A cura
del Laboratorio di didattica della matematica

Bollettino dei docenti di matematica

44

Maggio
2002

Ufficio
dell’insegnamento medio
Centro
didattico cantonale

Bollettino
dei docenti di matematica
44

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'istruzione
e della cultura

© 2002
Divisione della Scuola
Centro didattico cantonale

ISBN 88-86486-39-1

Bollettino dei docenti di matematica 44

Maggio
2002

Ufficio dell'insegnamento medio
Centro didattico cantonale

Indice

Prefazione

Il primo articolo è di Bruno D'Amore e si inserisce nel campo dell'etnomatematica, cioè lo studio di determinate civiltà attraverso le loro produzioni matematiche. Jean Dhombres, che abbiamo conosciuto lo scorso mese di agosto alla Perfetta di Arzo, da eminente specialista ci ripresenta il suo contributo su Archimede, facendoci rivivere quel corso di aggiornamento che difficilmente scorderemo (la seconda parte, relativa alle costruzioni navali, seguirà sul prossimo numero). Michel Chastellain, presenta l'operazione CIRCE III, che ci pare, nello spirito, in perfetta sintonia con l'analoga nuova produzione che si sta progettando in Ticino per la scuola media. Attenti, poi, a quei due (Arrigo e Mainini), che ci presentano in tono paradossale una riflessione su un modo di fare matematica a scuola. Le stesse idee le ritroviamo, in veste più seria, nell'articolo di Gianfranco Arrigo sul nuovo Piano formativo per la scuola media. Lo scopo dei due articoli citati è di aiutare gli insegnanti a capire due cose: primo, che la riforma dev'essere presa seriamente e secondo che, se ben impostata, essa può incrementare notevolmente la professionalità dell'insegnante.

L'intermezzo è occupato dal nuovo quiz di Aldo Frapolli: coraggio!

La Bricolla è di nuovo tenuta da due giovani abilitandi, che ci presentano unità didattiche originali, pronte per l'uso.

Il ritorno di Claudio Beretta è di quelli col botto: una originalissima avventura nel mondo delle ellissi, ricca di spunti per attività relative alla scuola superiore. L'ultimo articolo è di Edoardo Montella e presenta uno studio completo e illustratissimo sulle sezioni piane del cubo: una ricca proposta per attività di laboratorio matematico nella scuola media (la seconda parte seguirà sul prossimo numero).

Le segnalazioni sono più ricche del solito, perché l'attualità lo permette. Si segnala la nascita della SMASI (Società matematica della Svizzera italiana) e si presentano due convegni da non perdere: il secondo seminario di didattica della matematica di Adria (RO) e l'annuale appuntamento di Castel San Pietro Terme (BO), che anche e specialmente quest'anno è da non perdere. Si termina con le recensioni di Gianfranco Arrigo: alcuni volumi di particolare interesse, fortemente raccomandati a tutti gli insegnanti di matematica.

1. Matematica in alcune culture sudamericane Un contributo all'Etnomatematica

Bruno D'Amore[1]

A few years ago, the author had the chance to give some lectures for the course leading to the Bachelor degree in Mathematics at the Polytechnic of Chimborazo, in the city of Riobamba, in Ecuador. Particularly from the human point of view, that was an interesting experience, because during the quite long free time D'Amore could visit various secluded areas of this South-American country. He visited them with the intelligent curiosity of someone who first of all seeks to grasp the origins and customs of these populations, whose culture was literally destroyed first by the European conquerors, and then by the "gringos". His interest has obviously often fallen on some mathematical questions: numeration and methods of calculation.

Premessa

Alcuni anni fa, grazie ad un invito dell'amico e collega prof. Mario Ferrari, dell'Università di Pavia, ho tenuto alcuni corsi presso il Corso di laurea in Matematica nel Politecnico del Chimborazo, nella città di Riobamba, in Ecuador, con fondi messi a disposizione dal Ministero degli Affari Esteri italiano.

La città di Riobamba è la capitale del Chimborazo, uno degli stati che formano la Federazione dell'Ecuador. È storicamente famosa perché lì, nel 1830, fu proclamata l'indipendenza dell'Ecuador. Il nome Chimborazo ricorre spesso, in quella regione, dato che essa è appunto dominata dal vulcano che ha quel nome, il più alto (6267 m) della parte nord della cordigliera andina. La città fu interamente ricostruita dopo un violento terremoto in una zona tellurica continua, dato che si trova in una valle tra più vulcani, il più attivo dei quali è l'Altair. È dunque del tutto frequente che la terra letteralmente sobbalzi durante la notte o il giorno, senza che nessuno se ne preoccupi. Il Chimborazo è elemento, a volte maschile a volte femminile, di molte leggende attorno alla creazione dell'essere umano, attorno alla raccolta del mais, della preservazione delle greggi eccetera. Esso è talmente visibile che è anche stato preso come verso privilegiato delle auto a Riobamba; dato che gli incroci stradali sono tutti ortogonali, si è stabilito che ha la precedenza l'automobilista che, al momento dell'incrocio, vede il Chimborazo. Funziona!

L'ammontare delle ore di lezione non era enorme e, soprattutto, i miei corsi erano limitati ai primi giorni della settimana; il che mi dava l'opportunità di viaggiare in lungo e in largo per l'Ecuador, anche perché avevo a disposizione mezzi di locomozione di grande efficacia.

Questo fatto mi ha permesso di entrare in contatto per mesi con gli abitanti di piccoli villaggi costruiti fino a 4000 m di altezza (Cuatros Esquinas, San Fran-

1. Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna.

cisco...), di visitare scuole di lingua quechua (del ceppo andino, non costiero, il che è assai diverso), di visitare comunità di lingua shuar, di risalire il rio Napo (in piena Amazonìa, come lì viene chiamata l'Amazzonia).

Risalire il fiume Napo non è così banale come potrebbe credere un turista europeo abituato a tutte le comodità, perfino ad andare in cima ai monti solo se c'è una sicura cabinovia. Si può andare da Riobamba a Penipe, Puyo e poi Tena in auto propria o bus. Ma le «strade» sono tali che tutti mi sconsigliarono di farlo in auto (veramente, tutti mi sconsigliarono di farlo in assoluto). Sono zone ricche di movimenti franosi, con dirupi incredibili, privi di assistenza di alcun tipo. Nessuna delinquenza, però oggettive difficoltà. Si aggiunga che non vi sono affatto indicazioni stradali. Procurarsi una carta stradale in Ecuador non è immediato; esse sono in vendita solo presso gli Istituti Geografici Militari e non è automatico ottenerle (ovviamente a pagamento) solo perché si è un turista straniero. Io ne ottenni una, dopo varie insistenze, ma dovetti andare a Quito e sottopormi ad un lungo interrogatorio. Sulla carta ufficiale della Federazione vi sono due confini con il Perù, quello stabilito nel cosiddetto Trattato di Rio de Janeiro del 1942 e quello rivendicato dall'Ecuador, ma di fatto teatro di una vera e propria guerra dal 1946, per la conquista di una vasta zona di foreste dove di sicuro c'è del petrolio. E popolazioni indigene misteriose, certo indifferenti ad entrambi i belligeranti ed al petrolio.

Torniamo al viaggio da Riobamba al rio Napo. Andare da Riobamba a Tena significa cambiare bus ad ogni stazione, viaggiando centinaia di chilometri per ogni tratta. Alcune «stazioni» sono incredibili, piccole, coloratissime e frenetiche, pullulanti di una umanità variopinta e multiforme. Il bus diventa ogni volta più piccolo, più malandato e più... pieno, ma non solo di esseri umani: di frutta, verdura, pane, tessuti, merce varia ed animali in quantità, galline, maiali, cagnolini... Un animaletto un po' più grande di un nostrano criceto era forse il più presente; lo chiamavano con un suono pressappoco come «cuì» ma non so come si scriva; al solo citarlo, vedevo salire l'acquolina alla bocca dei miei compagni di viaggio. (Ne mangiai arrosto io stesso, dopo qualche settimana, due volte, in cene di festa).

A Tena cessa ogni «strada» e cominciano sentieri, percorribili di nuovo in interessantissimi piccoli «bus», scalcinati e velocissimi, fino a Puerto Misuhallí, l'ultimo avamposto nel quale vi siano case, locande e... posti pubblici per giochi di scommesse su partite di calcio del campionato italiano. Poco oltre Puerto Misuhallí c'è un posto di polizia dove bisogna consegnare il proprio passaporto ed una dichiarazione scritta contenente il recapito di parenti da avvisare in caso di mancato ritorno. Lì ti avvertono che puoi procedere, ma a tuo rischio e pericolo. Mi sono sempre chiesto se non sia una trovata turistica, dato che mai, neppure per un istante, ho avuto l'impressione di correre veri pericoli.

Ad un certo punto finiscono anche i sentieri perché la foresta si fa impenetrabile. Ma si può proseguire in canoe (a motore) con una guida, lungo il fiume Napo (nel frattempo abbiamo cambiato stato e siamo entrati nello stato del Napo, di una vastità enorme e di una densità abitativa incredibilmente bassa). Lungo le rive del fiume ho avuto modo di incontrare tribù dedite alla ricerca di pagliuzze d'oro (i fanghi del fiume ne sono pieni), alla raccolta della frutta, ma anche nullafacenti: la natura è così ricca che permette di vivere in assoluta tranquillità senza troppe angosce. Ho anche incontrato varie lattine vuote di nafta, molte di coca cola, non molte altre tracce di «civiltà».

Può essere interessante sapere che alcuni membri di una tribù vivevano completamente nudi in un ambiente che ha un'umidità assolutamente incredibile. Tutta la regione vive in un continuo rumore assordante, quello prodotto dalle acque tumultuose del fiume Napo che corre velocissimo per molte centinaia di chilometri, prima di buttarsi nel rio Amazónas; a tale rumore, però, ci si abitua abbastanza presto. Il fiume Napo è enorme, tanto che in alcuni punti si intravede a mala pena la riva apposta. Giunto in un villaggio su di un'isola piuttosto vasta dove i bambini mi regalarono frutta mai vista prima, fiocchi come di neve dolcissimi avvolti in una dura corteccia marrone, alla mia domanda sul perché vivessero in capanne altissime da terra e dunque scomode (gli anziani dovevano arrampicarsi parecchio per entrare in casa), mi dissero: «Ma signore, quest'isola si chiama anaconda», senz'altro commento. D'allora in poi, camminai guardando costantemente per terra.

I miei contatti sono avvenuti dunque sia con indigeni analfabeti di etnìe molto diverse, sia con insegnanti bilingui (di lingua quechua e spagnola), sia con intellettuali (Quechua e Shuar) che si occupavano proprio del difficile problema della preservazione delle rispettive culture.

Naturalmente mi sono soprattutto occupato di questioni connesse con la matematica anche se, in quegli ambienti ed in quelle circostanze, è piuttosto difficile separare la matematica dalla vita quotidiana e da interessi culturali più vasti.

Mi ero sempre ripromesso di raccontare tale esperienza, come contributo ad una disciplina che non coltivo come ricercatore, ma che mi appassiona come curioso, l'Etnomatematica (D'Ambrosio, 1990, 1996, 1999). Naturalmente, come sempre accade, gli anni passavano ed il tempo da dedicare a queste riflessioni sembrava di anno in anno sempre più lontano. Ma...

Nei primi giorni di maggio 2001, a Chivilcoy, Argentina, ho conosciuto personalmente Ubiratan D'Ambrosio, il «padre dell'Etnomatematica», essendo entrambi presidenti onorari in due sessioni di un Convegno internazionale sulla didattica della matematica. La simpatia e la convergenza d'idee sono state immediate, tanto che ne è nata subito una collaborazione con scambio di visite.

Durante una passeggiata, bevendo un caffè in un locale frequentato da Italiani, gli ho raccontato della mia esperienza in Ecuador e della mia intenzione, prima o poi, di scrivere le mie impressioni su quel viaggio. Mi ha gentilmente ma fermamente invitato a farlo quanto prima, cosa che mi ha definitivamente convinto.

Ecco dunque l'àmbito nel quale mi accingo a scrivere le mie impressioni, vivissime nel ricordo (anche grazie ad un'abbondante raccolta di appunti presi in quei giorni).

Ora, però, il lettore alla ricerca di pura matematica rimarrà un po' deluso perché mi rendo conto, al momento della narrazione, di non riuscire ad esimermi da considerazioni di carattere personale, commenti sociali, antropologici, geografici eccetera. D'altra parte, proprio Ubi D'Ambrosio ci ha ampiamente spiegato che *questa* è la caratteristica della Etnomatematica, un miscuglio continuo di fatti matematici legati a vita quotidiana, vissuta, intrisa di esperienze personali; è *anche* questo che rende la matematica fatto sociale, umano, quotidiano.

Prima di procedere, una breve nota sul nome proprio «quechua».

L'ignoranza geografica e storica degli Europei nei riguardi di quella parte dell'America posta a sud degli USA è enorme ed incredibile agli occhi di un americano (e miei); al nominare uno degli Stati che vanno dall'Honduras all'Argentina, l'europeo dimostra di non conoscere l'enorme vastità del territorio, i confini, i mari... E che dire delle città; perfino le capitali vengono scambiate tra loro e di stato (più volte ho sentito porre Bogotà in Bolivia; sarebbe come mettere Parigi in Grecia). Peggio, molto peggio, se si parla di città non capitali e di popolazioni autoctone i cui nomi sono vagamente noti in Europa: gli Aztechi e gli Incas vengono stravolti e tra loro confusi o accomunati ed i poveri Maya, che stanno... in mezzo, hanno ruoli storici incredibilmente variabili. Confondere la storia culturale o sociale azteca con quella inca, è, dal punto di vista delle distanze storiche e geografiche, come confondere i Romani con i Vichinghi. Anzi, peggio.

Tuttavia, chi ha viaggiato nella parte settentrionale del Sud America, generalmente alla fine sa che gli Incas furono dominatori di un impero vastissimo che sottomise intere nazioni, e tra queste i Quechua (che si dovrebbe scrivere, per rendere il suono più vicino a quello corretto: «Qichwa» o anche «Qeshwa»). Perfino in Italia, chi ha compiuto viaggi nel nord del Sud America sa che la parola «quechua» sta ad indicare una popolazione autoctona, precedente alla dominazione inca, la più diffusa tra Venezuela e Bolivia, tuttora; tale parola indica anche la lingua di quella popolazione, pur nelle differenze tra regione e regione (soprattutto tra regioni andine e delle coste).

E invece pochissimi sanno che «quechua» in lingua quechua indica solo una zona temperata della Sierra (cioè della parte montagnosa) compresa tra le altitudini di 800 e 2000 m. Quando i rozzi invasori spagnoli, giunti espressamente ad uccidere e depredare quei popoli, sentirono più volte nominare quelle zone, credettero che gli autoctoni volessero con queste parole indicare se stessi e la loro lingua. Quindi «quechua», detto di una popolazione e di una lingua è, ancora una volta, l'effetto della prepotenza ignorante del popolo barbaro che è riuscito ad imporre con la forza e la violenza il proprio potere ottuso. Quei popoli che vivevano nel Tawantinsuyu (il territorio delle quattro regioni) si autodefinivano invece «runa», cioè «uomini» (come si ritrova in moltissime civiltà), e chiamavano la loro lingua «runasimi», cioè «linguaggio degli uomini».

La violenza però è stata tale che oggi gli stessi Runa non sanno di questo loro nome e si chiamano essi stessi Quechua e così pure chiamano la loro lingua. Solo in casi speciali e rari ho incontrato intellettuali che sapevano di questi nomi antichi, ma senza più nessuna speranza né voglia di lottare per ripristinarli. Un po' diversa è invece la situazione in altre regioni del mondo, per questioni analoghe. Gli attuali Inuit, per esempio, rifiutano sdegnati e seccati la denominazione «esquimesi» che ritengono (giustamente) offensiva; e tanti tanti altri ancora sono i casi analoghi nel mondo.

Numeri quechua e musicalità

In più d'una occasione, ho notato che quando un quechua racconta nella sua lingua una storia, tende a... cantarla. Non si limita a narrarla, ma vi aggiunge una sonorità che non esiterei a chiamare «musica». Non solo; egli accompagna questa narrazione musicale con lenti movimenti del corpo, senza vergogna alcuna, anche per la strada. Il fatto interessante è che lo stesso accade se il quechua pronuncia numeri in successione: vi aggiunge una sonorità che sembra avere la funzione di una litanìa rituale e/o un filo conduttore forse a favore della memoria.

La numerazione quechua non ha alcuna eccezione linguistica, come invece succede in quella italiana o spagnola. Per completezza, riporto qui di seguito una tavola a tre colonne con i primi venti numerali (a partire da uno) nelle tre lingue dette.

italiano	**spagnolo**	**quechua (delle Ande)**
uno	uno	shuc
due	dos	ishcai
tre	tres	quimsa
quattro	cuatro	chuscu
cinque	cinco	pichca
sei	seis	sucta
sette	siete	canchis
otto	ocho	pusac
nove	nueve	iscun
dieci	diez	chunca
undici	once	chunca shuc
dodici	doce	chuanca ishcai
tredici	trece	chunca quimsa
quattordici	catorce	chunca chuscu
quindici	quince	chunca pichca
sedici	dieciseis*	chunca sucta
diciassette *	diecisiete	chunca canchis
diciotto	dieciocho	chunca pusac
diciannove	diecinueve	chunca iscun
venti	veinte	ischcai chunca

Si noti l'irregolarità linguistica della formazione dei nomi dei numeri tra 11 e 19 che, in italiano, avviene al numero 17, mentre in spagnolo avviene al 16; in lingua quechua non c'è alcuna irregolarità, il che rende la litanìa stessa ed alcune questioni aritmetiche più semplici, come mostrerò tra breve.

Voglio anche ricordare che in lingua quechua se il nome di una cifra sta davanti al dieci è una moltiplicazione. Per esempio: pusac chunca è otto (volte) dieci, cioè 80; mentre se lo segue è un'addizione; nello stesso esempio: chunca pusac è dieci (più) otto, cioè 18.

Operazioni aritmetiche fatte a mente

Nella premessa ho scritto di aver a volte incontrato analfabeti quechua.

Mi era stato vietato di trasportare chicchessia sull'auto messa a disposizione dall'ambasciata italiana. Da quelle parti è molto frequente il sistema dell'autostop a pagamento, data la scarsezza dei mezzi pubblici di trasporto nelle zone rurali (che si trovano sempre almeno a 3000 m di altitudine, dato che Riobamba è in una vasta conca). Mi era dunque facile, ignorando il divieto, dare passaggi anche ad intere famiglie, trasportandoli con loro grande sorpresa nei posti più sperduti, in cambio di un sucre, la moneta locale del valore in quel periodo di circa 9 lire italiane (rifiutare del tutto il pagamento sarebbe stato offensivo; di solito, la cifra era patteggiata tra le parti anche dopo ampie discussioni).

Ciò mi ha permesso di visitare villaggi da favola, letteralmente fuori dal mondo, privi di elettricità, di acqua corrente, ma di una dignità che per molti di noi sarebbe auspicabile. Sono stato così invitato all'inaugurazione di un piccolo canale di irrigazione scavato a mano; di una primitiva toilette pubblica; alla discussione circa l'installazione di pali per l'energia elettrica (sospesa poi a causa dell'improvvisa morte di una giovane signora del villaggio; la disperazione venne celebrata con una collettiva sbornia di tutti, uomini e donne, che durò almeno due giorni); ho partecipato al funerale di un neonato; alla confezione di un tappeto (sulla quale tornerò in modo esplicito più avanti); sono stato invitato due volte al rituale dello scambio di doni, ricevendo in entrambi i casi uova... Una di queste due volte lo scambio avvenne in una pulitissima abitazione fatta di rami e foglie cementati tra loro con sterco di animale; lo spazio abitativo era diviso in due parti, una riservata agli esseri umani ed una ai loro animali. Il rito dello scambio con uova era piuttosto complesso, ma fortunatamente ero stato preavvertito. Le uova che mi venivano date dovevano dapprima essere rifiutate almeno una volta, poi infine accettate. Però, poco prima della fine dello scambio, se ne dovevano trattenere una o due sole, restituendo le altre. Questa restituzione era molto apprezzata e non offensiva. D'altra parte quelle uova erano la base di sostentamento dell'intera famiglia per giorni. Regali apprezzati in cambio dell'uovo o delle due uova erano: farina di grano o di maís (così si pronuncia questo nome da quelle parti), zucchero bianco o di canna, riso, penne a sfera (ottennero un successo strepitoso alcune penne con il cappuccio color oro).

Su queste avventure molto potrei narrare, ma voglio costringermi il più possibile invece ai soli aspetti matematici.

Una volta ho trasportato dunque ad un villaggio ad oltre 4000 m di altitudine un'intera famiglia che aveva portato in città (a Riobamba) i propri manufatti in lana e rientrava al villaggio dopo tre giorni (avevano dormito due notti per la strada) con un po' di denaro, un po' di provviste e il molto materiale invenduto. Il capo famiglia, brillantissimo conversatore, ed io simpatizzammo subito e così mi fu facile intavolare un colloquio sulla matematica, meglio: sull'aritmetica. Il signore era evidentemente analfabeta, ma questo non significa che non sapesse far di conto. Nel suo mestiere l'aritmetica era presente in mille modi e lui però non aveva strumenti per fare calcoli né, se avesse avuto carta e penna, avrebbe saputo come usarli. Lui, semplicemente, faceva i conti a mente, emettendo una sorta di cantilena incomprensibile e musicale, al termine della quale dava il risultato (esatto, com'ebbi modo di controllare, usando però carta e penna).

Proprio la struttura nominale dei numerali aiuta i Quechua in questa abilità, con trucchetti che si tramandano di generazione in generazione e che hanno a che fare con le proprietà di base dell'aritmetica posizionale.

Per esempio l'addizione 37+48 viene scomposta in quimsa chunca canchis più chuscu chunca pusac; il che vuol dire canchis chunca (70) più (canchis più pusac) cioè dunque 70 più chunca pichca (e dunque 85). Si noti che, come ho qui tentato di rendere, il gioco avviene tutto sul linguaggio e non su un inesistente formalismo. Naturalmente, bisogna ricordare somme a memoria (per esempio, bisogna sapere a memoria che canchis e pusac fa chunca pichca).

Naturalmente la cosa si fa più complicata quando si supera il centinaio, ma si tratta solo di nomi e non di complicati riporti.

Se si vuol moltiplicare 85 per 13, si spezza il 13 in 10 e 3 e si utilizza più volte la proprietà distributiva. Fare 85 volte 10 è facile; per fare 85 volte 3, si spezza ora l'85 in 80+5 e si procede. Naturalmente ciò comporta una memorizzazione di quelle che noi chiamiamo «tabelline» che dunque, a detta di un'insegnante di una pluriclasse che ho visitato in riva ad un lago (46 bambini!), sono fondamentali nella cultura stessa quechua e non un optional come in altre culture. Mi diceva questa giovanissima insegnante che molti bambini alla fine della scuola elementare resteranno analfabeti, ma ritorneranno ai loro villaggi d'origine, a quote altimetriche impossibili, a vivere per sempre come allevatori, contadini, piccoli artigiani. Conoscere a memoria le tabelline ed i nomi dei numeri resterà per loro fondamentale per la vita intera, più che saper leggere e scrivere. (Ricordo ancora la dolcezza di quei visini sorridenti).

Nuovi nomi ai numeri Shuar

Durante una delle mie scorribande, ho avuto la grande fortuna di conoscere un gruppo di intellettuali Shuar ai quali il governo federale aveva dato il compito di cercare di salvare il salvabile di una cultura oramai in inarrestabile declino. Tanto in declino che non esistono oramai più anziani che ricordino i nomi dei numeri oltre il 5. [Una cosa analoga mi è successa con nomadi di ceppo rom accampati vicino a Bologna, quando ho affidato ad uno studente del corso di laurea in Pedagogia, diversi anni fa, il compito di ricostruire la cultura aritmetica del gruppo, come tesi di laurea. Nessuno della tribù ricordava più i nomi dei numeri oltre il tre; riuscimmo solo a stabilire che «tre» significa anche «molti» e che «mille» era qualche cosa come «quasi infinito»].

Questi Shuar mi raccontarono una cosa che ha per me dell'incredibile; spero di far capire il senso di questa mia emozione intellettuale qui per iscritto.

Dunque, i nomi shuar da 1 a 5 sono:

1 chikchik
2 jimiar
3 menaint
4 aintiuk
5 ewej

Sia ben chiaro: queste parole *scritte* sono solo il tentativo di rendere i corrispondenti *suoni* in spagnolo dei nomi shuar dei numeri da 1 a 5, dato che non esiste una lingua shuar scritta.

A quel punto si deve decidere di dare dei nomi ai numeri successivi, da 6 in poi. Mi raccontarono gli amici shuar che si decise, proprio pochi mesi prima, di usare le stesse cifre oramai accettate quasi universalmente, quelle arabo-indiane, come hanno fatto i Quechua. Ma i nomi, che nomi dare?

Si decise dunque di dare dei nomi tratti dalla lingua quotidiana shuar, ma in modo tale da richiamare le *forme* delle cifre;

- ecco allora che sei, 6, diventa: ujuk, cioè coda di scimmia, dato che la forma della cifra 6 ricorda effettivamente la coda sollevata di una scimmia;
- sette, 7, diventa tsenken, che è il nome che i campesinos danno ad un particolare gancio per raccogliere la frutta e che ha, appunto, la forma 7;
- otto, 8, diventa yarush, cioè formica regina, dato che la forma dell'8 ricorda (zampette a parte) quella della formica regina;
- nove, 9, infine diventa usumtai, cioè indice della mano destra; infatti, forse non tutti gli Europei sanno che in tutta l'America quando si accompa-

gna la successione dei numeri da 1 in poi con un movimento delle dita, non si comincia come in Europa dal pollice della mano destra, ma dal mignolo della mano sinistra, cosicché al pronunciare il numero 9 si solleva proprio l'indice della mano destra; un'altra interpretazione shuar è che la cifra 9 sembra un indice (l'archetto inferiore del 9) che esce da un pugno chiuso (il tondino del 9).

Mi sono sempre chiesto se questo modo di attribuire nomi ai numeri non sia stato già utilizzato da popolazioni più antiche delle quali non abbiamo più traccia. Per cui la parola italiana «quattro» potrebbe significare chissà che cosa in fenicio o in una qualche lingua indoeuropea!

Più per curiosità che per altro, può essere interessante sapere che:

- 10 si dice nawe, cioè piede; infatti al contare oltre il dieci, giacché le dita delle mani sono finite, si deve cominciare con le dita dei piedi;
- mentre 100 si dice, in modo augurale, washim e cioè trappola per i pesci: più il contenuto sperato che non la forma;
- 1000 si dice nupanti cioè molto, come mi aspettavo prima o poi;
- ed infine un milione è amuchat, cioè: quasi impossibile da contare.

Sistemi posizionali a basi diverse

Sia la numerazione quechua delle Ande, sia quella amazzonica, sia quella della costa, sono a base dieci. Così pure a base dieci sono le numerazioni aymara e varie altre. Ma non mancano tradizioni di base cinque o due o meglio miste.

Nella lingua chachi:

1 main
2 pallu
3 pema
4 taapallu
5 manda
6 manchismain
7 manchispallu
8 manchispema
9 manchistaapallu
10 paitya

Si vede bene la funzione basilare del 5.

Ecco invece l'analogo in lingua wao:

1 aruke (1)
2 mea (2)
3 mea go aruke (2 e 1)
4 mea go mea (2 e 2)
5 emenpuke (5)
6 emenpuke go aruke (5 e 1)
7 emenpuke go mea (5 e 2)
8 emenpuke mea go aruke (5 e 2 e 1)

9 emenpuke mea go mea (5 e 2 e 2)
10 tipempuke
Nella lingua wao si vede bene un miscuglio tra le basi 2 e 5.

Macchine calcolatrici più o meno tascabili

Il mondo delle tribù dell'Ecuador è meravigliosamente pieno di macchine di calcolo. D'altra parte la taptana cañari (il Cañar è uno stato del centro Ecuador con una stupenda capitale omonima e con un sito archeologico inca, Ingapinca, addirittura fantastico, poco frequentato dai turisti a causa della obiettiva difficoltà di accesso), derivata da una macchina più antica della quale si è persa la funzione, è utilizzata nella scuola elementare nello stato del Cañar; la yupana sembra ancora conosciuta in Perù; ed è ben noto l'abaco nepohualtzeintzin di derivazione dalla lontana civiltà azteca.

Il tappeto

A relativamente pochi chilometri da Riobamba, nella zona dell'Altopiano del Guano (il significato italiano è ovvio), che ha come centro principale Guano, vi è una forte concentrazione di artigiani tessitori che confezionano tappeti con lane varie (di animali anche molto diversi tra loro ma che noi Europei chiamiamo per ignoranza tutti allo stesso modo: llamas, pronunciandolo, tra l'altro, male, come se vi fosse una sola «l»). I tappeti non sono in vendita ai privati perché hanno già compratori fissi: esportatori che li portano e li vendono negli USA. So già che nessuno ci crederà, ma i disegni di tali tappeti sono indecentemente meschini, evidentemente quelli poi scelti dai futuri compratori. È la tremenda legge del mercato. Le figure più gettonate sono: immagini del dollaro (una S con due tagli verticali), Donald Duck (Paperino) e altri personaggi, tra i quali volti di Presidenti degli USA. Sono rimasto sorpreso e tutta la mia fantasia culturale a favore di immagini autoctone è crollata quando ho visto che la situazione era la stessa presso ogni artigiano. [Lo stesso vale per la confezione di gioielli in oro, tradizionale in alcune città delle Ande].

Poche settimane prima avevo visitato il Museo (privato) dell'arte precolombiana, presso la Banca Nazionale a Quito, ed avevo visto, al contrario, come per una rivincita di fasti estetici di un passato glorioso distrutto dalla cupidigia prima europea, ora dei gringos, delle splendide immagini del dio serpente, immagini molto eleganti, molto colorate, affascinanti, misteriose, ma anche molto... matematiche. Uno dei serpenti divini delle tradizioni andine preincaiche è avvolto a spirali non concentriche su se stesso, in una forma elegante, geometrica, ricca di fascino. Fortunatamente ne avevo fatto un disegno che avevo lì con me.

Discussi con più d'un artigiano sulla sua disponibilità ad eseguire un tappeto con quella figura, ma tutti mi dicevano che non era possibile, non so esattamente perché; il rifiuto era evidentemente di carattere economico. Fare un tappeto con quelle caratteristiche, fuori dagli schemi, era un dispendio di tempo e di energie, ed in cambio di che? Nessuno, nessuno degli artigiani, né dei loro familiari (che arrivavano a frotte non appena la mia faccia da europeo entrava nelle botteghe, che erano anche abitazioni) aveva mai visto quella immagine e nessuno di loro sospettava che avesse a che fare con popolazioni indigene autoctone, con una storia affascinante del loro passato.

Trovai alla fine un artigiano curioso che accettò, a patto che io confezionassi, in scala 1:1, il disegno dal quale sarebbe stata tratta l'immagine del tappeto.

Fu così che comprai a Riobamba, nei giorni successivi, vari fogli protocollo a quadretti, li legai l'un l'altro con della «cinta pegante» (il nostro scotch), fino a raggiungere la dimensione voluta per il mio tappeto (2 m x 1.2 m). Con infinita pazienza e facendo varie prove, disegnai sul foglio il serpente avvolto su sé stesso, simbolo della potenza preincaica, scegliendo anche il colore dei vari tratti.

Felice come non mai, tornai dall'artigiano che si appassionò alla cosa, volle sapere tutto, fece calcoli a mente di materiali necessari, di tempi di lavorazione, dunque di costi per me, sui quali tuttavia non volle esprimersi. Ma volle anche con la mano seguire il corpo del serpente arrotolato, come in un labirinto. Fu un momento magico.

Lavorando a tempo pieno in due, il tappeto fu preparato in due giorni soli e costò così poco che sempre ebbi il dubbio, che conservo tuttora, che questo fosse un omaggio al mio entusiasmo, non certo una vera ricompensa per il lavoro.

Sempre a caccia di matematica, chiesi all'artigiano, con le dovute maniere, perché avesse voluto avere il mio disegno in scala 1:1; insinuai, con parole misurate, che forse, se lo avessi fatto piccolo, sarebbe stato difficile per lui calcolare le misure finali con delle proporzioni... Ebbi una risposta inattesa; lui disse che non voleva per nulla farmi quella richiesta, che se gli avessi dato il mio minuscolo disegno, lui se la sarebbe cavata benissimo, ma lo aveva chiesto solo per tranquillizzarmi, temendo che io non avrei avuto fiducia in lui. In fondo, se si passa da 10 cm a 1.2 m, basta moltiplicare ogni «linea» (così disse) per 12, no? La mia preoccupazione, dovuta ai precedenti numerosi rifiuti, era stata interpretata come apprensione e sfiducia nei suoi confronti. Invece di irritarlo, questo mio atteggiamento lo aveva commosso... Per non tenermi con il fiato sospeso, e non per ignoranza sua in matematica, mi aveva fatto la richiesta del disegno 1:1... Inutile dire che quella sera cenammo insieme, bevendo cerveza oltre ogni limite sopportabile. Gli dissi che ero un matematico e gli confessai che mai e poi mai avevo avuto sfiducia nella sua abilità nella mia materia, visto che avevo già avuto occasione di verificare ed apprezzare la prontezza e la competenza matematica di quelle genti. Temo che non mi credette.

Sorte post laurea dei miei quattro allievi

Due dei corsi che tenevo erano rivolti a soli 4 studenti, iscritti al IV anno del corso di laurea in Matematica e che quindi, di lì a 2 anni, si sarebbero laureati (il corso di laurea in Matematica del Chimborazo prevede 5 anni di studio).

Uno dei 4, il più anziano, faceva di mestiere il cantante; cantava in peñas, in feste eccetera per sbarcare il lunario, avendo una famiglia (moglie e figlie).

Due dei 4, i più giovani, con evidenti ascendenze indie, facevano gli studenti a tempo pieno e lavoretti saltuari.

