**Bollettino dei docenti di matematica**
**43**

In questo numero: contributi matematici di André Delessert, Mauro Cerasoli e Francesco Cavalli; riflessioni didattiche di Giorgio T. Bagni, Claudio Beretta e Gianfranco Arrigo; proposte didattiche di Tiziana Prospero, Barbara Berretti e Tatiana Solcà; laboratorio matematico di Gianfranco Arrigo e Giorgio Mainini; proposta interdisciplinare di Lauro Filipponi; il quiz di Aldo Frapolli; recensioni.



ISBN 88-86486-38-3
Fr. 18.–

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'istruzione
e della cultura

**43**

**Bollettino dei docenti di matematica**

Dicembre
2001

Centro
didattico cantonale

**A cura**
**del Laboratorio di didattica della matematica**

# Bollettino dei docenti di matematica

43

Dicembre
2001

Ufficio
dell'insegnamento medio
Centro
didattico cantonale

Bollettino
dei docenti di matematica
43

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'istruzione
e della cultura



ISBN 88-86486-38-3

# Bollettino dei docenti di matematica 43

Dicembre
2001

Ufficio dell'insegnamento medio
Centro didattico cantonale

Indice

# Prefazione

Il numero apre con un importante quanto impegnativo articolo di André Delessert sulla natura dei numeri naturali. Mauro Cerasoli ritorna con un gradito saggio che porta nella pinacoteca infinita dei frattali. Francesco Cavalli ci propone un interessante contributo su alcune particolarità dei numeri di Fibonacci. La parte più strettamente didattica inizia con la presentazione di una ricerca di Giorgio T. Bagni, seguita da un intervento di Claudio Beretta, neo presidente della Società svizzera degli insegnanti di matematica e fisica (complimenti!), che riflette sul problema educativo nella società odierna (si tratta di uno sviluppo dell'articolo apparso sul *Bulletin* della citata società). Su un piano più tecnico si colloca lo scritto di Gianfranco Arrigo sul calcolo a scuola (seconda puntata). L'intermezzo, come sempre, è garantito dal nuovo quiz di Aldo Frapolli. Dalla bricolla abbiamo estratto alcune proposte inerenti all'educazione al pensiero combinatorio e a quello probabilistico e statistico, lavori fatti da tre giovanissimi insegnanti – Tiziana Prospero, Barbara Berretti e Tatiana Solcà – nell'ambito dell'abilitazione dell'anno scorso. Il laboratorio matematico è dedicato questa volta al liceo e presenta la seconda parte di una proposta di Gianfranco Arrigo (la prima parte si trova nel numero 40) e un nuovo contributo di Giorgio Mainini. Il tema dell'interdisciplinarità si completa con la seconda parte dell'articolo di Lauro Filipponi, sui sistemi di accordatura. Il numero termina come d'abitudine con alcune coinvolgenti recensioni.

Infine segnaliamo una errata corrige relativa al numero 42: nell'articolo di Giorgio Mainini a p. 48 manca un valore assoluto, a p. 49 è stato omesso un esponente n e nella tabella di p. 53 sono errate le intestazioni del foglio elettronico. Ci scusiamo con i lettori.

# 1. Sulla natura dei numeri naturali[1]

André Delessert

This paper follows up the article *Numerale e numero naturale* published in the issue number 40 of the *Bollettino dei docenti di matematica*, from which both the terminology and the conventions are here resumed. The central question is the distinction between numerals and natural numbers. The numerals are the numbers of calculators: they can be actually written. It only depends on the time and the machines that are available. They are not strictly mathematical objects. Their collection is permanently spreading. The natural numbers instead constitute an infinite real totality: they come from the pure mathematical notion of "set". The natural numbers intervene in the representation of the real numbers, and they pertain to the core of all mathematical theories.

Questo testo dà seguito all'articolo intitolato *Numerale e numero naturale* pubblicato sul numero 40 del *Bollettino dei docenti di matematica*, dal quale riprendiamo la terminologia e le convenzioni. Ci appoggeremo anche sulla distinzione fra numerali e numeri naturali. I numerali sono i numeri del calcolatore: si possono scrivere effettivamente. Dipende solo dal tempo e dalle macchine a disposizione. Non sono oggetti strettamente matematici. La loro collezione è in continua espansione. I numeri naturali invece costituiscono una totalità infinita attuale: scaturiscono dalla nozione puramente matematica di insieme.

I numeri naturali intervengono nella rappresentazione dei numeri reali. Conseguentemente sono nel cuore di tutte le teorie matematiche. Vale la pena di interrogarci sulla loro natura. Abbiamo visto nel precedente articolo che l'insieme **N** dei numeri naturali è caratterizzato dagli assiomi dell'aritmetica. Sappiamo che la consistenza di questi assiomi sollevano una prima difficoltà superiore. Ci proponiamo di mostrare che **N** pone ancora altri enigmi. Nel seguito ci porremo nella logica di primo ordine, designata talvolta con il solo appellativo di logica. Ammetteremo pure, per ipotesi, che il sistema formale di primo ordine dell'aritmetica, **S(Arit)**, sia consistente. Seguiremo in questo la prassi adottata da tutti i matematici.

Il sistema formale **S(Arit)** è una collezione di assiomi universalmente banali (come ad esempio «a=b implica b=a») e di assiomi propri alla teoria aritmetica come per esempio « $\forall x, \quad x+1=1+x$ »[2]. Designiamo più generalmente con **S(B)** il sistema formale di una teoria **B**. Si chiama *modello insiemistico* di **S(B)** un insieme **E** nel quale si possono interpretare i simboli e i termini che appaiono in **S(B)** in modo che gli

1. Questo articolo, come l'altro apparso sul numero 40 del *Bollettino dei docenti di matematica* col titolo *Numerale e numero naturale* sono stati tradotti da Claudio Beretta e Gianfranco Arrigo che ringrazio vivamente.
2. Per maggiori dettagli su queste nozioni di logica si ceda: A. Delessert, *Introduction à la logique*, Presses polytechniques romandes, Lausanne, 1988 e A.Delessert, *Gödel: une révolution en mathématiques. Essai sur les conséquences scientifiques et philosophiques des théorèmes gödeliens*. Préface J.-Cl. Piguet, Presses polytechniques romandes, Lausanne, 2000.

assiomi della teoria **B** siano soddisfatti. Ad esempio un gruppo è un modello insiemistico del sistema formale **S(Gr)** che comporta gli assiomi di gruppo.

Nella sua tesi di dottorato pubblicata nel 1930, Kurt Gödel dimostra il *teorema della completezza della logica di primo ordine.* Si può enunciare come segue:

*La condizione necessaria e sufficiente per cui un sistema formale S sia consistente è che ammetta un modello insiemistico. Inoltre la logica di primo ordine permette allora di dedurre tutte le formule soddisfatte in ogni modello di S.*

Nella forma in cui è presentato, questo teorema conferisce inizialmente un mezzo per mostrare che certi sistemi formali sono consistenti. Il sistema formale di Gruppo è ad esempio consistente perché ammette per modello il gruppo composto di un elemento. In seguito questo teorema mostra che la logica di primo ordine permette di dedurre tutto ciò che è vero in tutti i modelli di un sistema formale consistente. Altrimenti detto, questa logica è esattamente quella che si addice alla scienza matematica.

Si tratta di fatti importanti, che d'altra parte non fanno che confermare ciò che si crede di sapere ordinariamente in matematica. Tuttavia il teorema di completezza nasconde altri fatti più curiosi. Si può già osservare che la «teoria degli insiemi», che è probabilmente consistente, ammette due modelli distinti: il modello corrente o *ingenuo* che non è un insieme e, secondo il teorema della completezza, un modello insiemistico distinto dal precedente. Evocheremo alcuni altri fatti inattesi. Essi riposano sul *teorema di compattezza,* che si può facilmente dedurre dal teorema di completezza. Ecco l'enunciato:

*La condizione necessaria e sufficiente per cui un sistema formale S sia consistente è che ogni parte fortemente finita dell'insieme di assiomi di S sia consistente.*

Infatti, se S è consistente, non si può dedurne alcuna contraddizione. A più forte ragione è vero per ogni parte finita o non finita dell'insieme degli assiomi di S. Se S è inconsistente, vi si può dedurre una contraddizione C. La prova di C è una successione di formule di S che possono essere effettivamente scritte. Essa non comporta dunque che una collezione finita F – anche fortemente finita – di assiomi di S. Esiste dunque una parte finita dell'insieme degli assiomi di S che non è consistente.

Diamo una prima applicazione del teorema di compattezza. Consideriamo **S(Gr)**, il sistema formale del Gruppo. Sappiamo che è consistente. Aggiungiamo dapprima ad **S(Gr)** tutte le proprietà – ossia tutte le formule logiche – soddisfatte da tutti i gruppi di ordine finito. Designiamo con **S(Grf)** il sistema formale ottenuto. Esso è evidentemente consistente.

Aggiungiamo ad **S(Grf)** le formule $\varphi_{\mathbf{n}}$ che esprimono che i modelli di **S(Grf)** comportano **n** elementi distinti, dove **n** assume i valori 1,2,3,4,... Ad esempio:

$$\varphi_3 \equiv \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (x_1 \neq x_2) \wedge (x_2 \neq x_3) \wedge (x_3 \neq x_1)$$

è la formula che esprime che esistono tre elementi distinti. (Il segno logico $\wedge$ si legge «e».)

Anche nel caso di **n** grande, si può immaginare la scrittura di $\varphi_{\mathbf{n}}$. Designano con **S'(Grf)** il sistema formale che comporta gli assiomi di Gruppo, le proprietà dei gruppi finiti e gli assiomi $\varphi_{\mathbf{n}}$, nei quali n = 1,2,3,4,… Questo sistema formale è consistente. Infatti, ogni parte fortemente finita **F** dell'insieme degli assiomi di **S'(Grf)** composta solamente una collezione fortemente finita di assiomi del tipo $\varphi_{\mathbf{n}}$. Sia **p** l'indice maggiore di questi assiomi che figurano in **F**. Il gruppo ciclico d'ordine finito **p** soddisfa tutti gli assiomi di **F**. Il teorema di compattezza ci indica che **S'(Grf)** è consistente. Quest'ultimo ammette dunque un modello G, che è un gruppo. Questo gruppo è infinito, dato che comporta tanti elementi distinti quanti si desiderano. Ciò malgrado, soddisfa a tutte le proprietà dei gruppi finiti.

Detto in altre parole, è impossibile caratterizzare semplicemente la finitezza dei gruppi. La nostra dimostrazione utilizza la nozione di Gruppo che ci è familiare. Ma questa nozione assume un ruolo accessorio. Utilizzando lo stesso approccio, si mostra che è impossibile caratterizzare formalmente e semplicemente la finitezza degli insiemi. Considereremo più avanti una definizione elaborata di finitezza. Comparando capiremo ciò che si intende per definizione semplice. Niente sembra più elementare in matematica dell'affermare che un insieme è finito, comunque questa asserzione sfugge ad ogni definizione semplice.

La situazione è grave, perché ogni numero naturale si confonde con un cardinale di un insieme finito. È dunque la nozione di numero naturale che si sottrae ad ogni definizione elementare. Una seconda applicazione del teorema di compattezza ci mostrerà che il disastro è ancora peggiore.

Dal momento che abbiamo ammesso che il sistema formale **S(Arit)** è consistente, esso ammette un modello che noi chiameremo **N**. Introduciamo, per ogni elemento **a** di **N**, un simbolo costante s(**a**). Aggiungiamo dapprima a **S(Arit)** tutte le relazioni verificate dagli elementi di **N**. Ad esempio, se **a+b=c**, enunciamo s(**a**)+s(**b**)=s(**c**). Otteniamo un nuovo sistema formale **S'(Arit)**, che include **S(Arit)**, e che è palesemente consistente. Diamoci un nuovo simbolo di costante $\alpha$ e aggiungiamo ad **S'(Arit)** tutti gli enunciati della forma $(\alpha \neq s(\mathbf{a}))$, dove **a** percorre l'insieme **N**. Designamo con S* il sistema formale così ottenuto.

Per mostrare che S* è consistente, applichiamo nuovamente il teorema di compattezza. Sia F una parte fortemente finita e qualunque degli assiomi di S*. F comporta che una collezione fortemente finita di simboli della forma s(**a**), in cui $\mathbf{a} \in \mathbf{N}$. Sia **p** il più grande degli elementi **a** che figurano in F. Se si traduce il simbolo $\alpha$ con **(p+1)**, tutti gli assiomi di F sono soddisfatti. Dunque F è consistente. Dato che F è una parte fortemente finita qualunque di S*, questo risulta consistente. Ammette dunque un modello **M**.

Il modello **M** soddisfa gli assiomi dell'aritmetica, dato che S* include gli assiomi di **S(Arit)**. Ma esso è diverso da **N**. Comporta infatti tutti gli elementi di **N** ai quali si aggiunge un elemento $\alpha$, distinto da tutti gli elementi di **N**. Si può naturalmente effettuare, partendo da **M**, l'esercizio appena svolto su **N** e ricominciare così di seguito indefinitamente. Si forma così una catena illimitata di modelli dell'aritmetica, modelli distinti e inscatolati. Un'applicazione un po' più fine del teorema di compattezza permette di stabilire che **S(Arit)** possiede una moltitudine ancora più ricca di modelli insiemistici. Ad esempio, se ne possono trovare di quelli che posseggono un cardinale infinito arbitrario.

Per uscire da questa situazione difficile, si sarebbe tentati di aggiungere ad **S(Arit)** nuovi assiomi nella speranza di ottenere un modello unico dell'aritmetica. Sarebbe tempo perso. Infatti se il nuovo sistema formale fosse consistente, potremmo sottoporlo allo stesso trattamento che abbiamo fatto subire ad **N**. Si troverebbe allora ancora una moltitudine di modelli essenzialmente diversi fra loro.

Non esiste dunque alcun mezzo elementare per caratterizzare in modo univoco le nozioni così elementari di numero naturale e di finitezza. La stessa situazione si presenta per tutte le teorie matematiche che ammettono modelli infiniti: ad esempio, la teoria dei numeri reali e, ancor più grave, la teoria degli insiemi.

Il numero naturale e la finitezza sono un po' le porte dalle quali si accede usualmente all'edificio delle conoscenze matematiche. Abbiamo appena visto che, contrariamente alle porte d'entrata usuali, queste non si situano al piano terreno. Esse si dissimulano ai piani superiori e vi si accede tramite altre porte e scale seminascoste. Cerchiamo di dare una descrizione sommaria di questo tragitto tortuoso.

La teoria degli insiemi è descritta tramite un sistema formale di primo ordine che noteremo **S(Ins)**. Essa si ancora alla nozione primitiva unica, quella di insieme munita dell'appartenenza notata $\in$. La formula $\mathbf{x} \in \mathbf{y}$ significa che l'insieme **x** *è elemento dell'insieme* **y**, oppure che **x** *appartiene* ad **y**. Notiamo che **x** è pure un insieme e non un oggetto più primitivo di un insieme. I primi assiomi di **S(Ins)** definiscono l'insieme vuoto $\varnothing$, gli insiemi singoli $\{\mathbf{x}\}$ in cui **x** è un insieme qualunque, le paia $\{\mathbf{x,y}\}$, le coppie $(\mathbf{x,y})$, l'unione di due insiemi $\mathbf{x} \cup \mathbf{y}$ e qualche altra nozione insiemistica semplice.

Si possono formare insiemi fortemente finiti, tali $\{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} \cup \{\{\{\varnothing\}\}\}$ che comportano tre elementi. Detto altrimenti, si possono rappresentare dei numerali. Per contro, nulla ci permette ancora di parlare di insiemi matematicamente finiti o infiniti.

Un assioma speciale, detto *dell'infinito*, introduce l'esistenza di certi insiemi infiniti. Si enuncia così:

Esiste un insieme **x** che comporta l'elemento $\varnothing$ e tale che se $\mathbf{y} \in \mathbf{x}$, allora $(\mathbf{y} \cup \{\mathbf{y}\}) \in \mathbf{x}$.

Questo assioma ci garantisce l'esistenza di insiemi comprendenti tutti gli elementi come $\varnothing$, $\varnothing \cup \{\varnothing\}$, $\varnothing \cup \{\ \varnothing\ \} \cup \{\varnothing \cup \{\varnothing\}\}$' ecc..., elementi che formano una successione incompiuta.

Non solo non possiamo scrivere effettivamente questa successione, ma non sappiamo nemmeno se costituisce tutto l'insieme **x**, né se è un insieme, una totalità finita. È cio che si traduce con: l'insieme **x** è *infinito.* Esistono degli insiemi che si possono porre in biiezione con **x** ma che non soddisfano all'assioma sopraccitato. È il caso, ad esempio, dell'insieme degli $\{\mathbf{u}\}$, con $\mathbf{u} \in \mathbf{x}$. Conseguentemente non si possono definire come «finiti» gli insiemi che non soddisfano l'assioma dell'infinito. Non siamo ancora giunti alla fine delle nostre pene.

Un primo mezzo per comparare l'abbondanza degli elementi di due insiemi **x** e **y** è quello di esaminare se esista un'iniezione dell'uno nell'altro. Sono allora possibili tre casi. O esiste un'iniezione di **x** in **y** e nessuna iniezione di **y** in **x**: si dice allora che **y** è più grande di **x**. Oppure esiste un'iniezione di **y** in **x** e nessuna iniezione di **x** in **y**: si dice allora che **x** è più grande di **y**. Oppure ancora esiste un'iniezione di **y** in **x** e anche una di **x** in **y**. Si dice in questo caso che **x** e **y** sono *equipotenti*. Questo modo di comparare è assai grossolano. Non ci permette di caratterizzare gli insiemi matematicamente finiti.

Per fare un ulteriore passo, conviene introdurre un assioma nuovo che permetta inizialmente di ben ordinare gli insiemi e solamente in seguito di compararli. Un insieme **E** *è provvisto di un buon ordine* – si dice anche: è *ben ordinato* – quando è munito di un ordine totale < tale che ogni parte non vuota di **E** ammette un più piccolo elemento secondo l'ordine <. Lo strumento che ci manca è l'assioma del buon ordine, secondo il quale ogni insieme può essere munito di un buon ordine. Questo assioma equivale a un'ipotesi molto più strana: *l'assioma della scelta* che può essere enunciato come segue.

*Se* **x** *è un insieme non vuoto e se f*: $\mathbf{x} \to \mathbf{y}$ *è una funzione tale che, per ogni elemento* **a** *di* **x**, f(**a**) *sia non vuoto, allora esiste una funzione di scelta*

$$f^c : \mathbf{x} \to \bigcup_{z \in y} \mathbf{z}$$

*tale che ad ogni elemento* **a** *di* **x** *«sceglie» un elemento* $f^c(\mathbf{a}) \in f(\mathbf{a})$.

(Giova richiamare in questa sede che gli elementi di un insieme sono degli insiemi.)

Se un insieme **y** è ben ordinato, si può determinare la funzione $f^c$ prendendo in ogni immagine f(**a**) il suo più piccolo elemento. Reciprocamente, allorquando l'assioma della scelta è valido, si può munire ogni insieme non vuoto **z** di un buon ordine. Infatti, quando si è riusciti a ben ordinare una parte **u** di **z**, $\mathbf{u} \neq \mathbf{z}$, si può prolungare questo ordine chiedendo alla funzione di scelta di selezionare l'elemento successivo nel complemento di **u** in **z**. La procedura non può far altro che fermarsi quando **x** è ogni intero munito di un buon ordine.

Presi assieme, gli assiomi dell'infinito e della scelta posseggono una forza considerevole. Permettono dapprima di dimostrare che esistono degli insiemi chiamati *ordinali*, che soddisfano alle condizioni seguenti:

— ogni ordinale è ben ordinato dalla relazione di appartenenza $\in$
— se **u**, **v** e **w** sono degli elementi dell' 'ordinale $\alpha$' se $\mathbf{u} \in \mathbf{v}$ e **v**, allora $\mathbf{u} \in \mathbf{w}$.Si dice allora che gli ordinali sono *transitivamente ordinati* da $\in$
— $\varnothing$ è un ordinale
— se $\alpha$ e $\beta$ sono due ordinali, allora o $\alpha$ e $\beta$, oppure $\beta \in \alpha$ oppure ancora $\alpha$ e $\beta$
— ogni ordinale è l'insieme di quelli che lo precedono nel buon ordine $\in$
— se $\alpha$ è un ordinale, $\alpha \cup \{\alpha\}$ è un ordinale, chiamato *successore* di $\alpha$. Lo si indica sovente con $\alpha+1$

In breve, gli ordinali formano una catena unidimensionale ben ordinata transitiva, cominciando da $\varnothing$. Ogni ordinale ammette un successore, ma $\varnothing$ non è un successore. Gli assiomi dell'infinito e della scelta permettono di dimostrare che ne esistono altri, che sono chiamati *ordinali-limite.*

Se $\kappa$ è un ordinale limite, l'insieme degli ordinali-limite inferiori a $\kappa+1$ ammette un più piccolo elemento. È il più piccolo ordinale limite che si nota con $\omega$. Questo insieme $\omega$ comporta $\varnothing$ e tutti i successori formati partendo da $\varnothing$.

$$\varnothing,(\varnothing\cup\{\varnothing\}),((\varnothing\cup\{\varnothing\})\cup\{\varnothing\cup\{\varnothing\}\}),(((\varnothing\cup\{\varnothing\})\cup\{\varnothing\cup\{\varnothing\}\})\cup\{((\varnothing\cup\{\varnothing\})\cup\{\varnothing\cup\{\varnothing\}\})\}),\ldots$$

Comportano nell'ordine 0,1,2,3, … elementi**.** Gli elementi di $\omega$ sono gli *ordinali finiti.* Li si assimilano ai *numeri naturali* e costituiscono di fatto un insieme. Ogni insieme equipotente a un ordinale finito è detto *finito*. Ogni insieme equipotente ad $\omega$ è chiamato *numerabile*. Eccoci giunti ad una caratterizzazione autenticamente matematica del numero naturale, della finitezza e della numerabilità.

Ripercorriamo brevemente la traiettoria seguita. Siamo partiti dai naturali considerati come elementi dell'insieme **N**. Questo insieme, tenuto conto di qualche semplice assioma che dà le proprietà dei numeri 0,1 e quelle dell'addizione aritmetica, è essenzialmente descritto dall'*assioma dell'induzione completa*. Il buon senso ci fa credere che questo assioma è completamente adatto a caratterizzare **N**. Ma ci induce in errore. Il teorema di completezza di Gödel dimostra che in realtà questo assioma possiede altrettanti significati differenti quanti sono i modelli essenzialmente distinti della teoria aritmetica. Questi modelli formano una massa nebulosa in seno alla quale è impossibile isolare un modello unico. Per uscire da questa confusione, bisogna far ricorso a due assiomi né semplici né evidenti. L'assioma dell'infinito introduce un tipo molto particolare di insiemi infiniti. Tuttavia non permette di caratterizzare l'infinito e nemmeno il finito matematico. È l'assioma della scelta che lo consente.

Il contenuto reale di questi due assiomi sfugge al senso comune. Ciò vale particolarmente per l'assioma della scelta. Ognuno conosce l'ordine naturale sull'insieme **R** dei numeri reali. Tuttavia questo ordine non è «buono». Infatti l'intervallo aperto $]0,1[$ in **R** non possiede un più piccolo elemento. L'assioma della scelta implica comunque che esiste un buon ordine su **R**. Ma nessuno sa descrivere – o se si preferisce costruire – un tale buon ordine. Nel corso del ventesimo secolo, numerosi matematici hanno pensato che questo assioma dovesse essere sostituito dalla sua negazione[3]. L'alternativa è dunque la seguente: o si accetta l'assioma della scelta con il suo contenuto e con le sue conseguenze a volte bizzarre, oppure lo si respinge. Si è allora rinviati ad uno stadio arcaico delle matematiche; a delle matematiche costruttiviste fondate su principi evanescenti, capaci, come l'induzione completa, di assumere una quantità di forme differenti.

Diversi ricercatori hanno mostrato che i matematici che rifiutano l'assioma della scelta, se ne servono a loro insaputa nei loro lavori. Anche le proprietà più elementari degli insiemi finiti non sono compatibili senza lo strumento dell'assioma della scelta. Nell'alternativa appena descritta, solo la prima eventualità è accettabile in matematica.

Azzardiamo un'immagine. La realtà matematica è come un albero che tufferebbe le sue radici nelle profondità insiemistiche oscure. Questa oscurità è tanto densa quanti sono i modelli esistenti, insiemistici e no, della teoria degli insiemi. L'albe-

3. Su questo punto si veda l'opera di Gregory H. Moore: *Zermelo's Axiom of Choice, Its origins Development and Influence*, Springer Verlag New York, Heidelberg, Berlin, 1982.

ro matematico si offre alla vista dei profani nel posto dove il suo tronco esce dall'oscurità. Si allunga, poi si diversifica e il gioco dei suoi rami riproduce in qualche modo quello delle sue radici. Questo tronco – intendiamo i numeri naturali, la finitezza e la numerabilità – è il risultato di una elaborazione complessa. Non è in alcun modo un fondamento primitivo. Capire l'albero matematico è rendersi conto non solamente del suo tronco ma dell'insieme dei rami e delle radici.

Quali morali trarre da questa storia? Senz'altro parecchie, dato che i fatti che abbiamo osservato toccano l'essenza dell'universo matematico. Ci limiteremo dunque, in questa sede, ad effettuare una piccola incursione nel campo dell'insegnamento.

I bambini avvicinano il mondo degli oggetti matematici partendo dai numerali. Imparano un vocabolario, esercitano tecniche e affrontano enigmi dipendenti unicamente dal numerale. In seguito, giunge il momento in cui si trovano in situazioni che non possono essere ricondotte ai soli numerali: a titolo di esempio la continuità o i limiti. Sono queste nozioni che richiamano i numeri naturali e l'infinito matematico. Questo passaggio pone all'insegnamento un problema difficile.

Certi autori di programmi sentono oscuramente che qualcosa manca a monte, al livello di ciò che pensano essere «l'inizio» della matematica. Nell'intento di colmare questa lacuna, imbastiscono teorie sugli insiemi, sulle strutture algebriche, sui numeri reali, ecc. Tanto più vi mettono perseveranza in questa impresa quanto più essa si rivela penosa.

Inizialmente diffonde in tutti (insegnanti e allievi) il credo che l'edificio matematico riposi su basi solide ed evidenti. Sappiamo che non è il caso. Se esistono fondamenti in matematica, sono fatti complessi, oscuri e talvolta inaccessibili al discorso razionale. Pensiamo ai teoremi dell'incompletezza.

Inoltre questi lunghi sviluppi teorici aprono poche finestre sulla realtà, sulla varietà e sulla bellezza della matematica. Si sentono numerose lamentele concernenti l'energia e il tempo dedicato dalla scuola a questi esposti eccessivamente seriosi e generalizzanti, quando invece esistono talmente tante situazioni aritmetiche o geometriche, a portata di mano, che eccitano l'immaginazione e l'invenzione.

Infine questo accanimento teorico ha quale effetto di presentare la matematica agli allievi, e di riflesso alla popolazione, come una scienza costruttivista nella sua essenza. Tutti gli oggetti matematici sarebbero costruzioni dello spirito umano, inventati da matematici geniali, poi calati nel dominio pubblico. Imparare la matematica o imparare a servirsi di un ordinatore sarebbero, nella sostanza, due attività dello stesso tipo. La matematica sarebbe uno strumento, come altri, per risolvere problemi non matematici. È senz'altro ciò che volle dire un ministro dell'istruzione mal ispirato che dichiarò che la matematica e la lingua madre non costituivano discipline importanti perché esiste la calcolatrice tascabile e il tasto «controllo ortografia» sugli ordinatori.

Sappiamo che la scienza matematica può percepire l'esistenza di oggetti matematici che non può affatto costruire. Pensiamo al buon ordine sulla retta reale. Altrimenti detto, gli oggetti matematici sono una realtà situata al di là del potere creativo dell'uomo. La disciplina che esplora questa realtà è la scienza matematica. Essa non ne conosce che una piccola parte, anche se accresce ogni giorno la massa del suo sapere. Non bisogna confondere gli oggetti matematici con i discorsi che la scienza matematica conduce su di loro. Imparare la matematica è assumere la coscienza di una realtà che non è il semplice prodotto del nostro discorso. È anche scoprire che il nostro pensiero possiede il dono meraviglioso di gettare un po' di luce su questa realtà che lo supera.

L'educazione ha il dovere di rivelare a ognuno i poteri e le potenzialità del proprio pensiero, poteri che l'allievo spesso ignora. Il ruolo della matematica elementare in questo contesto è essenziale. Una riflessione sulla natura dei numeri naturali permette di mostrarlo.

# 2. Dall'algoritmo babilonese al frattale di Mandelbrot (la pinacoteca infinita)

Mauro Cerasoli[1]

*Eadem mutata resurgo*
*Digito, ergo sum*

On March 3rd 1879, the American Journal of Mathematics printed the short note "The Newton-Fourier imaginary problem" by the great English mathematician Arthur Cayley. This note deals with the Newton-Fourier method for solution of a numerical equation by successive approximation, relates to an equation f(x)=0. The solution is easy and elegant in the case of a quadric equation, but the next succeeding case of the cubic equation appears to present considerable difficulty and it is strictly tied to the fractal figures of Julia and of Mandelbrot.

## 1. Un problema di Cayley

Il 3 marzo 1879, sull'American Journal of Mathematics apparve la breve nota, *The Newton-Fourier imaginary problem*, a firma del grande matematico inglese Arthur Cayley. L'importanza di questa nota per la storia della matematica mi obbliga a riportarla tutta.

