In questo numero: contributi matematici di Walter Gautschi, Mauro Cerasoli e Giorgio Mainini; riflessioni didattiche teoriche di Gianfranco Arrigo e Martha I. Fañdino Pinilla; il rapporto di una ricerca didattica effettuata da Alberto Piatti; proposte concrete di Corrado Guidi e Azzurra Marchio; i laboratori che vedono coinvolti Patrizia Fedeli Simonetto e Claudio Beretta; l'abituale quiz di Aldo Frapolli, segnalazioni e recensioni da non perdere.

ISBN 88-86486-43-X
Fr. 18.–

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport

45

Bollettino dei docenti di matematica

Dicembre 2002

Centro didattico cantonale

A cura
del Laboratorio di didattica della matematica

Bollettino dei docenti di matematica

45

Dicembre
2002

Ufficio
dell'insegnamento medio
Centro
didattico cantonale

Bollettino
dei docenti di matematica
45

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport

ISBN 88-86486-43-X

Bollettino dei docenti di matematica 45

Dicembre
2002

Ufficio dell'insegnamento medio
Centro didattico cantonale

Indice

Prefazione

Il numero si apre con la relazione scritta della conferenza che Walter Gautschi ha tenuto al Liceo di Bellinzona il 25 maggio 2002 sulla vita e sulle opere di Alessandro M. Ostrowski, uno dei più grandi matematici del XX secolo, che trascorse gli ultimi anni nella sua magnifica villa di Montagnola. Segue poi un interessante quanto attuale articolo di Giorgio Mainini sulla matematica elettorale: si spera così di dare alcune idee basilari agli insegnanti che volessero sfruttare il periodo delle elezioni politiche cantonali per far comprendere agli allievi che la matematica entra dappertutto, anche nelle istituzioni. Il terzo articolo è di Mauro Cerasoli e ci mostra un modo semplice e costruttivo per raggiungere la formula di Binet che esprime l'ennesimo numero di Fibonacci: ne facciamo dono ai docenti delle superiori, sicuri che ne faranno buon uso. Giorgio Mainini ritorna con un arguto quanto erudito saggio sulla relazione tra retorica (intesa in senso genuino) e rigore (logico-matematico).

La parte dedicata alla didattica si apre con un contributo di Gianfranco Arrigo, che continua il discorso sull'insegnamento per competenze, iniziato sul numero precedente. Abbiamo poi il piacere di presentare il primo intervento in lingua italiana di Martha Isabel Fandiño Pinilla, che con garbo e competenza ci invita a una riflessione sulla trasposizione didattica. Segue il contributo di un altro esordiente, Alberto Piatti, che ci presenta una sua ricerchina sul senso dell'infinito: preludio a una ricerca internazionale appena iniziata che vede interessati l'ASP di Locarno, il NRD di Bologna e il MESCUD di Bogotà.

L'intermezzo è assicurato dal Quiz numero 28 del solito… pepato Aldo Frapolli. La Bricolla offre due perle didattiche di Corrado Guidi e Azzurra Marchio. Patrizia Fedeli è la stimolatrice… caparbia di curiosità numeriche che lei vede, intuisce e lascia poi alla riflessione di chi accetta di assumersi il non facile compito di dare a queste intuizioni una forma matematica generale. Troviamo poi un nuovo contributo di Claudio Beretta che questa volta concerne la spirale logaritmica. Le segnalazioni e soprattutto le recensioni costituiscono un finale tutt'altro che marginale. Una riflessione sulle recensioni: da un paio di numeri ci siamo orientati verso la presentazione di letture divulgative e accattivanti riguardanti matematici o questioni matematiche, con la speranza che, con l'aiuto dei docenti, si possano finalmente dotare le biblioteche scolastiche di testi aggiornati che avvicinino i giovani all'affascinante mondo della matematica… non scolastica.

Infine ci scusiamo con i lettori per aver dovuto tagliare, per serie ragioni di spazio, sia la preannunciata seconda parte di Edoardo Montella sulle sezioni piane del cubo, sia il contributo di Jean Dhombres su matematica e marina: appariranno sicuramente sul prossimo numero.

I. Varia

1. Alessandro M. Ostrowski (1893-1986) La sua vita e le opere[1]

Walter Gautschi[2]

This article praises the great Russian mathematician Alexander Marcovic Ostrowski, who was born in Kiev in 1893 and died in Montagnola (Ticino) in 1982. After his retirement, Ostrowski and his wife resided in Montagnola, in a beautiful villa with a fine view over the Lake of Lugano. Their hospitality was wonderful: in those years quite a lot of mathematicians came to Montagnola from all over the world. Ostrowski was also concerned with school matters and spent some time at the Liceo of Lugano, as exams commissioner. He took part in the introduction of the first computer in the school system (the legendary Olivetti P 101) and he was close to some high secondary school teachers of mathematics.

Quale uno degli ultimi allievi del professor Ostrowski, mi fa immenso piacere ricordare la vita e le opere di uno dei grandi matematici del ventesimo secolo. Va da sé che non è possibile farlo se non in modo sommario.

La madre di Alessandro.

Alessandro Marcovic Ostrowski nacque a Kiev il 25 settembre 1893, figlio di Marco Ostrowski, un mercante di Kiev, e di Vera Rashevskaya. Frequentò la scuola primaria a Kiev e per un anno una scuola privata, prima di entrare all'Istituto Commerciale di Kiev. Colà, i suoi maestri subito diventarono consci dei talenti straordinari di Alessandro nel campo della matematica e lo raccomandarono a Dmitry Alessandrovic Grave, professore di matematica all'Università di Kiev. Grave, egli stesso, fu allievo di Chebyshev a San Pietroburgo prima di assumere una posizione all'Università di Kharkov e, nel 1902, la cattedra di matematica all'Università di Kiev. È considerato il fondatore della Scuola russa di algebra, avendo lavorato sulla teoria di Galois, sugli ideali, e sull'equazione algebrica di quinto grado. Il seminario di algebra che egli teneva all'Università di Kiev era famoso a suo tempo.

In seguito a qualche colloquio personale con Alessandro, Grave si convinse delle sue abilità eccezionali e lo accettò – un ragazzo di 15 anni – come membro regolare del suo seminario. Alessandro frequentò il seminario per tre anni, mentre allo stesso tempo completava i suoi studi all'Istituto Commerciale. Durante questo periodo scrisse, con l'aiuto di Grave, il suo primo lavoro matematico (in Ucraino), una lunga memoria sui campi di Galois, lavoro che qualche anno dopo (nel 1913) apparve in stampa.

1. Relazione presentata al convegno della Fondazione Ostrowski tenutosi a Bellinzona, nei giorni 24-25 maggio 2002
2. Department of Computer Sciences Purdue University West Lafayette, IN 47907- 1398, U.S.A.


Alessandro, ca. 1915.

Quando giunse il tempo di iscriversi all'università, ad Alessandro fu rifiutata l'ammissione all'Università di Kiev per motivi puramente burocratici: egli si era diplomato all'Istituto Commerciale invece che al liceo! Il rifiuto spinse Grave a scrivere a Landau e Hensel chiedendo il loro aiuto. Tutti e due risposero in modo favorevole, invitando Ostrowski a recarsi in Germania. Ostrowski scelse l'offerta di Hensel di studiare con lui all'Università di Marburgo. Dopo due anni a Marburgo accadde un altro evento di rottura – lo scoppio della Prima Guerra Mondiale – che rese Ostrowski un prigioniero civile. Solo grazie ad un intervento di Hensel furono alleviate le restrizioni imposte ai suoi movimenti e gli fu concesso di utilizzare la Biblioteca dell'Università. In verità, questo era tutto ciò di cui egli aveva bisogno. Fu durante questo periodo di isolamento che Ostrowski, quasi senza aiuto, sviluppò la sua teoria, ora famosa, della valutazione sui campi.

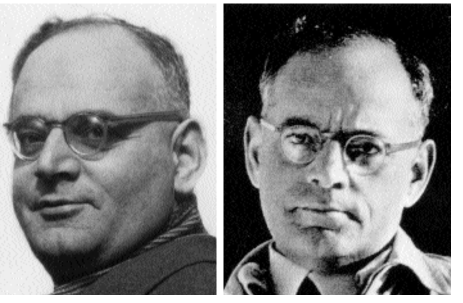
Terminata la guerra, e ristabilita la pace fra Ucraina e Germania, Ostrowski nel 1918 si spostò a Göttingen, allora centro mondiale della matematica. Colà, si distinse subito dagli altri studenti per la sua memoria fenomenale e la sua conoscenza già immensa, e di base ampia, della letteratura matematica. Più tardi, uno degli studenti ricordò che, a Göttingen, il compito fastidioso delle ricerche bibliografiche era estremamente facile: bastava chiedere allo studente russo, Alessandro Ostrowski, per ottenere una risposta immediata ed esauriente! Una volta tirò perfino Hilbert fuori dai guai, quando egli, durante una sua conferenza, aveva bisogno, come disse, di un bel teorema del cui autore, purtroppo, non riusciva più a ricordarsi. Fu Ostrowski a bisbigliargli: «Ma, Herr Geheimrat, questo è proprio uno dei suoi teoremi!».


David Hilbert.

Non sorprende, dunque, che Felix Klein si interessò ad Ostrowski, e lo assunse come uno dei suoi assistenti. Gli affidò, insieme a Fricke, l'edizione del primo volume della sua opera omnia. Nel 1920, Ostrowski si laureò *summa cum laude* con una tesi scritta sotto la guida di Hilbert e di Landau.
Anche con la sua tesi Ostrowski fece scalpore, avendo risolto, in parte, il diciottesimo problema di Hilbert. Riuscì a dimostrare, fra le altre cose, che la serie zeta di Dirichlet, $\zeta(x,s) = 1^{-s}\,x + 2^{-s}\,x^2 + 3^{-s}\,x^3 + \ldots$, non può soddisfare una equazione algebrica alle derivate parziali.

Dopo la sua laurea, Ostrowski partì da Göttingen per andare ad Amburgo dove, come assistente di Hecke, lavorò sulla tesi di abilitazione. Anche questo lavoro, trattandosi di moduli sopra un anello polinomiale, fu ispirato da Hilbert. L'abilitazione fu completata nel 1922, dopodiché egli ritornò a Göttingen per tenere lezioni sugli sviluppi recenti nella teoria delle funzioni complesse e per abilitarsi di nuovo nel 1923. Spese l'anno accademico 1925-26 ad Oxford, Cambridge, ed Edimburgo come stipendiato della Fondazione Rockefeller.

Ostrowski, il pattinatore.



Ostrowski, all'età dei 40 e 50.

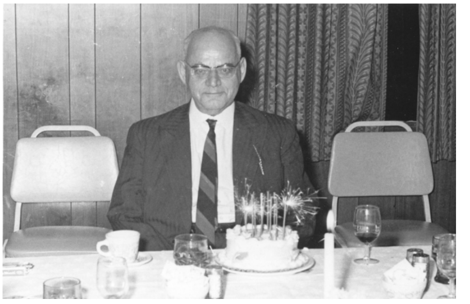
Appena ritornato a Göttingen, ricevette – ed accettò – una chiamata alla cattedra di matematica presso l'Università di Basilea. Il giornale locale (in occasione dell'ottantesimo compleanno di Ostrowski) non poté fare a meno di ricordare che 200 anni prima, l'Università aveva perso Euler (che andò a San Pietroburgo) perché, secondo leggenda, egli uscì perdente in un sistema di lotteria allora in uso per scegliere fra i candidati: in realtà fu probabilmente considerato troppo giovane per una cattedra universitaria. Adesso, però, l'Università ebbe fortuna, avendo portato Ostrowski dalla Russia a Basilea!