Uno dei 4, di età indefinibile, taciturno oltre ogni dire, era un indio in tutto e per tutto; viveva in tribù, lontano dalla città, non si sa dove dormisse; vestiva sempre una corta tunica bianca, aveva capelli lunghissimi raccolti a coda di cavallo, perenne cappello in testa (glielo permettevamo anche in aula, dato che faceva parte delle usanze tribali).

Tutti e 4 erano curiosi, affamati di particolari, disponibili a svolgere compiti a casa, ad impegnarsi, prendevano appunti e studiavano la lezione per la volta dopo, sempre presenti. Un sogno, per un docente.

Tutti erano molto bravi ed avevamo già pianificato che sarebbero diventati docenti al Chimborazo, dopo un periodo di specializzazione, se possibile in Italia.

Così è avvenuto per i due più giovani che sono stati in Italia più volte, a Pisa e Pavia, anche a lungo, e che ora sono appunto docenti al Politecnico.

Il cantante, dopo la laurea, ha deciso di continuare a fare il cantante ed ha mollato la matematica.

L'indio è sparito, letteralmente sparito; dopo la laurea nessuno ha più saputo nulla di lui. Per quante ricerche siano state fatte per contattarlo, l'esito è sempre stato lo stesso: nulla! Una voce che gira al Chimborazo è che sia tornato alla sua tribù e che coltivi un pezzetto di terra, ma nessuno ce lo ha potuto confermare.

Bibliografia

D'Ambrosio U

Etnomatemática, 1990. São Paulo (SP): Ática ed. IV edizione 1998.

D'Ambrosio U.

Educação matemática, 1996. Campinas (SP): Papirus. VII edizione: 2000.

D'Ambrosio U.

Educação para uma sociedade em transição, 1999. Campinas (SP): Papirus.

2. La legge della leva e le proporzioni[1]

Jean Dhombres[2]

The author is an authority in the history of mathematics, known all over the world. He offers us a passionate lesson on Archimedes, concerning the treatise "Of the balance or of the centres of gravity of plane figures". The discourse centres on two fundamental propositions, one relating to the case of commensurable quantities, the other to that of not commensurable quantities. These are demonstrations alien to our conception and to the present practice of mathematics, based on the theory of proportions which has been forgotten because replaced by the calculation using fractions: yet this is authentic Archimedes.

Iniziamo direttamente con l'enunciato che Archimede presenta come proposizione 6 nel suo trattato «*Dell'equilibrio o dei centri di gravità delle figure piane*». Farò seguire l'enunciato della proposizione 7, che completa la 6. Bisogna infatti osservare che nella proposizione 6 appare il termine «commensurabile», mentre la 7 tratta proprio il caso «incommensurabile». Le due dimostrazioni sono diverse, la prima essendo una sorta di lemma della seconda. Questa distinzione oggi si rivela inutile. Commensurabili o incommensurabili, le grandezze sono per noi semplicemente numeri reali. Solo per questo le dimostrazioni di Archimede sono diventate estranee alla nostra concezione e alla pratica odierna della matematica. È questa stranezza che voglio far vedere, dando brutalmente il testo di Archimede, tradotto in francese (ndr: e poi in italiano) e accompagnato dalle figure adottate dagli eruditi[3].

Proposizione 6

Grandezze commensurabili si equilibrano a distanze inversamente proporzionali ai loro pesi[4].

Siano A e B le due grandezze commensurabili, A e B i loro centri di gravità; sia inoltre una lunghezza EΔ e una ΔΓ sia rispetto a ΓE come A sta B. Dobbiamo dimostrare che il centro di gravità della grandezza composta delle due grandezze A e B è il punto Γ.

1. Relazione tenuta alla Perfetta di Arzo nei giorni 27 e 28 agosto 2001.
2. Direttore di ricerca al CNRS, direttore degli studi all'EHESS, Centre A. Koyré, 27, rue Damesme, F-75013 Paris.
3. Archimède, *De l'équilibre, ou des centres de gravité des figures planes,* trad. fr. Charles Mugler Paris, Les Belles Lettres, 1971, t.22, pp. 78-125.
4. Per rispettare i testi originali, in tutto l'articolo si userà il termine «peso» al posto di «massa» (che oggi sarebbe corretto usare).

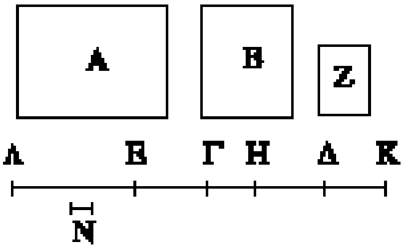


Figura 1

Segue la dimostrazione che spiega inoltre le lettere non ancora designate in questo inizio.

Proposizione 7

Analogamente, se le grandezze sono incommensurabili, si equilibrano a distanze inversamente proporzionali a se stesse.

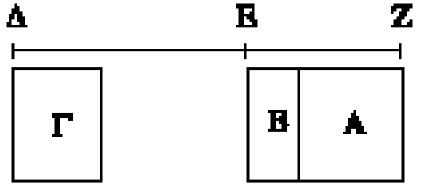


Figura 2

Siano AB e Γ grandezze incommensurabili e le distanze ΔE e EZ; che il rapporto delle grandezze unite AB rispetto a Γ sia uguale al rapporto della distanza EΔ rispetto alla distanza EZ; dico che il centro di gravità delle grandezze AB e Γ è il punto E.

Ho fatto seguire ogni volta l'enunciato della proposizione dalla designazione degli oggetti matematici in gioco, perché questa si legge sul disegno secondo la modalità euclidea, seguendo qualche convenzione: come per esempio la rappresentazione della grandezza A+B mediante un rettangolo suddiviso in due. Questo modo di fare oggi è praticamente dimenticato, nel senso che il riferimento analitico standard, quasi sempre, rende queste designazioni evidenti ed è quindi inutile la loro fissazione nel disegno. Archimede in effetti utilizza due registri di rappresentazione: uno con rettangoli per i pesi – i rettangoli A,B sono allora grandezze –, l'altro è su una retta e indica le posizioni dei centri di gravità delle grandezze e altri punti significativi; in quest'ultimo caso la misura è rappresentata dalla lunghezza dei segmenti. Si potrebbe dire che tutto si gioca sul confronto tra due registri di rappresentazione, se le dimostrazioni scritte non fossero così lunghe.

È sorprendente, ma voluto da Archimede, il fatto che la dimostrazione sia fatta senza alcuna allusione a un apparato fisico, come ad esempio una comune bilancia. Noi tendiamo infatti a pensare che un'immagine concreta, pratica sia più vantaggiosa per la comprensione. Pensiamo oggi che la fisica contribuisca a far capire la matematica. In Archimede la sola cosa utile è la formulazione matematica che si esprime in termini di proporzione ed è appunto questa conoscenza sulle proporzioni che ci interessa da vicino. Perché è efficace, anche se non coincide più con le nostre abitudini, ma ci permette di capire il senso delle manipolazioni delle frazioni, che sostituiscono le proporzioni nell'insegnamento attuale della matematica. Non voglio con ciò proporre di abbandonare l'insegnamento delle frazioni e di riprendere la via di Archimede. Perché in questo trattato di Archimede non c'è alcun ragionamento tecnico proprio della fisica, ma unicamente il senso delle proporzioni, di tipo matematico. La sua evidenza ritrovata oggi può ispirare l'evidenza che si usa oggi nell'insegnamento delle frazioni – che sostituisce quello delle proporzioni – e nella pratica dei numeri reali che ha cancellato i rapporti greci, o, meglio, che li ha inseriti in un campo più vasto.

Il mio apporto al testo di Archimede è a profitto della comprensione odierna, nel quadro dell'insegnamento della matematica, e consiste in un adattamento del testo di Archimede allo scopo di evitare inutili complicazioni. Ma a chi voglia seguire meglio Archimede, posso sempre far avere il testo di Archimede (in greco, tramandato dall'erudizione classica di Heiberg), tradotto in francese da Charles Mugler. Il mio scopo non è di fare una critica storica e coscientemente mi servo delle conoscenze attuali. La mia storia ha come scopo la didattica.

Meglio: non concerne direttamente l'insegnamento, ma la formazione degli insegnanti. Per aiutarli a vedere come ciò che si insegna oggi non è sempre stato conosciuto. Per permettere loro di meglio capire gli ostacoli alla comprensione degli allievi e come fare per superarli.

Una prima dimostrazione che richiede un apprendimento delle proporzioni

Nella proposizione 6, Archimede parte da un segmento qualunque EΔ e definisce un punto Γ su di esso mediante la proporzione

$$\frac{A}{B} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma E} \qquad (1)$$

A sinistra del segno uguale, il rapporto è tra due pesi; a destra, il rapporto è tra due lunghezze. Una trattazione teorica contenuta nel V libro degli Elementi di Euclide, datata una cinquantina d'anni prima di Archimede, giustifica tale scrittura fra grandezze non tutte omogenee. La teoria è semplice e comprensibile ai nostri occhi, se usiamo la notazione frazionaria e il fatto che un numero reale esprime il rapporto tra A e B o tra ΓΔ e ΓE. L'uguaglianza (1) afferma che non si può inserire alcun numero razionale p/q tra A/B e ΓΔ/ΓE, che darebbe la relazione

$$\frac{A}{B} > \frac{p}{q} > \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma E}$$

Si obietterà che questa affermazione presuppone che si sappiano definire i rapporti dei pesi A/B e delle lunghezze ΓΔ/ΓE. Veramente, no! È sufficiente ammettere che p e q siano interi e che se $qA>pB$, allora deve'essere $q\Gamma\Delta>p\Gamma E$. E analogamente, se si ha $qA=qB$, al posto della disuguaglianza, si avrà $q\Gamma\Delta=p\Gamma E$, oppure $qA<pB$ e quindi $q\Gamma\Delta<p\Gamma E$. Si costruisce così una relazione fra le coppie A,B dei pesi e le coppie ΓΔ,ΓE delle lunghezze. È una relazione di equivalenza. In sintesi, la relazione di uguaglianza è facilmente formalizzabile e definisce matematicamente un'analogia (è la terminologia greca).

Noi non ne vediamo l'interesse perché, per noi, A, B, p/q, A/B, ΓΔ/ΓE sono numeri reali. Dimentichiamo di considerare che A/B è anche una definizione della misura di A rispetto all'unità B, nel senso che si può leggere come operatore ciò che è scritto nelle quadre

$$A = \left[\frac{A}{B}\right] B$$

Se si pensa in termini di misura, non è evidente capire che tutte queste misure (oggi numeri reali) della forma $\left[\frac{A}{B}\right]$, quelle fra pesi o fra lunghezze, o in generale tutti i rapporti fra grandezze, siano della stessa natura numerica delle misure stesse dei pesi o delle lunghezze. È questa difficoltà – proveniente dalla costruzione greca – che ci permette di vedere il carattere universale dei numeri reali come espressione della misura di grandezze. Nel ragionamento greco non è evidente pensare che esistano due grandezze A e B per le quali $\left[\frac{A}{B}\right]$ non sia un rapporto di lunghezze. Ma questa coerenza di una teoria antica non ci concerne più. Per il momento non ne parlerò.

L'ipotesi fatta da Archimede nella proposizione 6 è che A/B sia razionale, cioè che A e B siano grandezze commensurabili, o ancora che esiste una misura comune Z tale che A=m·Z e B=n·Z, con m,n interi. In questo caso la costruzione del punto Γ, con la quale inizia la dimostrazione della proposizione 6, è geometricamente facile, come mostra la figura seguente, a partire da una qualsiasi unità U, su una retta qualunque che interseca EA in E:

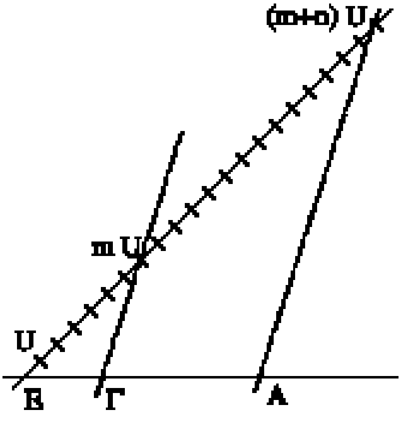


Figura 3

Si legge infatti:

$$\frac{\Gamma A}{\Gamma E} = \frac{n\,U}{m\,U}$$

Per dire che le lunghezze ΓΔ e ΓE sono commensurabili e hanno una misura comune chiamata N, Archimede non propone questa figura e mette solo N sulla Figura 1, al livello di ciò che ho chiamato secondo registro di rappresentazione. Questo N può essere preso come unità U per la Figura 3, disegno non eseguito da Archimede, che pensa i numeri interi n e m ma non li indica. Lavora solo con rapporti e proporzioni. Il suo stile (ed anche il rigore) non è più nelle nostre abitudini, ma può essere utile reimpararlo, per meglio capire il nostro stile contemporaneo e per meglio approfittarne.

Archimede inizia la dimostrazione con una costruzione di raddoppio delle grandezze (lunghezze) in gioco, ΔΓ e ΓΕ. Ciò per ottenere punti medi. Segna quindi i punti H e K attorno al punto Δ e tali che ΔK=ΔH=EΓ: le rette non sono orientate e le notazioni dei segmenti qualsiasi[5]. Mette anche Λ a sinistra di E in modo che ΛE = ΓΔ.

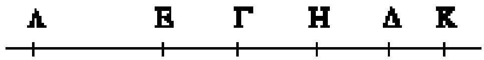


Figura 4

Si deduce che E è il punto medio di ΛH e che Δ è quello di HK, poi che Γ è quello di ΛK. All'occhio appare una simmetria (che ho chiamato secondo registro) a partire da uno stesso posizionamento di Γ e H in rapporto a E e Λ.

Infatti il calcolo dà EH=ΓH+ΓE e siccome ΓE=HΔ, EH=ΓH+HΔ=ΓΔ e ΓΔ=ΛE per costruzione, dunque ΛE =EH.

Analogamente, ΛΓ=ΛE+EΓ=ΓΔ+ΔK=ΓK, cioè ΛΓ=ΓK. Non sono sicuro che non continui ad esserci l'opposizione tra i partigiani della dimostrazione per simmetria e quelli che basano la propria convinzione su un calcolo. Non era forse già così ai tempi di Archimede? E penso che il modo con cui Archimede si impegna nella spiegazione sia un compromesso di tipo pedagogico tra la simmetria del disegno e il calcolo (che non ho il diritto di chiamare algebrico, perché sarebbe anacronistico, ma che è comunque un calcolo su grandezze).

Siccome ΛH è il doppio di ΔΓ e HK è il doppio di ΓE, Archimede scrive la proporzione:

$$\frac{\Lambda H}{HK} = \frac{A}{B} \qquad (2)$$

Noi ragioneremmo senza utilizzare la proporzione e con numeri interi, scrivendo:

$$\Lambda H = 2n\,N \quad HK = 2m\,N$$

a partire dalla misura comune N che serve per calcolare ΓΔ e HK.

ΓΔ=n N ΓE=m N

Giocare con le proporzioni è vedere subito che la moltiplicazione per due non cambia nulla al rapporto. Credo che bisogna essere ancora più precisi nell'analisi di una dimostrazione di Archimede. Perché se si raddoppiano sistematicamente le lunghezze EΓ e ΓΔ della leva si sa *a priori* che il rapporto non cambierà; con gli interi, questa invarianza è una costatazione del calcolo, non una previsione. Oppure ancora, la proprietà secondo la quale $\frac{\lambda a}{\lambda b} = \frac{a}{b}$ (sono la stessa cosa) è pensata nel e con il cal-

5. Per comodità del lettore, avrei dovuto notare C al posto di Γ, D al posto di Δ, ecc. Così facendo, perderei comunque la logica archimedea dell'ordine alfabetico della notazione dei segmenti. Riconosco che questo ordine non ci interessa più di tanto, perché oggi non usiamo più procedere in questo modo. Penso che la differenza possa servire all'insegnante, ma essere d'impaccio allo studente.

colo. Se fosse diventata un automatismo dopo il calcolo, non sarebbe stata pensata prima di utilizzare le proporzioni? Questa osservazione, suscitata dal testo di Archimede, raggiunge un'espressione familiare ai matematici, che è l'eleganza di un passaggio. Qui le proporzioni dirigono la procedura, le frazioni la giustificano, se non si è insegnato all'allievo a leggere la relazione

$$\frac{\lambda a}{\lambda b} = \frac{a}{b}$$

come proprietà intrinseca alle frazioni e non una proprietà di scrittura.

Come ha introdotto una lunghezza N, Archimede pensa di introdurre anche un peso Z che sarà misura comune di A e B. A noi l'esistenza di questo peso non appare problematica (proprietà dei pesi come grandezze) e non converrebbe come valore numerico N. Archimede, invece, deve costruire Z e non può perciò evitare l'utilizzo dell'intero n, anche se non lo nomina. La divisibilità dei pesi gli restituisce Z (un peso) tale che A=2n Z. Nel qual caso:

$$\frac{\Lambda H}{N} = \frac{A}{Z},$$

Ma da (2) si ottiene per inversione $\frac{B}{A} = \frac{KH}{\Lambda H}$

Da cui: $\frac{B}{Z} = \frac{B}{A} \cdot \frac{A}{Z} = \frac{KH}{\Lambda H} \cdot \frac{\Lambda H}{N} = \frac{KH}{N}$ cioè $\frac{B}{Z} = \frac{KH}{N}$.

Questo risultato (ottenuto con le proporzioni), che fa di Z una parte comune di A e B, ci pare evidente, perché corrisponde a B=2m Z. Non lo era così per Archimede. Certo, Archimede ha evitato di parlare dell'intero m. Si può pensare che la sua sola intenzione fosse di far notare la proprietà dell'inversione, o proporzionalità inversa con il passaggio da A/B a B/A. È l'unica volta che la cita nella dimostrazione della proposizione 6, anche se l'esempio della leva è sicuramente il più tipico della proporzionalità inversa e senza alcun dubbio un mezzo per apprenderla. L'enunciato della proposizione 6 lo sottolinea bene, e lo ripeto: grandezze commensurabili si equilibrano a distanze *inversamente proporzionali* ai loro pesi.

Penso che si possa intravedere un'intenzione pedagogica in Archimede, nella preoccupazione di dire che, se si posizionano H e K attorno a Δ a partire dalla grandezza ΕΓ, questa segue da A, peso associato a E, disegnato sopra E e opposto a Δ. La stessa inversione esiste chiaramente per il peso B associato a Δ con lunghezza «opposta» ΛE. Mi sembra che Archimede abbia introdotto due registri di rappresentazione per favorire questo incrocio, A associato a Δ, o B a E, poi A associato a ΔK e B a ΛE.

E mi sembra anche che la versione moderna del testo di Archimede abbia collocato il rettangolo Z al di sopra di Δ, scombinando un po' l'equilibrio della bilancia. Scommetterei che nell'originale, Archimede abbia messo il rettangolo Z nettamente più a destra. Non disponiamo di figure originali di Archimede: se gli eruditi hanno grande sensibilità per la fedeltà al testo manoscritto, non si curano delle figure allegate. In ogni caso, questa discussione mostra come una figura matematica non serve unicamente per indicare determinate lettere, ma gioca un ruolo nell'organizzazione della dimostrazione, in ciò che si potrebbe chiamare dinamica della prova. Faccio allora seguire un'altra figura, sovente associata, nei manuali del XIX secolo, alla dimostrazione di Archimede.

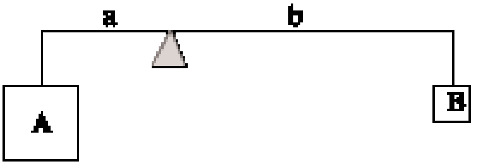


Figura 5

Posso allora parlare con questa figura di uno sguardo incrociato che distribuisce il peso A sulla lunghezza b e B sulla lunghezza A? No! Non ho il diritto di dirlo. Ma questa concezione appartiene a una seconda dimostrazione di Archimede, non alla proposizione 7, ma a una proposizione del secondo libro dell'equilibrio del piano. La vedremo più tardi.

Dalla fisica elementare, ognuno sa oggi che è la legge del momento che conta nella leva e ognuno vede a e A insieme, così come b e B.

$$a\,A = b\,B \qquad \vec{a}A + \vec{b}B = \vec{0}$$

Questa visione di un «momento», cioè del prodotto di un peso per una lunghezza, risulta dalla dimostrazione di Archimede. Non la precede, quindi non mi conviene perché, lo ripeto, cerco di far capire le frazioni a partire dalla manipolazione delle proporzioni e il prodotto sradica la frazione perché sostituisce $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ con a d=b c.

Ritorniamo da Archimede che vede l'inversione in forma non scritta, ma esplicitamente detta[6]:

$$\frac{a}{b} = \frac{B}{A}$$

e da essa ricava lo «scambio» tra medi ed estremi. Il segmento AH è stato diviso in segmenti uguali a N e il peso A nello stesso numero di pesi uguali a Z. Questo numero è pari. L'abbiamo indicato con 2n. Così il centro di gravità della somma dei pesi uguali a Z su ciascun segmento della suddivisone di AH è il punto E.

Analogamente, se su ciascuno di questi segmenti si mettono pesi tutti uguali a Z , il loro centro di gravità sarà il punto Δ. Chi ha bisogno di «vedere» meglio questa suddivisione, e questo gioco dei centri di gravità, consulti la dimostrazione numerica che darò in seguito.

Se la dimostrazione fa giocare i numeri pari, è perché considera l'assioma secondo il quale pesi uguali si equilibrano a distanze uguali, cioè che il centro di gravità di una situazione simmetrica come quella rappresentata qui sotto è in O:

6. Certamente $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si legge «a sta a b come c sta a d». Questa espressione a quattro entrate, propriamente un'analogia (cioè, secondo i greci, stesso rapporto), oggi fa parte del linguaggio corrente e ha abbandonato il linguaggio matematico dal quale proviene.

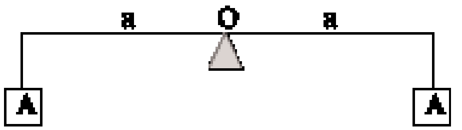


Figura 6

Ho già fatto osservare che, sin dall'inizio della dimostrazione della proposizione 6, Archimede intendeva far gioco sui punti medi e sulle proporzioni. Devo ora completare, spiegando che la giustificazione dei punti medi si rifà a questo assioma. È qui che un'idea di tipo fisico gioca essenzialmente, scritta in modo geometrico, senza bisogno di far intervenire la scrittura delle proporzioni a/a=A/A.

Ricapitolando, Archimede è partito dalla situazione di un sistema costituito da un peso A collocato in E e da un peso B collocato in Δ.

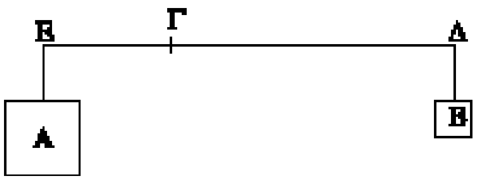


Figura 7

È l'inversione che mostra come il peso più grande è posto sul braccio più piccolo EΓ e che il peso più piccolo è posto sul braccio più grande ΓΔ. Piccolo, grande, pesante, leggero non sono aggettivi usati da Archimede nella sua dimostrazione. Perché questi aggettivi mancano di universalità. Il disegno di Archimede è «astratto» nella misura in cui mette A e B sotto la retta EΓ. Il disegno della Figura 7 è quello, divenuto usuale o fisico, della schematizzazione della leva[7].

Lo stesso sistema di pesi può essere visto in tutt'altro modo, cioè può essere reso equivalente a un altro sistema. L'idea di equivalenza non è resa in modo logicamente preciso da Archimede. O, piuttosto, l'equivalenza è un frutto della teoria delle proporzioni.

Con 2n pesi Z uguali, simmetricamente disposti attorno a E su ΛH e 2m pesi Z uguali, simmetricamente disposti attorno a Δ su HK. Cioè con 2(m+n) pesi Z uguali e ugualmente ripartiti tra Λ e K. Il punto medio Γ di ΛK diventa il centro di gravità dell'insieme, fornisce cioè il punto di equilibrio della leva. Di conseguenza, come scrive Archimede, la grandezza A, posta in E e la B posta in Δ si equilibrano nel punto Γ. A questa conclusione espressa in termini fisici di equilibrio corrisponde l'enunciato espresso in termini di proporzione:

7. Il mio commento dipende dal disegno del traduttore dal greco, perché non ho potuto vedere alcun originale. Un interessante studio storico, con obiettivi pedagogici, consisterebbe nel riprendere le diverse figure utilizzate nelle edizioni di Archimede nel secolo XVI. Non è possibile farlo in questa sede.

Grandezze commensurabili si equilibrano a distanze inversamente proporzionali ai loro pesi, cioè nella forma indicata all'inizio

$$\frac{A}{B} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma E}$$

Questo risultato è stato raggiunto per primo e ha definito il punto Γ. La dimostrazione per proporzioni e basata pure sull'idea di equivalenza, anche se vi si confrontano solo numeri interi (in forme che oggi chiamiamo frazioni) mostrava che Γ è proprio il centro di gravità, o punto di equilibrio.

Ecco il testo della dimostrazione di Archimede, con le note di Charles Mugler.

In effetti, dal momento che ΔΓ *sta a* ΓΕ *come A sta a B, e che A e B sono commensurabili, segue che i due segmenti* ΓΔ *e* ΓΕ *sono a loro volta commensurabili. Sia N la loro misura comune. Consideriamo i due segmenti* ΔΗ *e* ΔΚ *ciascuno uguali a* ΕΓ *e il segmento* ΕΛ *uguale a* ΔΓ. *Poiché* ΔΗ *è uguale a* ΓΕ, ΔΓ *è uguale a EH, di modo che AE è pure uguale a EH. Di conseguenza AH è il doppio di* ΔΓ *e HK il doppio di* ΓΕ. *Quindi N misura come ciascuno dei segmenti* ΛΗ *e HK, poiché N misura la loro metà*[8]. *E poiché, da una parte,* ΔΓ *sta a* ΓΕ *come A sta a B, e che, d'altra parte,* ΔΗ *sta a HK come* ΔΓ *sta a* ΓΕ *(ciascuno dei primi segmenti è in effetti doppio di ciascuno dei secondi), il rapporto di* ΛΗ *e HK è pure uguale al rapporto di A e B. A contiene tante volte la grandezza Z come* ΛΗ *contiene N. Segue*[9] *che AH sta a N come A sta a Z. Ma KH sta*[10] *a AH come B sta a A. Per identità*[11] *dunque KH sta a N come B sta a Z. Di conseguenza B è multiplo di Z secondo lo stesso numero col quale KH è multiplo di N . Ma abbiamo dimostrato che anche A è un multiplo di Z, per cui Z è misura comune di A e B . Ora, se il segmento* ΛΗ *è suddiviso in parti uguali a N e la grandezza A in parti uguali a Z, i segmenti uguali a N, contenuti in* ΛΗ, *saranno nello stesso numero delle grandezze parziali, uguali a Z, contenute in A. Di conseguenza, se si mettono su ciascuno dei segmenti di AH una grandezza uguale a Z, avente il centro di gravità nel suo punto medio, la somma di queste grandezze è uguale ad A, e il centro di gravità della grandezza somma di tutte queste grandezze parziali sarà il punto E; tutte queste grandezze sono, infatti, in numero pari e ce ne sono uno stesso numero da ciascuna parte di E, perché il segmento AE è uguale a HE. Analogamente si dimostra che se su ciascuno dei segmenti parziali di KH si mette una grandezza uguale a Z, col centro di gravità nel suo punto medio, la somma di queste grandezze parziali sarà uguale a B e il centro di gravità della grandezza somma sarà il punto* Δ[12]. *La grandezza A sarà allora posta nel punto E, la grandezza B nel punto* Δ. *Si ottengono quindi grandezze fra loro uguali, i cui centri di gravità sono fra di loro equidistanti e collocati in numero pari su un segmento. È dunque evidente che il centro di gravità della grandezza somma di tutte le grandezze è il punto medio del segmento.*

8. Cfr. Euclide X, 12.
9. Cfr. Euclide V, def. 5.
10. Cfr. Euclide V, 7, corollario.
11. Cfr. Euclide V, 22.
12. Dal momento che Z misura la grandezza B, cf. prop. 5, coroll. 2.

Una dimostrazione numerica

Può essere utile mostrare che si può evitare il ragionamento per proporzioni nel caso commensurabile, nominando gli interi n e m. È chiaro che queste dimostrazioni corrispondono alle frazioni. Supponiamo che pesi P e Q siano in rapporto 2 a 3 e fissiamo il fulcro C della leva AB nel rapporto inverso 3 a 2:

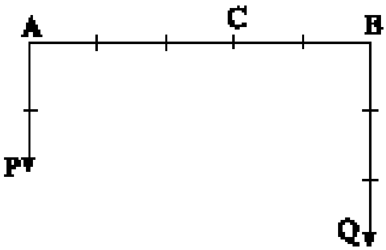


Figura 10

$$\frac{AC}{CB} = \frac{3}{2} \;;\; \frac{P}{Q} = \frac{2}{3}$$

Si costruisce AB di lunghezza 5 unità:

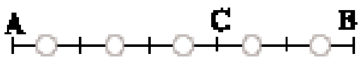


Figura 11

Si aggiungono a sinistra di A due altri segmenti e a destra di B tre altri segmenti:

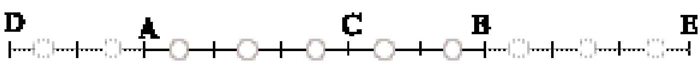


Figura 12

C è il punto medio di DE ed anche il centro di gravità di tutti questi pesi. Si può osservare che mettere Q in B è come mettere 6 volte il peso Q/6 ripartito simmetricamente attorno a B; così pure 4 volte il peso P/4 simmetricamente ripartito in A. Abbiamo dunque 10 pesi, ciascuno ugale a Q/6 e a P/4 perché P/Q=4/6=2/3. Evidentemente questi pesi sono equilibrati nel punto medio C di DE.

Una spiegazione più fisica porterebbe alle situazioni seguenti:

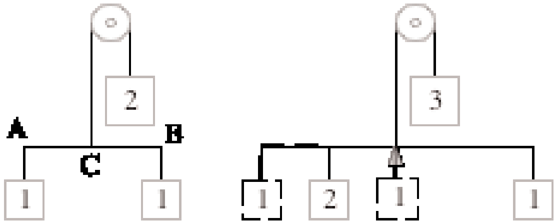


Figura 13

E in modo analogo per tutti i rapporti razionali, e non solamente 3 a 2 o 2 a 3.

Un quadro assiomatico

Per essere completi, ecco la lista degli assiomi fissati da Archimede, che qui non definisce il centro di gravità, perché lo stesso lo aveva già fissato in un libro antecedente, purtroppo andato perso. Per dimostrare la proporzione 6, si osserva che è utilizzato solo l'inizio dell'assioma 1, ma si ammette un'equivalenza fra leve o una composizione di centri di gravità. Può essere letta con l'assioma 5.

Dell'equilibrio o dei centri di gravità delle figure piane, I

1. *Ammettiamo che pesi uguali si equilibrano a distanze uguali e che pesi uguali sospesi a distanze diverse non si equilibrano, ma s'inclinano dalla parte del peso sospeso alla maggiore distanza.*
2. *Se a due pesi che sono sospesi a certe distanze e in equilibrio, si aggiunge a uno dei due un altro peso, i pesi non si equilibrano più, ma vi è inclinazione dalla parte del peso aumentato.*
3. *Avendo due pesi sospesi a certe distanze e diminuendo uno dei due, i pesi non si equilibrano più, ma vi è inclinazione dalla parte del peso non diminuito.*
4. *In due figure piane uguali e simili, sovrapponibili l'una sull'altra, i loro centri di gravità si sovrappongono pure l'uno all'altro.*
5. *Nelle figure piane disuguali ma simili, i centri di gravità saranno situati similmente. Chiamiamo similmente situati in figure simili punti tali che le rette che li congiungono ai vertici degli angoli uguali formano angoli uguali con i lati omologhi.*
6. *Se grandezze si equilibrano a certe distanze, grandezze equivalenti a queste si equilibrano alle stesse distanze.*
7. *In ogni figura convessa il centro di gravità si trova al suo interno.*

Non voglio fare la storia dei concetti della meccanica, né discutere i suoi assiomi, e in particolare il significato dell'assioma 5. Conviene passare alla dimostrazione della proposizione 7, che è fatta per assurdo. L'obiettivo è di togliere l'ipotesi della commensurabilità della proposizione 6, ma non il ricorso alle proporzioni.

Perché se AB, posto nel punto Z non facesse equilibrio con Γ, messo nel punto Δ, la grandezza AB sarebbe o troppo grande rispetto alla grandezza Γ perché ci sia equilibrio, oppure non lo sarebbe. Ammettiamo che sia troppo grande e togliamo da AB una grandezza minore dell'eccedenza di AB su Γ, che impedisce l'equilibrio e tale che la grandezza restante A sia commensurabile con Γ. Essendo A e Γ commensurabili e il rapporto tra A e Γ inferiore al rapporto tra il segmento ΔE e EZ, le grandezze A e Γ non si equilibrano alle distanze ΔE e EZ se la grandezza A è posta nel punto Z e la grandezza Γ nel punto Δ. Per le stesse ragioni non vi sarà equilibrio nemmeno se la grandezza Γ è troppo grande per equilibrare la grandezza AB.

Potremmo dire che un fisico non ha bisogno della proposizione 7: perché la proposizione 6 enuncia il risultato utile in termini di proporzioni e che può dimenticare (grazie all'induzione) la restrizione della commensurabilità? Ma, sin dall'inizio, mi sono rivolto al docente di matematica.

Per quanto attiene alla manipolazione delle proporzioni, che è il nostro obiettivo, questa dimostrazione di Archimede ha il vantaggio di non limitarsi a uguaglianze, ma di far intervenire anche disuguaglianze. Infatti la teoria delle proporzioni di Euclide gioca anche con le disuguaglianze, ma ciò è stato dimenticato con l'avvento delle frazioni. Per la trattazione della proporzionalità inversa, le disuguaglianze sono essenziali. Occorre notare che con la leva le disuguaglianze possono vedersi geometricamente: la bilancia sale e scende. È per questo che è stata scritta la seconda parte dell'assioma 1 di Archimede, quella che fa intervenire l'aggettivo «grande»; analogamente sarà utilizzato l'assioma 2, nel quale «grande» è elegantemente evitato con l'uso del termine «aumentato».

