descrizione è in un certo senso sovrabbondante; infatti si può dimostrare che se un rombo ha tutti gli angoli della stessa ampiezza allora ha anche le diagonali della stessa lunghezza o si può dimostrare che ha altri due assi di simmetria oltre alle diagonali; e viceversa.

La descrizione dunque non è la definizione; per definire un quadrato, basta una sola di queste proprietà, dato che da essa assunta come ipotesi si deducono come tesi le altre.

2.5. Definizione

Consideriamo come esempio le due seguenti definizioni:

– un numero naturale si dice primo quando ha esattamente due divisori;
– un quadrilatero si dice trapezio quando ha almeno una coppia di lati paralleli.

Una definizione serve a identificare, a circoscrivere, a indicare, a scegliere, a designare, a denominare, a denotare, perfino a connotare.

Per esempio, 8 è o no un numero primo? Andiamo a vedere quali divisori ha: 1, 2, 4, 8; ben quattro divisori, dunque non è primo. Viceversa, 5 ha come divisori solo 1 e 5, esattamente due, dunque 5 è primo.

Uno potrebbe dire: ma se invece di definire noi elencassimo? Certo, è una soluzione; allora i numeri primi sono quelli dell'elenco seguente: 2, 3, 5, 7, 11, 13,… Bene: e che cosa viene dopo la virgola? Per esempio: 17777890564734442109707 è o no nell'elenco? La difficoltà di dare una risposta a questa domanda mostra come la com-

pattezza della definizione fornisca uno strumento, laddove un elenco completo è o impossibile (come nel caso dei numeri primi che sono notoriamente infiniti) o troppo complesso quando l'elenco sarebbe improponibile (Carlo Eduardo Vasco Uribe è maggiorenne? Rientra nell'elenco completo mondiale di tutti i maggiorenni? Chi potrebbe mai stilare un simile elenco? Molto meglio chiedergli direttamente se ha già compiuto 18 anni, sfruttando la definizione).

L'uso di definizioni, come abbiamo appena visto, non è peculiare della matematica; rivediamo un esempio tratto dalla vita di tutti i giorni cui abbiamo fatto cenno poche righe fa: Maggiorenne è ogni essere umano che ha già compiuto 18 anni.

Lo stesso discorso fatto per l'elenco dei maggiorenni vale per l'esempio dei trapezi; se uno dovesse disegnare tutti i quadrilateri e poi designare, la faccenda sarebbe impossibile: Ecco, questi e questi sono i trapezi. Invece, con una definizione, si raccoglie tutto in poche parole.

Vediamo bene com'è fatta una definizione.

Maggiorenne è ogni essere umano che ha già compiuto 18 anni.

Si divide in due parti:

– «maggiorenne» è il termine che si deve definire, che potrebbe essere per ora ignoto: si chiama definiendum;
– «ogni essere umano che ha già compiuto 18 anni» è il predicato, tanto designazione quando denominazione, un insieme di parole retto dalla copula «è», che serve a definire, cioè il definiens.

Ora, se nel definiens ci sono parole sconosciute, la definizione serve a poco.

Torniamo ai due esempi matematici:

– Un numero primo è un numero naturale che ha esattamente due divisori; un trapezio è un quadrilatero che ha almeno una coppia di lati paralleli.
– Primo definiendum: numero primo; primo definiens: numero naturale che ha esattamente due divisori; se chi legge non sa che cosa è un numero naturale, che cosa vuol dire divisore, allora non può capire la definizione. Cioè: se la designazione non designa, è inutile.
– Secondo definiendum: trapezio; secondo definiens: quadrilatero che ha almeno una coppia di lati paralleli; se chi legge non sa che cosa è un quadrilatero, che cosa vuol dire lati, oppure paralleli, allora non può capire la definizione.

Dunque? Dunque ci devono essere delle definizioni precedenti che definiscono i singoli termini di cui si fa uso nel definiens: nel primo caso, definizione di numero naturale, definizione di divisore; nel secondo caso, definizione di quadrilatero, definizione di lato, definizione di paralleli.

Limitiamoci al solo secondo caso, perché nel primo ci troveremmo subito nei guai con la definizione di numero naturale che ha una storia lunga e controversa nel panorama della storia della matematica.

Allora, quadrilatero, che faceva parte del definiens, ora deve diventare definiendum; ecco fatto:

Quadrilatero è un poligono che ha 4 lati.

Siamo daccapo: chi legge deve sapere che cosa significano le parole che appaiono nel definiens: poligono, 4, lati.

Bene, provvediamo subito:

Poligono è una figura piana che ha come contorno una linea spezzata chiusa semplice.

Questo processo non può andare avanti all'infinito, come potrebbe apparire a prima vista; semplicemente perché il numero di parole del vocabolario a disposizione, cioè il numero di designazioni possibili, per quanto ampio, è finito; dunque, a un certo punto, il processo si deve fermare e l'autore, il creatore di teorie, il matematico deve decidere da quali partire, assumendole, accettandole senza definizione.

Queste parole si chiamano «termini primitivi».

Sono designazioni pure, legate all'esperienza concreta, come asserisce Stuart Mill.

Ora ci sono varie questioni legate a questo fatto, a queste scelte, ai termini primitivi, posizioni epistemologiche diverse:

queste parole si assumono come termini primitivi perché sono talmente semplici e «intuitive» che non vale la pena definirle; sono designazioni spontanee, basate su cultura precedente;

– si accettano senza definizione, perché è la loro presenza nelle circostanze descritte dagli assiomi che ne determina il significato; si introducono come puri termini e poi la teoria che man mano si sviluppa ne dà accezioni d'uso e/o definizioni implicite.

Le soluzioni filosofiche a questo proposito sono tante, e anche la scelta dei termini primitivi è molto variabile; per esempio, la parola «punto» pare sia stata scelta da Euclide come il termine primitivo per eccellenza (ma ci sarebbe tanto da dire: σημειο era davvero «punto» o era «segno»?).

Poiché molti credono, in maniera ingenua, che in matematica tutto si definisce [e, ancor più ingenuo: e tutto si dimostra, ma lo vedremo poi], quanto detto finora a proposito delle definizioni potrebbe essere un fiero colpo alle credulità popolari.

Avvisiamo che ci limitiamo qui alla definizione in puro senso aristotelico (per genere prossimo e differenza specifica), caratteristica della cosiddetta «matematica elementare»; e nemmeno prendiamo in esame le definizioni per astrazione che pure fanno parte ampiamente del vasto patrimonio della matematica.

La definizione ha una lunga storia all'interno dell'epistemologia matematica; ma anche le stesse singole definizioni si evolvono, come per esempio quella di angolo (D'Amore, 1985) e quella di insieme infinito (Arrigo, D'Amore, Sbaragli, 2010). Nell'apprendimento, la sofisticata idea di definizione ha lunghi tempi di maturazione; la nostra esperienza di ricerca mostra come spesso neppure studenti evoluti sappiano distinguere tra denominazione, descrizione e definizione. E molti insegnanti non fanno proprio il senso di quel «genere prossimo» nella definizione in senso aristotelico; ci viene proposto: Quadrato è una figura che… , al posto di: Quadrato è un rombo che…

2.6. Nota

Designazione, denotazione, denominazione, descrizione ruotano attorno al complesso e controverso mondo delle definizioni, connotandolo in forma assai problematica. Questo ci ha permesso di mostrare una visione non realista, ma pragmatista, della definizione in matematica che trae spunto da una posizione filosofica opportuna.

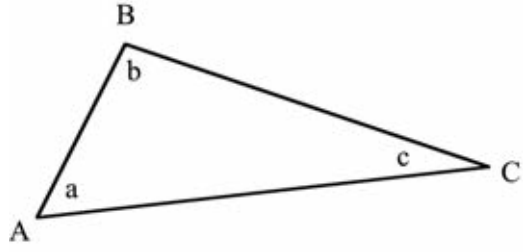
3. Dimostrazione

Per molte persone, la matematica è una disciplina di certezze, mentre la filosofia è disciplina di possibilità; per cui, la matematica si occupa del vero, la filosofia delle possibili verità. La domanda banale che ne deriva è: che cosa è questo «vero»?

Ciò che assicura le verità delle asserzioni della matematica si chiama «dimostrazione».

Vediamo un esempio che discuteremo; non è tanto l'esempio in sé che si deve ora esaminare, ma quel che ne diremo poi.

Consideriamo un triangolo ABC ed i suoi angoli interni a, b e c.



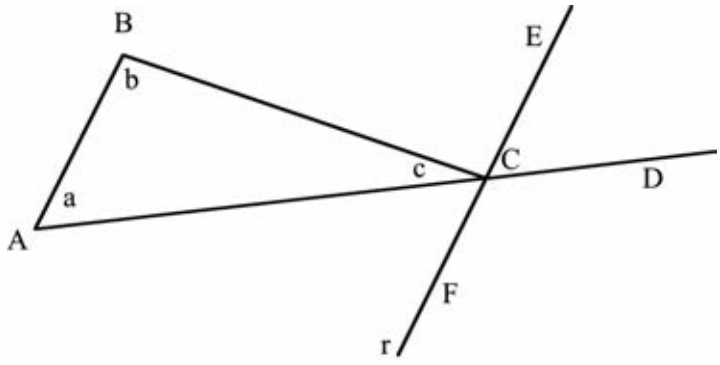
Per un qualche scopo, o anche solo per curiosità, ci si chiede: quanto misura la somma delle ampiezze dei tre angoli interni di ABC? In maniera impropria ma diffusa, indicheremo tale somma di ampiezze con: $a+b+c$.

Si possono misurare le tre ampiezze con un goniometro e poi addizionarle, come farebbe ingenuamente un bambino piccolo; ma noi sappiamo che nell'azione stessa del misurare è contenuto un errore intrinseco che invalida, dal punto di vista matematico, il risultato: farlo, sarebbe confondere l'ingegneria con la matematica, la verità sensibile (dóxa) con la verità di ragione (alétheia), il concreto con il concetto, l'empirico con l'astratto.

Dunque? Dunque dobbiamo «dimostrare» e non misurare, cioè fare un ragionamento convincente che non dipenda dal particolare triangolo, dalla particolare situazione, dalle misure, ma che sia generale.

Un esempio di dimostrazione è il seguente.

Riprendiamo il disegno di prima; esso non è il triangolo, è solo una rappresentazione semiotica che ci aiuta nel seguire il ragionamento. Denotiamo il triangolo astratto con le tre lettere ABC, lo rappresentiamo semioticamente nel registro figurale, lavoriamo sulla rappresentazione, ma sempre facendo mentalmente riferimento all'oggetto triangolo della geometria, astratto, quello denotato dalle tre lettere.



Prolunghiamo il lato AC oltre C, fino ad un punto D scelto a piacere; consideriamo la retta r passante per C parallela ad AB. Su di essa prendiamo due punti E ed F, in semirette opposte rispetto a C, che ci permetteranno di designare degli angoli in modo opportuno.

Ebbene: l'angolo BCE è uguale (sovrapponibile, congruente, ha la stessa misura… si può dire in tanti modi) all'angolo b per un teorema già dimostrato in precedenza, in quanto si tratta di angoli alterni interni, cioè formati da due parallele (AB ed r) tagliate da una trasversale BC.

L'angolo DCE è uguale all'angolo a perché sono angoli corrispondenti in una situazione analoga.

Ma la somma di c, più BCE, più DCE forma l'angolo ACD che è piatto; dunque la somma degli angoli interni del triangolo ABC è un angolo piatto (c'è chi dice metà di un giro, c'è chi dice 180°, c'è chi dice due retti).

E la dimostrazione è finita.

Ma…

Ma ci sono varie questioni sottili di carattere filosofico, semiotico e linguistico nascoste in questo ragionamento.

La prima.

Abbiamo fatto riferimento a «teoremi precedenti», i quali faranno a loro volta riferimento a teoremi precedenti, e così via. Ma questo andare a ritroso non può essere infinito, è ovvio. Prima o poi, per poter partire, si avranno affermazioni che vanno prese per vere, senza dimostrazione, come base di tutto. Di ciò si accorsero i grandi matematici dell'antica Ellade, è troppo ovvio. Cosicché si decise di partire da alcune affermazioni che vengono prese per vere senza dimostrazione. Per esempio, a un certo punto abbiamo prolungato il segmento AC fino a un punto D; dovremmo allora dare una dimostrazione precedente del tipo:

Dato un segmento, è sempre possibile prolungarlo da una delle due parti.

Ma, appunto, questo è un esempio di affermazione che viene presa per vera, senza una precedente dimostrazione. Si chiama assioma. (In verità, i matematici greci distinguevano due categorie di affermazioni vere senza dimostrazione, i postulati e gli assiomi, ma su questo ci sia permesso di sorvolare).

Dunque, contrariamente a quel che la gente crede, in matematica non si dimostra tutto, ma si accettano come vere alcune affermazioni senza dimostrarle.

Il che è filosoficamente rilevante: che cosa le rende vere? Perché proprio quelle? L'evidenza? L'aderenza alla realtà? Ma come … Abbiamo tanto insistito sulla differenza tra dóxa e alétheia …

La seconda.

Abbiamo appena dimostrato che un certo triangolo ABC, del quale abbiamo dato una bella figura poco sopra, ha la somma degli angoli interni che misura 180°. Bene. Ora prendiamo un altro triangolo, e facciamo la stessa dimostrazione per vedere quanto misura la sua somma degli angoli interni. E poi ne prenderemo un altro e poi un altro ancora e così via. Quando avremo esaurito *tutti* i triangoli a disposizione, allora… Si vede bene l'assurdità di questa situazione: fare prove su tutti i triangoli è impossibile.

Ma se uno riflette bene, si accorge che nella precedente dimostrazione mai e poi mai abbiamo preso in esame le proprietà di *quel* triangolo ABC che abbiamo disegnato e designato, bensì: abbiamo fatto il ragionamento in generale, sul triangolo qualsiasi, non su un triangolo ma sull'idea stessa di triangolo, sull'oggetto matematico triangolo.

È questo che rende interessante e rilevante e definitiva la dimostrazione.

Noi ora, dopo questa dimostrazione, sappiamo che tutti i triangoli del mondo (nella geometria euclidea, come vedremo) hanno la somma degli angoli interni che misura 180°, non importa la forma, non importa la dimensione.

Una piccola curiosità didattica: i bambini di scuola primaria talvolta credono che più i lati del triangolo sono grandi, maggiore è la somma degli angoli interni. Per convincere i bambini piccoli, la dimostrazione precedente è sproporzionata, neppure potrebbero capire il senso della nostra proposta, per cui si ricorre a procedimenti empirici; si disegna un triangolo su un cartoncino, si tagliano le «punte» del triangolo disegnato concreto, e le si riaccosta in modo opportuno per mostrare che i lati estremi stanno sulla stessa retta, cioè che i tre angoli formano un angolo piatto. Per un bambino di scuola primaria l'esperimento concreto è assai convincente. Ma, evidentemente, è un processo empirico, non è una dimostrazione. Cioè: matematicamente è irrilevante. Ma la sua dose di convincimento basta e avanza a quel livello scolare.

Torniamo dunque daccapo.

Se in matematica un'affermazione è dimostrata, è assurdo, inutile, è una perdita di tempo, tentare di dimostrare il contrario. Per esempio: non esistono equazioni algebriche che hanno π come radice. La cosa è stata *dimostrata*. Eppure esistono persone che cercano ancora una equazione di questo tipo. Tempo perso. Altro esempio: il cerchio non si può quadrare con riga e compasso. La cosa è stata *dimostrata*. Eppure c'è gente che cerca ancora questa costruzione. Inutile fare commenti.

La terza.

Come abbiamo visto in questa stessa dimostrazione, abbiamo nominato, poi designato, poi rappresentato semioticamente, poi abbiamo fatto azioni (disegni) sull'immagine, concreta; queste ci hanno permesso di descrivere; queste descrizioni ci hanno permesso di denotare, giungendo ad affermazioni che non erano più fatte sulle rappresentazioni semiotiche ma sull'oggetto matematico in sé. Questo gioco di rinvii semiotici, linguistici, filosofici che diamo per scontati in un realismo ingenuo, sono

pragmaticamente assai complessi. Fino a che punto ci serviamo dell'esperienza concreta nel realizzarli?

C'è un'interessante differenza tra il matematico e il matematico dilettante; un matematico non perderebbe certo tempo in ricerche su questioni già dimostrate, perché sa bene che cosa vuol dire «vero» in matematica.

Già, «vero»; ma abbiamo detto che la verità si basa su assiomi; dunque, se cambiamo gli assiomi cambia tutto. Certo. Questa affermazione getta più d'uno nello sconforto, tranne i matematici professionisti. Cerchiamo dunque di capirla bene.

Faremo un esempio ma senza figure, per non confondere quanto tra poco asseriremo con l'immagine che si potrebbe produrre.

Consideriamo una retta r e un punto P fuori di essa. Tracciamo rette passanti per P parallele a r. Quante sono tali parallele?

Una, nessuna, due, mille, infinite?

La geometria degli *Elementi* di Euclide, la più classica delle classiche, quella che chiunque ha studiato a scuola, si basa tutta sulla prima risposta: è unica la retta che passa per P, parallela a r.

(Anche se, in realtà, la storia sarebbe un po' più complicata da raccontare, dato che fin dai tempi di Euclide e anche prima era in corso un dibattito su questa questione).

L'unicità della parallela caratterizza la geometria di Euclide; ma non è una *verità dimostrata*, si tratta di un assioma. Se fosse dimostrata, non ci sarebbe più nulla da dire, la parallela è una e basta; ma se è un assioma, chiunque di noi lo può cambiare come crede e, appunto, sostituirlo con altri assiomi.

Esiste, ed è lecita, la geometria che accetta come assioma quello che afferma che le parallele sono zero; per cui l'affermazione, cioè il nuovo assioma, diventa: data una retta r e un punto esterno P, non ci sono affatto rette per P parallele a r. Ne nasce una geometria molto interessante, molto comoda per certe applicazioni: spesso la si chiama «geometria di Riemann» dal nome del matematico tedesco Bernhard Riemann, o geometria ellittica, ma non staremo certo qui a tentare di spiegare il perché.

Esiste ed è lecita la geometra in cui le parallele per P a una retta r sono più di una, cioè 2 [o infinite]; ne nasce una bella geometria molto importante, già usata per applicazioni concrete; spesso la si chiama geometria di Lobačevskij dal nome del matematico russo Nikolaj Ivanovich Lobačevskij o geometria iperbolica.

Che cosa vuol dire, dunque, «vero» in matematica?

Ricordiamo la famosa «definizione» di Bertrand Russell: «La matematica è quella disciplina in cui non si sa di che cosa si parla né si sa se quel che si dice è vero o falso».

Nella prima parte, si afferma che, in un realismo ingenuo, gli oggetti della matematica non esistono; dunque, ogni loro denotazione è a vuoto. Ma veniamo alla seconda parte. Per molte persone vero e falso sono aggettivi aventi a che fare con la realtà empirica, concreta; vero è ciò che trova riscontro nel reale (se butto un uovo dal balcone del quarto piano, arrivando a terra si sfracellerà), falso è ciò che non trova riscontro nel reale (lo stesso uovo che, nelle stesse condizioni, si invola accelerando verso l'alto).

Per la matematica, questi parametri non esistono, perché nulla di essa potremo verificare nel reale concreto.

Abbiamo un tavolo da cucina; prendiamo un suo bordo e lo consideriamo come se fosse una retta, poi prendiamo un punto sul bordo opposto. Quanti lati paralleli possiamo tracciare da quel punto al primo bordo del tavolo? La realtà empirica ci dice: uno; ma ora sappiamo che in matematica la risposta può essere, è, assai diversa. La risposta è: dipende dalla geometria in cui ci si pone; e poi, le cose concrete ben poco servono a dar ragione delle verità della matematica.

Allora? Allora in matematica «vero» non significa quel che significa nella realtà empirica; «vero» significa: dimostrato a partire da assiomi scelti, dunque all'interno di una certa teoria, e se cambiamo gli assiomi, cambia tutto.

«Vero», «falso», pur essendo termini che si usano in matematica per comodità, sono, di fatto, relativi. Invece di dire che la tale affermazione è vera, si dovrebbe dire che è coerente rispetto agli assiomi scelti; la mira del matematico non è la verità, come ingenuamente si potrebbe credere, ma la coerenza di quel che dimostra nella teoria in cui si è posto.

La somma degli angoli interni di un triangolo misura 180°, lo abbiamo dimostrato; sì, ma lo abbiamo dimostrato in una geometria di Euclide, tanto è vero che, a un certo momento, abbiamo condotto *la* retta passante per un punto parallela a una retta data; quel *la* è fortemente condizionante. Se si cambiano gli assiomi, cambia tutto; tanto è vero che si può [facilmente] dimostrare che nella geometria di Riemann la somma degli angoli interni di un triangolo è superiore a 180°, mentre in quella di Lobačevskij è minore. I risultati sembrano tra loro contraddittori e dunque, ingenuamente, vien da pensare che uno solo di essi possa essere vero. Ma non è così; i risultati delle dimostrazioni, che qui evitiamo, sono coerenti rispetto alla teoria, rispetto agli assiomi scelti.

Non sarebbe finita qui, perché nulla abbiamo detto della «logica» che si usa nelle dimostrazioni; abbiamo dato per scontato che la logica, almeno quella, sia unica e da tutti riconosciuta e accettata; *ma non è così*.

Abbiamo ampiamente visto come, nel corso di una dimostrazione, entrano in gioco in maniera assai pesante fatti aventi a che fare con designazione, denotazione, denominazione, descrizione, definizione, semiotica, linguistica e filosofia.

Tanto è vero che in culture diverse, sono messi in campo altri modi dimostrativi, a volte anche assi diversi tra loro (D'Amore, 2005); eppure, la nostra esperienza di ricerca mostra che per molti insegnanti *LA* modalità dimostrativa sia unica ed è quella aristotelica-euclidea. Tanto è vero che spesso vengono messi in campo lunghi ed inutili tentativi di trattare la logica simbolica elementare del primo ordine con studenti non ancora cognitivamente in grado di farne uso.

4. La riflessione didattica e gli strumenti analitici

Il dibattito filosofico su definizione e dimostrazione è sempre stato vivissimo e non staremo qui a ricordare i contributi degli antichi e dei moderni; tra questi ultimi citiamo solo Giuseppe Peano (1858-1932), David Hilbert (1862-1943) e Federigo Enriques (1871-1946).

Che la definizione sia in fondo una frase e che la dimostrazione sia un discorso, è stato tema di analisi da parte di linguisti non matematici; anche se essi non sem-

pre colgono la finezza che nascondono entrambe queste pratiche così come sono condivise nelle nostre comunità di matematici.

Sì è chiaramente visto, però, negli anni, nei decenni, come la riflessione sugli strumenti, dei quali noi «esperti» ci serviamo mentre i «novizi» fanno pratica e apprendono, sia importante per la gestione stessa dei saperi, nelle due direzioni: cautela nell'uso e correttezza nell'insegnamento, strumento per l'analisi di eventuali fallimenti.

Ora, ben diverso è designare rispetto al descrivere o al definire; altra cosa è denotare e tutt'altra definire; abbiamo visto come tutto ciò si mescola a vari livelli nell'azione concreta del dimostrare, quando ciò diventa oggetto di comunicazione, per esempio nell'aula scolastica.

Noi crediamo fermamente che la riflessione sempre più analitica delle componenti che entrano in gioco nella prassi didattica ci aiuti a capire il fenomeno dell'insegnamento-apprendimento, con le sue sottili e spesso nascoste complicazioni.

Indicare, come dice la parola stessa, può esser fatto con il dito indice; si osserva una figura, la si «indica» e si dice: Quella figura. Qualsiasi studente è portato a farlo in modo spontaneo; molti insegnanti non sono disposti ad ammettere quella indicazione, in cambio di un'altra o in cambio di altre, che si chiamano denominazione e designazione. Ma la base linguistico-comunicativa- filosofica è la stessa. Ed *è una base empirica*, come abbiamo visto; ci si riferisce all'oggetto concreto, il quale evoca un oggetto mentale, con un'azione concreta. Ma se lo facciamo, davvero, si rischia che qualcuno interpreti tutto ciò con parametri rigidi e decida che non possono essere accettati.

Assomiglia molto al tentativo tutto astratto di usare nella pratica matematica d'aula solo connettivi logici, mentre il novizio, in modo del tutto analogo a quel che accade nella pratica matematica tra esperti, tenderebbe ad usare anche connettivi epistemici.

Una saggia attività che riteniamo utile nella formazione iniziale degli insegnanti di matematica è quella di riflessione attorno a tutti i termini qui introdotti.

Bibliografia

Arrigo G., D'Amore B., Sbaragli S, (2010). *Infiniti infiniti. Aspetti concettuali e didattici concernenti l'infinito matematico*. Trento: Erickson.
Bagni G. T. (2006). *Linguaggio, storia e didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.
Bottazzini U., Freguglia P., Toti Rigatelli L. (1992). *Fonti per la storia della matematica*. Firenze: Sansoni.
Boyer C.B. (1968). *A History of Mathematics*. New York: John Wiley and Sons.
Carruccio E. (1971a). *Mondi della logica*. Bologna: Zanichelli.
Carruccio E. (1971b). *Matematiche elementari da un punto di vista superiore*. Bologna: Pitagora.
Courant R., Robbins H. (1941). *What is Mathematics*. New York: Oxford Univ. Press.
D'Amore B. (1985). L'idea di 'angolo' nell'antichità e sua evoluzione. *La matematica, le scienze e il loro insegnamento*. 1, 6-18.
D'Amore B. (2005). La argumentación matemática de jóvenes alumnos y la lógica hindú (*nyaya*). *Uno*. [Barcellona, Spagna]. 38, 83-99. D'Amore B. (2005). Secondary school students' mathematical argumentation and Indian logic (nyaya). *For the learning of mathematics*. 25, 2, 26-32. D'Amore B. (2005). L'argomentazione matematica di allievi di scuola secondaria e la logica indiana (nyaya). *La matematica e la sua didattica*. 4, 481-500.
D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.
D'Amore B. (2010). *Matematica, stupore e poesia*. Firenze: Giunti.
D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2009). La formazione degli insegnanti di matematica, problema pedagogico, didattico e culturale. *La matematica e la sua didattica*. 23, 3, 261-298.
D'Amore B., Matteuzzi M. (1975). *Dal numero alla struttura*. Bologna: Zanichelli.
D'Amore B., Matteuzzi M. (1976). *Gli interessi matematici*. Venezia: Marsilio.
Dummett A. A. E. (1975). ¿Qué es una teoría del significado? In: Valdés L. M. (ed.) (1991). *La búsqueda del significado*. Madrid: Tecnos.
Giusti E. (1999). *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*. Torino: Bollati Boringhieri.
Godino J., Batanero C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 14, 3, 325-355.
Kline M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York: Oxford University Press).
Kutschera F. von (1979). *Filosofia del lenguaje*. Madrid: Gredos.
Maier H. (1993). Problemi di lingua e di comunicazione durante le lezioni di matematica. *La matematica e la sua didattica*. 1, 69-80.
Radford L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of mathematics*. 17, 1, 26-33.
Speranza F. (1997). *Scritti di Epistemologia della Matematica*. Bologna: Pitagora.
Stuart Mill J. (1843). *A System of Logic*. London: J. W. Parker.

2. Il gioco della metà: una intera situazione

Esperienze ludiche concernenti rappresentazioni e operazioni di frazioni sulla retta numerica[1]

Stefan Meyer[2]

'Halfplay' is a game to build relations to rational numbers in a natural and human way. It is obvious that natural numbers take an important part in many games. Why *rational numbers (Q*) should not be integrated in games too? Skill, fortune, frankness, probability, ease, social relations and sometimes conflicts are characteristics of playing. 'Halfplay' creates experiences that offer fundaments and materials for effective processes of mathematisizing and realistic problem solving with rational numbers.

Che cos'è il gioco della metà

Il gioco della metà è un gioco di società col quale gli allievi possono acquisire esperienze sulle frazioni e relative operazioni. Vi si trovano insieme piacere di giocare, elaborazione, esercitazione e stimolo alla matematizzazione.