Ostrowski rimase a Basilea per tutta la sua carriera accademica e fu qui dove la maggior parte della sua opera matematica si sviluppò. Molti dei suoi lavori appartengono al dominio della matematica pura. Però, visite ricorrenti negli Stati Uniti alla fine degli anni quaranta ed ai primi dei cinquanta spinsero i suoi interessi verso problemi più applicativi, particolarmente verso metodi numerici per trasformazioni conformi, e verso problemi, allora emergenti, collegati ai metodi iterativi per la risoluzione dei grandi sistemi di equazioni lineari algebriche. Si applicò a questo lavoro con grande entusiasmo, anzi esuberanza, tanto che fu una volta sentito recitare, nelle aule del *National Bureau of Standards,* i versi di Gottfried Keller: «Trinkt, o Augen, was die Wimper hält, von dem goldnen Überfluss der Welt!»[3]. E davvero, in questo periodo cominciarono ad imporsi problemi affascinanti che richiedevano l'intervento preveggente ed immaginativo di tecniche matematiche avanzate.

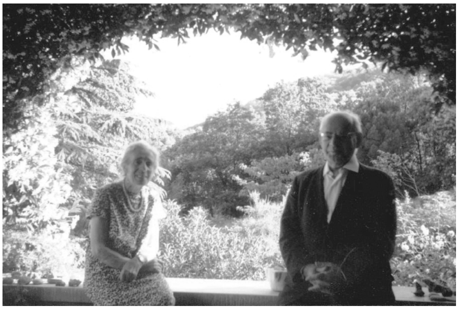
Nel 1949 Ostrowski si sposò con Margret Sachs, una psicoanalista della Scuola di Carl Gustav Jung e, a suo tempo, come essa stessa mi ha rivelato, segretaria e confidente di Carl Spitteler. La sua personalità calda ed incantevole aiutava molto ad ammorbidire lo stile di vita severo di Ostrowski, lo studioso, e portava nella loro vita una misura di gioia. Fu proprio quello il periodo in cui io feci la conoscenza di Ostrowski, essendo diventato suo allievo ed assistente, ed avendo avuto il piacere, in parecchie occasioni, di essere ospite a casa loro, nella parte vecchia della città.

Ostrowski andò in pensione dall'Università nel 1958. Non smise però la sua attività scientifica. Al contrario! Continuò, forse con passo ancor più veloce, a produrre risultati nuovi ed importanti fino ad ottant'anni inoltrati. All'età di novant'anni era ancora capace di seguire la pubblicazione presso Birkhäuser della sua opera omnia, che uscì in sei volumi negli anni 1983-85.

3. Come ricordato e gentilmente raccontato all'autore dalla Olga Taussky-Todd.



75° compleanno, Buffalo.

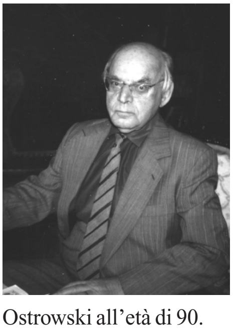


Margret ed Alessandro Ostrowski ad Almarost.

Dopo essere andato in pensione, Ostrowski e sua moglie presero residenza a Montagnola, dove precedentemente avevano fatto costruire una bella villa – Casa Almarost (ALexander MARgret OSTrowski), come l'hanno chiamata – che si affacciava sul Lago di Lugano. Erano sempre lieti di ricevere ospiti ad Almarost, e la loro ospitalità era leggendaria. La Signora Ostrowski, conoscendo bene le inclinazioni dei matematici, era solita guidare suo marito e i suoi ospiti giù nella biblioteca di Ostrowski per lasciarli soli per un pezzo, in modo che potessero aggiornarsi sulle più recenti novità e pettegolezzi matematici. Le pareti della biblioteca erano piene di libri, non tutti di matematica, ma una buona parte di fantascienza e romanzi polizieschi, il passatempo letterario favorito di Ostrowski.

Margret Ostrowski morì nel 1982, quattro anni prima della morte di suo marito, nel 1986. Sono sepolti nel bel cimitero di Gentilino, non lontano dalla tomba di Hermann Hesse, di cui erano amici.

I meriti di Ostrowski non si limitano alla sola ricerca; sono eminenti anche sul piano didattico. Inoltre, egli esercitò un'influenza considerevole sulla editoria matematica. Per quanto concerne l'insegnamento, i suoi tre tomi sul calcolo differenziale ed integrale, che cominciarono ad apparire a metà degli anni quaranta, ed in particolare la vasta collezione di esercizi, pubblicata più tardi separatamente con le soluzioni, sono modelli splendidi di esposizione matematica, che ancor oggi servono a formare generazioni di matematici e scienziati. Il suo libro sulla soluzione di equazioni e sistemi di equazioni nonlineari, pubblicato negli Stati Uniti nel 1960, con parecchie successive edizioni, continua ad essere uno dei trattati più usati in questo campo. Da ultimo, ma non per importanza, Ostrowski ebbe più di una dozzina di allievi, alcuni dei quali raggiunsero essi stessi statura internazionale, e tutti gli rimasero riconoscenti per aver aperto loro le bellezze della matematica e impartito i suoi elevati canoni di integrità intellettuale. Per quanto riguarda l'attività editoriale, Ostrowski per lungo tempo fu consulente per la casa editrice Birkhäuser e contribuì a stabilire e guidare la ben nota Serie Verde di libri di testo. In gran parte si può ascrivere a lui il merito per la posizione preminente assunta dalla Birkhäuser da allora in poi. I successi scientifici di Ostrowski ebbero ampi riconoscimenti. Gli furono assegnati tre dottorati ad honorem, uno dall'Istituto Federale di Tecnologia (ETH Zurigo) nel 1958, uno dall'Università di Besançon nel 1967, ed un altro nel 1968 dall'Università di Waterloo.



Ostrowski all'età di 90.

Prendiamo ora brevemente visione delle opere matematiche di Ostrowski. Un primo apprezzamento della vasta portata di queste opere può essere ottenuto dai titoli dei sei volumi dell'opera omnia:

Vol. 1. Determinanti, Algebra Lineare, Equazioni Algebriche
Vol. 2. Algebra Multivariata, Algebra Formale
Vol. 3. Teoria dei Numeri, Geometria, Topologia, Convergenza
Vol. 4. Analisi Reale, Equazioni Differenziali, Trasformazioni Differenziali
Vol. 5. Analisi Complessa
Vol. 6. Trasformazioni Conformi, Analisi Numerica, Miscellanea

Molti di tali lavori si trovano ai livelli più alti della matematica e possono essere qui citati solo mediante parole e frasi chiave. Lo stesso discorso si applica ai lavori che, benché più accessibili, sono difficili da riassumere adeguatamente in poche parole. Dei lavori che rimangono, qualche risultato è scelto in ordine cronologico e brevemente schematizzato in «estratti»: spero così di dare una impressione fugace del mondo matematico di Ostrowski. Sono aggiunte le date, per indicare il periodo della sua vita in cui sono stati scritti i lavori corrispondenti.

Volume 1

Regola dei segni di Descartes, Budan-Fourier, e Runge (1928-65); critica e rettifica della prima e quarta dimostrazione di Gauss del Teorema Fondamentale dell'Algebra (1933); lunga memoria sul metodo di Graeffe (1940); teoria generale delle norme vettoriali e matriciali (1955); convergenza dell'iterazione quoziente di Rayleigh per il calcolo degli autovalori reali di una matrice (1958-59); teoria di Perron-Frobenius delle matrici non negative (1963-64).

Estratto 1.1: Matrici con *diagonale dominante* (1937),

$$\mathbf{A} = [a_{ij}], \quad d_i := |a_{ij}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \ > 0, \quad \text{per ogni } i.$$

Hadamard nel 1899 aveva dimostrato che per tali matrici si ha det $\mathbf{A} \neq 0$. Ostrowski migliorò questo risultato dimostrando che

$$|\det \mathbf{A}| \geq \prod_i d_i$$

Estratto 1.2: M-Matrici (1937),

$$\mathbf{A} = [a_{ij}], \quad a_{ii} > 0, \quad a_{ij} \leq 0, \quad (i \neq j),$$

$$a_{ii} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \ldots, \quad \det \mathbf{A} > 0.$$

Teorema. Se A è una M-matrice, allora $\det \mathbf{A}^{-1} \geq 0$.

La teoria delle M-matrici e la teoria ad essa connessa delle H-matrici del 1937 si sono dimostrate strumenti potenti nell'analisi dei metodi iterativi per risolvere sistemi di equazioni lineari di grandi dimensioni. In più, questa teoria fornisce elegantemente la base per la teoria generale dei domini di inclusione per autovalori di matrici, come per esempio nel caso del ben noto teorema di Gerschgorin. Vedi anche Estratto 2.2.

Estratto 1.3: *Continuità delle radici* di un'equazione algebrica (1939).

È ben noto che le radici di un'equazione algebrica dipendono in modo continuo dai coefficienti dell'equazione. Ostrowski ci dà una formulazione quantitativa di questo fatto.

Teorema. Siano x_ν, y_ν rispettivamente gli zeri di

$$p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n, \qquad a_0 a_n \neq 0$$

e di $q(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n, \qquad b_0 b_n \neq 0$.

Se $\quad b_\nu - a_\nu = \varepsilon_\nu a_\nu, \quad |\varepsilon_\nu| \leq \varepsilon, \quad 16\, n\, \varepsilon^{1/n} \leq 1$

allora $\left| \dfrac{x_\nu - y_\nu}{x_\nu} \right| \leq 15\, n\, \varepsilon^{1/n}$

Estratto 1.4: Un piccolo gioiello matematico (1979).

Teorema. Siano p e q polinomi di grado m e n, rispettivamente. Si definisca

$$M_f = \max_{|z|=1} |f(z)|$$

Allora $\gamma M_p M_q \leq M_{pq} \leq M_p M_q, \quad \gamma = \sin^m\left(\dfrac{\pi}{8\,m}\right) \sin^n\left(\dfrac{\pi}{8\,n}\right)$

L'interesse qui riguarda il limite inferiore, quello superiore essendo banale. È vero che questo limite inferiore può essere abbastanza piccolo, specialmente se m e/o n sono grandi. Ma i gioielli non devono essere pratici, basta che brillino!

Volume 2

Algebra dei campi finiti (1913); teoria della valutazione su un campo (1913-17); condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di una base finita per un sistema di polinomi a più variabili (1918-20); qualche questione di irriducibilità (1922, 1975-77); teoria degli invarianti di una forma binaria (1924); teoria aritmetica dei campi

(1934); struttura degli anelli polinomiali (1936); convergenza di metodi iterativi a blocchi (1961); teoria di Kronecker dell'eliminazione per anelli polinomiali (1977).

Il fatto, dimostrato da Ostrowski nel 1917, che i campi dei numeri reali e complessi sono, a meno di isomorfismi, i soli campi completi (Ostrowski usa il termine più vecchio «perfetto» in luogo di «completo») rispetto ad una valutazione archimedea è noto oggi nella teoria della valutazione come il «Teorema di Ostrowski» (P. Roquette, 2002).

Estratto 2.1: Calcolo di polinomi (1954). Se

$$p(x) = a_0\, x^n + a_1\, x^{n-1} + \ldots a_{n-1}\, x + a_n,$$

allora, secondo la *regola di Horner*, si ha $p(x) = p_n$, dove

$$p_0 = a_0, \quad p_\nu = x\, p_{\nu-1} + a_\nu, \quad \nu = 1,2,\ldots,n$$

Complessità: n addizioni, *n* moltiplicazioni.

Teorema. La regola di Horner è ottimale rispetto all'addizione e ottimale rispetto alla moltiplicazione, quando $n \leq 4$.

È stato dimostrato più tardi (nel 1959) da V. Ja. Pan che lo schema di Horner, infatti, *non* è ottimale rispetto alla moltiplicazione, quando $n > 4$.

In vista di questo lavoro, l'anno 1954 è generalmente considerato «l'anno della nascita della teoria della complessità algebrica» (P. Bürgisser and M. Clausen, 1996).

Estratto 2.2: Proprietà metriche delle *matrici a blocchi* (1961),

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \ldots & \mathbf{A}_{1n} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \ldots & \mathbf{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{n1} & \mathbf{A}_{n2} & \ldots & \mathbf{A}_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{\nu\mu} \in \mathbf{R}^{\nu\times\mu}$$

Domanda: È ancora valido il teorema di Hadamard se $|\cdot|$ è sostituito da $\|\cdot\|$?