*The Newtonian method as completed by Fourier, or say the Newton-Fourier method, for solution of a numerical equation by successive approximation, relates to an equation f(x)=0, with real coefficients, and to the determination of a certain real root thereof a by means of an assumed approximate real value* $\xi$ *satisfying prescribed conditions: we then, from* $\xi$*, derive a nearer approximate value* $\xi_1$ *by the formula* $\xi_1 = \xi - f(\xi)/f@\xi)$*; and thence, in like manner,* $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ *approximating more and more nearly to the required root a.*

*In connexion berewith, throwing aside the restrictions as to reality, we have what I call the Newton-Fourier Imaginary Problem, as follows.*

*Take f(u), a given rational and integral function of u, with real or imaginary coefficients;* $\xi$ *a given real or imaginary value, and from this derive* $\xi_1$ *by the formula* $\xi_1 = \xi - f(\xi)/f@\xi)$*, and thence* $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ *each from the preceding one by the like formula.*

*A given imaginary quantity x+iy may be represented by a point the coordinates of which are (x,y): the roots of the equation are thus represented by point A, B, C, ..., and the values* $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ *by points* $P, P_1, P_2, \ldots$ *the first of which is assumed at pleasure, and the others each from the preceding one by the like given geometrical construction. The problem is to determine the regions of the plane, such that P being taken at pleasure anywhere within one region we arrive ultimately at the point A; anywhere within another region at the point B; and so for several points representing the roots of the equation.*

1. Università di L'Aquila, http://space.tin.it/scienza/maurocer

*The solution is easy and elegant in the case of a quadric equation, but the next succeeding case of the cubic equation appears to present considerable difficulty.*

La difficoltà di cui parla Cayley alla fine della sua nota può essere paragonata a quella che ha un uomo, dalla luna, a leggere il suo nome nella targhetta della porta di casa. Ma, come sappiamo, i satelliti spia riescono a farlo. Allo stesso modo, i computer possono disegnarci la figura che cercava Cayley per l'equazione cubica. Procediamo per ordine ricominciando dal problema per l'equazione di secondo grado. I babilonesi conoscevano un procedimento, cioè un algoritmo, per calcolare in modo sorprendente la radice di due. Il ragionamento che portava all'algoritmo era il seguente:

a) $\sqrt{2}$ è soluzione dell'equazione $x^2 = 2$;

b) supponiamo che $\xi$ sia un valore che approssima $\sqrt{2}$, allora anche $2/\xi$ deve esser un valore vicino a $\sqrt{2}$;

c) costruisco un nuovo valore $\xi_1$, che approssima $\sqrt{2}$, facendo la media aritmetica di questi due:

$$\xi_1 = \frac{\xi + 2/\xi}{2} \quad (\textit{In medio stat virtus}).$$

Scegliendo $\xi$ =1, un breve calcolo ci dice che già con 3 iterazioni troviamo il valore approssimato 1,4142. I valori esatti delle prime 4 approssimazioni sono: 3/2, 17/12, 577/408, 665857/470832. Il caso vuole che questa formula sia proprio quella del metodo di Newton-Fourier, che, come sappiamo, è il metodo delle tangenti. Il problema di Cayley, quando si considera l'equazione $z^2 = 2$ nel campo complesso, è il seguente. L'equazione ha due zeri: $-\sqrt{2}$ e $+\sqrt{2}$; si vede subito che se scelgo un numero complesso di partenza $\xi$ che appartiene al semipiano delle ascisse positive, la successione delle approssimazioni converge a $\sqrt{2}$, se invece lo scelgo nel semipiano delle ascisse negative, converge a $-\sqrt{2}$. Tralasciamo per ora il comportamento delle successioni ottenute scegliendo il punto iniziale sull'asse verticale. Il piano viene così diviso in due parti: due semipiani.

Il caso successivo, scrive Cayley, è l'equazione di terzo grado, diciamo

$$f(z) = z^3 - 1 = 0$$

I suoi zeri sono i tre punti

$$A = -1,\ B = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)/2 \text{ e } C = \left(-1 - i\sqrt{3}\right)/2$$

ottenuti in modo diretto risolvendo l'equazione. Ripetendo un ragionamento simile a quello babilonese possiamo ricavare una relazione di ricorrenza che da un punto iniziale $z_0$ porta a trovare una delle tre radici. Infatti sia $z_n$ un valore approssimato di una soluzione di $z^3 - 1 = 0$; da questa ricaviamo che anche $z_n = z_n^{-2}$ e $z_n = \sqrt{(1/z_n)} = z_n$ lo sono.

Facendo la media aritmetica di queste tre radici, si ottiene il valore approssimato successivo

$$z_{n+1} = \left(z_n + z_n^{-2} + z_n\right)/3 = \left(2\, z_n + z_n^{-2}\right)/3$$

Questa relazione di ricorrenza non è altro che quella ottenuta dalla formula generale del metodo delle tangenti di Newton-Fourier:

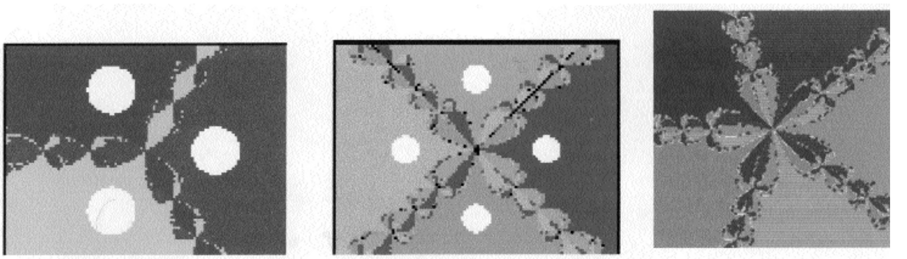
$$z_{n+1} = z_n - f(z_n)/f'(z_n)$$

però senza passare per le derivate, quindi proponibile ad una classe di liceo dove non si studia l'Analisi Matematica. Ora, scelto il punto iniziale $z_0$ andiamo a vedere dove converge la successione $z_n$. Coloriamo intanto i punti A, B e C con tre colori diversi: verde, bianco e rosso. Se la successione converge ad A coloriamo il punto $z_0$ verde, se converge a B coloriamo il punto bianco, altrimenti lo coloriamo rosso. Come viene colorato il piano? Direbbe Giulio Cesare: come viene divisa la Gallia? (*Gallia est omnis divisa in partes tres*). Questo è il problema di Newton-Fourier sui numeri complessi.

Ai tempi di Cayley non era possibile colorare a mano il piano col metodo presentato ma oggi, avendo a disposizione i computer, possiamo farlo: basta navigare su internet e cercare su Altavista la parola Mandelbrot. Come diceva il grande filosofo? Digito, ergo sum. Ad esempio, il sito:

http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/newton/examples.html [2]

riporta le figure



che sono alcune di quelle che cercava Cayley, corrispondenti all'equazione $z^n = 1$ per n=3,4,5. Tanti altri tipi di figure di Cayley sono reperibili sul sito:
http://forum.swarthmore.edu/advanced/robertd/newtons.html

Infatti ci si può divertire a disegnare figure scegliendo a piacere il polinomio f(z).

## 2. Le figure di Julia

Il matematico francese Gaston Julia (1893-1978), nel 1918 pubblicò l'articolo *Mémoires sur l'iteration des fonctions rationelles*, Jour. de Math. Pure et Appl. pp. 47-245, in cui riprendeva l'idea di Cayley. Julia era interessato allo studio della composizione di polinomi di variabile complessa. Consideriamo il semplice polinomio $f(z) = z^2$, suscitando l'esclamazione: *la solita parabola!* di qualche studente bravo. Infatti anche prima del 1918 si credeva che non ci fosse più nulla da dire sulla parabola, ma le sorprese non finiscono mai su questa terra!

2. I siti Internet erano presenti al momento della stesura del contributo: non è garantita la loro continuità nel tempo.

Iteriamo la composizione della funzione f con se stessa ottenendo la successione di punti

f(z), f(f(z)), f(f(f(z))), ...

Poi, preso un punto iniziale $z = r\,e^{i\theta}$ del piano complesso, osserviamo che la successione precedente, di termine generico $r^n\,e^{i n \theta}$, si comporta in tre diversi modi:

a) se 0≤r<1 il punto z è interno al cerchio di raggio 1, la successione converge all'origine degli assi;

b) se r =1, z è sulla circonferenza unitaria, la successione di punti cicla rimanendo sempre sulla circonferenza: questa è un insieme invariante;

c) se infine r>1, z è esterno al cerchio, la successione diverge, il punto va all'infinito.

Abbiamo diviso così il piano in due parti:

1) la prima è il cerchio, costituita da punti che non possono scappare, fuggire da lì, che chiameremo *prigione*

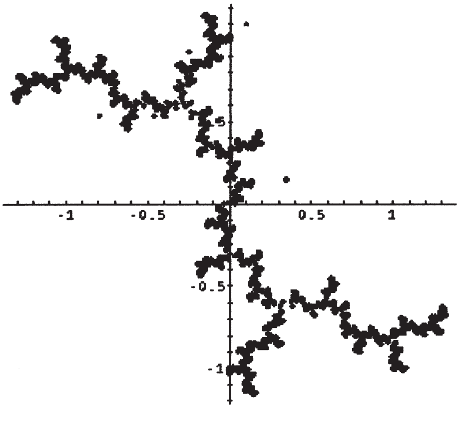
2) la seconda è costituita dai punti che scappano all'infinito, che chiameremo, *zona evasione*.

Questa circostanza si presenta anche quando, fissato un numero complesso c, si generalizza il problema passando al polinomio $f(z) = z^2 + c$ .

Infatti Julia dimostrò il seguente

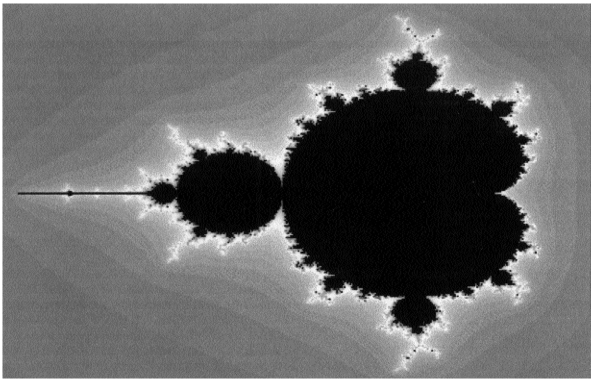
**Teorema**. Fissati un numero complesso c e la ricorrenza $z_{n+1} = z_n^2 + c$ , sia r(c)=max(2,|c|). Allora se $|z_0| > r(c)$ , il punto $z_0$ scappa all'infinito, altrimenti la successione converge ad un punto del piano (resta nella prigione).

L'insieme $J_c$ dei punti che non scappano all'infinito è chiamato figura di Julia del punto c. Queste figure non possono essere disegnate a mano con carta e penna: ci vuole il computer. La figura di Julia per c = i è la seguente:



## 3. Il frattale di Mandelbrot

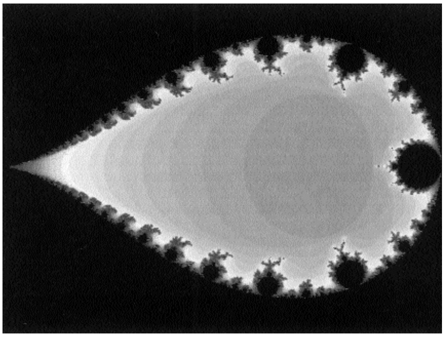
Come sono fatte le figure di Julia? La risposta è semplice: ci sono soltanto due tipi di figure dal punto di vista topologico. Una figura di Julia è o un insieme connesso oppure una polvere di Cantor, cioè un insieme di infiniti punti, simile al famoso insieme di Cantor. È questo il teorema di dicotomia di Julia e Pierre Fatou (1878-1929). Pertanto, fissato il numero complesso c, l'insieme di Julia $J_c$ o è connesso o è polvere di Cantor. Abbiamo così un'altra partizione del piano costituita dall'insieme M dei punti c per cui $J_c$ è connesso ed il suo complementare. M è il frattale di Mandelbrot rappresentato nella figura seguente.

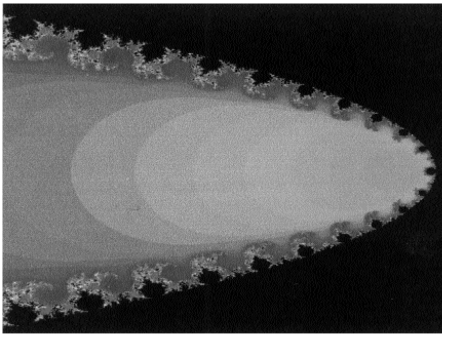


Questa figura è il più complicato insieme di punti del piano che l'uomo abbia mai pensato. È visibile ad esempio sul sito:
http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/julia/altplane.html

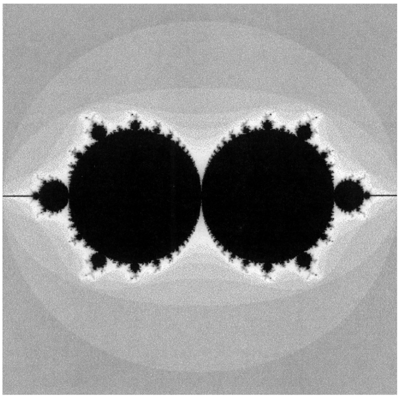
Essa fu ottenuta per la prima volta da Benoit Mandelbrot, che lavorava nei laboratori dell'IBM e che disponeva dei migliori computer dell'epoca. Infatti Mandelbrot, nel 1977, aveva pubblicato *Fractals-Form, Chance, and Dimension* che lo aveva già reso famoso per quelle strane figure tutte fatte di pezzettini spigolosi. In quel volume non appaiono i nomi di Cayley, Julia e Fatou. Nel 1980, Mandelbrot pubblica *Fractals aspects of the iteration of* $z \mapsto \lambda z(1-z)$ *for complex* $\lambda$ *and* z, Annals NY Acad. Sciences 357(1980) 249-259, e scopre il suo frattale.

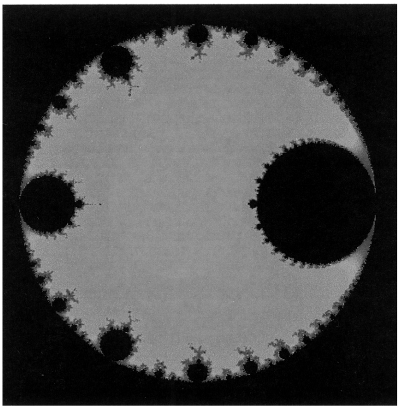
Sempre sull'ultimo sito citato sono visibili altri frattali di Mandelbrot come i seguenti

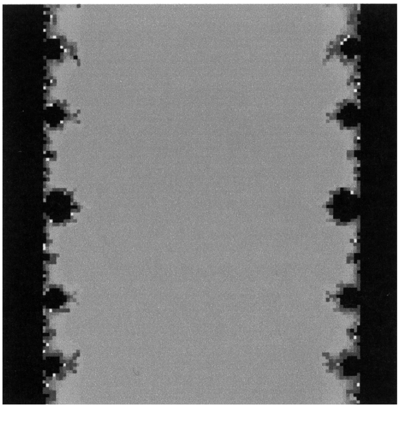




Ottenuti passando da c a –1/c, 4/(1–4 c). Se invece si considera l'iterazione $z \mapsto \lambda z(1-z)$ dell'articolo di Mandelbrot, i frattali seguenti[3]







corrispondono a λ, 1/λ, 1/(λ–1).

3. Desidero ringraziare l'amico Eugenio Mercuri per la bravura nel prendere da Internet le immagini e ad inserirle nel testo.

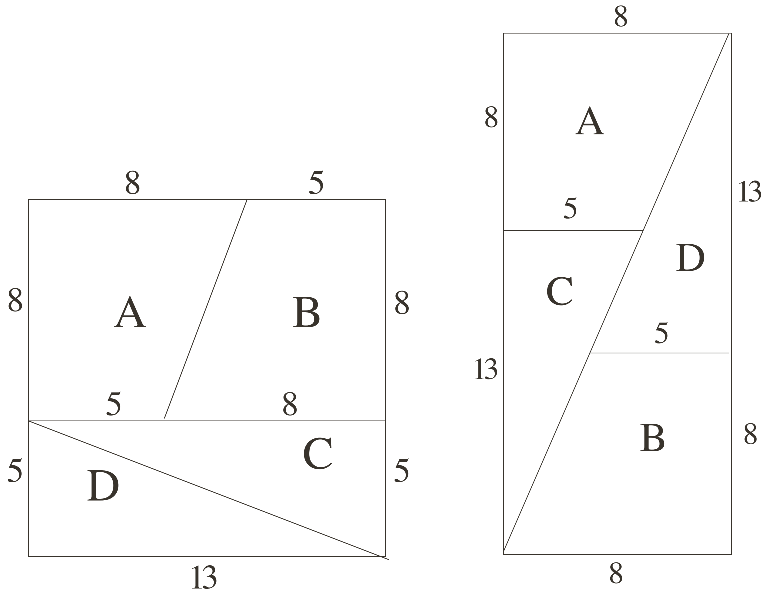
# 3. Tre curiosità sui numeri di Fibonacci

Francesco Cavalli

Starting from the apparent and known paradox of the transformation of a square into a rectangle through dissection, with a reduction of the area of one unit (the square of area 169 seems equivalent to the rectangle of area 168), the paper devotes special attention to the fact that in both figures all the measures are expressed by Fibonacci numbers (5;8;13;21). The article introduces a study on some interesting peculiarities of Fibonacci numbers.

## 1. Il sezionamento imperfetto

Tutti conoscono l'apparente paradosso della trasformazione di un quadrato in un rettangolo tramite sezionamento, con una diminuzione di un'unità dell'area.




L'area del quadrato vale 169 unità, mentre quella del rettangolo è di 168 unità.
Il paradosso si spiega facilmente osservando i rapporti tra i lati dei trapezi e dei triangoli rettangoli (il disegno è volutamente ingannevole).

È però interessante notare come, nelle due figure, tutte le misure sono espresse da numeri di Fibonacci (5 ; 8 ; 13 ; 21)

I numeri di Fibonacci costituiscono una successione dove ogni elemento (a partire dal terzo) è la somma dei due precedenti:

$$F_0 = 0 \qquad F_1 = 1 \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Il nome di questa successione deriva da un problema sulla generazione dei conigli contenuto nel Liber Abaci di Leonardo da Pisa, detto Fibonacci.

Il passaggio dal quadrato al rettangolo può essere riproposto con altre misure, ad esempio con il passaggio da un quadrato di area 64 al rettangolo di area 65. Anche in questo caso le misure in gioco sono espresse da numeri di Fibonacci (3; 5; 8; 13).

Si nota come i due casi differiscono solo per il particolare che nel primo esempio, il quadrato ha un'unità in più del rettangolo, mentre nel secondo vale il contrario.

$$13^2 - 1 = 8 \cdot 21 \qquad 8^2 + 1 = 5 \cdot 13$$

In sintesi si può enunciare il teorema:

$$F_n^{\,2} + (-1)^n = F_{n-1} \cdot F_{n+1}$$

La dimostrazione è per induzione:

(1) $F_1^{\,2} + (-1)^1 = F_0 \cdot F_2$

$F_2^{\,2} + (-1)^2 = F_1 \cdot F_3$

(2) Sia $F_{k-1} \cdot F_{k+1} = F_k^{\,2} + (-1)^k$

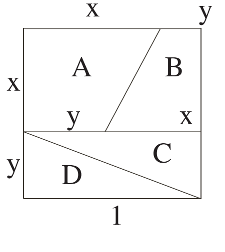
allora $F_k \cdot F_{k+2} = F_k \cdot (F_k + F_{k+1}) = F_k^{\,2} + F_k \cdot F_{k+1} = F_{k-1} \cdot F_{k+1} - (-1)^k + F_k \cdot F_{k+1} =$

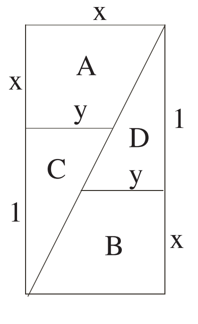
$= F_{k+1} \cdot (F_{k+1} + F_k) + (-1)^{k+1} = F_{k+1}^2 + (-1)^{k+1}$

Il teorema è quindi dimostrato.

La relazione tra i numeri di Fibonacci e il rapporto aureo consente di trovare la soluzione esatta al problema del sezionamento.

Si considera un quadrato di lato 1.



Il sezionamento è esatto se $\frac{1}{y} = \frac{x+1}{x}$

Sostituendo y= 1–x si ha $\frac{1}{1-x} = \frac{x+1}{x}$

$x = 1 - x^2 \qquad x^2 + x - 1 = 0 \qquad x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Quindi $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ossia $x = \frac{1}{\Phi}$ ( $\Phi$ rapporto aureo)

È allora chiaro che con numeri di Fibonacci molto grandi, il cui rapporto si avvicina a F, la ricostruzione sembrerà sempre più precisa, anche se permane una differenza di 1.

$F_{50}^2 + 1 = F_{49} \cdot F_{51}$
$12586269025^2 + 1 = 7778742049 \,.\, 20365011074 = 158414167969674450626$

## 2. Numeri di Fibonacci e terne pitagoriche

Una terna di numeri naturali (a;b;c) è detta pitagorica se a, b, c esprimono le misure dei lati di un triangolo rettangolo, cioè se

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Si dimostra facilmente che, per ogni coppia di numeri naturali (m ; n), con m≠0, n≠ 0 e m>n, i numeri

$$a = m^2 - n^2 \qquad b = 2\,m\,n \qquad c = m^2 + n^2$$

costituiscono una terna pitagorica.

Si osserva che i numeri di Fibonacci 5, 13, 34, 89,… sono ipotenuse di triangoli rettangoli. Si tratta dei numeri $F_{2n+1}$.

Dimostro dapprima il teorema: $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2\,n+1}$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

si pone $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = \frac{1}{5}\left(\Phi^{2n} + \varphi^{2n} - 2\,\Phi^n\,\varphi^n\right) + \frac{1}{5}\left(\Phi^{2n+2} + \varphi^{2n+2} - 2\,\Phi^{n+1}\,\varphi^{n+1}\right)$$

$\Phi \cdot \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -1$ quindi $-2\,\Phi^n\,\varphi^n - 2\,\Phi^{n+1}\,\varphi^{n+1} = 0$

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = \frac{1}{5}\left(\Phi^{2n} + \varphi^{2n} - 2\,\Phi^n\,\varphi^n + \Phi^{2n+2} + \varphi^{2n+2}\right) = \frac{1}{5}\left(\Phi^{2n}\left(1+\Phi^2\right) + \varphi^{2n}\left(1+\varphi^2\right)\right)$$

$$1+\Phi^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2} = \Phi\cdot\sqrt{5} \qquad\qquad 1+\varphi^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2} = -\varphi\cdot\sqrt{5}$$

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = \frac{1}{5}\left(\Phi^{2n}\,\Phi\,\sqrt{5} - \varphi^{2n}\,\varphi\,\sqrt{5}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{2n+1} - \varphi^{2n+1}\right) = F_{2n+1}$$

Si ottiene allora una terna pitagorica con

$$c = F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}$$

$$a = F_{n+1}^2 - F_n^2$$

$$b = 2\,F_{n+1}\,F_n$$

Esempio:

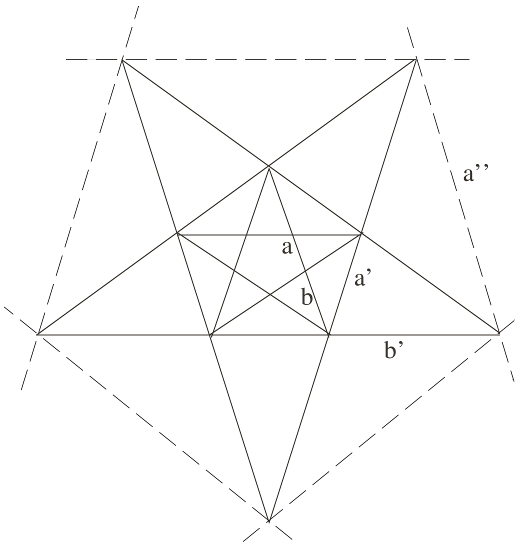
| n | a | b | c |
|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 5 |
| 3 | 5 | 12 | 13 |
| 4 | 16 | 30 | 34 |
| 5 | 39 | 80 | 89 |

La curiosità consiste nel fatto che l'area di questi triangoli rettangoli è espressa dal prodotto di quattro numeri di Fibonacci consecutivi.

$$\frac{1}{2}\,a\,b = \frac{1}{2}\left(F_{n+1}^2 - F_n^2\right)\cdot 2\,F_{n+1}\,F_n = \left(F_{n+1}+F_n\right)\left(F_{n+1}-F_n\right)F_{n+1}\,F_n = F_{n+2}\,F_{n-1}\,F_{n+1}\,F_n$$

## 3 Numeri di Fibonacci e pentagono regolare

(rielaborazione da un problema presentato sul testo «*What to solve?*» di Judita Cofman, Oxford1989)




Il pentagono regolare è certamente una figura affascinante; già nell'Antichità si erano osservate le sue proprietà, in particolare il fatto che le diagonali formano una stella a cinque punte con al centro un nuovo pentagono regolare. Lo studio del rapporto tra il lato e la diagonale costituiva un aspetto dell'indagine sugli incommensurabili e non è certo estraneo alla fama che il rapporto aureo avrebbe poi avuto in diversi ambiti anche non strettamente matematici.

Anche prolungando i lati di un pentagono regolare si ottiene una stella, le cui cinque punte definiscono un nuovo pentagono. Abbiamo quindi una successione di pentagoni e stelle che si prolunga all'infinito nei due sensi.

Dal disegno, con semplici considerazioni di geometria elementare (simmetrie, congruenze di angoli, triangoli isosceli), se evincono le relazioni:

a' = a+b    b' = a'+b = a+2b

La continuazione è del tutto naturale:

a" = a'+b' = 2 a+3 b    b" = a"+b' = 3 a+5 b

a'" = a"+b" = 5 a+8 b    b'" = a'"+b" = 8 a+13 b

Ecco quindi apparire i numeri di Fibonacci!

Riunendo le due successioni in una sola:

$s_1, s_2, s_3, \ldots..$ con $s_1 = a$; $s_2 = b$;

$s_3 = a+b$; $s_4 = a+2b$; $s_5 = 2a+3b$; ….

Abbiamo la formula ricorsiva $s_n = s_{n-2} + s_{n-1}$ .

e quella esplicita: $s_n = F_{n-2}\, a + F_{n-1}\, b$

Procedendo verso l'interno si riprendono le relazioni
a' = a+b, b' = a'+b = a+2 b
per risolvere b = b'–a', a = a'–b = 2 a'–b'.

Si costruisce una nuova successione decrescente $c_1$, $d_1$, $c_2$, $d_2$, …. con $c_k$ lato della k-esima stella e $d_k$ lato del k-esimo pentagono.

$$c_{k+1} = c_k - d_k \qquad d_{k+1} = d_k - c_{k+1}$$

Riunendo le due successioni in una sola:
$t_1$, $t_2$, $t_3$, … con $t_1$=$c_1$=b; $t_2$=$d_1$= a; $t_3$=b–a; $t_4$=2a–b; $t_5$=2b–3a; …

Abbiamo la formula ricorsiva $t_n = t_{n-2} - t_{n-1}$

e quella esplicita $t_n = (-1)^n F_{n-1}\, a + (-1)^{n+1} F_{n-2}\, b$

La successione $t_n$ converge verso 0, quindi

$$\lim_{n\to\infty}\left[(-1)^n F_{n-1}\, a + (-1)^{n+1} F_{n-2}\, b\right] = 0$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n-1}}{F_{n-2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{b}{a}$$

Tornando al disegno iniziale: $\frac{b}{a} = \frac{a+b}{b} = 1 + \frac{a}{b}$
da cui

$\frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$ , cioè il rapporto aureo!

Un modo inusuale di trovare il limite del rapporto tra due numeri di Fibonacci consecutivi, senza ricorrere alla formula di Binet.

# 1. «Che cos'è?» Modelli mentali evocati da espressioni algebriche: la scelta del contesto[1]

Giorgio T. Bagni[2]

In this paper some models associated to the idea of straight line and of circle in the learning of mathematics are investigated, referred to Italian High School (*Liceo scientifico*, students aged 16-18 years). By some tests, we show that the influence of the didactical contract upon this matter is remarkable.

## 1. Introduzione: modelli e interpretazione

Lo studio del modello mentale (interno) che l'allievo si forma relativamente ad un concetto matematico deve avvenire indirettamente, attraverso l'analisi dei modelli esterni, delle traduzioni espresse dall'allievo stesso in un linguaggio[3]. La conoscenza diretta del modello mentale (interno) di un concetto sarebbe assai importante, in quanto darebbe la possibilità di analizzare individualmente le caratteristiche dell'apprendimento del concetto in questione; come sopra notato, però, tale modello interno non può essere *mai* comunicato (esternamente). La presente ricerca è dedicata al rilevamento dei modelli esterni suscitati da alcune espressioni, il cui contesto interpretativo, come vedremo, sarà influenzato anche da alcune clausole del contratto didattico.

In effetti, però, non condurremo un'indagine sui differenti modelli esterni relativi ad un (singolo) concetto: sceglieremo un'espressione (nel nostro caso: alcune equazioni algebriche) e cercheremo di capire a quale modello essa viene associata dall'allievo, in quale contesto (per una ricerca sulla visualizzazione si veda: Kaldrimidou, 1987; una trattazione generale è in: D'Amore, 1993 e 1999).

1. Alcuni risultati riportati in questo lavoro sono stati presentati nell'ambito delle *Due giornate di aggiornamento per docenti di matematica* tenute a La Perfetta, Arzo (Ticino) il 27-28 agosto 2001.
2. Dipartimento di Matematica, Università di Roma «La Sapienza»
3. Considerando che la terminologia che impiegheremo in questo lavoro è diffusa, ma non sempre totalmente condivisa, riteniamo necessario fissare alcuni punti di riferimento (seguiremo a tale proposito: D'Amore & Frabboni, 1996). Chiameremo *immagine mentale* ciò che viene elaborato dall'allievo, anche involontariamente, a fronte di una qualsiasi sollecitazione (sia interna che proveniente dall'esterno): si tratta di un'immagine interna, pertanto non espressa, almeno inizialmente. Tutte le immagini mentali riferite ad un concetto costituiscono il *modello mentale* relativo a tale concetto (Johnson-Laird, 1988). Le concezioni così formate devono spesso essere espresse, comunicate: mediante una specifica *traduzione*, dunque, si viene a creare un modello *esterno*, esprimibile, frequentemente, in un ben determinato linguaggio. Ogni forma di comunicazione di un contenuto, di un qualsiasi messaggio matematico, avviene dunque con l'impiego di modelli esterni (Shepard, 1980).

In particolare, ci occuperemo delle interpretazioni che gli allievi associano ad alcune semplici espressioni, come ad esempio: «ax+by+c = 0» . La scelta di collocare tale espressione in un contesto geometrico (evocando, ad esempio, modelli del concetto di «retta» nell'ambito della geometria analitica) oppure in un contesto prettamente algebrico (parlando cioè di «equazione di primo grado» o addirittura, impropriamente, di «polinomio» ) riflette un atteggiamento ben diverso, che ha motivazioni interessanti (le quali, come sopra anticipato, risulteranno legate anche al contratto didattico) e conseguenze didattiche rilevanti (ad esempio: Webb, 1979; Schoenfeld, 1986; Duval 1994).