È pensato per 2-4 giocatori. Il materiale necessario è il seguente:

– il campo da gioco (vedere alcuni esempi nelle figure 1, 2 e 3)
– 30 carte della casualità (vedere Figura 4)
– un dado
– una pedina per ogni giocatore.

Scopo e regole del gioco

Nel gioco della metà si tratta di compiere più rapidamente possibile un percorso di caselle successive. A turno i giocatori lanciano il dado e muovono la propria pedina di tante caselle quanti sono i punti ottenuti. Ogni puntino del dado vale 1/2.

Il campo da gioco della Figura 2 comprende frazioni improprie e quello della Figura 3 è bidimensionale. È importante che gli allievi possano scegliere il campo da gioco preferito.

Per gli allievi la situazione del gioco è del tutto aperta: oltre alla libera scelta del piano da gioco, vi è anche la possibilità di variare a piacimento le carte della casualità. Queste potrebbero anche invitare ad eseguire saltelli o altri tipi di spostamento. Può succedere che gli allievi si mettano a decorare le carte della casualità, a suddividerle in categorie, a strutturare il loro insieme e a operare variazioni. Potrebbero anche giungere a scoprire il gioco del quarto o quello del decimo.

1. Nostra traduzione dal tedesco dell'originale apparso sulla rivista *Praxis der Mathematik*, Aulis Verlag Deubner & Co KG, Köln.
2. Docente della *Interkantonale Hochschule für Heilpädagogik* di Zurigo.

Il gioco della metà è simile al gioco delle scale (Glonnegger, 1999). Nel gioco delle scale determinate caselle fanno scendere o salire le scale oppure mettono in relazione con altre figure che fanno procedere o indietreggiare. Nel gioco della metà la relazione fra caselle viene stabilita simbolicamente dalle cosiddette carte della casualità. Queste pongono ai giocatori diversi quesiti aritmetici.

45	45 1/2	**46**	46 1/2	**47**	ARRIVO				
40	40 1/2	**41**	41 1/2	**42**	42 1/2	**43**	43 1/2	**44**	44 1/2
35	35 1/2	**36**	36 1/2	**37**	37 1/2	**38**	38 1/2	**39**	39 1/2
30	30 1/2	**31**	31 1/2	**32**	32 1/2	**33**	33 1/2	**34**	34 1/2
25	25 1/2	**26**	26 1/2	**27**	27 1/2	**28**	28 1/2	**29**	29 1/2
20	20 1/2	**21**	21 1/2	**22**	22 1/2	**23**	23 1/2	**24**	24 1/2
15	15 1/2	**16**	16 1/2	**17**	17 1/2	**18**	18 1/2	**19**	19 1/2
10	10 1/2	**11**	11 1/2	**12**	12 1/2	**13**	13 1/2	**14**	14 1/2
5	5 1/2	**6**	6 1/2	**7**	7 1/2	**8**	8 1/2	**9**	9 1/2
START	1/2	**1**	1 1/2	**2**	2 1/2	**3**	3 1/2	**4**	4 1/2

Figura 1. Campo da gioco lineare con frazioni e numeri misti: occorre ritagliare le strisce orizzontali e incollarle di seguito usando le linguette.

$\frac{90}{2}$	$\frac{91}{2}$	$\frac{92}{2}$	$\frac{93}{2}$	ARRIVO					
$\frac{80}{2}$	$\frac{81}{2}$	$\frac{82}{2}$	$\frac{83}{2}$	$\frac{84}{2}$	$\frac{85}{2}$	$\frac{86}{2}$	$\frac{87}{2}$	$\frac{88}{2}$	$\frac{89}{2}$
$\frac{70}{2}$	$\frac{71}{2}$	$\frac{72}{2}$	$\frac{73}{2}$	$\frac{74}{2}$	$\frac{75}{2}$	$\frac{76}{2}$	$\frac{77}{2}$	$\frac{78}{2}$	$\frac{79}{2}$
$\frac{60}{2}$	$\frac{61}{2}$	$\frac{62}{2}$	$\frac{63}{2}$	$\frac{64}{2}$	$\frac{65}{2}$	$\frac{66}{2}$	$\frac{67}{2}$	$\frac{68}{2}$	$\frac{69}{2}$
$\frac{50}{2}$	$\frac{51}{2}$	$\frac{52}{2}$	$\frac{53}{2}$	$\frac{54}{2}$	$\frac{55}{2}$	$\frac{56}{2}$	$\frac{57}{2}$	$\frac{58}{2}$	$\frac{59}{2}$
$\frac{40}{2}$	$\frac{41}{2}$	$\frac{42}{2}$	$\frac{43}{2}$	$\frac{44}{2}$	$\frac{45}{2}$	$\frac{46}{2}$	$\frac{47}{2}$	$\frac{48}{2}$	$\frac{49}{2}$
$\frac{30}{2}$	$\frac{31}{2}$	$\frac{32}{2}$	$\frac{33}{2}$	$\frac{34}{2}$	$\frac{35}{2}$	$\frac{36}{2}$	$\frac{37}{2}$	$\frac{38}{2}$	$\frac{39}{2}$
$\frac{20}{2}$	$\frac{21}{2}$	$\frac{22}{2}$	$\frac{23}{2}$	$\frac{24}{2}$	$\frac{25}{2}$	$\frac{26}{2}$	$\frac{27}{2}$	$\frac{28}{2}$	$\frac{29}{2}$
$\frac{10}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{12}{2}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{14}{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{16}{2}$	$\frac{17}{2}$	$\frac{18}{2}$	$\frac{19}{2}$
START	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{9}{2}$

Figura 2. Campo da gioco lineare con frazioni improprie: occorre ritagliare le strisce orizzontali e incollarle di seguito usando le linguette.

ARRIVO	47	46 1/2	46	45 1/2	45	44 1/2	44	43 1/2	43	42 1/2	42
36	36 1/2	37	37 1/2	38	38 1/2	39	39 1/2	40	40 1/2	41	41 1/2
35 1/2	35	34 1/2	34	33 1/2	33	32 1/2	32	31 1/2	31	30 1/2	30
24	24 1/2	25	25 1/2	26	26 1/2	27	27 1/2	28	28 1/2	29	29 1/2
23 1/2	23	22 1/2	22	21 1/2	21	20 1/2	20	19 1/2	19	18 1/2	18
12	12 1/2	13	13 1/2	14	14 1/2	15	15 1/2	16	16 1/2	17	17 1/2
11 1/2	11	10 1/2	10	9 1/2	9	8 1/2	8	7 1/2	7	6 1/2	6
START	1/2	1	1 1/2	2	2 1/2	3	3 1/2	4	4 1/2	5	5 1/2

Figura 3. Campo da gioco bidimensionale con frazioni e numeri misti.

avanza di un mezzo	retrocedi di un mezzo	avanza di tre interi	retrocedi di tre interi	lancia il dado ancora una volta	vai a 5 1/2
avanza di due mezzi	retrocedi di due mezzi	avanza di sei interi	retrocedi di sei interi	lancia il dado ancora due volte	vai a 10 1/2
avanza di cinque mezzi	retrocedi di cinque mezzi	avanza di nove interi	retrocedi di nove interi	vai a 23 1/2	vai a 19 1/2
avanza di dieci mezzi	retrocedi di dieci mezzi	avanza di dodici interi	retrocedi di dodici interi	vai a 33 1/2	perdi tutto
avanza di venti mezzi	retrocedi di venti mezzi	raddoppia e procedi	dimezza e procedi	vai a 3 1/2	Hai vinto! Smetti o giochi ancora?

Figura 4. Le carte della casualità.

Comportamento dell'insegnante nel gioco

I momenti di gioco si collocano all'interno delle ore di lezione di matematica. Così si evitano confusioni fra il vissuto del gioco e l'apprendimento della matematica. Questa distinzione dovrebbe essere spiegata agli allievi. L'insegnante deve chiarire il suo ruolo di accompagnatore e di libero osservatore a disposizione di ciascuno. A prima vista sembrerebbe che i momenti dedicati al gioco siano una perdita di tempo. In realtà essi permettono di raggiungere importanti obiettivi di socializzazione, emotivi, motivazionali, ontogenetici e cognitivi. (Leuders, 2009)

Il gioco della metà si svolge in un'ora-lezione. L'insegnante fa in modo che il gioco risulti significativo. Per questo deve valutare il grado di interesse suscitato negli allievi e tenerne debitamente conto. Gli allievi devono poter scegliere autonomamente le forme di rappresentazione. Ciò permette di ottenere una differenziazione na-

turale e sociale fra i vari gruppi di allievi. A qualche allievo che esprimesse un'avversione verso questi numeri «strani», si potrebbe proporre di giocare «in N», gioco simile a questo, ma interamente basato sui numeri naturali (Meyer, 2006).

Gli interventi dell'insegnante devono concernere esclusivamente la qualità dell'ora di gioco, il corretto svolgimento del gioco, la consapevolezza e il rispetto delle regole. Nella fase iniziale del gioco l'insegnante favorisce la costruzione dei nuovi numeri. Aiuta gli allievi a capire il testo delle carte della casualità che non dovesse apparire chiaramente. Motiva gli allievi che non trovassero di loro gradimento il campo da gioco scelto o che preferissero carte della casualità più semplici e meno esigenti. Basandosi sull'esperienza di gioco, gli allievi potrebbero creare nuovi campi da gioco o nuove regole, come per esempio porre un puntino del dado uguale a 1? oppure a 2?. L'insegnante annota osservazioni e fatti relativi allo svolgimento del gioco, domande ricorrenti ed eventuali conflitti. Questa documentazione costituisce un materiale grezzo per il seguito delle lezioni di matematica.

Il comportamento dell'insegnante riguardo all'integrazione del gioco nell'insegnamento della matematica

L'insegnante potrebbe spiegare e assicurare che si sta facendo una ricerca nell'ambito di un progetto sulle esperienze e gli interrogativi concernenti i momenti di gioco all'interno delle lezioni di matematica (Frey, 1998). Ogni quindici giorni dovrebbe essere svolta una lezione sulla ma tematizzazione di esperienze di gioco. I dettagli metodologici di tale lezione dovrebbero essere stabiliti dall'insegnante insieme con la classe. L'obiettivo del progetto delle ore di matematica è il seguente:

> *Gli allievi devono ricercare e matematizzare esperienze di gioco, che li portino a capire le proprietà di semplici frazioni e delle operazioni con frazioni semplici.*

Se gli allievi dispongono di una conferenza di classe o di un progetto di gruppo mirato e ben fondato, potrebbero rispondere insieme agli interrogativi concernenti il gioco della metà e la sua matematizzazione. In questa ora di matematica si potrebbe lavorare, a seconda degli interrogativi considerati o dei problemi affrontati, con i metodi dell'apprendimento attivo euristico (Wittmann, 2002) o con la metodologia del *problem-based Learnings* (Weber, 2004).

Se per esempio un giocatore raggiunge la casella 17½ e pesca la carta della casualità con la consegna «fai la metà e procedi di conseguenza», gli potrebbe essere utile un righello graduato (vedere Figura 5).

Gli allievi potrebbero anche decidere di approssimare all'unità determinate frazioni n/2 per eccesso o per difetto. Le relazioni tra i numeri del righello graduato sono un importante oggetto didattico. La costruzione della corrispondenza tra la successione dei numeri n/2 e quella dei numeri n/4 può aiutare a risolvere il problema. Si potrebbe anche invitare gli allievi a inserire le loro congetture e le loro scoperte in un nuovo campo da gioco o su una linea dei numeri.

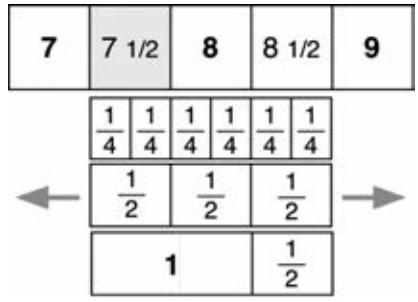


Figura 5. Righello graduato come mezzo ausiliario.

Le operazioni aritmetiche nel gioco della metà

L'esame delle carte della casualità e delle relative operazioni nel campo numerico costituisce il cuore del gioco. Il dado e le carte della casualità costituiscono i generatori di numeri aleatori. L'aspetto del calcolo insito nelle carte della casualità gioca un ruolo portante, ma non dominante nella significatività del gioco. Ciò appare concretamente nei colloqui, per esempio: «è un imbroglio – non ci credo – mostrami come veramente hai fatto a calcolare o a contare». Le situazioni precarie, così come quelle chiarite, sono risorse per la conseguente matematizzazione.

Le carte della casualità obbligano i giocatori ad eseguire operazioni. Le più semplici concernono l'orientamento nel campo da gioco o sulla linea dei numeri. Gli operatori «avanti» e «indietro» sono propedeutici all'addizione e alla sottrazione. I giocatori possono contare in blocco oppure per passi successivi in un insieme strutturato. Per contare le metà è sufficiente considerare la corrispondenza biunivoca con i puntini del dado: ci si sposta di tante caselle quante ne indicano le carte della casualità. Gli spostamenti avanti e indietro nella successione dei numeri interi portano alla conoscenza che due metà fanno un intero. Si concepiscono successioni di metà – 1, 2, 5, 10, 20 metà – corrispondenti a spostamenti in avanti o indietro, così come con gli interi si opera con le successioni 3, 6, 12. Il raddoppiare e il dimezzare possono indurre processi moltiplicativi.

Le carte della casualità «perdi tutto» e «vinci» non sono molto apprezzati dagli allievi. Ciò può essere interpretato nel senso che gli allievi si definiscono incarichi propri.

Il gioco della metà completa il percorso di apprendimento delle frazioni. La sua pratica favorisce il successo nell'apprendimento dell'aritmetica. Kamii (2004) stabilì, in base a un'esperienza pluriennale nelle prime quattro classi della scuola elementare, che gli allievi possono rinforzare l'apprendimento di molti concetti aritmetici proprio attraverso la pratica di giochi di società. Ramani & Siegler (2008) poterono dimostrare che gli allievi, grazie alla situazione formativa del gioco delle scale, hanno potuto costruire una migliore comprensione intuitiva dei numeri, delle grandezze e della successione dei numeri così come una maggiore abilità nel contare e nell'identificare i numeri.

Matematizzare una situazione di gioco

Al tavolo da gioco nasce una discussione fra gli allievi. Bruno sostiene che Hans bara: «Invece di avanzare di una casella per ogni puntino del dado, come prescrivono le regole del gioco, Hans avanza il doppio». Hans è offeso. Si attiene alla consegna della carta della casualità che gli comanda di avanzare di tre interi. L'insegnante segue la discussione e promette che la questione sarà studiata durante la lezione di matematica. Loda Bruno che conosce bene le regole. Riconosce ad Hans di aver letto bene la carta della casualità. Poi invita tutti i giocatori a rileggere il testo della carta della casualità e a chiarirne insieme il significato. Durante l'ora speciale prevista dal progetto l'insegnante presenta alla classe i particolari del conflitto. Invita Bruno, Hans e il resto della classe a mettersi davanti a una copia del campo da gioco come nella situazione reale. Ciò significa anche disporre delle carte della casualità. La classe, suddivisa in gruppi, riceve il compito di *esaminare la situazione di gioco e valutare le affermazioni dei due allievi*. I gruppi dispongono di più copie del campo da gioco e devono poi preparare dei cartelloni per illustrare alla classe le loro argomentazioni. Le presentazioni e la relativa discussione moderata dall'insegnante porta a stabilire che nel gioco la regola «un puntino del dado = mezza casella» dev'essere combinata con la consegna della carta della casualità. Occorre tenere conto di entrambe. Hans non ha affatto barato. Partendo dal campo 1½ e procedendo di 3 interi doveva giungere alla casella 4½. Bruno osserva che con 3 metà doveva giungere alla casella 3. La sua rappresentazione simbolica sarebbe $1½+3\cdot½=3$. Questa è la verità secondo Bruno. La rappresentazione di Hans $1½+3\cdot1=4½$ determina la verità della situazione.

Passaggio alle frazioni

Nei tradizionali passaggi dall'intero alle frazioni si fa capo a oggetti statici e geometricamente complessi, che sono veri e propri ostacoli all'aritmetizzazione di situazioni aperte (Wittmann, 2006). Nell'introduzione delle frazioni si usano frequentemente rappresentazioni geometriche uni- e bidimensionali (segmenti, rettangoli, cerchi,…) e oggetti facilmente strutturabili (tavolette di cioccolata, contenitori di liquidi, geopiani,…). Questi vengono messi in relazione, mediante istruzioni precise, con proprietà e significato dei numeri razionali. È ciò che si definisce passaggio fenomenologico. Affermazioni come la seguente fanno parte di questo modo di agire:«È un cerchio suddiviso in quattro parti, il cerchio è l'intero, ogni settore è un quarto».

Nel contesto delle forme di rappresentazione il gioco della metà è fondamentalmente più dinamico, più relazionale e più «aritmetico». Il neo del passaggio fenomenologico consiste nel fatto che tra la comprensione del modello e quella dei numeri razionali vi è asimmetria. I modelli sono usati in diversi modi: modo proto quantitativo (cioè senza ricorrere a ragionamenti aritmetici), percettivo e in senso logico secondo il linguaggio comune (cioè descrittivo e non argomentativo). La metà del cerchio non è vista come $(\pi\ r^2)/2$, ma secondo la percezione o il ricordo del taglio di torte o pizze. Questo modo di fare può ostacolare l'apprendimento di una corretta terminologia. Con la logica del gioco della metà si giunge a conclusione che non si può identificare l'idea comune del dimezzare una pizza con la comprensione del concetto aritme-

tico della suddivisione e della proporzionalità dei numeri razionali. Ciò succede anche con l'impiego del geopiano, sia che gli allievi lo vedano come un insieme di biscotti in una teglia da suddividere, sia che considerino la suddivisione in senso aritmetico e delle dimensioni geometriche.

Il gioco della metà compie un passo più avanti perché fa giocare e operare direttamente con le frazioni. Ciò porta a compiere riflessioni mirate e anche più astratte sui numeri razionali in senso lato. La scelta della metà si basa sulla considerazione che è un oggetto conosciuto nell'esperienza di vita degli allievi: «In generale 1/2 e quindi 'la metà' può essere vista come una delle prime frazioni che gli allievi riescono a padroneggiare e quindi come un buon punto d'inizio per lo svolgimento del calcolo con le frazioni.» (Rottmann, 2006)

Ugualmente si può dimostrare che i bambini capiscono e usano presto la scrittura frazionaria (Brizuela, 2006).

Il gioco della metà rende possibile una solida familiarizzazione con frazioni semplici. Le diverse situazioni di gioco vissute possono e devono essere trasportate sulla linea dei numeri. Questa, essendo una rappresentazione più astratta, potrà spingere a effettuare confronti e dimostrazioni. Le carte della casualità fanno nascere a vari livelli concezioni relative agli aspetti moltiplicativi e cardinali delle frazioni. La divisione dei numeri interi e lo sguardo alla relazione tra la parte e l'intero (cardinalità) possono facilmente essere variate. Non rimangono affatto legate a un'unica frazione. Sono inserite in una riflessione continua sulle frazioni in un campo da gioco e nelle sue forme di rappresentazione più astratte. Questa è finalmente la funzione didattica e matematica del gioco della metà.

Bibliografia

Brizuela B. M. (2006). Young Children's Notations For Fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 62(3), 281-305.

Frey K. (1998). *Die Projektmethode*. (8. Auflage). Landsberg: Weinheim, Beltz.

Glonnegger E. (1999). *Das Spiele-Buch*. (2. Auflage). Uehlfeld: Drei Magier Verlag.

Kamii C. (2004). *Young Children Continue To Reinvent Arithmetic. 2nd Grade. Implications of Piaget's Theory*. (2. Auflage). New York: Teachers College Press.

Leuders T. (2009). Spielst du noch – oder denkst du schon? *Praxis der Mathematik in der Schule*, 51(25), 1–9.

Meyer S. (2006). Das flexible Interview. Online verfügbar unter: http://public.bscw-hfh.ch/d_1/FI_www/ [10.10.2009]

Ramani G. B. e Siegler R. S. (2008). Promoting Broad and Stable Improvements in Low-Income Children's Nu-merical Knowledge Through Playing Number Board Games. *Child Development*, 79(2), 375–394.

Rottmann T. (2006). *Das kindliche Verständnis der Begriffe «die Hälfte» und «das Doppelte»*. Hildesheim: Franzbecker Verlag.

Weber A. (2004). *Problem-Based Learning. Ein Handbuch für die Ausbildung auf der Sekundarstufe II und der Tertiärstufe*. Bern: hep Verlag AG.

Wittmann E. C. (2002). *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. (6. Auflage). Braunschweig: Vieweg.

Wittmann, G. (2006). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen – auch für leistungsschwache Schüler? *mathematica didactica*, 29(2), 49–74.

3. Sperimentazione sul calcolo numerico

Introduzione al calcolo strumentale nella scuola elementare[1]

Gianfranco Arrigo

The new project of teaching numerical calculation in primary school provides, in the second part of the cycle, the integration of the calculator in teaching and, where possible, of a computer. This article concludes the presentation of the three objectives of the experiment: mental calculation (with the techniques of calculation in line), approximate calculation (with suitably rounded data and the estimation of the results), instrumental calculation (education to the use of electronic for calculation).

1. I punti cardine della sperimentazione

Il nuovo progetto d'insegnamento del calcolo numerico nella scuola elementare prevede, a partire dalla quarta, l'integrazione della calcolatrice e, dove è possibile, del computer. Occorre affermare con estrema chiarezza che l'uso corretto di questi strumenti, oltre che aprire considerevolmente il ventaglio delle situazioni proponibili in classe, permette finalmente di eliminare le ricadute negative causate da un uso «selvaggio» delle nuove tecnologie, oggi diffuse capillarmente nella nostra società.

Affermazioni come:
- con l'introduzione della calcolatrice nella scuola gli allievi non sanno più calcolare
- con l'introduzione del computer nella scuola gli allievi non sanno più ragionare

devono essere assolutamente contestate. La verità è che questi fenomeni negativi si verificano proprio quando la scuola non si preoccupa di insegnare il calcolo strumentale. Nella nostra scuola elementare si continua a insegnare gli algoritmi del calcolo in colonna, pensando che possano ancora essere utili nella continuazione degli studi e nella vita professionale. Nulla di più falso. Ancora una volta la tradizione scolastica gioca un ruolo preponderante: si continua a insegnare come si è sempre fatto, non considerando che nella società è appena avvenuta una delle più importanti rivoluzioni nel modo di calcolare: la diffusione del calcolo elettronico, resa possibile dalla tecnologia a basso costo. Il calcolo in colonna è stato introdotto nel nostro mondo da Leonardo Pisano, detto il Fibonacci, con la famosa pubblicazione *Liber abacci* (più noto come *Liber abaci*) del 1202. Prima di allora per fare i calcoli si usava l'abaco,

1. Le considerazioni proposte in questo articolo sono anche frutto della collaborazione con Giorgio Mainini nell'ambito dei corsi per gli insegnanti della scuola elementare organizzati dalla Direzione generale dell'Istituto scolastico comunale della Città di Lugano.

strumento assai difficile da manipolare se si pretende un minimo rendimento, tanto è vero che per eseguire calcoli appena un po' complessi si doveva ricorrere agli abacisti, specialisti formati in scuole note per la loro severità.

Si racconta che Fibonacci, figlio di un gabelliere della Repubblica di Pisa, sia stato inviato dal padre nell'Africa settentrionale[2], segnatamente a Bugia (oggi chiamata Bejaia, porto algerino) perché si era accorto che i commercianti arabi erano in grado di eseguire speditamente i calcoli che i pisani erano costretti a far eseguire ai loro abacisti; sembra che ciò portasse agli arabi non pochi vantaggi nelle contrattazioni. Comunque sia stato, è evidente che Fibonacci entrò in stretto contatto con la cultura araba di quel tempo, in particolare con le opere di *al-Khwarizm* (vissuto Baghdad tra il 780 e l'850) e *Abu Kamil* (vissuto in Egitto tra l'850 e il 930).

La novità portata da Fibonacci consiste soprattutto nel sistema di numerazione decimale posizionale -quello che usiamo ancora oggi-, grazie al quale è possibile eseguire le operazioni numeriche in proprio, con carta e penna, senza dover rivolgersi a specialisti.

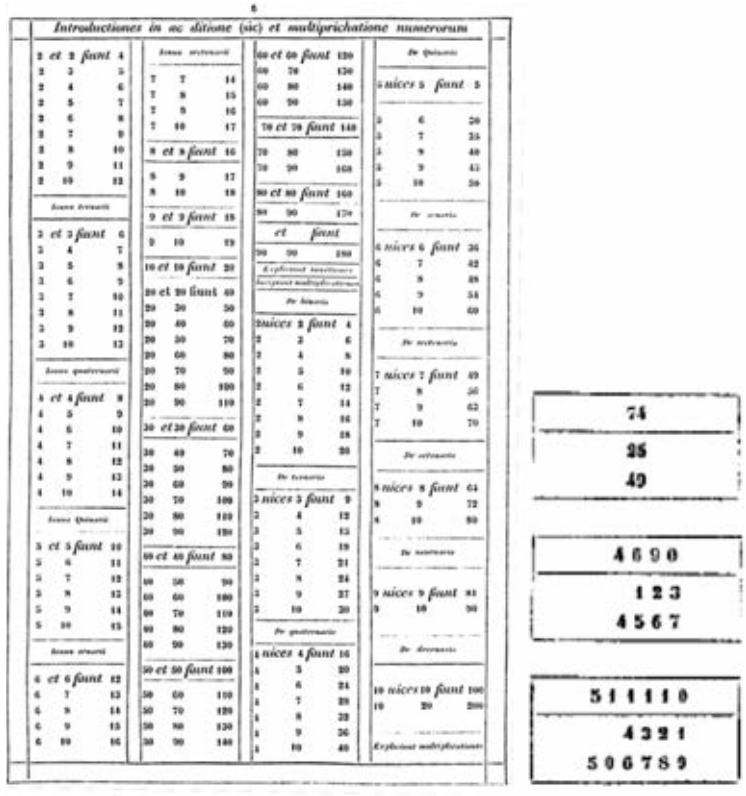


Figura 1. Dal *Liber abaci*: a sinistra le tavole di addizione e di moltiplicazione; a destra tre esempi di addzione in colonna (si noti che il risultato è scritto in cima).

2. Un altro soprannome di Leonardo Pisano è «Bigollo», cioè «bighellone», appioppato – si dice – dal padre al figlio poco propenso a lavorare, perché attratto da questioni filosofiche e matematiche. Anche questo particolare può spiegare la decisione del padre di mandarlo a indagare sul modo di calcolare degli arabi.

La rivoluzione portata da Fibonacci stentò parecchio a diffondersi dalle nostre parti, comunque possiamo dire che da almeno sei-sette secoli tutti usano questo sistema di numerazione ed eseguono i calcoli numerici come li ha fatti conoscere Fibonacci. In questi secoli, però, si succedettero parecchi altri strumenti di calcolo, anche se interessarono per lo più piccole minoranze.

Fra i più noti ricordiamo: i procedimenti relativi alla moltiplicazione («egiziano», «per gelosia», «regoli di Nepero»); le addizionatrici meccaniche; le moltiplicatrici meccaniche; i metodi di calcolo con i logaritmi; il regolo calcolatore: lineare e quello a scala logaritmica usato fino alla metà del secolo scorso soprattutto dagli ingegneri; i grandi computer (1946: ENIAC – 1951: UNIVAC 1 – ecc.); i computer da tavolo (1965: Olivetti P101 – 1968: Compucorp – ecc.); i personal computer (1981: PC1 della IBM – 1982: Commodore 64 – 1984: MacIntosh, ecc.); le calcolatrici tascabili (1972: HP-35 – 1976: TI-30 – ecc.).