Risposta: Sì, se

$$\begin{bmatrix} \|\mathbf{A}_{11}\|^* & -\|\mathbf{A}_{12}\| & \ldots & -\|\mathbf{A}_{1n}\| \\ -\|\mathbf{A}_{21}\| & \|\mathbf{A}_{22}\|^* & \ldots & -\|\mathbf{A}_{2n}\| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\|\mathbf{A}_{n1}\| & -\|\mathbf{A}_{n2}\| & \ldots & \|\mathbf{A}_{nn}\|^* \end{bmatrix}$$

è una M-matrice, dove

$$\|\mathbf{B}\|^* = \min_{\|x\|=1} \|\mathbf{B}\, x\|, \quad \|\mathbf{B}\| = \max_{\|x\|=1} \|\mathbf{B}\, x\|$$

Volume 3

Esistenza di una base «regolare» per polinomi, con coefficienti in un campo aritmetico finito, che assumono valori interi per argomenti interi (1919); teoria aritmetica dei numeri algebrici (1919); equazioni e approssimazioni diofantee (1921-27, 1964-82); criteri di esistenza di uno zero comune a due funzioni reali continue nell'interno e sulla frontiera di un disco (1933); topologia degli elementi di linee orientate (1935); evolute ed evolventi di una curva piana e un ovale in particolare (1955); geometria differenziale di curve piane parallele (1955); criterio di convergenza e divergenza di Ermakov per $\int^{\infty} f(x)\,dx$ (1955); criteri necessari e sufficienti per due elementi di linee affinché siano connettibili mediante una curva con curvatura monotona (1956); comportamento degli elementi dell'iterazione punto fisso nel caso di divergenza (1956); addizione di serie positive o alternanti lentamente convergenti (1972).

Estratto 3.1: Prodotti infiniti (1930),

$$x_0 = x, \quad x_{\nu+1} = \varphi(x_\nu), \quad \nu = 0,1,2,\ldots,$$

$$\prod_{\nu=0}^{\infty} (1 + x_\nu) = \Phi(x)$$

Esempio: prodotto di Eulero $\varphi(x) = x^2, \quad \Phi(x) = (1-x)^{-1}$

Problema: Determinare *tutti* i prodotti che convergono in un intorno di x=0, e per cui φ è razionale e Φ algebrica. **Soluzione:** enumerazione completa.

Estratto 3.2: Serie «normali» di potenze (1930),

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu z^\nu \quad \text{con} \quad a_\nu^2 \geq a_{\nu-1}\, a_{\nu+1}$$

e tutti i coefficienti fra due positivi essendo anch'essi positivi.

Teorema. Il prodotto di due serie normali di potenze, se esiste, è anch'esso normale.

Volume 4

Serie di Dirichlet ed equazioni differenziali algebriche, tesi Göttingen (1919); rafforzamento, o semplificazione delle dimostrazioni, di molti risultati dell'analisi reale (1919-38); varie classi di trasformazioni di contatto nel senso di S. Lie (1941-42); trasformazioni invertibili di elementi di linee (1942); condizioni di integrabilità per equazioni a derivate parziali (1943); integrali indefiniti di funzioni «elementari», teoria di Liouville (1946); funzioni convesse nel senso di Schur con applicazioni alle proprietà spettrali di matrici hermitiane (1952); teoria delle caratteristiche per equazioni alle derivate parziali del primo ordine (1956); punti di attrazione e di repulsione per l'iterazione punto fisso nello spazio Euclideo (1957); univalenza di trasformazioni nonlineari nello spazio euclideo (1958); una scomposizione di un operatore matriciale differenziale ordinario del secondo ordine (1961); teoria delle trasformazioni di Fourier (1966); studio del resto nella formula di Eulero-Maclaurin (1969-70); sviluppo asintotico di integrali che dipendono da un parametro grande (1975).

Una tecnica introdotta nel lavoro del 1946 sulla teoria di Liouville, nella letteratura odierna, è nota come il «metodo di Hermite-Ostrowski» (J. Davenport, Y. Siret, and E. Tournier, 1993). Questo lavoro ha assunto una rinnovata importanza in vista della sua applicabilità alle tecniche di integrazione formale in sistemi di *computer algebra*.

Estratto 4.1: La *disuguaglianza* (frequentemente citata) *di Ostrowski-Grüss* (1970),

$$\left|\int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx - \int_0^1 f(x)\, dx \int_0^1 g(x)\, dx\right| \le \frac{1}{8} \operatorname*{osc}_{[0,1]} f \cdot \max_{[0,1]} |g'|$$

Estratto 4.2: *Integrale Cauchy-Frullani* generalizzato (1976),

$$\int_0^\infty \frac{f(a\,t) - f(b\,t)}{t}\, dt = \left[M(f) - m(f)\right] \ln \frac{a}{b}, \quad a > 0, b > 0,$$

dove

$$M(f) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t)\, dt, \quad m(f) = \lim_{x \downarrow 0} x \int_x^1 \frac{f(t)}{t^2}\, dt$$

Nella versione originale della formula ci sono valori puntuali, $f(\infty)$ e $f(0)$, al posto dei valori medi $M(f)$ e $m(f)$.

Volume 5

Teoremi sulle serie di potenze aventi lacune, e fenomeni di «sopraconvergenza» ad esse connessi (1921-30); ricerche relative al teorema di Picard (1925-33); funzioni quasi-analitiche, teoria di Carleman (1929); prolungamento analitico delle serie di potenze e di Dirichlet (1933,1955)

Volume 6

Dimostrazione costruttiva del teorema di Riemann sulla trasformazione conforme (1929); comportamento al contorno delle trasformazioni conformi (1935-36); il metodo di Newton per una singola equazione e un sistema di due equazioni: convergenza, stime degli errori, stabilità rispetto agli errori di arrotondamento (1937-38); convergenza dei metodi di rilassamento per sistemi lineari ad n equazioni, parametri ottimali di rilassamento per n=2 (1953); soluzione iterativa di equazioni integrali nonlineari per la funzione al contorno di una trasformazione conforme, applicazione alla trasformazione conforme di un'ellisse su un disco (1955); «convergenza assoluta» di metodi iterativi per la risoluzione di sistemi lineari (1956); convergenza dell'iterazione di Steffensen (1956); soluzione approssimata di sistemi omogenei di equazioni lineari (1957); un artificio di Gauss per accelerare metodi iterativi (1958); analisi di convergenza del metodo di Muller per la risoluzione di equazioni nonlineari (1964); convergenza dell'iterazione punto fisso in uno spazio metrico in presenza di «errori di arrotondamento» (1967); convergenza del metodo della più ripida discesa (1967); un algoritmo di discesa per equazioni algebriche (1969); il metodo di Newton in spazi di Banach (1971); stime degli errori a *posteriori* in processi iterativi (1972-73); recensioni di libri, discorsi pubblici, necrologi (G.H. Hardy, Wilhelm Süss, Werner Gautschi) (1932-75).

Estratto 6.1*:* Matrici «vicine» ad una matrice triangolare (1954),

$$\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right],\quad \left|a_{ij}\right|\le m\ \ (i>j),\quad \left|a_{ij}\right|\le M\ \ (i<j),\quad 0<m<M$$

Il caso limite m=0 corrisponde ad una matrice triangolare; i suoi autovalori sono gli elementi sulla diagonale. Se m è piccolo, ci si aspetta che gli autovalori rimangano vicini agli elementi sulla diagonale. Questo è stato espresso da Ostrowski nella maniera seguente.

Teorema. Tutti gli autovalori di **A** sono contenuti nell'unione dei dischi

$$\cup_i D_i,\ \ D_i=\left\{z\in C:\left|z-a_{ii}\right|\le\delta(m,M)\right\}$$

dove $\delta(m,M)=\dfrac{M\cdot m^{1/n}-m\cdot M^{1/n}}{M^{1/n}-m^{1/n}}$

La costante $\delta(m,M)$ è la migliore possibile.

Estratto 6.2: La formula di Moivre-Laplace (1980). Se

$$M(n)=\sum_{|\nu-np|\le\eta\sqrt{2npq}}\binom{n}{\nu}p^{\nu}q^{n-\nu},\quad 0<p<1,\quad p+q=1,\quad n>0,$$

allora $M(n)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{\eta}e^{-t^2}\,dt+\rho(\eta,n)$

dove $\rho(\eta,n)=\dfrac{r_n}{\sqrt{2\pi npq}}\,e^{-\eta^2}+0(1/n),\quad n\to\infty$

e con R(x)=x–|x|,

$$r_n=1-R\left(nq+\eta\sqrt{2npq}\right)-R\left(np+\eta\sqrt{2npq}\right)$$

I numeri r_n sono densi dappertutto nell'intervallo [–1,1]. Prima del lavoro di Ostrowski, la formula era apparsa non correttamente nella letteratura, con 1 al posto di r_n.

Per concludere, aggiungo qualche commento generale sul lavoro di Ostrowski. A parte la varietà caleidoscopica dei temi da lui trattati, una qualità caratteristica del suo lavoro consiste in un forte desiderio di andare a fondo nelle cose, di districare gli aspetti essenziali di un problema ed i concetti fondamentali necessari per trattarlo in modo soddisfacente. Ciò è accoppiato ad una inesorabile volontà di essere esauriente. Sono notevoli anche i suoi frequenti tentativi di stabilire risultati, perfino quelli più classici, sotto le ipotesi più deboli possibili, e la sua gioia nel trovare dimostrazioni brevi e succinte. Una buona parte del lavoro di Ostrowski ha una qualità definitamente costruttiva, e tutti i lavori mostrano una destrezza da maestro nell'uso di tecniche matematiche avanzate, in particolare di tecniche analitiche di stima. Il suo lavoro porta l'impronta di una cultura erudita, proveniente dallo studio attento della letteratura, non solo di quella corrente, ma anche, e soprattutto, delle fonti originali.

Qui sotto è compilato un elenco di fonti, alcune delle quali sono state usate liberamente nella preparazione del mio articolo.

1. Eichler, Martin, Alexander Ostrowski. Über sein Leben und Werk. *Acta Arith.* 51 (1988) (4), 295-298.
2. Faddeev, D.K., On R. Jeltsch-Fricker's paper «In memoriam: Alexander M. Ostrowski (1893-1986)» (In russo). *Algebra i Analiz* 2 (1990)(1), 242-243. [Traduzione inglese nel *Leningrad Math. J.* 2 (1991)(1), 205-206.]
3. Gautschi, Walter, To Alexander M. Ostrowski on his ninetieth birthday. *Linear Algebra Appl.* 52/53 (1983), xi-xiv.
4. Gautschi, Walter, Alexander Ostrowski 90jährig. *Neue Zürcher Zeitung,* settembre 24, 1983.
5. Gautschi, Walter, Obituary: A.M. Ostrowski (1893-1986). *SIAM Newsletter 20* (gennaio 1987), 2, 19.
6. Gautschi, Walter, Ostrowski and the Ostrowski Prize. *Math. Intelligencer 20* (1998)(3), 32-34. [Traduzione tedesca edita nell'*Uni Nova* 87 (giugno 2000), 60-62, Università di Basilea.]
7. Jeltsch-Fricker, Rita, In memoriam: Alexander M. Ostrowski (1893 bis 1986). *Elem. Math.* 43 (1988)(2), 33-38. [Traduzione russa nel *Algebra i Analiz 2* (1990)(1), 235-241; traduzione inglese annotata nel *Leningrad Math.].* 2 (1991)(1), 199-203.]
8. Lancaster, Peter, Alexander M. Ostrowski, 1893-1986. *Aequationes Math. 33* (1987) (2-3), 121-122.
9. Rassias, John Michael, Stefan Banach, Alexander Markowic Ostrowski, Stanislaw Marcin Ulam. In *Functional analysis, approximation theory and numerical analysis,* John M. Rassias, ed., World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1994, 1-4.
10. Bibliography of the works of A.M. Ostrowski. *Aequationes Math. 2* (1968)(l), 3-11.
11. Additions and corrections to the bibliography of the works of A.M. Ostrowski. *Aequationes Math.* 3 (1969)(3), 313.
12. Liste aller Publikationen von Alexander Ostrowski, *Acta Arith.* 51 (1988)(4), 299-309.
13. http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/ Ostrowski.html

2. Matematica elettorale

Giorgio Mainini

With the agreement to the initiative named "For the reintroduction of civics in schools", on November 5th, 2001, the Great Council of Ticino adopted a legislative measure: the new article 23a of the Law on Education, which says:

'In the secondary, high secondary and professional schools the teaching of civics and the education to citizenship must be ensured.'.