Abbiamo esaminato le reazioni di alcuni allievi della scuola secondaria superiore e di alcuni studenti universitari:

**Struttura della ricerca**

**1. Scuola secondaria superiore**
*Test 1: l'interpretazione di formule da parte di studenti di III-IV Liceo scientifico (17-18 anni)*

**2. Università**
*Test 2: l'interpretazione di formule da parte di studenti universitari del corso di laurea in matematica(22-23 anni)*

**3. Conclusioni generali**
*La scelta del contesto ed il contratto didattico*

## 2. Test 1 (Scuola secondaria superiore)

### 2.1. Metodologia della ricerca

L'analisi del comportamento degli allievi è stata condotta esaminando due classi di III liceo scientifico (24 e 27 allievi) ed una classe di IV liceo scientifico (26 allievi), per un totale di 77 allievi (in particolare, le due classi di III sono state suddivise in quattro gruppi di 12, 12, 13, 14 allievi, che indicheremo con le lettere A, B, C, D; la classe di IV in due gruppi di 13 allievi ciascuno, che indicheremo con le lettere E, F), a Treviso.

Tutti gli allievi conoscevano gli elementi di geometria analitica relativamente alla retta ed alla circonferenza. In particolare, le equazioni della retta e della circonferenza erano state date (sia dall'insegnante, sia nel libro di testo in uso) nelle forme generali:

$$ax+by+c = 0 \qquad y = mx+q \qquad x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

(La scelta delle lettere, nelle spiegazioni, era stata quella qui indicata).

Gli allievi della classe IV conoscevano i primi elementi di goniometria, ed in particolare la lettura delle funzioni goniometriche di un angolo fissato con riferimento alla «circonferenza goniometrica» (la circonferenza, nel piano cartesiano, di raggio unitario e con il centro coincidente con l'origine degli assi).

A ciascun gruppo è stato proposto un test, nel quale veniva chiesto di «interpretare» , mediante una breve risposta, un'espressione matematica (o più espressioni matematiche). Le espressioni da interpretare erano le seguenti:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Test 1-A: | (classe III) | | $ax+by+c = 0$ |
| Test 1-B: | (classe III) | | $hx+ty+g = 0$ |
| Test 1-C: | (classe III) | (a) | $y = mx+q$ |
| | | (b) | $hx+ty = u$ |
| Test 1-D: | (classe III) | (a) | $hx+ty+g = 0$ |
| | | (b) | $y = wx+d$ |
| Test 1-E: | (classe IV) | (a) | $y = mx+q$ |
| | | (b) | $ax+by+c = 0$ |
| | | (c) | $y = mx$ |
| | | (d) | $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$ |
| | | (e) | $x^2+y^2=1$ |
| Test 1-F: | (classe IV) | | $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$ |

Nel caso in cui le espressioni fossero più di una (test C, D, E), erano state indicate più righe per la risposta, tante quante le espressioni da interpretare.

Gli allievi hanno svolto la prova individualmente; non è stata permessa la consultazione di libri o di appunti. Tempo concesso: due minuti (test A, B, C, D, F); tre minuti (test E). Nei paragrafi seguenti, a fianco dei risultati, abbiamo indicato con sigle il contesto da cui l'allievo ha tratto i termini della risposta:

| | |
|---|---|
| GE | Risposta con linguaggio geometrico |
| AN | Risposta con linguaggio analitico |
| AL | Risposta con linguaggio algebrico |

## 2.2. Test 1-A (Classe III)

Riportiamo i risultati nella tabella seguente:

| | $ax+by+c = 0$ | allievi | (totale: 12 allievi) |
|---|---|---|---|
| GE | una retta | 7 | 59% |
| AN | l'equazione di una retta | 4 | 33% |
| AL | un'equazione di primo grado | 1 | 8% |

I risultati del test[4] suggeriscono le seguenti considerazioni.

4. Qui e nel seguito abbiamo raggruppato le risposte date dagli allievi per tipologie; le percentuali delle risposte dei test saranno sempre arrotondate all'unità.

Innanzitutto, notiamo che tutti gli studenti hanno dato una singola risposta: la presenza della (unica) riga ha evidentemente indotto gli allievi a interpretare come coercitiva l'implicita raccomandazione di dare una sola risposta (questa osservazione può valere per tutti i sei test che costituiscono la presente ricerca).

La quasi totalità degli allievi (globalmente il 92%) ha interpretato l'espressione data nell'ambito della geometria analitica. Si osservi che la forma dell'equazione proposta coincide esattamente (anche per quanto riguarda le lettere impiegate) con quella indicata nel libro di testo e nella spiegazione in classe.

Gli allievi sono stati intervistati singolarmente, ma alla presenza di tutti i compagni, in aula[5]. Coloro i quali avevano fatto riferimento alla retta hanno confermato la propria posizione; ad esempio:

«È l'equazione canonica della retta» (Marta).

«L'equazione data rappresenta una retta, e può essere scritta nella forma esplicita» (Aldo).

L'unico allievo che ha fatto riferimento al contesto algebrico ha affermato:

«Lo so che può essere una retta nel piano cartesiano, ma prima di tutto è un'equazione. Che poi sia una retta viene dopo, e non è detto che lo sia sempre» (Giulio).

Le considerazioni sui risultati del test, abbinate a quanto emerso dalle interviste agli allievi ci consentono dunque di concludere che l'interpretazione dell'equazione $ax+by+c = 0$ avviene nell'ambito della geometria analitica. Supponiamo che l'esatta coincidenza della forma di tale equazione con la forma canonica implicita dell'equazione cartesiana della retta (così come essa era stata introdotta agli allievi) possa aver contribuito ad orientare in tale modo la scelta degli studenti[6]. Questa supposizione sarà avvalorata dai risultati dei test seguenti.

## 2.3. Test 1-B (Classe III)

Riportiamo i risultati nella tabella seguente:

| | $hx+ty+g = 0$ | allievi | (totale: 12 allievi) |
|---|---|---|---|
| GE | una retta | 5 | 42% |
| AN | l'equazione di una retta | 2 | 17% |
| AL | un'equazione di primo grado | 4 | 33% |
| AL | un polinomio | 1 | 8% |

I risultati sembrano confermare solo in parte le tendenze espresse nel test precedente. Infatti, se qualitativamente le preferenze degli allievi potrebbero dirsi con-

5. Queste modalità hanno caratterizzato le interviste relative a tutti i test.
6. Bisogna ovviamente considerare anche la quotidiana consuetudine degli allievi con il piano cartesiano: lo svolgimento di problemi e di esercizi di geometria analitica è un'attività frequente ed importante per gli studenti della III classe del liceo scientifico.

fermate, quantitativamente appare una sensibile (sebbene non estremamente rilevante) differenza: gli studenti che fanno riferimento all'ambito della geometria analitica sono, stavolta, il 59%, e tale risultato conferma solo in parte l'adesione plebiscitaria (92%) del test precedente.

Dalle interviste traiamo alcune spiegazioni interessanti. Ad esempio:

«Potrebbe trattarsi di una retta, ma le lettere h, t, g non sono quelle che compaiono nella solita equazione della retta. Questo mi ha fatto pensare che l'equazione può non essere intesa come una retta» (Linda).

«Ho pensato che quelle strane lettere potessero voler dire che non si trattava di una retta, come viene subito in mente, ma di qualcosa di diverso. Insomma, una specie di suggerimento di chi ha preparato l'esercizio» (Antonio).

Commenteremo questa intervista nel prossimo paragrafo.

Anche altri allievi, nelle interviste, citano l'insolita scelta delle lettere. Una scelta delle lettere diversa da quella usuale ha dunque portato alcuni allievi a modificare il contesto in cui l'espressione algebrica data è stata interpretata. Tale fenomeno induce a ritenere confermata l'ipotesi precedentemente espressa, ovvero che l'esatta coincidenza dell'espressione assegnata con una delle equazioni cartesiane della retta (nella forma generale presentata sia nella spiegazione dell'insegnante, sia nel libro di testo in uso) può orientare significativamente l'interpretazione dell'equazione in questione verso l'ambito della geometria analitica.

La giustificazione di Antonio riflette la volontà dello studente di interpretare con cura la richiesta dell'insegnante, anche sulla base dei dettagli: in tale atteggiamento notiamo una notevole rilevanza comunque assegnata anche ai minimi particolari (in questo caso insignificanti: la scelta di una lettera al posto di un'altra), che potrebbe essere collegata a qualche clausola del contratto didattico.

## 2.4. Test 1-C (Classe III)

Riportiamo i risultati nella tabella seguente:

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) | $y = mx+q$ | allievi | (totale: 13 allievi) |
| GE | una retta | 9 | 69% |
| AN | l'equazione di una retta | 3 | 23% |
| AL | una funzione | 1 | 8% |

| | | | |
|---|---|---|---|
| (b) | $hx+ty = u$ | allievi | (totale: 13 allievi) |
| GE | una retta | 6 | 46% |
| AN | l'equazione di una retta | 3 | 23% |
| AL | un'equazione di primo grado | 3 | 23% |
| AL | un'equazione di secondo grado | 1 | 8% |

I risultati del test sembrano confermare quelli dei due test precedenti. L'equazione esattamente coincidente con quella usualmente impiegata per indicare una retta nel piano cartesiano (punto a) viene direttamente collegata al concetto di retta dalla quasi totalità degli allievi. Nel punto (b), il 69% fa ancora riferimento all'interpretazione cartesiana.

Tra le giustificazioni espresse nel corso delle interviste ricordiamo:

«Non ero sicuro della mia risposta al punto (b): mi sarei aspettato l'equazione ax+by+c = 0; in quella del test, inoltre, la u al secondo membro diventerebbe –u nel primo. Ma ho pensato che questo non ha importanza ed ho scritto che anche la seconda equazione rappresenta una retta» (Mario).

«Ho pensato che un'equazione che incomincia con "y =" è sempre una funzione, perché quando pongo una *x* ottengo un'unica y» (Chiara).

La risposta che fa riferimento ad un'«equazione di secondo grado» è frutto di una distrazione, subito riconosciuta dall'allievo.

Le conclusioni esposte nei paragrafi precedenti sono confermate: la forma dell'equazione influenza l'interpretazione da parte degli allievi.

Interessante è la citazione del concetto di funzione (Vinner, 1992): sembra che la verifica della caratteristica fondamentale della definizione di funzione sia considerata elemento di primaria importanza dallo studente; ciò potrebbe riflettere un'analoga importanza attribuita a tale questione da parte dell'insegnante.

## 2.5. Test 1-D (Classe III)

Riportiamo i risultati nella tabella seguente:

| (a) | hx+ty+g = 0 | allievi | (totale: 14 allievi) |
|---|---|---|---|
| GE | una retta | 5 | 36% |
| AN | l'equazione di una retta | 7 | 50% |
| AL | un'equazione di primo grado | 2 | 14% |

| (b) | y = wx+d | allievi | (totale: 14 allievi) |
|---|---|---|---|
| GE | una retta | 5 | 36% |
| AN | l'equazione di una retta | 7 | 50% |
| AL | un'equazione di primo grado | 2 | 14% |

Questo test ricalca solo apparentemente il precedente: mentre infatti nel test C le due equazioni proposte erano disomogenee in quanto alla scelta delle lettere in esse contenute (con ciò intendendo che la prima presentava una scelta usuale, la seconda una scelta insolita), nel presente test *entrambe* le equazioni sono scritte con lettere non usuali. Questa... coerenza ha forse fatto sì che l'86% degli allievi abbia ugualmente individuato come spontanea l'interpretazione nell'ambito della geometria analitica.

Un'intervista sembra confermare quanto ora supposto:

«Le equazioni del test sono le equazioni della retta con le lettere cambiate. La prima è quella implicita, la seconda è quella esplicita. Ma non importa quali lettere scegliamo, dunque possiamo dire che quelle equazioni sono proprio quelle della retta» (Giovanni).

L'abbinamento di due equazioni *entrambe* scritte con lettere inusuali può rendere superabile, per alcuni allievi, la difficoltà di interpretare le equazioni date come forme dell'equazione cartesiana della retta. Molti studenti hanno riconosciuto la struttura formale delle tradizionali equazioni della retta ed hanno dunque optato per l'interpretazione nell'ambito della geometria analitica.

## 2.6. Test 1-E (Classe IV)

Riportiamo i risultati nella tabella seguente:

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) | $y = mx+q$ | allievi | (totale: 13 allievi) |
| GE | una retta | 5 | 38% |
| AN | l'equazione di una retta | 8 | 62% |
| | | | |
| (b) | $ax+by+c = 0$ | allievi | (totale: 13 allievi) |
| GE | una retta | 5 | 38% |
| AN | l'equazione di una retta | 7 | 54% |
| AL | un'equazione di primo grado | 1 | 8% |
| | | | |
| (c) | $y = mx$ | allievi | (totale: 13 allievi) |
| GE | una retta (passante per l'origine) | 6 | 46% |
| AN | l'equazione di una retta | 6 | 46% |
| AL | una proporzionalità diretta | 1 | 8% |
| | | | |
| (d) | $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ | allievi | (totale: 13 allievi) |
| GE | una circonferenza | 5 | 38% |
| AN | l'equazione di una circonferenza | 6 | 46% |
| AL | un'equazione di secondo grado | 1 | 8% |
| — | nessuna risposta | 1 | 8% |
| | | | |
| (e) | $x^2 + y^2 = 1$ | allievi | (totale: 13 allievi) |
| GE | una circonferenza | 3 | 23% |
| GE | un cerchio | 1 | 8% |
| GE (AN) | la circonferenza goniometrica | 7 | 54% |
| AN | l'equazione di una circonferenza | 2 | 15% |

Nei risultati del presente test ritroviamo alcune indicazioni emerse nei test precedenti. L'insieme di cinque equazioni formalmente identiche a quelle utilizzate per introdurre le rette e le circonferenze nel piano cartesiano non lascia dubbi alla maggior parte degli allievi su quale sia il contesto nel quale interpretare le espressioni date.

Sottolineiamo una interessante giustificazione data, nel corso delle interviste, dall'allieva che ha interpretato l'equazione $x^2 + y^2 = 1$ come un «cerchio»:

> «Ho sbagliato perché ho subito pensato alla circonferenza col centro nell'origine. Mi sono immaginata il disegno di quel cerchio ed ho scritto: «cerchio». Non ho pensato che c'era solo il bordo» (Silvia).

Come sopra notato, l'interpretazione nell'ambito della geometria analitica appare decisa. La denominazione «circonferenza goniometrica» (indicata dal 54% degli allievi) è indotta dalla consuetudine degli studenti con tale oggetto matematico, di impiego assai frequente negli esercizi di goniometria.

Interessante è la posizione di Silvia, che scrive «circonferenza» con riferimento a $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$ e «cerchio» con riferimento a $x^2+y^2=1$. Dalla sua giustificazione emerge che proprio l'avere mentalmente visualizzato una ben determinata figura (la circonferenza di centro l'origine e di raggio unitario) ha provocato l'adesione ad una (peraltro errata) denominazione, appunto «cerchio»; adesione che non si è invece verificata nel caso dell'equazione più generale $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$, che non identifica una ben determinata (e dunque immaginabile) figura.

## 2.7. Test 1-F (Classe IV)

Riportiamo i risultati nella tabella seguente:

| | $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$ | allievi | (totale: 13 allievi) |
|---|---|---|---|
| GE | una circonferenza | 4 | 31% |
| AN | l'equazione di una circonferenza | 8 | 61% |
| — | nessuna risposta | 1 | 8% |

Il cambio delle lettere (dalle solite $\alpha, \beta, \gamma$ alle... inusuali n, s, p) non causa, nel caso ora esaminato, alcuno spostamento apprezzabile dell'interpretazione dall'ambito della geometria analitica. I risultati del presente test non sembrano quindi riflettere quelli del test B, in cui, con riferimento all'equazione della retta, una scelta delle lettere diversa da quella usuale ha portato alcuni allievi a modificare il contesto in cui l'espressione data è stata interpretata.

Riportiamo una giustificazione di un allievo:

> «L'equazione data è una circonferenza nel piano cartesiano. Bisogna però controllare che il raggio sia positivo» (Marco, che intende sottolineare la positività del quadrato del raggio).

L'equazione $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$ non può essere considerata come una «generica» equazione di secondo grado: troppe sono, infatti, le sue peculiarità formali perché in essa non sia riconosciuta l'equazione di una circonferenza (Marco si limita a segnalare uno dei tradizionali «controlli» suggeriti in ambito didattico agli allievi della scuola secondaria: il quadrato del raggio non deve essere negativo...).

## 2.8. Conclusioni (Scuola secondaria superiore)

I test sopra illustrati sono riferiti ad un campione piuttosto esiguo di studenti (e potrebbero dunque essere verificati in senso ben più generale, ovvero con riferimento a campioni di maggiore rappresentatività, rispetto ad una popolazione ben determinata); tuttavia essi esprimono alcune tendenze che ci sembrano essere abbastanza chiare.

Innanzitutto possiamo notare che, almeno nel caso degli elementi della geometria analitica, da noi esaminati, la prima interpretazione fa quasi sempre riferimento alla visualizzazione; è qui spontaneo riferirsi alla teoria dei concetti figurali di E. Fischbein, e segnatamente ricordare l'osservazione secondo la quale «l'integrazione delle proprietà concettuali e figurali in strutture mentali unitarie, con la predominanza dei contenuti concettuali su quelli figurali, non è un processo naturale» (Fischbein, 1993, p. 156). Questa «predominanza dei contenuti concettuali su quelli figurali», nella situazione da noi esaminata, sembra essere lontana: le equazioni proposte vengono ad essere utilizzate dagli allievi quasi esclusivamente in modelli esterni espressi (principalmente) in termini visuali.

Il contesto nel quale viene interpretata un'espressione matematica non viene scelto sulla base, ad esempio, della massima generalità (da questo punto di vista, ad esempio, un'equazione di primo grado in due incognite dovrebbe essere interpretata proprio come... un'equazione di primo grado in due incognite, né più né meno: una sua interpretazione analitica, peraltro lecita, potrebbe essere considerata alla stregua di una ulteriore particolarizzazione del concetto). La generalità, al contrario, viene minimizzata: l'allievo sembra propendere per l'interpretazione più particolare[7], con ciò cercando, forse, di assecondare l'intenzione dell'insegnante, di sfruttare ogni suo implicito suggerimento.

È qui che possiamo rilevare l'azione del contratto didattico: da un lato, infatti, il comportamento dell'allievo è influenzato dall'abitudine ad occuparsi di esercizi di geometria analitica nelle classi III e IV della scuola secondaria superiore; ma l'importanza attribuita (anche consapevolmente) alla scelta delle lettere impiegate nella scrittura dell'equazione può essere ricollegata al contratto didattico, e in particolare a quelle clausole che prevedono, per l'attività didattica, la «ripetizione delle modalità» (sull'azione di tali clausole indichiamo, ad esempio: D'Amore, 1993; D'Amore & Frabboni, 1996).

## 3. Test 2 (Università)

### 3.1. Metodologia della ricerca

Abbiamo ritenuto interessante esaminare il comportamento di alcuni studenti universitari mediante un test analogo al precedente (sebbene il diverso contesto scolastico abbia suggerito di impiegare un test diverso sia per il contenuto che per le modalità di effettuazione). Abbiamo esaminato 22 studenti del III-IV anno della facoltà di Scienze, corso di laurea in Matematica.

A ciascun allievo è stato proposto un test, nel quale veniva chiesto di «interpretare», mediante una breve risposta, un'espressione matematica. Le espressioni da interpretare (assegnate una alla volta, nell'ordine indicato) erano:

7. Potremmo dire che l'allievo finisce per considerare la *generalità* come *genericità*, dunque in termini negativi, da evitare.

Test 2-A: $q = y$

Test 2-B: $hy - c = k^2x$

Test 2-C: $0 = mx$

Test 2-D: $hx–ay = 0$

Test 2-E: $3x^2 - \alpha x + 1 + 3y^2 = 0$

Test 2-F: $ax+by+c = 0$

Test 2-G: $y = mx+q$

Test 2-H: $x^2 + y^2 = 1$

Test 2-I: $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$

Gli allievi hanno svolto la prova individualmente; non è stata permessa la consultazione di libri o di appunti. Tempo concesso: un minuto per ciascun test.

### 3.2. Test 2-A

Riportiamo i risultati nella tabella seguente:

| | $q = y$ | allievi | (totale: 22 allievi) |
|---|---|---|---|
| GE | Retta | 11 | 50% |
| AN | Equazione di una retta | 1 | 5% |
| AL | Equazione (identità, uguaglianza...) | 10 | 45% |

Poco più della metà degli allievi, dunque, ha optato per un'interpretazione analitica: la scrittura $q = y$ può dunque evocare una lettura nell'ambito della geometria analitica, ma i riferimenti al tradizionale linguaggio analitico non sono tali da indurre tutti gli studenti ad interpretare tale uguaglianza come l'equazione di una retta nel piano cartesiano.

Rispetto ai test proposti agli allievi della scuola secondaria superiore, nei test proposti agli studenti universitari era possibile ipotizzare una maggiore varietà di risposte, determinate dalla maggiore conoscenza di contenuti matematici degli allievi coinvolti.

Abbiamo pertanto scelto di riportare, in particolare, alcune risposte relative ai diversi test proposti agli studenti universitari; iniziamo dall'interpretazione di $q = y$:

Caterina: «Un'uguaglianza tra due lettere»
Fania: «Equazione di meccanica razionale»
Franca: «Costante»

Francesca: «Identità assegnata»
Laura: «Retta, bisettrice del piano q, y»
Paolo: «Con y variabile è l'equazione di una retta»

Tra le giustificazioni espresse nel corso delle interviste ricordiamo:
«In $q = y$ ho pensato a y come ad una funzione di x, f(x), e se f(x) è uguale alla costante q ho una funzione costante» (Franca).

Emerge qui con chiarezza la convenzione tacita secondo la quale la presenza della lettera y viene riferita all'immagine di una funzione di una variabile.

Diversamente orientata sembra però la giustificazione seguente:
«Ho pensato che la q poteva essere come la x» (Laura).

Laura dunque non considera vincolante la convenzione tacita secondo la quale l'asse delle ascisse, nel piano cartesiano, viene indicato dalla lettera x (sul significato di variabile si veda ad esempio: Schoenfeld & Arcavi, 1988).

### 3.3. Test 2-B

Riportiamo i risultati nella tabella seguente:

| | $hy - c = k^2x$ | allievi | (totale: 22 allievi) |
|---|---|---|---|
| GE | Retta | 7 | 32% |
| AN | Equazione di una retta | 2 | 9% |
| AL | Equazione | 8 | 36% |
| AL | II grado, equazione di II grado | 2 | 9% |
| — | Potenziale elastico | 1 | 5% |
| — | nessuna risposta | 2 | 9% |

Riportiamo, in particolare, alcune risposte relative a: $hy - c = k^2x$.
Caterina: «Un'equazione di I grado in due variabili x e y con c costante»
Cinzia: «Retta parallela all'asse y al variare dei valori h, y, c, k»
Claudia: «Equazione di una retta ax+by+c = 0»
Fania: «Potenziale elastico»
Laura: «Equazione di curva di II grado»
Lina: «Lineare in due incognite x, y e tre parametri h, c, k»
Paolo: «Equazione lineare per h, y, c, x, di II grado per k»

Dai risultati emerge che soltanto il 41% degli allievi optano per l'interpretazione analitica: gli elementi «inusuali» sembrano indurre la maggioranza degli studenti a cercare riferimenti diversi.

Tra le giustificazioni espresse nel corso delle interviste ricordiamo:
«Ho scritto tutte le variabili possibili per non dare per scontate *x* e *y* come variabili» (Paolo).

«Ho riscritto $hy - c = k^2x$ come ax+by+c = 0 perché ho riconosciuto nella forma $hy - c = k^2x$ quello che mi era stato presentato come ax+by+c = 0» (Claudia).

Rispetto al test precedente, è diminuita l'interpretazione in ambito analitico: essa sembra essere vincolata ad un consolidato uso di alcune lettere, come la giustificazione indica esplicitamente.

### 3.4. Test 2-C

Riportiamo i risultati nella tabella seguente:

| | 0 = mx | allievi | (totale: 22 allievi) |
|---|---|---|---|
| GE | Retta (o asse) | 8 | 36% |
| AN | Equazione di una retta | 2 | 9% |
| AN | Equazione di una retta o di un piano | 1 | 5% |
| AL | Equazione (uguaglianza) | 6 | 27% |
| AL | Indeterminata | 1 | 5% |
| AL | Risposte collegate alla legge di annullamento del prodotto | 4 | 18% |

Riportiamo, in particolare, alcune risposte relative a: 0 = mx:

Benedetta: «L'asse y»
Caterina: «Un'uguaglianza con risultato x = 0»
Federica: «Dominio d'integrità»
Franca: «Retta $x = 0$ (se m $\neq$ 0)»
Greta: «È come l'asse $x = 0$ degli assi coordinati»
Laura: «O $x = 0$ oppure $m = 0$»
Pino: «Equazione di I grado in $x$, non ammette soluzione se non quella nulla»
Simona: «Equazione di I grado che può rappresentare un piano o una retta a seconda della dimensione dello spazio considerato»

La percentuale degli allievi che indica un'interpretazione analitica è analoga a quella riscontrata nel test precedente: anche in questo caso i riferimenti alla tradizionale scrittura dell'equazione della retta non sono evidenti.

Tra le giustificazioni espresse nel corso delle interviste ricordiamo:
«Ho scritto "dominio di integrità" perché era la prima cosa che mi è venuta in mente: il test richiedeva di scrivere la prima impressione» (Federica).

Interessante è la presenza di alcune risposte collegate alla legge di annullamento del prodotto (in un dominio d'integrità): sembra che gli studi di algebra degli allievi universitari suggeriscano interpretazioni inusuali rispetto alle comuni risposte degli studenti della scuola secondaria superiore.

Interessanti sono alcune giustificazioni collegate all'interpretazione analitica:

«Ho scritto "l'asse *y*" perché quando incontro $x = 0$ sono abituata a dire "l'asse *y*" e non "l'equazione dell'asse *y*"» (Benedetta).

«Ho scritto "è come l'asse $x = 0$" perché ho pensato a *m* come ad una costante, che dunque si può togliere» (Greta).

### 3.5. Test 2-D

Riportiamo i risultati nella tabella seguente:

| | hx–ay = 0 | allievi | (totale: 22 allievi) |
|---|---|---|---|
| GE | Retta | 9 | 41% |
| AN | Equazione di una retta | 3 | 13% |
| AL | Equazione | 6 | 27% |
| — | nessuna risposta | 4 | 18% |

Riportiamo, in particolare, alcune risposte relative a: hx–ay = 0:

Benedetta: «Retta passante per l'origine»
Claudia: «Retta per l'origine»
Elena: «Un'equazione in x e y di I grado»
Franca: «Retta passante per l'origine»
Greta: «Equazione lineare cioè di I grado in x e y»
Paolo: «Equazione retta sul piano x, y»

L'interpretazione in ambito analitico è, nel complesso, maggioritaria, sebbene non sia radicalmente diversa da quella dei test precedenti. Ci sembra indicativa la presenza di alcune risposte che specificano che la retta rappresentata «passa per l'origine»: gli allievi sembrano dare importanza a questa caratteristica, evocata dall'assenza del termine noto nell'equazione proposta.

Tra le giustificazioni espresse nel corso delle interviste ricordiamo:

«Ho specificato "sul piano *x*, *y*" perché ho interpretato subito l'equazione in due dimensioni e non ho ritenuto di estenderla a più dimensioni» (Paolo).

«Ho specificato *x* e *y* per non essere fraintesa; in effetti pensavo che sotto ci fosse un qualche tranello e allora ho pensato di specificare tutto» (Elena).

Dalla risposta di Elena emerge un interessante riferimento al «contratto sperimentale»: l'allieva dichiara di avere sospettato che nel test potesse essere presente un «qualche tranello» e ciò l'ha indotta a specificare esplicitamente alcune condizioni.

### 3.6. Test 2-E

Riportiamo i risultati nella tabella seguente:

| | $3x^2 - \alpha x + 1 + 3y^2 = 0$ | allievi | (totale: 22 allievi) |
|---|---|---|---|
| GE | Circonferenza | 4 | 18% |
| GE | Conica, ellisse | 3 | 26% |
| GE | Parabola | 1 | 5% |
| AN | Equazione di una circonferenza | 2 | 9% |
| AN | Equazione di una curva | 1 | 5% |
| AL | Equazione (polinomio di II grado...) | 7 | 32% |
| — | nessuna risposta | 1 | 5% |

Riportiamo, alcune risposte relative a: $3x^2 - \alpha x + 1 + 3y^2 = 0$ :

Angelo: «Ellisse (circonferenza)»
Caterina: «Un'equazione di II grado nelle variabili x e y non omogenea»
Elena: «Un polinomio in due variabili (x e y) di II grado»
Mariella: «II grado due incognite»
Paolo: «Equazione di II grado per x, y con coefficiente di x»
Simona: «Equazione di una curva»

Tra le giustificazioni espresse nel corso delle interviste ricordiamo:
«Ho scritto "ellisse (circonferenza)" perché sono abituato a studiare i determinanti e dunque ho visto che si trattava di una conica ellittica. Solo alla fine mi sono reso conto che era una circonferenza» (Angelo).

Le risposte sono molto diversificate: gli allievi non riconoscono le caratteristiche tipiche dell'equazione di una circonferenza e danno interpretazioni in àmbiti diversi (sebbene la maggioranza opti comunque per l'ambito analitico). Dalla giustificazione riportata emerge la considerazione di un'equazione di secondo grado attraverso uno studio standard, mediante il calcolo degli invarianti.

### 3.7. Test 2-F

Riportiamo i risultati nella tabella seguente:

| | ax+by+c = 0 | allievi | (totale: 22 allievi) |
|---|---|---|---|
| GE | Retta | 7 | 32% |
| AN | Equazione di una retta | 8 | 36% |
| AN | Equazione di una retta o di un piano | 1 | 5% |
| AL | Equazione | 6 | 27% |

Riportiamo, in particolare, alcune risposte relative a: ax+by+c = 0:

| | |
|---|---|
| Angelo: | «Equazione di I grado non omogenea (retta)» |
| Carlo: | «Equazione canonica di una retta nel piano O*xy*» |
| Caterina: | «Equazione generale per definire un'espressione di I grado in due variabili» |
| Cinzia: | «Retta che non passa per l'origine» |
| Cristiana: | «Retta non passante per l'origine» |
| Federica: | «Prototipo di equazione lineare» |
| Lina: | «Equazione generica di una retta (quella sulla quale lavoro a scuola)» |
| Simona: | «Equazione di una retta o di un piano» |

Tra le giustificazioni espresse nel corso delle interviste ricordiamo:
«Metto sempre la parola "equazione" perché non vedo subito il grafico, ma inizialmente ho solo l'equazione» (Caterina).
«Ho sottolineato che si tratta di una "equazione" perché ho ricordato che l'equazione canonica della retta mi era stata data alle scuole superiori proprio in questa forma» (Federica).