Ciò che sembra strano, ma sotto gli occhi di tutti, è che ben pochi si siano interessati a tutte queste rivoluzioni del modo di calcolare, e con essa la scuola. Dagli ultimi decenni del XX secolo a oggi è subentrato un altro fenomeno sociale: l'elettronica per tutti e a basso prezzo. Ciò ha fatto sì che i giovani (addirittura i bambini a partire dai tre anni) vengano sempre più a contatto con le nuove tecnologie. Se lasciati in balìa di se stessi, non imparano a servirsi opportunamente di questi strumenti sempre più raffinati e dalle enormi potenzialità. Continueranno a usare il computer unicamente per giocare e per navigare nella Grande Rete e faranno capo alla calcolatrice anche per calcolare 20×30. Sarebbero sufficienti queste riflessioni per stimolare gli insegnanti di ogni ordine scolastico a prendere seriamente in conto questo problema didattico centrale. Ma c'è di più. Se si introduce nella scuola lo strumento elettronico, integrandolo con gli altri strumenti di uso comune, si aprono le porte a nuove, finalmente possibili, attività didattiche. Si pensi a situazioni matematiche con molti dati, che possono avere più soluzioni o nessuna, che concernono numeri qualsiasi anche con parecchie cifre significative: fra essi ritroviamo molti problemi, anche ma non solo riguardanti la vita di tutti i giorni, che non sempre possono essere affrontati senza uno strumento di calcolo idoneo. In questa direzione si contribuisce ad avvicinare di più il lavoro scolastico alla realtà della vita e alla matematica stimolante: una cosa che molti allievi oggi chiedono.

Nel merito, presentiamo, a titolo di esempio, alcune affermazioni tratte dal programma di matematica della scuola primaria del vicino Canton Lucerna.

«Oggi tutte le allieve e gli allievi della scuola primaria possiedono una calcolatrice (…). Ma solo un impiego sensato della calcolatrice permette di non rovinare le loro abilità di calcolo. Mediante un'azione didattica mirata gli insegnanti possono condurre allieve e allievi a usare lo strumento in modo opportuno, per far fronte a determinate situazioni, come un qualsiasi altro legittimo sussidio didattico, e nel contempo a capire quando l'uso diventa abuso».

E ancora:

«La rinuncia all'insegnamento del calcolo in colonna non significa assolutamente una rinuncia al calcolo perché lo si sostituisce con un altro tipo di calcolo. Questo concerne particolarmente il calcolo in riga (das halbschriftlische Rechnen), *che*

conduce da una parte ai fondamenti della teoria dei numeri e dell'algebra e dall'altra all'applicazione del calcolo a situazioni reali. Con il calcolo in riga si possono raggiungere anche importanti obiettivi come matematizzare, scoprire, argomentare e formulare».

2. Tecnica di base relativa all'uso della calcolatrice

Per un buon uso della calcolatrice occorre tenere presente tre principi.

1. Mai impostare un calcolo senza avere un'idea, una previsione, una stima del risultato che si vuole raggiungere.
2. Quando è possibile, un algoritmo risolutivo deve essere eseguito a macchina senza ricopiare risultati parziali su un foglio e ogni dato dev'essere introdotto una sola volta.
3. Ogni risultato ottenuto a macchina dev'essere confrontato con la stima effettuata e interpretato nel contesto del problema.

Sul punto 1:

è ben vero che i circuiti non sbagliano (tranne in casi molto complessi nei quali i residui decimali possono dare origine a clamorose degenerazioni), ma è altrettanto vero che anche il più semplice calcolo, come per esempio (77×88) può diventare (7×88), (77×8), (77×85), (77×89) ecc. in seguito a errori di battitura, che sono molto più frequenti di quanto si pensa solitamente.

Sul punto 2:

per eseguire a macchina il calcolo seguente:

$(12{,}75 + 33{,}90) : (3 - 9{,}77)$

non si calcola il valore di ciascuna parentesi, per poi ricopiarli su un foglietto e reintrodurli nell'ordine per eseguire la divisione, ma si procede per esempio così:

(Il comando «=» fa eseguire tutti i calcoli fino a quel punto impostati; nella parte iniziale può sostituire le parentesi. I comandi «[(» e «)]» significano «parentesi aperta» e «parentesi chiusa»; variano a seconda del tipo di calcolatrice.)

Sul punto 3:

per capire meglio, consideriamo un esempio di problema.

«Tre amiche hanno vuotato i loro salvadanai. Il totale dei soldi ricavati lo suddivideranno in 7 parti uguali da versare ad altrettanti enti benefici. I contenuti, in franchi, erano i seguenti:

323,80 241,25 273,15

A quanto ammonta l'importo di ciascuna delle 7 parti?»

Modello di soluzione

a) Scriviamo dapprima l'algoritmo risolutivo nel linguaggio matematico: P = (323,80 + 241,25 + 273,15) : 7

b) Stimiamo il risultato:

$$P \cong (330 + 240 + 270) : 7 = 840 : 7 = (700 + 140) : 7 = 100 + 20 = 120$$

(Si noti l'importanza del calcolo in riga nella stima del risultato.)

c) Usiamo la calcolatrice:

d) Interpretiamo il risultato:

Trattandosi di franchi, il risultato si può esprimere in almeno tre modi:
119,74 CHF, 119,75 CHF oppure 120 CHF

L'ultima interpretazione coincide addirittura con la stima fatta. Ciò ci permette di dire che il calcolo approssimato è importante e assolutamente da rivalutare e rende evidente il ruolo decisivo del calcolo mentale con la scrittura in riga.

La rappresentazione grafica della sequenza di comandi (vedere il punto c) è importante perché con essa si può studiare nei dettagli il metodo seguito. Ciò non significa affatto che la si debba redigere ogni volta: torna utile quando, ad esempio, si tratta di cercare un errore oppure di esaminare modi diversi di eseguire lo stesso calcolo.

Vediamo un esempio di procedimenti diversi.

«Alla fine dell'anno i 279 uomini e le 148 donne impiegati di una banca ricevono una gratifica ottenuta suddividendo equamente un importo di 1'003'450 franchi. A quanto ammonta la gratifica di ogni impiegato?»

Algoritmo risolutivo[3]: 1'003'450 : (279 + 148)

Esecuzione

Primo modo:

Secondo modo:

(I comandi Min e MR significano nell'ordine «memorizza» e «richiama dalla memoria»; variano a seconda del tipo di calcolatrice.)

3. In questo esempio ci occupiamo solo della tecnica di uso della calcolatrice.

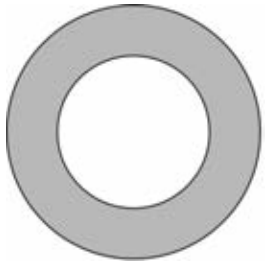
Terzo modo:

(Il comando 1/x restituisce il reciproco del risultato precedente.)

I tre modi sono corretti. Ciascuno ha le sue particolarità. Preferirne uno è solo questione soggettiva. È importante che ogni allievo conosca le varie possibilità, per poter scegliere di volta in volta a seconda del tipo di calcolo da eseguire.

3. Esempi di problemi risolvibili con la calcolatrice

3.1. Determinare l'area di una corona circolare



Raggio esterno: 37,0 cm Raggio interno: 17,0 cm

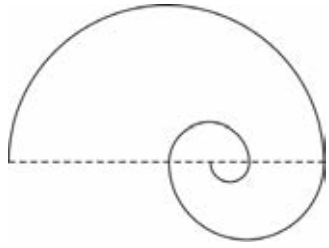
a) Espressione numerica per il calcolo dell'area in cm^2
$\pi \times 37 \times 37 - \pi \times 17 \times 17$
oppure
$\pi \times 37^2 - \pi \times 17^2$
oppure ancora
$\pi \times (37^2 - 17^2)$
(Le due ultime espressioni possono anche essere tralasciate.)

b) Stima del risultato
$3 \times 40 \times 40 - 3 \times 20 \times 20 = 3 \times 1600 - 3 \times 400 = 4800 - 1200 = 3600$

c) Esecuzione con la calcolatrice

d) Confronto con la stima e interpretazione del risultato
Risultato credibile, valore comunicabile 3393 cm^2.

3.2. Determinare la lunghezza di una spirale circolare



La spirale è formata da 4 semicirconferenze. La più grande ha il diametro di 1,35 m; ogni semicirconferenza successiva ha diametro metà di quello della precedente. Si vuole sapere quanto è lunga la spirale.

a) Espressione numerica per il calcolo della lunghezza in metri
$(\pi \times 1{,}35) : 2 + (\pi \times 1{,}35 : 2) : 2 + (\pi \times 1{,}35 : 4) : 2 + (\pi \times 1{,}35 : 8) : 2 =$
$= (\pi \times 1{,}35) : 2 + (\pi \times 1{,}35) : 4 + (\pi \times 1{,}35) : 8 + (\pi \times 1{,}35) : 16$

b) Stima del risultato in metri
$4 : 2 + 4 : 4 + 4 : 8 + 4 : 16 = 2 + 1 + 0{,}5 + 0{,}25 = 3{,}75$

c) Esecuzione con la calcolatrice

d) Confronto con la stima e interpretazione del risultato
Risultato credibile, valore comunicabile 3,98 m

3.3. Backup

Desideriamo salvare i nostri files su un DVD della capacità di 4,7 GB con spazio a disposizione di 4,387 GB. Vorremmo salvare le seguenti cartelle; lavori (1311 MB); contabilità (26 MB); corrispondenza (57 MB); giochi (276 MB); fotografie (686 MB) e, se possibile, anche la cartella sistema che occupa 2025 MB. Sarà possibile?

a) Espressione risolutiva (in MB)
$4387 - (1311 + 26 + 57 + 276 + 686)$

b) Stima del risultato
$4400 - (1300 + 20 + 50 + 280 + 700) = 4400 - (2000 + 300 + 50) =$
$= 4400 - 2350 = 2050$

c) Esecuzione con la calcolatrice

d) Risultato credibile; rispondiamo che anche la cartella sistema può essere registrata sul DVD che risulterà in seguito praticamente pieno.

4. Conclusione

Questo articolo continua la serie di interventi relativi alle diverse sperimentazioni in atto, scritti che hanno lo scopo di stimolare gli insegnanti della scuola obbligatoria affinché si indirizzino decisamente e al più presto verso un insegnamento aggiornato del calcolo numerico. Le tappe importanti sono tre:

- Calcolo mentale con le tecniche del calcolo in riga che possono tranquillamente sostituire gli algoritmi arabici (calcolo in colonna).
- Calcolo approssimato con dati opportunamente arrotondati e stima di risultati.
- Calcolo strumentale mediante calcolatrice e computer.

L'introduzione della calcolatrice è stata ampiamente presentata in questo articolo. Alla scuola, e in particolare ai quadri e agli insegnanti, spetta il compito di compiere questo importante passo, senza titubanza. Dalle impressioni raccolte fra gli insegnanti emergono tre preoccupazioni.

La prima concerne la falsa credenza che l'introduzione della calcolatrice finisca per influire negativamente sulle capacità di calcolo mentale degli allievi, cosa che le sperimentazioni in atto stanno chiaramente smentendo.

La seconda concerne l'insegnante che si sente, almeno in un primo tempo, un po' destabilizzato perché si trova a dover introdurre in classe uno strumento ben più raffinato di quelli tradizionali, che – almeno per certuni – non sa bene padroneggiare. Usare bene una calcolatrice non è affatto difficile. Pochi però lo sanno fare – che siano persone adulte o studenti – perché, salvo i soliti appassionati e autodidatti, a scuola non si è mai insegnato.

Il terzo motivo di preoccupazione è relativo all'importante cambiamento che la calcolatrice induce nella creazione di situazioni di apprendimento. Con essa si possono manipolare dati «complicati», il che non vuol dire «complicati artificiosamente», ma –finalmente, diremmo- dati realistici. Come già accennato, gli allievi stessi chiedono che la scuola sia più vicina alla vita di tutti i giorni. Problemi come quelli esemplificati in precedenza sono pensati in questa direzione. Agli insegnanti spetta il compito di ideare nuove situazioni didattiche, nuovi problemi.

Infine, come ampiamente presentato sia in questa sede sia negli articoli precedenti, la calcolatrice «parla il linguaggio matematico» e offre così la possibilità di imparare a calcolare tranquillamente, come in un gioco, semplici espressioni numeriche con le quattro operazioni aritmetiche. Ma c'è di più: la calcolatrice offre tasti (o comandi) «strani», come ad esempio «π», «1/x», «%», «x^2», «x!», dietro ai quali sta una bella matematica che sarebbe anche utile ogni tanto almeno esplorare. Come dire, e mi ripeto: la calcolatrice stimolatrice dell'apprendimento. Lo stesso discorso vale per il computer.

4. Chi ha paura dei numeri grandi?

Mario Donati e Silvia Sbaragli[1]

The article presents the results of a survey conducted in 21 first grade classes in the Canton of Ticino (school year 2011/2012), in addition to some similar studies conducted in Italy. The aim is to implement teaching strategies in arithmetics which take into serious consideration the real skills of children regarding numbers at the elementary school. The basic idea is to release the first-graders from the cage, often artificial, of the first twenty numbers. The student is soon confronted with situations which consider even larger numbers, and bring zerto into play.

1. Introduzione

L'articolo verte su un'indagine condotta in 21 classi di prima elementare del Canton Ticino (anno scolastico 2011/2012) nell'ambito del Corso didattico *Numero e numerazione* destinato agli studenti del secondo anno Bachelor del Dipartimento della Formazione e dell'Apprendimento (DFA), SUPSI di Locarno[2]. Sulla falsariga di alcune ricerche analoghe condotte in Italia (AA.VV., 2004; Marazzani, 2007) che avevano lo scopo di mettere in atto strategie didattiche sull'aritmetica che prendessero in seria considerazione le reali competenze dei bambini sui numeri all'ingresso della scuola elementare, è nata l'idea di utilizzare una parte dei lunedì di pratica professionale[3] per raccogliere alcuni elementi in grado di fornire una fotografia delle competenze che i bambini di prima elementare possiedono in àmbito aritmetico e di poterle comparare con quelle presenti in altre realtà scolastiche.

2. Metodologia e campione di riferimento

Per realizzare l'indagine è stato chiesto ad ogni studente del corso *Numero e numerazione* di somministrare nella prima settimana di settembre, a un paio di

1. Docenti e ricercatori del DFA – SUPSI, Locarno
2. Alla raccolta dei dati hanno partecipato i seguenti studenti: Mario Alfieri, Elena Apicella, Aline Baggett, Lorena Barloggio, Elia Bazzi, Stefania Bianchi, Sabrina Bonsignore, Federico Buser, Amalia Canella, Serena Canello, Fosca Canta, Lara Cavalli, Alessia Coldesina, Emanuela Detta, Daniele Difrancesco, Stefania Do Cabo, Giulia Ferrini, Damiano Guarnieri, Thierry Jaccard, Lucia Martinoni, Giulia Miggiano, Patrick Milesi, Luca Mosca, Stefania Noseda, Simona Pistone, Evelyn Poma, Elisa Porrini, Milojka Radic, Lisa Regazzi, Francesca Spensieri, Karin Stocco, Camilla Tamò, Roxana Togni, Valérie Camilla Viotto.
3. Sull'arco dei tre anni di formazione Bachelor, gli studenti svolgono cinque periodi di pratica professionale (PP) in classi di diversi istituti scolastici del Cantone. Durante la permanenza nelle classi sono seguiti dai docenti titolari che per ricoprire questo ruolo di Docenti di Pratica professionale (DPP) hanno seguito una formazione specifica.

bambini di prima elementare, alcune attività standardizzate nel corso di un colloquio individuale. Tale proposta aveva un duplice obiettivo: formare i futuri insegnanti in formazione sulla modalità di condurre un colloquio, fornire loro i prerequisiti necessari per strutturare la successiva pratica professionale e, più in generale, permettere di effettuare una prima indagine in campo numerico delle competenze dei bambini all'ingresso della scuola elementare.

Complessivamente l'indagine ha coinvolto una quarantina di bambini di entrambi i sessi, distribuiti in vari istituti dei nove circondari scolastici cantonali. La scelta dei bambini da sottoporre al colloquio ha tenuto conto anche delle capacità scolastiche segnalate dai docenti titolari, avendo cura di avere sia allievi che denotano facilità nell'affrontare gli impegni scolastici, sia allievi che si confrontano con difficoltà di apprendimento.

3. Attività proposte nel colloquio

Durante il colloquio con i bambini prescelti sono state svolte le seguenti quattro attività.

Filastrocca dei numeri.

Inizialmente si è indagato l'ambito del contare oralmente (filastrocca dei numeri) cercando di scoprire fino a che numero, nella successione in ordine crescente, il bambino riesce a inoltrarsi senza bisogno di aiuti esterni. Inizialmente si chiedeva al bambino di prevedere fino a dove sapeva contare, invitandolo quindi a procedere con il conteggio orale. In caso di inciampo era previsto un solo aiuto tramite l'esplicitazione del numero corretto; se tutto procedeva senza difficoltà, la consegna prevedeva di fermare il bambino al numero 40.

Il sistema di numerazione orale occupa un ruolo fondamentale nell'acquisizione delle prime analisi numeriche fatte dai bambini fin dalla scuola dell'infanzia. A partire dalla conoscenza e dall'uso della successione orale dei numeri, essi iniziano a scoprire le regolarità del sistema come la ricorsività del numero, ossia l'idea che i numeri non finiscono mai.

Grandi numeri.

Si sono mostrati al bambino 5 numeri (3, 15, 327, 32 e 51) scritti in modo sparso su un foglio chiedendogli quale fosse il più grande e rispettivamente il più piccolo e di esplicitare le motivazioni delle scelte effettuate. Tale ricerca è stata effettuata anche in Italia (Aglì, Martini, 1995; AA.VV., 2004). Come sostiene Teruggi (2001): *«Una delle ipotesi che i bambini elaborano molto precocemente è che la grandezza di un numero è in rapporto diretto con la quantità di cifre che lo compongono. Questa ipotesi consente ai bambini di individuare il numero maggiore in funzione della quantità di cifre che possiede anche non conoscendo la denominazione verbale dei numeri»*.

Successivamente, per rendere più complessa la richiesta, si sono proposti tre numeri composti ognuno di due cifre (32, 51 e 15), chiedendo sempre al bambino di motivare l'identificazione del numero più grande e rispettivamente del più piccolo.

Come continua a sostenere Teruggi (2001): *«Un'altra ipotesi che i bambini costruiscono attraverso il confronto di numeri li porta a pensare che in due numeri con la stessa quantità di cifre (18 e 25) bisogna guardare il primo per sapere quale dei due è il più grande»*.

Riconoscimento delle cifre.

È stata proposta la lettura da parte dei bambini di una lista di 8 cifre nel seguente ordine (3 - 6 - 1 - 5 - 2 - 4 - 7 - 0), rilevando quali sapevano riconoscere. La presenza della successione numerica scritta consente ai bambini di scoprire che i numeri si scrivono in un certo modo, che dipendono da convenzioni che devono essere rispettate e che ogni numero ha una posizione determinata all'interno della successione scritta. Abbiamo scelto di inserire lo zero, perché riteniamo che la sua introduzione debba essere naturale. Come riferisce D'Amore (2007) il fatto di considerare lo zero concetto ostico, addirittura non costruibile da bambini in tenera età, spinge gli insegnanti a rinviare la sua introduzione, fino a quando l'uso spontaneo non è annullato dall'introduzione di altri concetti ed altri meccanismi, trasformando quindi questo oggetto matematico in un vero e proprio ostacolo didattico.

Didatticamente conviene lasciar esprimere in modo spontaneo, informale, ingenuo ogni concetto matematico che il bambino ha già fin da piccolo, senza bloccarlo, anzi, sfruttando proprio le sue competenze ingenue, informali; e procedere così, con molta oculatezza didattica, facendo in modo che immagini mentali successive dello zero si organizzino fino a diventare modelli stabili corretti al momento opportuno, quando il concetto di zero si sia ben organizzato nella mente e coincida con il risultato cognitivamente atteso.

Enumerazione.

In conclusione del colloquio al bambino è stato richiesto di eseguire l'enumerazione di una collezione di 12 oggetti (nascosti sotto un bicchiere) posti inizialmente in ordine strutturato (righe e colonne) su un tavolo. In seguito l'attività è stata riproposta ponendo i bicchieri in «ordine sparso».

L'enumerazione mette in risalto la capacità di passare una ed una sola volta per ogni oggetto, ordinati dapprima per riga e colonne e poi disposti in modo casuale. Scopo di questo lavoro è soprattutto quello di scoprire le strategie spontanee messe in atto dai bambini nell'enumerazione (Briand, 1999), quando si tratta cioè di organizzare delle collezioni di oggetti fissi. Come sostiene Margolinas (2008): *«È più difficile contare dei punti disposti «in disordine» che in linea; in particolare, con i punti in disordine, è frequente contare uno stesso punto due volte oppure dimenticare un punto. L'errore descritto è ben conosciuto dagli insegnanti, non è un errore nella filastrocca numerica, che può essere corretta, ma un errore nell'organizzazione del gesto»*. Per riuscire, si deve: scegliere un primo punto, scegliere un punto successivo, conservare la memoria dei punti già scelti e ricominciare finché si sa di avere scelto l'ultimo punto. Chiamiamo «enumerazione» la conoscenza che permette il controllo di queste operazioni.

Di seguito riportiamo gli esiti ottenuti, mettendo, laddove esiste, la dimensione comparativa con quanto svolto nella vicina penisola.

4. Risultati ottenuti

4.1. Filastrocca dei numeri

Complessivamente sono stati interrogati 42 bambini.

La totalità riesce a contare oralmente (filastrocca dei numeri) almeno fino al 10. 9 bambini (21%) cominciano ad avere difficoltà dopo il 10 e anche dopo l'aiuto non raggiungono il 20; altri 17 (40%) si avventurano fin verso il 40, ma talvolta con alcune incertezze. Il resto dei bambini (39%) dimostra padronanza nel contare e, se non fermati, andrebbero verso quote assai elevate (anche sopra il 1000, almeno a loro dire). Era infatti stato loro chiesto preliminarmente di dire fino a dove sapevano contare e nella maggioranza dei casi l'anticipazione corrispondeva a quanto hanno poi dimostrato nell'esecuzione del compito.

4.2. Grandi numeri

Tra cinque numerali scritti in modo sparso su un foglio: 3, 15, 327, 32, 51 individuare il più grande e il più piccolo motivando nel contempo le ragioni della scelta. La tabella che segue dà un riscontro globale degli esiti nei due contesti considerati.

	Risultati indagine Nord e Centro Italia (n = 134)		Risultati in Canton Ticino (n = 42)	
	Il più grande è	*Il più piccolo è*	*Il più grande è*	*Il più piccolo è*
3		116 (87%)		36 (86%)
15	2			
327	127 (95%)		37 (88%)	1
32	3	1		1
51	1	1	3	1
Non risponde	1	16	2	3

Tabella 1. «Il più grande» e «il più piccolo» con numero di cifre diverse.

I risultati ottenuti in Canton Ticino e in Italia sono simili. In particolare, si rileva che la grande maggioranza dei bambini intervistati all'inizio della prima elementare sa riconoscere ed indicare, in una raccolta di 5 numerali, il più grande ed il più piccolo; ciò avviene in Canton Ticino praticamente con la stessa percentuale per il numero più piccolo e per il più grande, in Italia con una prevalenza per il numero più grande. Possiamo anche osservare che in Canton Ticino circa l'81% dei bambini è in grado di riconoscere *entrambi* i numeri contro un 79% in Italia. Troviamo dunque degli esiti molto simili nelle due realtà messe a confronto.

Tra le risposte più frequenti alla domanda sul perché delle scelte, i bambini, con frasi e modalità diverse, mettono in campo nella stragrande maggioranza il numero delle cifre che compongono i numerali scelti: «327 è più grande perché ha tre numeri, mentre il 3 è piccolo perché ne ha uno solo»; «327 è il numero che vale di più perché ha più numeri. 3 è il più piccolo perché ha pochi numeri»; «Il 327 è il più grande perché ha il tre il due e il sette, il 3 è più piccolo perché ha solo il tre». Tra coloro che sbagliano, c'è un bambino che afferma: «I numeri sono uguali» e chi non nota il 3 come numero più piccolo, sostituendolo con il 32; altri, prevalentemente coloro che non forniscono le risposte corrette, non sanno motivare le proprie scelte.

Analogamente all'attività precedente si sono proposti tre numerali, ma questa volta con lo stesso numero di cifre, per neutralizzare l'elemento che facilitava l'identificazione del numero più grande e quello più piccolo.

In questo caso si ha un calo della percentuale di risposte corrette rispetto alla richiesta precedente. Rimane comunque una buona percentuale di bambini che riesce a rispondere positivamente ad un quesito così complesso; un 40% in Canton Ticino sa individuare il numero più grande, contro un 69% in Italia. Per il numero più piccolo le percentuali tra i due paesi sono simili. Il 29% dei bambini in Canton Ticino trova esattamente entrambi i numerali, il più alto ed il più piccolo, mentre in Italia questa percentuale sale al 46%.

Rispetto alla prova precedente il divario fra i risultati delle due realtà scolastiche è più accentuato. Dagli elementi a nostra disposizione appare assai arduo ipotizzare spiegazioni per le differenze riscontrate.

Risultati indagine Nord e Centro Italia (n = 102)			Risultati in Canton Ticino (n = 42)	
	Il più grande è	*Il più piccolo è*	*Il più grande è*	*Il più piccolo è*
32	20	18	13	6
51	70 (69%)	9	17 (40%)	9
15	10	52 (51%)	8	21 (50%)
Non risponde	2	23	4	6

Tabella 2. «Il più grande» e «il più piccolo» con lo stesso numero di cifre.

Chi risponde positivamente è perché intuisce il valore posizionale delle cifre, ossia che tra le due cifre di un numerale a due cifre, quella che dà l'ordine di grandezza più rilevante è la prima: *«51 è il più grande perché il numero 5 (lo indica sul foglio) è più grande e il 15 è più piccolo perché 1 é più piccolo»*, un altro bambino, sempre sul 15 e il 51 dice che i due numeri sono uguali, ma che si *«trovano nel verso sbagliato»*; *«Il 5 è più grande di 1 e di 3, quindi 51 è il più grande, questo (indica il 15) è il più piccolo»*. Solo un bambino fornisce la seguente motivazione: *«Il 15 è il più piccolo perché si conta bene»*. Alcuni bambini dimostrano di saper leggere i numeri a due cifre.

Come è avvenuto anche in Italia, la maggior parte dei bambini che sbaglia lo fa perché non dà valore alla posizione delle cifre e reputa il 51 e il 15 come lo stesso numero e infatti un bambino afferma che *«sono uguali, perché tutti e due hanno un 5 e un 1»*, per questo viene scelto il 32 o come numero più piccolo o come il più grande: *«51 e 15 sono uguali, anche se si trovano nel verso sbagliato, quindi il 32 è il più grande»*; *«Il 32 è il più piccolo, perché nel 15 c'è un 5, numero più grande sia di 3 che di 2»*.

Tra chi sbaglia c'è chi afferma: *«32 è il numero più grande che mi ha detto mio papà, mentre indica il 15 come più piccolo perché ha l'uno davanti»*. Un bambino, pur avendo fatto correttamente il conteggio nella prova precedente e pur sapendo leggere correttamente i numeri, afferma: *«Il 32 è più piccolo del 15, perché 'viene prima'»*; una bambina si fa influenzare dall'aspetto grafico della rappresentazione: *«15 è più grande perché ha la pancia»*, in effetti il 5 del numero 15 era stato rappresentato in modo più accentuato rispetto al 5 del 51, invece il più piccolo è 32, perché il 2 e il 3 sono più piccoli del 5 (del 51).

4.3. Riconoscimento delle cifre

Il compito richiesto consisteva nel riconoscere (dare il nome corretto) ad alcune cifre da 0 a 7 scritte in ordine sparso su un foglio e riordinarle dal numero più piccolo al più grande. Alcuni studenti hanno anche richiesto ai bambini attività complementari come quella di riordinare dal più grande al più piccolo, o addirittura di contare all'indietro (dal 7 allo 0).

Dei 39 bambini sottoposti alla prova possiamo rilevare come 29 di essi (74%) svolgono l'attività senza esitazioni e in molti casi mostrano buona padronanza nei compiti aggiuntivi richiesti dagli studenti.

Con 8 bambini (20%) emergono alcune difficoltà che si esprimono soprattutto nel confondere un numero con un altro o in qualche errore nella successione.