Una dimostrazione per assurdo

Così Archimede parte dall'ipotesi che il punto E divide il segmento ΔZ in modo che:

$$\frac{\Delta E}{EZ} = \frac{C}{\Gamma},$$

per pesi C e Γ incommensurabili. Considera la costruzione di E possibile grazie alla teoria delle proporzioni, perché il rapporto tra le due grandezze omogenee ha senso. L'obiettivo è di dimostrare che questa relazione assicura l'equilibrio, come lo assicurava nel caso commensurabile. Supponiamo di no e, per esempio, che la bilancia scenda dalla parte del peso C, o di Γ. Si può disegnare così:

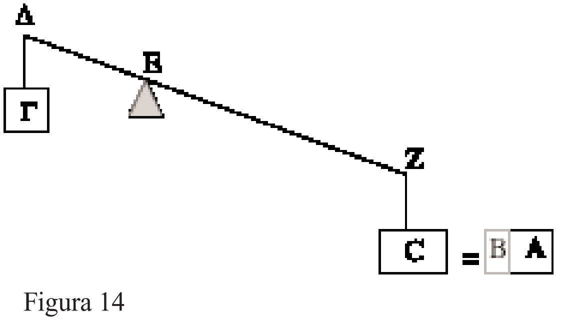


Figura 14

Essendo C un peso, si può stimare che è la somma di due pesi A e B, tali che A sia commensurabile a Γ e che non vi sia equilibrio: la bilancia discenda dalla parte di Z con A come peso da questa parte, al posto di C. È sicuro, grazie alla proposizione 6, che in questa situazione non può esserci equilibrio, perché A e Γ sono commensurabili, si ha $\frac{A}{\Gamma} \neq \frac{\Delta E}{EZ}$.

Nella misura in cui $\frac{A+B}{\Gamma} = \frac{\Delta E}{\Delta Z}$ e che B non è nullo.

Accettiamo questo comportamento che spiegheremo un po' di più alla fine.

Si può leggere di più, con le proporzioni, perché $\frac{A}{\Gamma} < \frac{\Delta E}{EZ}$.

Archimede, che ha giocato con dei pesi (primo registro del suo disegno), gioca con le lunghezze (secondo registro del suo disegno). Infatti indica che con il peso A al posto C e sempre Γ in Δ, la bilancia deve salire dalla parte di Z, perché deve abbassarsi dalla parte di Δ. Infatti A e Γ essendo commensurabili, l'equilibrio si ha in un punto F tale che

$$\frac{A}{\Gamma} = \frac{\Delta F}{EZ}$$

e la disuguaglianza ΔF<ΔE segue e mostra che la leva ha il suo fulcro in E (e non in F), essendo il braccio più lungo per lo stesso peso Γ, si ha inclinazione verso il basso dalla parte di Δ.

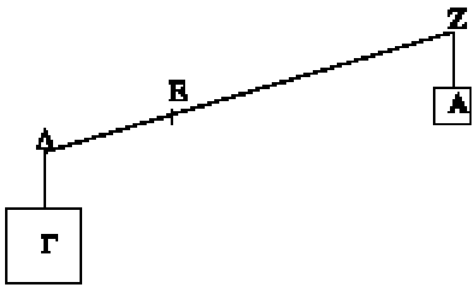


Figura 15

Per finire, con la stessa situazione della leva, si sfocia in due situazioni contraddittorie. L'ipotesi fatta sullo squilibrio verso il basso in Z è falsa quando

$$\frac{\Delta E}{EZ} = \frac{C}{\Gamma}.$$

Una contraddizione analoga appare se si supponesse uno squilibrio verso l'alto in Z. Non può esserci altro che equilibrio quando

$$\frac{C}{\Gamma} = \frac{\Delta E}{EZ}$$

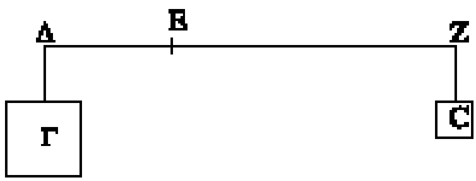


Figura 16

Un'approssimazione

Resta da giustificare la scelta del peso B che Archimede considera possibile. In effetti sono supposte due cose: una l'approssimazione di una grandezza, l'altra la continuità di un comportamento. L'approssimazione sta nel dire che si possono trovare interi p e q tali che $\frac{p}{q}\Gamma$ sia arbitrariamente vicino a C. In termini moderni significa che i razionali sono densi in **R**, o che le grandezze commensurabili a una data sono dense nell'insieme delle grandezze di un genere dato (come per esempio i pesi). Archimede ha abbandonato la teoria stretta delle proporzioni e considerato ciò che noi chiamiamo una numerizzazione delle grandezze e dei rapporti, cioè un trattamento comune, una stessa natura per queste grandezze e questi rapporti, natura che si sposa bene con la nozione di numero. Se non chiamiamo questo passo un'algebrizzazione, è solo perché questo termine è riservato a un altro fenomeno, la risoluzione delle equazioni e il calcolo polinomiale.

Così, Archimede può pensare A sufficientemente vicino a C (o a B piccolo) e non ha più bisogno di dire che A, B, C sono pesi. Ma c'è di più: l'idea che quando non c'è equilibrio, ma che la leva si abbassa da una parte, per esempio da quella di Z con C, allora si abbassa ancora quando C è sostituito con A, A essendo sufficientemente vicino a C. La continuità del comportamento caratterizza anche lo squilibrio.

Evidentemente, solo all'equilibrio cambiare anche di poco il peso fa salire o abbassare, secondo che si alleggerisce o si appesantisce (assiomi 2 e 3). C'è dunque discontinuità di comportamento all'equilibrio. Si possono leggere gli assiomi 1, 2 e 3 di Archimede come generatori di questa situazione straordinaria dell'equilibrio e, reciprocamente, è possibile indicare una situazione contraria per ogni squilibrio? Si capisce come il metodo di Archimede sorprenda uno spirito fisico (l'equilibrio come discontinuità!); ma non può che affascinare un matematico[13].

Un'argomentazione funzionale

Voglio terminare con una dimostrazione del tutto diversa, funzionale, dovuta a Daviet de Foncenex, un allievo di Lagrange, attivo nel XVIII secolo. La dimostrazione interessa direttamente il momento, prodotto del peso per il braccio; l'equilibrio corrisponde all'uguaglianza dei momenti. Qui le proporzioni scompaiono.

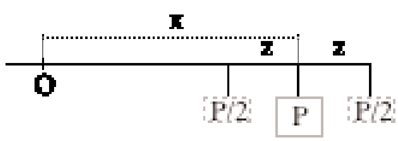


Figura 17

Foncenex determina *a priori* il momento, che indica con P·f(x), facendo uscire direttamente il peso P, ed è la funzione f che gli occorre trovare. La funzione diventa un'incognita. Per una proprietà delle sostituzioni, che fa intervenire una seconda variabile, il momento di P alla distanza x dev'essere lo stesso della somma dei momenti di P/2 alla distanza (x+z) e di P/2 alla distanza (x–z). Cioè:

13. Ci sono stati attacchi molto duri contro Archimede alla fine del XIX secolo, da parte di Ernst Mach e dei neopositivisti. Non mi spiego questi dibattiti se non nell'opposizione di una certa fisica nei confronti della matematizzazione. Vedere Ernst Mach, *La Mécanique. Exposé historique et critique de son développement*, trad. fr. E. Bertrand, intro. E. Picard, Paris, A. Hermann, 1904; réédition J. Gabay, Paris, 1987.

$$P \cdot f(x) = \frac{P}{2}\left[f(x+z) + f(x-z)\right]$$

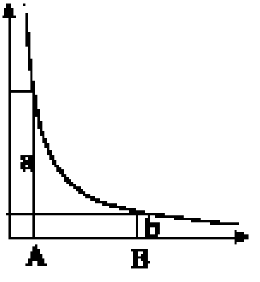
Si ottiene l’equazione funzionale[14]:
f(x+z) + f(x–z) = 2 f(x)

La derivazione secondo la variabile z porta alla seguente equazione:
f’(x+z) – f’(x–z) = 0
f’ è dunque una funzione costante, diciamo uguale ad a, e quindi
f(x) = a x + b

Ma f(0) = 0, dunque b = 0. Il momento è dunque proporzionale al prodotto del peso per il braccio: P=ax.

Il momento e l’equilibrio inducono a studiare la relazione algebrica x·y=costante, indipendentemente da ogni significato dato alle grandezze rappresentate da x (una distanza) e da y (un peso).

Nel sistema di riferimento cartesiano, questa è l’equazione di un’iperbole. La curva è dunque legata alla leva; l’equazione risale ad Apollonio, che pubblica un po’ dopo Archimede. Un disegno è esplicito:



$$\frac{A}{B} = \frac{b}{a} \qquad a \cdot A = b \cdot B$$

Anche nel XVII secolo, la forma delle proporzioni a quattro interi è stata preferita a quella dell’equazione cartesiana a due entrate, che indica la costanza dell’area di un rettangolo. Si era troppo abituati alla manipolazione prettamente algebrica delle proporzioni; si è acquisita una tale abilità, che la manipolazione altrettanto valida dei polinomi appariva più difficile. Ecco un’utilizzazione molto conosciuta nel XVII secolo:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

Questa manipolazione ha suggerito a François Viète, nel 1593, la forma generale della somma di una serie geometrica:

14. In realtà si dovrebbero aggiungere condizioni sulle variabili x e z perché x≥0, z≥0, inoltre x–z≥0, cioè x≥z. Lo studio delle equazioni funzionali con condizioni restrittive per le variabili non è stato affatto intrapreso nei secoli XVIII e XIX, periodi scuri per le equazioni funzionali.

$a + ax + ax^2 + ... + ax^n + ...$, con $0<x<1$.

Egli scrive:

$$\frac{a}{ax} = \frac{ax}{ax^2} = \frac{ax^2}{ax^3} = ...$$

e addiziona, considerando la somma dei primi (n+1) termini

$$\frac{a}{ax} = \frac{a + ax + ax^2 + ... + ax^{n-1}}{a + ax + ax^2 + ... + ax^n} = \frac{S_n - ax^n}{S_n - a}$$

Sia ancora, indicando con X_n l'ultimo termine $\left(= ax^n\right)$, e X_1 il primo termine (nel nostro caso: a):

$$\frac{S_n - X_1}{S_n - X_n} = x \quad \text{, cioè} \quad S_n = \frac{X_1 - xX_n}{1 - x}$$

Se n tende all'infinito, X_n tende a 0 e dunque S_n tende verso la somma

$$\frac{X_1}{1-x}$$

Si ottiene quindi la formula:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = \frac{a}{1-x}$$

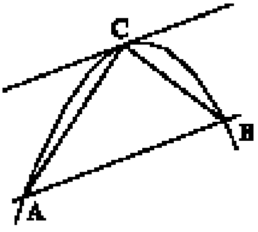
Traduco Viète per mostrare sia il suo modo di lavorare esclusivamente con proporzioni, sia la sua notevole abilità nel porre il problema. Come giustificare che X_n diventa zero?

Il passaggio dal finito all'infinito era stato risolto da Archimede con il ragionamento per assurdo che abbiamo presentato nella dimostrazione della proposizione 7. Non è per insoddisfazione che propose un altro metodo nel secondo libro sull'equilibrio nel piano. Archimede cercava una dimostrazione diretta; potè ottenerla considerando direttamente le proprietà del continuo.

Una dimostrazione attraverso il continuo

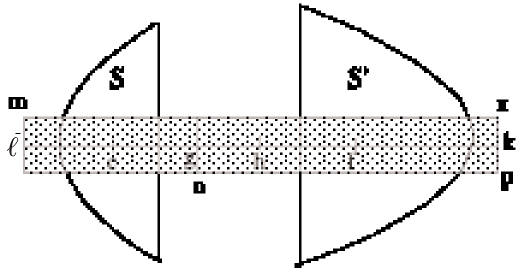
Nel secondo libro dell'equilibrio dei piani, Archimede ritorna sulla legge della leva e sulla proporzionalità inversa. La nuova dimostrazione è affascinante perché non si suddivide più nei due casi distinti commensurabile e no. Vale per tutte le grandezze quadrabili, cioè per tutte le figure geometriche equivalenti a un rettangolo. Per noi, tutte le figure sono tali purché posseggano un'area finita (numero reale). Per Archimede la quadrabilità non è generale: gli occorreva una costruzione con riga e compasso che permettesse di ottenere un rettangolo equivalente alla figura di partenza. Per esempio, quadrare il cerchio era un enigma e fu riconosciuto impossibile alla fine del

XIX secolo (trascendenza di ≠)! Archimede considera solo «numeri» corrispondenti a segmenti parabolici, dei quali sapeva trovare il rettangolo equivalente e costruire il loro centro di gravità. Un disegno è sufficiente per ricordare il risultato di Archimede.



$$\frac{\text{area segmento } A\hat{B}C}{\text{area triangolo } ABC} = \frac{4}{3}$$

Ecco il suo disegno riferito alla leva (o meglio, il disegno tramandato dalla tradizione). Le masse rettangolari A e B della proposizione 6 sono superfici paraboliche S e S’.



Il disegno ci aiuta a capire la dimostrazione. Due segmenti parabolici hanno area S e S’, hanno centro di gravità e, f; il punto h è stato scelto in modo che

$$\frac{hf}{he} = \frac{S}{S'}$$

Archimede considera il rettangolo di dimensioni m,n la cui area è uguale a quella di S (è qui che interviene l’ipotesi della quadrabilità). Il punto g è stato costruito in modo che fg=eh e il punto ℓ in modo che eg=e ℓ. Si completa poi ponendo k in modo che fg=fk. È la stessa operazione di simmetria vista nella proposizione 6. Si prolunga poi il rettangolo m,n in un rettangolo nx. Bisogna dimostrare che l’area del rettangolo nx è S’. Si constata, mutatis mutandis, che questa dimostrazione è più o meno quella data nel caso di grandezze discrete, ma espressa con proporzioni.

Infatti:

$$\frac{hf}{he} = \frac{eg}{fg} = \frac{2\,eg}{2\,fg} = \frac{\ell g}{gk} \quad \text{dunque} \quad \frac{\ell g}{gk} = \frac{S}{S'}\ .$$

Indichiamo (mn) l’area del rettangolo m,n, quindi (mn)=S e leggiamo:

$$\frac{(mn)}{(nx)} = \frac{\ell g}{gk} \quad \text{cioè} \quad \frac{S}{(nx)} = \frac{S}{S'} \quad \text{per cui } (nx)=S'.$$

Si sarà notato che il centro di gravità del rettangolo m,n è e, così come il centro di gravità del rettangolo n,x è f e ancora che il centro di gravità del rettangolo m,p è h.

Ora, per la proprietà additiva delle aree: (mn)+(nx) = (mp). Il punto h è il centro di gravità quando i pesi sospesi corrispondono a due segmenti di parabola. Con ciò è dimostrata la legge della leva relativa a questa situazione, cioè a tutti i casi di numeri quadrabili.

3. Mathématiques 7-8-9: nascita di un nuovo strumento didattico nell'insegnamento romando

Michel Chastellain[1]

For some years the Swiss French cantons have developed programmes of studies fixing the objectives and the contents of the teaching of various disciplines at the obligatory school. Concerning mathematics, the programmes CIRCE I and CIRCE II have given birth to common textbooks. Whereas, the proposals of CIRCE III (7^{th}, 8^{th} and 9^{th} school year), though they were born in 1986, have never carried out common didactic tools. Nowadays , thanks to the positive results coming from the consultation on this matter, a choice of continuity has been adopted.

The article introduces the project of the new Swiss French textbooks of mathematics for the 7^{th}, 8^{th} and 9^{th} grade of the compulsory school.

1. Introduzione

Da tanto tempo, ormai, i cantoni romandi hanno elaborato dei piani di studio che definiscono obiettivi e contenuti delle classi della scuola obbligatoria, per diverse materie d'insegnamento.

In matematica, i programmi quadro di CIRCE I (Commissione Intercantonale Romanda del Coordinamento dell'Insegnamento) per i primi quattro anni di scuola e di CIRCE II, per il 5° e 6° anno, hanno permesso di elaborare materiali didattici e manuali comuni. Per contro, le proposte di CIRCE III (per il 7°, 8° e 9° anno di scolarità) non si erano mai concretizzate nella realizzazione di testi, anche se i primi passi risalgono al lontano 1986. Le ragioni vanno cercate nella diversità delle strutture cantonali e nella disparità dei contenuti insegnati in questa fascia scolastica.

Oggi ci si avvia finalmente nella direzione di una reale continuità. È appena terminata una larga consultazione, presso i cantoni e le associazioni professionali, inerente a un *avant-projet* per una concezione d'assieme dei nuovi materiali d'insegnamento (ME) della matematica, per gli allievi del settimo, ottavo e nono anno scolastico[2].

2. Cenno storico

Nel 1993, oltre 80 insegnanti romandi e ticinesi si sono chinati su un certo numero di temi nel quadro del *Colloquio Matematico 93*. Tra questi è opportuno rilevare:

- il posto da riservare all'insegnamento della matematica nella scuola dell'obbligo;
- il contributo dei giochi e dei concorsi all'apprendimento della matematica;

1. Maître de didactique des mathématiques presso lo SPES di Losanna.
2. Corrispondenti alle ultime tre classi della nostra scuola media.

– la valutazione delle conoscenze e delle attitudini degli allievi;
– la problematica dei mezzi d'insegnamento;
– la formazione dei docenti;
– la differenziazione dell'insegnamento della matematica.

Alla fine dell'incontro, i partecipanti hanno convenuto di confermare le opzioni principali che caratterizzano il rinnovamento dell'insegnamento della matematica. Essi hanno chiesto in particolare:
– di mettere in opera una struttura di collaborazione che faciliti una migliore competenza professionale;
– di prevedere le modalità di elaborazione di mezzi d'insegnamento comuni a tutti gli allievi degli ultimi anni della scuola dell'obbligo.

Nel 1994, la CEM (Commissione romanda per l'insegnamento della matematica) conduce una riflessione che porta all'elaborazione di un rapporto dal titolo *Linee direttrici dei mezzi d'insegnamento romandi per la matematica 7-8-9*. Vi sono definiti obiettivi e opzioni che devono essere tenuti in considerazione per creare nuovi testi nell'ambito dei piani-quadro di CIRCE III. Nel novembre del 1995, la CDIP/SR-Ti (Conferenza dei direttori dei Dipartimenti dell'istruzione pubblica romandi e del Ticino) prende atto di questo documento e incarica il COROME (Commissione romanda dei mezzi d'insegnamento) di:
– procedere alla definizione dei bisogni generali ;
– esaminare le opportunità di acquisto, adattamento o creazione di mezzi d'insegnamento;
– abbozzare, eventualmente, un progetto per un nuovo mezzo d'insegnamento.

Con queste finalità, nel 1996, si incarica un gruppo di studio intercantonale, composto essenzialmente di persone del ramo. A fine anno esso redige un rapporto che si pronuncia in favore della redazione di nuovi mezzi didattici per l'insegnamento della matematica. Dopo consultazione delle istanze interessate, la Conferenza dei capi servizio dell'insegnamento secondario (CS2) decide di approfondire l'oggetto e al gruppo è affidato un secondo mandato la cui scadenza è fissata per il giugno 1998.

3. Mandato

Il nuovo mandato esplicita, tra l'altro, che si tratta di definire:
– i nuovi obiettivi;
– una descrizione dei mezzi atti a raggiungerli;
– una "tavola delle materie";
– un tema "trasversale" e uno "longitudinale" illustrati da qualche attività eseguibile in classe e accompagnata da commenti metodologici;
– il materiale da creare.

Per svolgere questo compito, il gruppo di studio ha elaborato un avamprogetto come citato in precedenza.

Di quest'ultimo vale la pena elencare alcuni elementi essenziali.

4. Assi principali

– Una serie di manuali 7-8-9 comune a tutti gli allievi.

Ammettere che non esiste una matematica per “ricchi” e nemmeno una per “poveri” non significa negare l’esistenza di differenze legate all’ambiente socio-culturale degli allievi, allo sviluppo della personalità, al ritmo di apprendimento o ancora alle capacità di ragionare. Ecco perché i nuovi testi (ME) offriranno una vasta scelta di attività che si possono affrontare a differenti livelli di approfondimento.

– Temi di studio che favoriscono la differenziazione.

I concetti matematici si apprendono su periodi lunghi, di durata variabile da allievo ad allievo. Conseguentemente, i ME presenteranno un ampio ventaglio di problemi da svolgere individualmente o per gruppi, che offriranno più possibilità di approccio e che consentono il più possibile l’autocorrezione.

– Attività ricche di senso.

Per rispondere alle esigenze attuali della formazione matematica, le attività proposte devono presentare un vero interesse. Saranno dunque centrate su problemi “aperti”, situazioni-problema, giochi e strategie, rompicapi a altre proposte per affrontare le quali gli allievi dovranno sviluppare una dinamica scientifica (porre ipotesi, verificarle, affermare e giustificare, confrontarsi con i compagni...) conformemente agli obiettivi comportamentali definiti nei programmi quadro di CIRCE III[3].

– Esercizi di “allenamento”.

Ogni apprendimento passa da una fase di assimilazione, più o meno lunga a seconda degli individui, che non deve essere trascurata. Perciò i nostri ME proporranno numerosi esercizi di allenamento che potranno anche essere utilizzati come attività di consolidamento e di recupero.

– Un’organizzazione centrata su obiettivi chiave.

Gli obiettivi saranno raggruppati attorno a nuclei fondamentali, organizzatori degli apprendimenti, in modo da rompere la logica lineare indotta da un taglio nozionistico e da una metodologia specifica. Una parte importante dei problemi sarà finalizzata a tali obiettivi.

– Un ricorso alle TIC
(Tecnologie dell’informazione e della comunicazione).

All’alba del terzo millennio sarebbe assurdo concepire una tale realizzazione senza fare ricorso alle tecnologie dell’informazione e della comunicazione. È per questa ragione che i nuovi ME faranno appello alle tecniche multimediali e saranno accompagnati da un CD, eventualmente da un sito Internet. Non si tratta qui di abbracciare una moda, ma di mettere la tecnologia moderna al servizio dell’apprendimento dell’allievo e della formazione degli insegnanti.

3. Ndr: Non possiamo non cogliere con soddisfazione la perfetta concordanza con i principi che sono alla base del nuovo progetto di manuali per la scuola media ticinese (Vedere in questo numero l’articolo «Una sensazionale scoperta», p. 47).

5. Stato dei lavori

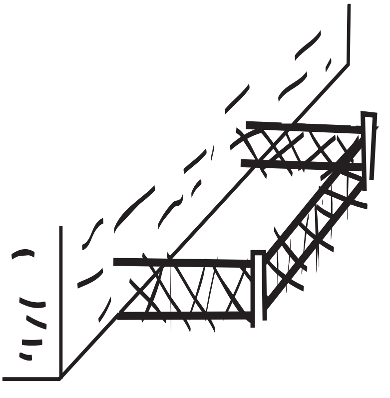
Nel dicembre del 1998, COROME prende atto dei risultati largamente positivi della seconda consultazione e dà il via all'elaborazione del nuovo strumento didattico. Un comitato di autori, accompagnato un gruppo di riferimento composto di una decina di insegnanti di ogni grado, di due rappresentanti dell'insegnamento professionale e medio superiore e di un docente universitario – garante della scientificità degli elaborati – si è messo al lavoro nell'agosto del 1999.

Il gruppo auspica di diffondere man mano i risultati della sua produzione così da permettere ai diversi partners (docenti, formatori, didatti, ricercatori, ...) di poter dare il proprio contributo alla costruzione del prodotto finale. Si sforzerà di trasmettere, a tempo debito, documenti intermedi alle associazioni professionali e di proporre regolarmente, alle riviste pedagogiche del ramo, riflessioni didattiche fondate sulle esperienze in classe ed esempi di problemi accompagnati da commenti metodologici. Da qui la ragione di questo mio intervento sul Bollettino dei docenti di matematica ticinesi.

6. Due esempi d'attività

Primo esempio: Il giardino di Aloysio

Come ogni primavera, Aloysio modifica la posizione del suo orto.



Quest'anno decide di collocarlo lungo la facciata sud del suo stabile rurale. Decide pure di dargli una forma rettangolare. Per recintarlo dispone di una rete metallica di 22 m.

A quale distanza dalla facciata metterà i pali d'angolo per ottenere la superficie massima?

Commento metodologico e didattico

La formulazione di questo problema «classico» permette di constatare che si tratta di un problema aperto, in particolare perché:

– l'enunciato è corto;
– non introduce lo svolgimento che porta alla soluzione;
– permette ad ognuno di procedere personalmente a qualche prova, oppure di dare elementi di risposta.

Il dato scelto, 22 m, è sufficientemente grande e «piacevole» per suscitare un sentimento di fiducia nell'allievo, e si rivela abbastanza interessante per poter valutare la pertinenza della risposta fornita. Il problema è significativo del senso dell'apertura che si vuole proporre. Si presta a molteplici procedimenti risolutivi che vanno dall'empirico al teorico, permettendo così la differenziazione pedagogica.

Ad esempio:

– Lavoro in **N**

La ricerca si effettua in un insieme discreto e gli allievi procedono per prove successive. Ottengono, ad esempio, una tabella di valori i cui risultati non saranno necessariamente organizzati in maniera strutturata. In queste condizioni il massimo preannunciato sarà 60 m^2 ciò che corrisponde ad una distanza rispettivamente di 5 e di 6 metri dalla parete della casa:

larghezza (m)	il doppio (m)	lunghezza (m)	Perimetro (m)	Area (m^2)
1	2	20	22	20
2	4	18	22	36
3	6	16	22	48
4	8	14	22	56
5	10	12	22	60
6	12	10	22	60
7	14	8	22	56
8	16	6	22	48
9	18	4	22	36
10	20	2	22	20

Questa tabella suscita un certo numero di considerazioni sulle varie relazioni che esistono tra le grandezze presenti:

– più la larghezza è piccola più la lunghezza è grande;
– quando la larghezza aumenta la lunghezza diminuisce;
– il perimetro è costante ma l'area varia;
– l'area aumenta con la larghezza, passa per un massimo, poi diminuisce con la lunghezza;
– ....

Gli obiettivi mirati toccano in primo luogo le nozioni di funzione e di variabile.

Lavoro in **R**

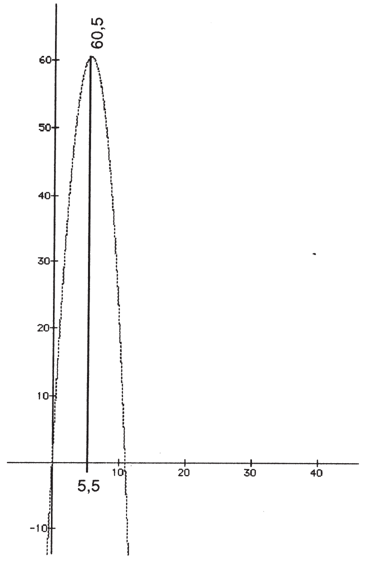
Un'osservazione più fine – eventualmente suggerita dal docente – mostra che esiste una «simmetria»:

f(1) = f(10) = 20
f(2) = f(9) = 36
f(3) = f(8) = 48
f(4) = f(7) = 56
f(5) = f(6) = 60

«Succede dunque qualcosa tra 60 e 60!» . Gli allievi cercano allora una soluzione «più fine» riferendosi ad un insieme più esteso di numeri. Per un valore intermedio di 5,5 m, la soluzione corrispondente all'area massima diventa $5{,}5 \cdot 11 = 60{,}5\ m^2$.

Mediante un grafico

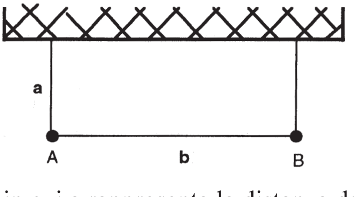
Agli allievi che non sanno staccarsi dai valori interi, il docente potrebbe proporre di rappresentare graficamente la situazione e indurli a riflettere sull'area massima che si ottiene tra 5 e 6.



Con un'equazione

La situazione si traduce così:

a + b + a = 22



in cui a rappresenta la distanza dalla facciata al paletto A e b quella che separa A da B.

In questo caso si ha

$2\,a + b = 22 \quad \Rightarrow \quad b = 22 - 2\,a$

con la condizione che l'area $ab = a\,(22 - 2\,a)$ sia massima.

Allora la funzione è $f : a \mapsto -2\,a^2 + 22\,a$

per la quale le due intersezioni con Ox sono 0 e 11 e corrispondono ad un'area nulla.

Il coefficiente (–2) assicura che la funzione presenta un massimo. Per trovarlo, bisogna calcolare l'immagine della media aritmetica tra 0 e 11 ossia $f\,(5{,}5) = 60{,}5$.

Generalizzando

Agli allievi che si avviano alla continuazione degli studi, il docente può suggerire di approfondire la conoscenza della funzione

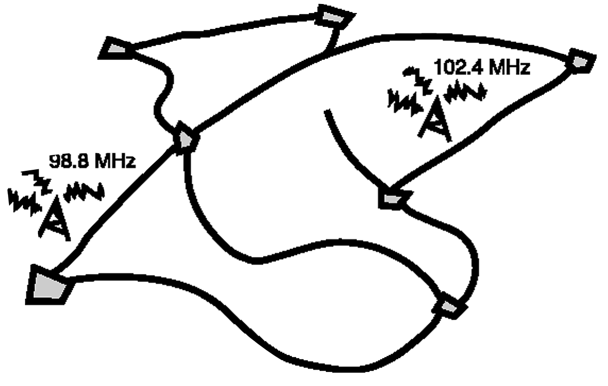
$f : a \mapsto -2\,a^2 + 22\,a$, proponendo le tappe seguenti:

– determinare l'insieme di definizione di f;
– studiare la variazione di f mediante ascisse crescenti che permettono di valutare il crescere e il decrescere della funzione;
– rappresentare graficamente f (che potrebbe permettere di stabilire un legame tra $-2\,a^2 + 22\,a$ e $-2\,(a - 5{,}5)^2 + 60{,}5$ che è una forma equivalente utilizzata a volte per dedurre il vertice di una parabola.

Segnaliamo ancora l'attività che potrebbe portare in aula d'informatica, segnatamente all'uso di «Cabri-Géomètre». Per questo, gli allievi devono conoscere la similitudine dei triangoli e il concetto di luogo geometrico.

Secondo esempio: «98.8 oppure 102.4?»

Le due stazioni radiofoniche trasmettono lo stesso programma su frequenze diverse.



Un veicolo è equipaggiato di una radio che capta automaticamente i segnali emessi dalla stazione più vicina. Su quali tronchi stradali si capterebbero i segnali emessi a 98.8 MHz?

Commenti metodologici e didattici.

La nozione geometrica introdotta da questa situazione è quella di asse di un segmento che divide il piano in due semipiani, ciascuno costituito da punti che singolarmente sono situati più vicino all'una o all'altra estremità del segmento.

Le variabili didattiche del problema sono state scelte in modo da non indurre la soluzione:

– la «frontiera» cercata non passa per nessuna località;
– non è parallela ad alcun bordo del foglio;
– le sue intersezioni con la rete stradale non sono mai equidistanti da due località;

Generalmente, gli allievi procedono con prove successive:

– mettendo qualche punto lungo le strade e verificando se le loro distanze dalle due stazioni sono identiche;
– cercando punti che soddisfano le condizioni dell'enunciato, punti che si situano all'intersezione delle coppie di circonferenze di ugual raggio centrate nelle due emittenti.

Qualunque sia il metodo adottato, è poco probabile che questo evolva durante la ricerca, perché i risultati intermedi ottenuti sono sufficientemente precisi per delimitare correttamente i differenti tronchi stradali. Da notare che la misura dei segmenti costituisce, in ogni momento, un mezzo di verifica delle soluzioni. Una messa in comune conduce a rilevare le procedure differenti utilizzate e permette di mettere in evidenza l'allineamento dei punti «frontiera». Se lo studio dell'asse di un segmento non è mai stato affrontato, quest'attività costituisce una «situazione-problema». In questo caso si tratterà di consolidare la conoscenza di questo concetto: definizione, costruzione, proprietà. Gli allievi possono convincersi della pertinenza del tracciato finale disegnando altre strade.

Conclusione

L'anno scolastico 2003-2004 dovrebbe vedere la nascita dei nuovi materiali didattici 7-8-9.

In quell'anno la scuola dell'obbligo della Svizzera romanda dovrebbe avvalersi dell'intera collana di manuali poiché saranno pure entrati in vigore i mezzi d'insegnamento da 1P a 4P (attività prescolastiche), mentre i mezzi che attualmente ricoprono la fascia del quinto e sesto anno saranno rivisti e aggiornati secondo la stessa concezione didattica (edizione 2001 e 2002).

II. Didattica

1. Una sensazionale scoperta: $(a + b)^2 = a^2 + b^2$

Gianfranco Arrigo, Giorgio Mainini

The provocative title and the first part of the article wish to draw the teachers'attention on the great change that the didactics of mathematics is going through. The attention is put on the "interesting" problems, which finally give the appropriate relevance to the learnings such as "skills and know how" and "existential competence". These should constitute a basic component of teaching, next to that concerning the essential contents.

At the end a new term is launched, that of "mathematical atoll", which indicates a sufficiently rich mathematical situation so to give birth to an important set of "interesting problems".

Teorema
L'uguaglianza del titolo è vera.

Anche se la cosa può suscitare sconcerto, tranquillizziamo il lettore: forniamo una dimostrazione per induzione.