L'interpretazione in ambito analitico (scelta, nel complesso, dal 73% degli allievi) è favorita dall'uso della forma canonica: in effetti l'equazione data è l'equazione «canonica» della retta (nella cosiddetta forma implicita). La presenza della lettera *c* induce ad affermare che la retta è «non passante per l'origine» (c'è dunque la tacita assunzione: $c \neq 0$).

### 3.8. Test 2-G

Riportiamo i risultati nella tabella seguente:

| | y = mx+q | allievi | (totale: 22 allievi) |
|---|---|---|---|
| GE | Retta | 8 | 36% |
| AN | Equazione di una retta | 12 | 54% |
| (AN) | Equazione della meccanica o retta | 1 | 5% |
| AL | Divisione *x* con resto *q* | 1 | 5% |

Riportiamo, in particolare, alcune risposte relative a: y = mx+q:

| | |
|---|---|
| Caterina: | «Equazione di una retta non passante per l'origine» |
| Cristiana: | «Equazione della meccanica o retta» |
| Greta: | «Equazione tipo di equazione lineare (in forma esplicita) cioè retta» |
| Laura: | «Divisione x con resto q» |
| Paolo: | «Equazione retta con x variabile libera, y vincolata, m coefficiente angolare» |
| Simona: | «Equazione in forma esplicita di una retta in $\mathbf{R}^2$» |

Il 90% degli allievi opta per l'interpretazione analitica: sembra che la familiare formula y = mx+q non lasci molto spazio ad interpretazioni diverse.

Notiamo che, come già rilevato per il test 2-F, la presenza della lettera q induce ad affermare che la retta è «non passante per l'origine» (dalla risposta di Caterina traspare dunque la tacita assunzione: $q \neq 0$).

Tra le giustificazioni espresse nel corso delle interviste ricordiamo:

«Ho interpretato la scrittura $y = mx+q$ come l'indicazione di una divisione perché mi sembrava strano che tutte le espressioni del test proposto siano da considerare come delle rette!» (Laura).

Potrebbe qui essere evidenziata l'azione di qualche clausola del «contratto sperimentale»: sembra che l'allieva consideri molto improbabile che diversi esercizi abbiano la stessa risposta.

### 3.9. Test 2-H

Riportiamo i risultati nella tabella seguente:

| | $x^2 + y^2 = 1$ | allievi | (totale: 22 allievi) |
|---|---|---|---|
| GE | Circonferenza | 16 | 72% |
| GE | Ellisse | 1 | 5% |
| AN | Equazione di una circonferenza | 5 | 23% |

Riportiamo, in particolare, alcune risposte relative a: $x^2 + y^2 = 1$:

Cinzia: «Circonferenza di raggio unitario e centro nell'origine»
Greta: «Circonferenza goniometrica unitaria»
Mariella: «Circonferenza su di un piano»
Simona: «Equazione di una circonferenza con centro nell'origine in $\mathbf{R}^2$»

Tutti gli allievi danno interpretazioni in ambito analitico.

Tra le giustificazioni espresse nel corso delle interviste ricordiamo:

«Ho specificato "nel piano" perché se avessi considerato un'altra variabile non avrei più potuto limitarmi a considerare solo il piano» (Mariella).

Osserviamo che, nonostante gli allievi abbiano frequentato corsi di geometria in cui essi hanno potuto studiare la geometria in n dimensioni (con n>2), le interpretazioni spaziali sono piuttosto rare: quasi sempre l'interpretazione geometrica è data in ambito bidimensionale.

Interessante è inoltre il riferimento alla goniometria: la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ è frequentemente impiegata in esercizi di goniometria (soprattutto nella scuola secondaria superiore) e gli allievi sono dunque portati a dare di essa un'interpretazione in tal senso.

### 3.10. Test 2-I

Riportiamo i risultati nella tabella seguente:

| | $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$ | allievi | (totale: 22 allievi) |
|---|---|---|---|
| GE | Circonferenza | 9 | 41% |
| GE | Conica, curva di II grado, ellisse | 3 | 13% |
| GE | Parabola | 1 | 5% |
| GE | Paraboloide | 1 | 5% |
| AN | Equazione di una circonferenza | 3 | 13% |
| AN | Equazione di una conica | 1 | 5% |
| AN | Equazione del fascio di circonferenze | 1 | 5% |
| AL | Equazione | 2 | 9% |
| — | nessuna risposta | 1 | 5% |

Riportiamo, in particolare, alcune risposte relative a:
$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$ :

Benedetta: «Equazione generale di una circonferenza»
Carlo: «Curva di II grado»
Federica: «Probabile circonferenza»
Franca: «Equazione di una circonferenza passante per l'origine»
Greta: «Circonferenza generica $C\left(-\frac{\alpha}{2};-\frac{\beta}{2}\right)$, $r=\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}-\gamma}$ »

Anche in questo caso l'interpretazione nell'ambito della geometria analitica è scelta dalla quasi totalità degli allievi.

Tra le giustificazioni espresse nel corso delle interviste ricordiamo:

«Ho scritto "probabile circonferenza" perché mi sembrava di ricordare che ci fossero delle condizioni da verificare sui coefficienti della $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$ per poter parlare di una circonferenza» (Federica).
«Ho indicato tutte le formule in quanto ho studiato la circonferenza mi sono state date le formule per il centro e per il raggio» (Greta).

I riferimenti alla geometria analitica studiata alla scuola secondaria superiore, come nel caso del precedente test 2-H, sono abbastanza numerosi (sebbene non manchino alcune interpretazioni diverse, non sempre esatte): all'equazione $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$, vista come «equazione generale di una circonferenza» sono talvolta associate le condizioni affinché essa rappresenti effettivamente una circonferenza a punti reali e le formule per ricavarne il centro ed il raggio.

## 3.11. Conclusioni

A parte l'analisi quantitativa, che in una ricerca come questa (in cui i campioni considerati non sono individuati sulla base di specifici criteri) assume importanza a nostro avviso secondaria, qualitativamente notiamo che alcune tendenze rilevate nello studio del comportamento degli allievi della scuola secondaria sembrano essere confermate anche in ambito universitario. Ad esempio, la sola presenza di lettere «usuali» (delle stesse lettere tradizionalmente impiegate nelle spiegazioni e nei manuali scolastici) nella scrittura da interpretare induce molti studenti a scegliere un ambito, ad optare per un modello.

Inoltre, come osservato nel caso dei test forniti a studenti della scuola secondaria, il contesto nel quale viene interpretata un'espressione matematica non viene scelto sulla base della massima generalità: l'interpretazione in ambito analitico viene spesso privilegiata, sulla base della frequenza con la quale tale interpretazione è stata suggerita nel corso degli studi recenti (e meno recenti).

Da un lato, dunque, concordiamo con L. Bazzini, che ricordando gli studi di A. Sfard e L. Linchevski (1991, 1992) scrive:

> «Spesso gli studenti concepiscono un'espressione algebrica (per esempio un'equazione o una disequazione) come una mera successione di simboli privi di ogni semantica e per le quali le trasformazioni formali usate per arrivare alla soluzione sono l'unica fonte di significato» (Bazzini, 1995, p. 44).

Quanto rilevato, però, fa pensare ad un'ulteriore lettura della situazione: non pochi studenti sembrano cercare il significato stesso di un'espressione algebrica in àmbiti nei quali tale espressione sia impiegata usualmente, con interpretazioni chiare e codificate e con regole pratiche ben definite[8].

## 4. Conclusioni generali

Il confronto tra i risultati relativi alla scuola secondaria superiore ed all'università è soltanto indicativo. Infatti i campioni di allievi (i quali sono peraltro poco numerosi ed inoltre, non essendo stati individuati mediante specifici criteri di campionamento, non possono essere considerati significativi di una particolare popolazione) non sono collegati tra di loro; si tenga poi presente che i test proposti, come precedentemente sottolineato, sono lievemente differenti sia per il contenuto che per le modalità di effettuazione.

Il passaggio tra la scuola secondaria e l'università è una fase molto delicata dal punto di vista della formazione dell'allievo (per un esame degli studi sull'in-

8. Con ciò non intendiamo affermare che la presentazione di oggetti matematici debba essere forzatamente del tutto astratta, svincolata dalla realtà; concordiamo con C. Dapueto, il quale scrive: «Un insegnamento che proponga definizioni, dimostrazioni, tecniche senza respiro culturale ha anche effetti negativi sulle cosiddette capacità *metacognitive* dell'alunno: adeguandosi a conoscenze ed a schemi di comportamento che non comprende e che non trova motivati, egli non sviluppa... le capacità di dirigere e di esprimere il proprio pensiero, e non solo in ambito matematico» (Dapueto, 1992, p. 31; si veda inoltre: Bruno Longo, 1992).

segnamento e sull'apprendimento dell'algebra nella scuola secondaria superiore si veda: Furinghetti, 1995). Dal punto di vista dell'interpretazione del linguaggio algebrico, ad esempio, F. Arzarello, L. Bazzini e G. Chiappini osservano:

> «Sembra che una delle cause principali di difficoltà riscontrate anche all'inizio dell'università stia proprio nell'incapacità di dar senso ai simboli algebrici come simboli di un linguaggio che non sia pura sintassi» (Arzarello, Bazzini & Chiappini, 1994, p. 22; gli Autori si riferiscono a: Burton, 1988).

Possiamo comunque osservare che gli studi matematici specifici affrontati dalla III-IV classe della scuola secondaria superiore al III-IV anno universitario della facoltà di Scienze, corso di laurea in matematica, **non** sembrano variare significativamente il comportamento degli studenti: molti allievi collegano le espressioni alle esperienze scolastiche e scelgono il contesto interpretativo (e, dunque, si formano il modello di alcuni importanti oggetti matematici) sulla base di esse, senza palesare un controllo consapevole dettato dalla maggiore competenza, rispetto agli allievi più giovani.

La questione della scelta del contesto e dell'uso dei diversi registri rappresentativi resta centrale: le possibilità didattiche collegate ad un corretto controllo dei registri rappresentativi sono molte (citiamo, tra i molti Autori: Paivio, 1986; Duval, 1993 e 1994; e non soltanto, ad esempio, per quanto riguarda la importante possibilità di raggiungere risultati apprezzabili con i «principianti deboli», come segnalato in: Vergnaud, Cortes & Favre-Ortigue, 1997). Una gestione attenta dell'impiego dei diversi registri rappresentativi può risultare di grande rilevanza in generale, in molti settori della didattica della matematica (sul ruolo della definizione segnaliamo, ad esempio: D'Amore, 1986; Neubrand, 1990; Bagni & D'Amore, 1992).

Viceversa, una considerazione soltanto approssimativa dei problemi qui ricordati può portare al manifestarsi di non trascurabili difficoltà (ad esempio, per quanto riguarda la comprensione degli enunciati si veda: Duval, 1997) che potranno essere esaminate in ulteriori ricerche[9].

9. L'Autore desidera ringraziare il Prof. Bruno D'Amore dell'Università di Bologna per i preziosi suggerimenti.

Arzarello F.; Bazzini L. & Chiappini G.
*L'Algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche*, Progetto strategico del CNR: Tecnologie e innovazioni didattiche, Quaderno n. 6, 1994.

Bagni G.T. & D'Amore B.
Le classificazioni dei quadrilateri: *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 15, 785-814, 1992.

Bazzini L.
Equazioni e disequazioni: riflessioni sul concetto di equivalenza: Bazzini, L. (ed.), *La didattica dell'Algebra nella scuola secondaria superiore*, Atti del V Convegno Internuclei per la scuola secondaria superiore, Pavia, 16-18 marzo 1995, 44-53, 1995.

Bruno Longo A.P.
Dimostrare: ostacoli e valenze educative: Furinghetti, F. (ed.), *Definire, argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto*, Atti del secondo Internucleo della Scuola secondaria superiore, Progetto strategico del CNR: Tecnologie e innovazioni didattiche, Quaderno n. 13, 1-17, 1992.

Burton M.B.
A linguistic basis for students' difficulties with Algebra: *For the learning of mathematics*, 8, 1988.

D'Amore B.
Il ruolo della definizione nella didattica della matematica: *Insegnare*, 6, 9-13, 1986.

D'Amore B.
*Problemi*, Angeli, Milano, 1993.

D'Amore B. & Frabboni F.
*Didattica generale e didattiche disciplinari*, Angeli, Milano, 1996.

D'Amore B.
*Elementi di didattica della matematica*, Pitagora, Bologna, 1999.

Dapueto C.
La problematica del definire e del dimostrare nella costruzione di un progetto per l'insegnamento della matematica: Furinghetti, F. (ed.), *Definire, argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto*, Atti del secondo Internucleo della Scuola secondaria superiore, Progetto strategico del CNR: Tecnologie e innovazioni didattiche, Quaderno n. 13, 19-51, 1992.

Duval R.
Registres de répresentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée: *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, IREM, Strasbourg, 1993.

Duval R.
Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique: *Repres IREM*, 17, ottobre, 1994.

Duval R.
La compréhension des énoncés de problème de mathématisation: de la lecture à la résolution: D'Amore, B. & Gagatsis, A. (eds.), *Didactics of Mathematics-Technology in Education*, Erasmus ICP-96-G-2011/11, 25-46, Thessaloniki, 1997.

Fischbein E.
The theory of figural concepts: *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162, 1993.

Furinghetti F.
Una lettura della letteratura su insegnamento/apprendimento dell'Algebra a livello di scuola secondaria superiore: Bazzini, L. (ed.), *La didattica dell'Algebra nella scuola secondaria superiore*, Atti del V Convegno Internuclei per la scuola secondaria superiore, Pavia, 16-18 marzo 1995, 110-123, 1995.

Johnson-Laird P.N.
*Modelli mentali*, Il Mulino, Bologna (edizione originale: 1983), 1988.

Kaldrimidou M.
*Images mentales et représentations en mathématiques chez les mathématiciens et les étudiants en mathématiques*, Thèse 3me cycle, Université Paris 7, Paris, 1987.

Neubrand M.
L'apprendere e il riflettere: perché e come associarli nella didattica della matematica: *La matematica e la sua didattica*, IV, 2, 5-16, 1990.

Paivio A.
*Mental representation: a dual coding approach*, Clarendon Press, Oxford, 1986.

Schoenfeld A.H.
On having and using geometric knowledge: Hiebert, J. (ed.), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics*, 225-263, Erlbaum, Hillsdale, 1986.

Schoenfeld A. & Arcavi, A.
On the meaning of variable: *Mathematics teacher*, 81, 420-427, 1988.

Sfard A.
On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin: *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1, 1-36, 1991.

Sfard A. & Linchevski L.
Equations and inequalities. Processes without objects?: *Proceedings of PME XVI*, Durham, 3, 136, 1992.

Shepard R.N.
*Internal representations: studies in perception imagery and cognition*, Bradford, Montgomery, 1980.

Vergnaud G.; Cortes A. & Favre-Ortigue P.
Introduzione dell'algebra ai principianti «deboli». Problemi epistemologici e didattici: *La matematica e la sua didattica*, 3, 253-271, 1997.

Vinner S.
Function concept as prototype for problems in mathematics: Harel, G. & Dubinsky, E. (eds.), *The concept of Function: aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes, 25, 195-213, 1992.

Webb N.
Content and context variables in problem task: Goldin, G.A. & McClintock, C.E. (eds.), *Task variables in mathematical problem solving*, Eric, Columbus, Ohio, 1979.

# 2. Qualche riflessione su un problema essenziale

Claudio Beretta[1]

This is a contribution to the vexed question of the training and the introducing of young people into the productive web of our society. This paper does not claim to be exhaustive but aims at pointing out some general aspects and then at defining the learning process and the support that sciences, mathematics and physics in particular, can provide to the improvement of the foundation training. It deals with the essence of young people's foundation training, regarding the education and the scientific culture, without forgetting the complementary humanistic component.

### Premessa

Ho scelto di portare un contributo al problema della formazione e dell'inserimento dei giovani nel tessuto produttivo del nostro paese, non solamente perché dovrebbe porsi al centro delle preoccupazioni dei politici – i quali sostanzialmente oltre che a risolvere situazioni contingenti dovrebbero progettare il prossimo futuro – ma anche perché la sua soluzione è ardua, non univoca, difficile e suggerisce un approccio e un dibattito aperto. Nella mia funzione di presidente (ad interim) della Società svizzera dei professori di matematica e di fisica non posso esimermi dall'affrontarlo in un contesto che dovrebbe suscitare l' interesse dei lettori. Questo breve scritto non ha la pretesa di essere esaustivo, ma di segnalare qualche aspetto di ordine generale, poi di esplicitare il quadro dell'apprendimento e il contributo che le scienze e in particolare la matematica e la fisica possono dare al miglioramento della formazione di base. Si tratta dunque dell'essenza della formazione di base dei nostri giovani, per quel che attiene alla formazione e alla cultura scientifica, tenendo ben presente la componente complementare, quella umanistica. L'avvenire della nostra Confederazione è legato anche alla qualità dell'insegnamento e alla sua adattabilità alle nuove realtà nelle quali vivono culture e sensibilità diverse, tutte degne di rispetto, accanto a tendenze preoccupanti. Una gran parte dei nostri giovani dotati, in questa società in rapida evoluzione, non sa quale potrà essere il proprio futuro e comunque non ha bisogno di un insegnamento statico e ripetitivo. Essi non sanno come muoversi per garantirsi un'esistenza compiuta, inserirsi nel mondo del lavoro, poter creare responsabilmente una famiglia. Dai media provengono segnali preoccupanti inerenti all'occupazione lavorativa e alla globalizzazione del mondo economico, a questa sorta di spirale lungo la quale ci si è avviati sotto la spinta dell'individualismo, della mancanza di rispetto per gli altri, della fanatica ricerca di utili sempre maggiori (dovuta alla sete di danaro) e della violenza (di pochi). L'inserimento nel mondo «attivo» si urta col problema del primo impiego, qualunque

1. Presidente SSIMF

sia il livello di formazione che il giovane abbia assunto. Questi è confrontato con il penoso paradosso di dover fornire non solo certificati e diplomi, ma anche la prova di un'esperienza specifica e compiuta in un primo impiego al quale evidentemente non ha potuto accedere. È ora che i responsabili delle assunzioni nei posti di lavoro la smettano di richiedere in partenza un'esperienza che non può sussistere. La scelta iniziale dovrebbe favorire chi possiede una forte formazione di base e una flessibilità intellettuale e operativa in contesti di attività personali o di collaborazione in gruppi di lavoro. Sono queste le difficili premesse con le quali devono confrontarsi i giovani che, con sacrifici delle famiglie e dello Stato, hanno ultimato gli studi, anche universitari. In questo contesto, come lo dimostrano le statistiche sulla disoccupazione, giovani validi, confrontati con la succitata miope esigenza o vanno altrove (ad esempio in America), o continuano la loro formazione senza concreti traguardi d'inserimento, o si perdono d'animo. Fin che il mondo, in particolare industriale e terziario, continuerà ad assumere solo persone al secondo, terzo … impiego, i nostri giovani non potranno evidentemente assumere responsabilità operative ed entrare in modo attivo e propositivo nel tessuto produttivo di beni e di servizi. Per lo Stato si tratta dunque di favorire il primo impiego, con agevolazioni ad esempio fiscali. Ciò non significa mantenere fannulloni, ma garantire il futuro evitando poi forme assistenziali costose di ricupero legate a persone così emarginate. Lo Stato ha delegato, secondo me a giusto titolo, il ruolo di promuovimento della formazione culturale e sociale alla scuola, anche se questo dovrebbe in parte almeno meglio combinarsi con il contributo della famiglia. Occorre dunque che anche i genitori partecipino maggiormente al lavoro di formazione, anche se non esiste una scuola che prepara al difficile ruolo di genitore. I giovani siano più fiduciosi nelle loro possibilità, malgrado il quadro che li attornia, e per questo si applichino a dare il massimo slancio d'impegno per la loro formazione culturale scientifica e umanistica, per perseguire coscientemente la realizzazione del loro progetto di vita. La coscienza del loro posto nella società e la loro responsabilità, anche verso se stessi, costituiscono le premesse di operare al meglio e costruire a poco a poco con determinazione l'avvenire: ponendo attenzione alla formazione sociale, coltivando il rispetto per gli altri e apprendendo le regole del nostro vivere civile. Inoltre occorre essere esigenti verso se stessi e avere curiosità e sete di sapere. Gli insegnanti sono dunque chiamati nell'esplicazione del loro mandato ad andare oltre la presentazione nozionistica e a curare anche aspetti formativi in collaborazione con i giovani stessi. Sono invitati a preparare i cittadini di domani impegnandosi per far sì che i giovani si assumano le loro responsabilità con competenza, cultura, rispetto verso gli altri, e favorire lo spirito di apertura. Questa missione di educatore è essenziale non solo per l'avvenire del paese ma anche per permettere agli insegnanti di riconquistare quel posto che un tempo occupavano nella società. Si tratta anche di mirare al miglioramento costante della loro professionalità e della loro condizione e di non considerare questo lavoro semplicemente funzionale agli aspetti di ordine materiale. Durante la mia vita di professore, in trent'anni, ho incontrato molti studenti validi, alla ricerca di un futuro promettente. Questi giovani hanno le capacità di gestire in modo serio e responsabile progetti d'avvenire e meritano l'appoggio anche dello Stato. Il rispetto verso le autorità e la loro immagine si sono pure deteriorati, rendendo debole anche questo riferimento per i nostri giovani alla ricerca di valori. Certi media hanno le loro responsabilità e allontanano di fatto da ruoli politici direttivi – mediante critiche non costruttive e anche denigranti –

persone competenti che risulterebbero utili al Paese. Alla politica degli uomini si è sostituita quella delle *lobbies*. Si tratta ora di ridare lustro al nostro Paese, formando giovani sempre più alla ricerca di una loro dignità e di un buon inserimento nella nostra società. Questa società presenta, di conseguenza, larghi spazi di possibile miglioramento, segnatamente nel promuovere persone giuste al posto giusto, non solo nel potere politico ma anche nei quadri direttivi delle altre attività. Bisogna ridurre al minimo la presenza nei quadri di persone che si considerano, con scarsa umiltà ed ecces-sivo moralismo, depositarie dell'onniscienza e atte a trovare la soluzione di ogni problema e di avere sempre ragione anche su oggetti che esulano dalle loro competenze e dalla loro formazione. Il meccanismo che ha portato persone competenti a ruoli sempre più alti fino a raggiungere l'incompetenza di gestire i problemi a loro sottoposti non ha dato i frutti sperati. Industrie di prestigio si sono trovate confrontate a situazioni impreviste, gravi, generando licenziamenti e instabilità.

### Nel merito

È in questo quadro, nel quale tinte di speranza si alternano a tinte fosche, che è difficile affrontare il problema delle finalità dell'insegnamento e, nel contesto di questo scritto, l'insegnamento delle scienze matematiche e fisiche. Cosciente dunque che questo esposto non può essere esaustivo e che abbisogna, per una trattazione più compiuta, di contributi di altre persone, con altre sensibilità culturali, con timido slancio mi metto all'opera. È importante formare giovani che sappiano agire, dunque in grado di operare come cittadini responsabili, che portino critiche volte al miglioramento, aperti, inventivi e fiduciosi nelle loro possibilità pur coscienti dei loro limiti, curiosi delle realtà che li circondano, consapevoli del fatto che dovranno sempre cercare di migliorare le proprie competenze specifiche e le proprie conoscenze. Fino almeno alla fine degli studi liceali (o equivalenti), si tratta di formare giovani che, a lato delle conoscenze mirate alla competenza, ma limitate al loro campo d'interesse, perseguano con determinazione la curiosità verso entrambe le culture complementari, umanistica e scientifica. Per questo l'insegnante non deve mai considerarsi «formato», ma confrontarsi con i colleghi e seguire corsi d'aggiornamento, non solo pedagogici ma anche di perfezionamento didattico disciplinare, in modo da tenere il passo con le esigenze formative specifiche. Inoltre è opportuno che coltivi curiosità culturali e attività fuori dall'ambito del proprio mandato di docente. Qui nasce un appello accorato all'autorità perché favorisca, non solo in discorsi pronunciati in ricorrenze specifiche (per esempio durante la Festa Nazionale), la formazione **continua** dei docenti, non limitandosi a qualche intervento locale. Nei fatti esistono diversi docenti che dopo la formazione di base non hanno mai partecipato a tali corsi. Questi ultimi devono aver lo scopo, nell'interesse della formazione degli allievi, di spingere al massimo l'offerta di promuovere le competenze specifiche dei giovani – in questo caso scientifiche – a lato della sete di sapere umanistico e viceversa. La competenza dei dirigenti non è mai spuntata dal nulla. Questo concetto di *élite* si estende alle competenze a tutti i livelli, in tutte le professioni. L'insegnante, qui di matematica e di fisica, deve essere dunque messo in condizione di promuovere miglioramenti formativi evitando di mantenere situazioni che portano a corsi ripetitivi, sclerotizzati e infine noiosi, che non facilitano certo la promozione della curiosità, dell'interesse, dell'entusiasmo e del piacere per l'insegnamento scientifico. Dicendola in due parole, credo che un docente che non persegue, a livello personale o partecipando ad attività di formazione continua, lo scopo di migliorarsi professionalmente, non guadagni il pane che mangia. Considero importante, per migliorare il servizio educativo, che l'insegnante viva con piacere e passione la ricerca di sempre maggiori competenze professionali. Un docente deve cercare di essere sempre felice di entrare in classe anche quando passa quei momenti difficili che la vita riserva a tutti.

Si tratta di mettere gli allievi nel clima positivo d'apprendimento, favorire la loro disponibilità a lavorare assieme, ricercare un metodo di lavoro mirato a promuovere presso gli studenti il versante inventivo, lo spirito di analisi e di sintesi, la ricerca di strategie adeguate, l'attitudine ad affrontare situazioni e problemi nuovi, l'esigenza di formulare ipotesi chiare e limitare i contesti risolutivi ai parametri essenziali come l'elaborazione della soluzione e la valutazione dell'attendibilità dei risultati, la riflessione sulla possibile applicabilità dei risultati, il dubbio scientifico, la coscienza dei margini di errore e dei rischi applicativi, la visione probabilistica della realtà e infine e soprattutto il perseguimento dell'esigenza dell'onestà intellettuale. Tali aspetti devono essere al centro delle preoccupazioni principali degli insegnanti di queste due materie fondamentali. L'insegnante ripetitivo per me si è sbagliato nella sua scelta professionale. Il piacere degli studenti di lavorare non trova radice nell'approccio autoritario ma nell'autorevolezza, nell'immagine, nel rispetto e nella stima di cui l'insegnante gode presso i suoi allievi, come uomo. La chiave non sta dunque dalla parte dell'osservanza pedisseque dei programmi, ma nell'interesse e nella curiosità che il docente sa suscitare. In questo ambito lo studente può mirare allo sviluppo più opportuno delle proprie potenzialità e spingersi alla ricerca del piacere d'imparare. Il docente opera dunque scegliendo opportunamente gli oggetti di studio sui quali focalizzare l'interesse con lo strumento metodologico e didattico-disciplinare adeguato a coltivare le capacità di riflessione operativa di cui sopra[2]. Gli obiettivi cognitivi superiori (il saper riconoscere situazioni simili e dunque l'applicabilità di strumenti precedentemente appresi, l'intuizione, l'invenzione – prima per analogia –, la scelta di percorsi risolutivi ottimali, la produzione di modelli adeguati, lo spirito di analisi e di sintesi) sono da perseguire con tenacia nell'interesse di una formazione adeguata per il futuro dell'allievo. Non bisogna dunque limitarsi a obiettivi minimi rispetto al livello d'intelligenza che si attribuisce, talvolta con disinvoltura, a certi studenti, qualunque esso sia, ma aprire senza esagerazioni, ossia spingendo gradualmente, le esigenze verso l'alto, essere fiduciosi e non remissivi. In particolare in classe si tratta di valorizzare gli interventi, anche non affinati, degli studenti più deboli. La conoscenza dell'arte di operare nell'ambito scientifico quale insegnante s'impara sul terreno cercando sempre di migliorare le proprie competenze professionali al servizio della classe. Vanno comunque messi in risalto gli aspetti e i contributi positivi legati al progresso scientifico e in particolare quelli che hanno avuto importanza notevole, se non determinante, nel migliorare il quadro esistenziale, non solo evidenziare qualche risvolto negativo delle applicazioni tecniche. Comunque i docenti di materie scientifiche che operano nella scuola non abbisognano solo delle competenze specifiche assunte all'università, ma devono conoscere anche gli

2. S'intende l'elencazione riportata nel capoverso precedente.

aspetti etici e i rischi applicativi legati alla ricerca e trasmettere queste sensibilità, che saranno utili a tutti nell'ambito della loro futura attività. A livello applicativo metodologico, nell'ambito dell'insegnamento, bisogna rinsaldare gli apprendimenti di base in ogni oggetto di studio affrontato con esercizi applicativi diretti, che usano il calcolo come strumento. Occorre poi passare assai in fretta a confrontare l'allievo con applicazioni che richiedono maggiore impegno intellettuale e dunque interessanti poiché pongono lo studente ad essere confrontato con situazioni nuove, nelle quali non è abituato a destreggiarsi e che domandano intuito, invenzione, operatività. Per affrontare questa fase è opportuno creare dei gruppetti di quattro o cinque allievi con capacità e grado di competenza eterogenei. Si creano così i presupposti d'utilizzo delle sinergie di sviluppo formativo, con la necessità di dover dibattere, confrontarsi, interagire, oltre che di poter assaporare il piacere di lavorare assieme. I buoni allievi avranno un ruolo chiave, utile anche per loro se saranno portati a spiegare ai compagni e motivare ciò che pensano. In questo contesto il docente segue e stimola i singoli gruppi dando spunti di riflessioni e suggerendo appena piste d'approfondimento e di apertura. È opportuno che il docente riduca al minimo la presentazione teorica, indicando esempi e controesempi ad essa direttamente connessi. Bisogna essere coscienti che pochi studenti possono capire i fondamenti della teoria matematica o fisica e che eventualmente solo alla fine degli studi potranno cercare di giungere ad uno stadio di soddisfacente comprensione. Analogamente si tratta di essere prudenti nell'usare il formalismo, i modelli, i concetti delicati. Penso ad esempio allo sviluppo iniziale (1908-30) della teoria relativistica generale di cui si parla nelle scuole medie superiori, in particolare a certi aspetti legati ai parametri.