Solo 2 bambini (6%) denotano difficoltà abbastanza rilevanti nell'eseguire il compito: 1 confonde il 6 e il 7 e non riconosce l'8, inoltre non sa dove collocare lo 0 nella successione per grandezza numerica, l'altro commette diversi errori sia nel riconoscimento sia nell'ordinamento.

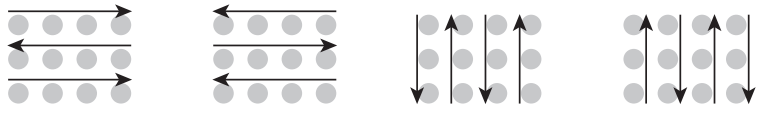
4.4. Enumerazione

L'attività di enumerazione di dodici oggetti nascosti sotto alcuni bicchierini uguali ha confermato l'ipotesi iniziale tendente ad affermare che la disposizione degli oggetti in ordine strutturato ha generato minori difficoltà rispetto a quella in ordine sparso.

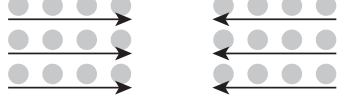
Nel primo caso il tasso di riuscita ha raggiunto l'80%, mentre nel secondo caso la percentuale è scesa al 56%.

È interessante e utile, a livello di possibili ricadute didattiche, porre attenzione alla grande varietà di strategie messe in atto dai bambini sottoposti alla prova.

Nel caso in cui i bicchieri sono stati messi in ordine (3 file da 4 elementi) la strategia più utilizzata (54% di chi ha superato la prova) è stata quella a «biscia» per riga o per colonna (sia dall'alto verso il basso che dal basso verso l'alto):



circa il 12% dei bambini si è mosso per riga come se leggesse un testo: *«Riesce a enumerare senza errori, né esitazioni; enumera per righe, iniziando da quella in alto e partendo sempre da sinistra verso destra»* (commento Allieva-Maestra DFA) o in verso opposto:



un po' meno del 10% ha seguito un movimento a spirale (dall'esterno all'interno o anche viceversa), mentre il resto dei bambini (24%) non ha adottato strategie riconoscibili come tali o ancora un misto delle strategie già evidenziate.

Le ragioni per cui alcuni bambini hanno fallito questa prova sono riconducibili al fatto che non sono riusciti ad adottare una strategia e a mantenerla; in certi

casi sono partiti con un abbozzo di strategia (per prossimità muovendosi in più direzioni) abbandonandola quasi subito, passando così più volte dallo stesso bicchierino e/o dimenticandone qualcuno: *«Ha cominciato a enumerare i bicchieri in diagonale per poi continuare in modo disordinato fino all'ultimo bicchiere che ha alzato, dopo aver già alzato tutti gli altri»* (commento Allieva-Maestra DFA). In certi casi i bambini hanno cercato di infrangere la consegna (giocando sul modo di collocare il bicchiere già «visitato»).

Per il secondo caso (ordine sparso dei bicchieri), come abbiamo visto, un po' più della metà ha superato con successo la prova. Per quel che riguarda le strategie è stato più difficile identificarle come tali: in alcuni casi (assai frequente) il bambino ha adottato un movimento riconducibile a una spirale partendo dall'interno del gruppo di bicchieri, o anche dall'esterno: *«Vuk sa che i bicchieri sono 12 e che dovrà contare tutte le palline nascoste: utilizza una strategia circolare partendo dall'esterno verso l'interno; si accompagna dicendo i numeri e arrivato all'11 si accorge che gliene manca uno, va diretto sull'ultimo e lo alza»* (commento Allievo-Maestro DFA); altri bambini si sono mossi per prossimità partendo chi dal basso, chi dall'alto, chi da destra e chi da sinistra; in altri casi i bambini identificano configurazioni di gruppetti.

Per i bambini che non hanno superato la prova, le ragioni dell'insuccesso risiedono perlopiù (come già avvenuto nella prova precedente) nella mancata adozione di una strategia. Procedendo dunque a caso: *«Non ha strategia. Alza i bicchieri a caso, infatti passa da un bicchiere più volte»* (commento Allieva-Maestra DFA).

5. Discussione dei risultati e prospettive didattiche

I risultati di questa rilevazione mettono in evidenza alcune tra le competenze numeriche possedute dai bambini all'ingresso della scuola elementare di cui è necessario tener conto. L'intento è di non costringere gli allievi a seguire la strada didattica più diffusa che li fa rimanere bloccati entro il 10 per i primi mesi di scuola, con considerazioni che risultano assai banali e sottostimate per alcuni bambini, senza tener conto della grande disomogeneità di competenze rilevabile per questo àmbito. *La proposta, in linea con le sperimentazioni seguite in Italia e di comprovato successo didattico (Marazzani, 2007), è di partire subito da numeri «grandi», dove il grande dipende dal contesto della classe e dal singolo allievo.* Durante il corso *seguito quest'anno presso il DFA-SUPSI abbiamo quindi* proposto *questo* approccio per l'acquisizione della padronanza di alcune competenze legate al numero, che aveva come scopo quello di uscire dalla gabbia spesso artificiosa dei primi venti numeri (suggerito anche dai Programmi di Scuola elementare)[4] per confrontare l'allievo con situazioni aperte che considerano anche numeri più grandi, mettendo subito in gioco anche lo zero (D'Amore, 2007). Tale scelta di fondo, che propone già nei primi mesi della prima elementare attività di conteggio, enumerazione, modalità spontanee di rappresentazione del numero, ricerca di diverse funzioni del numero nel quotidiano, individuazione di numeri personali, …, prevede percorsi didattici che mettono il bambino nella condizione di vivere e

4. http://www4.ti.ch/fileadmin/DECS/DS/USC/documenti/programmi_v2.pdf, in particolare per la matematica da p. 37 a p. 47.

confrontarsi fino in fondo con la scoperta del variegato universo matematico, evitando le scorciatoie che mirano a una precoce e forzata formalizzazione in termini di rappresentazioni, simboli e algoritmi. Il terreno didattico così predisposto vuole incitare il bambino a interrogarsi, a sperimentare, a lanciarsi in esplorazioni avvincenti fungendo da trampolino nell'avventura dell'apprendimento dei numeri. Quanto appurato sulla scorta delle varie esperienze maturate dagli studenti in pratica professionale, ha evidenziato come queste situazioni molto aperte si rivelino avvincenti e ricche di spunti per bambini e Allievi-Maestri (AM), facendo però emergere nel contempo l'esigenza di creare momenti di strutturazione e di consolidamento di quanto emerso in questi momenti di esplorazione del mondo numerico. Sta all'insegnante saper calibrare i momenti di scoperta, di apertura ad ambiti molto liberi, con fasi in cui il bambino viene aiutato a sistemare questi apprendimenti in strategie comuni, classificazioni, formalizzazioni e convenzioni.

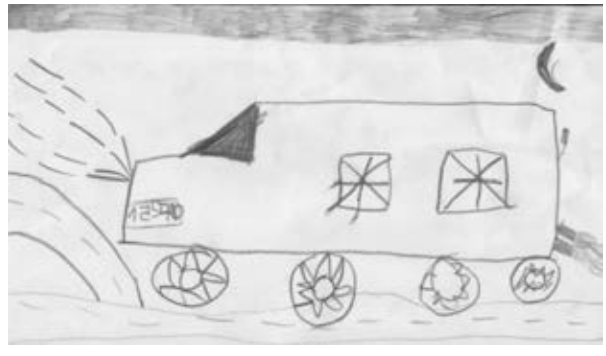
Un altro vantaggio riscontrato dagli AM, e anche dai formatori nel corso delle visite ai propri studenti, è rappresentato dalle grandi opportunità di differenziazione che tale prassi offre: i bambini più dotati possono avventurarsi in campi di sviluppo in linea con quanto già sanno o vorrebbero conoscere, senza sentirsi costretti in un mondo troppo limitato per le loro possibilità, mentre con i bambini confrontati con difficoltà si possono rallentare i ritmi, ridurre l'ampiezza delle situazioni e tornare in forme diverse su concetti non ancora consolidati, personalizzando adeguatamente i loro percorsi di apprendimento.

Questa opzione trova ulteriori motivazioni e conferme nel fatto che il bambino nel suo contesto di vita è in modo ricorrente confrontato con innumerevoli esperienze in cui i numeri sono presenti in modo massiccio: si pensi agli orologi, alle targhe, ai calendari, ai soldi, ai prezzi sui prodotti, ai programmi televisivi, al telecomando, al telefono, ai numeri civici, ai giochi di società (tradizionali o elettronici), …, per cui quanto si fa (o si dovrebbe fare) in classe si colloca in sintonia con questo capitale di esperienze e ne beneficia in modo rilevante.

Riportiamo di seguito alcune risposte e rappresentazioni dei bambini di prima elementare ottenute dagli Allievi-Maestri ponendo la domanda: «A che cosa servono i numeri?»

«I numeri servono per leggere l'ora, per sapere che ora è…»

«Ho disegnato un appartamento con sotto il tetto dei numeri per vedere quanti piani ci sono»



«Ho fatto una macchina che è molto bella e ha una targa con i numeri 159710»

Del resto tale approccio trova ulteriori motivazioni nel senso della continuità con quanto si svolge nella scuola dell'infanzia (frequentata dalla totalità dei bambini che entrano in prima elementare), in cui l'universo del numero trova ampie applicazioni come riferiscono gli «Orientamenti programmatici per la scuola dell'infanzia - Ufficio delle scuole comunali»[5] (2000): «Il mondo è pieno di numeri, quindi risulta importante valorizzare le precedenti esperienze dei bambini nel contare e nel riconoscere simboli numerici, fatte nei contesti di gioco e di vita familiare e sociale».

Nella scuola dell'infanzia i bambini fanno significative riflessioni sul numero scaturite da situazioni di vita quotidiana, dal gioco, dalle domande e dai problemi che nascono dall'esperienza concreta. Come sostiene Teruggi (2001): «*Il sistema di numerazione scritta, così come il sistema di scrittura alfabetica, è presente nella nostra realtà in innumerevoli oggetti e situazioni (calendari, contenitori, etichette, cartelli stradali, banconote, orologi, …). Inoltre, nei nostri discorsi quotidiani, facciamo continuo riferimento ai numeri e ai loro contesti d'uso: un chilo di pane, sono le dieci, costa ventotto mila lire, ho sette anni, ... È lecito allora pensare, coerenti con un approccio costruttivista ed interazionista dell'apprendimento, che i bambini in questo assiduo contatto con i numeri – scritti e detti – costruiscano delle conoscenze al riguardo molto prima di iniziare la scuola elementare*». Gradatamente acquistano così

5. http://tinyurl.com/orientamentiprogrammatici

competenze sulle diverse funzioni del numero come ordinale, cardinale, sul numero-valore del denaro, sul numero nell'uso relativo al tempo, sul numero come espressione di una misurazione, addirittura sul numero da un punto di vista ricorsivo, anche se certamente il numero più presente (quello che emerge in modo spontaneo) è il cosiddetto numero-etichetta.

Altre competenze che si possono favorire nella scuola dell'infanzia, riguardano il numero come segno e strumento per interpretare la realtà e interagire con essa; la lettura e scrittura dei numeri anche di più cifre; il confronto di numeri anche mettendo in campo strategie complesse (Aglì, Martini, 1995; Lucangeli, 2001; Teruggi, 2001); la risoluzione di semplici problemi prevalentemente di addizione e di sottrazione, che mettono in campo prevalentemente strategie aritmetiche e grafiche (Baldisserri, D'Amore, Fascinelli, Fiori, Gastaldelli, Golinelli, 1993; Sbaragli, 1998).

Giunti al termine di questa esperienza condotta con i nostri studenti che hanno frequentato il corso *Numero e numerazione* che, come ricordato, si è svolto in stretta connessione con le classi di pratica professionale, ci sembra di aver potuto maturare con loro alcune idee valide e promettenti su come condurre i bambini nel loro viaggio di scoperta (in parte ri-scoperta) dei numeri nei primi mesi di scuola elementare. Abbiamo anche potuto avere dei riscontri di approvazione e di interesse da parte di molte/i DPP titolari delle classi coinvolte, che hanno partecipato attivamente e in modo aperto alle attività proposte dagli studenti, come ad esempio la caccia ai numeri, il mercatino, i giochi di carte, la carta di identità numerica, il domino, il memory, la linea dei numeri vivente, …, in cui l'approccio al mondo dei numeri si poneva in maniera aperta senza troppa pressione nel voler subito formalizzare gli apprendimenti attivati. Qualche DPP ha, comprensibilmente, manifestato un po' più di prudenza di fronte a certe proposte, anche alla luce di alcuni vincoli e raccomandazioni presenti nei Programmi che sono in vigore, anche se in procinto di essere rielaborati.

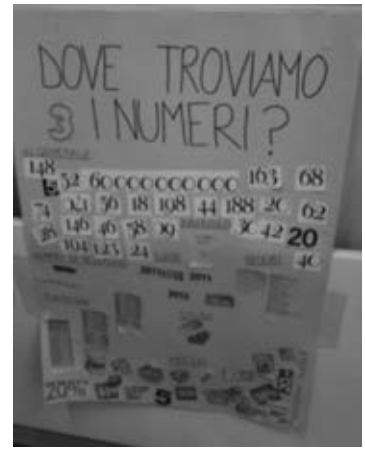
Riportiamo di seguito alcuni stralci di attività significative scaturiti dalla pratica professionale gestita dagli AM.

La caccia ai numeri

Un'attività molto proficua che si può proporre in classe è la «classica» caccia ai numeri. Si può iniziare cercando i numeri in classe, nella scuola, a casa, al supermercato, nel quartiere, ... Finita la caccia ai numeri, si torna in aula e si chiede ad ogni bambino di rappresentare i numeri trovati e di ricordare dove si trovavano: con l'aiuto del disegno, ogni bambino rappresenta il posto dove ha visto il numero e scrive il numero. **È possibile anche chiedere ad ogni bambino a che cosa servivano i numeri in quel contesto per far emergere le diverse funzioni del numero: cardinale, ordinale, etichetta, come misura, nel denaro, …** In seguito si inseriscono i numeri trovati in un grande cartellone per poi disporli sulla retta dei numeri da costruire insieme agli allievi. La caccia ai numeri non termina a scuola; i bambini possono portare da casa tutti i numeri che vogliono.

Bambini a caccia dei numeri nel quartiere.

La lavagna sulla quale i bambini hanno appeso i loro disegni.



Cartelloni della caccia ai numeri.

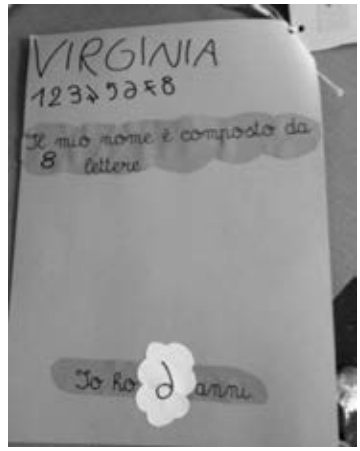
La retta dei numeri

Questo notevole strumento didattico va costruito passo passo con i bambini. I modi per realizzare la retta dei numeri possono essere vari: tramite un lungo foglio di carta; mollette, filo e numeri di cartone; pedine da sistemare nel pavimento; «vivente»: ogni bambino rappresenta un numero, ... Se la retta dei numeri viene costruita tramite un foglio di carta è possibile appenderla alle pareti dell'aula in modo che possa accompagnare l'apprendimento numerico degli allievi per un lungo periodo. La retta va costruita in modo che non dia ai bambini l'idea che inizia da una parte e finisce in un'altra. Si segnano sulla striscia di carta tanti punti tutti alla stessa distanza e si attaccano qua e là alcuni numeri. Lo «0», che non deve essere posto all'inizio della striscia di carta, per dar modo ai bambini di poter pensare (in futuro, quando ciò avverrà spontaneamente) che ci sono «altri» numeri al di qua di quello «0». Si può disegnare anche una doppia freccia sotto (o sopra) lo 0.

La retta dei numeri appesi a stendere.

La carta d'identità numerica

È veramente significativo per i bambini individuare i propri numeri «personali». Fin dai primi giorni di scuola, con lo scopo dichiarato di conoscersi un po', si può iniziare la compilazione di un documento che contenga alcune caratteristiche riguardanti i numeri personali di ogni bambino. Il documento dovrà avere le principali informazioni che li rappresenta dal punto di vista numerico (il numero di lettere del proprio nome, la data di nascita, il numero degli elementi della famiglia, il numero dei dentini, il numero delle scarpe, l'altezza, il peso, …). Per costruire la carta d'identità numerica si può creare un quaderno ad anelli che crescerà man mano con i bambini. I fogli del quaderno ad anelli si possono numerare scrivendo i numeri a fondo pagina sia in cifre sia in parole.

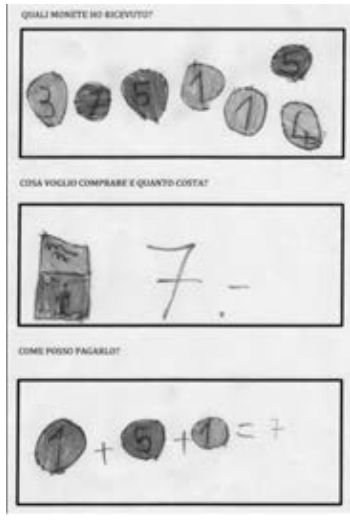


La mia carta d'identità numerica.

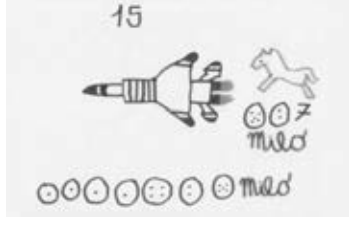
L'attività del mercatino

I bambini giocano spesso al mercato, pagano, danno somme, aggiungono, danno resti, ..., è un'attività che li interessa e coinvolge e che prevede numerose competenze matematiche. Predisporre un mercatino in classe è per noi diventato ormai un «classico» nella scuola dell'infanzia e in prima elementare. Si può far costruire agli allievi monete e banconote di diversi valori numerici, dove sono eventualmente evidenziati in modi diversi i numeri e si preparano oggetti da vendere/acquistare per i quali occorre stabilire i prezzi. Ogni bambino assume un ruolo (a rotazione).

Primo esempio. Si sono scelti 10 oggetti in classe e si sono decisi i loro prezzi tutti assieme. Ogni bambino poteva scegliere uno o più oggetti da comprare in base alle monete ricevute. Nelle monete era rappresentato il numero nella scrittura indo-araba (mese di ottobre). Le richieste erano: disegna le monete ricevute, l'oggetto da comprare e il suo costo e infine come pagarlo.



Secondo esempio. In altre classi la richiesta di rappresentazione di monete necessarie per l'acquisto di oggetti è stata più libera (mese di ottobre). Le monete a disposizione avevano da una parte rappresentato il numero indo-arabo e dall'altro lo stesso numero rappresentato in forma iconica tramite puntini, per permettere così all'allievo di utilizzare la forma ritenuta più congeniale alle sue capacità. Si nota negli esempi seguenti l'alternanza di rappresentazioni scelta dai bambini (indo-araba/iconica) per rappresentare il numero di monete necessarie per acquistare un oggetto.



Attività con i numeri

Sono state diverse le attività con i numeri realizzate dagli AM durante la pratica professionale che hanno appassionato i bambini. Riportiamo di seguito alcune immagini.

Bambini che modellano numeri.

Bambini che costruiscono dadi per effettuare diversi giochi.

Immagine del domino per introdurre l'addizione.

Vogliamo concludere questo breve testo con alcune produzioni di bambini che rappresentano senza paura fin dai primi mesi di scuola «grandi» numeri. Riteniamo che questa breve sperimentazione sul campo possa testimoniare come sia possibile, anzi didatticamente e cognitivamente vincente, mettere in atto strategie didattiche sull'aritmetica che prendano in seria considerazione le reali competenze dei bambini su numeri e operazioni, senza costringerli a dover percorrere la strada più tipica e diffusa: una lunga e lenta sequela di banali considerazioni su numeri «piccoli».

Bibliografia

AA. VV. (2004). Le competenze dei bambini di prima elementare: un approccio all'aritmetica. *La matematica e la sua didattica*. 1, 47-95.

Aglì F., Martini A. (1995). Rappresentazione e notazione della quantità in età prescolare. *Età Evolutiva*. 51, 30-43.

Baldisserri F., D'Amore B., Fascinelli E., Fiori M., Gastaldelli B. e Golinelli P. (1993). I palloncini di Greta. *Infanzia*. 1, 31-34. [Questo articolo è stato ristampato su: *La matematica e la sua didattica*. 4, 1993, 444-449].

Briand J. (1999). Contribution à la réorganisation des savoirs prénumériques et numériques. Étude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine prénumérique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 19(1), 41-76.

D'Amore B. (2007). Lo zero, da ostacolo epistemologico a ostacolo didattico. *La matematica e la sua didattica*. 21, 4, 425-454.

Lucangeli D. (2001). Lo sviluppo della conoscenza numerica: le abilità cognitive. In: D'Amore B. (ed.) (2001). *Didattica della matematica e rinnovamento curricolare*. Atti del XV Convegno Nazionale «Incontri con la Matematica», Castel San Pietro, 9-11 novembre 2001. Bologna: Pitagora. 97-106.

Marazzani I. (2001). Diventare grandi insieme alla Matematica. Alcune esperienze nella Scuola dell'Infanzia. In: D'Amore B. (ed.) (2001). *Didattica della Matematica e rinnovamento curricolare*. Atti dell'omonimo Convegno Nazionale XV, Castel San Pietro Terme, 9-11 novembre 2001. Bologna: Pitagora. 146-156.

Marazzani I. (2007) (a cura di). *I numeri grandi*. Trento: Erickson.

Margolinas C. (2008). Organizzazione, spazi, enumerazione: conoscenze nella scuola dell'infanzia. In: D'Amore B., Sbaragli S. (2008). *Didattica della matematica e azioni d'aula*. Atti del convegno Incontri con la matematica. Bologna: Pitagora. 21-26.

Sbaragli S. (1998). Questa volta Greta dovrebbe moltiplicare! Che cosa farà? *Atti del Convegno «Incontri con la Matematica n.12»*. Castel San Pietro Terme (BO), 6-7-8 novembre 1998. Bologna: Pitagora. 99-105.

Teruggi L.A. (2001). Scritture numeriche nella scuola dell'infanzia. In: D'Amore B. (ed.) (2001). *Didattica della matematica e rinnovamento curricolare*. Atti del XV Convegno Nazionale «Incontri con la Matematica», Castel San Pietro, 9-11 novembre 2001. Bologna: Pitagora. 119-130.

5. Senso del numero, stima e controllo dei risultati in studenti di IV media[1]

Diana Cricchio[2]

The aim of this research is to investigate the abilities of estimation and control of reasonableness of results by students of the last year of Middle School in Tessin. Data have been collected through two questionnaires and three objective tests, also with items taken from existing literature for the comparison of results. The collected answers have been analyzed from both quantitative and qualitative point of view (performance and strategies). The obtained results suggest the opportunity of a didactic practice more founded on number sense.

1. Introduzione

Questo lavoro nasce da alcune osservazioni raccolte durante la mia esperienza di insegnamento riguardo all'effettivo grado di familiarità degli studenti con i numeri e con le operazioni, al di là delle loro competenze procedurali. Spesso, infatti, ho potuto constatare negli allievi una certa difficoltà nello stimare grandezze del mondo reale, una scarsa abitudine al calcolo mentale e la mancanza di riflessione critica sui risultati ottenuti.

La lettura degli articoli di Arrigo (2000; 2001; 2009; 2010; 2011) sulle sperimentazioni in corso alla scuola elementare per un «cambiamento epocale» nel calcolo a scuola mi hanno poi ulteriormente convinto dell'importanza del calcolo mentale e della stima, anche in relazione all'uso della calcolatrice. Da qui, la ricerca bibliografica mi ha portato a inquadrare le mie idee iniziali all'interno della tematica del *senso del numero*. Ho dunque svolto un'indagine su un campione di studenti all'ultimo anno della scuola media ticinese per descrivere lo sviluppo di alcune componenti del senso del numero – sia in termini di riuscita che di strategie utilizzate – anche mediante il confronto con alcuni risultati presentati dalla letteratura.

2. Quadro teorico

2.1. Il senso del numero

L'espressione *number sense* si è diffusa dagli anni '80 per indicare l'insieme di conoscenze e abilità relative ai numeri e alle operazioni che permettono a un individuo di gestire in modo flessibile ed efficace svariate situazioni matematiche, anche in contesti della vita quotidiana (Mclntosh, Reys, & Reys, 1992).

1. Sintesi del lavoro di diploma del Master of arts SUPSI per l'insegnamento della matematica nella scuola media, anno accademico 2010/2011. Relatore: Silvia Sbaragli.
2. Insegnante alla Scuola media di Viganello.

Il senso del numero viene descritto tramite alcuni *indicatori*, riorganizzati in tre aree da McIntosh, Reys e Reys (1992). L'area «*Number*» comprende la gestione delle rappresentazioni equivalenti dei numeri e la percezione della loro grandezza relativa ed assoluta; tale percezione si sviluppa con la progressiva costruzione di un sistema di referenti mentali o *benchmarks* (numerici o fisici) a cui vengono «ancorati» i numeri in gioco, per esempio nel calcolo mentale o nella stima di un risultato. L'area «*Operations*» riguarda la comprensione dell'effetto delle operazioni sui vari tipi di numeri, delle relazioni tra di esse e delle loro proprietà. L'area «*Computational settings*» si riferisce all'applicazione delle prime due aree al *problem solving*, dove si richiede tra l'altro un'attitudine alla revisione dei dati e dei risultati di un problema per verificarne il senso.

2.2. La stima ed il calcolo mentale

Una delle componenti del senso del numero è la stima. Pellegrino (1999) la definisce come l'individuazione del valore indicativo di una quantità o di una grandezza incognita. La stima può essere *diretta* o *indiretta* (Pellegrino, 1999), *computazionale*, *di numerosità* o *di misurazione* (Segovia & Castro, 2009). Reys (1986) definisce la stima computazionale come il processo di trasformazione di un problema dalla sua forma originale in una nuova forma che dia approssimativamente una risposta equivalente e che sia facilmente risolvibile mediante calcolo mentale; per questo si parla anche di *calcolo mentale approssimato*.

Il calcolo mentale, a sua volta, comprende tutti i calcoli eseguiti senza il ricorso a dispositivi tecnologici, in base alla conoscenza delle proprietà dei numeri e delle operazioni. A differenza del calcolo scritto tradizionale in colonna, il calcolo mentale si può svolgere in riga o comunque secondo algoritmi «spontanei», così come proposto dalle sperimentazioni di Arrigo (2010, 2011) e dal programma *DIMAT – Differenziare in matematica* (Dellagana & Losa, 2002), diffuso nelle scuole elementari del Canton Ticino. Il calcolo mentale coinvolge apprendimenti superiori di tipo convergente, come l'analisi e la sintesi, ma anche di tipo divergente, quali intuizione ed invenzione (Arrigo, 2000). Inoltre, rispetto agli algoritmi tradizionali che trattano le cifre da destra a sinistra, secondo Dellagana e Losa (2002) il calcolo mentale rafforza la padronanza del valore posizionale delle cifre, «essenziale ai fini del mantenimento del senso del numero, della stima e del controllo delle soluzioni».

2.3. Il controllo della ragionevolezza dei risultati

L'individuo che ha sviluppato un buon senso del numero dimostra un'attitudine metacognitiva al controllo della plausibilità dei risultati rispetto una stima iniziale (Alajmi & Reys, 2010). Per esempio, secondo Arrigo (2001), la previsione del risultato mediante il calcolo mentale è l'unico modo per individuare eventuali errori nella fase di immissione dei dati durante il calcolo automatizzato.

Nel *problem solving*, inoltre, il processo di stima e controllo dei risultati può educare gli studenti a non trascurare l'interpretazione e la validazione dei risultati ottenuti, alla luce del problema di partenza.