Dimostrazione
Per usare le solite lettere, dimostreremo che $(a + n)^2 = a^2 + n^2$

Essa è vera per n = 0, difatti $(a + 0)^2 = a^2 = a^2 + 0 = a^2 + 0^2$

Sia essa vera per un certo $n = k$.
Dimostriamo che è vera anche per $n = k + 1$.
Per ipotesi vale $(a + k)^2 = a^2 + k^2$
dobbiamo dimostrare che: $(a + (k+1))^2 = a^2 + (k+1)^2$

Calcoliamo
$(a + (k+1))^2 = ((a + k) + 1)^2 = (a + k)^2 + 1^2$ (per ipotesi di induzione)
$= (a^2 + k^2) + 1^2 = a^2 + (k^2 + 1^2) = a^2 + (k+1)^2$
A questo punto il teorema è dimostrato.

Cade tutta la matematica finora studiata? Oppure da qualche parte abbiamo celato un errore?

Il lettore si sarà accorto che la trappola consiste nell'aver ancorato la formula con n=0, unico caso che la rende vera.

La nostra intenzione non consiste certamente nel presentare quello che è poco più di un giochino matematico (anche se potrebbe essere proposto agli studenti liceali, quando pensano di essere in possesso del procedimento di dimostrazione per induzione completa...).

A noi interessa innescare una riflessione didattica.

Osserviamo che[1]:

1. si comincia alla scuola elementare ad addizionare per iscritto (seguendo gli algoritmi arabici) da destra a sinistra, contrariamente a quanto fa ogni persona pensosa di ciò che fa. Difatti, per eseguire 341 + 523, chiunque comincia a calcolare 300 + 500, poi 40 + 20, poi, finalmente, 1 + 3. Ma la «tecnica del calcolo scritto» dice di non fare così. Perché? Boh...

2. si continua alla scuola media: trovato che $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, si esercita fino alla nausea, giungendo fino a porre
   $a = \frac{2x}{3}$ e $b = \frac{3y}{2}$ e magari… avanti di questo passo.
   I «tecnicismi» continuano;

3. si persevera alla scuola media superiore: trovata la formula risolutiva dell'equazione di secondo grado completa, si esercita con valori dei parametri che introducono difficoltà cervellotiche (il famigerato Δ che deve essere maggiore o uguale a 0, visto che **C**, inteso come corpo dei numeri complessi, è di là da venire). Qualcuno intravede molto di più dell'applicazione esasperata di tecnicismi?

4. si finisce all'università con lavori da alta scuola viennese di equitazione (limiti, derivate, integrali, equazioni differenziali e integrali, ...), dove può capitare che le arcotangenti siano elevate al valore assoluto di un logaritmo fratto la radice cosesima di una funzione da brivido... Quando uno «quelle cose lì» le sa manipolare, di *mate* ne sa quanto prima: ma vuoi mettere che tecnica che ha acquisito?

Poi, chi è riuscito a sopravvivere, ha qualche probabilità di essere assunto come insegnante. Secondo il grado scolastico dove svolgerà la sua attività, insegnerà o 1. o 2. o 3. o 4.: il cerchio è chiuso.

Allora come meravigliarsi che tanta, troppa, gente colta si **vanti** di non avere mai capito la matematica? Il fatto è che buona parte dei membri del popolo sovrano **non ha mai incontrato** la matematica vera, ma solo un suo surrogato, o, peggio, una sua caricatura.

Diventa a questo punto fondamentale dire che cosa è, secondo noi, la matematica che va insegnata a scuola. Tenteremo per approssimazioni successive.

Prima approssimazione.

Si narra che una volta il re d'Inghilterra Giorgio VI abbia chiesto a Louis Armstrong, durante una *Royal performance*, che cosa fosse il jazz. Satchmo prese la sua tromba, la suonò e poi rispose: *«Vedi, re, questo è il jazz»*. Dobbiamo anche noi docenti, come il grande Satchmo, «suonare la matematica».

1. Ci sia concessa qualche esagerazione...

Seconda approssimazione.

La matematica è quella cosa che fanno i matematici. Sì, ma i matematici, per vivere, fanno un po' di tutto, anche le cose elencate sopra, e quelle cose che abbiamo definito più che un surrogato, una caricatura della matematica.

Terza approssimazione (e ultima, fino a nuovo avviso).

La matematica è quella cosa che fanno i matematici quando fanno matematica davvero. E si fa matematica davvero quando si cerca la soluzione di un problema. Ammesso che si possa chiamare «problema» il calcolo dell'area di un cinico quadrato il cui lato misuri

$\frac{2x}{3}+\frac{3y}{2}$, allora anche il calcolo di cui al punto 2.

è «fare matematica davvero». Ma *nun è ccosa*.

E siamo arrivati al nocciolo del nostro discorso: trovare problemi che valga la pena risolvere. Ad esempio:

Problema del calendario

C'è chi afferma che il venerdì 13 porti sfortuna. Ma il venerdì 13 è un giorno «raro», oppure capita abbastanza spesso? E questo è il vero problema.

Poi, per ragioni legate alle abitudini e alle esigenze scolastiche, siamo disposti a precisarlo con aggiunte di questo tipo:

Determina quanti venerdì 13 ci sono ogni anno

— a dipendenza del giorno di Capodanno,
— a dipendenza del fatto che l'anno sia bisestile o no.

C'è una differenza tra

— la «rarità» del venerdì 13 e quella, ad esempio, del lunedì 7?
— la «rarità» del venerdì 13 e quella, ad esempio, del sabato 31?

Pur ammettendo che la soluzione possa essere di per sé interessante, in questa sede ci interessa di più trovare una risposta alle seguenti domande:

— quali apprendimenti (soprattutto «saper fare» e «saper essere») si sono attivati durante gli approcci alla soluzione del problema?
— le conoscenze matematiche acquisite («saperi», nell'esempio le classi di resto modulo 7) devono entrare nel bagaglio di competenze dell'allievo?

Cominciamo dalla seconda domanda.

Se si risponde «Sì»: che speranza c'è di utilizzare questi saperi in altre occasioni? Se si risponde «No»: che senso ha aver proposto il problema?

Quindi

— attenzione a rispondere «Sì», perché di problemi simili, in un ipotetico elenco di problemi che valga la pena risolvere, ce ne potrebbero essere millanta: si rischia di avere un coacervo di nozioni disarticolate che vanno, in qualche modo, tenute a mente;
— attenzione a rispondere «No», perché se non ha senso aver proposto *questo* problema, allora non ha senso nemmeno proporre gli *altri* dell'elen-

co. In altre parole, si avrebbe un «programma»[2] di matematica del tutto disarticolato: un «programma» che è un «non-programma».

Si è di fronte ad un (almeno apparente) dilemma:
se si affrontano i problemi dell'elenco,
— non ha gran senso fissare i risultati raggiunti
— se non si fissano, si deve postulare un «non-programma» di matematica.

Come uscirne? In sostanza si tratta di porre una scommessa.
Noi scommettiamo che:
vale la pena risolvere problemi «interessanti», a costo di accettare il «non-programma» di matematica, meglio sviluppando una nuova concezione di programma che dia finalmente il posto che loro spetta agli apprendimenti del tipo «saper fare» e «saper essere».

Nell'ottica della definizione di un nuovo programma per la scuola di base, il discorso va comunque completato. Molto speditamente, nel problema del calendario, abbiamo liquidato la questione dei saperi dicendo che le classi di resto non costituiscono necessariamente una conoscenza da fissare. Se però guardiamo la cosa più da vicino, osserviamo che per arrivare alle classi di resto occorre attivare le nozioni relative alla divisibilità e alla divisione euclidea. Questi contenuti vanno inclusi nella «razione di ferro» che ognuno dovrebbe possedere e quindi esercitati in momenti opportunamente disposti nel corso dell'attività di insegnamento-apprendimento.

Per rispondere alla seconda domanda, postuliamo l'esistenza di un *corpus* di «saper fare» e di «saper essere» alcuni elementi del quale devono essere presenti nei problemi «interessanti». Anzi, questa caratteristica la possiamo utilizzare come definizione di problema «interessante». Cioè: un problema è tanto più interessante quanti più elementi del *corpus* sollecita.

Resterebbe a questo punto solo da definire il *corpus*. Il compito non è più eccessivamente difficile:
— i saper fare cognitivi li ritroviamo puntualmente nella Tavola tassonomica della matematica;
— gli altri tipi di saper fare e i saper essere li possiamo leggere sulla Mappa formativa della matematica.

Alla nuova concezione di programma (ex «non-programma») diamo il nome di **programma ad atolli**.

Gli autori del presente articolo stanno progettando un nuovo materiale didattico per la scuola media nel quale i principi metodologici appena descritti sono ampiamente applicati: per la realizzazione di questo progetto si cercano persone illuminate e di buona volontà.

2. «Programma» inteso nel senso tradizionale del termine, cioè un insieme di contenuti da svolgere in classe.

2. Nuovo piano formativo, obiettivi, competenze

Gianfranco Arrigo

In the new plan of formation of the scuola media of Canton Ticino the pedagogical concept of "competence" is central. It is therefore vital that every teacher should take the opportunity to reflect on the meaning of this innovation and go deep into its knowledge so that their didactics can be adapted to the new requests. Given the assumption that one cannot anymore teach as one did a few years ago, it is necessary that every teacher strives in this new way: hence, more tranquillity, awareness and professionality will be acquired.

1. Essere insegnanti, oggi

Nel nuovo piano formativo della scuola media ticinese, il concetto pedagogico di *competenza* è centrale. È perciò importante che ogni insegnante possa riflettere sul significato di questa innovazione, approfondirne la conoscenza, decidere – se è il caso – come ritoccare il proprio abito didattico, in modo da inserirsi attivamente nelle attuali concezioni dell'insegnamento. Ciò non deve significare affatto aderire automaticamente al piano formativo, bensì accostarsi in modo critico, interpretare personalmente le idee direttrici, adattare le stesse alle situazioni contingenti, non da ultimo, individuare nuove vie da esplorare. Le ricerca didattica – in particolare quella disciplinare, nella fattispecie quella relativa alla matematica – sta attraversando un periodo di grande sviluppo. Mai come in questi ultimi decenni ci si è dedicati all'indagine dei processi di apprendimento; mai prima d'ora sono caduti così tanti principi considerati sacrosanti, si sono rovesciate dinamiche considerate inamovibili, sono cadute illusioni. Perché?

L'evoluzione della società in generale e il cambiamento del tessuto sociale – ormai avvenuti tangibilmente anche nel nostro piccolo grande Cantone – hanno fatto sì che, in classe, le condizioni di apprendimento e le dinamiche relazionali, nel giro di pochi anni, siano sensibilmente mutate. Ogni insegnante, ma persino l'uomo della strada, considera evidente che oggi non si possa più far scuola come prima. Questo avverbio sta a significare un lasso di tempo che si fa sempre più breve. Se dieci anni fa era ragionevole dire «non si può più insegnare come dieci anni fa», oggi si è costretti a dire che «non si può più insegnare come cinque anni fa»; fra dieci anni che cosa potremo dire?

Una conseguenza importante di questo fenomeno tocca nel vivo la professione di insegnante che sta diventando sempre più ardua e complessa.

Parallelamente stiamo assistendo ad un'altra evoluzione, che si sviluppa lungo l'asse di tutti i livelli scolastici. Se nella scuola di qualche decennio fa le competenze pedagogica e didattica erano peculiari solo agli insegnanti della scuola elementare (al più, per gli insegnanti della scuola secondaria, era un *optional)* oggi devono estendersi alla totalità dei docenti. L'insegnante di scuola media sa da un pezzo che la propria competenza disciplinare (sempre necessaria, s'intende) non gli basta più. Vent'anni fa si è scontrato con il problema delle classi eterogenee; oggi ha fatto la conoscenza del problema degli allievi (e persino delle classi) *ingestibili*. I docenti delle scuole medie superiori e quelli delle professionali, a loro modo, hanno già preso coscienza di questa realtà. Il liceo – per citare una scuola che ho conosciuto molto bene – non può più essere quello di vent'anni fa; non solo perché nel frattempo si sono succeduti numerosi cambiamenti di programmi e di strutture interne, ma soprattutto perché sono cambiati gli allievi e il loro modo di vivere la scuola. Per intenderci, è finito il tempo in cui un docente liceale veniva apprezzato unicamente per la sua profonda conoscenza disciplinare, al punto che nessuno osava muovergli critiche sui suoi modi di insegnare e di valutare e nemmeno sulle sue modalità di mettersi in relazione con gli allievi. Oggi, il giovane laureato in matematica intenzionato a diventare insegnante (non importa se nella scuola media o nel liceo o nella scuola professionale) deve in poco tempo operare una profonda ristrutturazione del proprio sapere disciplinare, acquisire elementi storico-epistemologici e di psicologia dell'apprendimento, assumere tecniche didattico-metodologiche e docimologiche, senza le quali è ormai impossibile intraprendere la professione di insegnante con un minimo di probabilità di riuscita. Qualcuno, a questo punto, potrà avere l'impressione che sto esagerando, perché – potrebbe pensare – si è sempre insegnato, e si continua a insegnare, senza tutto questo apparato complementare di formazione (tutta roba del diavolo, da IAA, da ASP, brrr…). Non ho invero alcun interesse né tantomeno secondi fini, essendo ormai al termine della mia attività professionale. La mia convinzione l'ho costruita in trent'anni di esperto di scuola media, in altrettanti di docente liceale e in sette anni (i più recenti) di formatore di insegnanti: il docente del duemila dev'essere un «professionista dell'insegnamento». I giovani lo possono diventare, perché – bene o male – devono conseguire un'abilitazione che – bene o male – dovrebbe, non tanto *consegnare* loro questa professionalità, ma dotarli degli strumenti indispensabili per *costruirla* durante i primi fondamentali anni di attività.

Gli altri? Qui il discorso si fa difficile e delicato. È evidente che l'esperienza «sulla propria pelle» (e su quella degli allievi) può supplire, col tempo, alla mancanza di una formazione didattica. È altrettanto vero che molti insegnanti questa formazione se la sono costruita perché hanno preso sul serio la propria professione mettendoci intelligenza e passione, perché vi hanno dedicato il doppio del tempo per il quale lo Stato li ha pagati, e per tante altre buone ragioni. Ma gli altri? Oggi non si può più sperare – e tantomeno pretendere – che gli insegnanti si costruiscano da soli. Occorre una formazione iniziale e una successiva attività di riflessione nell'azione e di acquisizione di nuove conoscenze. In questo senso si inserisce, almeno nelle intenzioni, il nostro Bollettino e in particolare questo articolo.

2. Il concetto pedagogico di competenza

Veniamo al concetto di competenza. Mi piace adottare la seguente definizione trasmessaci da Xavier Roegiers:

> «Mobilitazione di un insieme articolato di risorse (saperi, saper fare e saper essere) allo scopo di risolvere una situazione significativa (di carattere disciplinare) appartenente a

una famiglia data di situazioni-problema».

È questa l'unica concessione alla letteratura pedagogica che faccio nel presente articolo. È questa, del resto, l'unica risposta che ci può dare il pedagogista. Tutto il resto compete al didatta della matematica, il quale, prima di tutto, dev'essere matematico. Perché, sia ben chiaro, non si può riflettere seriamente sulla didattica della matematica (né di qualsiasi altra disciplina) se non si ha una formazione matematica (disciplinare) completa. Capisco che, soprattutto da noi, la tentazione di sottovalutare la formazione disciplinare è forte: se in Italia ogni cittadino si sente allenatore di calcio, da noi ciascuno si sente insegnante (strano, ma vero!); se conosce almeno le proporzioni, poi, si sente addirittura insegnante di matematica di scuola media. Così, si permette di criticare il docente del proprio figlio, sia per quello che tratta in classe, sia per come lo propone.

Insegnare matematica è tutt'altra cosa. Vuol dire conoscere un bel po' di matematica, ma non basta. Vuol dire conoscere gli aspetti storici ed epistemologici, perché l'ontogenesi e la filogenesi, molto spesso, vanno di pari passo. In altre parole, conoscere come, nel corso dei secoli, si è giunti alla matematica odierna, è condizione necessaria se si vuole praticare un insegnamento che vada oltre la semplice trasmissione del sapere. Per sviluppare negli allievi la capacità di produrre un ragionamento matematico (o almeno di tipo logico-matematico, razionalmente coerente, adeguatamente rigoroso) occorre mettere l'allievo nello stato di un qualsiasi ricercatore. Dargli cioè un abito mentale atto ad affrontare situazioni nuove, problemi nuovi. «Situazioni» e «problemi» sono termini tecnici della didattica matematica, ma, in questo testo, possono essere interpretati più liberamente. L'unica cosa che occorre fissare è il significato del termine «problema», che non può essere attribuito ai tradizionali «problemi» scolastici ripetitivi. Nella nostra accezione, il problema non deve essere attività abituale, riproduttiva, ma deve contenere almeno un aspetto (un elemento) che l'allievo affronti per la prima volta. Lavorando nel quadro di situazioni didattiche adeguatamente costruite, l'allievo deve poter formulare e risolvere problemi, sviluppando quegli apprendimenti che nella letteratura pedagogica si chiamano «saper fare».

Ma non basta ancora: per essere un buon insegnante di matematica occorre portare gli allievi alla consapevolezza del loro fare matematico, alla riflessione metacognitiva. È grazie a ciò che l'allievo irrobustisce il proprio apprendimento e lo assume responsabilmente; in questo modo acquisisce le convinzioni che lo accompagneranno per il resto della vita. In altre parole, è così che si forma l'allievo cosciente del proprio apprendimento, non quello che esegue mnemonicamente o che sa le cose «perché l'ha detto l'insegnante». Entrano così in gioco i «saper essere». Ed entrano in gioco le svariate teorie dell'apprendimento, i diversi modelli di acquisizione delle conoscenze, forniti dalla ricerca psicologica.

A questo punto, il concetto di competenza, per noi insegnanti di matematica, non ha più lati oscuri: essa viene raggiunta su una determinata tematica (o contenuto disciplinare) dall'allievo che non solo sa, ma sa applicare la propria conoscenza e inoltre sa anche giustificarla e difenderla, perché ne è profondamente convinto per ragioni puramente matematiche (logiche, rigorose).

Stiamo parlando di utopie? Dipende: come ogni azione didattica, i risultati non si possono sempre garantire, le affermazioni non sono mai teoremi matematici. Sta di fatto, però, che le probabilità di successo, per un insegnante che tende a far raggiungere la competenza ai propri allievi, sono ben maggiori di quelle del collega che si accontenta di un apprendimento riproduttivo. Nessuno si offenda, ma dalla scuola elementare sono usciti molti allievi capaci di eseguire divisioni senza aver capito che cos'è una divisione; dalla scuola media sono usciti molti allievi capaci di applicare il teorema di Pitagora, senza sapere che cosa comporta questo teorema nell'economia della geometria elementare; dai licei sono usciti parecchi allievi capaci di derivare e integrare funzioni, anche artificiosamente complicate, senza sapere che cosa significa derivare e integrare. È questo che vogliamo? Attenzione, perché una risposta positiva alla domanda potrebbe segnare la fine della nostra professione. Perché se l'insegnamento si riducesse solo alla trasmissione di saperi e di saper fare da acquisire mnemonicamente, l'insegnante-uomo potrebbe essere benissimo sostituito da un insegnante-macchina. Ciò che invece nessuna macchina riuscirà mai a fare è lo sviluppo dei saper fare di ordine superiore (quelli che non si possono ridurre ad automatismi) e dei saper essere: per questo è assolutamente necessario l'insegnante-uomo (Mensch).

Ecco dunque alcune buone ragioni per accettare il concetto di competenza, nell'accezione appena presentata. Compiuto questo primo passo, occorre riflettere su come si possa integrare questo importante concetto nell'insegnamento della matematica, segnatamente nella scuola media.

3. Competenze matematiche nella scuola media

Incominciamo col dire che, nella scuola media, la competenza può essere raggiunta (o fatta raggiungere) solo su alcune tematiche ben definite. Aggiungiamo che l'insegnamento non deve limitarsi a queste, ma deve anche comprendere una parte che chiamerei «di sviluppo» e che assimilerei alla «zona prossimale» di Vigotsky, cioè, in sintesi, a quelle prestazioni che l'allievo riesce a compiere solo se adeguatamente assistito dall'insegnante. Detto ciò, l'attività dell'anno scolastico dovrebbe equilibratamente oscillare tra momenti di lavoro sull'acquisizione di competenze e momenti di attività di sviluppo: come si è sempre fatto, dirà qualcuno. Certo, ma anche qui occorre andare oltre il sapere e il saper fare riproduttivo: è necessario che l'insegnante acquisisca professionalità, cioè diventi competente in didattica, assumendo saper fare di ordine superiore (che gli permettano, per esempio, di far fronte a situazioni nuove o a imprevisti) e di saper essere (che lo trasformino in «professionista dell'apprendimento»). Ma, per compiere questo passo decisivo, occorre giungere alla teorizzazione e alla formalizzazione dei concetti didattici. Allora, l'uomo della strada non potrà più pretendere di giudicare; l'insegnante sarà diventato un professionista e il suo ruolo potrà essere seriamente rivalutato.

Ho detto prima che, sul piano formativo, in un anno scolastico il docente deve lavorare su due fronti: il raggiungimento di competenze e lo sviluppo di apprendimenti che non raggiungono ancora la competenza. Tutto chiaro, è necessario però sapere *quali* sono queste competenze e *quali* invece gli obiettivi di sviluppo. Ho scritto «obiettivi» e lo voglio sottolineare, perché si sente spesso parlare di insegnamento «per competenze» come superamento dell'insegnamento «per obiettivi», quest'ultimo considerato come un tentativo ormai fallito. Io non mi trovo affatto d'accordo con questo modo di vedere le cose. In matematica, almeno, ciò non può essere detto, perché gli obiettivi occupano ancora un ruolo importante: li considero come i mattoni con i quali costruire le competenze. Meglio: gli obiettivi descrivono perfettamente tutto ciò che è possibile ottenere a scuola. Alcuni di essi entrano a far parte delle competenze, altri rimangono nella zona di sviluppo.

4. Gli obiettivi come costituenti delle competenze

Da vent'anni il programma di matematica comprende un elenco di obiettivi per classe, che fanno ancora parte del nuovo piano formativo. L'elenco è una sorta di carta di tutto ciò che ragionevolmente un allievo potrebbe apprendere nei quattro anni di scuola media. È ancora espresso secondo la terminologia della «Tavola tassonomica per la matematica», che da anni ci fornisce un linguaggio comodo e preciso. I singoli obiettivi sono stati ritoccati, tenendo conto dei risultati della consultazione dei docenti. Si è pure aggiunta una nuova componente: mediante un accorgimento grafico, essi sono stati coniugati secondo l'ormai classico criterio (adottato anche dalla mappa formativa) sapere/saper fare/saper essere. I «saperi» sono scritti in carattere normale, i «*saper fare*» in corsivo e i «**saper essere**» in grassetto. «Saper fare» e «saper essere» possono essere compresenti in modo significativo in un obiettivo: ciò è reso graficamente mediante la sovrapposizione degli stili italico e grassetto.

Per comodità del lettore si è pure mantenuta l'abituale suddivisione in capitoli tematici, con l'inserimento di un nuovo capitolo comune a tutte le classi, intitolato «Formazione del pensiero», che, nelle intenzioni, dovrebbe dare alcune indicazioni precise sul delicato quanto importante aspetto dell'educazione al *problem solving* e al *problem posing*.

Per dare un'idea più precisa, ecco di seguito due stralci dell'elenco degli obiettivi.

Geometria (Classe terza, corso attitudinale)

Ga301) *Scomporre figure piane in più figure conosciute per calcolare aree e perimetri sfruttando l'additività di queste grandezze* (esempio: area e perimetro di un segmento circolare).

Ga302) Descrivere le caratteristiche strutturali di una piramide o di un prisma (vertici, spigoli, facce, base, vertice della piramide, altezza, sviluppo).

Ga303) Riconoscere la relazione esistente tra prismi e piramidi aventi ugual base e uguale altezza (intuizione sperimentale).

Ga304) *Calcolare* la lunghezza di spigoli, l'area di facce, il volume di prismi e piramidi.

Ga305) Riprodurre l'enunciato del teorema di Pitagora e *applicarlo* per trovare il terzo lato di un triangolo rettangolo.

Ga306) ***Indurre dalla sperimentazione*** (fatta anche mediante uso di un programma di geometria dinamica) ***determinate congetture su proprietà di figure piane e produrre una giustificazione razionale***.

Ga307) *Dedurre determinate proprietà di figure piane* (dalla definizione, dall'esistenza di assi o centri di simmetria, dalle caratteristiche degli angoli ...); *applicarle per trovare altre proprietà*.

Ga308) ***Applicare le conoscenze di geometria alla risoluzione di problemi, so-***

prattutto nuovi.

Formazione del pensiero (comuni a ogni classe)

FP001) *Analizzare una situazione matematica, o un problema, dati in diversi codici* (linguistico, grafico, schematico, concreto-manipolatorio, simbolico, ...).

FP002) *Sintetizzare una situazione matematica allo scopo di trovare risposte a determinate domande relative ad essa, o a un problema.*

FP003) ***Di fronte a un problema sconosciuto, tentare soluzioni.***

FP004) ***Di fronte a una nuova situazione, organizzare i suoi elementi, individuare i problemi che la concernono e progettare vie risolutive.***

FP005) **Effettuare considerazioni metamatematiche.**

FP006) ***Operare scelte di tipo strategico.***

FP007) *Operare una sequenza di deduzioni.*

FP008) *Operare per induzione.*

FP009) ***Giustificare congetture o soluzioni trovate all'interno di una situazione o di un problema.***

FP010) ***Intuire un nuovo procedimento o concetto o principio.***

FP011) ***Estrapolare risultati, procedimenti, concetti, principi.***

FP012) ***Inventare per analogia problemi, soluzioni di problemi, procedimenti, concetti, principi.***

5. Esempi di competenze per classe

Nel nuovo piano formativo, per ogni classe, sono state delineate tre competenze. Gli insegnanti più sperimentati vi riconosceranno gli aspetti più centrali del programma di matematica, che, in sostanza, non è cambiato. Si sono solo confermati i tagli recentemente operati, l'introduzione dell'educazione al pensiero probabilistico e statistico e l'ufficializzazione del laboratorio matematico.

L'elenco delle competenze per classe potrà essere modificato lungo il cammino, a seconda delle reazioni degli insegnanti e dei cambiamenti indotti dalla società in generale.

Ogni competenza (ve ne sono tre per classe) è espressa mediante:

— **enunciazione** (in termini generali; per i particolari, vedere l'elenco degli obiettivi per classe)
— **esempi** (danno un'idea più precisa)
— **criteri di valutazione** (suggeriscono i criteri di valutazione del raggiungimento dell'intera competenza)

A titolo di esempio, faccio seguire alcune competenze, con l'avvertenza che sono ancora in una stesura provvisoria e che il più presto possibile verranno consegnate in forma completa a tutti i docenti.

I/1 Calcolo numerico e problemi aritmetici[1]

Enunciazione

Data una situazione (anche extra-matematica) che concerne problemi sulle quattro operazioni, scegliere le operazioni che permettono di rispondere a determinate domande, organizzare il calcolo delle soluzioni, approssimare ogni termine numerico a un numero intero opportuno, eseguire mentalmente il calcolo della stima del risultato, eseguire il calcolo esatto mediante la calcolatrice.

Esempi

1. Devo effettuare i seguenti pagamenti, in Fr:
   31,50; 393,60; 108,30; 18,10.
   Stima mentalmente la somma totale da pagare.
2. Si è acquistata una certa quantità di vino pregiato, fatturato 51,50 Fr al litro. La fattura ammonta a 6498 Fr. Stima mentalmente quanti litri di vino si sono acquistati.
3. Ho comperato 7 casse di acqua minerale, ogni cassa contiene 12 bottiglie, ogni bottiglia costa 55 centesimi. Inoltre per ogni bottiglia ho dovuto pagare 50 centesimi di deposito e per ogni cassa 5,50 Fr di deposito.
   i) Quanto ho speso in tutto?
   ii) Ogni bottiglia contiene 0,995 litri di acqua. Quanti litri di acqua minerale ho comperato?

Criteri di valutazione

1. – sceglie le buone approssimazioni
   – applica correttamente e opportunamente le proprietà del calcolo
   – esegue correttamente il calcolo mentale
   31,50 + 393,60 + 108,30 + 18,10 ⊕33 + 390 + 110 + 17 =
   (33 + 17) + (390 + 110) = 50 + 500 = 550
2. – capisce il problema di contenenza, scrive la divisione corretta, approssima e calcola mentalmente
   6498 : 51,5 ⊕6500 : 50 = 650 : 5 = 130
   (risultato calcolatrice: 126,1747…)
3. – scrive l'espressione che dà la spesa totale e trova il risultato con la calcolatrice (84,70 Fr)
   – scrive l'espressione che dà la quantità comperata ed esegue il calcolo con la calcolatrice (83,58 litri)

II/2 Operatore frazionario

Enunciazione

In una situazione concernente le frazioni come operatori su grandezze, saper rispondere a domande che implicano:

1. I/1 significa: Classe prima, Competenza numero 1.

— l'equivalenza tra frazioni (semplificazione e amplificazione)
— addizione e sottrazione di frazioni e il complemento di una frazione propria rispetto all'unità
— il calcolo di uno dei tre elementi, noti gli altri due: parte di una grandezza, grandezza intera, frazione.

Esempi

1. Durante una partita di basket, il numero 10 ha centrato il canestro 13 volte su 24 tentativi, mentre il numero 20 ha fatto centro 10 volte su 18 tentativi. Chi è stato il più preciso dei due?
2. Una tanica è piena per i tre quinti della sua capacità e mancano 16 litri per riempirla. Domande:
   i) Qual è la capacità della tanica?
   ii) Quanti litri ci sono nella tanica?
3. Nella costruzione di una strada si è proceduto nel modo seguente:
   – il primo anno se ne è costruito un terzo
   – il secondo anno se ne sono costruiti i due settimi
   – il terzo anno se ne sono costruiti i cinque ventunesimi.
   Domande:
   Quale frazione di strada rimane da costruire il quarto anno, se si vuole completarla?
   Sapendo che il tratto costruito nei primi tre anni è lungo 126 km, calcola la lunghezza dell'intera strada.

Criteri di valutazione

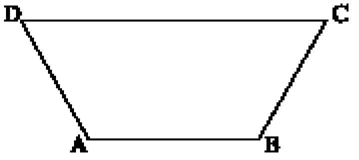
1. – capisce l'enunciato del problema
   – decide di confrontare le frazioni 13/24 e 10/18
   – sa trovare due frazioni ad esse equivalenti, con lo stesso denominatore
   – risponde correttamente indicando il giocatore col numero 20.
2. – capisce l'enunciato del problema
   – sa calcolare la capacità della tanica (40 litri)
   – sa calcolare i litri che la tanica contiene al momento (24)
3. – capisce l'enunciato del problema
   – sa trovare la somma di più frazioni
   – sa trovare il complemento all'unità
   – sa calcolare una grandezza della quale si conosce una sua parte e la frazione che rappresenta.

IIIb/2 Applicazione del teorema di Pitagora a figure piane

Enunciazione

In una situazione geometrica piana che comprende figure composte, riconoscere triangoli rettangoli, applicare il teorema di Pitagora, usare la calcolatrice (compreso il comando radice), scegliere le cifre significative del risultato e approssimare convenientemente.

Esempi

1. Calcola la misura della diagonale del rettangolo di lati 125 cm e 85 cm (approssima al mm).
2. 

ABCD è un trapezio isoscele.
Si conoscono le seguenti misure in centimetri:
|AB|=5 ; |AD|=5,4 ; |AC|=7,2. Inoltre l'angolo CAD è retto.
Calcola l'area del trapezio

Criteri di valutazione

1. esegue uno schizzo della situazione
   – intravede il triangolo rettangolo di cateti 125 cm e 85 cm
   – applica il teorema di Pitagora e trova il quadrato della diagonale
   – estrae la radice quadrata con la calcolatrice (151,1621…)
   – opera l'approssimazione corretta (151,2 cm)

2. – inserisce le misure date e completa la figura
   – identifica le misure necessarie per calcolare le aree: quelle note e quelle sconosciute
   – applica il teorema di Pitagora al triangolo CAD e trova DC (9 cm)
   – intravede il triangolo di ipotenusa 5,4 e cateto 2 e l'altezza del trapezio
   – applica il teorema di Pitagora e ottiene l'altezza (5,01597…)
   – mantiene il valore nella calcolatrice e calcola l'area (35,11182…)
   – risponde con approssimazione e unità di misura (35,11 cm^2)

IVa/2 Funzioni e grafici

Enunciazione

In una situazione-problema (anche extra-matematica), saper caratterizzare le funzioni che possono essere usate per rispondere a determinati interrogativi, riconoscere la terminologia e la simbologia relativa, trovare la loro forma algebrica, rappresentarle graficamente, leggere determinati valori approssimati sul grafico, controllare, se possibile, col calcolo.

Esempi

1. Data la funzione reale $f: x \longrightarrow f(x) = 0{,}4 \cdot x^2 + 2$
   i) Calcola l'immagine di x=1 e f(–4)
   ii) Trova l'argomento a tale che f(a)=6
   iii) Se si restringe l'insieme di definizione all'intervallo [–2;4], qual è il corrispondente insieme delle immagini? (Può essere utile rappresentare la funzione graficamente)

2. Per effettuare il trasloco, si prendono in considerazione due possibilità: utilizzare un veicolo a benzina oppure uno diesel. Ecco le condizioni fatte dalla ditta di noleggio:
   – veicolo a benzina, costo 82 Fr più 0,13 Fr al km (per carburante, ecc.)
   – veicolo diesel, costo 100 Fr più 0,08 Fr al km (per carburante, ecc.).
   Domande:
   i) trova le due funzioni che fanno corrispondere ad ogni chilometraggio il costo dell'uso di ciascun veicolo e rappresentale su uno stesso grafico cartesiano
   ii) supponendo che il trasloco comporti un chilometraggio totale di 400 km, è possibile dal tuo grafico capire quale dei due veicoli è più conveniente?
   iii) trova a partire da quale chilometraggio comincia ad essere conveniente il veicolo diesel.