Occorre proporre esercizi e problemi vieppiù raffinati per la soluzione dei quali non sono sufficienti le ricette ancorate alle conoscenze. In una fase ulteriore vale a volte la pena di ritornare alla teoria per fissare i concetti chiave, completare la sintesi teorica e segnalarne l'applicabilità. È importante per ogni capitolo sottolineare i concetti e le idee chiave in modo che, anche anni dopo, lo studente possa ricostruire grazie ai riferimenti le conoscenze su oggetti di studio dimenticati. In particolare ciò avviene nei lavori di ricerca universitari e segnatamente nella scelta di strumenti adeguati all'esame delle situazioni con le quali sono confrontati in quasi tutte le facoltà. Si tratta anche di proporre ai giovani situazioni con problemi aperti che necessitano, per essere risolti, di strategie nuove, o che possono essere affrontati utilizzando contenuti matematici diversi (ad esempio vettori, trigonometria, geometria,…). Dal profilo storico è utile mostrare le difficoltà nelle quali si imbatterono i ricercatori del passato, e che a volte risultano le stesse che hanno gli studenti per effettuare un salto di comprensione.

Né l'importanza degli aspetti epistemologici va sottovalutata. Per chiudere questo intervento, riassumo le principali finalità dell'insegnamento scientifico attuale. Esse devono portare lo studente a:

- Possedere una base solida a livello di competenza dei contenuti disciplinari più importanti.
- Praticare il ragionamento logico-deduttivo.
- Saper leggere i dati di un problema o di un'esperienza, dedurre, partendo dalle informazioni chiave che contiene o ad esse riconducibili, la strada adeguata per ottenere la soluzione.

— Interpretare i risultati nel quadro del problema o dell'esperienza.
— Ragionare coerentemente, motivare le affermazioni, difendere la propria opinione in modo strutturato, ammettere quando si sbaglia.
— Affrontare situazioni nuove, non solo con spirito di analisi e di sintesi ma con flessibilità intellettuale.
— Cercare strade originali, con spirito di ricerca.
— Essere onesto intellettualmente.
— Essere curioso e inventivo.

# 3. Il calcolo a scuola (2): l’uso della calcolatrice[1]

Gianfranco Arrigo

## 1. Calcoli con una sola operazione

La prima cosa da insegnare ad un giovane allievo che vogliamo educare all’uso corretto dei moderni mezzi di calcolo è che non si dovrebbe mai impostare un calcolo senza avere un’idea, una previsione, una **stima** del risultato che si vuol raggiungere. È ben vero che i circuiti non sbagliano (tranne in casi molto complessi nei quali i residui decimali possono dare origine a degenerazioni inaccettabili): ma è altrettanto vero che anche il più semplice calcolo, come per esempio (7 x 8) può diventare (7 x 88), (77 x 8), (7 x 85), (7 x 89) ecc. in seguito ad errori di battitura. Dita troppo grosse o unghie troppo lunghe e affusolate sono premesse per questo genere di errori, come pure la stanchezza, la fretta o la vista non perfetta.

Proponiamo di usare soltanto calcolatrici coerenti con la sintassi del calcolo matematico: in questo modo l’allievo passa senza traumi dalle scritture

$a + b = c$ *e* $a + b \cdot c = d$

all’esecuzione[2]

$\boxed{a}\ \boxed{+}\ \boxed{b}\ \boxed{=}\ \boxed{c}$ *e* $\boxed{a}\ \boxed{+}\ \boxed{b}\ \boxed{\times}\ \boxed{c}\ \boxed{=}\ \boxed{d}$

(Nella descrizione simbolica, $\boxed{a}$ significa «introduzione del numero a»; $\boxed{c}$ significa uscita del numero c sul display della calcolatrice.)

1. Il nuovo contributo sul calcolo numerico continua il discorso iniziato sul numero 40, con l’articolo dal titolo «Il calcolo a scuola: ovvero l’inizio di un cambiamento epocale».
2. Negli esempi mi riferisco alle calcolatrici in uso nella nostra scuola.

Per eseguire la sottrazione ripetuta (a–b)–c = d, o la divisione ripetuta (a:b):c = e, si può addirittura procedere senza usare le parentesi:

$$\boxed{a}\ \begin{matrix}\boxed{-}\\ \boxed{\div}\end{matrix}\ \boxed{b}\ \begin{matrix}\boxed{-}\\ \boxed{\div}\end{matrix}\ \boxed{c}\ \boxed{=}\ \begin{matrix}\boxed{d}\\ \boxed{e}\end{matrix}$$

L'uso dei tasti «parentesi», però, è necessario nei casi in cui si vogliono dare precedenze diverse da quelle della sintassi matematica (vedi più avanti).

## 2. Calcoli con più operazioni

Le difficoltà cominciano quando si susseguono sottrazioni e addizioni, divisioni e moltiplicazioni.

Esempio

Per eseguire il calcolo a – (b + c) = d si può procedere così:
i) sfruttare il fatto che a – (b + c) = a – b – c e procedere come prima;
ii) usare i tasti parentesi:

$$\boxed{a}\ \boxed{-}\ \boxed{[(}\ \boxed{b}\ \boxed{+}\ \boxed{c}\ \boxed{)]}\ \boxed{=}\ \boxed{d}$$

iii) usare la memoria:

$$\boxed{b}\ \boxed{+}\ \boxed{c}\ \boxed{=}\ \boxed{\mathrm{Min}} \qquad \boxed{a}\ \boxed{-}\ \boxed{\mathrm{MR}}\ \boxed{=}$$

(…)

Esempio

Un caso non così evidente è costituito dal calcolo $a:(b \cdot c) = \dfrac{a}{b \cdot c} = d$

Si può procedere così:
i) sfruttare il fatto che a : (b · c) = (a : b) : c e procedere come visto in precedenza;
ii) usare i tasti parentesi:

$$\boxed{a}\ \boxed{\div}\ \boxed{[(}\ \boxed{b}\ \boxed{\mathrm{x}}\ \boxed{c}\ \boxed{)]}\ \boxed{=}\ \boxed{d}$$

iii) usare il tasto 1/x:

$$\boxed{b}\ \boxed{\mathrm{x}}\ \boxed{c}\ \boxed{\div}\ \boxed{a}\ \boxed{=}\ \boxed{\mathrm{INV}}\ \boxed{1/x}\ \boxed{d}$$

Per contro, la compresenza di addizioni/sottrazioni con moltiplicazioni/divisioni, nell’ordine, non crea alcuna difficoltà perché, per fortuna, quasi tutte le calcolatrici in commercio riconoscono la gerarchia fra queste operazioni.

Così, ad esempio, il calcolo a+b·c = d si esegue molto semplicemente così:

a + b x c = d

Disponendo invece di una calcolatrice che non riconosce la gerarchia fra le operazioni, si opererebbe così:

b x c = + a = d

oppure, se la calcolatrice possiede i tasti parentesi:

a + [( b x c )] = d

## 3. Calcolo con le misure sessagesimali

Per calcolare con misure sessagesimali (gradi/primi/secondi, ore/minuti/secondi) occorre conoscere il tasto °'" o il suo inverso, ovvero la combinazione di tasti INV °'"

Il primo permette di introdurre una misura sessagesimale (nell’ordine: gradi, primi, secondi; oppure: ore, minuti, secondi); la seconda trasforma un numero decimale nella corrispondente forma sessagesimale.

Esempio

Per eseguire il calcolo: 23 h 10 min 15 s – 20 h 30 min = 2 h 40 min 15 s si procede così:

23 °'" 10 °'" 15 °'" – 20 °'" 30 = INV °'"

Sul display appare la scritta: 2°40°15, da leggersi 2 h 40 min 15 s

## 4. L’uso dei tasti funzione

Per il calcolo delle immagini di una funzione predefinita, basta ricordare l’ordine: prima si inserisce l’argomento, poi si preme il tasto della funzione prescelta.

Esempio

Per calcolare la radice quadrata di 1024, si procede così:

1024 √ 32

Si noti che in questi casi, di solito, è superfluo usare il tasto “=“

## 5. L’uso della modalità statistica

Le calcolatrici munite di funzioni statistiche sono interessanti anche per allievi della scuola media, perché consentono di introdurre un insieme di valori e restituiscono poi alcuni risultati utili, quali il numero di dati introdotti (indicato con n e che può essere usato anche come controllo), la media (indicata con $\overline{x}$), lo scarto tipo (indicato con $\sigma$), la somma dei valori introdotti (indicata con $\sum x$)

e la somma dei loro quadrati (indicata con $\sum x^2$).

Prima di eseguire un calcolo statistico occorre predisporre la calcolatrice nel «modo statistico”.

Per introdurre i valori, si procede così: prima si imposta il numero, poi si preme il tasto M+, e via di seguito. Quando si è terminato, si premono i tasti corrispondenti ai risultati desiderati.

Esempio

Introduciamo i numeri: 4, 4, 5, 5, 6, 3, 3, 3

4 M+ M+ 5 M+ M+ 6 M+ 3 M+ M+ M+

Interroghiamo la calcolatrice e otteniamo:

$n = 8$ , $\sum x = 33$ , $\sum x^2 = 145$ , $\overline{x} = 4.125$ , $\sigma \cong 1.053$

## 6. Errori comuni nell’uso elementare della calcolatrice tascabile[3]

**Esempio 1**

Calcolare: $a – (b + c) \cdot d = r$

a - [( b + c )] x d = r

l’errore più frequente (8%: 61 su 761):

a - b + c x d =

che corrisponde all’espressione a–b+c·d, ovviamente diversa da quella data.

**Esempio 2**

Calcolare: $a : (b \cdot c) = \dfrac{a}{b \cdot c} = (a : b) : c = r$

una sequenza corretta:

a : [( b x c )] = r

3. Rilevazioni fatte nella prova di fine ciclo per le quarte medie del Canton Ticino (allievi quindicenni), maggio 1998.

l'errore più frequente (15,6%: 119 su 761):

$\boxed{a}\ \boxed{:}\ \boxed{b}\ \boxed{x}\ \boxed{c}\ \boxed{=}$

che corrisponde all'espressione (a : b) · c, ovviamente diversa da quella data.

**Esempio 3**

Calcolare: $a : (b + c) = \dfrac{a}{b+c} = r$

una sequenza corretta:

$\boxed{a}\ \boxed{:}\ \boxed{[(}\ \boxed{b}\ \boxed{+}\ \boxed{c}\ \boxed{)]}\ \boxed{=}\ \boxed{r}$

l'errore più frequente (15,9%: 121 su 761):

$\boxed{a}\ \boxed{:}\ \boxed{b}\ \boxed{+}\ \boxed{c}\ \boxed{=}$

che corrisponde all'espressione (a : b) + c = a : b + c, ovviamente diversa da quella data.

## 7. Conclusione

Come visto nella prima parte[4], il calcolo mentale offre possibilità di apprendimento a tutti. È paragonabile a un nuovo vasto territorio da scoprire: ci sarà chi si accontenta delle zone pianeggianti, chi riuscirà a percorrere qualche collina e chi si cimenterà con i rilievi più marcati. Una sufficiente preparazione nel calcolo mentale è anche condizione necessaria per affrontare il calcolo automatico: è pericoloso e comunque sconsigliabile eseguire a macchina un calcolo se non si è fatta una stima anche grossolana del risultato.

Per eseguire calcoli troppo difficili o addirittura impossibili da fare mentalmente, si usa la calcolatrice, il cui uso va ben curato ed esercitato. Di fronte a un calcolo, non si deve subito premere tasti, ma riflettere, analizzare, prendere decisioni; solo quando si ha in mente l'algoritmo risolutivo si può iniziare la parte esecutiva.

Una domanda potrebbe emergere a questo punto: «Come si può evitare che la presenza della calcolatrice in classe diventi un grosso elemento demotivante per l'apprendimento del calcolo mentale?»

4. Vedi sul numero 40, l'articolo dal titolo «Il calcolo a scuola: ovvero l'inizio di un cambiamento epocale».

Rispondo che è soprattutto una questione di mentalità e quindi di educazione.

L'insegnante dev'essere cosciente del fatto che il calcolo mentale rappresenta:

a) in certe occasioni, un mezzo di calcolo più comodo e veloce della calcolatrice;
b) l'unico modo per stimare i risultati di un calcolo che si vuole eseguire a macchina;
c) una formazione propedeutica fondamentale per l'apprendimento del calcolo letterale.

D'altra parte lo stesso insegnante deve accettare senza problemi che la maggior parte dei calcoli, soprattutto quelli di una certa complessità, si eseguano a macchina. Tuttavia, usare la calcolatrice non è così facile come si crede e richiede una buona conoscenza delle proprietà basilari e della simbologia del calcolo numerico.

È importante far nascere negli allievi il gusto per il calcolo (mentale o elettronico), il piacere di scoprire «trucchi ingegnosi e personali», l'abitudine a considerare i numeri come oggetti matematici che racchiudono preziosi segreti da scoprire, la capacità di organizzare un calcolo di una certa complessità, l'importanza di stimare il risultato.

Tutto ciò può essere ottenuto se l'insegnante si premura di proporre attività che concernono numeri di una certa complessità. Tutti sanno che è banale calcolare a macchina 54x6, ma se occorresse calcolare con precisione (53,785x5,98), allora, dopo aver stimato che il risultato è vicino a 324, possiamo usare a proposito il mezzo tecnologico. Ma, disponendo anche solo di una elementare calcolatrice tascabile, si possono finalmente affrontare calcoli ben più complessi. Si scopriranno ben presto anche i limiti della calcolatrice non programmabile. Un esempio per tutti: il calcolo della media aritmetica di due numeri può essere fatto anche senza macchina, così se i numeri fossero tre o quattro; ma la media di dieci o venti numeri non è più facilmente calcolabile senza macchina. Non è più possibile operare con una semplice calcolatrice se i numeri fossero cinquanta o cento (provate a inserire anche solo una trentina di numeri nella calcolatrice: ben presto sorgono problemi che per la maggior parte degli allievi si rivelano insormontabili). Occorre quindi servirsi di un computer, per esempio usando un foglio elettronico. Con questa macchina ben più evoluta è possibile introdurre funzioni di controllo e inoltre, mediante uno scanner e un programma OCR si può trasportare un elenco anche lunghissimo di dati dal supporto cartaceo ad un foglio elettronico, pronto per l'elaborazione.

Come abbiamo appena visto, il calcolo numerico odierno poggia su tre supporti, tutti e tre importanti: il (nuovo) calcolo mentale, il calcolo mediante calcolatrice non programmabile, il calcolo mediante computer. Da un punto di vista squisitamente educativo, ai nostri giorni si impone una pratica del calcolo a scuola che si sviluppi armoniosamente su tutti e tre e che stabilisca delle interazioni fra le diverse modalità. A un turista italiano che si trovasse davanti a una vetrina di Lugano e che vedesse esposto un articolo interessante per 59 franchi e volesse sapere subito più o meno a quante lire corrisponderebbero, gli suggeriremmo di trovare mentalmente i 5/4 di 60, cioè 75 e di considerare quindi che il prezzo in lire è circa 75000. Se lo stesso turista volesse cambiare in lire 3578 franchi e volesse avere un'idea precisa dell'equivalente in valuta italiana che gli spetta, gli suggeriremmo di servirsi di una calcolatrice non programmabile. All'amico che si diletta giocando in borsa, che segue l'evoluzione giornaliera di parecchi titoli e che volesse essere informato in ogni momento sullo stato del proprio avere, suggeriremmo di preparare, per esempio, un foglio elettronico.

E gli algoritmi medioevali del cosiddetto calcolo in colonna? Dimentichiamoli pure, senza nostalgia né falsi timori.

# Quiz numero 26

Caro Archie, ti ricordi certi dettati numerici
che ci facevano a scuola?
759'027:
*settecentocinquantanovemilaventisette*
1'000'000'121:
*unmiliardocentoventuno*
7'234'000'45'003:
*settebilionitrentaquattromiliardiquarantacinquemilatre*
ecc. ecc.
Pensandoci mi è venuto in mente questo giochetto:

***Considera tutti i numeri naturali da zero a un trilione e immagina di scriverli in tutte lettere, rispettando l'ortografia italiana e l'articolo 69 dell'Ordinanza federale sulla metrologia che, fra l'altro, precisa il nome dei numeri.***

***A questo punto prova a metterli in ordine alfabetico.***
***Prova a determinare il 10º, oppure il 25º.***
***Io l'ho fatto e mi sono divertito.***
***Avrei voluto determinare il 2002$^{esimo}$,***
***in onore del nuovo anno, ma sono andato in crisi.***

Vuoi provarci anche tu?

estratto dall'art. 69 OFM

| | |
|---|---|
| ... | |
| 1'000'000'000'000'000'000 | trilione |
| 1'000'000'000'000'000 | biliardo |
| 1'000'000'000'000 | bilione |
| 1'000'000'000 | miliardo |
| 1'000'000 | milione |
| 1'000 | mille |
| ... | |

Vediamo un po'!
Di numeri che iniziano con la lettera a ... non ce ne sono.
Con la b? Ci sarebbe il bilione ma si scrive «*unbilione*»
dunque, secondo l'ordine alfabetico,
si posizione in fondo alla lista.
Con la c? ... Ah ecco. Il cento. Ma «*cento*» è il primo?
...

Lasciate pensare Archie e provate anche voi.
Quale sarà il 10º della lista, oppure il 25º?
I più coraggiosi potrebbero lasciarsi tentare di avvicinare il 2002$^{esimo}$.
Ad attendervi, oltre alla nostra curiosità, ci sono i soliti premi.

# Soluzione del Quiz numero 25

La pallottola lascia come traccia un solo foro e passa per il centro alla condizione, necessaria e sufficiente, che il bersaglio ruoti ad una frequenza di circa 210 giri al secondo (210 Hz). In altre parole che compia mezzo giro (o mezzo giro più un multiplo di 1 giro) nel tempo che la pallottola (alla velocità di 40 m/s) percorre uno spazio pari al diametro del bersaglio.

La prova che il colpo è transitato per il centro è quindi indiretta: siccome il gestore conosce la velocità di rotazione del bersaglio (appunto 210 Hz), gli basta sapere che sul bersaglio c'è un foro solo.

Infatti, se c'è un buco solo, vuol dire che il buco d'entrata e quello d'uscita coincidono. Ciò significa che la struttura ha fatto (2k+1)/2 giri, $k \in N$, mentre la pallottola ha percorso il diametro d del cilindro.
Facendo un po' di conti:

$$\mathbf{d} = \frac{30}{\pi}\,\mathbf{cm} = \frac{3}{10\pi}\,\mathbf{m}$$

$$\mathbf{t}_{\frac{2k+1}{2}\,\text{giri}} = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{v}} = \frac{\frac{3\,\mathbf{m}}{10\pi}}{\frac{40\,\mathbf{m}}{\mathbf{s}}} = \frac{3\,\mathbf{m}}{10\pi}\frac{\mathbf{s}}{40\,\mathbf{m}} = \frac{3}{400\pi}\,\mathbf{s}$$

$$\mathbf{t}_{1\,\text{giro}} = \frac{3}{400\pi}\,\frac{2}{2\mathbf{k}+1}\,\mathbf{s} = \frac{3}{200\pi(2\mathbf{k}+1)}\,\mathbf{s}$$

$$\textbf{Per}\quad \mathbf{k} = 0$$

$$\mathbf{t}_{1\,\text{giro}} = \frac{3}{200\pi}\,\mathbf{s} \cong \frac{1}{200}\,\mathbf{s}$$

Quindi la struttura gira a circa 210 Hz, perché per k > 0 si ottengono frequenze inaccettabili.

Per mancanza di soluzioni corrette questa volta il premio non viene assegnato.

Si potrebbe rilanciare il problema osservando che la pallottola potrebbe lasciare un unico foro pur non passando per il centro; in tal caso però, siccome la sua velocità è fissa, la velocità di rotazione del bersaglio dovrebbe essere un'altra. Quale? A quali condizioni?

# IV. Dalla bricolla

# 1. Calcolo combinatorio, probabilità, statistica

**Premessa**

Dalla bricolla estraiamo alcune proposte sull'educazione ai pensieri combinatorio, probabilistico e statistico presentate l'anno scorso da tre abilitande dell'Istituto per l'abilitazione e l'aggiornamento dei docenti, di Locarno, nel corso di didattica della matematica tenuto da Gianfranco Arrigo.

## 1. Toh, che si vede! Attività combinatorie e Fibonacci

Tiziana Prospero[1]

Gli esempi proposti sono tolti da un'attività didattica effettuata dalla docente in una quarta corso base della scuola media di Cevio. Agli allievi è stato presentato un personaggio fantastico, il signor Leonardo, che abita a Bonifacio, in Corsica. È una persona conosciuta in tutta la città perché è postino e ha molti hobbies. Ha anche una particolarità: di fronte ad ogni problema si chiede sempre quante possibili soluzioni esistano.

### 1.1. Uno strano muretto

Leonardo vuole costruire un muro nel suo giardino usando dei mattoni aventi la lunghezza doppia dell'altezza. Ha inoltre deciso che il muretto deve essere alto quanto la lunghezza di un mattone. Nel suo ripostiglio ci sono 18 mattoni. Leonardo si pone subito la domanda:

«Quanti muri diversi posso costruire usando tutti i mattoni che ho a disposizione?»

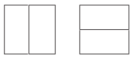
1. Docente di matematica alla Scuola media di Cevio.

**Un iter risolutivo**[2]

con
1 mattone:

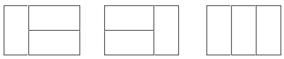
**1**

con
2 mattoni:



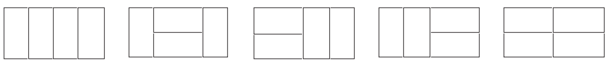
**2**

con
3 mattoni:



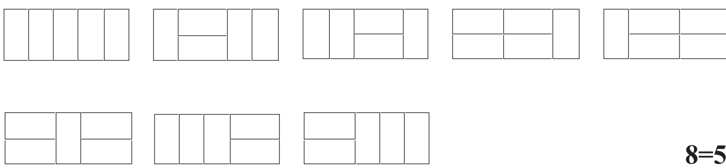
**3=2+1**

con
4 mattoni:



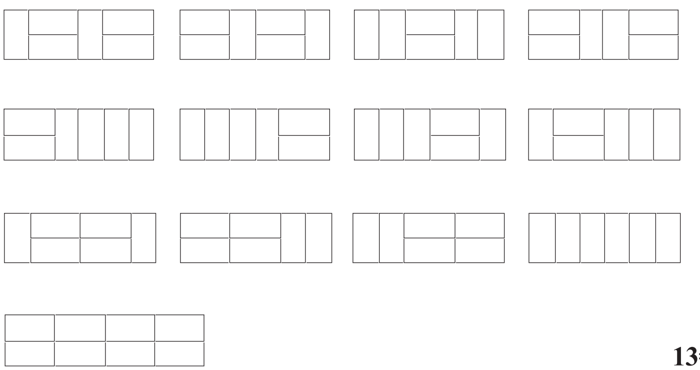
**5=3+2**

con
5 mattoni:



**8=5+3**

con
6 mattoni:



**13=8+5**

2. Nella costruzione di tutti i casi, occorre scegliere un criterio di formazione che garantisca l'esaustività. La ricerca di tali criteri da parte degli allievi stessi contribuisce in modo importante all'educazione al pensiero combinatorio.

Toh, che si vede: i numeri di Fibonacci. A questo punto, se la congettura sta in piedi[3], possiamo continuare così:

| | | | |
|---|---|---|---|
| con 7 mattoni: | **13+8=21** | con 8 mattoni: | **21+13=34** |
| con 9 mattoni: | **35+21=55** | con 10 mattoni: | **55+34=89** |
| con 11 mattoni: | **89+55=144** | con 12 mattoni: | **144+89=233** |
| con 13 mattoni: | **233+144=377** | con 14 mattoni: | **377+233=610** |
| con 15 mattoni: | **610+377=987** | con 16 mattoni: | **987+610=1597** |
| con 17 mattoni: | **1597+987=2584** | con 18 mattoni: | **2584+1597=4181** |

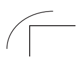
Leonardo, usando tutti i 18 mattoni che ha nel ripostiglio, può costruire il muro in 4181 modi diversi. Quasi da non crederci…

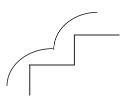
## 1.2. La scala delle poste

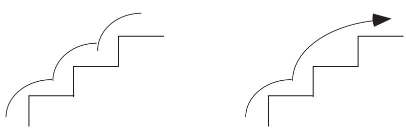
Nella palazzo delle poste, dove Leonardo lavora, c'è una scala di 20 scalini, che deve percorrere più volte al giorno. Quando la imbocca, adotta la seguente strategia: sale obbligatoriamente il primo scalino, poi, a partire da questo, ogni volta sceglie tra salire un unico scalino oppure salirne due simultaneamente (saltando così via uno scalino).

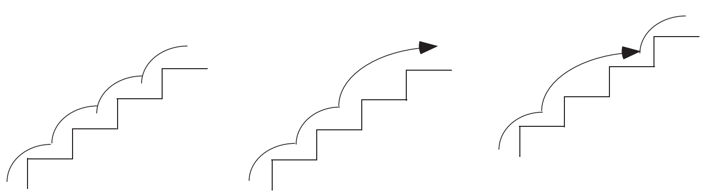
In quanti modi diversi può salire la scala?

**Un iter risolutivo**[4]

1 scalino  **1**

2 scalini  **1**

3 scalini  **2**

4 scalini  **3**

Di nuovo ritroviamo la successione di Finonacci[5]: anzi la più genuina,

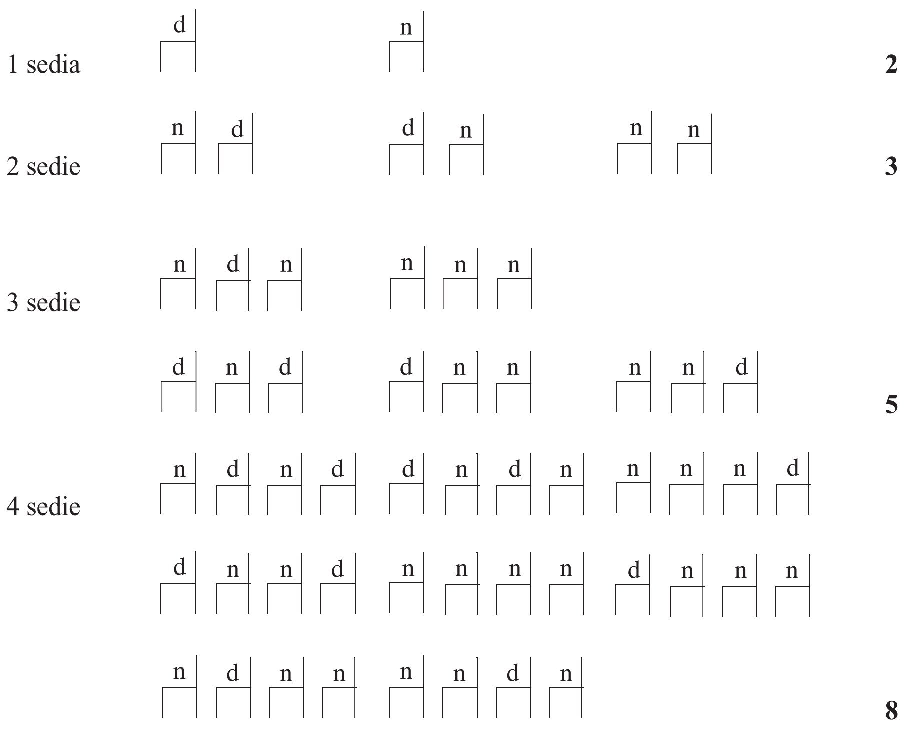
3. Se gli allievi di quarta media possono anche accontentarsi della loro intuizione, chi vorrebbe avvicinarsi a questo problema in modo più rigoroso sarebbe chiamato a fornire una dimostrazione rigorosa del fatto che continuando si descrive l'intera successione di Fibonacci, dimostrazione che in questa sede viene omessa.
4. Vedi nota 2.
5. Vedi nota 3.

quella che inizia con 1, 1. Possiamo quindi rispondere che il postino Leonardo può, in teoria, salire per quella scala in 6765 modi diversi. Infatti, basandoci sui risultati dell'attività precedente e tenendo conto che questa volta all'inizio abbiamo due termini uguali a 1, basta eseguire la semplice addizione 4181+2584=6765.

### 1.3. Docenti chiacchieroni

Una sera Leonardo ha presenziato ad una conferenza. Tra i partecipanti c'erano anche diversi docenti, alcuni dei quali erano seduti vicino e parlavano in continuazione di scuola. Leonardo, per la buona riuscita della prossima conferenza, vuole evitare che un docente si sieda vicino ad un altro docente in ogni fila di sedie. Se le sedie sono disposte in file di 13, in quanti modi differenti si possono sedere 13 persone in una fila, se alcune sono docenti e altre no?

**Un iter risolutivo**[6]




Anche questa volta vediamo nascere la successione di Fibonacci[7], a partire dai due termini 2, 3. Se la congettura è esatta, possiamo rispondere che vi sono 610 modi diversi di accomodare le persone in una fila di 13 sedie, rispettando la condizione che non vi siano mai due docenti seduti uno vicino all'altro.

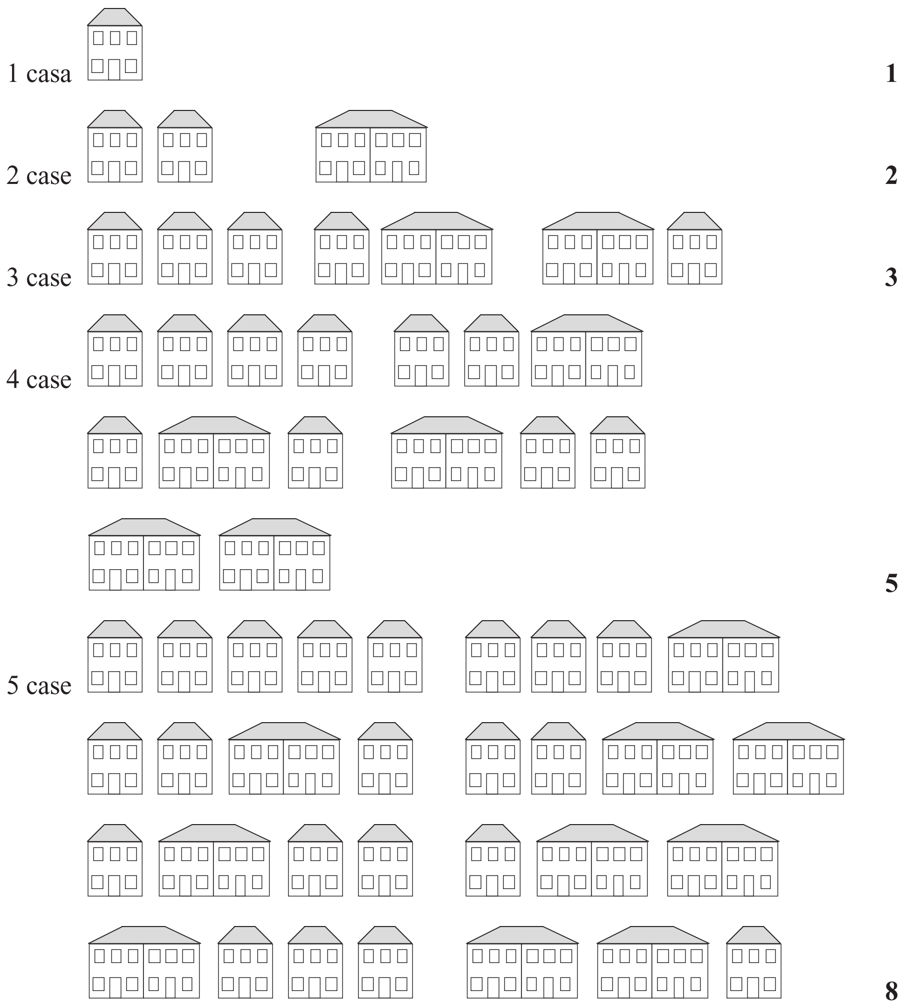
6. Vedi nota 2.
7. Vedi nota 3.