Il controllo della ragionevolezza di un risultato si collega inoltre alla cosiddetta *clausola della delega formale* (D'Amore, 2002): una volta scelte le operazioni

e i dati da usare, lo studente non si prende carico di riflettere sul senso del risultato ottenuto, tanto più se esso è stato fornito dalla calcolatrice. Celebre al riguardo è il «problema del bus» proposto da Schoenfeld (1987, citato da D'Amore, 2002).

2.4. Linee di ricerca e aggiornamento dei curriculum di matematica

Le ricerche internazionali sul senso del numero hanno indirizzato l'aggiornamento dei curriculum scolastici di matematica, come nel caso dei *Principles and Standards for School Mathematics* dell'americano *National Council of Teachers of Mathematics*, o nel quadro di riferimento del *Programme for International Student Assessment* (PISA) dell'OECD (*Organization for Economic Co-operation and Development*).

Per quanto riguarda il Canton Ticino, il Piano di formazione di matematica della scuola media valorizza il calcolo mentale, la stima ed il controllo dei risultati, in termini sia di obiettivi che di competenze, per tutte le classi e per entrambi i livelli – base e attitudinale – (Gruppo disciplinare di matematica, 2007). Inoltre, in riferimento alla Mappa formativa di matematica, la stima ricopre un importante ruolo nella formazione culturale, personale e sociale degli allievi, a livello di sapere, saper fare e saper essere.

Infatti la stima è un utile strumento in situazioni di vita quotidiana, affina il senso critico sia nell'interpretazione di informazioni numeriche sia nel calcolo automatizzato, valorizza la natura approssimata della matematica accanto a quella esatta (Segovia e Castro, 2009), promuove la ricerca di strategie personali in un'ottica costruttivista, coinvolge fattori piscologici-affettivi quali la confidenza nelle proprie capacità e la tolleranza all'errore (Pellegrino, 1999; Segovia & Castro, 2009).

3. Domande di ricerca

D1. Quali sono le convinzioni degli studenti ticinesi di IV media sulla stima?
D2. Quali sono le loro preferenze nei metodi di calcolo e di controllo dei risultati?
D3. Qual è il loro livello di *performance* nella stima e nel controllo della ragionevolezza dei risultati?
D4. Quali strategie mettono in atto al riguardo?
D5. Relativamente ai punti precedenti, esistono differenze tra allievi del corso base e del corso attitudinale?

4. Ipotesi di ricerca

I1. Gli studenti potrebbero riferire esempi di stima in contesti di vita quotidiana, mentre potrebbero essere scarsamente consapevoli della sua utilità in matematica.
I2. Gli allievi sono fortemente dipendenti dalla calcolatrice e dimostrano una scarsa attitudine metacognitiva al controllo dei risultati; tale con-

trollo si riduce generalmente all'esecuzione ripetuta degli stessi calcoli con la calcolatrice.

I3. Considerando la scarsa conoscenza da parte degli allievi di *benchmarks* del mondo reale e la loro dipendenza dalla calcolatrice, si attendono livelli di riuscita non soddisfacenti nella stima e nel controllo della ragionevolezza dei risultati.

I4. Gli studenti si affidano spesso a strategie procedurali e più raramente a strategie basate sul senso del numero. Privati della calcolatrice, gli studenti scelgono il calcolo in colonna, ricorrendo raramente a strategie personali.

I5. Gli allievi del corso attitudinale sono aiutati nel calcolo da una più profonda conoscenza formale dei numeri e delle operazioni, ma non è detto che ciò si traduca operativamente in un maggiore sviluppo del senso del numero.

5. Metodologia

È stata svolta una ricerca di tipo osservativo quantitativo nella forma di indagine.

La ricerca è stata condotta presso la scuola media di Cadenazzo, in due classi quarte, una di corso attitudinale ed una di corso base, per un totale di 26 allievi; anche altri 20 allievi di altre due classi di corso base hanno partecipato alle prime due rilevazioni.

Sono stati preparati cinque strumenti di rilevazione strutturati che hanno permesso un'analisi quantitativa dei dati: un questionario sulle convinzioni degli allievi riguardo alla stima, tre prove oggettive (rispettivamente sulla stima di numerosità e di misurazione, sulla stima computazionale e sull'individuazione di risultati non ragionevoli) e un questionario sulle abitudini nei metodi di calcolo e di controllo dei risultati.

Per poter disporre di termini di confronto per i risultati, sono stati proposti quesiti tratti in parte da ricerche precedenti (Alajmi & Reys, 2010; Pellegrino, 2009; Reys, 1986; Reys & Young, 1998; Reys et al., 1999; Segovia & Castro, 2009). Spesso è stata richiesta anche l'esplicitazione della strategia messa in atto, per una prima interpretazione qualitativa dei risultati, che in alcuni casi è stata poi approfondita tramite brevi interviste.

Riguardo alle modalità di somministrazione, sono stati concessi dieci minuti per la compilazione di ciascun questionario e in media due minuti per ogni quesito per ciascuna prova oggettiva, in modo da scoraggiare le procedure di calcolo esatto o di conteggio, in favore delle strategie di stima, così come proposto ad esempio da Alajmi e Reys (2010). Nelle prove oggettive non è stato mai concesso l'utilizzo della calcolatrice.

Per le analisi quantitative, sono state dapprima escluse le risposte mancanti, quelle non valide (per esempio in caso di mancanza dell'unità di misura) e quelle sovrastimate o sottostimate di almeno un ordine di grandezza rispetto al valore vero (*outliers*). L'accuratezza delle stime è stata calcolata come errore percentuale rispetto al valore vero. Per ogni quesito a risposta multipla è stata ricavata la riuscita percentuale, come rapporto tra il numero di risposte corrette e il numero di allievi.

Le strategie degli allievi sono state infine classificate e conteggiate in categorie, in relazione a quelle proposte dalla letteratura (Reys & Yang, 1998; Segovia & Castro, 2009).

6. Analisi e interpretazione dei risultati

6.1. Questionario sulla stima

Per sondare le convinzioni degli allievi sulla stima, sono state poste le tre seguenti domande aperte:

a) Secondo te, che cosa significa «effettuare una stima»?
b) In quali circostanze nella vita quotidiana può essere utile effettuare una stima?
c) In quali occasioni a scuola può essere utile effettuare una stima?

In base alle risposte ottenute si è operata una classificazione in 8 categorie – indipendente dai quesiti – con le percentuali di occorrenza riportate nella Tabella 1.

Categorie	Quesiti	% tot.	% att.	% base
Natura della stima	a	12,1	20,0	8,7
Stima di misurazione	a, b	16,5	10,9	18,9
Stima computazionale	a, c	14,8	10,9	16,5
Esempi nella vita quotidiana	b	23,1	21,8	25,2
Materie scolastiche	c	4,4	1,8	5,5
Nessuna utilità	b, c	2,2	3,6	1,6
Varie	b, c	6,0	14,5	2,4
Risposte mancanti o non pertinenti	a, b, c	19,8	16,4	21,3

Tabella 1. Classificazione e quantificazione delle risposte relativamente al corso attitudinale (55 risposte), al corso base (127) e al totale di risposte (182); sono anche indicati i quesiti a cui si riferiscono le risposte più significative.

Circa un quarto delle risposte per entrambi i corsi attitudinale e base riporta esempi di utilizzo della stima in situazioni quotidiane principalmente di compravendita e di contabilità. Appena il 4% di risposte sul totale, invece, si riferisce esplicitamente a materie scolastiche (matematica, scienze e tecnica).

Nella categoria «Natura della stima», gli studenti parlano di approssimazione anche «a occhio» di misure o calcoli, di ipotesi sul valore di una grandezza e di opinione soggettiva, in contrapposizione ai concetti di precisione e di esattezza.

Le categorie «Stima computazionale» e «Stima di misurazione» risultano sostanzialmente equivalenti in termini di occorrenze, con circa il 15 % sul totale per ciascuna categoria.

La categoria «Stima computazionale» include vari riferimenti al calcolo approssimato. Alcuni allievi parlano di calcoli «veloci», «semplici», mentali. In 5 risposte sulle 27 di questa categoria, invece, emerge una netta contrapposizione tra *stimare* e *calcolare*, che rivela una misconcezione per cui il calcolo vero e proprio è solo quello esatto:

«Vuol dire provare a trovare il risultato senza calcolare.» (C., corso base)

«A scuola la stima la si effettua quando si ha un calcolo e […] lo si risolve ma dandogli solo il risultato.» (T., corso base)

Secondo altri quattro studenti, poi, il ricorso alla stima corrisponde necessariamente all'impossibilità di conoscere il risultato esatto.

Solo altri 4 allievi sui 46 dell'intero campione sono invece consapevoli dell'utilità della stima come strumento di controllo dei risultati ottenuti con il calcolo esatto, come in questo caso:

«Una stima è un calcolo fatto molto velocemente, approssimato, si fa per vedere se il calcolo o il problema che si sta per fare è più o meno giusto.» (C., corso attitudinale)

In particolare, un'allieva del corso base si riferisce proprio alle esperienze svolte alle scuole elementari con DIMAT:

«Stimare l'ho fatto alle elementari. Prima di fare il calcolo si fa la stima, sarebbe un po' vedendo il calcolo quale risultato ti aspetti e poi facendo il calcolo vediamo se la nostra stima si avvicina al risultato.» (A., corso base)

Per quanto riguarda la stima di misurazione, gli studenti riportano esempi di stima di lunghezza, peso e capacità. Emerge inoltre la consapevolezza dell'utilità della stima di misurazione in caso di impossibilità a misurare:

«Soprattutto nel lavoro è molto utile fare una stima per esempio se sei un falegname e non hai le misure si fa una stima e poi si vede.» (C., corso base)

Da notare che gli allievi hanno fatto fondamentalmente riferimento alla stima di misurazione in contesti di vita quotidiana (quesito *b*), mentre la stima computazionale viene maggiormente associata ad attività scolastiche (quesito *c*).

Solo tre allievi ritengono inutile la stima rispetto al calcolo o alla misurazione esatti. Tuttavia le loro risposte rivelano una convinzione molto netta, oltre ad una certa influenza del contratto didattico:

«A scuola non ha nessuna utilità, a meno che non ti venga richiesto esplicitamente, in un esercizio o in una verifica di matematica o di un'altra materia, di fare una stima.» (A., corso attitudinale)

«Secondo me non è utile perché si deve calcolare e non stimare: nei test non puoi stimare!» (R., corso attitudinale)

«Beh trovo che fare una stima non è molto utile, ti fa solo perdere tempo quando puoi subito calcolare o misurare, ecc…» (A., corso base)

Prova n. 1

Stima di numerosità

Tra i risultati più interessanti, vi sono quelli relativi al quesito in cui si richiedeva la stima delle persone presenti in una tribuna di uno stadio riprodotto in una foto. Circa il 35% delle risposte sul totale non rivela alcun ragionamento cardinale. In poco meno del 40% dei casi, gli allievi del corso attitudinale hanno effettuato una valutazione «a occhio». Nessuno di loro ha fatto riferimento alla propria esperienza personale, a differenza che nel corso base, dove un quarto delle risposte propone un confronto con uno stadio conosciuto o con una sua parte. Tuttavia, l'utilizzo di *benchmark*

reali non ha garantito una buona riuscita nella stima, specie se non accompagnato da una scomposizione della figura. A questo proposito, solo il 13% di tutti gli allievi ha sfruttato la ben visibile suddivisione dell'immagine in tre fasce; per quanto riguarda il numero di persone in una singola fascia, alcuni allievi lo hanno ricavato per via computazionale, mentre altri hanno effettuato una stima diretta.

Stima di misurazione

La riuscita nella stima diretta è soddisfacente in entrambi i corsi nel caso di lunghezze (a parte quelle del micro-spazio) e per il peso di oggetti quotidiani. Per area, volume e capacità, si osserva una riuscita decisamente maggiore -anche se non sempre soddisfacente- per il corso attitudinale.

Nelle stime indirette emerge una mancanza generalizzata di strategie, che si accompagna a uno scarso sviluppo del sistema di *benchmark* fisici.

Per esempio, nel quesito che richiedeva la stima dell'altezza di un grattacielo riprodotto in una foto, si è ottenuta una riuscita di poco più del 20% sia nel corso attitudinale che come media sui corsi base. Il 15% di risposte non presenta alcuna giustificazione e da circa il 46% delle risposte del corso attitudinale non emerge alcun ragionamento cardinale. Circa il 34% di tutti gli allievi si è riferito a *benchmark* reali (grattacieli famosi o edifici locali conosciuti) o ha operato un confronto con altri elementi visibili nella foto. In appena il 20% dei casi si riscontra una strategia di iterazione di una parte nell'intero edificio, come in questo caso:

«Ho contato i piani (circa 104), poi ho moltiplicato per 3 che è circa l'altezza di un piano. (C., corso base; risposta: 312 m; valore vero: 344 m)».

Il quesito più problematico si è rivelato quello tratto da una delle unità liberate dal test PISA, in cui si richiedeva la stima dell'area della superficie dell'Antartide a partire da una carta geografica. Nella Tabella 2 sono riportate le percentuali di risposte con punteggio intero, parziale e nullo (assegnato secondo i criteri di correzione PISA in base alla correttezza dell'ordine di grandezza della stima e alla pertinenza della strategia utilizzata); è presentato inoltre un confronto con i risultati rilevati per lo stesso item in Ticino nel test PISA dell'anno 2000 (relativi a 134 risposte).

	Corso attitudinale	**Corso base**	**Media TI PISA 2000**
Punteggio intero	7,7	0,0	23,9
Punteggio parziale	53,8	31,5	49,3
Nessun punteggio	38,5	62,9	26,9
Risposta mancante	0,0	19,1	n. d.

Tabella 2. Percentuale di punteggi attribuiti alle risposte rilevate nei due corsi e nel campione ticinese del test PISA 2000.

Solo due allievi (uno del corso attitudinale e uno del corso base che ha però frequentato la terza attitudinale) sono giunti a stime nell'ordine del milione di chilometri quadrati sfruttando strategie efficaci di scomposizione, come quella riportata in figura.

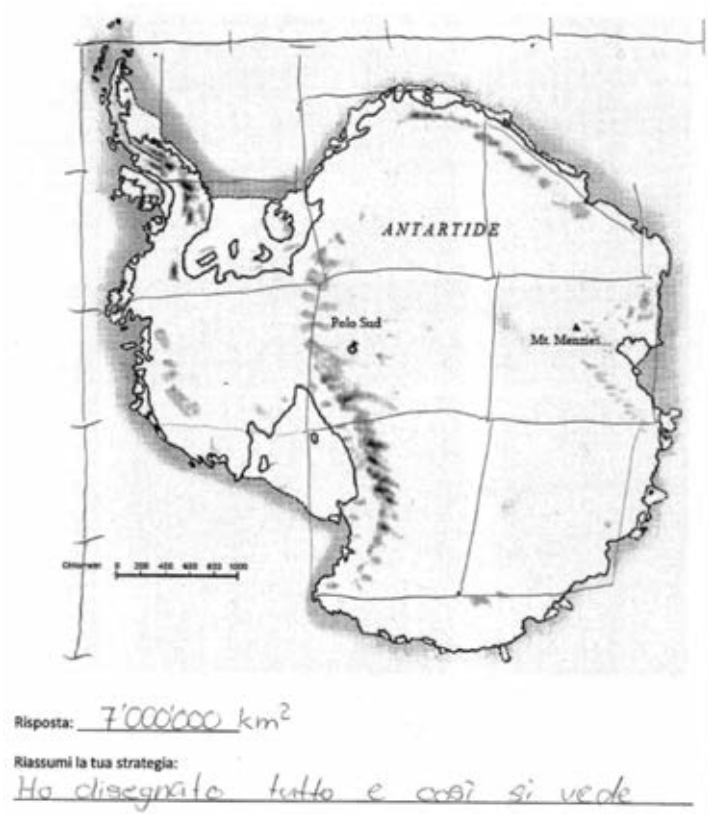


Figura 1. N., corso base (proveniente dal corso attitudinale).

Il 36% delle risposte del corso base non presenta alcuna giustificazione ed un quarto delle risposte totali indica l'assenza di ragionamento cardinale. Circa il 20% delle risposte per entrambi i corsi, infine, è caratterizzato da unità di misura errata, generalmente di lunghezza, a conferma di una certa confusione tra i concetti di perimetro e di area.

Prova n. 2: stima computazionale

Mediante otto quesiti a scelta multipla o a risposta breve, la prova n. 2 indaga l'uso di *benchmark* numerici nel calcolo approssimato, il riconoscimento dell'ordine di grandezza e la consapevolezza dell'effetto delle operazioni sui numeri.

Nei quesiti tratti da ricerche precedenti, i risultati rilevati sono consistenti con quelli internazionali, o addirittura migliori, specie per il corso attitudinale. Qui, rispetto al corso base, gli allievi dimostrano una migliore comprensione dell'effetto delle operazioni sui numeri (per esempio nel caso della moltiplicazione per un numero minore di 0,5) ed un uso più frequente di *benchmarks* numerici (tra cui 0,5 = ?).

Gli item più problematici si sono rivelati quelli sul calcolo approssimato con frazioni, riportati di seguito.

1. Senza calcolare il risultato esatto, qual è la stima migliore per $\frac{12}{13}+\frac{7}{8}$?

a) 1 b) 2 c) 19 d) 21 e) Non so

Spiega perché _____

1. Senza calcolare il risultato esatto, quale fra le seguenti operazioni dà un risultato maggiore di 1?

a) $\frac{2}{5}+\frac{3}{7}$ b) $\frac{1}{2}+\frac{4}{9}$ c) $\frac{2}{8}+\frac{2}{11}$ d) $\frac{4}{7}+\frac{1}{2}$

Spiega perché _____

La riuscita è scesa sotto il 60% per il corso attitudinale, con una presenza significativa di strategie procedurali non sempre efficaci e addirittura risulta scarsa per il corso base (con neanche un terzo di risposte corrette), dove il numero elevato di risposte errate prive di giustificazione o mancanti segnala un'assenza generalizzata di strategie. Nell'item n. 1, solamente tre allievi hanno utilizzato il *benchmark* 1; nel corso attitudinale, ben 6 dei 12 studenti hanno fatto ricorso all'algoritmo dell'addizione di frazioni, ma con esito negativo in metà dei casi:

«Non trovo il denominatore comune» (C.).

«Perché devo trovare il mcm e diventa troppo grande» (T.).

Relativamente all'item n. 2, nel corso attitudinale un terzo degli allievi ha usato opportunamente il *benchmark* ?, mentre un altro terzo ha fatto ricorso alle procedure del calcolo scritto, ma senza successo; nel corso base, invece, la mancanza di strategie alternative a quelle procedurali non padroneggiate con sicurezza emerge con evidenza dalle parole di un'alunna:

«Sono andata a caso perché non mi ricordo più come si fanno questi calcoli» (A.).

Un altro quesito richiedeva la stima dei 23/45 di 720: anche in questo caso il *benchmark* ? è stato utilizzato da più della metà degli alunni di corso attitudinale, ma solo da due del corso base.

Anche negli item sulle percentuali si registrano strategie inefficaci di tipo procedurale o basate sulla forma piuttosto che sul senso dei numeri in gioco. Per esempio, nella stima del 9,2% di 58'680 Fr, solamente cinque allievi hanno considerato la decima parte dell'intero. In entrambi i corsi si registrano inoltre varie risposte procedurali, come nel caso riportato in figura:

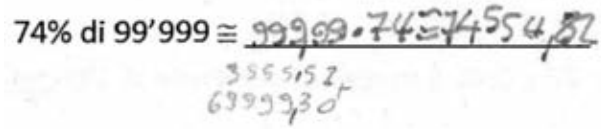


Figura 2. N., corso base.

Per lo stesso quesito, sono anche emerse numerose risposte legate più alla forma che al senso dei numeri in gioco, e che per questo non sempre costituiscono stime ragionevoli, analogamente a quanto osservato da Alajmi e Reys (2010): «73’999» (risposta di tre studenti, di cui uno di corso base), «77’777» e «78’888» per il corso attitudinale, «699,999», «33’333», «999» e «99» per il corso base.

Prova n. 3: controllo della ragionevolezza dei risultati

Questa prova, costituita da otto quesiti a risposta aperta, è centrata sulla tendenza degli allievi di individuare risposte non ragionevoli, riconducibili ad alcune categorie di errori, quali errori di digitazione o lettura nell’uso della calcolatrice, errori di tipo concettuale o di dominio numerico. In figura 3 sono riportate a titolo di esempio le risposte di un’allieva del corso attitudinale a due quesiti in cui si richiedeva di correggere e commentare alcuni calcoli errati.

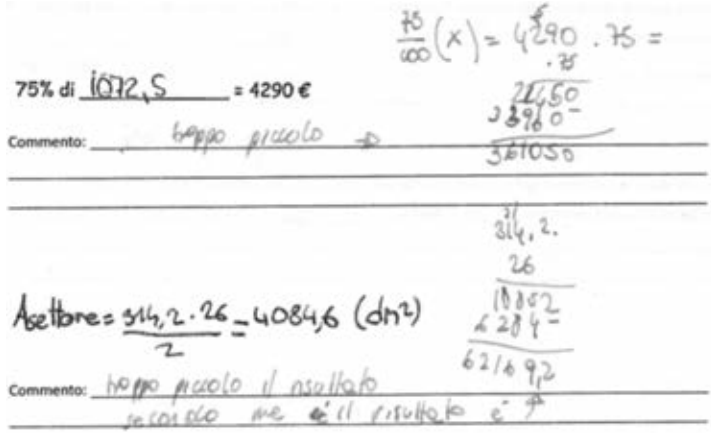


Figura 3. C., corso attitudinale.

Dalla Tabella 3 si nota che, nel corso attitudinale, le strategie basate sul senso del numero sono più frequenti o sono almeno confrontabili, in termini di occorrenza, con quelle procedurali; eppure esse non risultano sempre efficaci per l’individuazione dei risultati irragionevoli, anche a causa di errori commessi nella stima computazionale. Del resto, Alajmi e Reys (2010) sottolineano come lo sviluppo delle abilità nella stima computazionale sia necessario per migliorare quelle nel controllo della ragionevolezza dei risultati. D’altro lato, anche il calcolo algoritmico non si è rivelato sempre efficace, né esente da errori, come nelle risposte riportate nella figura 3.

Nell’item in cui si richiedeva di controllare il calcolo

$$A_{\text{settore}} = \frac{314{,}2 \cdot 26}{2} = 4084{,}6\ \left(\text{dm}^2\right)$$

due allievi del corso attitudinale hanno fatto riferimento alla formula per il calcolo dell’area di un settore circolare, tentando di affidarsi a conoscenze di tipo formale, piuttosto che a strategie personali più efficaci.

«Non mi ricordo come si calcola l'area di un settore e quindi non posso commentare, ma mi sembra che ci sia di mezzo un 360°.» (N., corso attitudinale)

Nel corso base le strategie centrate sul senso del numero prevalgono rispetto a quelle procedurali solo negli item in cui gli allievi hanno potuto ragionare sull'ordine di grandezza e sul dominio numerico dei risultati, senza dover ricorrere a calcoli approssimati. Per il resto, si registrano numerose strategie non valide o procedurali, generalmente non efficaci.

		Corso attitudinale		Corso base	
Item	**Strategie**	**Occorrenza**	**Validità**	**Occorrenza**	**Validità**
1	senso del numero	83,3	75,0	69,2	69,2
	procedurali / formali	0,0	0,0	0,0	0,0
	nessuna strategia	16,7	0,0	30,8	0,0
2	senso del numero	83,3	58,3	15,4	15,4
	procedurali / formali	8,3	0,0	7,7	7,7
	nessuna strategia	8,3	0,0	76,9	0,0
3	senso del numero	58,3	50,0	30,8	30,8
	procedurali / formali	41,7	33,3	15,4	7,7
	nessuna strategia	0,0	0,0	53,8	7,7
4	senso del numero	41,7	8,3	7,7	0,0
	procedurali / formali	41,7	8,3	15,4	0,0
	nessuna strategia	16,7	0,0	76,9	0,0
5	senso del numero	75,0	66,7	76,9	38,5
	procedurali / formali	8,3	0,0	15,4	0,0
	nessuna strategia	16,7	0,0	7,7	0,0
6	senso del numero	75,0	41,7	23,1	15,4
	procedurali / formali	25,0	25,0	53,8	15,4
	nessuna strategia	0,0	0,0	23,1	0,0
7	senso del numero	66,7	66,7	23,1	23,1
	procedurali / formali	8,3	8,3	30,8	7,7
	nessuna strategia	25,0	0,0	46,2	0,0
8	senso del numero	41,7	16,7	30,8	23,1
	procedurali / formali	50,0	50,0	15,4	0,0
	non valide	8,3	8,3	53,8	15,4

Tabella 3. Percentuali di occorrenza e validità delle strategie rilevate per gli item n. 1–8 (sono state considerate valide le strategie che hanno portato all'individuazione dei risultati irragionevoli e privi di errori di calcolo).

6.2. Questionario sui metodi di calcolo e di controllo dei risultati

Il questionario finale analizza le abitudini di calcolo degli allievi (metodi di calcolo più usati, occasioni di ricorso al calcolo mentale, rapporto con la calcolatrice) ed aspetti metacognitivi (scelta del metodo di calcolo più adatto in base al contesto, metodi di controllo dei risultati). La prova è costituita da sette quesiti a scala di frequenza, a ordinamento o a scelta multipla.

Per quanto riguarda le abitudini di calcolo degli studenti, si riscontra un andamento molto similare nei due corsi (Tabelle 3 e 4): come prevedibile, tutti gli allievi ricorrono più di frequente alla calcolatrice e per la maggioranza di essi la seconda alternativa è rappresentata dal calcolo mentale. Il calcolo in colonna è utilizzato con frequenza molto diversa (dal 2° al 5° posto) dagli alunni del corso base, mentre tre quarti degli allievi del corso attitudinale lo hanno relegato alla quarta posizione; eppure, nelle prove oggettive, il ricorso agli algoritmi in colonna è stato davvero notevole.

	1°	**2°**	**3°**	**4°**	**5°**
Calcolatrice	100,0	0,0	0,0	0,0	0
Calcolo mentale	0,0	83,3	16,7	0,0	0
Calcolo in colonna	0,0	0,0	16,7	75,0	8
Calcolo scritto non in colonna	0,0	16,7	66,7	16,7	0
Foglio elettronico	0,0	0,0	0,0	8,3	92

Tabella 3. Preferenze sui metodi di calcolo per il corso attitudinale (percentuali sul numero di allievi).

	1°	**2°**	**3°**	**4°**	**5°**
Calcolatrice	100,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Calcolo mentale	7,7	69,2	15,4	7,7	0,0
Calcolo in colonna	0,0	15,4	30,8	30,8	23,1
Calcolo scritto non in colonna	0,0	30,8	38,5	30,8	0,0
Foglio elettronico	0,0	0,0	7,7	23,1	69,2

Tabella 4. Preferenze sui metodi di calcolo per il corso base (percentuali sul numero di allievi).

Come prevedibile, in entrambi i corsi il calcolo mentale risulta utilizzato più spesso per le tabelline e per le operazioni con i numeri interi, mentre la frequenza si riduce per i numeri in forma decimale, frazionaria e percentuale (v. Tabelle 5 e 6). Per l'utilizzo nella stima e nel controllo dei risultati, invece, non emerge una tendenza particolare (segnale, questo, di una certa confusione negli allievi).

Rispetto ai risultati ottenuti con la calcolatrice, in entrambi i corsi la maggior parte degli allievi è consapevole della possibilità di commettere errori di digitazione e/o ritiene opportuno un controllo, ripetendo il calcolo o effettuandolo mentalmente.

	Sempre	**Spesso**	**A volte**	**Raramente**	**Mai**
Tabelline	75,0	16,7	8,3	0,0	0,0
Numeri interi	25,0	58,3	16,7	0,0	0,0
Numeri decimali	0,0	8,3	83,3	0,0	0,0
Frazioni	0,0	25,0	41,7	33,3	0,0
Percentuali	0,0	0,0	41,7	16,7	41,7
Stima	41,7	8,3	16,7	25,0	8,3
Controllo	0,0	25,0	33,3	16,7	25,0

Tabella 5. Frequenze di ricorso al calcolo mentale per il corso attitudinale (percentuali sul numero di allievi).