3. Rappresenta graficamente la funzione $c(x)/x$ dell'esempio 1 di IVa/1[2] e descrivi come varia il prezzo unitario di produzione in relazione al numero di motori prodotti. È possibile far diminuire il prezzo unitario di produzione al di sotto dei 250 Fr? Come potresti verificare sul grafico il risultato ottenuto nella domanda ii)[3] di quel problema?

Criteri di valutazione

1. – interpreta correttamente la scrittura simbolica della funzione data
   – sa calcolare le immagini richieste
   – sa interpretare la scrittura f(a)=6 e calcolare a
   – conosce il significato di insieme di definizione e di insieme delle immagini
   – con l'aiuto anche della rappresentazione grafica trova l'insieme delle immagini [2 ; 8,4]
2. – rappresenta le due funzioni su uno stesso grafico
   – deduce dal grafico che per 400 km conviene il veicolo a benzina
   – scrive l'equazione che permette di stabilire il valore critico (360 km)
   – risolve l'equazione e risponde correttamente alla domanda iii).
3. – sa tabulare la funzione e rappresentarla graficamente (eventualmente anche aiutandosi con un foglio elettronico)
   – sa dedurre dal grafico l'andamento di questa funzione e metterlo in relazione alla situazione data
   – capisce che il prezzo unitario di produzione non può scendere al di sotto dei 250 Fr e lo giustifica
   – sa verificare sul grafico la risposta alla domanda IVa/1/ii) leggendo l'argomento corrispondente all'immagine 300.

---

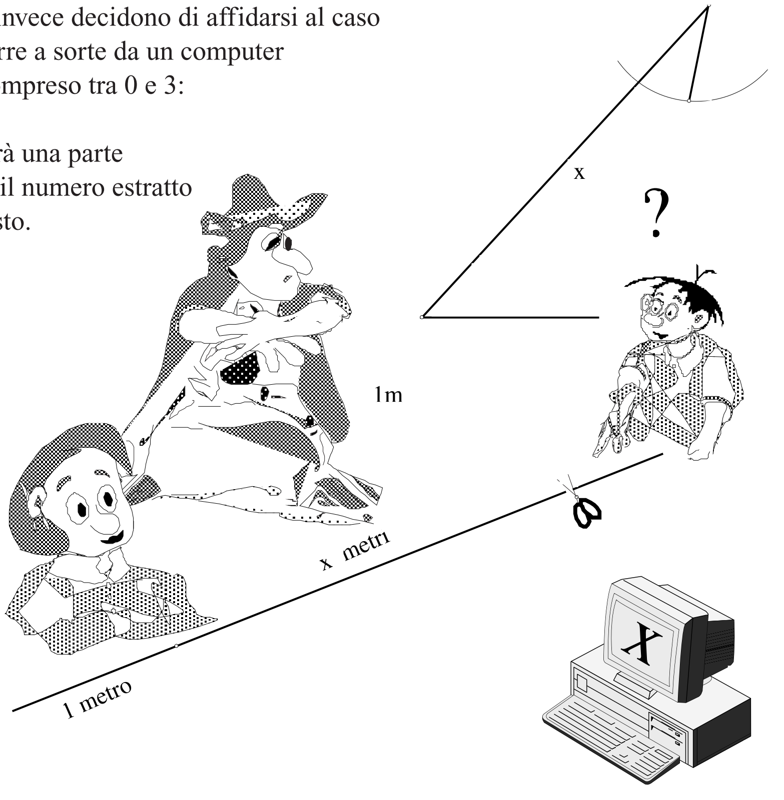
2. Esempio 1. Una fabbrica produce elettromotori. Il costo di produzione è dato dalla formula: $c(x) = c_u \cdot x + c_f$ nella quale x è il numero dei motori prodotti, c_u il costo unitario tecnico (in Fr), c_f è il costo fisso (in Fr). Nel nostro caso, si ha: $c_u = 250$ $c_f = 15000$.
3. Domanda IVa/1/ii) Quanti motori occorre produrre per avere un costo unitario di produzione di 300 Fr?

Quiz numero 27

Moore, Archie e Joe hanno deciso di dividersi un segmento lungo 4 m in modo «triangolare», cioè in tre parti tali che, se unite opportunamente, formino il contorno di un triangolo.

Moore si accontenta di una parte lunga 1 m.
Archie e Joe invece decidono di affidarsi al caso facendo estrarre a sorte da un computer un numero compreso tra 0 e 3:

Joe si prenderà una parte lunga quanto il numero estratto e Archie il resto.



Qual è la probabilità che riescano nell'intento?

In palio per i risolutori, c'è un bel libro.

Soluzione del Quiz numero 26

L'idea base è che i numeri si leggono a pacchetti di 3 cifre seguiti dall'indicazione dell'ordine di grandezza. Quest'ultimo è dato da un elemento dell'insieme ordinato **O**={biliardo, bilione, mille, miliardo, milione]. Dunque si tratta di ordinare i primi 999 numeri-parola, cioè l'insieme **M**={uno, due, tre, ... , novecentonovantanove}. Ci sono molti modi di procedere. Il primo elemento è cento. Gli elementi di M sono del tipo xy, con x elemento di **C**={" ", cento , duecento, trecento, quattrocento, ..., novecento} (dove " " indica la "parola vuota" associata ad uno 0 non preceduto da altre cifre) e y elemento dell'insieme dei primi 99 numeri-parola **N**={uno, due, tre, …, novantotto, novantanove}. Il lavoro consiste nell'ordinare **C** e **N**.
Ordinare **C** è facile: **C**={" ", cinque , due, nove, otto, quattro, sei, sette, tre}. Per N si può ricorrere al foglio elettronico: **N**={cinquanta, cinquantacinque, cinquantadue, ... , ventiquattro, ventisei, ventisette, ventitre, ventotto, ventuno}. Ordinando **M** si ottiene **M**={cento, centocinquanta, centocinquantacinque, centocinquantadue, …, trecentoventitre, trecentoventotto, trecentoventuno,venti, …, ventitre, ventotto, ventuno}.

Così si ottengono facilmente i primi 8 numeri-parola della lista ordinata:

1	100	cento
2	100'000'000'000'000'000	centobiliardi
3	100'000'000'000'000'100	centobiliardicento
4	100'100'000'000'000'000	centobiliardicentobilioni
5	100'100'000'000'000'100	centobiliardicentobilionicento
6	100'100'000'000'000'150	centobiliardicentobilionicentocinquanta
7	100'100'000'000'000'155	centobiliardicentobilionicentocinquantacinque
8	100'100'000'000'155'000	centobiliardicentobilionicentocinquantacinquemila

Seguono 999 numeri-parola formati dalla radice centobiliardicentobilionicentocinquantacinquemila seguita da un elemento di **M**:

9	100'100'000'000'155'100	centobiliardicentobilionicentocinquantacinquemilacento
10	100'100'000'000'155'150	centobiliardicentobilionicentocinquantacinquemilacentocinquanta
11	100'100'000'000'155'155	centobiliardicentobilionicentocinquantacinquemilacentocinquantacinque
	…	
1007	100'100'000'000'155'021	centobiliardicentobilionicentocinquantacinquemilaventuno

Il numero-parola successivo è:

1008	100'100'000'000'000'152	centobiliardicentobilionicentocinquantadue

Il successivo è:

1009	100'100'000'000'152'000	centobiliardicentobilionicentocinquantaduemila

Seguono 999 numeri-parola formati dalla radice centobiliardicentobilionicentocinquantaduemila seguita da un elemento di **M**:

1010	100'100'000'000'152'100	centobiliardicentobilionicentocinquantaduemilacento
	…	
1008	100'100'000'000'152'021	centobiliardicentobilionicentocinquantaduemilaventuno

Ci fermiamo qui e rispondiamo a Moore che chiedeva il 10°, il 25° e infine il 2002° elemento:

10	100'100'000'000'155'150	centobiliardicentobilionicentocinquantacinquemilacentocinquanta
25	100'100'000'000'155'102	centobiliardicentobilionicentocinquantacinquemilacentodue
2002	100'100'000'000'152'029	centobiliardicentobilionicentocinquantaduemilaventinove

1. Un'applicazione pratica delle potenze: il cartoncino piegato[1]

Azzurra Marchio

Preconoscenze degli allievi

Questa lezione si colloca in prima media al termine dell'unità didattica sulle potenze. L'obiettivo per il docente è di verificare fino a che punto il concetto di potenza è chiaro. L'unica preconoscenza è il significato di potenza in **N** e la corrispondente scrittura.

Obiettivi (per gli allievi)

Trovare un modo per determinare una lunghezza sconosciuta. Saper lavorare con i diversi compagni. Applicare il concetto di potenza in una situazione nuova. Riuscire a generalizzare la soluzione trovata. Calcolare con la calcolatrice potenze elevate e capire – meglio sarebbe toccare con mano – la crescita esponenziale.

Svolgimento della lezione

Attività del docente	**Attività degli allievi**
Introduce il «gioco».	Ognuno scrive la propria previsione
Chiede una previsione.	su un foglietto colorato.
Dà le consegne per il lavoro a gruppi.	Formano i gruppi sulla base dei fogli
	colorati predisposti dall'insegnante.
Gira tra i banchi, osserva, aiuta	Risolvono il gioco.
chi è in difficoltà, pone domande.	Spiegano i risultati ottenuti.
Stimola la discussione.	Calcolano l'altezza della loro pila
Pone domande per approfondire	(e confrontano con la loro previsione).
la tematica.	A turno escono davanti alla classe
Dirige la messa in comune,	e spiegano come hanno proceduto
pone domande, avanza obiezioni	

1. Anche questa volta la bricolla presenta due unità didattiche svolte, nell'ambito dell'abilitazione all'insegnamento della matematica, da due giovani candidati. Oltre all'indubbio interesse didattico dei due lavori, questa nuova apertura della bricolla ai giovani vuole essere da stimolo a tutti gli insegnanti.

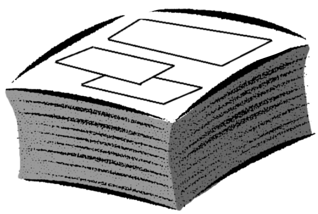
Osservazioni

Per il raggiungimento degli obiettivi è importante la discussione che si instaurerà alla fine del lavoro di gruppo. Per fare questo ritengo siano necessarie due ore lezione.

Consegna alla classe

Una pila di cartoncini alta come la tua aula!

Hai a disposizione un cartoncino alto 1 mm. Immagina di tagliarlo a metà e di sovrapporre i pezzi ottenuti. A questo punto tagli ancora a metà tutti i pezzi e li sovrapponi una seconda volta.



Quante volte devi rifare l'operazione (tagliare a metà e sovrapporre) per ottenere una pila alta come la tua aula?

Per rispondere aiutati completando la seguente tabella:

Numero operazioni effettuate	Numero cartoncini ottenuti	Altezza della pila (mm)

Rilevazioni durante il lavoro per gruppi

Gli allievi all'inizio si sono dati da fare per ottenere una stima plausibile dell'altezza dell'aula. Chi ha usato la propria statura, chi la riga della lavagna, chi altri strumenti di fortuna. I valori ottenuti sono tutti attorno ai 2,40 m.

Molti allievi si sono attardati eccessivamente nel lavoro di ritaglio e di sovrapposizione: si sono però accorti che continuare diventava impresa troppo ardua. Anche su sollecitazione dell'insegnante, dopo 10-15 minuti di manipolazione, tutti sono passati a riempire la tabella. Alcuni allievi lo hanno fatto subito e sono giunti prestissimo a risultati validi.

Ecco un esempio di tabella corretta:

Numero operazioni effettuate	Numero cartoncini ottenuti	Altezza della pila (in mm)	Area di ogni rettangolo ottenuto
1	2	$2=2^1$	A/2
2	4	$4=2^2$	A/4
3	8	$8=2^3$	
4	16	$16=2^4$	
5	32	$32=2^5$	
6	64	$64=2^6$	
7	128	$128=2^7$	
8	256	$256=2^8$	
9	512	$512=2^9$	
10	1024	$1024=2^{10}$	
11	2048	$2048=2^{11}$	
12	4096	$4096=2^{12}$	A/4096
…	…	…	
n	2^n	2^n	

Spunti per la discussione

— La previsione «impossibile» ha senso? Che cos'è impossibile nell'esercizio?
— Come avete fatto a trovare l'altezza dell'aula?
— Far calcolare agli allievi l'altezza della loro pila (risultante dalla loro previsione) per far capire che con i numeri grandi occorre trovare un trucco comodo.
— Far calcolare con la calcolatrice 2^{100} e rendere attenti gli allievi sulla scrittura dei numeri grandi o piccoli. 2^{350} la calcolatrice stessa non lo calcola.
— Chiedere di calcolare l'area di un rettangolino di cartone ottenuto dopo 12 operazioni di piegatura e taglio.

Risultati della discussione finale

Il punto cruciale è «credere» che siano necessarie soltanto 12 operazioni per raggiungere e superare l'altezza dell'aula. Le previsioni degli allievi erano tutte sopra il 100. Alcuni allievi hanno fatto una previsione attorno alle 2000-3000 volte, dividendo l'altezza dell'aula per lo spessore del cartoncino. Nella discussione finale, dopo aver compreso quante volte è necessario piegare il cartoncino, ho chiesto agli allievi quanto sarebbero alte le pile di cartoncini delle loro previsioni. Questo passo ha dato spazio anche alla generalizzazione dell'altezza del cartoncino dopo n piegature. È stato il momento culminante della lezione: forse una delle prime volte in cui l'allievo ottiene risultati matematici che non sono più confortati dall'esperienza sensoriale. Forse la prima volta che l'allievo si rende conto della... potenza della matematica.

2. La ripartizione dei seggi al Consiglio Nazionale

Samuele Sartori

Premessa

Questa lezione è stata ideata per una classe quarta del corso base, sullo spunto dell'articolo di giornale, che segue. È quindi un chiaro esempio di insegnamento basato sulla realtà. Attenzione: qualcuno potrà obiettare che per quegli allievi le elezioni politiche sono tutt'altro che fatti reali: faccio osservare che la scuola ha anche il compito di far conoscere agli allievi realtà diverse da quelle del loro piccolo mondo. Questa è anche una lezione di civica.

Consegna alla classe

Leggi questo articolo apparso sul CdT del 23.1.2002 a firma Rocco Bianchi. Fai i tuoi calcoli e stabilisci se, in base ai dati provvisori forniti dalla tabella, il Ticino otterrà o meno il nono seggio al consiglio nazionale.

Ad alto rischio il nono seggio per il Ticino

«In Ticino al nuovo censimento federale si guarda con curiosità, e per certi versi con malcelata attesa, anche per un motivo eminentemente politico. L'articolo 16 della legge federale sui diritti politici recita infatti che determinante per la ripartizione dei 200 seggi del Consiglio nazionale tra i cantoni è l'ultimo censimento in vigore. Dato che, come in effetti è risultato, da questo punto di vista il nostro cantone ha fatto un balzo in avanti non indifferente (+6,9%), ci si poteva ragionevolmente aspettare che il Ticino guadagnasse un seggio, passando dagli attuali 8 a 9, ciò che avrebbe semplificato di molto le prossime elezioni, rendendole di fatto quasi inutili, essendo praticamente certa, stante gli attuali equilibri politici, l'elezione di un terzo deputato liberale-radicale.

Quello che forse non ci si aspettava è che anche altri cantoni hanno aumentato la loro popolazione, ciò che ha reso più problematica l'agognata conquista.

I dati sono provvisori, dunque ancora suscettibili di variazioni percentuali, ma a questo punto una cosa appare certa: il Ticino non conquisterà un nono deputato "intero", ma dovrà affidarsi alla lotteria dei resti, entrando quindi in competizione con altri pretendenti. Ma spieghiamoci meglio. A stabilire il metodo di ripartizione dei seggi è l'articolo 17 della già citata legge sui diritti politici. (...)».

Ed ecco direttamente dal sito dell'amministrazione federale[1], l'articolo 17:

Art. 17 Metodo di ripartizione

I 200 seggi del Consiglio nazionale sono ripartiti tra i Cantoni e i Semicantoni nel modo seguente:

a. **Ripartizione preliminare**
   1. il totale della popolazione residente della Svizzera è diviso per 200. Il quoziente arrotondato all'intero immediatamente superiore è quello determinante per la ripartizione preliminare. Ogni Cantone la cui popolazione sia inferiore a questo quoziente ottiene un seggio ed è escluso dalla ripartizione successiva.
   2. Il totale della popolazione residente dei rimanenti Cantoni è diviso per il numero dei seggi restanti. Il quoziente arrotondato all'intero immediatamente superiore è quello determinante per la seconda ripartizione.
      Ogni Cantone la cui popolazione sia inferiore a questo quoziente ottiene un seggio ed è escluso dalla ripartizione successiva.
   3. L'operazione viene ripetuta fin quando nessuno dei rimanenti Cantoni rientra al di sotto dell'ultimo quoziente di ripartizione.

b. **Ripartizione principale**
   Ogni rimanente Cantone ottiene tanti seggi quante volte l'ammontare della sua popolazione contiene l'ultimo quoziente.

c. **Ripartizione completiva**
   I seggi rimanenti sono ripartiti tra i Cantoni che ottengono i resti maggiori. Se più Cantoni ottengono resti uguali, sono dapprima esclusi quelli che hanno ottenuto i resti minori dalla divisione della loro popolazione per il primo quoziente determinante. Se vi è ancora parità si procede a sorteggio.

1. Per i navigatori: www.admin.ch.

Ecco una possibile soluzione realizzata con un foglio elettronico:

Cantoni	**2000 (provv.)**	**prima rip.**	**calcolo resto**	**seconda rip.**	**rip. princ.**	**resti**	**rip. per resto**	**Tot. per cantone**
Zurigo	1252800	0	1252800	0	34	9624		**34**
Berna	956800	0	956800	0	26	6136		**26**
Vaud	639200	0	639200	0	17	17612	1	**18**
Argovia	549600	0	549600	0	15	1140		**15**
San Gallo	453200	0	453200	0	12	14432		**12**
Ginevra	406700	0	406700	0	11	4496		**11**
Lucerna	351500	0	351500	0	9	22424	1	**10**
Ticino	301600	0	301600	0	8	9088		**8**
Vallese	270800	0	270800	0	7	14852		**7**
Basilea camp.	259700	0	259700	0	7	3752		**7**
Soletta	244900	0	244900	0	6	25516	1	**7**
Friburgo	240700	0	240700	0	6	21316	1	**7**
Turgovia	229500	0	229500	0	6	10116		**6**
Basilea città	189000	0	189000	0	5	6180		**5**
Grigioni	187800	0	187800	0	5	4980		**5**
Neuchâtel	168000	0	168000	0	4	21744	1	**5**
Svitto	129300	0	129300	0	3	19608	1	**4**
Zugo	100250	0	100250	0	2	27122	1	**3**
Sciaffusa	74200	0	74200	0	2	1072		**2**
Giura	68150	0	68150	0	1	31586	1	**2**
Appenzello est.	53650	0	53650	0	1	17086		**1**
Glarona	38250	0	38250	0	1	1686		**1**
Nidvaldo	37400	0	37400	0	1	836		**1**
Uri	34700	1	0	0	0			**1**
Obvaldo	32480	1	0	0	0			**1**
Appenzello int.	14700	1	0	0	0			**1**
Svizzera	**7284880**	**3**	7203000	0	**189**		**8**	**200**
	36425	197	36564	197	8			
	primo quoziente	seggi da assegnare	secondo quoziente	seggi da assegnare	seggi da assegnare			

Considerazioni conclusive

Un prerequisito importante per questo lavoro è il concetto di divisione con resto. È consigliabile perciò ripeterlo bene prima di iniziare. L'esercizio esige anche la comprensione di un testo – in questo caso un articolo di giornale – di una certa complessità e parecchio ridondante. Gli allievi hanno avuto una decina di minuti per leggere, poi insieme si è discusso sulle informazioni essenziali da ritenere per rispondere alla domanda.

Il lavoro richiede anche una buona capacità di organizzare algoritmi di calcolo che si ripetono. In questo caso gli allievi avevano a disposizione soltanto la calcolatrice. Ho suggerito loro di costruire una tabella, sul tipo di quella appena presentata, ma più rudimentale. Sono state assegnate le prime due colonne e, per facilitare il compito, anche la somma della seconda colonna (numero in grassetto). Il resto è stato fatto dagli allievi.

1. Ellissi e corde: spunti per attività di laboratorio del liceo

Claudio Beretta

Consideriamo un'ellisse e una sua corda PS di lunghezza d.

L'arco PS e la corda corrispondente racchiudono una superficie (vedere figure seguenti).

La situazione suggerisce qualche spunto di riflessione.

a. Ci sono limitazioni alla misura della corda PS? Si possono riscontrare situazioni diverse, tali da suggerire una distinzione di casi?
b. Supponi d<2b; a quale posizione di PS corrisponde l'area minima di S, a quale l'area massima?
c. Osserviamo la figura 2; se muoviamo il segmento mantenendo la misura d, come varia l'area di S?

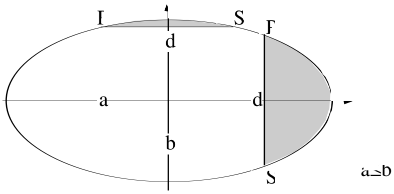


figura 1

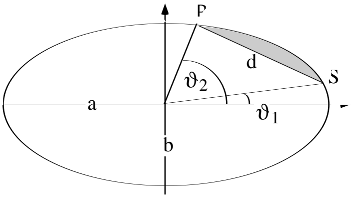


figura 2

Caso d<2b

Condizioni per avere un'area minima: il punto medio di PS deve stare su Oy o su Ox.

È opportuno, prima di gettarci a capofitto, riflettere sul problema ed esaminare la situazione.

La limitazione della misura della corda d, fa sì che il segmento può assumere ogni posizione. Se la misura d fosse 2b, che cosa succederebbe? E se d fosse compresa tra 2b e 2a?

Appare evidente che l'area massima si ha in corrispondenza della massima curvatura dell'arco PS e quella minima alla curvatura minima dello stesso. Un esame rigoroso, esteso anche ad altre funzioni, richiede dunque il concetto di curvatura e, in particolare, il calcolo del raggio di curvatura, che quando è minimo corrisponde alla massima curvatura (vedere figura 3).

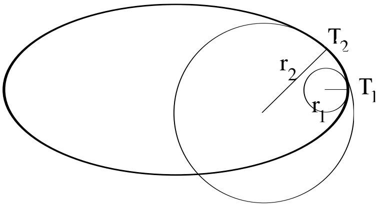


figura 3

Si vede pure che se fissiamo un'estremità della corda, ad esempio S, non abbiamo solo una possibilità per l'altro estremo e le aree corrispondenti sono diverse (vedere figura 4).

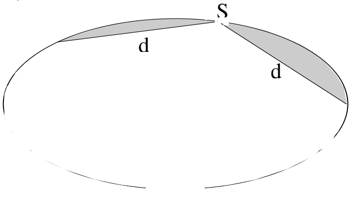


figura 4

Algebricamente se l'ellisse E è centrato nell'origine del sistema di riferimento, ogni circonferenza C centrata su un punto S(a,b) dell'ellisse interseca l'ellisse in un punto le cui coordinate sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \left(\dfrac{d}{2}\right)^2 \end{cases}$$

che ha sempre due soluzioni salvo nel caso particolare d=2a, allora il punto S può essere solo in C o in A e le due soluzioni sono coincidenti. Esse si vedono (figura 6) immaginando un'arco di circonferenza centrata in C, di raggio leggermente inferiore a 2a tendente a 2a.

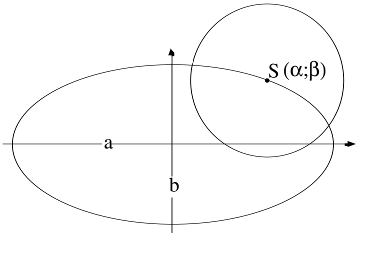


figura 5

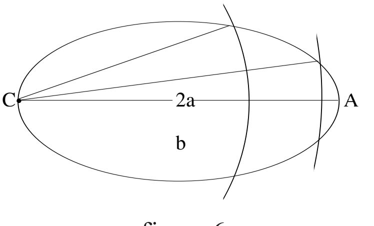


figura 6

Ad esempio, nel caso d=2b (figura 7), esistono tre soluzioni se ci pone in B o in D; se il punto S si sposta, si hanno sempre due soluzioni, mentre nel caso 2b<d<2a (figura 8) la posizione del segmento non può essere qualsiasi: quali archi non possono ospitare estremi?

d= 2b

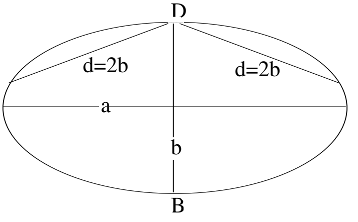


figura 7

2b<d<2a

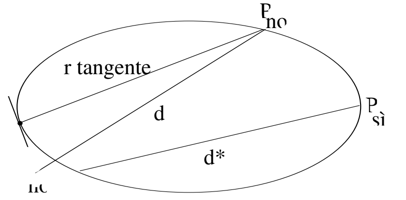


figura 8

Ciascuno di questi casi esige determinati strumenti di calcolo, qualora si volesse affrontare la soluzione analitica che dà concretezza agli aspetti intuitivi.

Strumenti matematici d'approccio

— I sistemi di coordinate nel piano
— L'integrazione in questi sistemi
— Il raggio di curvatura

Questi diversi strumenti saranno, in seguito, messi a confronto in situazioni concrete per mostrare come la scelta dell'uno piuttosto che dell'altro conduca spesso a soluzioni di differente difficoltà.

In questi casi è importante scegliere il percorso ideale, che permetta una soluzione elegante e rapida. La scelta è effettuata intuitivamente, ponendosi idealmente in O e osservando l'oggetto geometrico che si vuole studiare. Occorre tenere conto anche delle situazioni particolari e delle simmetrie che possono favorire importanti semplificazioni del calcolo.

I sistemi di coordinate nel piano

Sistema cartesiano ortonormato

Il punto O(0;0) è l'origine e corrisponde al punto d'osservazione. Gli assi Ox, Oy sono perpendicolari tra loro e portano $\vec{i}$ e $\vec{j}$ i rispettivi vettori unitari (versori), che formano la base.

Un punto P del piano ha coordinate $(x_P\,;y_P)$

Vettorialmente: $\overrightarrow{OP} = x_P\,\vec{i} + y_P\,\vec{j}$

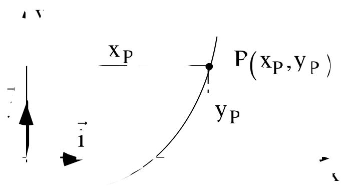


figura 9: caso generale

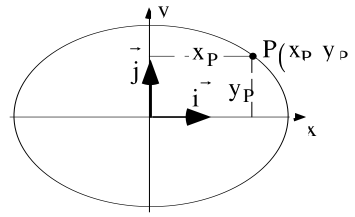


figura 10: ellisse

Sistema di coordinate polari

Presentiamo due contesti: quello delle coniche riferite al fuoco (usato ad esempio in meccanica celeste) e quello concernente altre curve.

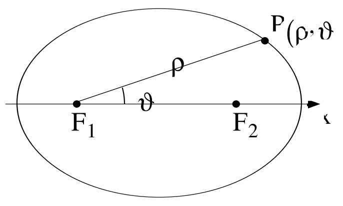


figura 11:
origine fissata in un fuoco

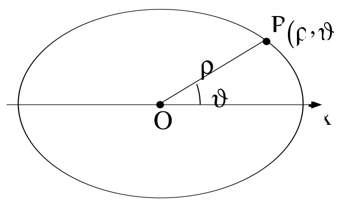


figura 12:
origine fissata nel centro

L'asse Ox, detto **asse polare**, è scelto orizzontale. L'origine è detta **polo**.
In generale si ha:

$\overrightarrow{F_1P}$, $\overrightarrow{OP}$ vettori luogo del punto P.

È chiaro che ogni punto P del piano è univocamente determinato dall'**argomento** r (r>0) e dall'**anomalia** J+2kπ ($0 \le \vartheta \le 2\pi$).

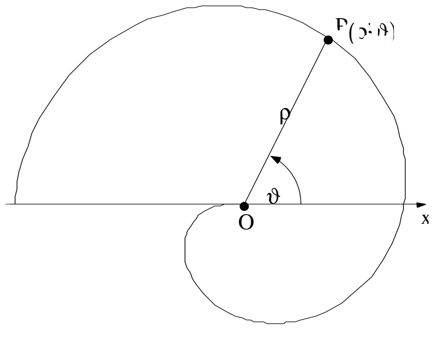


figura 13: curva qualsiasi nel sistema di coordinate polari

Sistema di equazioni parametriche

È un sistema di coordinate cartesiane, nel quale l'**ascissa** x e l'**ordinata** y sono funzioni di una stessa variabile, detta **parametro** e indicata di solito con la lettera t.

Un punto P del piano è dato dalla coppia di equazioni

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

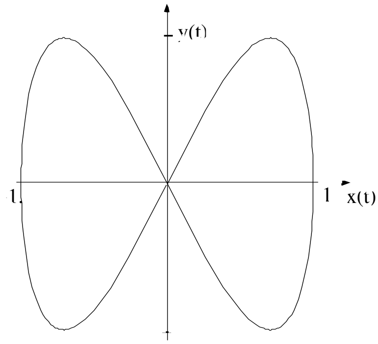


figura 14: curva in forma parametrica

Equazioni della curva rappresentata nella figura 14:

$$\begin{cases} x = \operatorname{sen}(t) \\ y = \operatorname{sen}(2\,t) \end{cases}$$

Passaggio tra i sistemi cartesiano e polare

Sia dato P in un sistema cartesiano ortonormato, per ogni P sia P' la proiezione ortogonale di P su Ox.

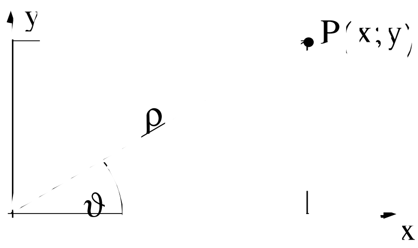


figura 15: relazione tra coordinate cartesiane e polari

Dalla trigonometria elementare si hanno le relazioni:
Sono evidenti le relazioni di passaggio:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\vartheta \\ y = \rho \cdot \operatorname{sen}\vartheta \end{cases} \qquad \tan\vartheta = \frac{y}{x} \Rightarrow \vartheta = \arctan\frac{y}{x}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Integrazione e calcolo di superfici nei sistemi considerati

Sistema cartesiano

Consideriamo funzioni continue e derivabili in ogni punto P nell'intervallo chiuso $[a\,,b]$.

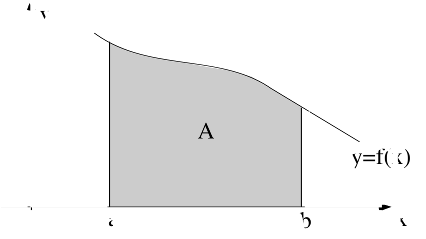


figura 16

Come è noto, l'area A è data dalla formula:

$$A = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \qquad (1)$$

Sistema in coordinate polari

Consideriamo nel piano un polo O e un arco di curva continua sulla quale scegliamo due M, P, con M su Ox.

$\overrightarrow{OM}$ ed $\overrightarrow{OP}$ definiscono l'angolo ϑ in O.

Sia $\overrightarrow{OP}$ sulla semiretta s lato dell'angolo ϑ. (L'estremo P è l'intersezione di s con la curva).

Lo scopo è trovare la misura della superficie OPP_1. Consideriamo l'angolo ϑ in O e un suo incremento $\Delta\vartheta$. Le semirette s, s_1 e la curva delimitano l'area evidenziata OPP_1, in cui P_1 è l'intersezione di s_1 con la curva. Intuitivamente si osserva P dall'origine O.

Si immagina che P', partendo da P descrive l'arco PP_1. MA mano a mano che P' si sposta lungo la curva, il vettore luogo di P' descrive un'area OPP' che varia con P' sin quando P' giunge in P_1.

Le coordinate polari di P_1 sono $(\rho + \Delta\rho\,;\, \vartheta + \Delta\vartheta)$.

Consideriamo due archi di circonferenza di centro O:

PA di raggio r su C dove $A=C \cap s$

BR sulla circonferenza C_1 di raggio $\rho+\Delta\rho$ con $B=C_1 \cap s_1$

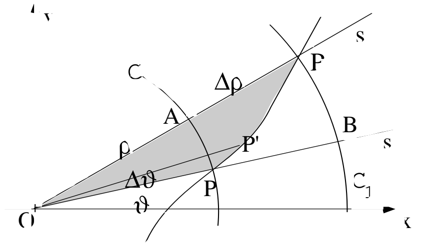


figura 17

Si può scrivere che la misura dell'area evidenziata S è compresa tra quella dei settori circolari OPA e OBP_1. (a 2π rad corrisponde l'area $\pi\,\rho^2$) dunque a 1 rad corrisponde l'area $\frac{1}{2}\rho^2$;

a $\Delta\vartheta$ rad corrisponde l'area [redacted].

La seguente relazione tra le aree è evidente: $OPA<S<OBP_1$
Dunque:

$$\frac{1}{2}\rho^2\ \Delta\vartheta \leq \Delta S \leq \frac{1}{2}(\rho+\Delta\rho)^2\ \Delta\vartheta$$

Dividiamo per $\Delta\vartheta$ diverso da zero:

$$\frac{1}{2}\rho^2 \leq \frac{\Delta S}{\Delta\vartheta} \leq \frac{1}{2}(\rho+\Delta\rho)^2$$

Quando $\Delta\vartheta \to 0$, anche $\Delta\rho \to 0$:

$$\lim_{\Delta\vartheta\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta\vartheta} = S'$$

ossia la derivata di S rispetto a J.