## 1.4. Le case del comune

Lungo un lato della strada parallela a quella dove abita Leonardo, il comune ha deciso di costruire case di due tipi diversi: case singole; due case unite da un muro in comune, le quali occupano il posto di due case singole.

Lo spazio a disposizione è sufficiente per 15 abitazioni. Leonardo, improvvisandosi architetto, decide di stabilire fra quante combinazioni differenti dei due tipi di case si può scegliere quella da costruire.

**Un iter risolutivo**[8]




E via di seguito. Ritroviamo ancora la successione di Fibonacci[9] con la parte iniziale 1, 2. Possiamo allora rispondere che, volendo costruire 15 case, il comune può scegliere fra 987 modi diversi di disporle lungo la strada prescelta.

8. Vedi nota 2.
9. Vedi nota 3.

## 2. Giochi di probabilità

Barbara Berretti[10]

### 2.1. La morra cinese

Ogni giocatore, a scelta, gioca uno dei tre oggetti: forbici (F), sasso (S), carta (C), mimandoli con la mano. F perde da S e vince su C. S vince su F e perde su C. Tutti gli altri scontri sono pareggi. Supponi di giocare un solo colpo. Calcola la probabilità di vincere e quella di pareggiare.

**Un iter risolutivo**

| | | giocatore | | |
|---|---|---|---|---|
| | | F | C | S |
| avversario | F | X | P | V |
| | C | V | X | P |
| | S | P | V | X |

Nella tabella si indicano: con la lettera X il pareggio, con la P che il giocatore perde, con la V che questi vince. Il calcolo è semplice:

$$p(V) = p(P) = p(X) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Il gioco è onesto, perché i tre risultati possibili hanno la stessa probabilità di verificarsi[11].

### 2.2. Pari e dispari senza lo zero

Se un tuo amico ti propone di fare una sola giocata a pari e dispari, escludendo lo zero, ti conviene accettare?

**Un iter risolutivo**

| | | dispari | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| pari | 1 | p | d | p | d | p |
| | 2 | d | p | d | p | d |
| | 3 | p | d | p | d | p |
| | 4 | d | p | d | p | d |
| | 5 | p | d | p | d | p |

Calcoliamo la probabilità di vincere col pari:

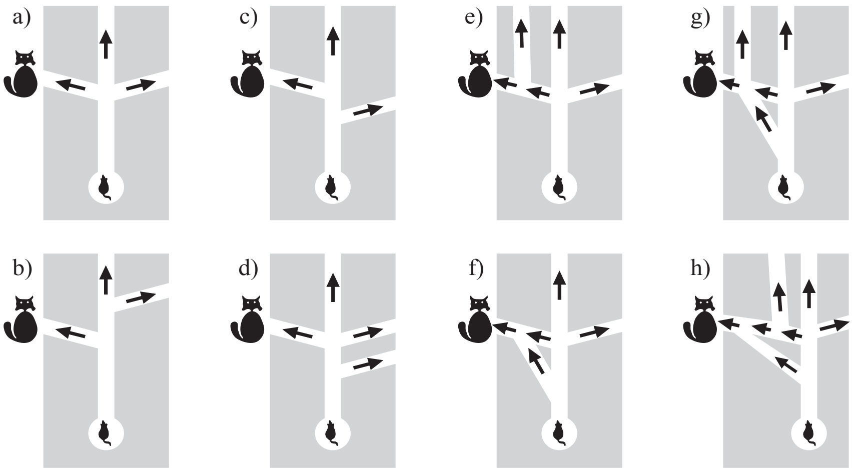
$$p(\text{pari}) = \frac{13}{25} > \frac{1}{2}$$

10. Docente di matematica alla Scuola media di Bellinzona 2.
11. In questo contesto l'onestà si raggiunge quando tutti i risultati possibili hanno la stessa probabilità di verificarsi.

Questo gioco non è onesto[12] perché favorisce chi scommette sul pari. Dunque attenzione: se un vostro amico vi propone di affidare una certa decisione al caso mediante il gioco di pari e dispari senza lo zero e sceglie pari, vuol dire che vi sta ingannando.

## 2.3. Il gatto e il topo

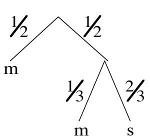
In ciascuna delle 8 situazioni, il topo deve uscire dalla tana. Se dovesse imboccare l'uscita controllata dal gatto, finirebbe la sua esistenza terrena. Si vorrebbe sapere la probabilità matematica di sopravvivenza del topo in ciascuna delle 8 situazioni seguenti.



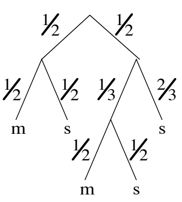

**Qualche iter risolutivo**

Negli alberi si indica con m il fatto che il topo è mangiato dal gatto e con s il fatto che il topo sopravvive.

f)




g)




Calcolo: $p(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

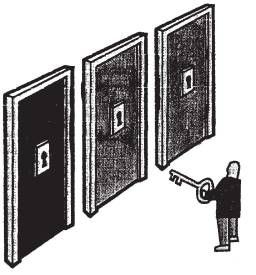
Calcolo: $p(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

**Risultati**

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) 2/3 | b) 1/2 | c) 3/4 | d) 5/6 |
| e) 5/6 | f) 1/3 | g) 2/3 | h) 5/12 |

12. Vedi nota 11.

## 2.4. Il gioco delle tre porte



In un famoso quiz televisivo, il concorrente deve scegliere fra 3 porte: dietro ad una porta c'è una Porsche, mentre dietro ciascuna delle altre due c'è una capra.

Quando il concorrente sceglie una delle tre porte, questa non viene ancora aperta; per contro, il presentatore, che sa dov'è l'auto, ne apre un'altra dietro cui c'è una capra.

A questo punto il presentatore dà la possibilità al concorrente di scegliere se restare fedele alla sua prima scelta, oppure se cambiare sull'altra porta.

Il problema nasce qui; se nella prima scelta, il concorrente non poteva che affidarsi al caso, dopo la mossa del presentatore può fare un calcolo di probabilità.

Gli conviene cambiare scelta o no?

### Un iter risolutivo

Vi sono solo tre possibilità (P=Porsche; C=capra): PCC, CPC, CCP

Nel seguito, la porta cerchiata è quella scelta dal concorrente, mentre la inquadrata è quella aperta dal presentatore.

| | | | |
|---|---|---|---|
| P | C | $\boxed{C}$ | non conviene cambiare |
| P | C | $\boxed{C}$ | conviene cambiare |
| P | $\boxed{C}$ | C | conviene cambiare |
| C | P | $\boxed{C}$ | conviene cambiare |
| C | P | $\boxed{C}$ | non conviene cambiare |
| $\boxed{C}$ | P | C | conviene cambiare |
| C | $\boxed{C}$ | P | conviene cambiare |
| $\boxed{C}$ | C | P | conviene cambiare |
| $\boxed{C}$ | C | P | non conviene cambiare |

Concludiamo che, sui 9 casi possibili, ben 6 sono tali che il cambiamento della scelta iniziale porta al successo, dunque, se il concorrente sceglie di cambiare, porta a 2/3 la probabilità di vittoria; contrariamente, si accontenta di 1/3 (che è appunto la probabilità di azzeccare la Porsche alla prima scelta).

## 3. Attività di statistica

Tatiana Solcà[13]

### 3.1. Menu del giorno

Il signor Appetito mangia regolarmente al ristorante. Sceglie sempre il menu del giorno e annota diligentemente la spesa.

Ecco quello che ha speso il mese scorso:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 26.50 | 26.50 | 23.50 | 21.90 | 25.00 | 18.90 | 29.60 | 26.50 |
| 26.50 | 26.50 | 24.30 | 26.50 | 26.50 | 26.50 | 26.50 | 26.50 |
| 27.00 | 26.50 | 24.30 | 26.50 | 16.20 | 26.50 | 26.50 | 25.00 |
| 26.50 | 31.50 | 26.50 | 28.20 | 26.50 | 26.60 | | |

Un collega gli chiede quanto spende di regola per ogni pasto.

Che cosa risponderesti, se fossi nei panni del signor Appetito?

**Un iter risolutivo**

Si possono determinare i seguenti valori centrali (o rappresentativi):

Media aritmetica: 25.75

Mediana: 26.50

Moda: 26.50

Rispondere con la media aritmetica mi sembra poco giustificato: oltre tutto non c'è nemmeno un valore corrispondente a questo importo. Qui è proprio il caso di scegliere come valore rappresentativo la moda, che è anche uguale alla mediana. Quindi rispondo che di solito spendo 26.50 (franchi).

### 3.2. Conferenza stampa

Il presidente di una squadra di calcio di Lega nazionale, durante una conferenza stampa, replica a una domanda provocatoria dei giornalisti:

Non è vero che allo stadio c'è sempre meno gente. Questi sono gli spettatori che hanno assistito alle partite quest'anno:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3103 | 3339 | 3157 | 3295 | 3301 | 3344 | 3566 | 3611 | 3633 | 3657 |
| 3968 | 4485 | 4505 | 4516 | 4637 | 4660 | 5277 | 5555 | 6449 | 7494 |
| 7503 | 7512 | 9935 | 14489 | 15559 | | | | | |

Potete constatare che in media allo stadio vengono più di 5000 persone e sono molto fiero di questo fatto.

I giornalisti, dal canto loro, non sono molto convinti delle argomentazioni portate dal presidente. Tu che cosa ne pensi?

13. Docente di matematica alla Scuola media di Viganello.

**Un iter risolutivo**

| | |
|---|---|
| Media aritmetica: | 5622 |
| Mediana: | 4505 |
| Moda: | non determinata |

Se guardiamo la media aritmetica, ha ragione il presidente. Ma, si può obiettare, bisogna anche considerare che questo vcalore è influenzato dai due valori nettamente più alti degli altri, quindi da qualcosa di eccezionale. Di regola (o di solito) il numero di spettatori è ben sotto le 5000 unità: questo lo dice molto bene la mediana che è 4505.

### 3.3. Letture durante le vacanze

Sono stati raccolti i seguenti dati relativi al numero di libri letti dai 20 allievi di una terza media durante le vacanze:

0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 3 3 5 7

All'insegnante di italiano interesserebbe sapere un valore matematicamente rappresentativo del numero di libri letti dagli allievi: lo potresti aiutare?

**Un iter risolutivo**

| | |
|---|---|
| Media aritmetica: | 1,8 |
| Mediana: | 1 |
| Moda: | 1 (ma anche 2 ha una frequenza notevole) |

Che cosa rispondere? La media aritmetica, così com'è, risulta ridicola (1,8 libri…).

La mediana è già più significativa, ma in questo caso è la moda (o meglio: le due mode) che dà l'idea più giusta.

### 3.4. Campioni

Negli USA si sono disputati i playoff di basket NBA. Tra le squadre di vertice delle due Conferences troviamo i Los Angeles Lakers e i Philadelphia 76ers. Qui di seguito sono riportati i dati relativi ai punti segnati nelle ultime partite da due grandi campioni:

**Allen Iverson - numero 3, guardia dei Philadelphia 76ers:**

25 22 30 35 36 34 29

**Shaquille O'Neal - numero 34, centro dei Los Angeles Lakers:**

36 24 26 31 31 29 34

Un gruppo di giornalisti non riesce a decidere a quale dei due giocatori attribuire il premio di miglior realizzatore. Tu per chi opteresti ?

**Un iter risolutivo**

La media aritmetica dei punti realizzati da Allen è uguale a 30 punti per partita, la stessa conseguita da Shaquille, perciò non serve per l'attribuzione del premio. Moda e mediana in questo caso non hanno molto senso. È allora il caso di far intervenire una misura di dispersione. Il computer ci dà immediatamente gli scarti tipo dei due contendenti:

| | |
|---|---|
| Scarto tipo di Allen: | 5,54 |
| Scarto tipo di Shaquille: | 4,20 |

Non sappiamo chi hanno premiato i giornalisti, ma noi non esiteremmo a coronare Shaquille come migliore realizzatore, perché i suoi punteggi sono sensibilmente più raccolti attorno alla media 30, rispetto a quelli di Allen. In altre parole, preferiremmo Shaquille perché ha un rendimento più costante.

# 1. Geometria in situazione[1]
# Proposte per il laboratorio matematico del liceo

Gianfranco Arrigo

**Terza situazione**
**Da uno spunto di carattere tecnologico: i cuscinetti a sfera**

*"I meccanici conoscono bene il problema dei cuscinetti a sfera, consistente nel contornare di sferette l'albero attorno al quale gira una ruota.*

*Per esempio, i cuscinetti a sfera li troviamo nei pignoni della bicicletta, nei mozzi delle ruote delle automobili.*

*A noi interessa in modo particolare il problema di inscrivere in un dato cerchio due o più cerchietti tangenti fra di loro e pure tangenti internamente alla sua circonferenza.*

*Rispetto al problema dei cuscinetti a sfera, questo che proponiamo è più semplice, ma riserverà non poche sorprese!"*

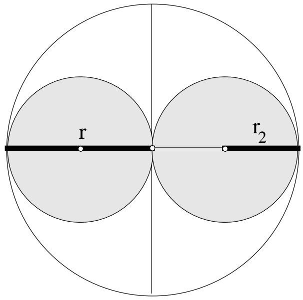
Questa situazione didattica, all'inizio può apparire semplice e limitata. A mano a mano che si procede nell'indagine dei casi che si susseguono logicamente, ci si rende conto che le cose si fanno assai complesse, al punto tale che i risultati che presenteremo non esauriscono la problematica. Chi vuole lanciare i propri allievi su questo terreno sappia quindi che c'è ancora la possibilità di perfezionare la via qui presentata oppure di imboccare altre direzioni di ricerca.

Innanzi tutto va precisato che in questo lavoro ci si stacca dal problema dei cuscinetti a sfera, nel senso che si vuole inscrivere in un cerchio il massimo numero di cerchietti aventi lo stesso raggio. Quest'ultimo sarà calcolato di volta in volta.

Indichiamo con r il raggio del cerchio dato, con $r_2, r_3, \dots$ i raggi dei cerchietti nei casi che nella (prima) corona si abbiano 2, 3, … cerchietti inscritti. Inoltre indicheremo con x la misura di un segmento ausiliario, quando è necessario (o comodo) considerarlo.

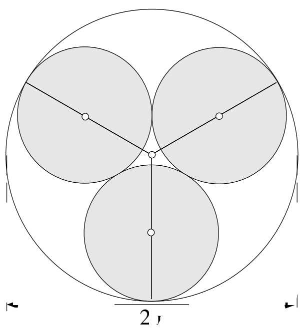
1. Il presente contributo si aggiunge a quello già presentato, sotto lo stesso titolo, nel numero 37 di questa rivista.

**I caso: due cerchietti in un cerchio**

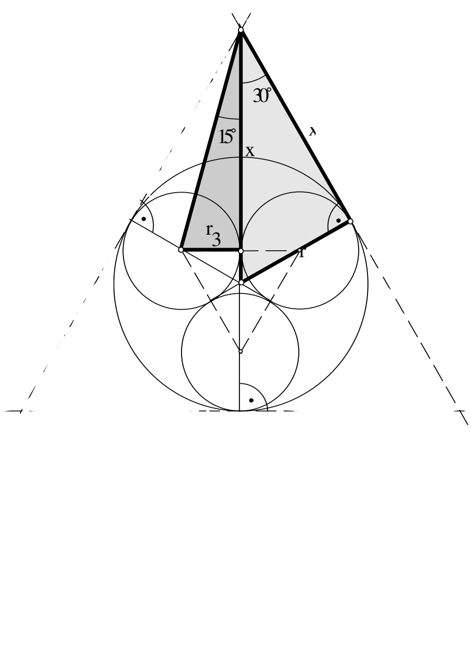



Raggio dei cerchietti inscritti: $r_2 = \frac{r}{2}$
Fin troppo facile…

**II caso: tre cerchietti in un cerchio**



Per calcolare il raggio dei cerchietti inscritti ci aiutiamo con la figura seguente, che illustra un metodo di calcolo facilmente generalizzabile.

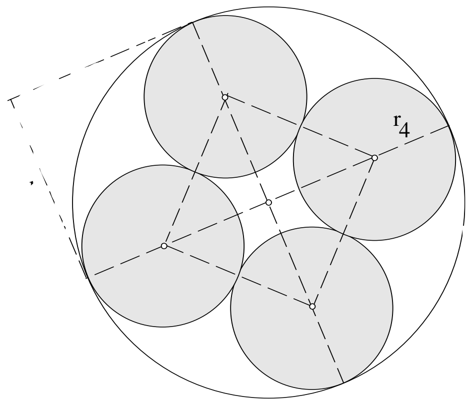


Calcolo: $\dfrac{r}{x} = \text{tg}\,30 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{3} \cdot r$

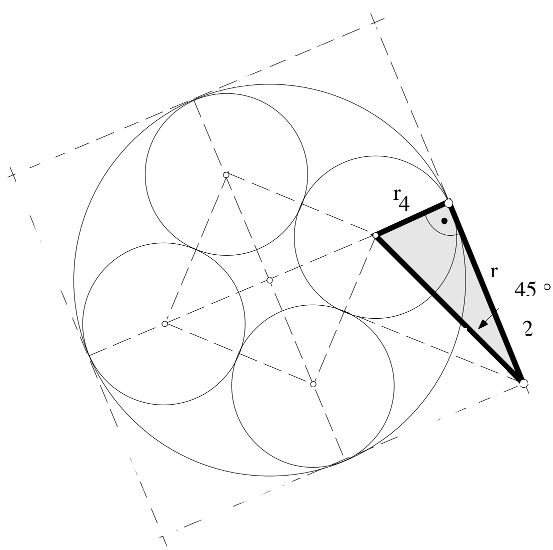
$$\frac{r_3}{x} = \text{tg}\,15 = 2 - \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad r_3 = \left(2 \cdot \sqrt{3} - 3\right) \cdot r$$

Niente di particolarmente interessante: assomiglia a uno dei soliti barbosi esercizi…

**III caso: quattro cerchietti in un cerchio**



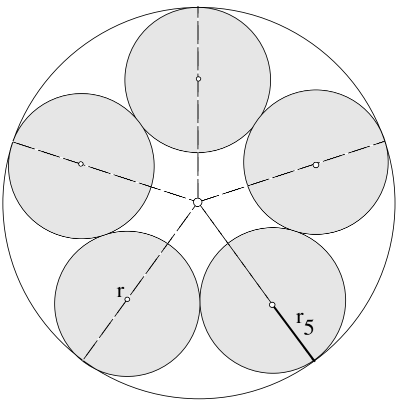

Ci aiutiamo con la figura seguente:



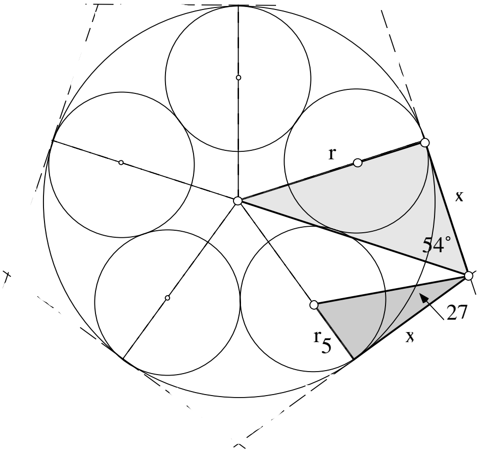

$$r_4 = r \cdot \text{tg}\frac{45^\circ}{2} = r \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)$$

Ancora niente di eccezionale, ma si nota come il metodo di calcolo adottato prima sia direttamente applicabile anche a questo caso.

**IV caso: cinque cerchietti in un cerchio**



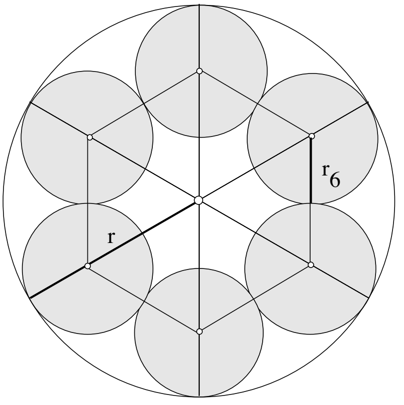

Ci aiutiamo con la figura seguente:



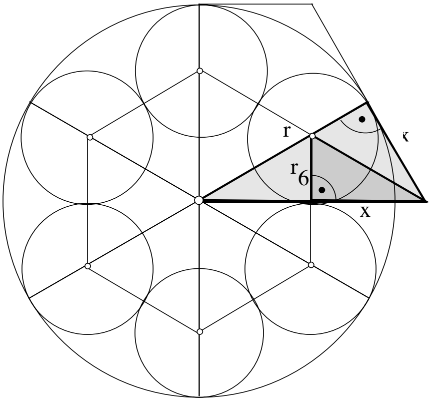

$$\frac{r}{x} = \text{tg } 54^\circ \quad \Rightarrow \quad x = \frac{r}{\text{tg } 54^\circ} \qquad \frac{r_5}{x} = \text{tg } 27^\circ \quad \Rightarrow \quad r_5 = \frac{r}{\text{tg } 54^\circ} \cdot \text{tg } 27^\circ$$

Qui si incomincia a vedere la struttura della formula generale, grazie al fatto che i valori delle tangenti non sono esprimibili mediante radicali.

**V caso: sei cerchietti in un cerchio**




Ci aiutiamo con la figura seguente:



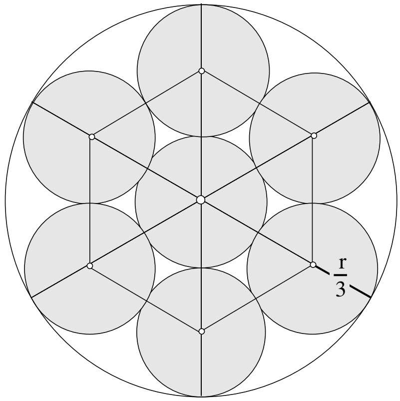

$$\frac{r}{x} = \text{tg } 60^\circ \quad \Rightarrow \quad x = \frac{r}{\sqrt{3}} \qquad r_6 = x \cdot \text{tg } 30^\circ = \frac{r}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{r}{3}$$

Potendo usare le radici, i risultati assumono forme più leggibili. Il valore trovato ci presenta la prima grande sorpresa:

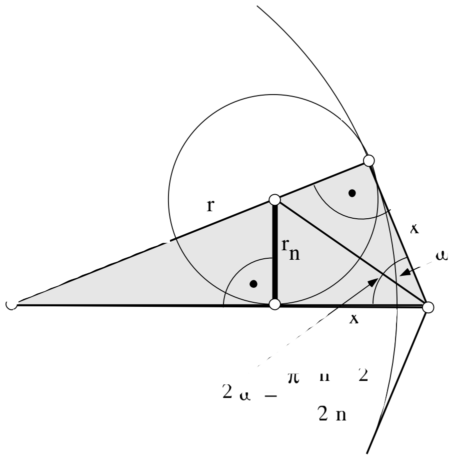
se calcoliamo le lunghezze lungo un diametro scopriamo che…

$$2\,r - 4\,r_6 = 2\,r - 4 \cdot \frac{r}{3} = \frac{2}{3}\,r = 2 \cdot r_6$$

… al centro ci sta una nuova sferetta. Quindi i 6 cerchietti ipotizzati diventano 7.




Ora siamo pronti per la generalizzazione:




$$\frac{r}{x} = \mathrm{tg}\,\frac{\pi\,(n-2)}{2\,n} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{r}{\mathrm{tg}\,\frac{\pi\,(n-2)}{2\,n}}$$

$$r_n = x \cdot \mathrm{tg}\,\frac{\pi\,(n-2)}{4\,n} \quad \Rightarrow \quad r_n = \frac{r}{\mathrm{tg}\,\frac{\pi\,(n-2)}{2\,n}} \cdot \mathrm{tg}\,\frac{\pi\,(n-2)}{4\,n}$$

La formula trovata possiamo inserirla in un computer. Qui abbiamo usato un foglio elettronico.

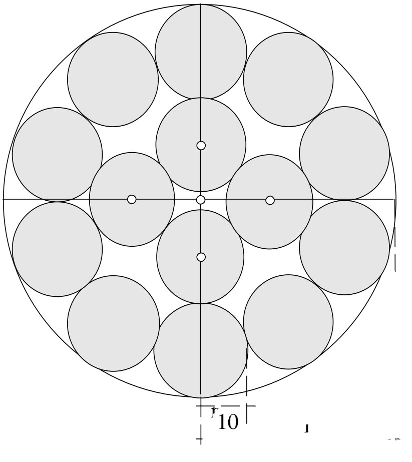
Schema di calcolo:

$$\text{Per} \quad n = 1,2,3,\ldots,(24): \;\; \omega = \frac{\pi\,(n-2)}{4\,n} \;\longrightarrow\; r_n = \frac{r}{\mathrm{tg}(2\,\omega)} \cdot \mathrm{tg}\,\omega$$

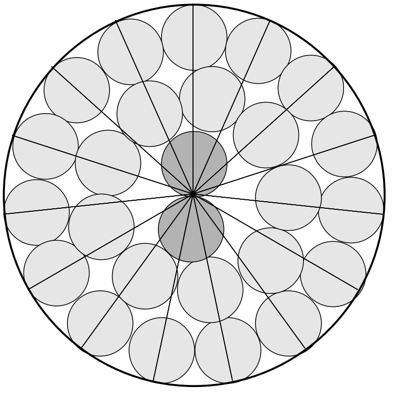
Ricordiamo che n è il numero di cerchietti nella prima corona (cioè quelli tangenti internamente alla circonferenza data). Facendo il calcolo sul diametro si può stabilire il numero di corone concentriche. Gli studenti ai quali abbiamo proposto questo lavoro hanno dato a questo numero il significato di GENERAZIONE. Ecco un esempio di output:

| n | $r_n$ | generazioni |
|---|---|---|
| 3 | 0.46410 | 0 |
| 4 | 0.41421 | 0 |
| 5 | 0.37019 | 0 |
| 6 | 0.33333 | 1 |
| 7 | 0.30259 | 1 |
| 8 | 0.27677 | 1 |
| 9 | 0.25485 | 1 |
| 10 | 0.23607 | 1 |
| 11 | 0.21981 | 1 |
| 12 | 0.20560 | 1 |
| 13 | 0.19310 | 2 |
| 14 | 0.18202 | 2 |
| 15 | 0.17212 | 3 |
| 16 | 0.16324 | 3 |
| 17 | 0.15523 | 3 |
| 18 | 0.14796 | 3 |
| 19 | 0.14133 | 4 |
| 20 | 0.13527 | 4 |
| 21 | 0.12971 | 4 |
| 22 | 0.12458 | 5 |
| 23 | 0.11985 | 5 |
| 24 | 0.11546 | 5 |

Ed ecco alcuni esempi disegnati con l'ausilio del computer:




Questa figura è piaciuta subito agli studenti, perché traduce bene il loro pensiero. Nella tabella la ritroviamo in corrispondenza di n=10 e con 2 generazioni (la zero e la uno), ben visibili se si percorre uno dei due diametri disegnati. I cerchietti inscritti sono 14.



Ecco la figura che ha messo in crisi gli studenti. Benché questo caso si possa trovare correttamente espresso nella tabella precedente in corrispondenza al valore n=15 (con giustamente 3 generazioni), il modo secondo il quale si dispongono i cerchietti -non è più possibile trovare il diametro da percorrere- mette in crisi il metodo adottato per calcolare le generazioni. A questo punto ci si è fermati.

Chissà che qualcun altro possa continuare o reimpostare la ricerca in modo più conveniente.