	Sempre	Spesso	A volte	Raramente	Mai
Tabelline	30,8	30,8	15,4	7,7	15,4
Numeri interi	15,4	30,8	30,8	23,1	0,0
Numeri decimali	0,0	15,4	38,5	30,8	15,4
Frazioni	15,4	15,4	38,5	30,8	0,0
Percentuali	0,0	23,1	23,1	38,5	15,4
Stima	15,4	15,4	30,8	23,1	15,4
Controllo	15,4	23,1	23,1	7,7	30,8

Tabella 6. Frequenze di ricorso al calcolo mentale per il corso base (percentuali sul numero di allievi).

Buona parte degli allievi del corso base, tuttavia, dichiara di non procedere sistematicamente al controllo dei risultati (risposta «a volte» per il 62%), mentre nel corso attitudinale la metà degli studenti afferma di effettuarlo spesso.

Per quanto riguarda le preferenze nei metodi di controllo, la maggior parte degli allievi del corso attitudinale controlla i risultati ricalcolandoli con lo stesso metodo iniziale (cioè con la calcolatrice), oppure con due metodi diversi o tramite prova delle operazioni, mentre utilizza raramente il confronto con la stima iniziale o con *benchmark* reali. Secondo McIntosh, Reys e Reys (1992), la corrispondenza tra controllo e ripetizione del calcolo segnala la predominanza dell'apprendimento procedurale rispetto allo sviluppo di strategie personali basate sul senso del numero. Nel corso base il ricorso alla prova delle operazioni è meno marcato, mentre il confronto con *benchmark* reali è maggiormente considerato: il riferimento al mondo reale appare più rassicurante delle procedure formali, anche se non risulta operativamente efficace, a causa di una scarsa conoscenza da parte degli allievi dei valori tipici della realtà, come già emerso nella prova n. 1.

La maggioranza degli studenti di corso attitudinale e circa metà della classe di corso base, infine, appaiono comunque consapevoli dell'utilità della stima nei calcoli, mentre i restanti allievi confondono il controllo mediante stima computazionale con la verifica dell'esattezza del risultato.

7. Risposte alle domande di ricerca

R1. La stima è ritenuta utile da circa un quarto degli allievi in alcune situazioni della vita quotidiana, mentre non risulta particolarmente familiare nel contesto scolastico, a conferma della nostra ipotesi iniziale. Solo il 30% dell'intero campione si riferisce esplicitamente alla stima di misurazione (per lo più di lunghezze) o a quella computazionale. Come atteso, sono minoritari i riferimenti alla stima come strumento di controllo dei risultati.

R2. Non sorprende che gli studenti preferiscano utilizzare la calcolatrice. La maggior parte di essi è consapevole della possibilità di commettere errori di digitazione, ma manca un'abitudine al controllo sistematico dei risultati, che rimane in ogni caso di tipo procedurale (ripetizione del calcolo, prova delle operazioni), così come ipotizzato inizialmente. Il cal-

colo mentale costituisce la principale alternativa alla calcolatrice, ma per lo più in caso di numeri interi. Gli algoritmi del calcolo scritto non sono particolarmente apprezzati né sempre eseguiti in modo corretto, eppure vengono spesso utilizzati in mancanza della calcolatrice, più di quanto previsto.

R3. Sia nella stima di numerosità che in quella di misurazione, appare poco sviluppato un sistema di *benchmark* per le altre grandezze al di là della lunghezza e i risultati sono insoddisfacenti nel caso di stime indirette. Nella stima computazionale emergono difficoltà generalizzate nel caso di frazioni, con risultati comparabili a quelli internazionali; per il resto i risultati sono abbastanza soddisfacenti, ma solo per il corso attitudinale. Anche nel controllo della ragionevolezza dei risultati, l'esito è più positivo di quello ipotizzato, almeno per il corso attitudinale; le *performance* sono però inferiori – in entrambi i corsi – quando il controllo si basa sul calcolo approssimato.

R4. Nelle stime indirette di numerosità e di misurazione, in entrambi i corsi sono pochi gli allievi che ricorrono a tecniche basate sull'analisi del problema e sulla sua sintesi mediante calcolo approssimato. Per quanto riguarda la stima computazionale (anche finalizzata al controllo dei risultati), nel corso attitudinale si nota un ricorso più frequente a *benchmark* numerici e una maggiore consapevolezza dell'effetto delle operazioni sui numeri. In entrambi i corsi, comunque, si registrano anche strategie inefficaci di tipo procedurale o basate sulla forma piuttosto che sul senso dei numeri in gioco.

R5. In relazione ai primi due punti, non emergono differenze significative tra i due corsi. Per quanto riguarda gli altri due punti, invece, le differenze sono più marcate nella stima computazionale.

8. Conclusioni

L'indagine condotta ha fornito una panoramica sul grado di sviluppo di alcune componenti del senso del numero in un campione di studenti ticinesi di IV media, inserendosi in un filone di ricerca attuale a livello internazionale nel campo della didattica della matematica.

Date le dimensioni ridotte del campione analizzato, i risultati ottenuti non sono necessariamente rappresentativi del contesto cantonale. D'altra parte, il numero limitato di allievi coinvolti ha permesso un'analisi sistematica delle strategie utilizzate, che sono risultate qualitativamente corrispondenti a quelle indicate dalla letteratura.

Il lavoro svolto vuole essere un punto di partenza per ulteriori ricerche sulle varie componenti del senso del numero e riflessioni sulle relative implicazioni didattiche.

Alcune delle prove somministrate sono suscettibili di miglioramenti; del resto, viene auspicata una collaborazione internazionale per la costruzione di una vera e propria «*number sense item bank*» (Reys et al., 1999). Sarebbe inoltre interessante valutare l'effetto della contestualizzazione dei quesiti a situazioni extra-scolastiche.

Rimangono poi da indagare, per esempio, la correlazione tra abilità nel calcolo scritto e in quello approssimato, o tra sviluppo del senso del numero e riuscita in matematica. Nel nostro caso, i due allievi del corso base che si sono distinti positivamente nelle prove oggettive sono tra quelli con migliore rendimento in matematica nella loro classe, in linea con le osservazioni di Reys e Yang (1998) e di quelle riportate da Reys et al. (1999), per cui gli studenti con più alte prestazioni in matematica tenderebbero maggiormente all'uso di *benchmarks* numerici rispetto agli alunni di medio livello, più vincolati invece agli apprendimenti procedurali.

Questa conclusione vale per la nostra ricerca anche nel confronto tra corso attitudinale e corso base, anche se non in maniera sistematica. Infatti, anche all'interno del corso attitudinale non mancano strategie procedurali, tra l'altro non sempre corrette né efficaci, mentre nel corso base si assiste piuttosto a una mancanza di strategie. In particolare, per quanto riguarda il calcolo in colonna, la contraddizione emersa in entrambi i corsi tra la fase metacognitiva (questionario finale) e la fase operativa (prove oggettive) rivela da un lato la consapevolezza da parte degli studenti di non padroneggiare con sicurezza gli algoritmi scritti, dall'altro indica agli insegnanti l'opportunità di valorizzare alternative di calcolo più efficaci, in linea con le proposte di Arrigo (2009, 2010, 2011).

Infine, il quadro ottenuto costituisce la premessa a ricerche con intervento da effettuare sul lungo periodo. I due allievi del corso base qui sopra citati hanno riferito di aver svolto attività di calcolo mentale e di stima negli anni scolastici precedenti: ciò fornisce una prima evidenza dell'opportunità di sviluppare percorsi di apprendimento mirati sul senso del numero su tutto l'arco della scuola media, anche in continuità con il precedente ciclo scolastico.

Bibliografia

Alajmi, A. H., & Reys, R. (2010). Examining eighth grade Kuwaiti students' recognition and interpretation of reasonable answers. International Journal of Science and Mathematics Education, 8, 117-139.
Arrigo, G. (2000). Il calcolo a scuola, ovvero: l'inizio di un cambiamento epocale. Bollettino dei docenti di matematica, 40, 57-68.
Arrigo, G. (2001). Il calcolo a scuola (2): l'uso della calcolatrice. Bollettino dei docenti di matematica, 43, 57-63.
Arrigo, G. (2009). Il calcolo a scuola: sperimentazione di un nuovo progetto didattico. Bollettino dei docenti di matematica, 58, 77-92.
Arrigo, G. (2010). Il calcolo a scuola: sperimentazione di un nuovo progetto didattico (2). Bollettino dei docenti di matematica, 60, 83-92.
Arrigo, G. (2011). Sperimentazione sul calcolo numerico. Bollettino dei docenti di matematica, 62, 59-70.
D'Amore, B. (2002). La ricerca in didattica della matematica come epistemologia dell'apprendimento della matematica. Scuola & Città, 4, 56-82.
Dellagana I. e Losa F. (2002). DIMAT – Differenziare in matematica. Bellinzona: Salvioni.
Gruppo disciplinare di matematica. (2007a). Piano di formazione di matematica. Disponibile in: http://www.scuoladecs.ti.ch/scuolamedia/materie/matematica/PFDM%20%2-8Versione%20PdF%2025.10.07%29/PDFM%20_4.10.07_.pdf [27 ottobre 2010].
Mclntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. For the Learning of Mathematics, 12 (3), 2-8.
Pellegrino, C. (1999). Stima e senso del numero. In B. D'Amore & B. Jannamorelli (A cura di), Atti del IV Seminario internazionale di Didattica della Matematica di Sulmona, «Allievo, insegnante sapere: dagli studi teorici alla pratica didattica», 23–24–25 aprile 1999. (p. 145-147). Sulmona: Qualevita.
Reys, B. J. (1986). Teaching computational estimation: concepts and strategies. In H. L. Schoen & M. J. Zweng (Eds.), Estimation and mental computation computation: 1986 Yearbook (p. 31-44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
Reys, R. E., & Yang, D. C. (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth- and eighth-grade students in Taiwan. Journal for Research in Mathematics Education, 29 (2), 225-237.
Reys, R., Reys, B., Emanuelsson, G., Johansson, B., McIntosh, A., & Yang, D. C. (1999). Assessing Number Sense of Students in Australia, Sweden, Taiwan, and the United States. School Science and Mathematics, 99 (2), 61-70.
Segovia, I., & Castro, E. (2009). Computational and measurement estimation: curriculum foundations and research carried out at the University of Granada, Mathematics Didactics Department. Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 7 (1), 499-536.

6. La storia e l'epistemologia: una scelta didattica

Trattazione del concetto di equazione di primo grado attraverso la sua evoluzione storica[1]

Katya Cattaneo Pedrazzini[2]

This analysis investigates, through an accurate epistemological study, the validity of the use of historical elements to introduce an important topic of the maths curriculum such as the equation. The results show that elements of the history of mathematics can facilitate the acquisition of concepts and give the student an example of the evolution of scientific knowledge in the broad conceptual landscape.

1. Introduzione

L'idea alla base di questa ricerca è di introdurre direttamente e attivamente elementi di storia della matematica nelle attività di classe allo scopo di favorire l'apprendimento dei concetti.

In questo lavoro si vuole indagare la possibilità di operare una scelta didattica *attraverso* un approccio storico-epistemologico, per favorire lo sviluppo del concetto di equazione in una terza media, corso base. In particolare si cura il linguaggio algebrico nei suoi aspetti sintattici, semantici e pragmatici. Ci si concentra così sulle operazioni di conversione da un registro semiotico a un altro: dal proposizionale al figurativo, all'algebrico; abilità queste di fondamentale importanza nella risoluzione di una quantità di problemi.

Motivare gli allievi di un corso base non è facile, soprattutto perché spesso l'insuccesso vissuto negli anni di scolarizzazione ha diminuito la loro autostima e il loro modo di vivere la matematica. Introdurre un argomento abbastanza complesso su un terreno adeguatamente preparato, utilizzando una strategia didattica non convenzionale e lontana delle loro aspettative, dovrebbe attivare una serie di meccanismi nuovi e non da ultimo la curiosità.

Una trasposizione didattica dello sviluppo epistemologico del simbolismo algebrico dovrebbe favorire nell'allievo lo sviluppo della visione pragmatista del concetto: il concetto è una costruzione personale che si trasforma in un rapporto istituzionale di condivisione. In questa concezione il sapere matematico abbandona il suo stato di verità sicura, eterna, non modificabile dall'esperienza umana e dominio di poche menti elette.

1. Sintesi del lavoro di diploma del corso complementare di matematica, anno accademico 2010/2011. Relatore: Gianfranco Arrigo.
2. Insegnante alla Scuola media di Lodrino.

2. Quadro teorico

2.1. Premessa

La tematica principale di questo quadro teorico concerne l'aspetto didattico, mentre la parte storica, non essendo l'oggetto diretto della ricerca, è solo accennata. Considerata però la particolare importanza che riveste l'aspetto storico in questo lavoro, si è ritenuto utile sviluppare alcune considerazioni riferite appunto alla storia della matematica in un'apposita sezione degli allegati[3].

2.2. La ricerca in didattica della matematica e l'uso della storia

La ricerca in didattica della matematica ha dedicato notevole spazio a questa tematica, tracciando una panoramica che mostra tutta la complessità della gestione della storia nella didattica.

Pioniere nel sostenere l'uso della storia della matematica nell'insegnamento fu Gino Loira già nel 1899. Molti altri autori (Heppel, 1893 e Klein, 1896, citati in Bagni, Furinghetti e Spagnolo 2003) hanno poi indicato la storia della matematica come un mezzo efficiente da utilizzare in classe; tesi supportata anche dalle teorie del biologo tedesco Ernst Haeckel (1874) secondo il quale, visto che in un certo senso l'ontogenesi ricapitola la filogenesi, le sequenze d'insegnamento della matematica devono seguire lo sviluppo umano della matematica. In un periodo in cui buona parte del movimento culturale italiano è fortemente influenzato dalla necessità di un'assiomatizzazione della matematica, è Federigo Enriques che ripropone l'importanza dell'epistemologia e della storia della matematica. In particolare gli studi di Francesco Speranza sono stati molto importanti come indicatori della relazione che esiste tra epistemologia, storia e didattica.

2.3. Epistemologia e storia della matematica

Per comprendere il legame esistente tra epistemologia e storia della matematica, si può partire dalle considerazioni di Lakatos (citato in D'Amore, 2009): *«La filosofia della scienza senza la storia è vuota, la storia della scienza senza la filosofia della scienza è cieca».* Se si parte da questo presupposto diventa impensabile scindere gli studi di epistemologia della matematica da quelli di storia della matematica. In questo lavoro l'uso che viene fatto del termine «epistemologia», solitamente collegato a due particolari sfumature della riflessione filosofica, è impiegato come sinonimo di «gnoseologia», traduzione di *Erkenntistheorie* e non come sinonimo di «filosofia della scienza», come spesso invece accade nell'uso italiano (Bagni, 2006).

2.4. Storia per la didattica

Attilio Frajese nel 1950 sottolinea: *«Come l'umanità si dice ha dovuto percorrere numerose tappe per giungere al possesso di una dottrina scientifica, attra-*

3. Il materiale allegato al lavoro di diploma è in possesso dell'Autore.

verso errori, deviazioni, scoperte, così nella mente del discente tali tappe devono essere ripercorse, con analoghi errori, analoghe deviazioni, analoghe scoperte.» (Frajese, in Bagni, 2006). D'altra parte le scoperte dell'umanità sono influenzate dal periodo storico, dall'ambiente sociale e dagli «standard considerati importanti». Il problema quindi, come sottolinea Bagni (2006), è che tale ambiente non può essere direttamente visto e correttamente valutato da noi che viviamo nel presente con i nostri criteri e nel nostro particolare contesto socio-culturale. Qui si inseriscono molto bene le considerazioni di Radford, secondo il quale solo la presentazione di elementi storici con riferimenti al contesto socio-culturale offre la possibilità di un approfondimento e induce riflessioni fondamentali sulla genesi di un concetto (Radford, Boero e Vasco, citati in Bagni, 2006).

Il problema diventa chiaro: se da un lato la storia costituisce uno sfondo inevitabile, anche se non unico, per la considerazione di una teoria o addirittura di qualsiasi forma del pensiero umano, d'altro canto bisogna essere molto cauti nel descriverla o nel proporne un'applicazione. Feyerabend (1996, citato in Bagni, 2006) è esplicito a questo proposito: il ricercatore non deve mai cercare di rendere più chiaro un concetto di quanto sia consentito dal materiale, e Bagni aggiunge che proprio il tentativo di una presentazione di elementi storici rischia, se non attentamente curata, di sfociare in una maldestra attuazione che potrebbe portare a pesanti distorsioni.

2.5. Concetto matematico e suo sviluppo storico

La trattazione di un concetto matematico attraverso la sua evoluzione storica è stata una scelta diffusa e, a detta di molti ricercatori, utile: un'ampia documentazione di interventi e suggerimenti è raccolta in Fauvel e Maanen (2000), nonché in D'Amore e Speranza (1989, 1992, 1995). Tuttavia, come sottolinea Bagni (2006), la presentazione di un contenuto matematico attraverso la sua evoluzione storica richiede l'assunzione di importanti posizioni epistemologiche. Innanzitutto vi è un problema legato allo sviluppo storico del sapere, ovvero alla ricomparsa nei processi attuali di apprendimento di uno stesso ostacolo epistemologico manifestatosi in un periodo storico. Poi un problema pedagogico legato alla trasposizione didattica; ciò implica che l'allievo apprenda affrontando un problema significativo, senza però interagire con il contesto (secondo il modello di Brousseau). E infine un problema di tipo epistemologico riferito al ruolo della storia nella nostra comprensione dello sviluppo del sapere, l'influenza dell'ambiente sociale e delle istituzioni culturali. Questi tre aspetti coesistono e non possono pertanto essere considerati indipendenti l'uno dall'altro: come sostiene Chevallard ogni attività didattica si basa su particolari assunzioni epistemologiche riguardanti lo sviluppo storico del sapere, perché ogni *Transposition didactique* presuppone una scelta teorica della conoscenza che a sua volta è sempre relativa a un quadro teorico, in chiave epistemologica.

Il problema epistemologico riferito allo sviluppo della conoscenza in matematica viene quindi suddiviso in tre categorie (Bagni, 2006):

- le epistemologie a-storiche non considerano l'aspetto storico (ad esempio il costruttivismo radicale fa riferimento a questa categorizzazione);
- le epistemologie storiche sono quelle che pur considerando l'aspetto sto-

rico non prendono assolutamente in considerazione il contesto culturale (si veda l'approccio Piagetiano con l'epistemologia genetica[4]),
– infine le epistemologie storico-culturali, quelle che, oltre a riconoscere il ruolo della storia, affermano che gli aspetti culturali hanno un ruolo cognitivo e determinante nel modo in cui noi pensiamo.

In Furinghetti e Radford (2002) sono riportati alcuni esempi che si riferiscono al parallelismo tra ontogenesi e filogenesi. Sono interessanti i due passaggi che concernono lo sviluppo del pensiero matematico nello studente:

«(…) considerando la storia non solo come una finestra da cui trarre una migliore conoscenza della natura della matematica, ma come mezzo per trasformare l'insegnamento stesso. La specificità di questo uso pedagogico della storia sta nel fatto che intreccia la nostra conoscenza di sviluppi concettuali passati con la pianificazione di attività in classe, allo scopo di promuovere lo sviluppo del pensiero matematico negli studenti.» Cajori (1894)

«Dietro il concetto di conoscenza si cela un pensiero epistemologico che condiziona la nostra concezione della formazione del pensiero matematico nello studente allo stesso modo in cui condiziona l'interpretazione dello sviluppo storico-concettuale.» Radford, Boero e Vasco (2000)

La ritrattazione teorica fatta da Radford degli ostacoli (epistemologici, ontogenetici, didattici e culturali) in una prospettiva sociale porta a importanti conseguenze teoriche e metodologiche anche sul tema della storia in ambito didattico. Radford giunge alla conclusione che il contenuto stesso della conoscenza matematica è definito dalla cultura nella quale si sviluppa; la conoscenza non si produce nel rapporto esclusivo individuo-problema da risolvere, ma è socialmente ottenuta. La ricaduta didattica di tale affermazione è significativa: un'analisi di tipo storico-epistemologica può dare informazioni essenziali sulla matematica che si è sviluppata in una cultura, indicando pure le fasi di negoziazione che hanno portato alla costruzione dei significati *«il modo in cui un'antica idea è stata forgiata può aiutarci a ritrovare quegli antichi significati che, mediante un'opportuna opera di adattamento didattico, possono probabilmente essere ridisegnati e resi compatibili con i moderni programmi scolastici.»* (Radford citato in Bagni, 2006).

Considerare la storia della matematica come una «specie di laboratorio in cui esplorare lo sviluppo della conoscenza matematica» (Radford, citato in Bagni, 2004) richiede dunque l'accettazione di un punto di vista teorico che giustifichi il collegamento tra lo sviluppo concettuale nella storia e quello moderno. L'attuazione di una tale connessione presuppone il superamento di diversi problemi, primo fra tutti l'interpretazione dei dati storici (si veda Gadamer in Bagni, 2004). A questo proposito trovo interessante la riflessione che lo stesso Bagni (2009) sviluppa (prendendo spunto da Gadamer) su come interpretare i dati storici: modellarli sui propri concetti o su quelli caratteristici del periodo in esame? Egli afferma che il tempo trascorso tra il momento

4. «The study of such transformations of knowledge, the progressive adjustment of knowledge, is what I call genetic epistemology» (Piaget citato in Bringuier, 1980)

in cui un concetto viene concepito e quello della sua fruizione può essere problematico e richiede una corretta mediazione tra passato e presente.

D'altro canto, lo stesso autore evidenzia che attraverso l'uso didattico di elementi storici è possibile mostrare una sorta di procedimento a spirale, riprendendo idealmente la citazione di Jung (Bagni, 2009) *«(…) solo che quanto più avanziamo tanto più tutto ciò che precede viene illuminato da ciò che segue.»* Così, porre come punto di partenza una testimonianza storica, correttamente interpretata, e tradurre questa interpretazione in un atto didattico, può portare a una reinterpretazione significativa della testimonianza storica in questione, secondo un procedimento che può ripetersi, quindi a spirale. Questo moto in circolo può avvenire se e solo se, durante la ricerca del significato, i nostri preconcetti vengono via via rinnovati e sostituiti nel corso del lavoro di interpretazione, in modo sempre più adeguato e sempre maggiormente in sintonia con l'oggetto sul quale si opera. Stiamo parlando del circolo ermeneutico che, se prontamente attivato, può rivelarsi utilissimo nell'interpretazione della storia a fini didattici.

Concludo con D'Amore e Fandiño Pinilla (2009):

«La didattica della matematica senza relazioni con l'epistemologia e la storia è come uno strumento agile e potente che nessuno sa usare a pieno; la epistemologia e la storia sono mezzi culturali forti, astratti e profondi che la didattica della matematica rende concreti ed utili al progresso dell'umanità, alla costruzione di competenze, alla consapevolezza del proprio sapere.»

3. Domande di ricerca

Con l'introduzione di elementi di storia della matematica inerenti soprattutto all'epistemologia del concetto si riesce:

a) a favorire la costruzione del concetto di equazione?
b) a rendere la disciplina più umana; ovvero, l'oggetto matematico, simbolo di un'unita culturale che evidenzia sistemi di utilizzazione differenti a seconda delle possibilità e dell'epoca, soggetto pertanto a modifiche nel tempo?

4. Risultati attesi

Ipotizzo che:

a) l'introduzione di elementi storici possa favorire l'apprendimento del concetto di equazione che porti a un approfondimento completo e dinamico, soprattutto per ciò che riguarda la capacità di passaggio dal linguaggio proposizionale a quello algebrico;
b) attraverso un simile accostamento si possa giungere a capire che i contenuti matematici sono influenzati anche da elementi legati alla situazione generale, istituzionale e culturale e alla evoluzione delle conoscenze scientifiche; ovvero considerare la matematica non come un prodotto statico, bensì una conoscenza in divenire e basata sulle attività umane.

5. Metodologia

Nella ricerca è stata coinvolta, oltre alla mia classe, una classe di confronto nella quale non si opera alcun intervento didattico nel senso appena descritto. Il percorso di apprendimento si articola in tre momenti:

- prima fase (con entrambe le classi): indagine scritta (pre-test) per la raccolta delle conoscenze iniziali dell'oggetto equazione;
- seconda fase: interventi didattici articolati su un arco di tempo di 4 settimane, consistenti in una serie di problemi tramandati dalla storia (dai papiri di Rhind e di Mosca, al Lilavati, all'epitaffio di Diofanto, ecc.)
- terza fase: ulteriore indagine scritta (post-test) per entrambe le classi con le stesse richieste effettuate nella prima fase. Per la classe d'indagine vengono aggiunte alcune domande di approfondimento e fatto eseguire un TEP[5].

L'uso di riferimenti storici ha lo scopo di introdurre e analizzare lo sviluppo storico del simbolismo algebrico applicato all'oggetto finale dello studio (l'equazione) e di dare un senso alla tecnica di risoluzione. Nella seconda fase si elabora, con l'aiuto diretto degli allievi, un presentazione elettronica che faccia da diario. Con le prime attività di analisi del problema e dell'evoluzione del linguaggio algebrico si vuole portare l'allievo a percepire l'equazione come «oggetto potenziale» (potenziale perché non ancora identificato come oggetto matematico definito) che permette di risolvere i tipi di situazione riportati nei documenti storici citati. L'allievo dovrebbe pervenire a una prima immagine mentale di equazione. A questo punto nasce il bisogno di dare concretezza all'oggetto e alla scoperta di procedure che portano alla sua risoluzione[6]. L'analisi del linguaggio, attraverso il passaggio dall'algebra retorica a quella sincopata (traduzione dei problemi nel linguaggio usato da Bombelli) e solo in ultimo a quella algebrica, permette di costruire progressivamente un sistema semiotico in evoluzione. L'introduzione del metodo algebrico avviene nel momento in cui gli allievi, dovendo affrontare situazioni sempre più intricate e semanticamente complesse, si accorgono della crescente difficoltà nel mettere in atto strategie numeriche.

6. Raccolta dei dati

I due strumenti di raccolta dei dati sono stati scelti (test come indagine iniziale e finale e TEP) in modo da permettere, in fase di analisi, di comparare i dati raccolti in un lasso di tempo ben limitato e in modo mirato, e di indagare il vissuto socio affettivo dell'allievo.

Nei due test (iniziale e finale), il confronto deve permettere di rilevare cambiamenti all'interno della mia classe e in rapporto all'altra. Il test prevede domande sulla conoscenza del linguaggio algebrico e delle proprietà di campo sulle quali si basa il calcolo letterale. Nel post-test -solo per la classe d'indagine-, ci sono alcune domande di metariflessione sul lavoro svolto. L'uso del TEP ha lo scopo di indagare il livello di

5. Brevi testi attraverso i quali gli allievi spiegano a un ipotetico compagno assente come hanno risolto il problema.
6. Si è anche presentato il metodo di risoluzione detto «della falsa posizione», per mostrare come culture diverse hanno risposto in modo differente allo stesso problema.

coinvolgimento che le varie attività hanno saputo suscitare negli allievi e il modo in cui hanno vissuto gli aspetti storici; inoltre se questi ultimi hanno favorito una riflessione sulla natura della matematica come processo socioculturale e facilitato la costruzione del concetto equazione.

L'idea della creazione di una presentazione elettronica ha come obiettivo quello di registrare tutto quanto è stato fatto e vissuto durante il percorso didattico. Una testimonianza, cioè, del processo interattivo tra allievo, classe e contenuto, generatosi durante la costruzione della conoscenza. È un espediente didattico che sostituisce l'usuale utilizzo di schede con qualcosa di più dinamico e maggiormente condiviso.

7. Risultati

Dall'analisi dei test emerge chiaramente che vi è stato da parte di tutti gli allievi della classe d'indagine un miglioramento, soprattutto nella capacità di identificare, trasporre e quindi gestire l'equazione e la sua risoluzione[7].

La domanda 1[8] richiede l'identificazione di quali fra le espressioni algebriche proposte si possono considerare equazioni. Qui si è riscontrato un notevole miglioramento delle prestazioni: le risposte corrette complessive (dal test iniziale a quello finale) sono aumentate di 16 unità su un totale di 40. Un buon numero di allievi hanno considerato l'identità «$x + x = 2x$» come equazione.