This paper is meant to be a contribution from Mathematics to the new and, hopefully, revisited "sister" subject.

Accettando l'iniziativa denominata «Per la reintroduzione della civica nelle scuole», il Gran Consiglio ha risposto il 5 novembre 2001 con un provvedimento legislativo: il nuovo articolo 23a della Legge sulla scuola, che recita:

1. Nelle scuole medie, medie superiori e professionali devono essere assicurati l'insegnamento della civica e l'educazione alla cittadinanza.

Il presente vuol essere un contributo della Matematica alla nuova e, ci si augura, ringiovanita «sorella».

La trattazione delle teorie politiche che sostengono le varie modalità di ripartizione dei seggi (totalitario, maggioritario, proporzionale, con o senza sbarramento a un dato percento, …) esula da questo contesto: in Ticino, almeno per ora, vige il sistema proporzionale (sia nei Comuni – Consigli comunali e Municipi, sia nel Cantone – Gran Consiglio e Consiglio di Stato, sia nella Confederazione – Consiglio Nazionale; per il Consiglio degli Stati è invece previsto il sistema maggioritario) e di questo mi occuperò.

Non si dimentichi, inoltre, che il Ticino è stato, nel 1890, il primo Stato al mondo dopo la Danimarca (che l'aveva introdotto solo per la Camera Alta) ad introdurre il sistema proporzionale per l'elezione del legislativo e che è uno dei soli due cantoni (l'altro è Zugo) che lo adotta anche per l'elezione dell'esecutivo.

Il **problema**, fondamentalmente, è il seguente:

se k partiti (o coalizioni di partiti: nel seguito, semplicemente, partiti), P_k, ottengono ognuno V_k voti (comunque calcolati: schede, voti espressi, voti espressi e non espressi, …), per un totale complessivo di V voti, e i seggi da assegnare sono S, quanti seggi, S_k, vanno a ciascun partito in modo che i rapporti V_k/V e S_k/S siano i «più uguali» possibile?

Esempio «facile»:

Pk	**Vk**	**Sk**	**poiché**
P1	200	1	$\frac{200}{1400} = \frac{1}{7}$
P2	200	1	$\frac{200}{1400} = \frac{1}{7}$
P3	600	3	$\frac{600}{1400} = \frac{3}{7}$
P4	400	2	$\frac{400}{1400} = \frac{2}{7}$
	V = 1400	S = 7	

Esempio «difficile»:

Pk	**Vk**	**Sk**	**quindi**
P1	200	S1	$\frac{200}{1500} = \frac{S1}{7}$
P2	200	S2	$\frac{200}{1500} = \frac{S2}{7}$
P3	600	S3	$\frac{200}{1500} = \frac{S3}{7}$
P4	500	S4	$\frac{500}{1500} = \frac{S4}{7}$
	V = 1500	S = 7	

da cui

S_1=1400:1500=0,9333… , S_2=1400:1500=0,9333… ,

S_3=4200:1500=2,8 , S_4=3500:1500=2,3333…

Si tratta, in buona sostanza, di trovare un metodo che consenta di «arrotondare» numeri non interi a numeri interi.

Nell'esempio «difficile» i partiti P_1, P_2 e P_3 potrebbero sostenere che un buon metodo è quello di arrotondare all'intero più vicino, ottenendo 1, 1 e 3 seggi. Il partito P_4, però, potrebbe controbattere che, avendo raccolto appena un sesto di voti in meno di P_3, non è «equo» che abbia un numero di seggi inferiore di un terzo. Si capisce quindi che, volente o nolente, la matematica dovrà piegarsi alla politica. Si capisce quindi anche perché *equo* è stato scritto tra virgolette.

Sul problema dell'«arrotondamento» si sono chinati un gran numero di pensatori, ognuno proponendo un metodo suo: qui se ne prenderanno in considerazione solo alcuni, con l'ipotesi aggiuntiva che non si ponga nessun sbarramento.

Due osservazioni sono da farsi subito:

— ogni metodo incorpora «sistemi di autodistruzione»: casi limite, cioè, dove il metodo, anche se apparentemente «equo», crea iniquità e paradossi. La ricerca di tali casi limite (cioè numeri «mostruosi» di voti) è lasciata alla buona volontà del lettore interessato;

— per ogni metodo, inoltre, è da prevedere una «via di fuga» per i casi in cui si dovesse avere parità di diritto all'acquisizione di seggi: di solito si prevede il sorteggio.

1. Sistema «automatico»

Si stabilisce, *prima* della votazione, un *numero elettorale* (n): si calcolano poi gli

$$S_k = \mathrm{INT}\left(\frac{V_k}{n}\right)^1.$$

Il sistema, in sé semplicissimo, ha il difetto di rendere variabile il numero totale di seggi da attribuire, S, che dipenderà, ovviamente, da V.

2. Sistemi a quoziente elettorale variabile

Come dice il loro nome, i sistemi a quoziente elettorale *variabile* prevedono che il quoziente elettorale debba dipendere da un metodo di calcolo.

2.1. Quoziente Hare[2]

Il metodo, che in Europa viene generalmente indicato come metodo del «quoziente semplice» (q), prevede che si abbia

$$q = \frac{V}{S}.$$

In seguito si calcolano gli S_{k1}:

$$S_{k1} = \mathrm{INT}\left(\frac{V_k}{q}\right)$$

È ben evidente che questo metodo può sì attribuire al massimo S seggi (nel caso, eccezionale, che tutti i V_k siano multipli di q) ma lascerà molti seggi non attribuiti.

2.2. Quoziente Droop[3]

Per ovviare all'inconveniente del metodo Hare si può diminuire q definendolo, ad esempio, come

$$q = \frac{V}{S+1}.$$

In teoria, il calcolo appena indicato potrebbe però attribuire S+1 seggi sugli S disponibili. Il metodo Droop (in Europa più noto con il nome di metodo Hagenbach-Bischoff[4]) prevede di calcolare il «quoziente rettificato» (q_r) mediante la seguente formula:

$$q_r = \frac{V}{S+1} + 1.$$

1. Con INT(x) si intende l'intero più grande che sia minore o uguale a x.
2. Thomas Hare, (1806-1891), giurista, Londra.
3. Henry Richmond Droop (1831-1884), matematico e avvocato inglese.
4. Eduard Hagenbach-Bischoff, (1833-1910), professore di fisica, basilese. Si trova anche una definizione un po' diversa del quoziente Hagenbach-Bischoff: $q_h = V/(S+1)$. È questa la definizione adottata in Ticino (v. in seguito): se si pone però, come è il caso, S=5, la differenza fra V/q_r e V/q_h diventa praticamente insignificante per valori di V vicini a 1000000 (v. tabella dei dati per l'elezione del Consiglio di Stato, in Appendice).

In seguito si calcolano gli S_{k1}:

$$S_{k1} = \mathrm{INT}\left(\frac{V_k}{q_r}\right)$$

Il metodo garantisce che al massimo vengano attribuiti S seggi, ma il problema dei seggi non attribuiti, seppur ridotto, rimane.

2.3. Quoziente imperiale (o Imperiali[5])

Il quoziente viene calcolato con la formula

$$q_i = \frac{V}{S+2}$$

3. Applicazioni dei sistemi a quoziente elettorale variabile

Si tratta di risolvere il problema dell'attribuzione dei seggi non assegnati con i calcoli descritti sopra.

3.1. Metodo dei maggiori resti (o delle maggiori frazioni)

Nell'ipotesi, del tutto realistica, che la prima ripartizione, con q o con q_r, non assegni tutti i seggi disponibili, si osserverà che almeno due V_j/q e V_j/q_r, non saranno interi. La «parte dopo la virgola» si chiama *frazione*. D'altra parte, che i quozienti vengano «arrotondati» (in qualsiasi modo) o no, le divisioni daranno luogo a resti perché tutti gli S_{k1} devono essere necessariamente interi. (Per la verità, qualcuno ha anche pensato alla possibilità di seggi frazionari: poiché non è auspicabile frazionare qualche deputato, si frazionerebbe il «peso» dei loro voti. La proposta, a quanto mi consta, non ha avuto alcuna applicazione.) Il metodo prevede allora che i seggi rimanenti siano attribuiti, fino ad esaurimento, ai partiti che hanno i maggiori resti o, il che fa lo stesso, le maggiori frazioni.

Esempio[6], quoziente Hare

Pk	Vk	Vk%	Sk1 (q)	Rk (q)	Sk2 (q)	Sk (q)	Sk% (q)	Δk% (q)
P1	29984	29,14	1	9403,20		**1**	20,00	-9,14
P2	22134	21,51	1	1553,20		**1**	20,00	-1,51
P3	17864	17,36		17864,00	1	**1**	20,00	2,64
P4	16901	16,42		16901,00	1	**1**	20,00	3,58
P5	12097	11,76		12097,00	1	**1**	20,00	8,24
P6	3924	3,81		3924,00		-	0,00	-3,81
V	102904		2		3	5		
q	20580,80							

5. Si trovano le due dizioni: l'A. non ha però reperito alcuna notizia su un «signor Imperiali».
6. Qui, come in seguito, si supporrà S=5.

Legenda:

P_k : nome (convenzionale) dei partiti
V_k : voti ottenuti da P_k
$V_k\%$: percentuale di V_k rispetto a V
S_{k1} : seggi attribuiti a P_k alla prima distribuzione
R_k : resto di P_k, cioè $V_k - q \cdot S_{k1}$
S_{k2} : seggi attribuiti a P_k alla seconda distribuzione
S_k : numero totale di seggi attribuiti a P_k
$S_k\%$: percentuale di S_k rispetto a S
$\Delta_k\%$: $S_k\% - V_k\%$, cioè il «guadagno» percentuale di seggi rispetto ai voti ottenuti da P_k
(): in funzione del tipo di quoziente

Esempio, quoziente Droop

Pk	Vk	Vk%	Sk1 (qr)	Rk (qr)	Sk2 (qr)	Sk (qr)	Sk% (qr)	Δk% (qr)
P1	29984	29,14	1	12832,33	1	**2**	40,00	10,86
P2	22134	21,51	1	4982,33		**1**	20,00	-1,51
P3	17864	17,36	1	712,33		**1**	20,00	2,64
P4	16901	16,42		16901,00	1	**1**	20,00	3,58
P5	12097	11,76		12097,00		-	0,00	-11,76
P6	3924	3,81		3924,00		-	0,00	-3,81
V	102904		3		2	5		
qr	17151,67							

3.2. Metodo dei partiti più forti (o del partito più forte)

I seggi rimanenti sono attribuiti ai partiti che hanno ottenuto il maggior numero di voti (o al partito che ha ottenuto il maggior numero di voti).