Inoltre da

$$\lim_{\Delta\vartheta\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta\vartheta} = S_\vartheta{}' = \frac{dS}{d\vartheta} = \frac{1}{2}\rho^2 \quad \text{deduciamo} \quad dS = \frac{1}{2}\rho^2 d\vartheta$$

Integrando, otteniamo:

$$S = \frac{1}{2}\left|\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\rho^2\ d\vartheta\right| \qquad (2)$$

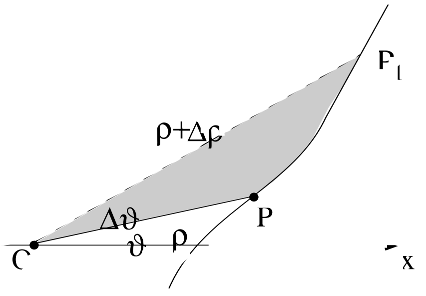


figura 18

Caso del cerchio in coordinate parametriche

In questo caso, si fa ricorso alle coordinate polari: si tiene fisso r (r=r, raggio del cerchio) e si assume l'anomalia J+2kπ come parametro variabile. Le equazioni parametri di un cerchio, di centro O e raggio r, sono:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos t \\ y = r \cdot \text{sen } t \end{cases}$$

Derivando rispetto al parametro t si ottiene:

$$\frac{dx}{dt} = -r \cdot \text{sen } t \text{, da cui } dx = -r \cdot \text{sen } t \cdot dt$$

Tenendo presente la formula (1), notando che $f(x) = y = \rho \cdot \text{sen}\vartheta$ e che, per i limiti d'integrazione, a x_1 corrisponde $r_1 \cos t_1$, a x_2 corrisponde $r_2 \cos t_2$ sostituendo in (1) otteniamo:

$$s = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (r \cdot \text{sen } t)(-r \text{ sen } t \cdot dt)$$

$$s = \frac{1}{2} r^2 \left| \int_{t_1}^{t_2} (-r \text{ sen}^2 t \cdot dt) \right| \qquad (3)$$

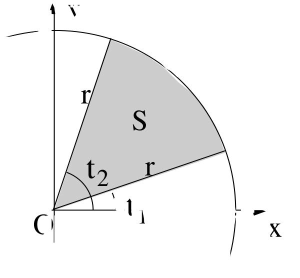


figura 19

Caso dell'ellisse

Ricordiamo che l'ellisse è il luogo dei punti tali che dati due punti fissi F_1 e F_2 (detti fuochi), il punto corrente P è tale che $F_1P + F_2P = costante$.

L'equazione cartesiana dell'ellisse centrata all'origine è:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

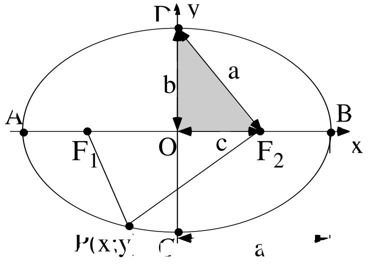


figura 20

in cui a e b sono rispettivamente le misure dei semiassi OB e OD.

Ellisse e coordinate polari

a) il polo è in un fuoco

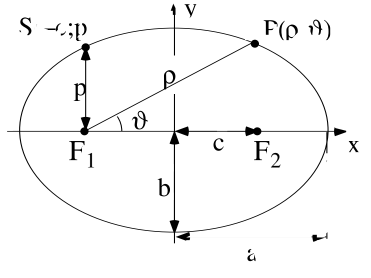


figura 21

Osserviamo dapprima che c è la distanza tra l'origine O e un fuoco; introduciamo il **parametro** p, ossia la misura del segmento $F_1S//Oy$, con S sull'ellisse. Calcoliamo p:

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1,$$

da cui $p^2 = \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) \cdot b^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2} \cdot b^2 = \frac{b^4}{a^2}$, e infine $p = \frac{b^2}{a}$

Chiamiamo inoltre **eccentricità** il rapporto

$$e = \frac{c}{a}$$

L'equazione dell'ellisse in coordinate polari è:

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\vartheta} = \frac{p}{1 - \frac{c}{a}\cos\vartheta} = \frac{b^2}{a - c\cos\vartheta} = \frac{b^2}{a - \sqrt{a^2 + b^2}\cos\vartheta}$$

da cui

$$\rho = \frac{b^2}{a - \sqrt{a^2 + b^2}\cos\vartheta}$$

b) il polo è nel centro

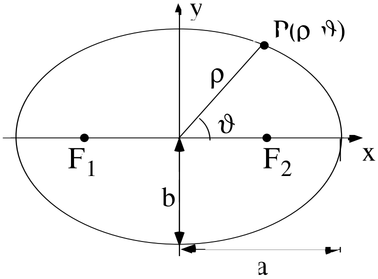
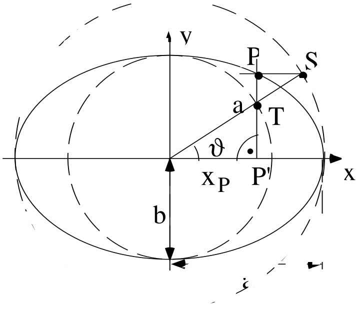


figura 22

Ellisse in equazioni parametriche

Si riaggancia alla nota costruzione dell'ellisse per punti.

Ogni semiretta s di origine O taglia due circonferenze concentriche di raggi a, b (i semiassi dell'ellisse) in S, T. Il punto P dell'ellisse è l'intersezione della parallela ad Ox per S con la parallela ad Oy per T.



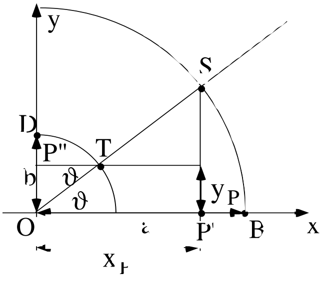


figura 23 figura 24

$|OP'| = x_P = a \cdot \cos\vartheta$ è la proiezione di $\overrightarrow{OP}$ su Ox

$|OP''| = y_P = b \cdot \text{sen}\, \vartheta$ è la proiezione di $\overrightarrow{OP}$ su Oy.

Ponendo J=t, si ricavano le equazioni parametriche dell'ellisse:

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b \cdot \text{sen}\, t \end{cases}$$

Concetto intuitivo di curvatura

Ogni curva continua e derivabile ammette in ogni suo punto P una circonferenza di centro P e raggio CP che gli è tangente; la pendenza della tangente comune è data dalla derivata prima (in un punto preciso, dal numero derivato). Essa permette di dedurre la pendenza del raggio CP, che è quella della normale in P, e di conseguenza il luogo del centro C, la cui distanza da P è il raggio di curvatura.

Nella figura 25 si osserva anche un punto flesso (in cui il centro di curvatura passa da una parte all'altra della curva).

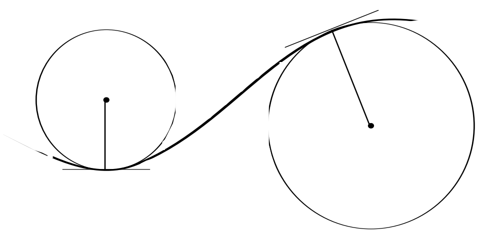


figura 25

Il raggio di curvatura è dato dalle seguenti formule:

– in coordinate cartesiane

$$y = f(x) \Rightarrow R_C = \frac{\left\{1 + [f'(x)]^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{|f''(x)|}$$

– in coordinate polari

$$\rho = f(\vartheta) \Rightarrow R_C = \frac{\left\{[f(\vartheta)]^2 + [f'(\vartheta)]^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left|[f(\vartheta)]^2 + 2 \cdot [f'(\vartheta)]^2 - f(\vartheta) \cdot f''(\vartheta)\right|}$$

– in coordinate parametriche

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \Rightarrow \quad R_C = \frac{\left\{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{|f'(t) \cdot g''(t) - f''(t) \cdot g'(t)|}$$

Nel caso dell'ellisse, la cui equazione è espressa in coordinate cartesiane,

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

sostituendo si deduce il raggio di curvatura in ogni punto

$$R_C = \frac{\left[a^4 - \left(a^2 - b^2\right) x^2\right]^{\frac{3}{2}}}{a^4\, b}$$

In A (a;0): $R_{C_A} = \frac{b^2}{a}$, mentre in B(0;b) $R_{C_B} = \frac{a^2}{b}$,

costruibile ricordandosi del teorema di Euclide

$h^2 = p.q$, $b^2 = a \cdot R_{C_A}$ in A, $a^2 = b \cdot R_{C_B}$ in B.

Costruzione: unisco A con B e traccio le perpendicolari in A e in B ad AB.Ottengo K ed S (vedi figura). OK ha la stessa misura del raggio di curvatura in A e OS di quello in B.

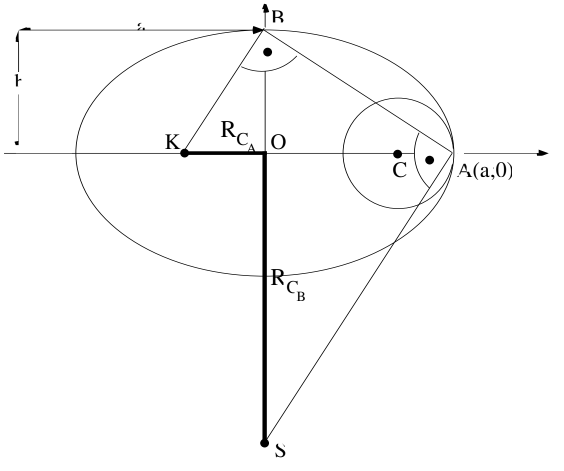


figura 26

Ritorno al problema iniziale

Consideriamo un'ellisse centrata all'origine e una sua corda di misura d=5.

Calcola con approcci diversi l'area tra la corda e l'ellisse:

a_1) Caso generale

a_2) Caso particolare: valori estremi dell'area

a_3) a=5, $b = \dfrac{15}{2\sqrt{6}} \cong 3{,}062$ nella situazione particolare P(5;0), Q(1;3)

Fissata l'area, ad esempio S_1, ci sono delle limitazioni per questo valore?

Abbiamo già osservato le situazioni con posizioni diverse della corda. La superficie delimitata da una corda di misura fissa e l'arco delimitato dagli stessi estremi.

Posizioni particolari: A_1B_1 segmento verticale e A_2B_2 segmento orizzontale che corrispondono alla richiesta a_1).

Il metodo generale, valido per le funzioni continue e derivabili (cioè: trovare la forma generale che esprime la variazione dell'area, calcolare la derivata prima, ricavare, se esistono, il massimo e il minimo) serve per verificare il risultato intuito col ragionamento iniziale sulla curvatura e le simmetrie dell'ellisse.

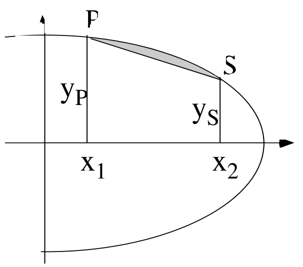


figura 27: caso generale

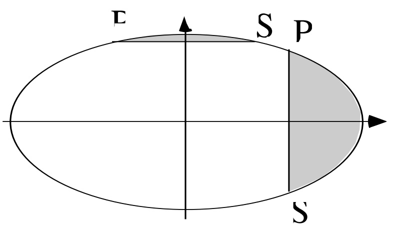


figura 28: area min e max

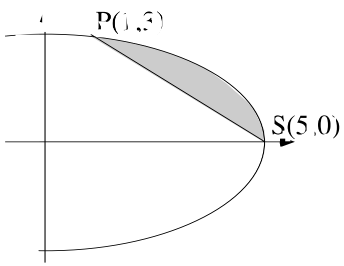


figura 29: caso particolare

Soluzione in un sistema di riferimento cartesiano

L'ellisse data è ricondotta ad una funzione nel primo e secondo quadrante come segue

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

e l'area in generale all'integrale

$$S = \frac{b}{a}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{b}{a}\left|\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)\right|_{x_1}^{x_2}$$

alla quale si deve levare l'area del trapezio $\frac{y_P+y_Q}{2}.\left|x_P-x_Q\right|$, quindi:

$$A = \frac{b}{a}\left|\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\text{arc sen}\frac{x}{a}\right|_{x_1}^{x_2} - \frac{y_P+y_Q}{2}.\left|x_P-x_Q\right|$$

Caso numerico:

$a=5$; $b=\frac{15}{2\sqrt{6}}\cong 3{,}062$ da cui $\frac{b}{a}=\frac{3}{2\sqrt{6}}$

Caso del minimo: $x_P=-\frac{5}{2}$; $x_S=\frac{5}{2}$; $y_P=y_S=\frac{15}{4\sqrt{2}}$

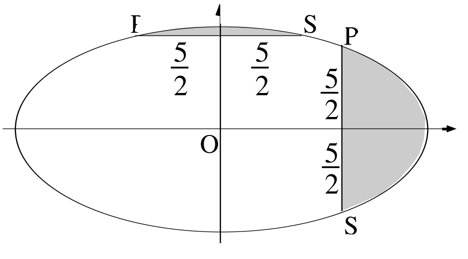


figura 30

$$S = \frac{3}{2\sqrt{6}}\left|\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\text{arc sen}\frac{x}{a}\right|_0^{\frac{5}{2}} = (*)$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{6}}\left|\frac{5}{4}\sqrt{25-x^2}+\frac{25}{2}\text{arc sen}\frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2\sqrt{6}}\left|\frac{5}{4}\sqrt{\frac{75}{4}}+\frac{25}{2}\text{arc sen}\frac{1}{2}\right| =$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{6}}\left|\frac{25}{8}\sqrt{3}+\frac{25}{12}\pi\right| = \frac{75}{8\sqrt{6}}\left|\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{3}\pi\right|$$

Area cercata: $A=\frac{75}{4\sqrt{6}}\left|\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{3}\pi-\sqrt{3}\right| \cong 1{,}3868$

Caso del massimo: $y_P=\frac{5}{2}$; $y_S=-\frac{5}{2}$; $x_P=x_S=\frac{5}{\sqrt{3}}$

sostituendo questi valori in (*) otteniamo:

$$\frac{3}{2\sqrt{6}}\left|\frac{x}{2}\sqrt{25-x^2} + \frac{25}{2}\,\text{arc sen}\,\frac{x}{5}\right|_{\frac{5}{\sqrt{3}}}^{5} =$$

$$\frac{75}{4\sqrt{6}}\left|\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} - \text{arc sen}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right| \cong 3{,}70418$$

che è la misura della metà dell'area cercata, quindi $A \cong 7{,}408$

Caso particolare: a=5, $b = \frac{15}{2\sqrt{6}} \cong 3{,}062$, P(5;0), Q(1;3) e con d=5 (vedere figura 28)

$$S = \frac{3}{2\sqrt{6}}\int_1^5 \sqrt{25-x^2}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{6}}\left|\frac{x}{2}\sqrt{25-x^2} + \frac{25}{2}\,\text{arc sen}\,\frac{x}{5}\right|_1^5 = \frac{3}{2\sqrt{6}}\left|\frac{25\pi}{4} - \left(\sqrt{6} + \frac{25}{2}\,\text{arc sen}\,\frac{1}{5}\right)\right|$$

$$\cong 8{,}9826$$

deduciamo l'area del triangolo OAQ e troviamo A =2,9826

Problema dell'area massima: $0<A<\pi a b$.

Se ammettiamo che ogni punto può essere estremo di una corda allora si aprono i casi dell'inizio di questo articolo, inerenti la misura della corda.

Se fissiamo l'area A allora si dovranno completare i valori in modo che:

$$A = \frac{b}{a}\left|\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\,\text{arc sen}\,\frac{x}{a}\right|_{x_1}^{x_2} - \frac{y_P+y_Q}{2}.\left|x_P - x_Q\right|$$

scegliendo allora l'ellisse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ otteniamo

$$\frac{1}{2}\left|\frac{x}{2}\sqrt{16-x^2} + 8\,\text{arc sen}\,\frac{x}{4}\right|_{x_P}^{x_Q} - \frac{y_P+y_Q}{2}.\left|x_P - x_Q\right|$$

Fissiamo ora un estremo della corda sull'ellisse Q(2; $\sqrt{3}$) e scegliamo l'area A

$$A = \frac{1}{2}\left|\frac{x}{2}\sqrt{16-x^2} + 8\,\text{arc sen}\,\frac{x}{4}\right|_{x_P}^{2} - \frac{y_P+\sqrt{3}}{2}.\left|x_P - 2\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{x_P}{2}\sqrt{16-x_P^2} + 8\,\text{arc sen}\,\frac{x_P}{4} - \sqrt{12} - \frac{4}{3}\pi\right| - \frac{y_P+\sqrt{3}}{2}.\left|x_P - 2\right|$$

Giungiamo a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{{x_P}^2}{16}+\dfrac{{y_P}^2}{4}=1 \\ \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{x_P}{2}\sqrt{16-{x_P}^2}+8\,\mathrm{arc\,sen}\dfrac{x_P}{4}-\sqrt{12}-\dfrac{4}{3}\pi\right|-\dfrac{y_P+\sqrt{3}}{2}.\left|x_P-2\right|-A=0 \end{cases}$$

sostituendo y_P si ottiene, con A desiderato un'equazione ad una sola variabile che, se ha soluzione geometricamente accettabile, darà l'estremo P.

$$\frac{1}{2}\left|\frac{x_P}{2}\sqrt{16-{x_P}^2}+8\,\mathrm{arc\,sen}\frac{x_P}{4}-\sqrt{12}-\frac{4}{3}\pi\right|-\frac{\frac{1}{2}\sqrt{16-{x_P}^2}+\sqrt{3}}{2}.\left|x_P-2\right|-A=0$$

Altri approcci

Premessa: in altri casi va levata l'area del triangolo OPQ:

$$\frac{1}{2}\rho_1.\rho_2\,\mathrm{sen}\left|\,(\vartheta_2-\vartheta_1)\,\right|$$

Osserviamo anche che le coordinate degli estremi del segmento, non solo suggeriscono soluzioni rapide, ma permettono di calcolare la tangente.

Inoltre, per agevolare il calcolo, è utile tenere presente che

$$\vartheta_1=\arctan\frac{y_P}{x_P};\vartheta_2=\arctan\frac{y_Q}{x_Q}\;;\;\rho_1=\sqrt{(x_P)^2+(y_P)^2};\rho_2=\sqrt{(x_Q)^2+(y_Q)^2}$$

In coordinate polari

L'integrale generale corrisponde a

$$S=\frac{1}{2}\left|\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\rho^2\,d\vartheta\right|=\frac{a^2\,b^2}{2}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\frac{1}{b^2\cos^2\vartheta+a^2\mathrm{sen}^2\vartheta}\,d\vartheta=$$

$$=\frac{a^2\,b^2}{2}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\frac{1}{(a\cos\vartheta)^2\left[\dfrac{b^2}{a^2}+\tan^2\vartheta\right]}\,d\vartheta$$

ponendo $\tan\vartheta=t$ dt , si ha: $\dfrac{dt}{d\vartheta}=\dfrac{1}{\cos^2\vartheta}$

e quindi: S

$$=\frac{b^2}{2}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\frac{1}{\dfrac{b^2}{a^2}+\tan^2\vartheta}\,d\vartheta=\frac{b^2}{2}\left|\frac{a}{b}\,\mathrm{arc\ tan}\frac{a\,t}{b}\right|_{t_1}^{t_2}=\frac{ab}{2}\left|\mathrm{arc\ tan}\frac{a\tan\vartheta}{b}\right|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}$$

In generale, l'area tratteggiata risulta da

$$A = \frac{ab}{2}\left|\arc\ \tan\frac{a\tan\vartheta}{b}\right|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} - \frac{1}{2}\rho_1.\rho_2 \,\mathrm{sen}\left|\left(\vartheta_2-\vartheta_1\right)\right|$$

Caso del minimo: dalla metà dell'area dell'ellisse leviamo l'area del triangolo OPQ e il doppio di quella del settore ellittico OAP.

Si ha

$$a.b=\frac{75}{2\sqrt{6}}\ ;\ \frac{a}{b}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\ ;\ P\left(\frac{5}{2};\frac{15}{4\sqrt{2}}\right);$$

deduciamo: $\tan\vartheta = \frac{15}{4\sqrt{2}}.\frac{2}{5}=\frac{3}{2\sqrt{2}}$

e infine:

$$A=\frac{75}{4\sqrt{6}}\pi-\frac{75}{8\sqrt{2}}-2.\frac{5.}{2}\frac{15}{2\sqrt{6}}\left|\arc\ \tan\left(\frac{5}{\frac{15}{2\sqrt{6}}}.\left(\frac{15}{2\sqrt{6}}.\frac{2}{5}\right)\right)\right| =$$

$$=\frac{75}{4\sqrt{6}}\pi-\frac{75}{8\sqrt{2}}-2\frac{75}{4\sqrt{6}}\left|\arc\ \tan\sqrt{3}\right|\cong 1{,}3868$$

Caso del massimo: basta raddoppiare l'area del settore ellittico OAP data da

$$\frac{b^2}{2}\int_0^{\vartheta_2}\left(\frac{1}{\left[\frac{b^2}{a^2}+\left(\tan\vartheta\right)^2\right]}\right)d\vartheta = \frac{ab}{2}\left|\arc\ \tan\frac{a\tan\vartheta}{b}\right|_0^{\vartheta_2}$$

e levare il doppio del triangolo OPQ. Si ha:

$$a.b=\frac{75}{2\sqrt{6}}\ ;\ \frac{a}{b}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\quad P\left(\frac{5}{\sqrt{3}};\frac{5}{2}\right) \text{ e } \tan\vartheta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

e perciò

$$A=\frac{75}{2\sqrt{6}}\left|\arc\ \tan\sqrt{2}\right|-\frac{1}{2}5.\frac{5}{\sqrt{3}}\cong 7{,}4083$$

Caso particolare:

$$A = \frac{ab}{2}\left|\arc\ \tan\frac{a\tan\vartheta}{b}\right|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} - \frac{1}{2}\rho_1.\rho_2 \,\mathrm{sen}\left|\left(\vartheta_2-\vartheta_1\right)\right|$$

$$a=b=\frac{15}{2\sqrt{6}}\cong 3{,}062\ ,\ P(\,5;\,0\,),\ Q(\,1;\,3\,),\ a.b=\frac{75}{2\sqrt{6}}\ ,\ \frac{a}{b}=\frac{2\sqrt{6}}{3},$$

$$\rho_1=5\,;\rho_2=\sqrt{10}$$

$\theta_1 = 0\,;\ \text{sen}\,\theta_2 = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$ da cui $\theta_2 = \text{arcsen}\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$

(inutile essendo 0 l'altra ampiezza)

$$A = \frac{75}{4\sqrt{6}}\left|\text{arc}\ \tan\frac{2\sqrt{6}}{3}\tan\theta_2\right|_0^{\theta_2=\arctan 3} - \frac{1}{2}5.\sqrt{10}\frac{3}{\sqrt{10}}\ | =$$

$$= \frac{75}{4\sqrt{6}}\left|\text{arc}\ \tan 2\sqrt{6} - 0\right| - \frac{15}{2} = \frac{15}{2}\left(\frac{5}{2\sqrt{6}}\text{arc}\ \tan 2\sqrt{6} - 1\right) \cong\ 2{,}9826$$

In coordinate parametriche:

$\begin{cases} x = a\cdot\cos\vartheta \Rightarrow \quad dx = -a\cdot\text{sen}\vartheta \\ y = b\cdot\text{sen}\vartheta \end{cases}$ vanno sostituiti nell'integrale

$$A = \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right|$$

Essendo un cambiamento di variabile, si estende anche ai limiti d'integrazione:

$x_1 = a.\cos\vartheta_1 \quad \Rightarrow \vartheta_1 = \arccos\dfrac{x_1}{a}$

$x_2 = a.\cos\vartheta_2 \quad \Rightarrow \vartheta_2 = \arccos\dfrac{x_2}{a}$

$$S = \ ab\left|\frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{4}\text{sen}\ 2\vartheta\ \right|_{\arccos\frac{x_1}{a}}^{\arccos\frac{x_2}{a}}$$

Caso del minimo:

$P\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{15}{4\sqrt{2}}\right) \qquad a.b = \dfrac{75}{2\sqrt{6}}$

Qui l'area tratteggiata risulta da $A = \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right|$

con $x_1 = 0 \Rightarrow \arccos\dfrac{0}{a} = \dfrac{\pi}{2}$; $x_2 = \dfrac{5}{2} \Rightarrow \arccos\dfrac{5}{2a}$

L'area diventa $S = \ ab\left|\ \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\text{sen}^2\vartheta.\,d\vartheta\ \right|$ ossia

$$S = \frac{75}{2\sqrt{6}}\left|\ \int_{\text{arc}\cos\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\text{sen}^2\vartheta.\,d\vartheta\ \right|$$

$$S = \frac{75}{2\sqrt{6}}\left|\frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{4}\text{sen}\ 2\vartheta\ \right|_{\arccos\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{5}{2}.\frac{15}{4\sqrt{2}}$$

$$\frac{75}{2\sqrt{6}}\left|\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\operatorname{sen}2\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(2.\arccos\frac{1}{2}\right)\right|-\frac{5}{2}.\frac{15}{4\sqrt{2}}$$

$$\cong 0{,}6934 \Rightarrow A = 2S \cong 1{,}3868$$

Caso del massimo:

$$P\left(\frac{5}{\sqrt{3}};\frac{5}{2}\right) \qquad a.b=\frac{75}{2\sqrt{6}}$$

$$x_1=\frac{5}{\sqrt{3}} \Rightarrow \arccos\frac{5}{a\sqrt{3}}=\arccos\frac{1}{\sqrt{3}} \quad ; \quad x_2=5 \Rightarrow \vartheta_2=0$$

$$A=\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| \qquad S=\frac{75}{2\sqrt{6}}\left|\int_0^{\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}}\operatorname{sen}^2\vartheta.\,d\vartheta\right|$$

$$S=\frac{75}{2\sqrt{6}}\left|\frac{\vartheta}{2}-\frac{1}{4}\operatorname{sen}2\vartheta\right|_0^{\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}} \Rightarrow$$

$$S=\frac{75}{2\sqrt{6}}\left|\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{4}\operatorname{sen}2\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right| \cong 3{,}70418$$

Area massima: $A = 2S \cong 7{,}40836$

Caso particolare:

$$a=5 \quad b=\frac{15}{2\sqrt{6}} \cong 3{,}062 \quad P(5;0)\ Q(1;3)$$

$$S=\frac{75}{2\sqrt{6}}\left|\int_0^{\arccos\frac{1}{5}}\operatorname{sen}^2\vartheta.\,d\vartheta\right| \Rightarrow$$

$$S=\frac{75}{2\sqrt{6}}\left|\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\operatorname{sen}2\left(\arccos\frac{1}{5}\right)\right| \cong 8{,}982579$$

leviamo l'area del triangolo e troviamo l'area
A=8,982579–6 ≅ 2,982579

Con il concetto di differenziale...
... si aprono nuovi orizzonti.

Partiamo da $\begin{cases} x=\rho\cdot\cos\vartheta \\ y=\rho\cdot\operatorname{sen}\vartheta \end{cases}$ $\quad \tan\vartheta=\frac{y}{x} \Rightarrow \vartheta=\arctan\frac{y}{x}$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\vartheta = \text{arc tg}\,\frac{y}{x} \Rightarrow \quad d\vartheta = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$$

sostituiamo e applichiamo le coordinate polari:

$$dS = \frac{1}{2}\rho^2\, d\vartheta \quad \text{con} \quad d\vartheta = \frac{x\,dy - y\,dx}{\rho^2}$$

$$dS = \frac{1}{2}\rho^2 \left(\frac{x\,dy - y\,dx}{\rho^2}\right) \quad \text{da cui} \quad S = \frac{1}{2}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} (x\,dy - y\,dx)\, d\vartheta$$

Caso dell'ellisse:

$$x = a \cdot \cos\vartheta \Rightarrow \frac{dx}{d\vartheta} = -\,a \cdot \text{sen}\vartheta$$

$$y = b \cdot \text{sen}\vartheta \Rightarrow \frac{dy}{d\vartheta} = b \cdot \cos\vartheta$$

la parentesi tonda vale ab, dunque

$$S = \frac{ab}{2}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} d\vartheta \quad \text{ossia} \quad S = \frac{ab}{2}(\ \vartheta_2 - \vartheta_1\ )$$

si apre una nuova strada, che riserverà altre piacevoli sorprese e che condurrà anche allo studio delle curve trigonometriche iperboliche.

Caso particolare:

$$a = \ b = \frac{15}{2\sqrt{6}} \cong 3{,}062 \ ;\ P(5;0)\ Q(1;3)\ ;\ \frac{ab}{4} = \frac{75}{8\sqrt{6}} \ ;\ \vartheta_1 = 0\,;\, \vartheta_2 = \text{arc tan } 3$$

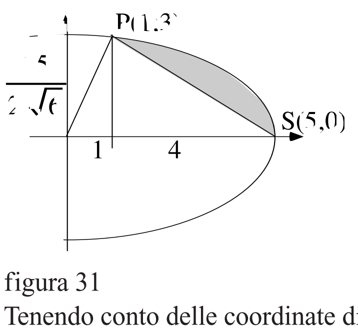


figura 31

Tenendo conto delle coordinate di Q,

$$\tan\vartheta_2 = \frac{y}{x} = \frac{3}{1}\,;$$

l'area cercata (dedotta quella del triangolo che misura 7,5) sarà:

$$S = \frac{15}{2}\left(\ \frac{5}{2\sqrt{6}}\ \text{arc tan } 3 - 1\ \right) \cong\ 2{,}061$$

2. Sezioni piane di un cubo
Prima parte

Edoardo Montella

2.1. Introduzione

L'argomento del presente lavoro può sembrare forse banale e scontato, ma bisogna considerarlo nella giusta ottica: è il resoconto, in chiave più tecnica, di un lavoro di ricerca svolto con una classe di IV media corso A nel 2000/2001.

L'idea era sorta quando mi ero scontrato con tutta una serie di difficoltà (penso ben note ai colleghi di SM) nell'insegnamento della Geometria:

— una scarsa o nulla visione «spaziale» degli allievi che portava di conseguenza a grossi problemi nella «manipolazione» dei solidi;
— una scarsa conoscenza delle tecniche di «costruzione» della geometria elementare;
— difficoltà oggettive nel realizzare disegni «leggibili» di solidi con Cabri Géomètre.

Nel corso di diverse ore di lezione e a casa gli allievi, divisi in quattro gruppi, si sono occupati di studiare i diversi casi che si possono presentare (a seconda della forma della sezione), hanno realizzato gli sviluppi (prima con gli strumenti geometrici e poi con il Cabri) e i relativi modellini in cartone, hanno calcolato aree totali e volumi. Avevano infine iniziato a stendere a bella i relativi rapporti, adoperando Word (con Equation Editor per le formule), Cabri e Works (il modulo Draw per sistemare esteticamente alcuni disegni di Cabri); purtroppo, per motivi di forza maggiore, non hanno potuto portare fino alla fine il lavoro.

A questo punto io mi sono sentito moralmente obbligato a portare a compimento il lavoro degli allievi:

— da una parte ho steso il resoconto sotto forma del presente articolo; per ovvi motivi di rispetto verso i lettori, ho optato per una presentazione generalizzata, in forma algebrica, considerando un generico cubo di lato a(u) (gli allievi, anche se con risultati esatti, avevano invece lavorato in modo numerico, partendo da un cubo di lato 10 cm);

— dall’altra conto di realizzare una mostra dedicata a tutti gli allievi della mia sede (ma anche gli allievi di altre sedi saranno i benvenuti), con un resoconto più ampio e più «accessibile» di tutto l’iter seguito (presentando sia risultati numerici, con un cubo di lato 10 cm, sia la generalizzazione ad un cubo di lato **a**(u)), e con l’esposizione di modellini in cartone ben fatti, che possano essere manipolati dai visitatori.

Faccio inoltre presente che la mia idea originale era un’altra (abbandonata per l’eccessiva difficoltà riscontrata): studiare dei sistemi per realizzare, con le regole della prospettiva, i disegni relativi ai vari tipi di sezioni piane del cubo e indagarne (sfruttando la potenza di Cabri Gèométre) le condizioni di partenza, cambiando le quali cambia anche il tipo di sezione[1].

Concludo informando i lettori che i disegni di questo articolo (e quelli della citata mostra) sono realizzati interamente con Cabri (quindi con una notevole precisione); solo una parte di essi, per motivi tipografici, sono stati «ripassati» con il modulo Draw di Works.

2.2. Sezione rettangolare

Si ottiene una sezione a forma di rettangolo quando il piano secante α è perpendicolare ad una coppia di facce parallele del cubo (o, il che è lo stesso, quando α è parallelo ad uno spigolo del cubo).

Esempi

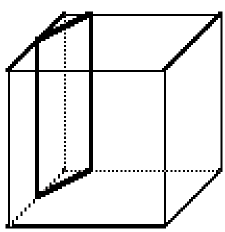


fig. 1

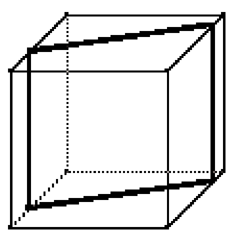


fig. 2

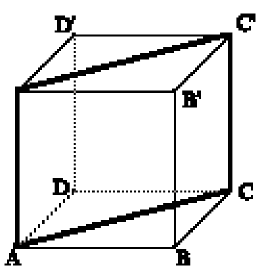


fig. 3

1. Agli... ardimentosi che volessero cimentarsi in questa impresa da me tralasciata (penso, però, sarebbe meglio riservarla alla seconda, terza liceo) posso suggerire due ottime letture:
– «*Sezioni piane di un cubo: un problema di geometria dello spazio risolto con Cabri Géomètre*» – quaderno di CABRIRRSAE n. 9 (scaricabile all’indirizzo <http://arci01.bo.cnr.it/cabri/rivista.html>)
– «*Prospettiva, il punto di vista della geometria*», un bellissimo testo (per docenti) realizzato intorno a Cabri Géomètre da Tito Pellegrino, ed edito dalla Pitagora Editrice, Bologna.

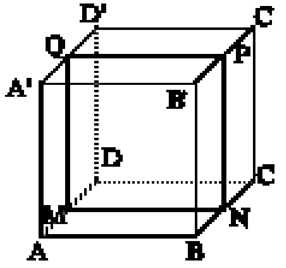


fig. 4

Le due parti in cui il piano α divide il cubo sono, in tutti i casi, due prismi retti.