Le domande 2 e 3 verificano la padronanza di alcune conoscenze fondamentali inerenti l'aspetto strutturale dell'equazione: la gestione del segno uguale, in senso relazionale, e la capacità di operare con il calcolo algebrico grazie alle proprietà delle operazioni. In entrambe le domande non vi è stata una differenza significativa di comportamento tra il pre- e il post-test. Si può notare che la maggioranza degli allievi possiede una discreta conoscenza delle proprietà delle operazioni e una buona padronanza del concetto del segno uguale e della sua interpretazione in senso relazionale.

Le domande 4 e 5 indagano la capacità di conversione da un linguaggio all'altro (leggere- interpretare relazioni e formule, dal linguaggio proposizionale a quello algebrico e viceversa): qui vi è stato un notevole miglioramento: nel post-test tutti gli allievi della mia classe hanno saputo rispondere correttamente.

Infine la domanda 6 richiede la risoluzione di un problema risolvibile con metodi sia numerici sia algebrici. Nella mia classe, durante il pre-test un solo allievo riesce a risolvere con una strategia algebrica. La situazione è decisamente mutata nel post-test nel quale 9 allievi riescono nella «messa in equazione» del problema e 7 di loro giungono alla corretta soluzione.

L'analisi dei dati relativi ai test della classe di confronto mostra che non vi è stato alcun miglioramento e che il rendimento è parecchio discontinuo. Quindi, tenuto conto che le due classi appartengono entrambe a un corso base e che alle due classi è stato presentato il concetto di equazione, la scelta didattica di introdurre elementi storici è da ritenersi valida.

7. Va comunque rilevato che, data la quantità minima di allievi sottoposti alla sperimentazione, i dati raccolti vanno considerati con cautela.
8. Tutto il materiale al quale si fa riferimento è consultabile presso l'Autore.

Il ricorso a elementi storici ha permesso di acquisire meglio la capacità di «mettere in equazione» un problema, ovvero la trascrizione sintattica, e parzialmente quella di gestire il processo risolutivo, ciò che convalida il risultato atteso a) del punto 4.

L'analisi delle risposte relative alla metariflessione ha evidenziato negli allievi un grado di soddisfazione più che positivo.

Alla richiesta di definire un'equazione, 7 allievi su 10 hanno saputo rispondere correttamente, identificandola come una tecnica di calcolo che permette di risolvere problemi in cui vi sono grandezze sconosciute.

Quasi tutti raccontano di aver vissuto un momento di confusione durante la presentazione dei tre linguaggi (algebra retorica, sincopata e simbolica). Nella maggior parte di loro questo sentimento ha però permesso di giungere alla conoscenza. Tre allievi hanno affermato che il passaggio da un registro semiotico all'altro ha permesso loro di comprendere meglio il linguaggio algebrico. Rispetto al metodo *della falsa posizione*, 3 allievi hanno scritto che operare con il metodo moderno risulta più facile, raggiungendo il pensiero di Arzarello (citato in Malara, 1994):

«il linguaggio algebrico svolge l'importante funzione di accrescere la possibilità di pensiero, di ragionamento, di conoscenza del singolo individuo e consente inoltre la comunicazione razionale del proprio pensiero».

Infine occorre dire che gli allievi, in generale, non hanno saputo capire l'influenza che i vari contesti socio culturali hanno avuto sullo sviluppo del concetto [risultato atteso b) del punto 4): per loro riflettere sull'uso della storia significa osservare se hanno o meno appreso le nozioni.

Nella maggior parte dei TEP's emerge un sentimento di soddisfazione. Gli allievi concordano nel giudicare l'intervento proposto interessante, pur affermando che alcune lezioni sono state «pesanti». Alcuni esprimono un sentimento di soddisfazione per aver imparato questo concetto e aggiungono che hanno scoperto un lato nuovo della matematica:

«Io pensavo che la matematica era solo esercizi e test, invece oggi ho capito che non è solo calcolare, è bello sapere come è stata creata!»

Altro aspetto positivo: quasi tutti gli allievi sono apparsi molto motivati nella ricerca del materiale storico che ha servito per la creazione della presentazione elettronica, anche se questa attività è stata svolta interamente al di fuori delle lezioni di matematica.

8. Conclusioni

Nel presente lavoro si è analizzata una possibile interazione tra storia e apprendimento della matematica: in particolare l'uso a priori di aspetti storici per la costruzione del concetto. L'età dei soggetti e il tipo di corso (base) ha sicuramente permesso di cogliere tutti gli aspetti che l'analisi di un determinato processo storico può sviluppare nell'individuo. Mi riferisco in particolare alle tre funzioni che alcuni ricercatori in storia e didattica hanno individuato come «espediente didattico»: spaesamento, riposizionamento e immersione culturale (Fauvel, van Maanen, 2000 citato in Demattè, 2006):

«Integrare la storia della matematica sostituisce l'usuale con qualcosa di diverso e rende ciò che è familiare ignoto (spaesamento). Questo porta a guardare il paesaggio in cui ci troviamo (la matematica) in modo nuovo, a studiarlo per ambientarci e a coglierne aspetti che prima ci sfuggivano (riposizionamento)».

Dall'analisi dei risultati emerge comunque che la maggior parte degli allievi sono giunti a comprendere la sintassi e la semantica dell'algebra simbolica grazie al lavoro di ricostruzione che hanno dovuto affrontare a livello di linguaggio nell'analizzare e risolvere i vari problemi storici. I differenti registri semiotici usati nella risoluzione di un'equazione hanno messo in evidenza la necessità di giungere alla condivisione di un efficace simbolismo e hanno dato al linguaggio algebrico una maggior valenza pragmatica, creando così una maggior comprensione e condivisione del linguaggio algebrico. Si può parlare di condivisione poiché tutto il lavoro di costruzione del linguaggio algebrico ha fatto sì che questo divenisse anche il «linguaggio della classe». La messa in atto di strategie algebriche e le capacità operazionali applicate durante il processo di risoluzione sono abilità acquisite dagli allievi, ma che necessitano di consolidamento.

Lo scoglio principale che l'insegnante è chiamato a superare nell'uso della storia a fini didattici è forse, tutto sommato, la selezione e la gestione delle fonti storiche, operazione che comporta una assunzione filosofica non neutra, dipendente da una scelta epistemologica precisa.

9. Sviluppi

Una possibile proposta di sviluppo potrebbe consistere nel riprendere il lavoro svolto e applicarlo a un gruppo più consistente di allievi, così da ottenere dati più rilevanti e significativi, introducendo nella sperimentazione anche allievi del corso attitudinale. Come strumenti di raccolta dei dati sarebbe auspicabile introdurre, oltre a quelli utilizzati in questo lavoro, alcuni colloqui clinici: infatti solo attraverso questi è possibile cogliere e approfondire maggiormente il pensiero degli allievi.

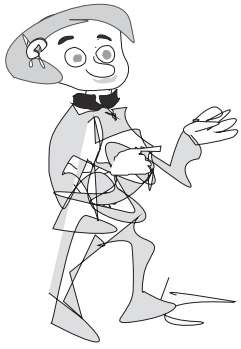
Interessante sarebbe pure indagare sull'applicabilità di un percorso che permetta l'uso a posteriori della storia per favorire, non l'introduzione, ma il consolidamento dei concetti matematici.

Bibliografia

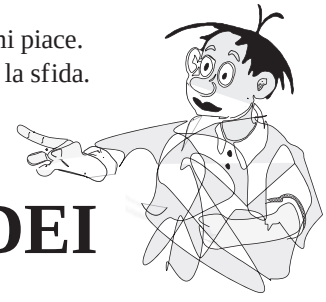
Bagni G.T. (2006). *Linguaggio, Storia e Didattica della Matematica.* Bologna: Pitagora.
Bagni G.T. (2009). *Interpretare la matematica. Introduzione all'ermeneutica dell'apprendimento.* Bologna: Archetipolibri.
Bagni G.T, Furinghetti F. e Spagnolo F. (2003). History and epistemology in mathematics education. In Cannizzato, Pesci e Robutti. *Italian research in Mathematics Education 2000-2003*.
Bagni G.T. (2004). Storia della matematica in classe: scelte epistemologiche e didattiche, *La matematica e la sua didattica*, 3, 51-70. Bologna: Pitagora.
Bringuier, J-C. (1980). *Conversation with Jean Piaget*. Chicago: Chicago University Press.
D'Amore B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna: Ed. Pitagora.
D'Amore B. (2007). Epistemologia, didattica della matematica e pratiche di insegnamento. *La matematica e la sua didattica*. *Vol.21, n°3*. Bologna: Pitagora.
D'Amore B. e Fandiño Pinilla M. (2009). La formazione degli insegnanti di matematica, problema pedagogico, didattico e culturale. In: Frabboni F., Giovannini M.L. *Professione insegnante*. Milano: Franco Angeli.
D'Amore B. e Speranza F.. (1992). *Lo sviluppo storico della matematica. Spunti didattici*. Roma: Armando.
Demattè A. (2006). *Fare matematica con i documenti storici*. Trento: Editore Provincia Autonoma di Trento.
Fauvel e van Maanen. (2000). *History in Mathematics Education. The ICMI Study.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Furinghetti F. e Radford L. (2002) Historical Conceptual Developments and the Teaching of Mathematics: from Phylogenesis and Ontogenesis Theory to Classroom Practice. In: *Handbook of International Research in Mathematics Education*. Hillsdale: Erlbaum.
Freudenthal H, (1973). *Mathematics as an educational task*. Dodrecht: Riedel.
Malara A. (1994). Il pensiero algebrico: come promuoverlo sin dalla scuola dell'obbligo limitandone le difficoltà?. *Atti del Convegno di Castel San Pietro Terme*. Bologna: Pitagora.

Quiz numero 47: Bollettino anagrammato

Aldo Frapolli



Caro Archie,
l'intervento dell'amico norvegese «illusionista», in occasione del nostro penultimo quiz, ha riportato a galla la mia curiosità per gli anagrammi.
Così mi sono spinto ad analizzare il titolo della nostra rivista, alla ricerca di qualche suo anagramma significativo e intrigante.
So che è un'attività che piace anche a te e a Joe. Vogliamo cimentarci su questo tema coinvolgendo anche i nostri lettori?



L'idea mi piace.
Accetto la sfida.

BOLLE TTINO DEI DO CENTI DI MA TEMATICA

Ci sto anch'io.
Forza!

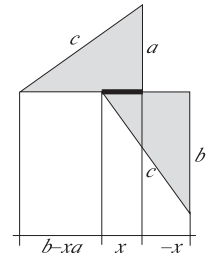
Cari appassionati della matematica divertente e creativa, siamo alla sessantaquattresima apparizione della rivista, una bella potenza di due! Che ne dite di celebrare l'avvenimento accettando la sfida di Archie e andare a scovare – fra i poco meno di … quattro miliardi di miliardi di miliardi possibili – qualche anagramma originale di senso compiuto di **BOLLETTINO DEI DOCENTI DI MATEMATICA**?

Spediteci il frutto della vostra creatività e caparbia.
La redazione premierà quello ritenuto più meritevole.

Soluzione del Quiz numero 46

Considerato che per il Quiz numero 46 non ci sono pervenute soluzioni soddisfacenti, vi proponiamo la risposta di Archie accompagnata dalle sue considerazioni.

Caro Joe, se prendo in considerazione i due triangoli rettangoli congruenti che hai proposto, con lati di lunghezza a, b, c (a < b < c), secondo me esistono **9 famiglie di bi-triangoli con perimetro doppio della somma di due delle tre lunghezze considerate**. Perché?



Occorre innanzitutto chiarire che siccome i bi-triangoli sono generati unendo i due triangoli in modo che abbiano in comune solo punti del loro contorno, quest'ultimi possono avere in comune al massimo un segmento di lunghezza x < c.

Di conseguenza il perimetro di un bi-triangolo si ottiene in generale togliendo 2 volte la lunghezza comune (x) alla somma di tutte le lunghezze, cioè

$P = 2(a + b + c) - 2x = 2a + 2b + 2c - 2x$, come mostra il caso particolare illustrato dall'immagine a lato.

Inoltre la condizione che vuole il *perimetro uguale al doppio della somma di due suoi lati* implica tre casi distinti:

1. $P = 2b + 2c \quad \Leftrightarrow \quad x = a$,
   cioè i due triangoli hanno in comune un segmento di lunghezza a
2. $P = 2a + 2c \quad \Leftrightarrow \quad x = b$,
   cioè i due triangoli hanno in comune un segmento di lunghezza b
3. $P = 2a + 2b \quad \Leftrightarrow \quad x = c$,
   cioè i due triangoli hanno in comune un segmento di lunghezza c

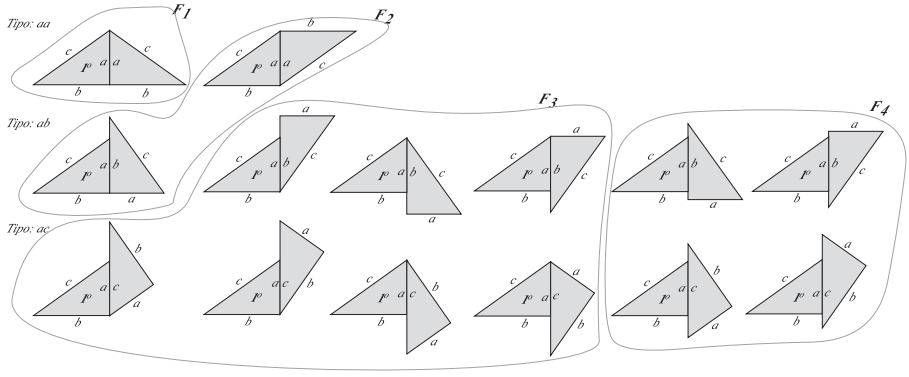
Determinare le varie famiglie cercate, equivale ad analizzare i tre casi dal punto di vista del numero di lati dei poligoni bi-triangoli che si ottengono. Siccome il numero di lati del bi-triangolo generato dipende dal numero di coppie di vertici comuni dei due triangoli oltre che dall'ampiezza degli angoli in gioco, i bi-triangoli che si possono ottenere saranno necessariamente solo triangoli, quadrilateri, pentagoni o esagoni.

Concretamente – a meno di un'isometria – ogni caso può essere individuato e descritto tenendo fisso un triangolo (indicato con 1° nelle immagini che seguono) e disponendo l'altro in modo da avere 0, 1 o 2 coppie di vertici in comune.

Per un'analisi più fine – che però non ha incidenza sul numero di famiglie trovate – ogni caso può essere ulteriormente approfondito distinguendo anche la posizione delle coppie di vertici comuni e l'orientamento del secondo triangolo, come indicato nelle immagini sottostanti.

Si possono quindi avere i seguenti casi:

1. P = 2b + 2c. Si può ottenere mettendo in contatto il lato di lunghezza a con quello di lunghezza a oppure b oppure c, come pure mettendo in contatto il lato di lunghezza b con quello di lunghezza b oppure c, ma anche mettendo in contatto il lato di lunghezza c con quello di lunghezza c, nei modi illustrati di seguito:



Si hanno così le 4 famiglie seguenti di bi-triangoli; più precisamente:

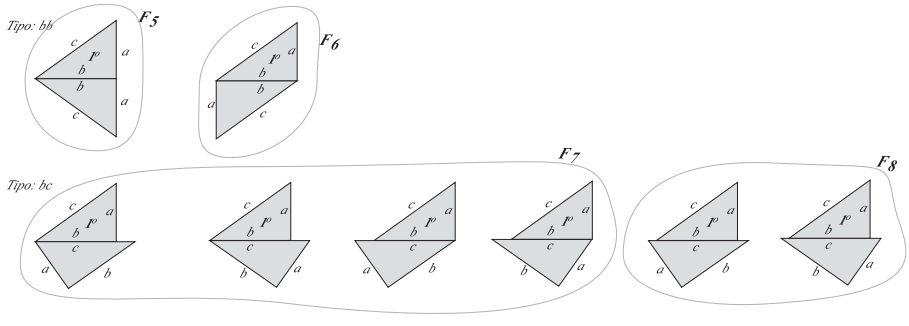
F_1: composta di un triangolo (il triangolo isoscele, con due lati congruenti lunghi c, terzo lato lungo 2b)

F_2: composta di due quadrilateri (il parallelogrammo con lati di lunghezza b e c, il quadrilatero con un lato lungo a+b)

F_3: composta di infiniti pentagoni (tipo ab o ac)

F_4: composta di infiniti esagoni (tipo ab o ac o bb o bc o cc)

2. P = 2a + 2c. Si può ottenere mettendo in contatto il lato di lunghezza b con quello di lunghezza b oppure c, come pure mettendo in contatto il lato di lunghezza c con quello di lunghezza c, nei modi illustrati di seguito:



Si hanno così le 4 famiglie seguenti di bi-triangoli; più precisamente:

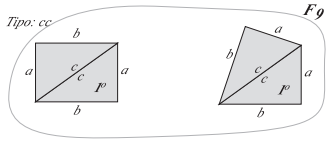
F_5: composta di un triangolo (il triangolo isoscele con due lati congruenti lunghi c, terzo lato lungo 2a)

F_6: composta di un quadrilatero (il parallelogrammo con lati di lunghezza a e c)

F_7: composta di infiniti pentagoni (tipo bc)

F_8: composta di infiniti esagoni (tipo bc o cc)

3. P = 2a + 2b. Si può ottenere solo mettendo in contatto il lato di lunghezza c con quello di lunghezza c, nei modi illustrati di seguito:



Si ha così una sola famiglia di bi-triangoli; più precisamente:

F_9: composta di due quadrilateri (il rettangolo con lati lunghi a, b; l'aquilone con 2 lati consecutivi lunghi a, 2 lati consecutivi lunghi b e due angoli opposti, retti)

1. Proposte didattiche di analisi matematica per il liceo

Antonio Steiner[1] e Gianfranco Arrigo

1. Una immagine singolare del numero e

Anche il rigorosissimo Giovanni Calvino (il teologo Riformatore di Ginevra), che sostenne il principio di vietare il prestito di capitali con interesse, non avrebbe sollevato obiezioni al presente scritto che propone il calcolo dell'interesse su più anni con procedimento continuo, perché esso serve solo per dare una particolare illustrazione del numero e.

Si sa che un capitale C impiegato al tasso annuale di interesse del p%, durante 1/n di anno (capitalizzazione periodica), dà un montante di

$$M_1 = C + \frac{p}{100\,n}\cdot C = C\cdot\left(1+\frac{p}{100\,n}\right)$$

Lo stesso, durante m anni dà il montante

$$M_m = C\cdot\left(1+\frac{p}{100\,n}\right)^{m\cdot n}$$

Poniamo $N = \frac{100\,n}{p}$ e otteniamo il montante in funzione di m

$$M(m) = C\cdot\left[\left(1+\frac{1}{N}\right)^{N}\right]^{\frac{p}{100}\cdot m}$$

Se facciamo tendere n all'infinito, cioè se il periodo di capitalizzazione tende a zero, si ottiene la capitalizzazione continua. Il montante M(m) diventa

1. Poco tempo prima della sua scomparsa, Antonio mi ha consegnato un manoscritto con diverse proposte da pubblicare insieme nella rubrica da lui intitolata *Passeggiate matematiche*. La redazione ha deciso di continuare la pubblicazione fino a esaurimento delle proposte.

$$M(m) = C \cdot e^{\frac{p}{100} \cdot m}$$

nel calcolo del quale gli studenti liceali riconoscono il limite

$$\lim_{N \to \infty} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N = e \cong 2.71828$$

Se scegliamo p=100 (cioè un tasso del 100%), otteniamo che il capitale di 1 franco in un anno dà il montante di e franchi.

2. La tazza di tè

Ciascuno sa che dopo avere versato in una tazza del tè caldo (cioè la cui temperatura è maggiore di quella dell'ambiente), col trascorrere del tempo il tè a poco a poco si raffredda. Vogliamo matematizzare questa situazione in modo da determinare la funzione che a ogni istante successivo al versamento faccia corrispondere la temperatura del tè.

Scegliamo di esprimere le temperature in gradi Celsius e il tempo in minuti.

Poniamo:

a la temperatura dell'ambiente,

x=x(t) la temperatura del tè all'istante t, con i valori marginali:
x(0)=70, x(10)=50, x(20)=40

Assumiamo l'ipotesi che la velocità di raffreddamento dx/dt sia proporzionale alla differenza (x–a), ciò che esprimiamo matematicamente con la seguente equazione differenziale:

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha (x - a)$$

Siamo di fronte a un'equazione differenziale lineare di primo ordine, non omogenea, che risolviamo in due modi:

a) Col metodo della variazione della costante.

Si sa che la soluzione generale della corrispondente equazione omogenea è $x(t) = C e^{-\alpha t}$.

Sostituiamo la costante C con una funzione C(t), che possiamo determinare nel modo seguente:

$$x(t) = C(t) e^{-\alpha t} \Rightarrow C(t) = x(t) e^{\alpha t}$$

e di conseguenza

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot e^{\alpha t} + x \cdot \alpha \cdot e^{\alpha t} = \left[(-\alpha x + \alpha a) + x \alpha\right] \cdot e^{\alpha t} = \alpha a \cdot e^{\alpha t}$$

integrando otteniamo

$$C(t) = \alpha\, a \cdot \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} + k = a \cdot e^{\alpha t} + k$$

quindi la funzione cercata è

$$x(t) = \left(a \cdot e^{\alpha t} + k\right) \cdot e^{-\alpha t} = a + k \cdot e^{-\alpha t}$$

Determiniamo ora la costante di integrazione:

$$x(0) = 70 = a + k \cdot e^{\alpha \cdot 0} \quad \Rightarrow \quad k = 70 - a$$

e la forma algebrica della funzione diventa

$$x(t) = a + (70 - a) \cdot e^{-\alpha t}$$

b) Col metodo della separazione delle variabili

Sinteticamente:

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha\,(x - a) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x - a} = -\alpha\, dt$$

integrando otteniamo

$$\ln(x - a) = -\alpha\, t + k_1$$

ossia

$$x - a = k_2 \cdot e^{-\alpha t} \quad \Rightarrow \quad x(t) = a + k_2 \cdot e^{-\alpha t}$$

come prima, sappiamo che x(0)=70, quindi

$$70 = a + k_2 \cdot e^{-\alpha \cdot 0} \quad \Rightarrow \quad k_2 = 70 - a$$

Raggiungiamo la stessa forma algebrica trovata con l'altro metodo:

$$x(t) = a + (70 - a) \cdot e^{-\alpha t}$$

Infine, le condizioni marginali ci permettono di trovare i valori dei parametri a e α come soluzione del sistema:

$$\begin{cases} (70 - a) \cdot e^{-10\alpha} + a = 50 \\ (70 - a) \cdot e^{-20\alpha} + a = 40 \end{cases}$$

Procediamo così:

$$\begin{cases} e^{-10\alpha} = \dfrac{50 - a}{70 - a} \\ e^{-20\alpha} = \dfrac{40 - a}{70 - a} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{40 - a}{70 - a} = \left(\frac{50 - a}{70 - a}\right)^2$$

l'equazione ricavata si riduce a un primo grado nell'incognita a e si ottiene a=30

Sostituendo poi il valore trovato nella prima equazione abbiamo:

$$e^{-10\,\alpha} = \frac{20}{40} = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad -10\,\alpha = \ln 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \alpha \cong 0{,}0693$$

Possiamo finalmente scrivere la forma algebrica finale della funzione cercata:

$$x(t) = 30 + 40 \cdot e^{-0{,}0693 \cdot t}$$

Rappresentazione grafica:

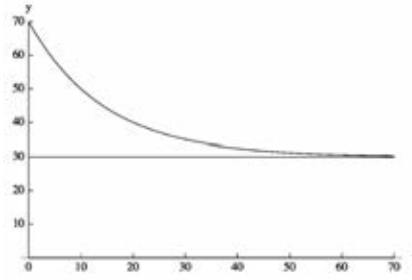


Figura 1. Variazione nel tempo (in minuti) della temperatura del tè versato in una tazza con una temperatura di 70°C con temperatura ambiente di 30°C.

3. Un esempio di equazione differenziale logistica

Una funzione logistica (o curva logistica) descrive una curva ad S di crescita di alcuni tipi di popolazioni P. All'inizio la crescita è quasi esponenziale, successivamente rallenta, diventando quasi lineare, per raggiungere una posizione asintotica dove non c'è più crescita. Il fenomeno descritto da questa equazione si può definire come crescita esponenziale frenata.

Questa funzione può essere ottenuta da un'equazione differenziale logistica. Il presupposto è che la crescita sia direttamente proporzionale sia alla popolazione, sia alle risorse ancora disponibili, e quindi abbiamo una forma del tipo:

$$\frac{dx}{dt} = a\,x\left(1 - \frac{b\,x}{a}\right) = a\,x - b\,x^2 \text{ , con } x(t_0) = x_0$$

Ciò implica due condizioni:

1. $a > 0$
2. $b\,x/a < 1$, ossia $x < a/b$

Possiamo procedere con la separazione delle variabili:

$$\frac{dx}{dt} = -b\,x\left(x - \frac{a}{b}\right) \quad , \quad -b\,dt = \frac{dx}{x\left(x - \frac{a}{b}\right)}$$

Operiamo una trasformazione in frazioni semplici:

$$\frac{1}{x\left(x - \frac{a}{b}\right)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - \frac{a}{b}} \quad \Rightarrow \quad 1 = A\left(x - \frac{a}{b}\right) + B\,x \quad \Rightarrow \quad 1 = (A + B)\,x - A\,\frac{a}{b}$$

per uguaglianza dei coefficienti otteniamo:

$$x^0: \quad -A\cdot\frac{a}{b}=1 \quad \Rightarrow \quad A=-\frac{b}{a}$$

$$x^1: \quad A+B=0 \quad \Rightarrow \quad B=-A=\frac{b}{a}$$

La frazione iniziale è quindi scomposta nella somma

$$\frac{1}{x\left(x-\frac{a}{b}\right)}=\frac{b}{a}\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-\frac{a}{b}}\right)$$

e l'equazione differenziale con le variabili separate è

$$-a\,dt=\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-\frac{a}{b}}\right)dx$$

Integriamo:

$$-a\,t=-\ln x+\ln\left|x-\frac{a}{b}\right|+k$$

quindi, per la condizione 2

$$e^{-a\,t}=k_1\,\frac{\frac{a}{b}-x}{x} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{k_1\,\frac{a}{b}}{e^{-a\,t}+k_1} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{e^{-a\,t}}{k_1}+1}$$

Determiniamo ora la costante di integrazione k_1:

$$x(t_0)=x_0=\frac{k_1\,\frac{a}{b}}{e^{-a\,t_0}+k_1} \quad \Rightarrow \quad k_1=\frac{x_0\,e^{a\,t_0}}{\frac{a}{b}-x_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k_1}=e^{a\,t_0}\,\frac{\frac{a}{b}-x_0}{x_0}$$

Possiamo ora scrivere la forma algebrica definitiva della funzione cercata:

$$x(t)=\frac{\frac{a}{b}\,x_0}{e^{-a(t-t_0)}\left(\frac{a}{b}-x_0\right)+x_0}$$

Valore limite per t tendente all'infinito (grazie alla condizione 1):

$$\overline{x}=\lim_{t\to\infty}x(t)=\frac{\frac{a}{b}\,x_0}{0+x_0}=\frac{a}{b}$$

Rappresentazione grafica di x(t):

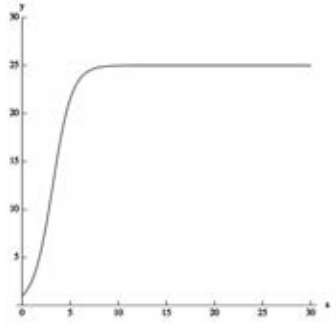


Figura 2. Grafico della funzione logistica per t_0=0, x_0=1, a=1, b=0,04

4. Un'applicazione sorprendente della funzione logistica: la crescita della popolazione degli USA dal 1790 al 1950

Riprendiamo la funzione logistica appena trovata, nella quale sostituiamo il valore a/b con $\overline{x}$.

$$x(t) = \frac{\overline{x}\, x_0}{e^{-a(t-t_0)}\left(\overline{x} - x_0\right) + x_0}$$

e ricordiamo che è soluzione dell'equazione differenziale

$$\frac{dx}{dt} = a\,x - b\,x^2 \quad , \quad \text{con } x(t_0) = x_0$$

Dati statistici della popolazione degli USA

anno	popolazione	anno	popolazione
1790	**3'929'000**	1880	50'156'000
1800	5'308'000	1890	62'948'000
1810	7'240'000	1900	75'995'000
1820	9'638'000	**1910**	**91'972'000**
1830	12'866'000	1920	105'711'000
1840	17'069'000	1930	122'775'000
1850	**23'192'000**	1940	131'669'000
1860	31'443'000	1950	150'697'000
1870	38'558'000		

Dalla tabella ricaviamo i seguenti valori:

$$t_0 = 1790 \;,\; t_1 = 1850 \;,\; t_2 = 1910 \;,\; t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \Delta t = 60$$

e prendendo come unità un milione di abitanti

$$x(t_0) = x_0 = 3{,}929 \;;\; x(t_1) = x_1 = 23{,}192 \;;\; x(t_2) = x_2 = 91{,}972$$

Possiamo ora calcolare i valori dei parametri a, b, $\overline{x}$ e t* ascissa del punto di flesso, cioè il momento in cui il termine frenante ($-b\,x^2$) comincia ad avere effetto visibile.