Esempio (partiti più forti), quoziente Hare

Pk	Vk	Vk%	Sk1 (q)	Sk2 (q)	Sk (q)	Sk% (q)	Δk% (q)
P1	29984	29,14	1	1	**2**	40,00	10,86
P2	22134	21,51	1	1	**2**	40,00	18,49
P3	17864	17,36		1	**1**	20,00	2,64
P4	16901	16,42			-	0,00	-16,42
P5	12097	11,76			-	0,00	-11,76
P6	3924	3,81			-	0,00	-3,81
V	102904		2	3	5		
q	20580,80						

Esempio (partiti più forti), quoziente Droop

Pk	Vk	Sk1 (qr)	Sk2 (qr)	Sk (qr)
P1	29984	1	1	**2**
P2	22134	1	1	**2**
P3	17864	1		**1**
P4	16901	0		-
P5	12097	0		-
P6	3924	0		-
V	102904	3	2	5
qr	17151,67			

Esempio (partito più forte), quoziente Hare

Pk	Vk	Vk%	Sk1 (q)	Sk2 (q)	Sk (q)	Sk% (q)	Δk% (q)
P1	29984	29,14	1	3	**4**	80,00	50,86
P2	22134	21,51	1		**1**	20,00	-1,51
P3	17864	17,36			-	0,00	-17,36
P4	16901	16,42			-	0,00	-16,42
P5	12097	11,76			-	0,00	-11,76
P6	3924	3,81			-	0,00	-3,81
V	102904		2	3	5		
q	20580,80						

Esempio (partito più forte), quoziente Droop

Pk	Vk	Vk%	Sk1 (qr)	Sk2 (qr)	Sk (qr)	Sk% (qr)	Δk% (qr)
P1	29984	29,14	1	2	**3**	60,00	30,86
P2	22134	21,51	1		**1**	20,00	-1,51
P3	17864	17,36	1		**1**	20,00	2,64
P4	16901	16,42			-	0,00	-16,42
P5	12097	11,76			-	0,00	-11,76
P6	3924	3,81			-	0,00	-3,81
V	102904		3	2	5		
qr	17151,67						

3.3. Metodi della miglior media

3.3.1. Metodo della miglior media - base

Nella sua forma primitiva, il metodo, inventato da d'Hondt[7], prevede che si dividano tutti i V_k prima per 1, poi per 2, poi per 3 «e così via». Al partito che ottiene il quoziente più grande viene attribuito un seggio, il secondo seggio va al partito che ha ottenuto il secondo quoziente (in ordine di grandezza decrescente), il terzo seggio va al partito che ha ottenuto il terzo quoziente e così via fino all'attribuzione di tutti seggi.

7. Victor d'Hondt, (1841-1901), giurista, Belgio.

Il problema consiste nell'«e così via»: fin a quale divisore si deve arrivare? Se si arriva fino al divisore S non c'è problema, ma si può dimostrare che ci si può accontentare di $d_{max} < S$. La determinazione di d_{max} è lasciata per esercizio. (Traccia: non si dimentichi che si sta parlando del metodo della *miglior media*)

La procedura, senza i mezzi messi a disposizione dall'informatica, è lunga e noiosa: di conseguenza Hagenbach-Bischoff ne ha messo a punto una variante semplificata che, evidentemente, dà gli stessi risultati della versione primitiva.

Secondo Hagenbach-Bischoff si procede in più fasi:

nella prima fase si assegnano i seggi con il metodo del quoziente rettificato;

successivamente si dividono i V_k per il numero di seggi ottenuto nella/e fase/i precedente/i aumentato di uno: un seggio va al partito con il quoziente maggiore. Il procedimento viene ripetuto fino all'assegnazione di tutti i seggi.

Dimostrare che «i metodi» d'Hondt e Hagenbach-Bischoff sono in realtà «un metodo» è un eccellente esercizio di interpretazione di quanto è sotteso alle due procedure.

Quando si dice la nemesi storica: come sostiene F. Antognini[8], all'epoca dell'informatica il metodo Hagenbach-Bischoff tende piuttosto a complicare le operazioni… Ed è vero: provare per credere.

Esempio (d'Hondt)

Pk	**Vk**	**Vk /1**	**Vk /2**	*Vk /3*	**Sk**
P1	27983	27983 (1)	13991,5 (4)	*9327,67*	**2**
P2	22134	22134 (2)	11067	*7378*	**1**
P3	17864	17864 (3)	8932	*5954,67*	**1**
P4	12097	12097 (5)	6048,5	*4032,33*	**1**
P5	8103	8103	4051,5	*2701*	-
P6	3924	3924	1962	*1308*	-

Tra parentesi è messo il rango di ogni quoziente.

8. *Fulvio Antognini*, **Parere al Consiglio di Stato circa la pubblicazione dei dati del panachage relativi alle elezioni politiche cantonali e comunali, con note supplementari sull'ordinamento della proporzionale**, Rivista di Diritto Amministrativo Ticinese, 1988. (F. Antognini fu giudice federale).

Esempio (Hagenbach-Bischoff)

Pk	Vk	Sk1	I div.	I seggio suppl.	II div.	II seggio suppl.	Sk
P1	29984	1	14992,00		14992,00	1	**2**
P2	22134	1	11067,00		11067,00		**1**
P3	17864	1	8932,00		8932,00		**1**
P4	16901		16901,00	1	8450,50		**1**
P5	12097		12097,00		12097,00		-
P6	3924		3924,00		3924,00		-
V	102904	3		1		1	5
qr	17151,67						

3.3.2. Metodo della miglior media - Balinski[9]/Young[10]

Il metodo prevede solo due fasi:

I fase: si ripartiscono i seggi con il metodo della divisione per il quoziente semplice: ogni partito ottiene

$$S_{k1} = \mathrm{INT}\left(\frac{V_k}{q}\right);$$

II fase: si calcolano i quozienti

$$q_{k2} = \frac{V_k}{S_{k1}+1}$$

e i seggi rimanenti si attribuiscono ai partiti che hanno i q_{k2} maggiori.

Pk	Vk	Sk1	qk2	Sk2	Sk
P1	29984	1	14992,00	1	**2**
P2	22134	1	11067,00		**1**
P3	17864		17864,00	1	**1**
P4	16901		16901,00	1	**1**
P5	12097		12097,00		-
P6	3924		3924,00		-
V	102904	2		3	5
q	20580,80				

3.4. Metodi di divisione per successioni di numeri

3.4.1. Metodo d'Hondt

Vedi il punto 3.3.1.: la successione è $[n, n \in \mathbf{N}^*]$.

9. Michel L. Balinski, (vivente), già direttore del Laboratoire d'Econométrie dell'Ecole Polytechnique di Parigi.
10. H. Peyton Young, (vivente), professore di Economia alla John Hopkins University.

3.4.2. Metodo St. Laguë[11]

La successione è $[2n+1, n \in \mathbf{N}]$

Esempio

Pk	Vk	Vk/1	Vk/3	Vk/5	Sk
P1	27983	27983,00 (1)	9327,67 (5)	5596,60	2
P2	22134	22134,00 (2)	7378,00	4426,80	1
P3	17864	17864,00 (3)	5954,67	3572,80	1
P4	12097	12097,00 (4)	4032,33	2419,40	1
P5	8103	8103,00	2701,00	1620,60	-
P6	3924	3924,00	1308,00	784,80	-

Tra parentesi è messo il rango di ogni quoziente.

Esiste anche un metodo St. Laguë modificato, dove la successione è

$[1{,}4\,; 2n+1, n \in \mathbf{N}^*]$.

In altri autori si trova una descrizione diversa del metodo St. Laguë, cioè la seguente:

Si calcolano i valori

$$q_{kj} = \frac{V}{V_k} \cdot c_j \quad \textit{dove} \;\; c_1 = 1 \;\textit{e}\;\; c_n = c_{n-1} + 2 \;\; \text{per n>1}$$

I valori ottenuti vengono poi ordinati dal minore al maggiore (attenzione!). Gli S *seggi sono assegnati ai primi* S *quozienti.*

Esempio

Pk	Vk	qk1	qk3	qk5	Sk
P1	27983	3,29 (1)	9,87 (5)	16,46	2
P2	22134	4,16 (2)	12,48	20,81	1
P3	17864	5,16 (3)	15,47	25,78	1
P4	12097	7,61 (4)	22,84	38,07	1
P5	8103	11,37	34,10	56,83	-
P6	3924	23,47	70,42	117,36	-
V	92105				

Tra parentesi è messo il rango di ogni quoziente.

Il metodo St. Laguë modificato, di conseguenza, differisce da quello descritto solo per il primo termine della successione.

Può essere un buon (piccolo) esercizio di «calcolo letterale» dimostrare che le due descrizioni sono equivalenti.

11. Jean-André Sainte-Laguë, (1882-1950), Francia.

3.4.3. Metodo imperiale (o Imperiali)

La successione è $\left[n, n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}\right]$.

3.4.4. Metodo Huntington[12] (o della media geometrica)

La successione è $\left[\sqrt{n \cdot (n+1)}, n \in \mathbf{N}\right]$ cioè, circa, [0; 1,41; 2,45; 3,46, …].

Il curioso sta nel primo termine della successione: la divisione per 0, infatti… L'inghippo viene aggirato con la seguente interpretazione: in base alla prima «divisione» si attribuisce un seggio ad ogni partito, per il resto si vada tranquilli.

Osservazione

Il fatto di attribuire un seggio ad ogni partito rende il metodo impraticabile se S è minore del numero dei partiti e insoddisfacente se S è uguale (o di poco maggiore) al numero dei partiti. In effetti il metodo viene applicato quando l'attribuzione di un seggio ad ogni «concorrente» è indispensabile: ad esempio per l'attribuzione dei rappresentanti di una regione al Parlamento centrale.

3.4.5. Metodo della media armonica

La successione è

$$\left[\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)}, n \in \mathbf{N}\right] = \left[\frac{2n\,(n+1)}{2n+1}, n \in \mathbf{N}\right]$$

(attenzione all'«=»), cioè, circa, [0; 1,33; 2,4; 3,43; 4,44; …].
L'inghippo viene aggirato come per il metodo Huntington.
Si veda l'osservazione in 3.4.4.

3.4.6. Metodo «danese»

La successione è $\left[3n+1, n \in \mathbf{N}\right]$.

Si possono inventare tanti metodi di questo tipo quante sono le successioni crescenti possibili, cioè un'infinità. È quindi interessante scoprire qual è la caratteristica delle successioni che favoriscono i partiti più forti (o i partiti minori).

Come spesso, un foglio di calcolo serve egregiamente allo scopo…

Metodi misti

I metodi «base» descritti fin qui possono essere in qualche modo variati, a seconda delle «sensibilità politiche» del luogo.

Ad esempio si potrebbe far capo al metodo Hagenbach-Bischoff ma con il quoziente Hare.

12. Samuel Huntington, (1732-1796), governatore del Connecticut e presidente del Congresso degli Stati Uniti.

Oppure si può stabilire che i partiti che non raggiungono una determinata quota (comunque prefissata) sono esclusi dall'attribuzione dei seggi. A questo punto si può stabilire che i voti ottenuti dagli esclusi vengano, o no, a loro volta esclusi dai successivi conteggi. Si può anche stabilire un valore massimo di seggi da attribuire ad un partito: in Ticino, ad esempio, fino alle elezioni del 1987 compreso, vigeva, per il Consiglio di Stato, la «clausola Cattori[13]», nota popolarmente con la formula «chi non raggiunge la maggioranza assoluta dei voti nel popolo non può ottenere la maggioranza assoluta dei seggi in governo» (v. nota 15).

Come osservato in precedenza, la matematica deve piegarsi alla politica.

L'osservazione (con invito implicito…) viene rafforzata se si ricalcolano le varie attribuzioni di seggi cambiando i V_k e S: si noterà che alcuni metodi tendono a favorire i partiti grossi, altri i partiti più piccoli.

Estratti dalle Costituzioni e dalle leggi ticinesi

La Legge sull'esercizio dei diritti politici cantonale, del 7 ottobre 1998, entrata in vigore il 2 giugno 1999 (salvo un dettaglio entrato in vigore il 1º luglio 1999), recita:

Capitolo III

Elezione del Gran Consiglio

Art.72

1. Per l'elezione del Gran Consiglio la ripartizione dei seggi fra i vari gruppi si effettua in base al quoziente elettorale dei voti ottenuti dai singoli gruppi diviso per novanta; se detta somma non è esattamente divisibile, si tiene conto della frazione sino alla seconda cifra decimale.
2. Ciascun gruppo ha diritto di avere tanti seggi quante volte il quoziente elettorale è contenuto nel numero dei voti da esso conseguiti.
3. Le liste che non hanno raggiunto il quoziente elettorale non partecipano alla ripartizione.
4. I deputati non assegnati per quoziente intero vengono attribuiti ai gruppi aventi le maggiori frazioni.
5. In caso di parità di frazione la precedenza spetta al gruppo che ha ottenuto il maggior numero di voti; se i gruppi a parità di frazione hanno pari voti, decide la sorte.
6. I seggi che non possono essere assegnati per quoziente o per frazione vengono attribuiti al gruppo che oltre il quoziente ha ottenuto maggior frazione.