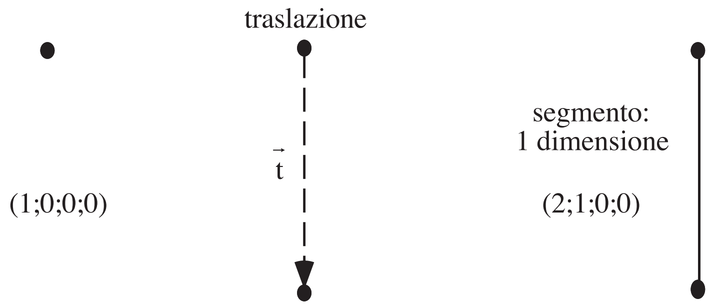
**Quarta situazione**

**Oltre la terza dimensione: ipercubo e compagni**

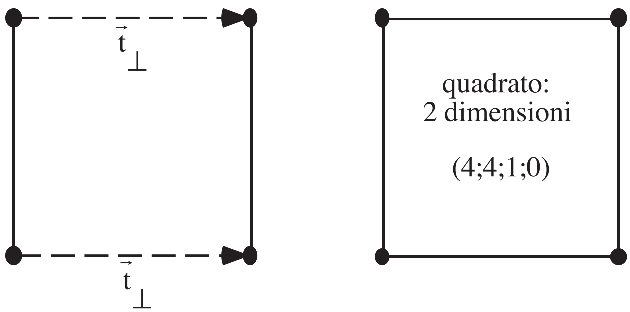
*"Così come…*
*il punto è il "cubo" a zero dimensioni,*
*il segmento è il "cubo" a una dimensione,*
*il quadrato è il "cubo" a due dimensioni,*
*il cubo è il "cubo" a tre dimensioni,*
*… l'ipercubo è il cubo a quattro dimensioni.*

*Così come…*
*è possibile rappresentare (mediante proiezione)*
*un cubo a tre dimensioni su di un foglio di disegno (bidimensionale),*
*… dovrebbe essere possibile realizzare un modellino tridimensionale*
*che sia la proiezione (nello spazio tridimensionale) dell'ipercubo.*
*Il modellino tridimensionale può poi essere rappresentato su un foglio."*

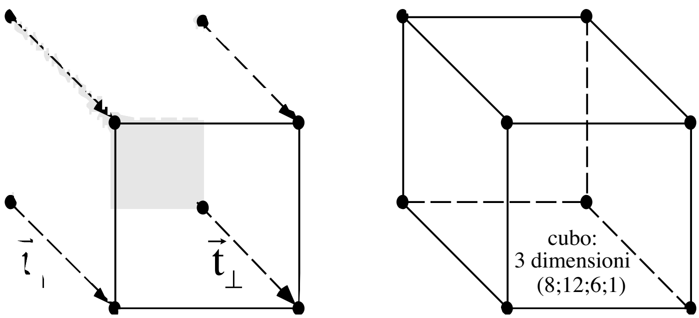
La situazione è stimolante sin dall'inizio: la curiosità degli allievi per quello che può essere definito un superamento della terza dimensione è nota ad ogni insegnante. Qui si propone di adottare un modo semplice ma efficace che permette di passare dalla dimensione k alla k+1. L'oggetto della ricerca è il cubo a k dimensioni (k-cubo), con k=0,1,2,3,4,… Di ogni k-cubo verranno contati gli elementi a 0, 1, 2, …, (k–1) dimensioni: essi formano una n-tupla caratteristica del k-cubo. Il passaggio alla dimensione successiva viene effettuato mediante una traslazione. Ecco come si passa dallo 0-cubo (punto geometrico) all'1-cubo (segmento):



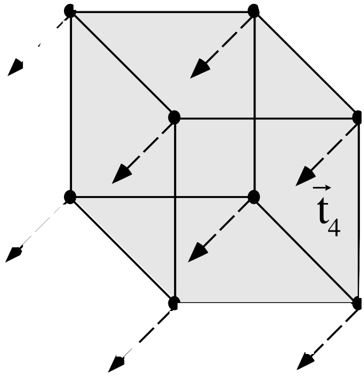

Passaggio dall'1-cubo al 2-cubo (quadrato):



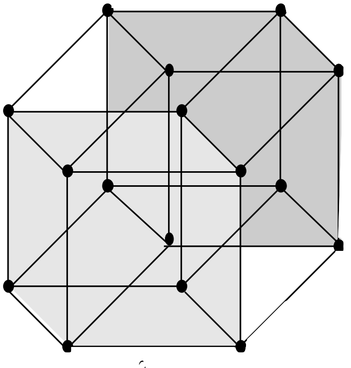

Passaggio dal 2-cubo al 3-cubo (cubo o esaedro regolare):



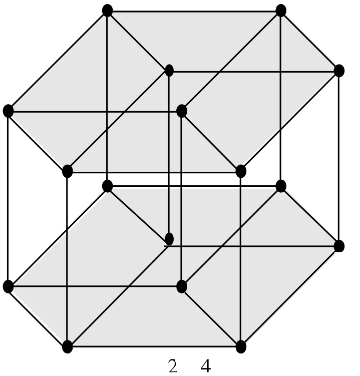

Ed ecco il primo risultato nuovo e per certi versi affascinante: aumentiamo di 1 la dimensione del 3-cubo e otteniamo la proiezione sul foglio della proiezione nello spazio tridimensionale del 4-cubo. Il 4-cubo diviene così visibile anche agli esseri che vivono in un mondo tridimensionale!



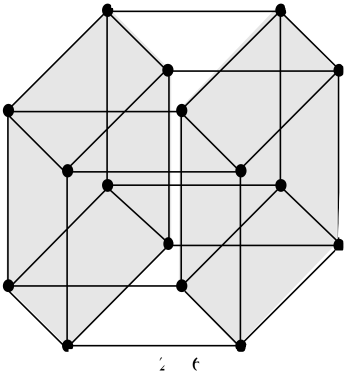
Certo, il computo degli elementi si fa sempre più complicato. Per ora ci accontentiamo di verificare visivamente l'esistenza degli 8 elementi tridimensionali:



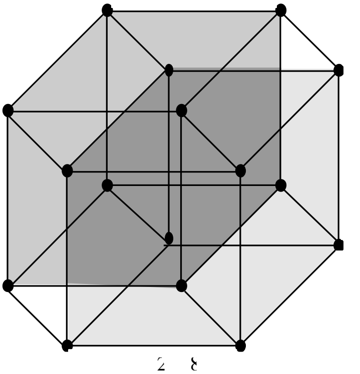
2



2 4



2 6



2 8

Per poter chiarire bene la natura dei diversi k-cubi, vogliamo tentare di esprimere algebricamente il termine n-esimo delle successioni relative agli elementi di dimensione 0 ( $p_i$ ), 1 ( $s_i$ ), 2 ( $f_i$ ), 3 ( $c_i$ ). Ci aiutiamo con una tabella:

| dimensione del k-cubo | $p_i$ | $s_i$ | $f_i$ | $c_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 4 | 4 | 1 | 0 |
| 3 | 8 | 12 | 6 | 1 |
| 4 | 16 | 32 | 24 | 8 |
| … | … | … | … | … |
| k | $p_k = 2^k$ | $s_k = 2\,s_{k\pm 1} + p_{k-1}$ | $f_k = 2\,f_{k-1} + s_{k-1}$ | $c_k = 2\,c_{k-1} + f_{k-1}$ |

L'intuizione delle formule viene facilitata se si pensa a quello che succede a ogni passaggio dalla dimensione k alla k+1.

Per una generalizzazione più spinta, poniamo:

$p_k = E_k^0$ $\qquad$ $s_k = E_k^1$ $\qquad$ $f_k = E_k^2$ $\qquad$ $c_k = E_k^3$

cioè: $E^i_k$ = elemento i-dimensionale di un k-cubo.

Si arriva quindi ad esprimere la congettura seguente:

$$E^i_k = 2\,E^i_{k-1} + E^{i-1}_{k-1}$$

che, inserita in un computer, dà la possibilità di indagare sulle cratteristiche strutturali dei k-cubi. Gli studenti si sono poi divertiti a creare nuovi nomi, che proponiamo (in corsivo) insieme ad altri già usati da qualche autore.

| dim. | nome | $E^0_i$ | $E^1_i$ | $E^2_i$ | $E^3_i$ | $E^4_i$ | $E^5_i$ | $E^6_i$ | $E^7_i$ | $E^8_i$ | $E^9_i$ | $E^{10}_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | punto | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | segmento | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | quadrato | 4 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | cubo | 8 | 12 | 6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | ipercubo | 16 | 32 | 24 | 8 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | supercubo | 32 | 80 | 80 | 40 | 10 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | fantacubo | 64 | 192 | 240 | 160 | 60 | 12 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | *extracubo* | 128 | 448 | 672 | 560 | 280 | 84 | 14 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | *specialcubo* | 256 | 1024 | 1792 | 1792 | 1120 | 448 | 112 | 16 | 1 | 0 | 0 |
| 9 | *elefantcubo* | 512 | 2304 | 4608 | 5376 | 4032 | 2016 | 672 | 144 | 18 | 1 | 0 |
| 10 | *kilocubo* | 1024 | 5120 | 11520 | 15360 | 13440 | 8064 | 3360 | 960 | 180 | 20 | 1 |

Il viaggio oltre la terza dimensione finisce qui. Certamente non è stato così spettacolare come quelli descritti dalla letteratura fantascientifica e rappresentati dal cinema. Sicuramente però è stata un'esperienza reale, vissuta dagli studenti come una loro conquista, soprattutto formativa del pensiero matematico.

# 2. Numeri dolci

Giorgio Mainini

Le seguenti affermazioni sono tutte vere:

1. GM abita al terzo piano di un edificio: per raggiungere il suo appartamento GM deve salire 48 gradini;
2. GM non pratica alcuno sport, se si eccettua un po' di sci in inverno;
3. GM ha la coscienza sporca a causa di 2.;
4. GM è corso ai ripari, decidendo di salire le scale di casa sua a piedi, due gradini alla volta, aiutandosi con la mano sinistra sul parapetto;
5. salendo, GM pronunciava i numeri corrispondenti al passo (1, 2, 3, …);
6. dopo qualche mese, per aumentare la sportività della "scalata", GM ha cominciato ad aiutarsi con le mani solo quando doveva pronunciare un numero coprimo con 24 (ultimo numero che doveva pronunciare);
7. GM ha notato che si aiutava con le mani solo quando pronunciava i numeri 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23;
8. GM ha osservato che tutti i numeri che pronunciava erano primi;
9. GM si è chiesto: esiste un numero massimo che ha la proprietà (D) del 24? E, se sì, qual è?

**Soluzione**

GM ha affrontato il problema da visconte dei dilettanti, nel seguente modo:

– per prima cosa ha definito "dolci" i numeri che hanno la proprietà in questione, e ha chiamato "dolcezza" la proprietà stessa,
– poi ha preparato la seguente tabella:

| N = Nro. di passi | Numeri minori di N, coprimi con N | Commenti |
|---|---|---|
| 1 | … | caso aberrante |
| 2 | nessuno | caso aberrante |
| 3 | 2 | 3 è dolce |
| 4 | 3 | 4 è dolce |
| 5 | 2, 3, **4** | NO: si vede che, se N≥5, N deve essere multiplo di 2, se no sarà coprimo con 4, che non è primo |
| 6 | 5 | 6 è dolce |
| 8 | 3, 5, 7 | 8 è dolce |
| 10 | 3, 5, 7, **9** | NO: si vede che, se N≥10, N deve essere **anche** multiplo di 3, se no sarà coprimo con 9, che non è primo |
| 12 | 3, 7, 11 | 12 è dolce |
| 18 | 5, 7, 11, 13, 17 | 18 è dolce |
| 24 | 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 | 24 è dolce |
| 30 | 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 | 30 è dolce |
| 36 | 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, **25**, … | NO: si vede che, se N ≥ 36, N deve essere **anche** multiplo di 5, se no sarà coprimo con 25, che non è primo |
| 60 | 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, **49**, … | NO: **sembra** che, se N ≥ 60, N debba essere **anche** multiplo di 7, se no sarà coprimo con 49, che non è primo. |

**Sembra** che, se N ≥ 60, N deve essere **anche** multiplo di 7, se vuol essere dolce …
… s**embra** … ma non è vero.

Difatti, messosi il cappello da matematico, GM ha continuato così:
il minimo valore di N multiplo di 2 **e** di 3 **e** di 5 **e** di 7 è 210. Ma
$2 . 3 . 5 . 7 = 210 > 121 = 11^2$ **(A)**

e, da lì via, *sembra* che sarà sempre così:
$2 . 3 . 5 . 7 . 11 = 2310 > 169 = 13^2$

*Sembra* cioè che per tutti i numeri primi $p_j$, j≥4, valga la relazione

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_j > \left(p_{j+1}\right)^2 \qquad \textbf{(T)}$$

La **(T)** va dimostrata.

**Dimostrazione di (T)**

La congettura di Bertrand[1], trasformata in teorema da Chebyshev[2] prima, da Erdös[3] poi, afferma che fra un numero naturale k≥2 e il suo doppio esiste sempre (almeno) un numero primo:

$$2\,k > p > k$$

Ponendo $k = p_{j+1}$ si ha

$$2 \cdot p_{j+1} > p > p_{j+1}$$

Al posto di p si può sicuramente porre $p_{j+2}$, ottenendo

$$2 \cdot p_{j+1} > p_{j+2} > p_{j+1} \qquad \textbf{(B)}$$

La dimostrazione di **(T)** procede ora per induzione, base k=4 (per il quale **(T)** è vera: vedi **(A)**).

Sia vero: $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_k > (p_{k+1})^2$

Ne consegue $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_k \cdot 4 > 4 \cdot (p_{k+1})^2$

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_k \cdot 4 > (2\,p_{k+1})^2 > (p_{k+2})^2 \qquad \text{per } \textbf{(B)}$$

e poiché, per ogni k≥4, $p_{k+1} > 4$, si ha

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_{k+1} > (p_{k+2})^2 \qquad \text{QED}$$

Quindi il massimo numero dolce è 30.

**Commento didattico**

A partire da un problemino di “matematica divertente” si arriva a trovare che esiste un numero dolce massimo, e che tale numero è il 30.

Per risolverlo:

– ci si potrebbe fermare abbastanza presto, dando per buono che **(T)** sia vero semplicemente “per esperienza”, adottando una “miniassiomatica del buon senso”;

– oppure si potrebbe accettare la congettura di Bertrand e dimostrare **(T)** con un procedimento per induzione parecchio interessante;

1. Joseph Louis François **Bertrand**, 11 marzo 1822 (Parigi) - 5 aprile 1900 (Parigi)
2. Pafnuty Lvovich **Chebyshev**, 16 maggio 1821 (Okatovo, Russia) - 8 dicembre 1894 (San Pietroburgo)
3. Paul **Erdös**, 26 marzo 1913 (Budapest) - 20 settembre 1996 (Varsavia)

– oppure si potrebbe, come in questo contributo, dare la congettura per dimostrata, citando il Teorema di Chebyshev/Erdös;
– oppure si potrebbe anche dimostrare "alla Erdös" il teorema in questione ("alla Chebyshev" è una cosa per veri specialisti. Oh Dio, non che "alla Erdös" sia un giochetto …)

I numeri dolci potrebbero rappresentare un bell'esempio di situazione matematica (o di atollo, nuovo termine che stiamo difondendo in didattica), se si considera che una buona situazione deve avere la caratteristica di poter essere trattata a più livelli di approfondimento.

# 1. La matematica dei sistemi di accordatura Uno studio sui rapporti tra matematica e musica (2)[1]

Lauro Filipponi

### 2.8. Il sistema mesotonico

Il sistema di accordatura a terze pure presenta due evidenti svantaggi: la presenza di due toni interi di ampiezza diversa (10/9 e 9/8) e l'esistenza di una quinta troppo piccola proprio in corrispondenza della nota ***re***.

Si è cercato allora di porre rimedio a questa situazione uniformando l'ampiezza dei toni ad una media (la media geometrica) dei due. E ciò è possibile «abbassando» leggermente certe note (ossia «*temperando*» certi intervalli). Da qui il nome di *temperamento del tono medio* o *temperamento mesotonico*. Come per incanto, quest'operazione risolve (quasi completamente) anche il problema della quinta ***re-la***.

Poiché si vuole che l'intervallo ***do-mi*** resti puro (rapporto 5/4), occorre abbassare la nota ***re*** di quanto basta per far sì che i due intervalli ***do-re*** e ***re-mi*** abbiano la stessa ampiezza.

Tale intervallo è la media geometrica tra i numeri 1 e 5/4, ossia

$$\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Quindi:

frequenza di ***do3*** $\rightarrow$ 1

frequenza di ***re3*** $\rightarrow$ $\sqrt{5}/2$

frequenza di ***mi3*** $\rightarrow$ 5/4

ampiezza dell'intervallo ***do-re*** $\rightarrow$ $\left(\sqrt{5}/2\right):1=\sqrt{5}/2$

ampiezza dell'intervallo ***re-mi*** $\rightarrow$ $(5/4):\left(\sqrt{5}/2\right)$

1. Continua dal numero 42, pag. 83.

Ricordiamo che il motivo per cui nel sistema pitagorico le terze non erano pure è da ascrivere al fatto che quattro quinte pure sono più larghe di due ottave più una terza pura, e questa differenza era pari al comma sintonico.

Il temperamento mesotonico consiste dunque nel rimpicciolire (cioè *temperare*) queste quinte, distribuendo uniformemente il comma sintonico tra loro.

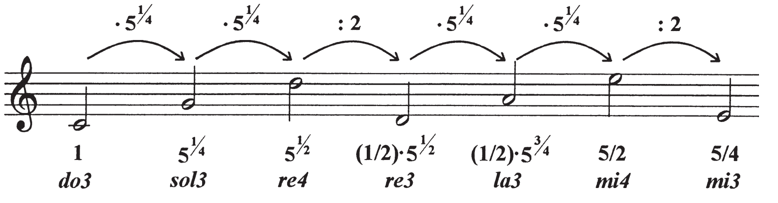
Poiché il comma sintonico vale 81/80, occorre temperare queste quinte di un rapporto pari a

$$\left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$$

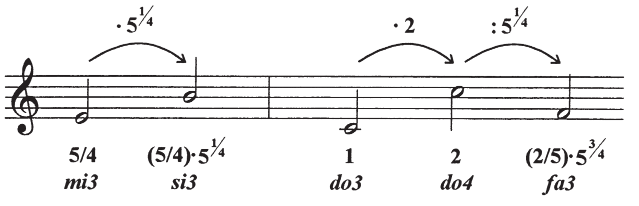
Le nuove quinte (chiamate **quinte mesotoniche**) avranno dunque ampiezza

$$\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5^{1/4}}\right) = 5^{1/4} \cong 1{,}49535$$

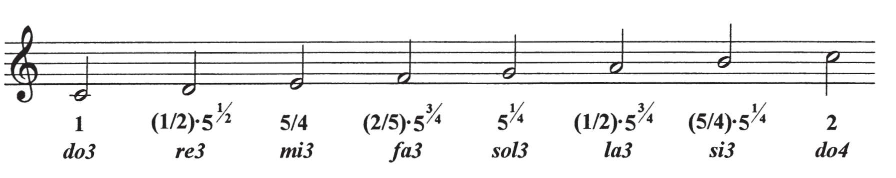
Otteniamo dunque




Anche le note ***si3*** e ***fa3*** si ottengono con le quinte mesotoniche




Riassumendo:




Anche qui abbiamo ottenuto le frequenze per tutti i gradi della scala: esse non coincidono con le frequenze né della scala pitagorica né della scala a terze pure.

Occupiamoci ora dell'ampiezza degli intervalli di ogni grado della scala.

***do3-re3*** $\rightarrow$ $$\frac{5^{1/2}}{2} : 1 = \frac{5^{1/2}}{2} = \sqrt{5}\ \ 2$$

***re3-mi3*** $\rightarrow$ $$(5/4) : \frac{5^{1/2}}{2} = \sqrt{5}\ \ 2$$

***mi3-fa3*** $\rightarrow$ $$\frac{2 \cdot 5^{3/4}}{5} : (5/4) = \frac{8}{25} \cdot 5^{3/4} = 8 \cdot 5^{-5/4}$$

***fa3-sol3*** $\rightarrow$ $$5^{1/4} : \frac{2 \cdot 5^{3/4}}{5} = \frac{5^{1/2}}{2} = \sqrt{5}\ \ 2$$

***sol3-la3*** $\rightarrow$ $$\frac{5^{3/4}}{2} : 5^{1/4} = \frac{5^{1/2}}{2} = \sqrt{5}\ \ 2$$

***la3-si3*** $\rightarrow$ $$\frac{5 \cdot 5^{1/4}}{4} : \frac{5^{3/4}}{2} = \frac{5^{1/2}}{2} = \sqrt{5}\ \ 2$$

***si3-do4*** $\rightarrow$ $$2 : \frac{5 \cdot 5^{1/4}}{4} = 8 \cdot 5^{-5/4}$$

Constatiamo che tutti i toni interi hanno la stessa ampiezza, e così i due semitoni.

Chiameremo «tono medio» (TM) e «semitono medio» (SM) questi due intervalli.

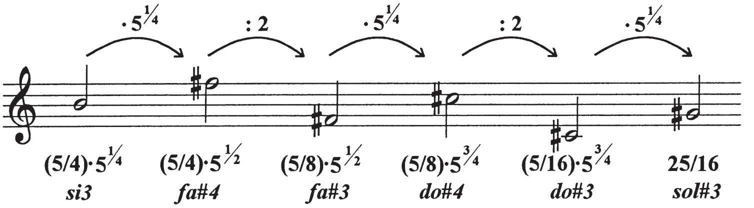
TM ha ampiezza $\sqrt{5}/2 \ \cong\ 1{,}11803$

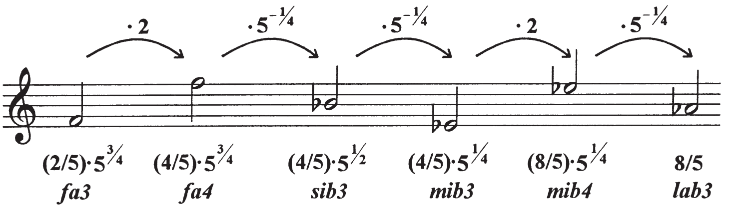
SM ha ampiezza $8 \cdot 5^{-5/4} \ \cong\ 1{,}06998$

Si osservi che $\left(8 \cdot 5^{-5/4}\right)^2 = 64 \cdot 5^{-5/2} \cong 1{,}14487$,

quindi due semitoni medi sono più ampi di un tono medio, e ciò implica che il problema della scelta univoca della frequenza da associare ai tasti neri non è ancora risolto.

Di regola, le note ***fa***#, ***do***#, ***sol***# sono ottenute per quinte mesotoniche ascendenti, mentre le note ***sib*** e ***mib*** (ev. ***lab***) per quinte mesotoniche discendenti.

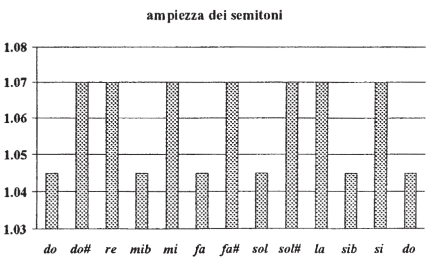


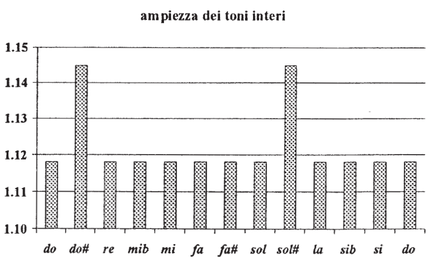



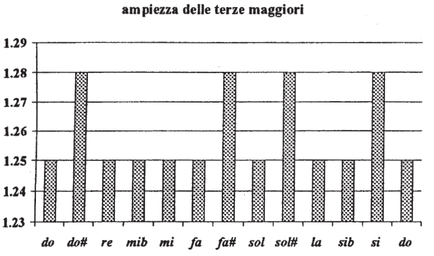

Le frequenze di ***sol#*** e di ***lab*** sono le stesse di quelle del sistema a terze pure: la nota ***sol#*** è più bassa della nota ***lab*** e la differenza è pari al valore del comma enarmonico.

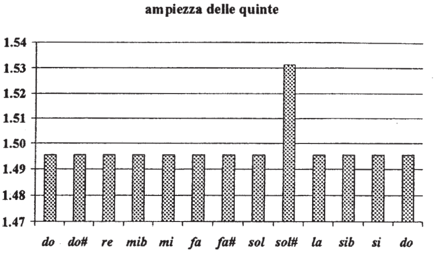
Ecco l'ampiezza degli intervalli costruiti su ogni nota per il sistema mesotonico, con le note ***mib*** e ***sol#***.

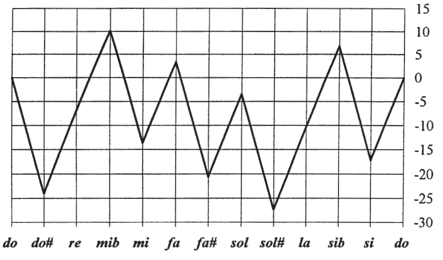
| | | semi-tono | tono intero | terza minore | terza maggiore | quarta | quarta aument. | quinta | sesta minore | sesta maggiore | settima minore | settima maggiore | ottava |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| do | 2.0000 | 1.0449 | 1.1180 | 1.1963 | 1.2500 | 1.3375 | 1.3975 | 1.4953 | 1.5625 | 1.6719 | 1.7889 | 1.8692 | 2.0000 |
| si | 1.8692 | 1.0700 | 1.1180 | 1.1963 | 1.2800 | 1.3375 | 1.4311 | 1.4953 | 1.6000 | 1.6719 | 1.7889 | 1.9140 | 2.0000 |
| sib | 1.7889 | 1.0449 | 1.1180 | 1.1682 | 1.2500 | 1.3375 | 1.3975 | 1.4953 | 1.5625 | 1.6719 | 1.7469 | 1.8692 | 2.0000 |
| la | 1.6719 | 1.0700 | 1.1180 | 1.1963 | 1.2500 | 1.3375 | 1.4311 | 1.4953 | 1.6000 | 1.6719 | 1.7889 | 1.8692 | 2.0000 |
| sol# | 1.5625 | 1.0700 | 1.1449 | 1.1963 | 1.2800 | 1.3375 | 1.4311 | 1.5312 | 1.6000 | 1.7120 | 1.7889 | 1.9140 | 2.0000 |
| sol | 1.4953 | 1.0449 | 1.1180 | 1.1963 | 1.2500 | 1.3375 | 1.3975 | 1.4953 | 1.6000 | 1.6719 | 1.7889 | 1.8692 | 2.0000 |
| fa# | 1.3975 | 1.0700 | 1.1180 | 1.1963 | 1.2800 | 1.3375 | 1.4311 | 1.4953 | 1.6000 | 1.7120 | 1.7889 | 1.9140 | 2.0000 |
| fa | 1.3375 | 1.0449 | 1.1180 | 1.1682 | 1.2500 | 1.3375 | 1.3975 | 1.4953 | 1.5625 | 1.6719 | 1.7889 | 1.8692 | 2.0000 |
| mi | 1.2500 | 1.0700 | 1.1180 | 1.1963 | 1.2500 | 1.3375 | 1.4311 | 1.4953 | 1.6000 | 1.6719 | 1.7889 | 1.9140 | 2.0000 |
| mib | 1.1963 | 1.0449 | 1.1180 | 1.1682 | 1.2500 | 1.3061 | 1.3975 | 1.4953 | 1.5625 | 1.6719 | 1.7469 | 1.8692 | 2.0000 |
| re | 1.1180 | 1.0700 | 1.1180 | 1.1963 | 1.2500 | 1.3375 | 1.3975 | 1.4953 | 1.6000 | 1.6719 | 1.7889 | 1.8692 | 2.0000 |
| do# | 1.0449 | 1.0700 | 1.1449 | 1.1963 | 1.2800 | 1.3375 | 1.4311 | 1.4953 | 1.6000 | 1.7120 | 1.7889 | 1.9140 | 2.0000 |
| do | 1.0000 | 1.0449 | 1.1180 | 1.1963 | 1.2500 | 1.3375 | 1.3975 | 1.4953 | 1.5625 | 1.6719 | 1.7889 | 1.8692 | 2.0000 |
| | | semi-tono | tono intero | terza minore | terza maggiore | quarta | quarta aument. | quinta | sesta minore | sesta maggiore | settima minore | settima maggiore | ottava |



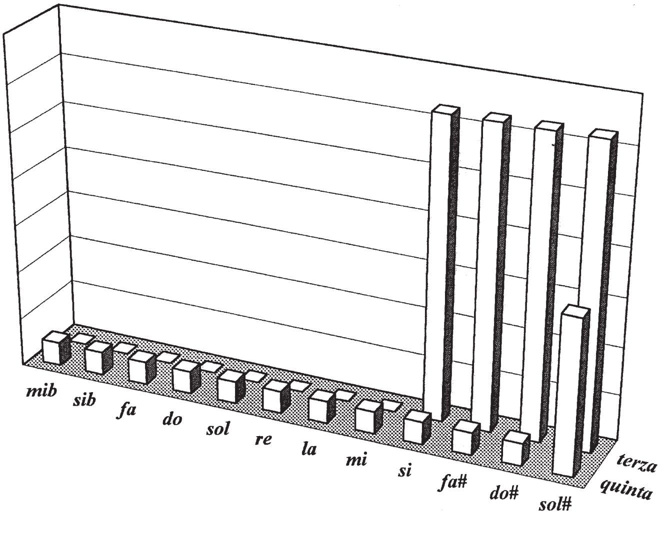



Il grafico che mostra gli scarti tra l'altezza delle note del sistema mesotonico e l'altezza delle note che si otterrebbero dividendo l'ottava in 12 intervalli uguali (il temperamento equabile) evidenzia differenze ancor più marcate del sistema pitagorico: una scala cromatica eseguita su uno strumento accordato in questo modo, nell'alternanza tra semitoni più stretti e più larghi, ha un effetto veramente straordinario.

Il grafico che esprime il grado di consonanza di questo sistema di accordatura è:



Per concludere, sul sistema mesotonico:

– i semitoni sono di due diverse ampiezze,
– i toni interi sono tutti della stessa ampiezza, salvo ***do#-re*** e ***sol#-la***, assai più ampi,
– tutte le terze sono pure, salvo ***do#-fa***, ***fa#-sib***, ***sol#-do***, ***si-mib***, che suonano assai male,
– tutte le quinte sono uguali, e suonano abbastanza bene, ma nessuna è pura; una è troppo ampia (quinta del lupo),
– l'accordo maggiore su ***sol#*** (=***lab***), ossia l'accordo ***sol#-do-mib*** risulta particolarmente sgradevole: infatti sia la terza che la quinta sono troppo ampie.

## 2.9. Altri sistemi di accordatura

Il temperamento mesotonico non fu l'unico che cercò di «temperare» le asperità del sistema pitagorico o del sistema a terze pure. Durante tutto il Cinquecento e il Seicento varie furono le sperimentazioni e le teorizzazioni.

Alcuni nomi: Zarlino, Werckmeister, Silbermann, Kirnberger, Rameau, Tartini, Mersenne, Riccati, D'Alembert. E l'elenco potrebbe continuare.

Ecco, alcuni di questi sistemi di accordatura, con i rispettivi grafici che esprimono il grado di consonanza.

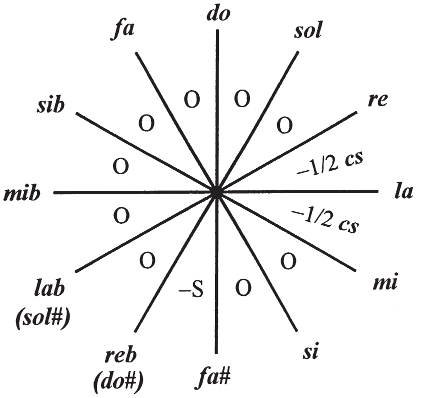
### 2.9.1. Kirnberger II

Johan Philipp Kirnberger (1760-1779) propose vari tipi di temperamento. In quello che oggi è conosciuto con il nome di Kirnberger II, il comma sintonico viene diviso tra due quinte ***re-la*** e ***la-mi***.

Come mostra lo schema seguente, le altre note sono ottenute con quinte pure ascendenti (***si***, ***fa#***) e con quinte pure discendenti (***sol***, ***do***, ***fa***, ***sib***, ***mib***, ***lab***, ***reb***).

La quinta ***fa#-reb*** non risulta pura: essa è leggermente più stretta.