Dal punto di vista metrico, i due casi più interessanti sono quelli rappresentati nelle fig. 3 e 4.

Nella fig. 3 la sezione è il rettangolo avente per lati due spigoli del cubo e le diagonali di due facce parallele (per inciso, tra le possibili sezioni rettangolari, questa è quella di **area massima**).

Nella fig. 4 la sezione è un quadrato (i cui vertici sono i punti medi di quattro spigoli paralleli del cubo). Esaminiamo separatamente i due casi.

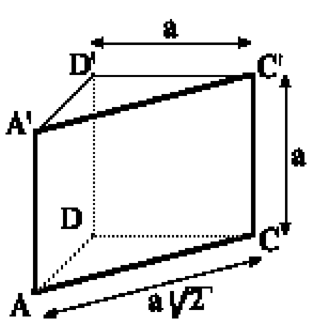
2.3. Sezione rettangolare non quadrata di area massima

Consideriamo un cubo di spigolo a rispetto a un'unità u.

Si ottiene la sezione rettangolare di area massima congiungendo i vertici A,A',C',C.

Le due parti in cui il cubo viene diviso dal piano secante α sono due prismi congruenti a base triangolare (le basi sono triangoli rettangoli pari ognuno a metà di una faccia del cubo).

Riportiamo sotto lo schizzo di uno di questi due prismi e il suo sviluppo:



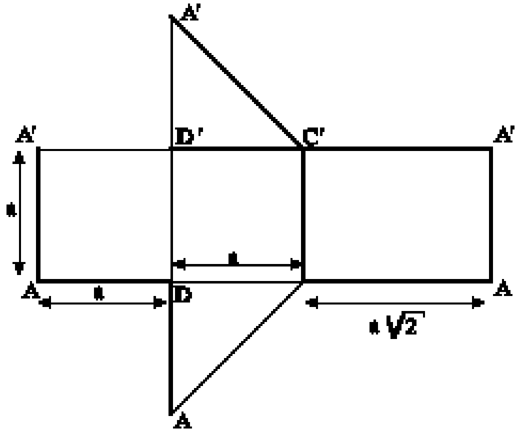


fig.5 fig. 6

L'area della sezione è:

$A_{ACC'A'} = a^2\sqrt{2}\ (u^2)$

L'area totale di ognuno dei due prismi congruenti in cui il piano a divide il cubo è:

$A_{tot\ 1} = A_{tot\ 2} = 2a^2 + a \cdot a\sqrt{2} + 2 \cdot \frac{a \cdot a}{2} = a^2\left(3+\sqrt{2}\right)\ (u^2)$

Il volume di ognuno dei due prismi è:

$V_1 = V_2 = \frac{a^3}{2}\ (u^3)$

2.4. Sezione quadrata

Si ottiene una sezione quadrata (congruente ad una faccia del cubo) quando il piano sezione α è parallelo al piano («mediano») passante per i punti medi M,N,O,P di quattro spigoli paralleli del cubo.

Esempi

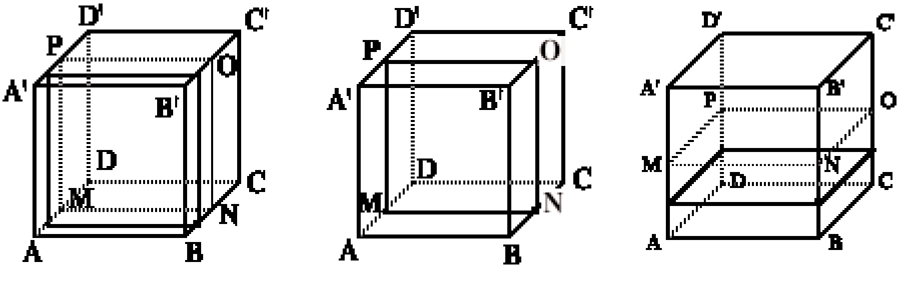


fig. 7 fig. 8 fig. 9

Le due parti in cui il piano α divide il cubo sono, evidentemente, due parallelepipedi rettangoli, congruenti solo nel caso della fig. 8, in cui la sezione è un quadrato che ha come vertici i punti medi di quattro spigoli paralleli.

In questi casi, evidentemente, non riveste molto interesse disegnare gli sviluppi delle due parti e calcolarne le aree totali e i volumi.

Osservazione ulteriore: oltre che nei casi sopradescritti, è possibile ottenere sezioni quadrate anche in altri modi, per esempio:

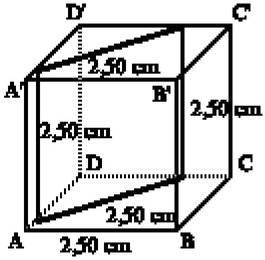


fig. 7a

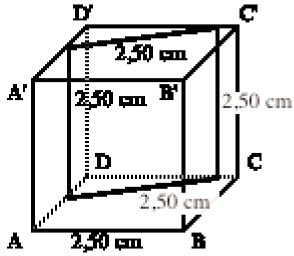


fig. 7b

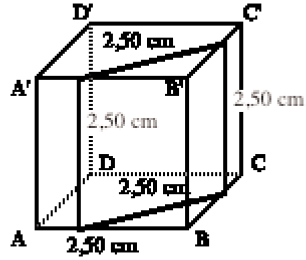


fig. 7c

2.5. Sezione triangolare

Si ha come sezione un triangolo quando il piano α passa per tre punti posti su tre spigoli del cubo uscenti dallo stesso vertice. Quando i tre vertici del triangolo sezione hanno uguale distanza dal vertice del cubo comune ai tre spigoli sui quali essi si trovano, la sezione sarà un triangolo equilatero. Caso limite: i vertici della sezione sono anche vertici del cubo; in questo caso i vertici della sezione saranno le diagonali di tre facce del cubo, e la sezione avrà l'area massima possibile tra quelle triangolari.

Esempi

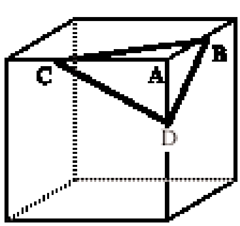


fig. 10
BCD triangolo qualunque

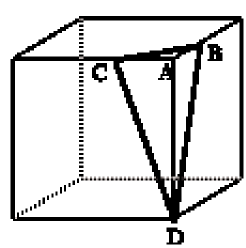


fig. 11
AB=AC, BCD triangolo isoscele

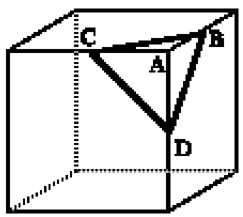


fig. 12
AB=AC=AD, BCD
triangolo equilatero

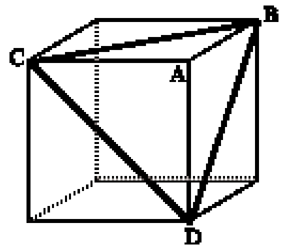


fig. 13
AB=AC=AD, e B,C,D
vertici del cubo, BCD triangolo
equilatero di area massima

Il caso più interessante da analizzare in dettaglio è l'ultimo, quello della figura 13.

2.6. Sezione triangolo equilatero di area massima

Se i vertici della sezione triangolare sono vertici di tre spigoli del cubo uscenti dallo stesso vertice, avremo che la sezione è un triangolo equilatero la cui area è la massima possibile tra le sezioni triangolari. In questo caso il piano sezione divide il cubo in due solidi:

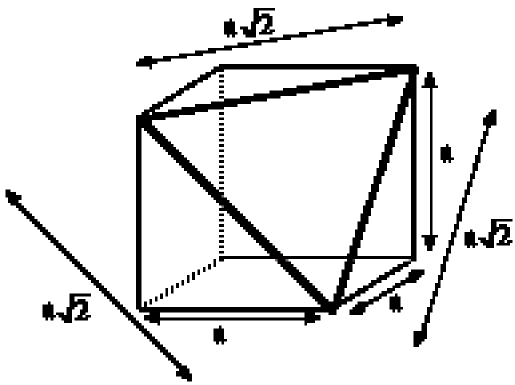


fig. 14: Il solido S_1 è un poliedro con 7 facce: tre facce quadrate (facce del cubo), tre facce triangoli rettangoli e una faccia triangolo equilatero (sezione)

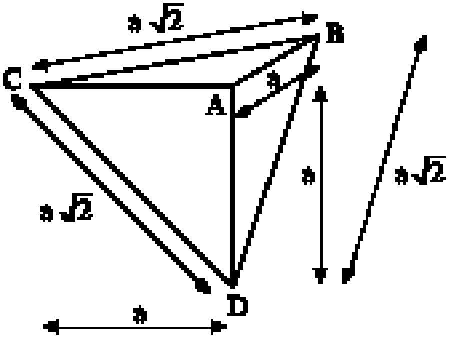


fig. 15: Il solido S_2 è una piramide regolare retta a base triangolare.

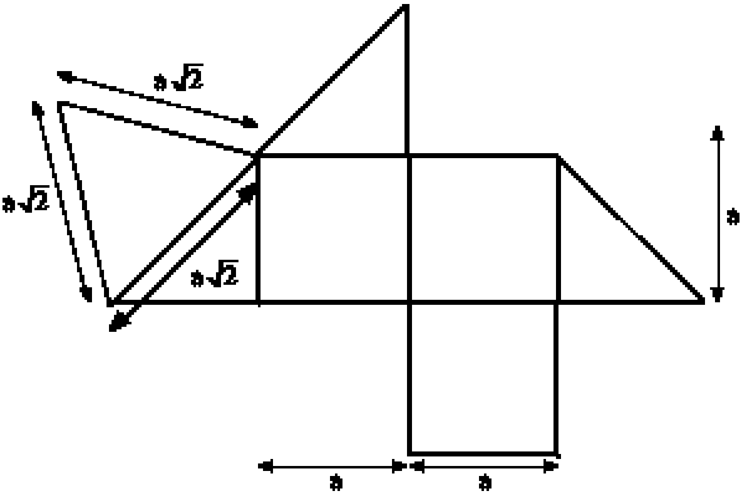


fig. 16

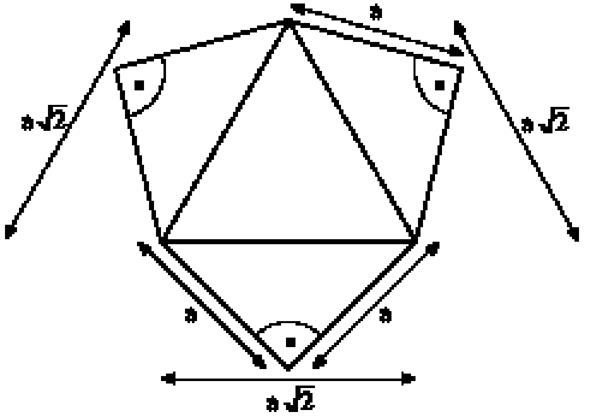


fig. 17

Calcoliamo le aree totali:

$$AT_{S1} = 3a^2 + 3\cdot\frac{a^2}{2} + \frac{a\sqrt{2}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{a^2}{2}\left(9+\sqrt{3}\right)\left(u^2\right)$$

$$AT_{S2} = \frac{a\sqrt{2}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{2}}{2} + 3\cdot\frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}\left(\sqrt{3}+3\right)\left(u^2\right)$$

Per verificare i risultati, basta osservare che la somma delle due aree totali è pari all'area totale del cubo sommata al doppio dell'area della sezione:

$$AT_{S1} + AT_{S2} = 6a^2 + a^2\sqrt{3}\left(u^2\right) = \text{ATcubo} + 2\cdot\text{ATsezione}$$

Calcoliamo ora i volumi dei due solidi S_1 e S_2; iniziamo dal secondo, S_2.

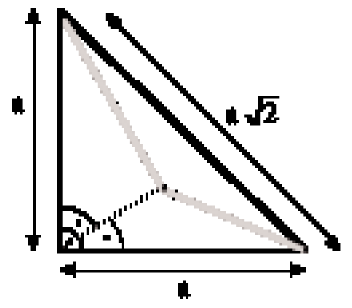


fig. 18

Osserviamo che la piramide regolare S_2 può essere anche considerata (vedi figura a lato) come una piramide avente per base un triangolo rettangolo e per altezza uno spigolo del cubo:

Quindi si ha:

$$V_{S2} = \frac{\frac{a^2}{2} \cdot a}{3} = \frac{a^3}{6} \left(u^3\right)$$

Per quanto riguarda il primo solido, S_1, potremmo anche scegliere la strada più semplice (cioè sottrarre il volume di S_2 dal volume del cubo); mi sembra, però, molto più interessante dal profilo didattico scegliere una strada più difficile, che consenta di pervenire ad una maggiore padronanza, da parte degli allievi, della visione e della manipolazione attiva delle figure solide.

Dividiamo quindi S_1 in quattro parti tracciando le tre diagonali AF, BF, CF:

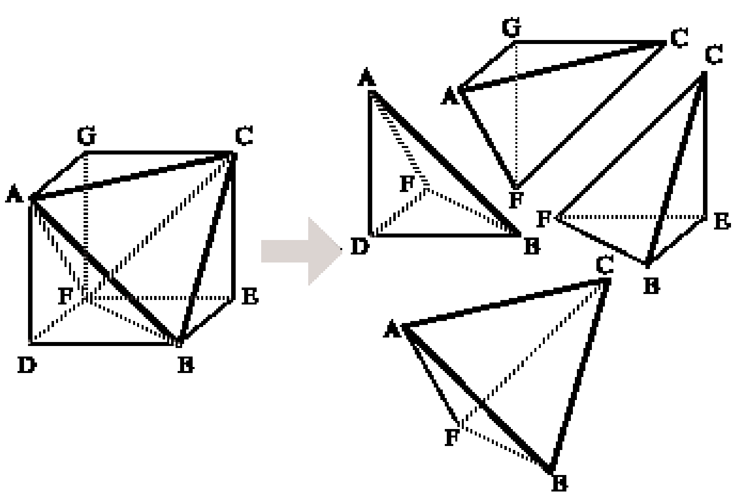


fig. 19

I quattro solidi in cui S_1 viene diviso in questo modo sono tre piramidi congruenti con base un triangolo rettangolo (ADBF, AGCF, BECF) e un tetraedro regolare ABCF. Osserviamo che le tre piramidi congruenti di cui sopra sono a loro volta congruenti al precedente solido S_2, quindi si ha:

$$V_1 = V_2 = V_3 = V_{S2} = \frac{\frac{a^2}{2} \cdot a}{3} = \frac{a^3}{6} \left(u^3\right)$$

Calcoliamo ora il volume del tetraedro regolare ABCF:

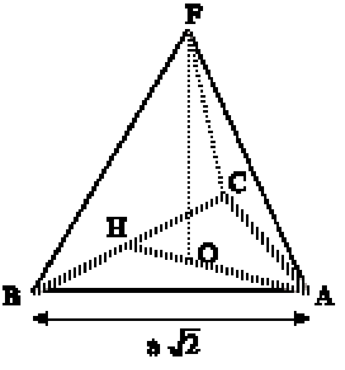


fig. 20

Si ha:

$$\overline{AH} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2}\sqrt{6} \ (u)$$

$$\overline{AO} = \frac{2}{3}\overline{AH} = \frac{a}{3}\sqrt{6} \ (u)$$

$$\overline{OF} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\sqrt{6}\right)^2} = \frac{2}{3}a\sqrt{3} \ (u)$$

Quindi, in definitiva:

$$V_4 = \frac{\frac{a\sqrt{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{2}{3}a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^3}{3} \left(u^3\right)$$

A questo punto, infine:

$$V_{S1} = V_1+V_2+V_3+V_4 = 3\cdot\frac{a^3}{6}+\frac{a^3}{3}=\frac{5}{6}a^3\,(u^3)$$

Per verificare i risultati, è sufficiente verificare che la somma dei volumi di S_1 e S_2 è pari al volume del cubo:

$$V_{S1}+V_{S2} = \frac{5}{6}a^3+\frac{a^3}{6}=a^3\,(u^3)=V_{cubo}$$

2.7. Sezione trapezoidale

In questo caso il piano deve passare per due segmenti paralleli posti su due facce parallele del cubo: condizione ulteriore: i due segmenti devono stare sullo stesso semispazio rispetto al piano passante per le diagonali delle due facce del cubo (in caso contrario la sezione sarebbe un esagono).

Caso particolare: la sezione è un trapezio isoscele quando i due segmenti di cui sopra sono entrambi paralleli alla direzione comune delle diagonali delle due facce del cubo su cui sono contenute.

Esempi

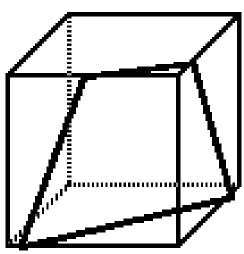


fig. 21:
trapezio qualsiasi

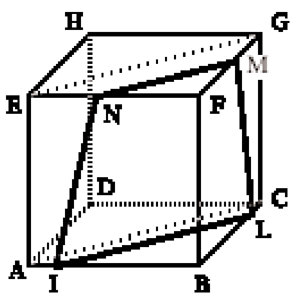


fig. 22:
IL // MN // EG // AC,
trapezio isoscele

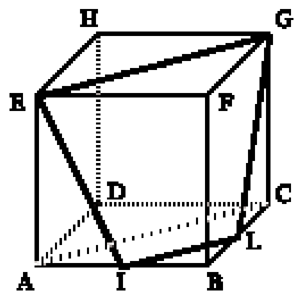


fig. 23:
EG // IL e
$\overline{AI}=\overline{IB}=\overline{BL}=\overline{LC}$,
trapezio isoscele

Dal punto di vista metrico, il caso più interessante e relativamente semplice da analizzare è il terzo; studiamolo.

Continuazione sul prossimo numero.

2.8. Sezione trapezio isoscele

Nel caso della precedente fig. 23, il cubo è diviso dal piano per i punti EGLI nei due solidi S_1 e S_2:

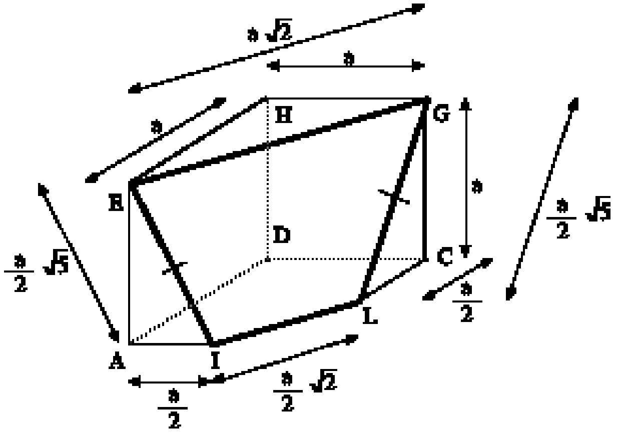


fig. 24

Solido S_1

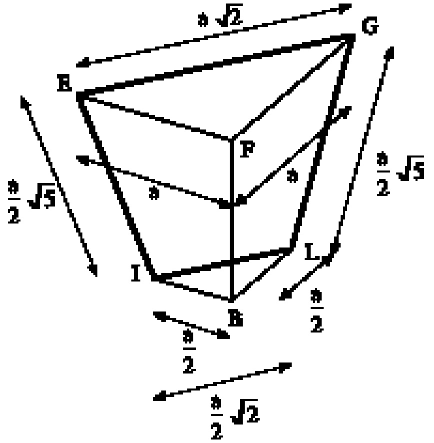


fig. 25

Solido S_2: tronco di piramide di altezza pari allo spigolo del cubo

Calcoliamo le aree totali dei due solidi iniziando con l'analizzarne gli sviluppi:

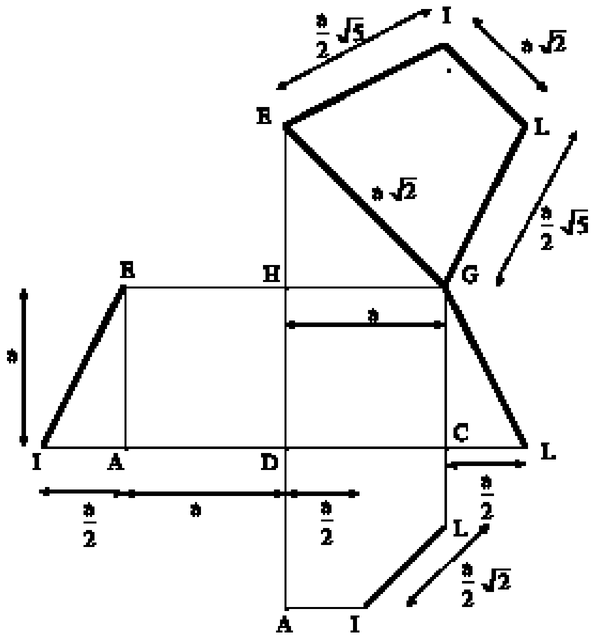


fig. 26

Sviluppo piano del solido S_1

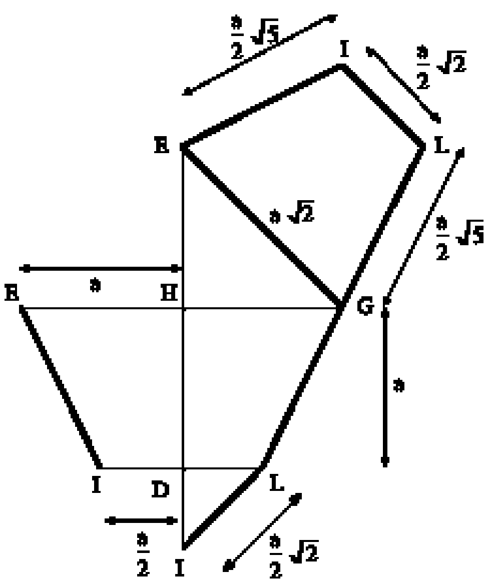


fig. 27

Sviluppo piano del tronco di piramide S_2

Evidenziamo ora il trapezio-sezione EGLI:

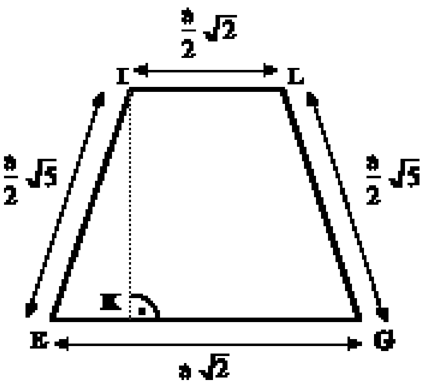


fig. 28

Si ha:

$$\overline{EK}=\frac{a\sqrt{2}-\frac{a}{2}\sqrt{2}}{2}=\frac{a}{4}\sqrt{2}\ (u)$$

$$\overline{IK}=\sqrt{\left(a\sqrt{5}\right)^2-\left(\frac{a}{4}\sqrt{2}\right)^2}=\frac{3}{4}a\sqrt{2}\ (u)$$

A questo punto possiamo calcolare facilmente le due aree totali:

AT$_{S1}$ =

$$2a^2+2\cdot\frac{a\cdot\frac{a}{2}}{2}+\frac{a^2}{2}+\frac{\left(a\sqrt{2}+\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)\cdot\frac{3}{4}a\sqrt{2}}{2}+\left(a^2-\frac{a^2}{8}\right)=5a^2\ \left(u^2\right)$$

AT$_{S2}$ =

$$\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2}+\frac{a^2}{2}+2\cdot\frac{\left(a+\frac{a}{2}\right)\cdot a}{2}+\frac{\left(a\sqrt{2}+\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)\cdot\frac{3}{4}a\sqrt{2}}{2}=\frac{13}{4}a^2\ \left(u^2\right)$$

Verifichiamo i risultati:

AT$_{S1}$ + **AT$_{S2}$** =

$$5a^2+\frac{13}{4}a^2=6a^2+2\cdot\frac{9}{8}a^2\ \left(u^2\right)=AT_{cubo}+2\cdot A_{trap.\ sezione}$$

Calcoliamo ora i volumi dei due solidi S_1 e S_2; ancora una volta (come nel paragrafo precedente) scegliamo una strada un po' più lunga, ma molto più pagante sotto il profilo didattico.

Iniziamo dal primo solido; osserviamo che, tracciando le diagonali DE, DI, DL, DG, esso viene scomposto in quattro piramidi:

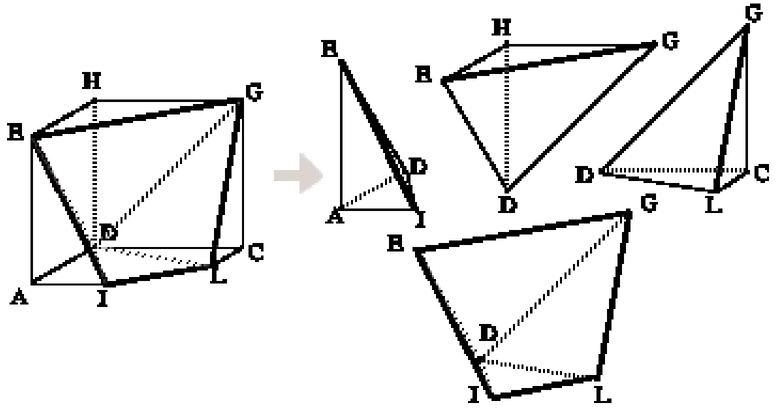


fig. 29

Osserviamo che le due piramidi AIDE e DLCG sono congruenti.

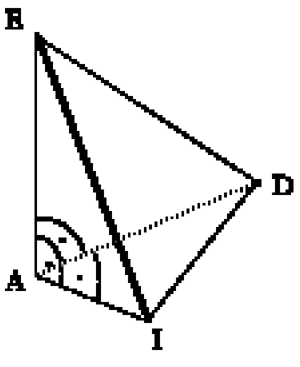


fig. 30

Gli angoli EAI, DAI, EAD sono retti. Si ha inoltre:

$\overline{AI} = \frac{a}{2}(u) \quad \overline{AD} = a(u) \quad \overline{AE} = b = a(u)$

2. Penso si possa dimostrarlo, ma ciò esulerebbe dai limiti di un lavoro didattico rivolto alla scuola media.

$$V_1 = V_2 = \frac{\frac{\frac{a}{2}\cdot a}{2}\cdot a}{3} = \frac{a^3}{12}\,(u^3)$$

Consideriamo la seconda piramide, EHGD:

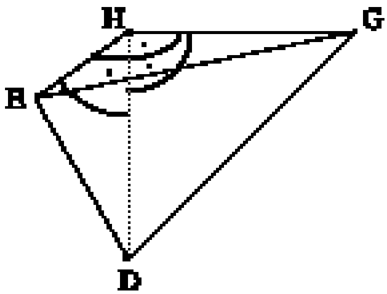


fig. 31

Gli angoli EHG, EHD, DHG sono retti. Si ha inoltre:

$$\overline{EH} = \overline{HG} = \overline{HD} = a(u)$$

$$V_3 = \frac{\frac{a^2}{2}\cdot a}{3} = \frac{a^3}{6}\,(u^3)$$

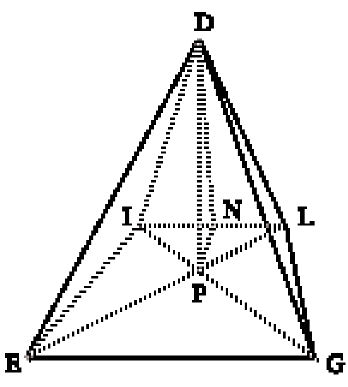


fig. 32

L'ultima piramide (EILGD) è una piramide non retta che ha per base il trapezio isoscele sezione. Con considerazioni empiriche[2] (derivate da un'attenta osservazione di un modellino in cartone) si può dedurre che l'altezza cade nel punto di incontro della diagonale di base.

Consideriamo il triangolo DPN

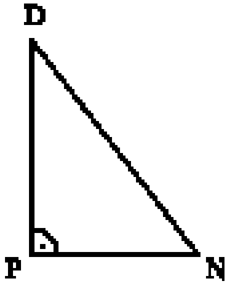


fig. 33

dove DN è l'altezza del triangolo isoscele DIL:

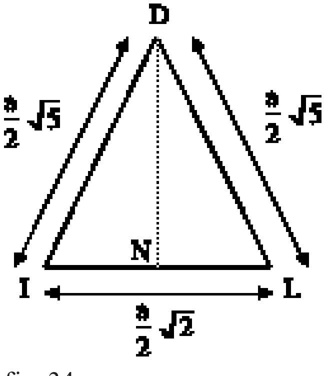


fig. 34

Si ha: $\overline{NL} = \frac{a}{4}\sqrt{2}(u)$ e $\overline{DN} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\sqrt{5}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3}{4}a\sqrt{2}\ (u)$

Analizzando bene il trapezio-sezione EGLI:

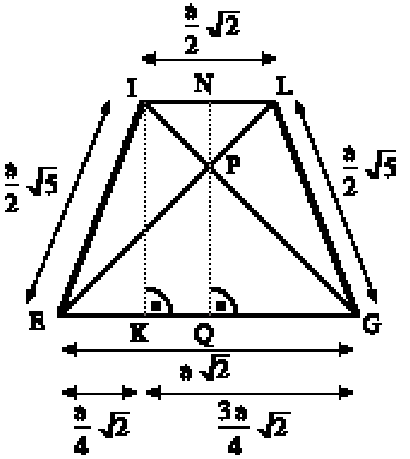


fig. 35

si ha

$$\overline{IK} = \overline{NQ} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\sqrt{5}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3}{4}a\sqrt{2}(u)$$

inoltre IKG e PQG sono simili, quindi:

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{IK}} = \frac{\overline{QG}}{\overline{KG}} \Rightarrow \overline{PQ} = \frac{a}{2}\sqrt{2}\ (u)$$

e infine:

$$\overline{PN} = \frac{3}{4}a\sqrt{2} - \frac{a}{2}\sqrt{2} = \frac{a}{4}\sqrt{2}\ (u)$$

A questo punto, tornando al triangolo DPN, possiamo aggiungere:

$$\overline{DP} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}a\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\sqrt{2}\right)^2} = a(u)$$

Quindi:

$$V_4 = \frac{\dfrac{\left(a\sqrt{2} + \frac{a}{2}\sqrt{2}\right)\cdot\frac{3}{4}a\sqrt{2}}{2}\cdot a}{3} = \frac{9}{24}a^3\ (u^3)$$

E infine:

$$V_{S1} = V_1+V_2+V_3+V_4 = 2\cdot\frac{a^3}{12} + \frac{a^3}{6} + \frac{9}{24}a^3 = \frac{17}{24}a^3\ (u^3)$$

3. Anche questo si potrebbe dimostrare, ma la cosa esulerebbe da una trattazione didattica a livello di scuola media.

Consideriamo ora il secondo solido S_2, il tronco di piramide; esaminiamolo in due posizioni diverse, dopo aver aggiunto in ognuna la piramide LBIV per semplificare i calcoli:

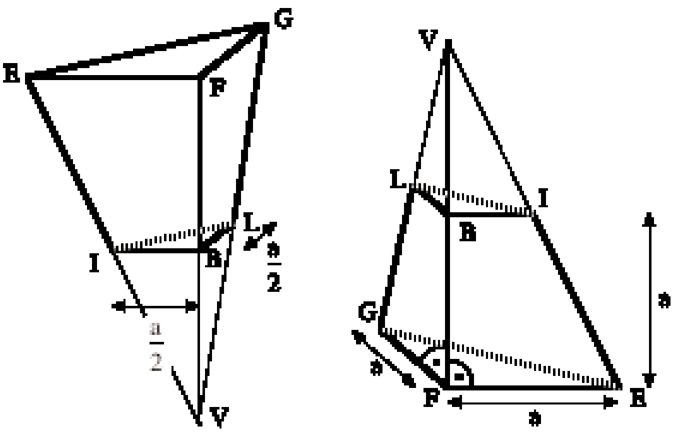


fig. 36

Estrapoliamo dalla figura precedente il triangolo VFE:

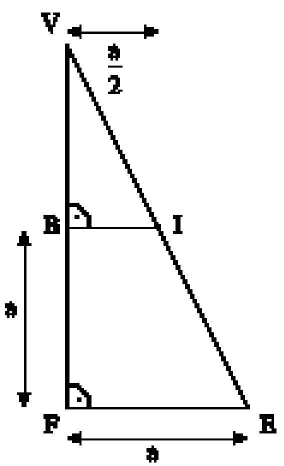


fig. 37

Dall'evidente similitudine dei triangoli VBI e VFE si ha, ponendo

$\overline{VB} = x$:

$$\frac{a+x}{x} = \frac{a}{\frac{a}{2}} \Rightarrow \overline{VB} = a\ (u)$$

Quindi $\overline{VF} = 2a\ (u)$

Calcoliamo quindi il volume del tronco di piramide S_2:

$$V_{S2} = \frac{\frac{a \cdot a}{2} \cdot 2a}{3} - \frac{\frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{2} \cdot a}{3} = \frac{7}{24} a^3 \; (u^3)$$

E infine verifichiamo i risultati:

$$V_{S1} + V_{S2} = \frac{17}{24} a^3 + \frac{7}{24} a^3 = a^3 \; (u^3) = V_{cubo}$$

2.9. Sezione pentagonale

Otteniamo una sezione pentagonale quando il piano a interseca cinque facce del cubo in un segmento e non interseca la sesta faccia (se non, al limite, in un vertice, ma interseca il piano che la contiene).

Esempi

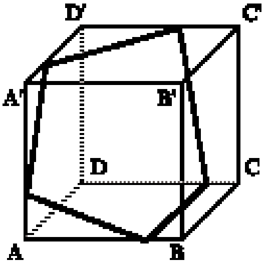


fig. 38

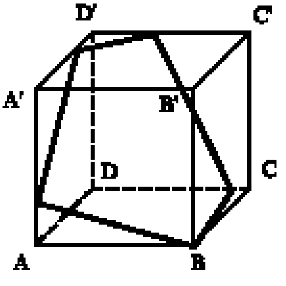


fig. 39

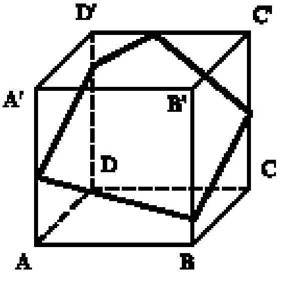


fig. 40

I casi di sezione pentagonale non presentano interesse dal punto di vista metrico, in quanto i pentagoni sezione non sono mai regolari[3].