Iniziamo a calcolare $\bar{x}$ e a come soluzione del sistema

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\bar{x}\, x_0}{e^{-a\,\Delta t}\left(\bar{x}-x_0\right)+x_0} \\ x_2 = \dfrac{\bar{x}\, x_1}{e^{-a\,\Delta t}\left(\bar{x}-x_1\right)+x_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{-a\,\Delta t} = \dfrac{\bar{x}\, x_0 - x_1\, x_0}{x_1\left(\bar{x}-x_0\right)} \\ e^{-a\,\Delta t} = \dfrac{\bar{x}\, x_1 - x_2\, x_1}{x_2\left(\bar{x}-x_1\right)} \end{cases} \Rightarrow \bar{x} = \frac{2\, x_1\, x_2\, x_0 - x_1^2\, x_0 - x_1^2\, x_2}{x_0\, x_2 - x_1^2}$$

inserendo i valori iniziali, otteniamo

$$\bar{x} \cong 197{,}274 \quad \Rightarrow \quad e^{-60\,a} = \frac{x_0\left(\bar{x}-x_1\right)}{x_1\left(\bar{x}-x_0\right)} \cong 0{,}1525333 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\ln(0{,}1525333)}{-60} \cong 0{,}03134$$

$$b = \frac{a}{\bar{x}} \cong 0{,}00015886 = 1{,}5886 \cdot 10^{-4}$$

Rimane da determinare l'ascissa t* del flesso.
Occorre sapere che

$$x\left(t^*\right) = \bar{x}/2 \text{ , con } \bar{x} = \lim_{x\to\infty} x(t)$$

Si tratta di una proprietà comune a questa classe di funzioni. Come esercizio per gli studenti liceali si può proporre di verificare questa proprietà in un caso particolare, per esempio considerando la funzione

$$x(t) = \frac{1}{e^{-t}+m}$$

si ha

$$\bar{x} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^{-t}+m} = \frac{1}{m}$$

inoltre

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e^{-t}}{\left(e^{-t}+m\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-e^{-t}\left(e^{-t}+m\right)^2 - e^{-t}\cdot 2\left(e^{-t}+m\right)\cdot\left(-e^{-t}\right)}{\left(e^{-t}+m\right)^4}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \Rightarrow -e^{-t} - m + 2e^{-t} = 0 \Rightarrow t = -\ln m \Rightarrow x(t) = \frac{1}{e^{\ln m}+m} = \frac{1}{2m} = \frac{\bar{x}}{2}$$

Riprendiamo la funzione logistica trovata in precedenza, sostituiamo a/b con $\bar{x}$ e troviamo [illegible] applicando la condizione appena verificata:

$$x\left(t^*\right) = \frac{\bar{x}\, x_0}{e^{-a\left(t^*-t_0\right)}\left(\bar{x}-x_0\right)+x_0} = \frac{\bar{x}}{2}$$

$$x\left(t^*\right) = \frac{\bar{x}\, x_0}{e^{-a\left(t^*-t_0\right)}\left(\bar{x}-x_0\right)+x_0} = \frac{\bar{x}}{2} \quad \Rightarrow \quad e^{a\left(t^*-t_0\right)} = \frac{x_0}{\bar{x}-x_0} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad t^* = t_0 - \frac{1}{a}\ln\left(\frac{x_0}{\bar{x}-x_0}\right) \quad \Rightarrow \quad t^* \cong 1914$$

Infine, conoscendo il valore di t*, e usando i parametri già calcolati $\overline{x}$ e a, possiamo dare all'equazione logistica una forma più semplice:

$$x(t) = \frac{\overline{x}}{e^{-a(t-t_0)} \cdot \frac{\overline{x} - x_0}{x_0} + 1} = \frac{\overline{x}}{e^{-a(t-t_0)} \cdot e^{a(t^*-t_0)} + 1} = \frac{\overline{x}}{e^{-a(t-t^*)} + 1}$$

Rappresentazione grafica:

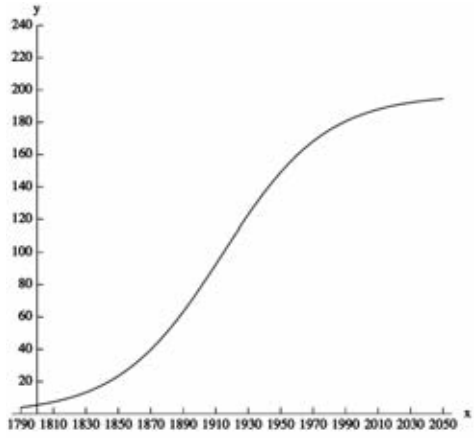


Figura 3. Funzione logistica relativa alla crescita della popolazione degli USA.

Nella seguente tabella si può vedere come la differenza tra i valori statistici (rilevati tra il 1790 e il 1950) e quelli teorici, calcolati mediante la funzione logistica che abbiamo appena determinato, sia molto contenuta.

anno	popolazione (dato del censimento)	popolazione valore calcolato	errore assoluto	errore %
1790	3'929'000	3'967'426	38'426	0.98
1800	5'308'000	5'387'828	79'828	1.5
1810	7'240'000	7'297'560	57'560	0.8
1820	9'638'000	9'849'457	211'457	2.19
1830	12'866'000	13'231'578	365'578	2.84
1840	17'069'000	17'665'595	596'595	3.5
1850	23'192'000	23'396'595	204'595	0.88
1860	31'443'000	30'669'346	-773'654	-2.46
1870	38'558'000	39'686'810	1'128'810	2.93
1880	50'156'000	50'551'140	395'140	0.79
1890	62'948'000	63'196'890	248'890	0.4
1900	75'995'000	77'338'604	1'343'604	1.77
1910	91'972'000	92'462'517	490'517	0.53
1920	105'711'000	107'883'621	2'172'621	2.06
1930	122'775'000	122'861'789	86'789	0.07
1940	131'669'000	136'738'484	5'069'484	3.85
1950	150'697'000	149'043'259	-1'653'741	-1.1

1. La didattica della matematica: insegnamento e apprendimento a confronto

Convegno Nazionale n. 26: ***Incontri con la Matematica***
Castel San Pietro Terme (Bologna)
26–27–28 ottobre 2012

Direzione: Bruno D'Amore, Martha I. Fandiño Pinilla e Silvia Sbaragli
Organizzazione dell'evento: *Associazione Incontri con la matematica* con la collaborazione dell'assessorato alla cultura del comune di Castel San Pietro Terme e di Formath.

Conferenze

Venerdì 26 ottobre, Centro Congressi Artemide

Tutti gli ordini scolastici

15.00-15.45 **Rosetta Zan** (Università di Pisa)
15.45-16.30 **Mario Ferrari** (Università di Pavia)
16.30-16.45 Intervallo
16.45-17-15 **Inaugurazione** alla presenza delle Autorità del mondo politico ed accademico.
17.15-18.00 Relazione Pearson
18.00-18.45 **Massimo Ferri** (Università di Bologna)

Sabato 27 ottobre, Centro Congressi Artemide

Scuola Primaria e Secondaria

15.00-15.45 **Annamaria Benini** (Ispettore Tecnico del Ministero della Pubblica Istruzione): La valutazione come volano nel rapporto insegnamento/apprendimento
15.45-16.30 **Giovanni Giuseppe Nicosia** (RSDDM, Bologna): Significato, coerenza e concretezza nella didattica della matematica delle scuole cinesi
16.30-17.00 Intervallo
17.00-18.00 **Giorgio Bolondi** (Università di Bologna): Valutare la valutazione in matematica
18.00-18.45 **Benedetto di Paola** (Università di Palermo): Processi cognitivi e soluzioni di problemi matematici con studenti italiani e cinesi

Sabato 27 ottobre, Salone delle Terme, Albergo delle Terme

Scuola dell'Infanzia

14.30-15.30 **Gianfranco Staccioli** (Università di Firenze): La formula del gioco. Elementi primi per giocare a scuola
15.30-16.30 **Anna Angeli** (RSDDM, Bologna): La robotica educativa in continuità tra scuola dell'infanzia e scuola primaria
16.30-17.00 Intervallo
17.00-18.00 **Giancarlo Navarra** (GREM, Modena e Reggio Emilia): Il gioco della Matematochetta
18.00-19.00 **Domenico Lenzi** (Università del Salento, Lecce): Primi passi nel mondo dei numeri

Seminari

Sabato 27 ottobre, Sala Giardino, Albergo delle Terme

Seminari per la Scuola dell'Infanzia

9.00-9.45 **Laura Branchetti** (Formath, Bologna): Bimbi che contano. Primi passi nel mondo dei numeri
9.45-10.30 **Anna Aiolfi** e **Marika Quaglietta** (SI «Andersen», Spinea): Sorsi, bocconi, cucchiaiate. La matematica vien mangiando
10.30-11.00 Intervallo
11.00-11.45 **Federica Ferretti** (Formath, Bologna): Numeri e figure: dalla scuola dell'infanzia alla scuola primaria
11.45-12.30 **Annamaria Mighetti** (SI «Magliano Alfieri», CN): Matecomusei-Arte e Matematica: alla scoperta del gesso perduto

Sabato 27 ottobre, Centro Congressi Artemide

Seminari per la Scuola Primaria e Secondaria di Primo Grado

8.30-9.00 **Silver Cappello** (studente Università di Bolzano): Apprendimento in matematica. Il cambiamento del rapporto tra gli studenti e la materia nel corso degli anni scolastici
9.00-9.30 **Stefano Beccastrini** e **Paola Nannicini** (RSDDM, Bologna): Due poetesse e la matematica: Emily Divkinson e Wislawa Symborska
9.30-10.00 **Giancarlo Navarra** (GREM, Modena e Reggio Emilia): L'approccio alla generalizzazione con alunni giovani in ambiente Early Algebra
10.00-10.15 Intervallo
10.15-10.45 **Antonella Colombini** e **Antonio Leoni** (Scuole in rete, Lucca): Tecnologie innovative: robotica in rete, ambienti di apprendimento orientati alla sperimentazione scientifica e tecnologica
10.45-11.15 **Chiara Andrà**, **Elisa Cuozzo** e **Tatiana Dal Toè** (Università di Torino): Stili comunicativi degli insegnanti di matematica: quale impatto sugli studenti?

11.15-11.45 **Gianfranco Arrigo** (NRD, Bologna): Calcolo mentale, approssimato e strumentale: teoria ed esempi
11.45-12.15 **Pietro Di Martino** (Università di Pisa): La paura della matematica
12.15-12.45 Antonia Romano (IPRASE, Trento): Curriculum per competenze: il contesto della Provincia di Trento – insegnanti protagonisti del cambiamento

Sabato 27 ottobre, Salone delle Terme, Albergo delle Terme

Seminari per la Scuola Secondaria di II grado

08.30-09.00 **Maria Angela Chimetto** (CRDM, «Ugo Morin», Paderno del Grappa, TV): Modelli iperbolici concreti: dalla «cuffia» di Beltrami all'uncinetto iperbolico di Daina Taimina.
09.00-09.30 **Michele Canducci** (Akap, ONLUS di Rimini): «Laboratori didattici in Tanzania», continuità del progetto: dal triennio 2010/2012 al triennio 2013/2015
09.30-10.00 **Giuseppe Fiorentino** e **Pietro Di Martino** (Università di Pisa): L'e-learning per l'auto-valutazione e la preparazione ai Corsi di Laurea «scientifici»
10.00-10.15 Intervallo
10.15-10.45 **Gabriella Caristi** (Università di Trieste), Carla Fiori (Università di Modena e Reggio Emilia), Sergio Invernizzi (Università di Trieste): Dalle frazioni continue alla trascendenza di π: centocinquant'anni di matematica «dimenticata»
10.45-11.15 **Marisa Di Luca** (Università di Chieti-Pescara): Una piattaforma e-learning per le competenze linguistico-strutturali in matematica
11.15-11.45 **Stefania Teresa Morrone** (ITC «Padre A.M. Tannoia» di Ruvo di Puglia, BA): Giochi matematici alla corte di Federico II, imperatore
11.45-12.15 **Paolo Longoni**, **Gianstefano Riva** e **Ernesto Rottoli** (Laboratorio didattico di Matematica e Filosofia, Presezzo, BG): Dalle campanine a Leonardo: una narrazione socio-politica

Domenica 28 ottobre, Sala Giardino, Albergo delle Terme

Seminari per la Scuola dell'Infanzia

9.00-9.45 **Anna Aiolfi** e **Marika Quaglietta** (SI «Andersen», Spinea): Conteggi e raggruppamenti
9.45-10.30 **Maria Chiara Sangiorgi** (RSDDM, Bologna): Gioco e matematica
10.30-11.00 Intervallo
11.00-11.45 **Alice Lemmo** (Formath, Bologna): Primi passi nel mondo delle forme
11.45-12.30 **Annarita Monaco** (RSDDM, Bologna) e **Adele Iacovantuono** (SI «F. Morvillo», Roma): Comunicazione, semiotica e apprendimento matematico

Domenica 28 ottobre, Centro Congressi Artemide

Seminari per la Scuola Primaria

8.30-8.50 **Valeria Razzini** (SP Sant'Eufemia, Piacenza): A caccia di teoremi: Quante diagonali ha un poligono?
8.50-9.10 **Serafino Caloi** (SP di Tregnago, VR): Andar per competenze
9.10-9.30 **Cristina Sperlari** e **Martina Carola** (Università degli Studi di Milano «Bicocca»): Alcuni esempi di attività per l'introduzione del numero e della geometria per la classe prima
9.30-10.00 **Sergio Vastarella (RSDDM, Bologna):** Nuove tecnologie nella didattica della matematica nella scuola primaria: esperienze d'aula con il PC, la LIM, software e piattaforme online
10.00-10.30 **Annarita Monaco** (RSDDM, Bologna): Pratiche comunicative e apprendimento matematico
10.30-11.00 **Manuela Di Natale** e **Benedetto Di Paola** (GRIM, Università di Palermo): Matematica e Musica: linguaggi … in accordo!
11.00-11.30 **Tiziano Pera** (Baobab-GRDS, UniTO): L'area delle scienze e la scuola di base: tra apprendimenti e competenze
11.30-12.00 **Lorella Maurizi** (RSDDM, Bologna): Storie di matematica – Matematica con le storie Sergio

Domenica 28 ottobre, Salone delle Terme, Albergo delle Terme

Seminari per la Scuola Secondaria

8.30-9.00 **Diana Cipressi** (SM «Mezzanotte Antonelli Ortiz», Chieti): Sperimento le regole dettate dal mio maestro d'abaco
9.00-9.30 **Maria Lucia Lo Cicero** (G.R.I.M., Università di Palermo): Ostacoli didattici al concetto di continuità e discontinuità di funzioni
9.30-10.00 **Luigi Tomasi** (LS «Galielo Galilei» di Adria, RO): Modelli e matematizzazione nelle Indicazioni nazionali e Linee guida per la Matematica nella scuola secondaria di II grado: proposte didattiche
10.00-10.15 Intervallo
10.15-10.45 **Christian Bonfanti** (LS «R. Steiner», Milano): La geometria proiettiva
10.45-11.15 **Elio Motella** (Verbania): Cos'è la matematica? Perché la studiamo?
11.15-11.45 **Denise Lentini** (ENFAP, Emilia Romagna): DoReMAT «La Musica della Matematica»

Informazioni

Rivolgersi a: dott.ssa **Rita Lugaresi**, Ufficio Cultura
40024 Castel San Pietro Terme BO
Tel. 051/6954198 Fax 051/6954180 feriali ore 8.30 – 13.30
email cultura@cspietro.it; silvia.sbaragli@supsi.ch
sito http://www.dm.unibo.it

2. L'invention des formules mathématiques élémentaires

Conferenza organizzata dalla Società Matematica della Svizzera Italiana (SMASI)

Martedì 2 ottobre 2012, ore 17.30-19.00, sede da determinare
Relatore: Jean Dhombres[1]

Dopo la conferenza verrà offerto a tutti i presenti un aperitivo per festeggiare i 10 anni di esistenza della SMASI.

Chiunque apra uno dei libri degli *Elementi* di Euclide, scritti tre secoli prima di Cristo, rimane colpito dall'assenza sia di formule come per esempio quella dell'area del cerchio [$S=\pi R^2$] -mentre che il numero π parrebbe riferito a conoscenze più vecchie- sia delle identità algebriche chiamate «prodotti notevoli» nel XIX secolo come $(a–b)(a+b)= a^2–b^2$, che si potrebbero considerare importanti per stabilire proprietà geometriche, come quella della potenza di un punto rispetto a una circonferenza. Non si trovano nemmeno le formule trigonometriche di base del tipo *sen(a+b)* apparse agli inizi del XVII secolo con forti restrizioni ai valori delle variabili *a*, *b* e *a+b*. Queste formule sono nate nel contesto di ciò che si può chiamare lavoro sulle funzioni elementari, mentre il termine polinomio dovette attendere parecchio tempo prima di essere accettato ed era ancora poco usato fino verso gli inizi del XIX secolo. Esiste un duplice problema: da una parte le notazioni specifiche della matematica non sempre in sintonia con l'uso della lingua di comunicazione che esigeva l'impiego dei termini del linguaggio comune e dall'altra la creazione di nuovi oggetti matematici, come i polinomi, che potevano essere trattati come quantità, e inoltre dotati di «algebra propria», la fattorizzazione. Queste problematiche storiche, in se stesse interessanti, e che voglio sviluppare perché poco conosciute, ci fanno incontrare Viète, Pascal, Wallis, Newton o ancora Leibniz, ma si rifanno anche a questioni fondamentali di didattica della matematica che questi grandi matematici non hanno trascurato. In particolare, citiamo l'opposizione tra il ragionamento algebrico che parrebbe automatico -anche se pone l'arduo problema dei negativi- e il ragionamento geometrico che sembrerebbe elegante a condizione che non faccia intervenire formule. Si tratta di mode dell'insegnamento? C'è qualcosa di più profondo da capire riguardante la generalità di una formula, mentre occorre distinguere diversi casi di figure in geometria?

1. Centre Alexandre Koyré 27 rue Damesme, 4e étage 75013 PARIS; Directeur d'études à l'EHESS. Directeur de recherche émérite au CNRS

3. Recensioni

Ennio Peres (2011). ***Matematicaterapia. Come la matematica può semplificarci la vita*****. Milano: Salani Editore. ISBN 978-88-6256-191-4. Pagg. 128, € 11.**

Il libretto tascabile si inserisce in una collana centrata sul termine «terapia». Sono già usciti i volumetti *Cinema&Video terapia* e *Giardino&Orto terapia*. Questo di Ennio Peres, il noto giocologo romano, è una raccolta di curiosità matematiche e di «giochi di magia matematica» come l'Autore ama definirli. Giochi che si possono fare in società, in classe per esempio, giochi che sono studiati per meravigliare lo spettatore, ma che si basano su una solida struttura matematica. L'insegnante di ogni ordine scolastico può trovare spunti e materiali per variare le lezioni, argomenti soprattutto adatti a catturare l'interesse degli allievi. Nell'introduzione l'autore propone un pensiero di John von Neumann, molto significativo: *«Se la gente non crede che la matematica sia semplice, è soltanto perché non si rende conto di quanto sia complicata la vita»*.

Dopo aver detto che la Matematica è alla base non solo di qualsiasi altra disciplina scientifica ma anche di ogni forma d'arte armoniosa –e questo costituisce il lato utilitario della disciplina- l'autore ricorda che essa è fondamentale perché abitua alla chiarezza di esposizione, alla precisione del linguaggio e alla coerenza logica: attitudini utili a praticamente tutte le categorie di professionisti. La riflessione dell'Autore si spinge fino a porsi la domanda che noi tutti ci siamo posti almeno una volta: come mai una materia di tale levatura è considerata da una larga maggioranza di persone disciplina ostica, arida e incapace di suscitare emozioni? Secondo l'Autore, la maggiore responsabilità della scarsa popolarità della Matematica è imputabile al modo con cui tradizionalmente viene insegnata, che fa ricorso fin dal primo momento a una fredda astrazione e che, inoltre, si basa molto più sull'apprendimento mnemonico delle regole che sull'incentivo al ragionamento. Per contro, per acquisire una mentalità matematica non è necessario apprendere una grande quantità di formule e teoremi, ma è importante imparare ad affrontare i problemi quotidiani ragionando in maniera rigorosa, senza farsi fuorviare da salti logici o fraintendimenti. Ecco delinearsi l'obiettivo

di questo libretto: mostrare alcuni significativi esempi di come un tale modo di procedere possa tornare utile nei settori più disparati, consentendo di acquistare maggiore sicurezza e serenità, nel rapporto con molte realtà del mondo in cui viviamo. In esso possiamo trovare parecchi modi per rispondere alla frequente domanda degli studenti «a che serve la matematica?».

Alvarez C. e Dhombres J. (2011). ***Une histoire de l'imaginaire mathématique*****. Paris: Hermann. ISBN 978 2 70 56 8192. € 38,50.**

Al contrario della matematica insegnata che, per questioni di economia e di efficacia pedagogica, si presenta come un pensiero quasi sempre unico, la sua storia si presenta come una scelta e non una necessità. Scegliamo il teorema fondamentale dell'algebra, subito prima che venisse così denominato. Oggi lo si enuncia in una forma minimale: un polinomio non ridotto a una costante e a coefficienti reali possiede almeno una radice complessa. Per rimanere in un quadro elementare, questo primo volume si ferma subito prima dell'apparizione della dimostrazione di Gauss ed evidentemente, a maggior ragione, prima dell'intervento di Galois. La semplicità dell'enunciato del teorema fondamentale dell'algebra non è contaminata da alcuna scrittura simbolica astrusa. Polinomi, costanti, coefficienti, radici, numeri complessi, zeri di un'espressione algebrica, caratterizzano bene il contesto del teorema. Parliamo di una banalizzazione della forma polinomiale: questo teorema è diventato senso comune, quello dell'algebra elementare, anche dell'algebra commutativa.

La storia è quella della nozione di numero immaginario inventata da Descartes fino alla sua riduzione a numero complesso. Ma l'aggettivo «complesso» qualifica la natura di numero e non un tipo di ragionamento. Perché il teorema e le sue dimostrazioni fanno capire ciò che è semplice e la complessità si riferisce solamente alla presenza di due unità di misura, invece di una, come una volta si scriveva una lunghezza in 2 piedi e 3 pollici; si avrà $2 + 3i$, il quadrato di i è (–1), o ancora con la scrittura antica $2+3\sqrt{-1}$.

Col pretesto che si tratta anche di una storia erudita e che trascorsero più di centocinquant'anni tra una affermazione di Descartes del 1637 e l'ultima dimostrazione considerata che è quella di Laplace del 1795, il nostro ruolo non dev'essere in ogni caso quello di sovraccaricare di difficoltà, anche tenendo conto dei diversi tentativi dell'insegnamento della matematica di quel periodo, delle difficoltà non risolte di Eulero e di Lagrange e dei progressi compiuti da Jean d'Alembert. La semplicità si estende ai dibattiti sul ruolo del segno e della messa in opera nel pensiero in generale, e non è banale vedere esitare grandi matematici su ciò che è diventato semplice, ma si impara molto su ciò che significa pensare in matematica. (Presentazione degli Autori)

4. Errata corrige

Nel numero 63 è stato commesso un malaugurato errore tipografico. La pagina 72 è andata persa e al suo posto si è inserita un duplicato della 73. Ci spiace sinceramente e ci scusiamo con l'autrice dell'articolo che ha subito il danno e con tutti i lettori che dopo aver girato la pagina 71… avranno creduto di vederci doppio.

A pagina 126 riproduciamo la pagina 72 in modo che i collezionisti possano ritagliarla e incollarla sul numero 63 al giusto posto.

il percorso che ogni ragazzo ha fatto. La lettura di questi scritti ha permesso di rilevare alcuni aspetti:

- durante la prima lezione 7 ragazzi su 18, alla domanda *Cosa ho provato quando ho letto il problema?*, rispondono esprimendo un'emozione. Al secondo incontro i ragazzi che esprimono un'emozione diventano 11 su 19. Al termine del percorso solo cinque allievi non hanno mai espresso l'emozione che hanno provato. Il loro commento era essenzialmente legato al non capire il problema o al ritenerlo facile o difficile;
- su un totale di 19 ragazzi 12 hanno sempre risposto alle tre domande. Negli altri invece si sono notati i seguenti comportamenti: una ragazza non ha scritto niente durante la terza lezione, quando la sua compagna di bottega era assente; un ragazzo, durante il quarto incontro, non ha risposto, ma ha svolto alcuni calcoli. Due ragazzi rispondono al primo incontro ma poi proseguono, lavorando in maniera poco strutturata e senza impegno, per le successive tre lezioni, e solo a partire dal quinto incontro riprendono a rispondere e a lavorare in modo soddisfacente. Un ragazzo ha spesso risposto alle tre domande ma il suo lavoro complessivo è sempre rimasto insoddisfacente: il suo maggiore interesse era quello di stabilire relazioni con i compagni di classe, ragion per cui i suoi scarsi risultati, ottenuti senza il dovuto impegno, mancavano di struttura. Il potenziale di questo ragazzo è più che sufficiente ma il suo comportamento non gli permette di dimostrarlo. Un ragazzo, che generalmente non svolge mai nessuna attività proposta, è sensibile ai commenti del docente e risponde alle sollecitazioni che lo spronano a fare qualcosa. Un ragazzo non risponde praticamente mai alle domande; cerca, nei primi incontri, di seguire almeno i consigli che il docente gli scrive sul quaderno, ma poi desiste e non fa più niente;
- quando il docente nei suoi commenti personali chiede una correzione, l'allievo la esegue nell'incontro successivo;
- quando il docente, nel suo commento incoraggia un allievo, questi, nell'incontro successivo, risponde in modo positivo scrivendo sue osservazioni o mostrando impegno e serietà nel portare a termine il problema.

5.3. Lettera scritta a una professoressa per spiegare lo svolgimento di queste attività

Complessivamente l'itinerario è stato affrontato con piacere. 17 ragazzi hanno messo l'accento su aspetti interessanti legati ai cinque momenti della struttura della lezione. Eccone alcuni.

Rito d'inizio

«Quando arrivavo a scuola il mercoledì ero sicura e non avevo paura.»

«Quando poi ricevevo l'esercizio e il commento della 'soressa ero magari un po' più agitato …»

Progetto grafico
Bruno Monguzzi
Prestampa
Taiana
Stampa
Veladini

Redazione
Laboratorio di didattica della matematica
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera

Telefono
091 814 18 21/22/24
Fax
091 814 18 19
gianfranco.arrigo@span.ch

Amministrazione
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera
Fax
091 814 18 19

Esce due volte all'anno
a maggio e a dicembre

Abbonamento annuo
SFR 30
€ 16