Si tratta quindi del metodo dei maggiori resti o delle maggiori frazioni (quoziente Hare) con sbarramento a $1/90 \cong 1{,}11\%$.

Capitolo IV

Elezione del Consiglio di Stato

Art. 80[14]

1. Per l'elezione del Consiglio di Stato la ripartizione dei seggi fra i gruppi si effettua in base al quoziente risultante dalla divisione della somma dei voti validi ottenuti dai singoli gruppi per il numero dei seggi da assegnare aumentati di uno.

13. Giuseppe Cattori, 1866-1932, politico ticinese, Consigliere di Stato dal 1909 al 1912, dal 1915 al 1917 e dal 1921 al 1932, Consigliere nazionale dal 1912 al 1915 e dal 1917 al 1919.
14. Vedi anche la Costituzione cantonale (scaricabile da Internet), art. 66.

2. Ad ogni gruppo sono assegnati tanti seggi quante volte il quoziente è contenuto nel totale dei suoi voti.
3. I seggi restanti sono ripartiti dividendo il numero dei voti ottenuti da ogni gruppo per quello dei seggi già assegnati aumentato di uno, ritenuto:
   a) che al gruppo che ottiene il maggior quoziente è assegnato un ulteriore seggio;
   b) che l'operazione va ripetuta fino alla ripartizione di tutti i seggi.
4. In caso di parità delle frazioni, la precedenza è data al gruppo maggiore; se i gruppi con pari frazioni hanno anche parità di voti, decide la sorte.

Si tratta quindi del metodo della miglior media, Hagenbach-Bischoff, con la definizione «alternativa» del quoziente Hagenbach-Bischoff (v. nota 4), senza «clausola Cattori» (v. la parte in corsivo, che segue)

È interessante conoscere, almeno parzialmente, la storia delle modalità di elezione del Consiglio di Stato prima dell'entrata in vigore della legge del 7 ottobre 1998.

Legge sull'esercizio del diritto di voto, sulle votazioni e sulle elezioni
(23 febbraio 1954)
Art. 135

1. *Per l'elezione del Consiglio di Stato la ripartizione dei seggi fra i vari gruppi si effettua in base al quoziente elettorale costituito dalla somma dei voti ottenuti dai singoli gruppi divisa per 5; se detta somma non è esattamente divisibile, non si tiene calcolo della frazione.*
2. *Ciascun gruppo ha diritto di avere tanti seggi quante volte il quoziente elettorale è contenuto nei voti da esso conseguiti.*
3. *I membri non assegnati per quoziente intero sono attribuiti ai gruppi che hanno ottenuto le maggiori frazioni, anche se non hanno raggiunto il quoziente, ritenuto che:*
   a) il gruppo che non ha conseguito la maggioranza assoluta non può ottenere più di due eletti; se avesse raggiunto due quozienti interi più una delle frazioni maggiori, esso rimane escluso dal riparto frazionale ed a questo partecipano solo gli altri gruppi aventi le frazioni maggiori;[15]
   b) il gruppo che ha conseguito la maggioranza assoluta non può avere meno di tre eletti; se avesse raggiunto due quozienti interi più una delle frazioni non maggiori, la frazione stessa viene considerata prevalente ed ottiene il primo dei seggi non assegnati per quoziente.
   c) In caso di parità delle frazioni, la precedenza è data al gruppo maggiore; se i gruppi con pari frazioni hanno anche pari voti, decide la sorte.

Si tratta quindi del metodo dei maggiori resti o delle maggiori frazioni (quoziente Hare), senza sbarramento, con la «clausola Cattori».

In seguito ad un «incidente elettorale» verificatosi nel 1987, la Costituzione cantonale fu sottoposta a revisione parziale:

Costituzione della Repubblica e Cantone del Ticino del 4 luglio 1830
(riordinata il 29 febbraio 1967); revisione parziale (4 giugno 1989)
Visto l'esito della votazione popolare del 4 giugno 1989 favorevole all'iniziativa popolare in materia costituzionale 16 febbraio 1988 «per una giusta ripartizione dei seggi nell'elezione del Consiglio di Stato», la Costituzione cantonale è modificata come segue:

15. Questa è la formulazione «dotta» della «clausola Cattori».

Art. 35, cpv. 2, 3 e 4

2. *La ripartizione dei seggi fra i gruppi si effettua in base al quoziente risultante dalla divisione della somma dei voti validi ottenuti dai singoli gruppi per il numero dei seggi da assegnare aumentato di uno.*
3. *Ad ogni gruppo sono assegnati tanti seggi quante volte il quoziente è contenuto nel totale dei suoi voti.*
4. *I seggi restanti sono ripartiti dividendo il numero dei voti ottenuti da ogni gruppo per quello dei seggi già assegnatigli aumentato di uno, ritenuto:*
   a) *che al gruppo che ottiene il maggior quoziente è assegnato un ulteriore seggio;*
   b) *che l'operazione viene ripetuta fino alla ripartizione di tutti i seggi;*
   c) *che il gruppo che non ha conseguito la maggioranza assoluta dei voti non può ottenere più di due eletti;*
   d) *che il gruppo che ha conseguito la maggioranza assoluta dei voti non può avere meno di tre eletti.*

Norma transitoria
La presente revisione entra in vigore con l'elezione del Consiglio di Stato nel 1991.
[omissis]

Si passa dunque dal metodo dei maggiori resti a quello della miglior media, con il mantenimento della «clausola Cattori».
Di conseguenza, l'art. 135 viene modificato, a sua volta, il 25 settembre 1990.

Esercizio di matematica: calcolare la distribuzione dei seggi in Consiglio di Stato con i dati del 1987, prima con il metodo allora in vigore, poi con il metodo previsto dalla revisione parziale della Costituzione.
Esercizio di civica: scoprire da quale parte politica può esser stata proposta la revisione parziale della Costituzione.

Capitolo V

Elezione dei deputati al Consiglio degli Stati

Art. 88[16]

1. I deputati al Consiglio degli Stati sono eletti dal popolo ogni quattro anni col sistema della maggioranza assoluta al primo turno.
2. Essi sono sempre rieleggibili.
3. L'elezione ha luogo in un circondario unico costituito dall'intero cantone, contemporaneamente all'elezione dei deputati al Consiglio nazionale.

E se la maggioranza assoluta (che cosa è?) non viene raggiunta?
Nessuna paura:

Capitolo IX

Disposizioni varie

Art. 105

1. La maggioranza assoluta equivale al numero di voti che raddoppiato dà un totale superiore di almeno un'unità a quello dei voti validi e computabili.
2. Per il calcolo della maggioranza assoluta le schede bianche e le schede nulle non sono computate.

16. Vedi anche la Costituzione cantonale, art. 48.

Art. 106

1. Nelle elezioni col sistema della maggioranza assoluta, se quest'ultima non viene raggiunta si ripetono le operazioni di voto la terza domenica successiva col sistema della maggioranza relativa.
2. Di ciò viene dato avviso nel Foglio ufficiale in caso di elezioni cantonali e all'albo comunale in caso di elezioni comunali. Sono esclusi dal turno di ballottaggio i candidati che non ottengono al primo turno un numero di voti superiore al 5% delle schede valide e computabili.
3. Se nella seconda operazione di voto si constata parità di voti fra due o più candidati:
   a) se il seggio da occupare è uno solo, l'operazione di voto viene ripetuta a maggioranza relativa la seconda domenica successiva limitatamente ai candidati che hanno ottenuto l'ugual numero di voti. Verificandosi ancora parità nella terza operazione di voto, l'elezione viene determinata per sorteggio;
   b) se i seggi da occupare sono più di uno, l'elezione viene determinata per sorteggio.

Art. 107
[omissis]

Art. 108
Nelle elezioni col sistema della maggioranza relativa sono eletti i candidati che hanno ottenuto il maggior numero di voti validi computabili.

Per il resto:

Capitolo VII

Elezione del Consiglio comunale e del Municipio

Art. 93

1. Per l'elezione del Consiglio comunale e del Municipio, la ripartizione dei seggi fra i gruppi si effettua in base al quoziente elettorale, costituito dalla somma dei voti conseguiti dai singoli gruppi per il Consiglio comunale, rispettivamente per il Municipio, divisa per il numero dei seggi; se detta somma non è esattamente divisibile, si tiene conto della frazione sino alla seconda cifra decimale.
2. Ciascun gruppo ha diritto di avere tanti seggi quante volte il quoziente elettorale è contenuto nel numero nel numero di voti da esso conseguiti.
3. Le liste che non hanno raggiunto il quoziente non partecipano alla ripartizione.
4. I seggi non assegnati per quoziente intero vengono attribuiti ai gruppi aventi le maggiori frazioni.
5. In caso di parità di frazione, la precedenza spetta al gruppo che ha ottenuto il maggior numero di voti; se i gruppi a parità di frazione hanno pari voti, decide la sorte.
6. I seggi che non possono essere assegnati per quoziente o per frazione vengono attribuiti al gruppo che oltre il quoziente ha ottenuto la maggior frazione.

Si tratta quindi del metodo dei maggiori resti o delle maggiori frazioni (quoziente Hare) con sbarramento (variabile, a seconda del numero dei membri del Consiglio Comunale, rispettivamente del Municipio).
Negli art. 72 e 93 appare la dizione «sino alla seconda cifra decimale»: in Ticino essa va intesa nel senso, per noi più preciso, di «troncamento alla seconda cifra decimale».

Estratti dalla Legge federale sui diritti politici
La Legge federale sui diritti politici recita:

Art. 17[17] **Metodo di ripartizione**
I 200 seggi del Consiglio nazionale sono ripartiti tra i Cantoni e i Semicantoni nel modo seguente:

a. Ripartizione preliminare
   1. il totale della popolazione residente della Svizzera è diviso per 200. Il quoziente arrotondato all'intero immediatamente superiore è quello determinante per la ripartizione preliminare. Ogni Cantone la cui popolazione sia inferiore a questo quoziente ottiene un seggio ed è escluso dalla ripartizione successiva.
   2. Il totale della popolazione residente dei rimanenti Cantoni è diviso per il numero dei seggi restanti. Il quoziente arrotondato all'intero immediatamente superiore è quello determinante per la seconda ripartizione. Ogni Cantone la cui popolazione sia inferiore a questo quoziente ottiene un seggio ed è escluso dalla ripartizione successiva.
   3. L'operazione viene ripetuta fin quando nessuno dei rimanenti Cantoni rientra al di sotto dell'ultimo quoziente di ripartizione.

b. *Ripartizione principale:* Ogni rimanente Cantone ottiene tanti seggi quante volte l'ammontare della sua popolazione contiene l'ultimo quoziente.

c. *Ripartizione completiva:* I seggi rimanenti sono ripartiti tra i Cantoni che ottengono i resti maggiori. Se più Cantoni ottengono resti uguali, sono dapprima esclusi quelli che hanno ottenuto i resti minori dalla divisione della loro popolazione per il primo quoziente determinante. Se vi è ancora parità si procede a sorteggio.

L'interpretazione dell'art. 17 non è facilissima: sospetto che si tratti di un *mix* di burocratese, di legalese e di italiese federale. *Absit iniuria verbis*.

Ringraziamenti e debiti

Per aiuti di vario genere ringrazio i signori *Oscar Mazzoleni* e *Mauro Stanga* dell'Ufficio cantonale di statistica, *Sergio Ravasi* e *Maria Elena Guidotti* del Dipartimento delle istituzioni.

Per la stesura del contributo ho fatto capo principalmente a *Pierre Garrone*, **L'élection populaire en Suisse**, Helbing & Lichtenhahn, Faculté de Droit de Genève, 1991.

Per gli «inserti storici» ho fatto capo a *Andrea Ghiringhelli*, **Il cittadino e il voto**, Armando Dadò editore, 1995.