Per questo motivo tralascerò lo studio di questo caso, limitandomi agli esempi proposti.

2.10. Sezione esagonale

La sezione è un esagono quando il piano secante incontra tutte le facce del cubo in un segmento.

L'esagono-sezione è regolare quando il piano sezionante è perpendicolare alla diagonale del cubo e la incontra nel suo punto medio.

Esempi

VI. Segnalazioni

1. Sta nascendo la Società Matematica della Svizzera Italiana (SMASI)

Nella Svizzera Italiana qualcosa si sta muovendo: il polo scientifico-tecnologico è in piena espansione, l'Università della Svizzera Italiana e la Scuola Universitaria Professionale si stanno ampliando e consolidando, nelle scuole secondarie stanno prendendo piede nuove impostazioni pedagogiche e nuovi metodi di insegnamento. Nell'ambito internazionale della ricerca nelle scienze dell'educazione, la didattica della matematica sta assumendo un ruolo sempre più centrale. D'altra parte la matematica stessa sta entrando decisamente nei diversi istituti scientifici che operano sul territorio cantonale. Il risultato di tutto ciò è che non pochi matematici di casa nostra scelgono di tornare a operare nella Svizzera Italiana, a tutti i livelli. Così la nostra comunità matematica è parecchio cresciuta negli ultimi tempi e continua a crescere. In questo scenario nasce l'idea di creare una società che difenda gli interessi dei matematici e della matematica nella Svizzera Italiana, una società che permetta ai diversi matematici di incontrarsi, di scambiarsi idee ed esperienze, di aggiornarsi e di divertirsi con la propria disciplina, che soprattutto si occupi di promuovere e di rendere viva la matematica nella parte italofona della Svizzera.

Convinti di questa idea il sottoscritto e un manipolo di matematici hanno deciso di concretizzarla e hanno mosso i primi passi in questa direzione, stendendo una bozza di possibili statuti e incominciando a contattare le diverse parti interessate. La speranza è di riuscire a costituire ufficialmente la società entro l'estate di quest'anno e di iniziare le attività già l'autunno prossimo. Per riuscirci abbiamo però bisogno dell'entusiasmo e del supporto di tutti coloro ai quali sta a cuore la matematica. Per questo invito cordialmente tutti i matematici e gli insegnanti di matematica ticinesi, del Grigione italiano e in generale tutti quelli di lingua e cultura italiana della Svizzera a partecipare alla nuova avventura.

Per il gruppo dei promotori: Alberto Piatti[1].

1. Per contatti, informazioni o per ottenere una copia degli statuti potete rivolgervi a Alberto Piatti, Via Rodari, 6817 Maroggia;
oppure per e-mail all'indirizzo alberto.piatti@bluewin.ch

2. La matematica è difficile? 2002 Quale Matematica per la Scuola Italiana?

Liceo Classico Statale «Carlo Bocchi»
Adria, 5 ottobre 2002
Sala Rovigno presso il centro commerciale il Porto[1]
Convegno Nazionale di divulgazione della Didattica della Matematica
Direzione scientifica: Giovanni Callegarin

Programma
Presentazione di Bruno D'Amore

Relazioni

Berta Martini (docente di didattica generale all'Università di Urbino): *Il curricolo matematico: un dispositivo – problema per fare cultura a scuola.*

Rosetta Zan (Università di Pisa): *Prima del recupero: osservare ed interpretare errori e difficoltà in Matematica. Effetti e cause delle convinzioni sulla Matematica.*

Gianna Meloni e Silvano Locatello (NRD Bologna): *Matematica e comunicazione «cinque anni di esperienze matematiche in collaborazione, corrispondenze, conferenze, continuità».*

Martha Isabel Fandiño (NRD Bologna): *La problematica della trasposizione didattica in Matematica.*

Mostre e laboratori (con partecipazione di docenti e studenti)

Docenti di Matematica e Fisica del Liceo Bocchi: *Mostra degli strumenti antichi del laboratorio di Fisica del Liceo Bocchi.*

Luigi Tomasi (Liceo Scientifico Galilei Adria): *Seminario su Cabri-géomètre per medie e superiori.*

Locatello - Meloni (NRD Bologna): *Co-operare, co-rispondenze in Matematica: esperienze in mostra e in discussione.*

Paola Fulgenzi (Mathesis Pesaro): *Laboratorio per le elementari su modelli dinamici in Geometria e Algebra.*

1. Per ulteriori informazioni, e-mail: lbocchi@shineline.it; www.liceoclassicoadria.it.

3. Incontri con la Matematica n. 16 Sulla Didattica della Matematica e sulle sue applicazioni

Castel San Pietro Terme (Bologna)
8-9-10 novembre 2002

Relazioni

Venerdì 8 novembre pomeriggio

14.30-15.30 Inaugurazione
15.30-16.30 **Ubiratan D'Ambrosio** (Università di São Paolo, Brasile)*: «Perché insegnare matematica? Una riflessione 25 anni dopo ICME-3, Karlsruhe»*
17.00-18.00 **Massimo Baldacci** (Università di Urbino): *«L'individualizzazione: una strategia didattica da ridefinire»*
18.00-19.00 **Michele Pellerey** (Università Salesiana di Roma): *«La dimensione comunicativa e argomentativa nell'educazione matematica»*

Sabato 9 novembre pomeriggio

Scuola Primaria e Secondaria: Palazzo dello Sport
15.00-15.45 **Juan Godino** (Università di Granada, Spagna): *«Prospettiva semiotica della competenza e comprensione matematica»*
15.45-16.30 **Filippo Spagnolo** (Università di Palermo): *«Storia delle matematiche, ricerca in didattica ed insegnamento delle matematiche»*
17.00-17.45 **Salvador Llinares** (Università di Alicante, Spagna): *«Imparare ad insegnare matematica: la sfida delle nuove tecnologie della comunicazione e dell'informazione»*
17.45-18.30 **Rosetta Zan** (Università di Pisa): *«Il fatalismo nell'apprendimento / insegnamento della matematica»*

Scuola dell'Infanzia: Istituto alberghiero

15.00-16.00 **Martha Isabel Fandiño Pinilla** (NRD di Bologna): *«Il bambino e la matematica: implicazioni ed esigenze nello sviluppo curricolare»*
16.00-17.00 **Luciano Faggiano, Michele Pertichino** (Università di Bari): *«Perduti nello spazio: fare geometria nella scuola dell'infanzia»*
17.30-18.00 **Carla Provitera** (RSDDR di Bologna): *«Quando ragionare fa rima con giocare»*
18.00-19.00 **Laura Cerrocchi** (Università di Bologna): *«Ipotesi di co-costruzione del sapere matematico tra cognizione e relazione»*

Seminari per la Scuola dell'Infanzia

Sabato 9 novembre

9.00-9.45 **Bruno D'Amore** (NRD Bologna): *«L'insegnante di Scuola dell'Infanzia di fronte alla Matematica»*
9.45-10.30 **Margherita Francini** (Arezzo, RSDDM Bologna): *«La formichina mangerà la marmellata? Aiutiamola con il nastro di Möbius»*
11.00-11.45 **Ines Marazzani** (Foligno, RSDDM Bologna): *«Educare al pensiero probabilistico a scuola»*

Domenica 10 novembre

9.00-9.45 **Rosa Laura Ancona, Rosa Pupillo** (Circolo Didattico «Del Prete», Bari): *«Uno, il mondo e la luna: il numero, lo spazio e il gioco nella Scuola dell'Infanzia»*
9.45-10.30 **Carla Provitera** (RSDDM Bologna): *«Un percorso di problemi dalla Scuola dell'Infanzia alla prima Elementare: riflessioni sul testo»*

Seminari per la Scuola Elementare e Media

Sabato 9 novembre

9.00-9.45 **Barbara Pecori, Giacomo Torzo** (Dipartimenti di Fisica delle Università di Bologna e Padova): *«La Fisica in palestra, ovvero: come utilizzare le moderne tecnologie per motivare gli studenti allo studio della Fisica»*
9.45-10.30 **Rosetta Zan** (Dipartimento di Matematica, Università di Pisa): *«Costruire nuovi strumenti per osservare gli allievi in matematica»*
11.00-11.45 **Gianfranco Arrigo** (Alta Scuola Pedagogica, Locarno, Svizzera): *«Matematica: una bella avventura intellettuale»*

Domenica 10 novembre

9.00-9.45 **Eleonora Faggiano, Antonella Montone** (Circolo didattico «Mazzini», Bari): *«Viva il Giro d'Italia: i percorsi, l'orientamento e lo spazio nella scuola elementare»*

9.45-10.30 **Grazia Grassi** (RSDDM Bologna): *«I problemi di geometria dalla scuola elementare alla scuola media: un percorso con Cabri»*

Seminari per la Scuola Superiore

Sabato 9 novembre

9.00-9.45 **Grazia Grassi** (RSDDM Bologna): *«Funzioni, limiti, derivate: alcune proposte per insegnare l'analisi matematica con le nuove tecnologie»*

9.45-10.30 **Libero Verardi, Marusca Buttazzi** (Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna): *«Un'esperienza d'insegnamento col supporto delle nuove tecnologie»*

11.00-11.45 **Angel Balderas** (Università di Querétaro, Mexico): *«Approccio al calcolo integrale con uso di strumenti informatici»*

Domenica 10 novembre

9.00-9.45 **Gianfranco Arrigo** (Alta Scuola Pedagogica, Locarno, Svizzera): *«Capire l'infinito attuale, prima di studiare l'analisi»*

9.45-10.30 **Filippo Spagnolo** (GRIM, Palermo): *«Utilizzazione della storia nella ricerca in didattica: analisi a priori di una situazione/problema nella storia»*

11.00-11.45 **Aurelia Orlandoni** (IRRE Emilia-Romagna): *«Statistica e Probabilità con le calcolatrici grafico-simboliche»*

Mostre e Laboratori

1. *«Arte e frattali»,* opere di **Geza Perneczky** (a cura di **Silvia Sbaragli**)
2. *«Quel sorprendente nastro di Möbius»* (a cura di **Margherita Francini**)
3. *«Non solo probabilità per piccoli e meno piccoli»* (a cura di **Ines Marazzani**)
4. *«Un mondo elastico a 3 anni»* (a cura di **Annalisa Donadel, Edi Fabian** (Scuola dell'Infanzia «Giovanni Paolo I», Marghera /Ve), con la collaborazione di **Silvia Sbaragli**
5. *«Strada facendo»* (Scuola dell'Infanzia «M. Pieralisi», Istituto Comprensivo San Marcello, Morro D'Alba, Ancona)
6. *«Filastrocche, limoni, campane...»* (a cura di **Rosa Laura Ancona, Rosa Pupillo**, Circolo didattico «Del Prete», Bari)

7. *«Mamma, papà, vi ricordate? I giochi di una volta per conquistare lo spazio "perduto"»* (a cura di **Eleonora Faggiano**, **Antonella Montone**, Circolo didattico «Mazzini», Bari)
8. *«Navigando nel Tempo: Progetto Armod»* (a cura di **Giacomo Crovetti** e **Giordana Ferretti**)
9. «*Una città geometricamente fantastica»* (a cura di **Erminia Dal Corso, Rita Fusinato, Chiara Stella**)
10. *«Tipi rotondi e tipi spigolosi. Esperienze in 3D»* (Scuola dell'Infanzia, Elementare e Media dell'Istituto Comprensivo Corinaldo, in rete con altre scuole di Jesi, Ostra, Ripe e Senigallia e con la collaborazione di **Silvia Sbaragli**)
11. *«Quando ragionare fa rima con giocare»* (a cura di **Rossella Guastalla**, Viadana/MN; **Carla Provitera,** RSDDM Bologna)
12. *«Viaggio attraverso le potenze del 10»* (a cura di **Gloria Nobili**)
13. *«Origami, Laboratorio di Geometria Operativa»* (a cura di **Paolo Bascetta,** Liceo Scientifico «A.B. Sabin», Bologna)

Informazioni utili

e-mail: cultura1@cspietro.provincia.bo.it — http://www.dm.unibo.it

L'iscrizione avviene direttamente durante il Convegno.

La segreteria organizzativa centrale avrà sede presso l'Albergo delle Terme, viale delle Terme 1113. A ciascun partecipante viene richiesto un contributo alle spese di organizzazione di 40 Euro.

Gli Atti, editi da Pitagora Ed. Bologna, saranno disponibili fin dal giorno della inaugurazione.

Poiché si prevede un afflusso notevole, si consiglia di provvedere al più presto alla prenotazione alberghiera.

Alberghi e Pensioni nel territorio di Castel San Pietro Terme

★★★★ Castello, viale Terme 1010, tel. 051 940138
★★★★ Gloria, [Toscanella], via Emilia 42, tel. 0542 673438
★★★ Delle Terme, viale Terme 1113, tel. 051 941140
★★★ Nuova Italia, via Cavour 73, tel. 051 941932
★★★ Parigi, viale Terme 860, tel. 051 943585
★★★ Park Hotel, viale Terme 1010, tel. 051 941101
★★ Corona, via dei Mille 48, tel. 051 941462
★★ Due Portoni, via Mazzini 133, tel. 051 941190
★★ Il Gallo, via Repubblica 34, tel. 051 941114
★★ La Torretta, viale Terme 1559, tel. 051 941340
★★ Terantiga, [Varignana], via di Jani 71, tel. 051 6957234
★ Arlecchino, via Repubblica 23.
★ Maraz, piazza Vittorio Veneto 1, tel. 051 941236.

4. Recensioni

Gianfranco Arrigo

Piergiorgio Odifreddi – C'era una volta un paradosso – Grandi tascabili Einaudi, Torino, 2001, pag. 304, € 14.46

«Questo libro contiene almeno un errore. Ci si potrebbe aspettare che per verificare la cosa sia necessario leggere l'intero volume. E invece lo sappiamo già fin d'ora. Infatti, se ci sono errori, ci sono. E se non ce ne sono, c'è quello che dice: "Questo libro contiene almeno un errore". Dunque sappiamo che in questo libro un errore c'è, anche se non sappiamo ancora qual è. A scanso di equivoci, l'errore ***non*** *sta nel leggerlo».*

Ecco il biglietto da visita di questo divertente volume. Divertente, certo, ma non solo: anche stimolante soprattutto per il docente di matematica, che ogni tanto deve pure fare viaggiare la mente al limite della divergenza, deve pure coltivare il gusto del paradosso. Perché conoscenza fondata e paradosso vanno sovente di pari passo.

Il volume si legge tutto d'un fiato e si presenta come una rassegna dei generi di paradossi pensati e creati dall'uomo nel corso dei secoli. Mette in guardia il lettore sulla fragilità del principio «sperimentale», secondo il quale la conoscenza più sicura e indubitabile ci viene fornita dai sensi: «vedere con i nostri occhi», «toccare con le nostre mani» o «sentire con le nostre orecchie». Ma la ragione ci dice che, spesso, i sensi ci ingannano in maniera inaspettata.

L'autore non rinuncia a teorizzare la problematica del paradosso. Così si impara la classificazione in paradossi *logici o negativi* (riduzione all'assurdo), *retorici o nulli* (sottigliezza del ragionamento, sofisma), *ontologici o positivi* (ragionamento inusuale che rafforza le conclusioni).

Si inizia dai paradossi più semplici da capire: quelli visivi. Tra i più interessanti per la didattica, segnaliamo quelli geometrici che offrono, per esempio, figure congruenti che non lo sembrano affatto, segmenti allineati che all'occhio non appaiono tali, rette parallele che sembrano incuneate (quasi incredibile questo paradosso riportato a pag. 46), rette che sembrano curve, una successione di cerchi concentrici che sembra una spirale (anche questo ha quasi dell'incredibile) ed infine le numerose opere paradossali di artisti noti agli insegnanti di matematica, primi fra tutti Escher e Reutersvaerd.

Un capitolo intero è dedicato ai paradossi legati alle religioni: dal paradosso dell'esistenza di Dio, ai numerosi paradossi disseminati nelle preghiere. Si ricorda come gli stessi libri sacri (per esempio i Veda e la Bibbia) abbondino di enigmi e di paradossi, come «divinare» e «indovinare» abbiano la stessa origine etimologica. Dal punto di vista filosofico è importante approfondire la diversa impostazione creatasi in Oriente e in Occidente. All'*idealismo* orientale (i sensi ci presentano illusioni create da noi) si contrappone il *realismo* occidentale (le percezioni ci forniscono immagini di oggetti che esistono). Le origini di questo dualismo possono essere riscontrate nei grandi filosofi Greci: *Eraclito e Protagora* (tutto è come appare), *Platone* (niente è come appare), *Aristotele* (non tutto è come appare). Ma nel corso dei secoli idealismo e realismo sfociano nel *fenomenismo*, al quale si rifanno le evoluzioni più importanti della fisica del ventesimo secolo: la relatività di Einstein e la meccanica quantistica di Bohr e Heisenberg, tanto per citare due esempi conosciutissimi. Nello stesso ordine di idee si inseriscono le interpretazioni statistiche della fisica (modelli di Boltzmann, Bose-Einstein, Fermi-Dirac). La causalità del mondo fisico viene affiancata dalla *sincronicità* di Jung, definita come *coincidenza semantica di eventi* (uno fisico e l'altro psichico) causalmente non collegati.

Un capitolo si occupa dei grandi mentitori della storia e in un certo senso riabilita la menzogna come atto, in determinati casi, necessario e positivo. Ci viene ricordato che mente Giacobbe (nella *Genesi*) per strappare la primogenitura a Esaù; mente Ulisse (nell'*Odissea*); mente Ermes (Dio dei ladri e dei commercianti); mente Gesù (nel *Vangelo secondo Giovanni*) dichiarando che non andrà a Gerusalemme per la festa dei Tabernacoli, e poi ci andrà di nascosto; mente tre volte l'apostolo Pietro rinnegando il suo Messia; mentono costituzionalmente *i bugiardi* di Corneille, Goldoni e Cocteau; mentono istituzionalmente il Grande Fratello e il Ministero della Verità (Orwell in *1984*); mentono le costituzioni, che garantiscono diritti «a meno delle disposizioni di legge»; mentono i codici, che inventano finzioni giuridiche; mentono governanti, diplomatici e spie, per ragioni di stato; mentono gli avvocati, per ragioni di diritto; mentono i testimoni, pur giurando di dire «la verità, tutta la verità, nient'altro che la verità»; mentono i giornalisti, per fare notizia; mentono politici, preti e astrologi, per ingannare elettori, fedeli e clienti; mentono produttori, pubblicitari e commercianti, per truffare i consumatori; mentono genitori e insegnanti, raccontando favole e miti ai bambini; mentono i bambini, per tacitare genitori e insegnanti; mentono le donne, truccandosi per sembrare più belle; mentono coniugi e amanti, per tradire sembrando fedeli; mentono gli sportivi, drogandosi per vincere; mentono gli amici e i santi, per bontà; mentono i nemici e i peccatori, per cattiveria; mentono gli spiritosi, per divertimento; mentono le persone cortesi, per buona educazione.

I due ultimi capitoli toccano la filosofia della matematica e quella della storia: li lasciamo al piacere del lettore. Ma, attenti: il paradosso è sempre dietro l'angolo!

Matteo Motterlini – Lakatos: scienza, matematica, storia – il Saggiatore, Milano, 2000, pag. 218, € 15.49

Capire – e soprattutto non dimenticare – Lakatos dev'essere un imperativo di ogni insegnante di matematica. Perché, al di là degli attuali sviluppi della didattica, i principi così ben espressi da Lakatos formano uno zoccolo robusto sul quale ciascuno può basare la propria filosofia di insegnamento. Il Motterlini, profondo conoscitore del pensiero lakatosiano, ci offre un bellissimo saggio – oltre tutto scritto in lingua italiana – di non facile lettura, ma sicuramente importante, per capire soprattutto il senso della ricerca didattica odierna. Lakatos ha saputo intuire in modo esemplare la crescita della conoscenza matematica e il suo pensiero si inserisce tra la rinascita dell'euristica – teorizzata da Polya – e il fallibilismo epistemologico di Popper; anzi, si può dire che rappresenta un superamento di entrambi. Ecco un passaggio significativo, riferito alla sua opera più importante sul versante didattico *Proofs and Refutations* del 1976, uscito in traduzione italiana da Feltrinelli nel 1979 col titolo *Dimostrazioni e confutazioni*:

«*L'idea di Lakatos è che lo sviluppo di questa disciplina* (la matematica, ndr) *non debba essere inteso come un processo per accumulazione di verità eterne e immutabili, ma come frutto di un'attività più emozionante e creativa consistente nell'avanzare congetture, nel tentare di darne una "dimostrazione", nel prospettare una severa critica volta a ricercare i controesempi sia alla congettura di partenza sia ai vari passi della dimostrazione.*

E ancora:

«*L'educazione, se si vuole che produca studiosi di qualsiasi campo, deve avere tra i suoi elementi centrali l'esercizio al* ***pensiero originale****, deve aiutare a sviluppare il giudizio individuale, il senso di giustizia, di verità e di coscienza*».

Secondo Lakatos, la storia della scienza indica chiaramente che noi docenti dovremmo insegnare alle future generazioni a essere modesti e prudenti nelle loro affermazioni, a essere contrari a ogni forma di fanatismo. Dovremmo insegnare loro che ciò che non capiscono, ciò che non amano o disapprovano ha comunque diritto di esistere, e che «*nessuna teoria scientifica, nessun teorema matematico può concludere alcunché in modo definitivo nella storia della scienza*».

Ancora a proposito di principi dell'educazione:

«*(…) nuovi capitoli dovrebbero essere inclusi nei libri di pedagogia. Capitoli dai titoli poco familiari come: "Metodi per stimolare la curiosità", "Come insegnare a pensare in modo scientifico", "Come insegnare il rispetto dei fatti", e – Dio ci salvi – "****Come insegnare a dubitare****"*».

Lakatos vede un'unità, una continuità tra la logica della scoperta e quella della giustificazione e lo mostra mirabilmente nel suo *Proofs and Refutations*.

Il contributo di Lakatos alla ricerca scientifica si concretizza attorno al suo *Methodology of Scientific Research Programmes (MSRP)*, cioè alla metodologia dei programmi di ricerca scientifici (1965). Ecco alcuni principi basilari:

i) la conoscenza di sfondo perde la sua connotazione temporale per acquistarne una euristica: essa non è più costituita dal patrimonio non problematico della scienza in un dato periodo, ma piuttosto dall'insieme dei fatti usati nella costruzione della teoria;

ii) il sostegno empirico non è una relazione a due posti fra teoria ed evidenza, ma a tre posti fra una teoria, i risultati empirici e la conoscenza di sfondo;

iii) se il modo in cui una teoria è stata costruita diventa decisivo per la valutazione dei meriti scientifici della stessa, allora il sostegno empirico è *heuristics dependent* e la distinzione fra contesto della scoperta e contesto della giustificazione (Reichenbach, Popper) va ripensata;

iv) un fatto noto può essere «nuovo» rispetto a una teoria se questa non è stata esplicitamente accomodata per spiegarlo.

Altra perla per la didattica della matematica:

«*(…) occorre sfidare ancora una volta l'inespugnabile fortezza dei dogmatici mostrando come la matematica* ***viva, in crescita****, raramente si esprime attraverso teorie assiomatico-formali*».

Lakatos ci rassicura quando asserisce che anche i matematici procedono per congetture, esperimenti e confutazioni. Già Mach (1905) scriveva che i grandi matematici al lavoro danno in tutto e per tutto l'impressione di sperimentatori che sondano per la prima volta un nuovo campo. E ancora: chiunque abbia cercato di risolvere problemi di matematica, di integrare delle equazioni, dovrà ammettere che le costruzioni mentali definitive sono precedute da esperimenti mentali. Per Lakatos, *dimostrazione informale* non è che un altro nome per *esperimento mentale*. Ciò apre la strada a un modo più creativo di «fare» matematica, infatti:

«*mentre in una teoria informale ci sono possibilità davvero illimitate di introdurre sempre più termini, sempre più assiomi ancora nascosti, sempre più regole ancora nascoste, nella forma di nuove intuizioni "ovvie", in una teoria formalizzata l'immaginazione è legata da un ristretto insieme ricorsivo di assiomi e da un numero esiguo di regole*».

Per farci capire, aggiungiamo ancora che, se Gödel ha mostrato che i metodi formali si sono rivelati incompleti, Lakatos ha argomentato che questi sono sempre stati e sempre saranno condannati all'errore. Infatti i sistemi formali sono stati progettati per formalizzare ciò che è informale, e quando siamo in grado di trovare asserti di una teoria informale che vogliamo mantenere come veri, e che contraddicono le assunzioni della teoria formale, allora tali asserti possono essere di fatto confutazioni della teoria (Berkson, 1978).

Infine, citiamo ancora le *regole euristiche* di Lakatos:

Regola 1. Se hai una congettura, preparati a dimostrarla e a confutarla.

Regola 2. Se hai un controesempio locale scarta la tua congettura, aggiungi alla tua analisi della dimostrazione un conveniente lemma che verrà confutato dal controesempio e sostituisci la congettura scartata con una congettura migliorata che incorpori quel lemma come una condizione.

Regola 3. Se hai un controesempio locale, fai un controllo per vedere se è anche globale. Se lo è, puoi facilmente applicare la regola 2.

Regola 4. Se hai un controesempio che è locale ma non globale, cerca di migliorare la tua analisi della dimostrazione sostituendo il lemma confutato con uno non falsificato.

Regola 5. Se hai controesempi di qualsiasi tipo, cerca di trovare mediante un tirare-a-indovinare-deduttivo un teorema più profondo per il quale essi non siano più controesempi.

In conclusione, definiamo la presente opera un libro fondamentale per la riflessione epistemologica e didattica degli insegnanti di matematica di ogni ordine di scuola.

Albrecht Beutelspacher – Pasta all'infinito – Ponte alle Grazie srl, Milano, 2000, pag. 277, € 14.46

È un bel romanzo, non d'amore, ma che riproduce in prima persona la storia di un giovane matematico tedesco – Albrecht Beutelspacher – che intraprende un viaggio in Italia e che soggiorna per sei settimane all'Aquila, presso due coniugi, entrambi matematici, che nella finzione letteraria assumono i nomi di Franco e Luigia.

Albrecht non era mai stato in Italia e non era nemmeno preparato a vivere «all'italiana», per cui il lettore, immedesimandosi nel protagonista, prova le sensazioni che tutti abbiamo provato una volta o l'altra in occasione di un soggiorno in terra straniera. Significativo è il giudizio che Albrecht si costruisce sul modo di vivere degli italiani:

«*In Italia tutto finisce sempre bene. E non perché lo Stato organizzi tutto alla perfezione. Anzi. E nemmeno perché gli italiani lavorano coerentemente per raggiungere i loro obiettivi. Al contrario, o quasi. E neppure perché sono semplicemente fortunati. O almeno non solo per quello. La mia sensazione è che l'Italia sia come un'ouverture di Rossini: già dalla prima nota si capisce che andrà a finire bene*».

A parte i problemi di ambientamento, ben presto il soggiorno di Albrecht si fa interessante anche dal punto di vista matematico. Egli è invitato dall'università dell'Aquila in qualità di «professore visitatore». I tre lavorano su problemi di matematica discreta (la teoria dei *blocking set*) e intrecciano le loro ricerche con gustosi inserti di conoscenze note, che possono stimolare anche il lettore non specialista. Così il semplice problema burocratico di assegnare ad Albrecht un codice fiscale, lancia i nostri amici su problemi non banali di crittografia. Tra l'altro vengono presentati anche i metodi per costruire i numeri ISBN dei libri e quello – forse più adeguato per applicazioni didattiche – della decifrazione e costruzione del codice EAN, o codice a barre, stampato sulle confezioni dei generi alimentari. Altre avvincenti questioni matematiche discusse dai tre spaziano dalla geometria finita alla sezione aurea, dai numeri primi alle approssimazioni di pi greco e infine alla numerabilità di certi insiemi infiniti. Insomma: una lettura divertente, stimolante ed anche interessante per gli spunti didattici che sa offrire.

Bruno D'Amore – Più che 'l doppiar de li scacchi s'inmilla: incontri di Dante con la matematica[1] **– Pitagora Editrice, Bologna, 2001, pag. 164, € 12.91**

La nostra rivista ha già ospitato articoli di Bruno D'Amore dedicati agli aspetti matematici contenuti nella Divina Commedia. Da tempo l'autore coltiva questa sua passione con costanza e con successo. Le sue conferenze sull'argomento e le sue «chiacchierate» con gruppi di studenti hanno sempre riscosso grandi entusiasmi. Ora Bruno ha finalmente riunito in un volume i risultati delle sue ricerche su Dante. Il volume è agile e si legge d'un fiato. Si provano diverse sensazioni forti, tipiche della vita di quell'epoca, a cavallo tra il XIII e il XIV secolo. Dalle pagine di D'Amore ci giungono i rumori, di quell'atmosfera medievale, in una campagna (fiorentina ed emiliana) selvaggia e ancora incontaminata (diremmo oggi); ci giungono anche gli odori delle osterie fumose, i profumi delle dame durante le feste nelle ricche ville fiorentine. Ma il messaggio trasmessoci contiene anche aspetti meno piacevoli, che riflettono la dura realtà della vita in quel tempo: la bacchetta dei sorveglianti nelle scuole d'abaco che spesso rompeva le dita dei malcapitati allievi disattenti o presunti tali, la lotta quotidiana per procacciarsi il cibo e un cantuccio caldo dove trascorrere le lunghe notti invernali, l'ar-

1. Libro presentato alla Biblioteca cantonale di Lugano, la sera del 25 aprile 2002, dall'autore accompagnato dal critico letterario Gian Mario Anselmi e da Gianfranco Arrigo.

roganza dei potenti, l'ingiustizia dilagante. Immerso in queste sensazioni, nel corso dei suoi continui viaggi, Dante si concede momenti di creatività e costruisce i suoi versi più significativi, dal punto di vista matematico. Ed ecco che l'avventura si fa interessante anche e soprattutto per il lettore docente di matematica. Come in un film a episodi, ad ogni avventura è legato un contenuto matematico: i metodi del calcolo numerico, il problema della quadratura del cerchio, la leggenda di Sissa Nassir, l'inventore degli scacchi (che dà il titolo al libro), le successioni numeriche (numeri quadrati, triangolari, di Fibonacci, ecc.), il gioco dei dadi e quindi alcuni problemini di probabilità, il paradosso di Zenone d'Elea (più noto come il problema di Achille e della tartaruga), il calcolo dell'altezza della torre tramite proporzione e molti altri piccoli spunti, presentati sempre nel solco della storia di Dante e sempre con l'arguzia che si direbbe... di un fiorentino.

In conclusione, un libro che si può leggere benissimo, anche nei momenti di relax, un libro che è un inno alla matematica e alla vita; un libro anche da regalare: non necessariamente a una persona che conosce la matematica.

Philippe Clarou, Colette Laborde, Bernard Capponi – géométrie avec cabri: scénarios pour le lycée – cndp académie de Grenoble, Grenoble, 2001, pag. 155, € 20

Colette Laborde è persona conosciuta da noi e in campo internazionale come grande specialista di cabri-géomètre: ci garantisce, insieme ai due coautori, un manuale interessante e di qualità, accompagnato da un CD per Macintosh. Le illustrazioni sono per la maggior parte videate delle calcolatrici TI-92 e TI-89. Ovviamente il tutto può essere fatto meglio con Cabri-Géomètre II, che gira sia su Windows sia, meglio ancora, su Macintosh. Il manuale propone una successione di situazioni geometriche che si possono studiare nelle classi del liceo. Dopo un'introduzione sull'uso di cabri-géomètre, vengono trattati:

— configurazioni e aree
— vettori
— trasformazioni geometriche
— due esempi di situazioni nello spirito dei nuovi programmi: «funzioni trigonometriche» e «una losanga articolata».

Per ogni situazione vengono presentati gli obiettivi, i prerequisiti, una stima dei tempi e la consegna per l'allievo, che richiama sempre un foglio di cabri preparato e registrato sul CD che accompagna il testo.

L'opera, scritta in francese, dà agli insegnanti liceali – anche e soprattutto ai più scettici nei confronti dell'integrazione dell'informatica nell'insegnamento – un'ottima occasione per cambiare, diremmo meglio per rivoluzionare finalmente il modo di fare geometria al liceo. Dopo aver esaminato le proposte degli autorevoli amici di Grenoble, diventerà più arduo per un docente, riproporre l'alibi: «*vorrei fare qualcosa in questa direzione, ma non ho ancora visto esempi significativi*».

Progetto grafico
Bruno Monguzzi
Fotocomposizione
Taiana
Stampa
Veladini

Redazione
Laboratorio di didattica della matematica
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera

Telefono
091 814 34 28/57/58
Fax
091 814 44 92

Amministrazione
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera
Fax
091 814 44 92

Esce due volte all'anno
a maggio e a dicembre

Abbonamento annuo
Sfr. 30.–
€ 16

Bollettino dei docenti di matematica
44

In questo numero: contributi etnografici e storici – in chiave matematica – di Bruno D'Amore e Jean Dhombres; una comunicazione didattica di Michel Chastellain; contributi teorici di didattica da parte di Gianfranco Arrigo e Giorgio Mainini; proposte didattiche di Azzurra Marchio e Samuele Sartori; laboratorio matematico per il liceo di Claudio Beretta e per la scuola media di Edoardo Montella; segnalazioni e recensioni di rilievo; il quiz di Aldo Frapolli.

Direzione
Gianfranco Arrigo

Comitato di redazione
Claudio Beretta, Filippo Di Venti, Aldo Frapolli,
Carlo Ghielmetti, Corrado Guidi, Giorgio Mainini,
Remigio Tartini

Comitato scientifico
Sergio Albeverio, Giulio Cesare Barozzi, Mauro Cerasoli,
S.D. Chatterji, Bruno D'Amore, André Delessert,
Colette Laborde, Vania Mascioni, Antonio Steiner

ISBN 88-86486-38-3
Fr. 18.–

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'istruzione
e della cultura