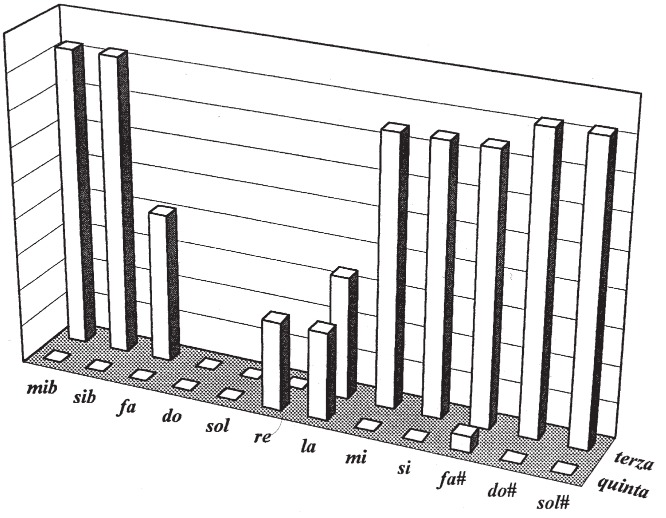
Tale differenza viene chiamata *schisma* ed è il rapporto tra il comma pitagorico e il comma sintonico.



Risulta

$$S = \frac{3^{12}}{2^{19}} : \frac{81}{80} = \frac{32805}{32768} \cong 1{,}00113$$

Come si vede nel grafico che esprime il grado di consonanza, gli accordi di do maggiore e di sol maggiore sono puri, due quinte sono alquanto impure, e le terze diventano rapidamente assai impure non appena ci si allontana dalle tonalità di do maggiore e di sol maggiore.

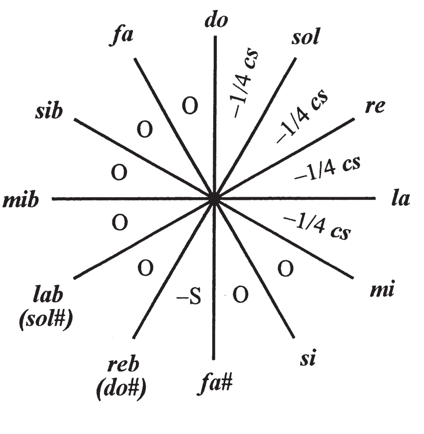



2.9.2. Kirnberger III

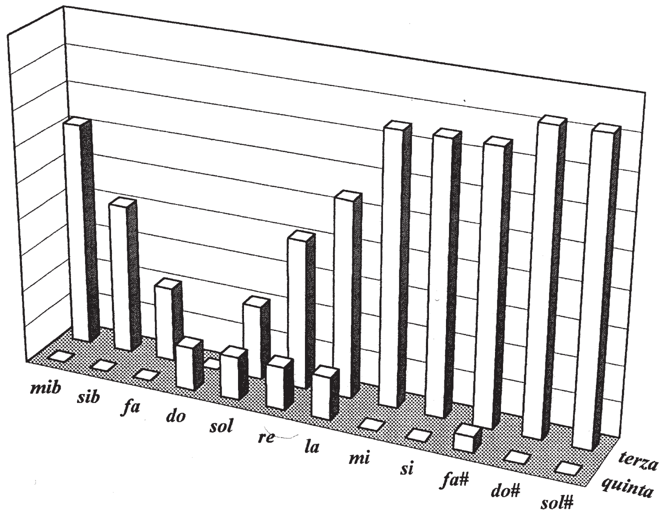
In questa successiva elaborazione, Kirnberger propose di dividere il comma sintonico tra quattro quinte: ***do-sol***, ***sol-re***, ***re-la*** e ***la-mi***.

Come mostra lo schema seguente, le altre note sono ottenute con quinte pure ascendenti (***si***, ***fa#***) e con quinte pure discendenti (***fa***, ***sib***, ***mib***, ***lab***, ***reb***).

L'ampiezza della quinta ***fa#-reb*** è pari ad una quinta pura diminuita di uno schisma.



Come si vede nel grafico che esprime il grado di consonanza, nessun accordo maggiore è puro; ma le terze diventano gradatamente sempre più impure non appena ci si allontana dalla tonalità di do maggiore.

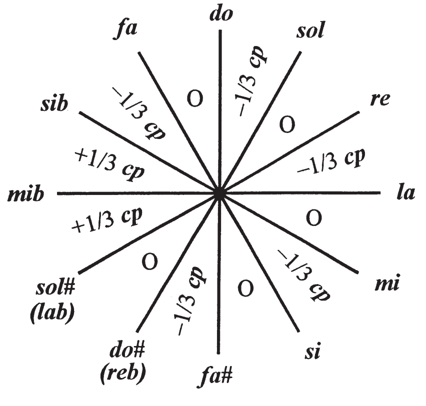



## 2.9.3. Werkmeister IV

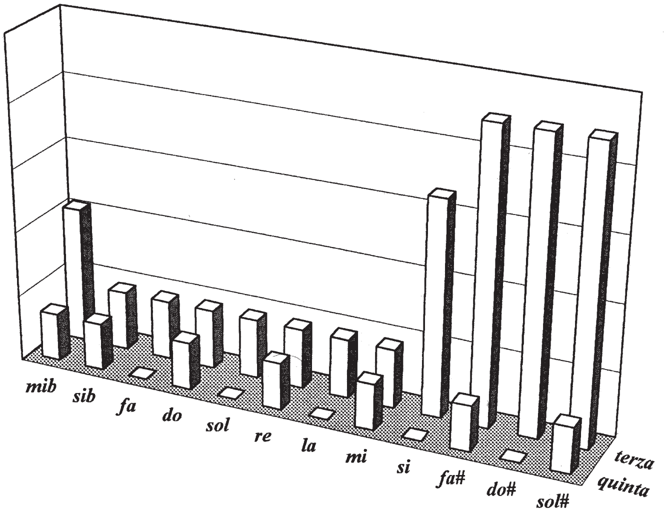
Andreas Werckmeister (1645-1707) ci ha lasciato cinque proposte di temperamento. In quella che oggi è conosciuta con il nome di Werckmeister IV, alcune quinte sono ridotte di una quantità pari a 1/3 del comma pitagorico, mentre due quinte sono addirittura aumentate della stessa quantità.

Alcune (cinque) quinte restano così pure, e le terze che ne risultano sono assai differenti.

Nessuna terza maggiore è pura, e tre terze sono addirittura più grandi della terza pitagorica.



Come mostra il grafico seguente che esprime il grado di consonanza, c'è un contrasto assai spiccato tra le tonalità con poche alterazioni e le tonalità con diverse alterazioni.

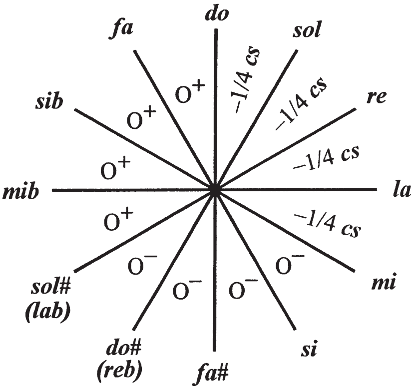



## 2.9.4. D'Alambert

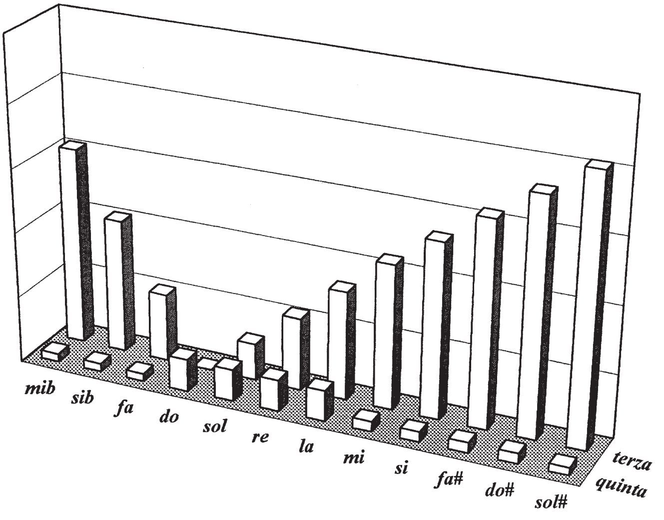
Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) si cimentò pure con questo problema. Negli *Élements de Musique* (1752) propone un sistema di accordatura assai complesso.

Come nel sistema Kirnberger III, il comma sintonico viene diviso tra quattro quinte: ***do-sol***, ***sol-re***, ***re-la*** e ***la-mi***. Questo porta alla terza pura ***do-mi***.

Quattro quinte ascendenti (***mi-si***, ***si-fa#***, ***fa#-do#***, ***do#-sol#***) sono accordate leggermente più strette della quinta pura, mentre altre quattro discendenti (***do-fa***, ***fa-sib***, ***sib-mib***, ***mib-lab***) sono da accordare leggermente più larghe della quinta pura.



Il grafico che segue mostra un dolce e graduale aumento del grado di dissonanza nelle terze, man mano che ci si allontana dalla tonalità di do maggiore.




## 3. Il temperamento equabile

Ogni sistema di accordatura privilegiava certi spazi sonori, certe tonalità, a scapito di altre, poco usate. E nei sistemi di accordatura che abbiamo visto, non tutte le tonalità erano utilizzabili.

Accanto al desiderio di esplorare tutte le tonalità possibili, sorse la necessità di definire un sistema di accordatura che desse pari importanza a tutte le tonalità: a poco a poco si affermò il *sistema equabile*, ossia il sistema di accordatura che prevede la divisione dell'ottava in 12 parti uguali.

Dividere l'ottava in 12 parti uguali significa trovare 12 termini in progressione geometrica tra 1 e 2.

Dall'equazione $x^{12} = 2$ segue $x = \sqrt[12]{2} = 2^{1/12} \cong 1{,}05946$ .

L'intervallo di ampiezza $2^{1/12}$ viene chiamato *semitono temperato*, e ogni altro intervallo è un suo multiplo.

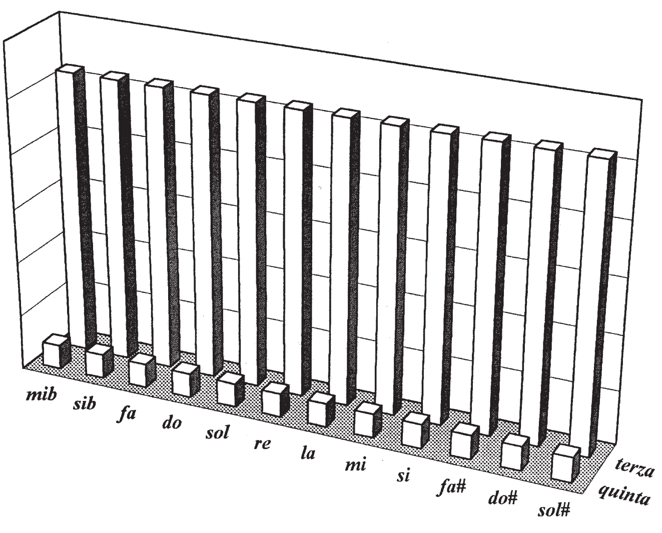
Ecco l'ampiezza di tutti gli intervalli del sistema temperato:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ***do-do#*** | $\rightarrow$ | $2^{1/12}$ | $\cong$ 1,05946 | |
| ***do-re*** | $\rightarrow$ | $\left(2^{1/12}\right)^2 = 2^{1/6}$ | $\cong$ 1,12246 | |
| ***do-mib*** | $\rightarrow$ | $\left(2^{1/12}\right)^3 = 2^{1/4}$ | $\cong$ 1,18921 | |
| ***do-mi*** | $\rightarrow$ | $\left(2^{1/12}\right)^4 = 2^{1/3}$ | $\cong$ 1,25992 | terza pura = 1,25 |
| ***do-fa*** | $\rightarrow$ | $\left(2^{1/12}\right)^5 = 2^{5/12}$ | $\cong$ 1,33484 | |
| ***do-fa#*** | $\rightarrow$ | $\left(2^{1/12}\right)^6 = 2^{1/2}$ | $\cong$ 1,41421 | |
| ***do-sol*** | $\rightarrow$ | $\left(2^{1/12}\right)^7 = 2^{7/12}$ | $\cong$ 1,49831 | quinta pura = 1,5 |
| ***do-sol#*** | $\rightarrow$ | $\left(2^{1/12}\right)^8 = 2^{2/3}$ | $\cong$ 1,58740 | |
| ***do-la*** | $\rightarrow$ | $\left(2^{1/12}\right)^9 = 2^{3/4}$ | $\cong$ 1,68179 | |
| ***do-sib*** | $\rightarrow$ | $\left(2^{1/12}\right)^{10} = 2^{5/6}$ | $\cong$ 1,78180 | |
| ***do-si*** | $\rightarrow$ | $\left(2^{1/12}\right)^{11} = 2^{11/12}$ | $\cong$ 1,88775 | |

Ogni quinta viene dunque temperata (diminuita) di una quantità pari a 1/12 di comma pitagorico.

Questo sistema, agli indiscutibili vantaggi di poter modulare in tutte le tonalità, accosta alcuni svantaggi: nessun intervallo (ad esclusione dell'ottava) è puro; in particolare le terze maggiori sono assai più ampie e dissonanti rispetto alla terza pura.

Il grafico che esprime il grado di consonanza è significativo e ribadisce bene come in questo caso nessuna tonalità sia privilegiata rispetto alle altre.



# Bibliografia

Pierre-Yves Asselin

*Musique et tempérament*, Costallat, Paris, 1985.

Loris Azzaroni

*Canone infinito, Lineamenti di teoria della musica*, CLUEB, Bologna 1997.

Alda Bellasich, Emilia Fadini, Sigfrido Leschiutta, Mark Lindley

*Il clavicembalo: organologia, accordatura, notazione, diteggiatura*, EDT Musica, Torino, 1984.

Dominique Devie

*Le tempérament musical, Philosophie, Histoire, Théorie et Pratique*, Société de Musicologie du Languedoc, Béziers, 1990.

Jean Lattard

*Musique: gammes et tempérament*, Costallat, Paris, 1985.

# VII. Segnalazioni

## 1. Recensioni

**Amir D. Aczel – L'equazione di Dio. Einstein, la relatività e l'universo in espansione – il Saggiatore, Milano, 2000, pag. 223, Lit 28000**

La teoria della relatività «speciale» di Einstein è vera in un mondo senza oggetti dotati di massa; per la massa e la gravitazione era necessaria un'altra teoria. D'altra parte la teoria della gravitazione in uso agli inizi del XX secolo era stata creata trecento anni prima da Isaac Newton ed è corretta solo in un mondo in cui le velocità sono molto inferiori a quella della luce. Era quindi necessario correggerla; e, analogamente, la relatività speciale, corretta fin quando la gravità è insignificante, avrebbe avuto bisogno di modifiche per essere ancora valida in un universo dominato da oggetti di grande massa. Ma come arrivarci? Il libro racconta in modo particolareggiato, ma comprensibile anche ai non specialisti, l'iter seguito da Einstein per tentare la formulazione dell'«equazione di Dio», cioè dell'equazione che descrive il moto nel campo gravitazionale, per masse e velocità qualsiasi.

Nel 1907, due anni dopo avere derivato il principio della relatività speciale, Albert Einstein, che allora aveva ventotto anni e lavorava all'Ufficio brevetti di Berna, cominciò a dedicarsi al problema della gravitazione. Un giorno di novembre sedeva alla sua scrivania e rifletteva sulle conseguenze della relatività speciale, di cui aveva completato l'edificio concettuale due anni prima. Così descrisse quel portentoso momento molti anni dopo, nella conferenza del 1922 a Kyoto: «Improvvisamente mi venne un pensiero: se una persona è in caduta libera, non sente il proprio peso. Ebbi come una scossa. Questo pensiero così semplice mi fece un'impressione profonda, mi spinse verso una teoria della gravitazione». Al suo carissimo amico Michele Besso, che lavorava anch'egli all'Ufficio brevetti, Einstein disse che questa rivelazione era stata «il pensiero più felice della sua vita». Cominciò a cercare di spiegare la gravità nel quadro della relatività; per questa via sarebbe arrivato a creare la teoria della relatività generale, cioè una teoria della relatività che incorpora la gravitazione.

Ma Einstein non aveva un carattere facile ed era parecchio diffidente, così apprendiamo come, non avendo voluto studiare i lavori di due matematici italiani, Gregorio Ricci e Tullio Levi Civita, abbia sprecato qualche anno di duro lavoro.

Il terzo pezzo di teoria generale della relatività da lui costruito a Praga riguardava l'ipotesi che gli oggetti massicci non agissero solo sui corpi rigidi, ma anche sulla luce; incominciò, in altre parole, a elaborare un principio che avrebbe finito per rivelarsi equivalente a qualcosa che aveva già detto Newton secoli prima. La sua conclusione che un oggetto massiccio deflette la luce equivaleva infatti al principio newtoniano che un oggetto in viaggio nello spazio cambia traiettoria quando si avvicina a un corpo molto massiccio, che è poi lo stesso principio usato dalla NASA per cambiare direzione a una nave spaziale facendola girare intorno a un pianeta. Supponendo che la luce non fosse un'onda ma una particella, la teoria diceva anche di quanto sarebbe stato deflesso un raggio luminoso passando accanto a un oggetto massiccio: per un corpo con la massa del Sole e un raggio che lo avesse appena sfiorato, Einstein computò una deflessione di 0,83 secondi d'arco; evidentemente commise un errore di calcolo, perché il valore che avrebbe dovuto ottenere, date le premesse da cui partiva, era di 0,875 secondi d'arco, che, a sua volta, era circa la metà di quello esatto che avrebbe ottenuto quattro anni dopo, nell'ambito di una teoria generale della relatività ormai completa.

Ciò che gli interessava era una verifica delle previsioni della sua teoria della gravitazione, non ancora completata: se si fosse riusciti a osservare la deflessione della luce, per la sua teoria ci sarebbe stata una felicissima conferma.

In un articolo sulla deflessione della luce Einstein osservava che proprio gli astronomi potevano cercare le prove di questo fenomeno. Nell'estate del 1911 uno studente dell'Università di Praga, Leo W. Pollak, si recò a Berlino e ne visitò l'Osservatorio. Qui conobbe Erwin Finlay Freundlich (1885-1964), il più giovane degli assistenti, al quale raccontò che Einstein era molto deluso perché gli astronomi non avevano accolto il suo suggerimento di controllare se fosse possibile rilevare sperimentalmente la deflessione della luce. La sua descrizione delle idee einsteiniane conquistò a tal punto Freundlich, che questi si offrì subito di misurare la deflessione della luce in prossimità del pianeta Giove. L'esperimento fallì, data la relativa esiguità della massa del più grande pianeta a disposizione. Ma il creato aveva messo a disposizione di Einstein un fenomeno che consente di vedere tanto le stelle quanto l'esatta posizione del Sole in pieno giorno: l'eclissi solare. Appena si rese conto di ciò, Einstein scrisse a Freundlich, si organizzò una spedizione in Crimea, interrotta però dallo scoppio della prima guerra mondiale. Nel frattempo Einstein perfezionò la sua teoria della gravitazione generale, grazie anche ai contributi matematici dei due italiani citati e di Bernhard Riemann. Il valore della deflessione fu vistosamente corretto e fu stabilito a 1,75 secondi. La nuova misurazione fu fatta dall'astronomo inglese Arthur Stanley Eddington, che giunse sull'isola di Principe, al largo della Nuova Guinea equatoriale, nell'Africa occidentale, il 23 aprile del 1919, con un nutrito gruppo di collaboratori e con apparecchiature molto raffinate. Quando Eddington, eccitatissimo, sviluppò le lastre ottenute durante l'eclissi, fu un trionfo: la deflessione misurata fu di 1,6 secondi con un errore stimato di ±0,3.

È solo un episodio dei molti che si leggono in questo bellissimo racconto.

La teoria generale della relatività è ancora incompleta nel senso che è stata capace di applicare in modo soddisfacente il principio di relatività solo ai campi gravitazionali, ma non al campo totale. Non sappiamo ancora con certezza né quale sia il meccanismo matematico con cui descrivere il campo totale né a quali leggi invarianti e generali questo campo totale sia soggetto. Ma una cosa appare certa: il principio generale di relatività sarà uno strumento indispensabile ed efficace per la soluzione del problema del campo totale.

Si riportano per informazione, gli indici di alcuni libri, attinenti la matematica, le scienze e la didattica, senza che ciò comporti un giudizio di merito sul contenuto, con indicazioni tratte dalle loro prefazioni.

**Benoît B. Mandelbrot – Gli oggetti frattali. Forma, caso e dimensione – Giulio Einaudi Editore s.p.a. Torino, Ristampa 2001, pag. 207, € 18,59.**

Prefazione all'edizione italiana di Luca Peliti e Angelo Vulpiani – Nota all'edizione italiana di Roberto Pignoni – Prefazione alla seconda edizione francese – I Introduzione – II Quanto è lunga la costa della Bretagna? – III Il ruolo del caso – IV Raffiche di errori – V I crateri della Luna – VI La distribuzione delle galassie – VII Modelli del rilievo terrestre – VIII La geometria della turbolenza – IX Intermittenza relativa – X Saponi e gli esponenti critici come dimensioni – XI Organizzazione di componenti di calcolatore – XII Alberi di gerarchia o di classificazione – XIII Lessico dei neologismi – XIV Appendice matematica – XV Schizzi biografici – XVI Coda, postscriptum e ringraziamenti – Riferimenti bibliografici.

Dalla prefazione dell'autore. «questa edizione non è molto diversa da quella del 1975, dato che i cambiamenti – benché numerosi e per nulla trascurabili – riguardano solo dei dettagli (…). La geometria frattale della natura, che vi trovò la sua prima espressione, si è sviluppata in tutte le direzioni in maniera esplosiva, ma in questo libro era già enunciata gran parte delle idee essenziali e oggi esso ha sempre meno il carattere di un trattato, mentre rimane immutata la sua validità come introduzione e, nello stesso tempo, come documento storico (…)».

Dalla prefazione all'edizione italiana: «(…) nel mondo della nostra esperienza quotidiana le figure geometriche sono piuttosto l'eccezione: qual è la forma di un sasso? Di una nuvola? Di una montagna? Sebbene per Galileo anche tali forme ricadessero sotto l'impero della geometria, sta di fatto che la scienza ha preferito evolversi andando a cercare quelle caratteristiche più riposte dei fenomeni, che con minore sforzo potessero essere trattate prima da una geometria, poi da un'analisi che privilegiasse la regolarità e l'armonia (…). D'altra parte, nell'evoluzione «spontanea» delle matematiche nascevano «mostri» che violavano quelle caratteristiche di regolarità e di armonia che sembravano necessarie agli oggetti di studio scientifico: così Riemann e Weierstrass introducono funzioni continue che non ammettono derivata in nessun punto (…). Ricevuto il nome (frattali), hanno acquistato esistenza, e sono stati riconosciuti nei campi più disparati: soprattutto in fisica, ma anche in biologia, in economia, in linguistica. Mandelbrot è andato a cercare le proprietà comuni alla frequenza dell'uso delle parole e alle statistiche delle piene del Nilo; alla distribuzione delle galassie e alla struttura dei polmoni. In ognuno di questi casi, ogni piccola parte dell'oggetto è un'immagine ridotta dell'oggetto intero (…)».

Dalle note dell'Editore: «(…) In questo volume, che si presenta riveduto e aggiornato rispetto alle edizioni originali francesi, è lo stesso Mandelbrot a presentare la propria teoria, che si è dimostrata così fertile di applicazioni in ogni campo della ricerca scientifica e tecnologica, aprendo nuove frontiere alla *computer graphics*. Il volume rappresenta dunque il punto di partenza tanto per chi vuole accostarsi alla geometria frattale mosso da un interesse prettamente epistemologico, quanto per chi, avendo già una qualche dimestichezza con strutture matematiche «aberranti e curiose», quali la curva di Peano o l'insieme di Cantor, cerchi per esse un'interpretazione semplice e concreta (…)».

**Midhat Gazalè – Il numero. Dalla matematica delle piramidi all'infinito di Cantor – Edizioni Dedalo srl, 2001 Bari, pag. 338, € 20,66**

Prefazione – Introduzione – Capitolo primo: genesi dei sistemi di numerazione – Fondamenti – Sistemi di numerazione arcaici – Due moderni sistemi di numerazione – Capitolo secondo: sistemi posizionali di numerazione – L'algoritmo della divisione – Codici – Sistemi posizionali a base mista – Rappresentazione posizionale di numeri frazionari – Basi periodiche – Un metro triadico (ternario) – Marginalia – Capitolo terzo: divisibilità e sistemi di numerazione – Il teorema fondamentale dell'aritmetica – Congruenze – La prova della divisibilità di Pascal – Funzione e teorema di Eulero – Multipli coniugati e conformi – Rappresentazione posizionale dei numeri razionali – Marginalia – Appendice – Capitolo quarto: numeri reali – Numeri razionali – Numeri irrazionali – Dedekind – Eudosso – Marginalia – Appendice – Capitolo quinto: frazioni continue – Algoritmo euclideo – Frazioni continue – Appendice – Capitolo sesto: Fratture – Il reticolo dei numeri – Alcune proprietà delle frazioni – Pennelli e scale – Marginalia – Appendice – Capitolo settimo: infinito – Convergenza – Paradossi delle serie infinite – Horror infiniti? Infinito potenziale contro infinito attuale. Cantor – Postscriptum: l'equilibrio è improponibile, ma il cielo di notte è nero – Indice dei nomi.

Dalla prefazione: «(…) Un terzo motivo di frustrazione nasceva dal difficile linguaggio deliberatamente adottato da alcuni matematici per descrivere persino il più semplice degli oggetti (soprattutto in Francia, sulla scia del caso Bourbaki). Ho dunque scelto un approccio graduale e utilizzato il linguaggio più semplice possibile, suscitando forse la costernazione dei matematici di professione, e sacrificando una ineccepibile precisione (…). La presente opera si apre con uno studio delle nozioni fondamentali soggiacenti all'acquisizione e alla registrazione del numero, come l'operazione di corrispondenza, o concezione cardinale, e quella di conteggio, o concezione ordinale. Segue un resoconto storico-matematico di tre sistemi di numerazione dell'antichità, e cioè il sistema additivo egiziano e i sistemi posizionali maya e mesopotamico. Successivamente, vengono esaminati i due sistemi attualmente in uso, quello decimale Indiano-Arabo e quello binario. Viene poi offerta una dettagliata descrizione dei sistemi di numerazione posizionale misti e uniformi (…). Nel capitolo seguente viene preso in esame il concetto di divisibilità, nella sua correlazione con la numerazione posizionale. Le domande alle quali è mia intenzione tentare di dare una risposta sono le seguenti: perché la rappresentazione posizionale dei numeri irrazionali non è periodica? In che modo si può predire il periodo dei numeri razionali? A questo proposito, viene spiegato il teorema di Eulero, ed è dedicato un particolare impegno pedagogico alla presentazione di risultati piuttosto ardui della teoria dei numeri in una forma abbondantemente illustrata e spero piacevole(…). Il capitolo quarto si sofferma sulla nozione di numeri reali, e offre una sommaria presentazione delle definizioni di Frege-Russell e Peano, e della visione intuizionistica di Brouwer. Segue poi uno studio del dominio di integrità e un approccio assiomatico alla costruzione del campo dei numeri razionali (…). Il capitolo successivo introduce il lettore all'argomento spesso trascurato delle frazioni continue, per prepararlo alla nozione che verrà presentata successivamente, quella di linea di frattura (…). L’ultimo capitolo affronta il difficile argomento dell’infinito. Dopo uno studio elementare della convergenza, vengono presi in esame alcuni paradossi dell’infinito: l’hotel di Hilbert, i paradossi di Zenone, e altri ancora. Seguono una discussione del metodo di esaustione e un’esposizione del dibattito fra i sostenitori dell’infinito attuale (Cantor), e gli aristotelici (…)».

**Piergiorgio Odifreddi – Il computer di Dio. Pensieri di un matematico impertinente – Raffaello Cortina Editore, 2000, Milano, pag. 267, € 18,59.**

Prefazione – Cultura – Attualità – Fine millennio – Politica – Religione – Arte – Letteratura – Giochi – Filosofia – Logica – Aritmetica – Geometria – Scienza – Tecnica – Protagonisti – Indice dei nomi.

Dalla prefazione: «(…) Dalla nascita della scienza, quattro secoli fa, l’universo è stato percepito e descritto come un giocattolo preferito di un Dio tecnologico: il suo *orologio meccanico* nel Settecento, il suo *motore termodinamico* nell’Ottocento, il suo *centralino telefonico* agli inizi del Novecento. Sembra quasi di vederlo sfrecciare alla velocità della Luce, barba al vento nello spazio infinito, col volante in mano e il telefonino nell’altra. Allo scadere del secondo millennio, le metafore sono diventate ancora più stringenti: ormai gli Zarathustra della divulgazione scientifica, da Stephen Hawking a Paul Davies, parlano apertamente dell’evoluzione dell’universo come dell’azione del corpo di Dio, e delle leggi fisiche come dei pensieri della mente. Ha dunque permesso anche a un «loico» laico di indulgervi, per riferirsi alla natura e alla matematica come all’hardware, e al software di Dio, e alla totalità dei fenomeni e delle loro descrizioni come al suo computer. L’immagine, Programmatore a parte, è significativa perché descrive concisamente la fede scientifica: che il mondo sia non solo astrattamente razionale, ma concretamente comprensibile, e che la matematica sia il linguaggio necessario e sufficiente per descriverlo. I saggi raccolti in questo volume intendono appunto rimpolpare la metafora, e presentare in maniera programmaticamente divulgativa e augurabilmente piacevole alcuni aspetti culturali della matematica. Il loro stile giornalistico non è casuale, e deriva dall’occasione che li ha generati: alcuni di essi sono infatti apparsi in varie sezioni del quotidiano *La Stampa*, tra il 21 agosto 1995 e il 16 febbraio 2000 (lascio al Lettore immaginare quali siano gli inediti) (…)».

Dalle note dell’autore: «(…) E la matematica che il lettore scoprirà in queste pagine è intessuta di levità e ironia. Grandi religioni, sistemi politici, codici morali hanno tutti qualche libro sacro da cui i sudditi devono trarre «gli assiomi» che regolano il loro modo di pensare e di comportarsi. Ma, come commenta Odifreddi, «della matematica non si può fare a meno, e l’unica scelta possibile è il libro da cui trarre i propri assiomi. Noi continuiamo a preferire quello della natura, come Galileo».

Progetto grafico
Bruno Monguzzi
Fotocomposizione
Taiana
Stampa
Veladini

Redazione
Laboratorio di didattica della matematica
Ufficio dell’insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera

Telefono
091 814 34 28/57/58
Fax
091 814 44 92

Amministrazione
Centro didattico cantonale
Stabile Torretta
CH–6501 Bellinzona
Svizzera
Fax
091 814 44 91

Esce due volte all’anno
a maggio e a dicembre

Abbonamento annuo
Sfr. 30.–
Lit 30’000