17. Nuovo testo giusta il n. I della LF del 18 mar. 1994, in vigore dal 15 nov. 1994.

Appendice

Risultati delle elezioni del Consiglio di Stato ticinese

	1987	**1991**	**1995**	**1999**
Pk	**Vk**	**Vk**	**Vk**	**Vk**
9X9				1'458
ALTER		*8'415*		
CHTI			713	
CST	*28'397*			
DDD	8'185	2'725		
FDT				1'084
LEGA		122'387	216'069	*217'898*
MDA	2'732			
MDI			1'952	
MET	14649			
ORA200			616	
P2000				2'906
PDL			7'499	4'696
PLRT	313'558	319'215	343'140	301'757
PLST				16'511
PPD		299'782	293'411	240'865
PPDsop	123'010			
PPDsot	157'772			
PRT				691
PS	158'092	109'910	173'178	172'659
PSA	*95'617*			
PSL	*6'296*			
PSU		*127'791*		
PTCD			3'429	
PTPC		3'051		
ROSSOV				9'711
SVEPO		7'459		
UDC	11'908	11'968	8'161	*18'004*
VERDI		12'657	10'712	

Liste congiunte:
nel 1987, CST, PSA e PSL;
nel 1991, ALTER e PSU;
nel 1999, LEGA e UDC.

In tutti e tre i casi agli effetti dell'assegnazione dei seggi erano da considerare come un solo partito.

Dati degli ultimi censimenti della popolazione svizzera
Popolazione residente permanente per cantone

In migliaia, alla fine dell'anno	1970	1980	1990	2000	Stranieri in % 2000
Svizzera	**6 193,1**	**6 335,2**	**6 750,7**	**7 204,1**	**19,8**
Argovia	426,4	450,8	496,3	544,3	18,8
Appenzello Esterno	48,4	47,2	51,5	53,5	14,1
Appenzello Interno	13	12,8	13,6	15	10,4
Basilea Campagna	200	219	230,1	260	16,9
Basilea Città	233,5	203,6	191,8	187,7	27,2
Berna	909,8	911	945,6	943,7	11,9
Friburgo	177,7	184,5	207,8	236,3	14,1
Ginevra	330,7	349,6	376	408,8	37,7
Glarona	37,8	36,1	37,6	38,5	19,8
Grigioni	156,8	161,3	170,4	186,7	13,2
Giura	66,9	64,3	65,7	68,8	12,1
Lucerna	287,7	294,4	319,5	347,2	15
Neuchâtel	166,6	157,1	160,6	165,7	22,4
Nidvaldo	25,3	28,3	32,6	38	9,3
Obvaldo	24,4	25,7	28,8	32,4	10,8
San Gallo	379,9	389,0	420,3	449,4	19,6
Sciaffusa	72	69,0	71,7	73,3	19,8
Svitto	90,9	96,6	110,5	130,2	15,1
Soletta	222,1	216,6	226,7	244	16,5
Ticino	241	265,6	286,7	310,2	25,6
Turgovia	180	182,7	205,9	227,3	18,9
Uri	33,3	33,5	33,7	35,2	8,2
Vaud	507,1	522,3	583,6	620,3	26,6
Vallese	202,2	217,8	248,3	276,2	16,5
Zugo	67,6	75,7	84,9	99,3	19,5
Zurigo	1092,2	1120,8	1150,5	1211,6	21,7

3. Numeri di Fibonacci e calcolo umbrale al liceo[1]

Mauro Cerasoli[2]

The Fibonacci numbers keep an eternal charm. Like many others pearls of mathematics however, they are generally not treated with the due consideration neither at Liceo nor at university. Instead they should be a good subject within the curriculum of mathematics. One of the reasons which hold back its introduction in the lessons is the objective difficulty of the classical treatment. With this contribution the author wants to point out how, through E. Just's theorem of 1971, the issue can be dealt with at school without any great difficulties.

Premessa

I numeri di Fibonacci, i numeri più naturali che esistano, hanno un fascino eterno. Come tante altre perle della matematica però, in genere non sono trattati né al liceo né all'università col dovuto riguardo che meritano. Invece essi dovrebbero costituire un buon argomento nel programma di matematica che dovrà rimpiazzare, prima o poi, tutti i calcoli inutili e noiosi che vengono propinati ai nostri poveri disgraziati studenti liceali e non. Calcoli che, ormai lo sanno anche i muri delle aule, possono essere svolti facilmente e subito dalle calcolatrici.

Tra i motivi che ritardano la trattazione in classe dei numeri di Fibonacci c'è anche il fatto che molte delle loro proprietà, compresa la formula di Binet, non sono facilmente presentabili con i metodi con cui furono scoperte e dimostrate (equazioni alle differenze finite, funzioni generatrici, induzione). Ora, poiché non posso eliminare il primo intoppo, modificare cioè i programmi, non essendo per fortuna ministro né sindacalista o ispettore, mi limito ad eliminare il secondo intralcio, proponendo alcune dimostrazioni facili ed eleganti. Esse poggiano su un teorema di E. Just del 1971.

1. Numeri di Fibonacci e sezione aurea

I numeri di Fibonacci
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, ...

cioè i numeri della successione F_n definita dalla ricorrenza
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad F_0 = 0,\ F_1 = 1$$

1. Relazione tenuta il 26 aprile 2002 al Convegno *Gian Carlo Rota Memorial Conference,* Barisciano (AQ)
2. Università di L'Aquila, http://space.tin.it/scienza/maurocer.

furono introdotti da Leonardo Pisano (c.1170,1250), detto Fibonacci, nel suo trattato di aritmetica *Liber abaci* del 1202 (edizione del 1228). Oggi, chi vuol sapere di questo tema non deve fare altro che navigare sul Web, cercare Fibonacci numbers, per esempio col motore di ricerca www.google.it e andare avanti. Un sito ricco di spunti è www.ee.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci.

Qui il lettore può trovare tante cose, che non dirò in seguito, risparmiandosi la fatica di andare in biblioteca o di acquistare pesanti e costosi libri. Si diceva di Fibonacci che proponeva la soluzione di un problema di conigli. Premesso che i conigli non si riproducono a coppie, in quanto fanno di norma anche dieci figli la volta, forse si trattava di colombi, questi ne fanno quasi sempre due di figli, la formula che chiedeva Leonardo Pisano fu scoperta soltanto nel 1718 da A. De Moivre (1667,1754) e dimostrata dieci anni più tardi da N. Bernoulli, cioè dopo più di cinque secoli! In poche parole, N. Bernoulli dimostrò che

se si pone $a=(\sqrt{5}-1)/2$, allora $F_n=\left[a^{-n}-(-a)^n\right]/\sqrt{5}$.

Più tardi questa formula fu ritrovata da J.M.P. Binet (1786,1856) e oggi è chiamata *formula di Binet*.

Quando si parla di numeri di Fibonacci non si può fare a meno di introdurre la successione $f_n=F_n/F_{n+1}$

0, 1, 1/2, 2/3, 3/5, 5/8, 8/13, 13/21, 21/34, 34/55, 55/89, 89/144, ...

ottenuta facendo il rapporto di due numeri consecutivi di Fibonacci. Dalla formula di Binet si ottiene

$$f_n=\frac{a\left[1-(-1)^n\,a^{2n}\right]}{1+(-1)^n\,a^{2n+2}}$$

e la successione converge al numero d'oro

$$(\sqrt{5}-1)/2=0{,}618\ldots.$$

Questo notevole risultato si ottiene anche più facilmente considerando che

$$\frac{1}{f_n}=1+f_{n-1}$$

e passando al limite. Si noti che già 55/89 vale 0,6180… pertanto questa è una delle successioni più velocemente convergenti.

Un altro punto a favore dell'insegnamento serio dei numeri di Fibonacci è la loro utilità nella ricerca di massimi e minimi in funzioni non derivabili, come proposto da Kiefer nel 1953 [Ki]. Si trovi, sempre sul Web, Kiefer Algorithm.

2. Le formule di Just e di Binet

Nel 1971, E. Just ha scritto *A note on the* n*th term of the Fibonacci sequence,* Math. Magazine, 44 pag.199, lunga meno di una pagina, in cui riportava questo meraviglioso teorema.

Teorema di Just (1971)

Sia x una soluzione dell'equazione $x^2 = x+1$, allora per ogni n>0 risulta $x^n = x\,F_n + F_{n-1}$

Per dimostrare il teorema si può procedere per induzione su n ma preferiamo arrivarci per scoperta nel seguente modo. Dalla relazione $x^2 = x + 1$, moltiplicando di volta in volta per x e sostituendo poi x^2 con x+1, si deduce che

$$x^3 = 2\,x+1, \quad x^4 = 3\,x+2, \quad x^5 = 5\,x+3, \quad x^6 = 8\,x+5, \quad \ldots$$

Appaiono così i primi numeri di Fibonacci. Per dimostrare che appariranno sempre supponiamo che siano a_n e b_n le due successioni che costituiscono il coefficiente di x ed il termine noto nello sviluppo della potenza x^n:

$$x^n = a_n\,x + b_n$$

Moltiplicando per x e sostituendo x^2 con x+1 si ha l'altra relazione

$$x^{n+1} = \left(a_n + b_n\right)x + a_n$$

quindi deve essere $a_{n+1} = a_n + b_n$ e $b_{n+1} = a_n$ ovvero $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ che è la ricorrenza di Fibonacci, perciò $a_n = F_n$

Nota: è interessante osservare l'analogia tra le proprietà delle potenze i^n dell'unità immaginaria i (che valgono sempre 1, i, –1, –i) e quelle delle potenze x^n del teorema di Just.

Teorema di De Moivre-Bernoulli-Binet

Posto $a = (\sqrt{5}-1)/2$, per ogni naturale n risulta $F_n = \left[a^{-n} - (-a)^n\right]/\sqrt{5}$

Vediamo come in due righe, quasi per magia, viene fuori questa formula. Le radici di $x^2 = x+1$ sono $-a = (1-\sqrt{5})/2$ e 1/a quindi

$$(-a)^n = -a\,F_n + F_{n-1} \quad \text{e} \quad a^{-n} = \frac{F_n}{a} + F_{n-1}.$$

Sottraendo membro a membro si ricava

$$\left(\frac{1}{a}+a\right)F_n = a^{-n} - (-a)^n \quad \text{e quindi la formula di Binet.}$$

3. Formule caratteristiche

Dalla formula di Just è possibile ricavare facilmente, in modo cioè da poterne parlare in una classe di liceo, alcune proprietà caratteristiche dei numeri di Fibonacci:

$$F_i\, F_j + F_{i+1}\, F_{j+1} = F_{i+j+1} \qquad (3.1)$$

$$F_j\, F_{i+1} - F_i\, F_{j+1} = (-1)^i F_{j-i},\ i<j \qquad (3.2)$$

Scriviamo la formula di Just in due modi diversi:

$x^i = x\, F_i + F_{i-1}, \qquad x^j = x\, F_j + F_{j-1}$

Dopo aver moltiplicato membro a membro si ottiene

$$x^{i+j} = x\left(F_i\, F_{j-1} + F_{i+1}\, F_j\right) + F_{i-1}\, F_{j-1} + F_i\, F_j$$

Ma $x^{i+j} = x\, F_{i+j} + F_{i+j-1}$ da cui la (3.1) per il principio d'identità dei polinomi. Analogamente si dimostra la (3.2) considerando che valgono le due identità

$$\left(\frac{-1}{x}\right)^i = \frac{-F_i}{x} + F_{i-1}, \qquad x^j = x\, F_j + F_{j-1}$$

Da queste si ottengono come casi particolari le classiche formule

$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n}\ , \qquad F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n} \qquad F_{n-1}\, F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$

Questa ultima relazione, che era nota a Cassini (1625,1712), è utilizzata per spiegare il famoso *paradosso di Fibonacci* (un rettangolo di lati F_{n-1}=5 ed F_{n+1}=13 ha area uguale a quella del quadrato di lato F_n=8), riportato in [O] p. 96.

Altre interessanti relazioni valide per i numeri di Fibonacci sono:

$$\sum_{0\le k\le n} \binom{n}{k} F_k = F_{2n} \qquad F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n\pm1}^3 = F_{3n}$$

La prima si ottiene elevando alla n ambo i membri di $x^2 = x + 1$ e sviluppando col teorema del binomio di Newton; la seconda dalla formula di Just moltiplicando per x.

4. Divisibilità

La formula precedente $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}$ si può scrivere, scomponendo il primo membro, nel modo

$F_n\left(F_{n\pm1} + F_{n+1}\right) = F_{2n}$ pertanto F_{2n} è un multiplo di F_n.

Più in generale, si può dimostrare che F_{nk} è sempre un multiplo di F_k. Infatti valgono le seguenti formule:

$$F_{nk} = F_k \cdot \sum_{1\le r\le n} F_{kr-k+1}\, F_{k-1}^{n-r} = F_k \cdot \sum_{1\le r\le n} F_r\, F_k^{r-1}\, F_{k-1}^{n-r}$$

La prima si ottiene dalla (3.1) con i=k–1, j = (r–1)k dopo aver moltiplicato per F_{k-1}^{n-r} e sommato su r.

La seconda si ricava elevando alla n ambo i membri di $x^k = x\,F_k + F_{k-1}$ e sviluppando col binomio di Newton. Il rapporto tra due numeri di Fibonacci con indici l'uno multiplo dell'altro è

$$\frac{F_{nk}}{F_k} = \frac{a^{-nk} - (-a)^{nk}}{a^{-k} - (-a)^k}$$

Se si pone $x = a^{-k}$, $y = (-a)^k$ questo rapporto si scrive

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} \text{ e quindi vale } \frac{a^{k-nk} - (-1)^{nk}\, a^{k+nk}}{1 - (-1)^k\, a^{2k}}$$

Pertanto l'ultima espressione è sempre un numero naturale sebbene a sia irrazionale.

5. Un flash sul calcolo umbrale

La relazione $x^2 = x + 1$ diventa $x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$ quando si moltiplicano i suoi membri per x^{n-2}, n>1. Se per un momento immaginiamo che x^n può essere sostituito con F_n o con x_n, questa ricorrenza diventa quella di Fibonacci $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Abbiamo così un primo esempio di *ombra*, nel senso della teoria che va sotto il nome di *calcolo umbrale* (umbral calculus). L'indice n va su e giù, una volta fungendo da esponente di una potenza, un'altra da vero e proprio indice (pedice). Calcoli simbolici di questo tipo sono stati svolti alla fine dell'800 e nella prima metà del '900 per opera di Blissard, di Bell e di altri matematici.

Un altro esempio di indice che va su e giù si presenta nella relazione di Stirling

$$x^n = \sum_{1\le k\le n} S(n,k)\,(x)_k$$

valida per ogni complesso *x* dove S(n,k) è il numero di Stirling di seconda specie (Stirling numbers) ed $(x)_k$ è il fattoriale decrescente x(x–1)(x–2)…(x–k+1). Si ricorda che S(n,k) è il numero di partizioni di un n-insieme in k classi (cfr. [CEP]).

Sia ora

$$B_n = \sum_{1\le k\le n} S(n,k)$$

il numero di partizioni di un n-insieme (Bell numbers). Si scopre che se il fattoriale decrescente $(x)_k$ fosse uguale ad 1, allora la potenza x^n sarebbe uguale al numero di Bell B^n: l'indice n è andato giù, un'altra ombra. In realtà, dire che $(x)_k$ è uguale ad 1 per ogni k significa introdurre un funzionale L nell'anello dei polinomi tale che:

$$L((x)_k) = 1 \quad L(x^n) = B_n$$

È quanto ha fatto Rota nel suo articolo *The number of partitions of a set*, Amer. Math. Monthly vol. 71, 5(1964)498-504, riportato anche in [K], riproponendo lo studio del calcolo umbrale e successivamente in tanti altri lavori per finire con [RT] del 1994.

Il funzionale L di Rota ha un notevole *significato probabilistico*: se X è una variabile aleatoria di Poisson di parametro 1, ovvero se $P(X=k)=e^{-1}/k!$ allora L coincide con il funzionale *speranza matematica* o *media*. Infatti X ha funzione generatrice

$$g(t)=\sum_{k\geq 0}\left(e^{-1}/k!\right)t^k=e^{t-1}$$

e quindi la media della variabile aleatoria X(X–1)(X–2)...(X–k+1), cioè la derivata k-esima di g(t) valutata in 1, vale 1 per ogni k. Pertanto i momenti di ordine n di X, cioè $L(X^n)$, per la proprietà di linearità della media, valgono

$$L\left(X^n\right)=L\left[\sum_{1\leq k\leq n}S(n,k)\,(X)_k\right]=\sum_{1\leq k\leq n}S(n,k)\,L\left((X)_k\right)=\sum_{1\leq k\leq n}S(n,k)=B_n$$

cioè i numeri di Bell. Ma allora, essendo per definizione

$$L\left(X^n\right)=\sum_{k\geq 0}\left(e^{-1}/k!\right)k^n,$$

si è dimostrata la misteriosa formula di Dobinski (1877)

$$\sum_{k\geq 0}k^n/k!=e\,B_n$$

Alla fine di questo lavoro ci viene da pensare a quanto scriveva Gian-Carlo Rota in [R3]: «*Sfogliando le trecento e più riviste dedicate alla ricerca matematica originale, ci si accorge ben presto che pochi sono i lavori scientifici pubblicati che presentano soluzioni di problemi ancora non risolti; ancora meno sono quelli che formulano nuove teorie. La stragrande maggioranza dei lavori scientifici in matematica non offre prove ma "riprove", non assiomatizzazioni ma riassiomatizzazioni, non invenzioni ma unificazioni. Essi si occupano in realtà di riorganizzare risultati di teorie già note; fanno, in breve, quello che Thomas Kuhn chiama "ripulitura"*.

Bibliografia

[CEP] M. Cerasoli, F. Eugeni, M. Protasi
Elementi di Matematica Discreta, Zanichelli, 1988.
[Ki] J. Kiefer
Sequential minimax search for a maximum, Proc. Am. Math. Soc. 4(1953)503-506.
[Ku] J.P.S. Kung (editor)
Gian-Carlo Rota on Combinatorics, Birkhauser, 1995.
[O] C.D. Olds
Frazioni continue, Zanichelli, 1968.
[R] G.C. Rota
Pensieri Discreti, Garzanti, 1993.
[RT] G.C. Rota, B.Taylor
The Classical Umbral Calculus, SIAM J. Math. Anal. Vol. 25, No.2, marzo 1994.
[S] C.J. Snijders
La sezione aurea, Franco Muzzio, 1985.

4. Retorica e rigore

Giorgio Mainini

The term “rhetoric”is commonly used with a depreciatory connotation. One thinks of rhetoric as the technique of making long speeches that are meaningless and misleading for the audience. This interpretation comes from the misuse of rhetoric, above all in political talks.

In this paper the term is rather used in its original meaning, namely “the art of convincing about the truth of one’s thesis by means of words”. In this sense, rhetoric becomes an important ability that the pupils of our schools should acquire: a valuable skill also for mathematics, mainly in the process of sharing the results of a problem-solving activity.

Il termine «retorica» viene usato comunemente in senso spregiativo. Si pensa alla retorica come alla tecnica di dire paroloni reboanti, possibilmente con il minimo di significato, allo scopo di ingannare l’uditorio. Questa interpretazione deriva dal cattivo uso della retorica: si pensi al famoso «È l’aratro che traccia il solco, ma è la spada che lo difende» o al più famoso ancora «Li fermeremo sul bagnasciuga[1]» di littoria ascendenza.

Qui si usa invece il termine nel suo senso classico di *arte di convincere della bontà delle proprie tesi usando la parola.*

Senza voler andare troppo per il sottile, si può sostenere che la retorica nasce in Grecia verso il V secolo a.C., coeva all’«invenzione» della democrazia, e raggiunge il suo culmine con Aristotele, nel IV secolo a.C.

È quindi un’arte che presuppone la presenza di cittadini liberi meritevoli di rispetto. Difatti il suddito non lo si *convince*: lo si *obbliga*. E il rispetto si dimostra ammettendo il contraddittorio. L’oratore A sostiene al meglio la propria tesi: tocca all’oratore B sostenere al meglio la propria, se non condivide quella di A.

Chi volesse toccare con mano quanto la retorica sia un’arte complessa, potrebbe leggere la «Retorica ad Erennio», il cui autore è un latino contemporaneo di Cicerone (probabile co-autore), I secolo a.C., dall’incredibile nome di Cornificio. L’opera è interessante per vari aspetti, in particolare per la sua struttura, che la renderebbe del tutto adatta ad essere riversata su un CDRom.

Cornificio comincia con una *premessa*, secondo la quale la teoria serve a ben poco se non accompagnata dal costante esercizio. Egli riferisce la premessa alla retorica, ovviamente, ma mi sembra che sia da applicare anche in altri ambiti.

Seguono la descrizione dei *compiti* dell’oratore, dei *tipi di cause* (onorevole, vergognoso, dubbio, umile), dei *generi di cause* (dimostrativo, deliberativo, giudiziario), delle *qualità* che deve avere l’oratore e delle sue *capacità*, che sono quelle dell’invenzione (cioè *la capacità di trovare argomenti veri o verosimili che rendano la*

1. L’oratore intendeva «battigia», come dovrebbe essere noto.

causa convincente), della disposizione, dell'eloquio, della memoria e della dizione. Il tutto corredato delle relative definizioni, analoghe a quella, sopra citata, di «invenzione».

Entra poi nei dettagli:

l'*invenzione* si compone dell'esordio, del racconto, della divisione, delle prove, della confutazione e della conclusione;

la *disposizione* può essere derivata dai principi della retorica o adattata alla situazione;

l'*eloquio* comprende il controllo del tono di voce e dei movimenti del corpo;

la *memoria* può essere naturale (ma da coltivare con l'esercizio) o artificiale (e qui si descrivono varie tecniche di memorizzazione);

la *dizione* è di tre *tipi* (elevato, medio, semplice) e richiede tre *doti* (eleganza, buona costruzione, ornamenti).

Ed approfondisce:

l'esordio è di due *tipi*, ha due *scopi*, che si ottengono sfruttando quattro elementi, e quattro *difetti* da evitare.

Analisi altrettanto approfondite dedica alla disposizione, all'eloquio, alla memoria e alla dizione.

Il tutto costantemente corredato di definizioni ed esempi.

Solo nella sezione *ornamenti* descrive le cosiddette figure retoriche: ripetizione, antitesi, …, e le ben note, almeno di nome, metonimia, perifrasi, iperbole, iperbato, isocolon, paronomasia, sineddoche, metafora, allegoria, …

Come si vede, le figure retoriche sono una ben piccola parte del tutto!

Ma questo è un contributo per il Bollettino dei Docenti di *Matematica*: che cosa c'entra tutto 'sto sfoggio di cultura classica e di erudizione con la Matematica?

C'entra, c'entra!

Io la vedo così.

T: «In ogni parallelogramma le diagonali si tagliano vicendevolmente in un punto che le biseca entrambe».

Ma è vero? Diavolo, sì! Basta disegnare un parallelogramma e controllare! *Un* parallelogramma? Non è un po' poco? Va bene, disegniamone una decina e controlliamo (attenzione all'***ab***uso di Cabri!). Ma una decina basta? E così via.

Euclide, nel periodo a cavallo tra il IV e il III secolo a.C., sull'onda del pensiero greco, vuole invece *convincere* che T è vero. E per far ciò deriva logicamente T da qualche T' precedente, a sua volta derivato da qualche T" precedente ancora. Ma non può «regredire all'infinito» e quindi basa il tutto su certe affermazioni iniziali sulle quali suppone ci sia accordo unanime. Che ci sia davvero «accordo unanime» è questione da dibattere. Ma qui sarebbero dovuti passare una ventina di secoli…

Euclide, con terminologia moderna, introduce il *rigore*. La cosa è importante, perché, se io la vedo giusta, il rigore, equivalente matematico della retorica, è figlio di una concezione secondo la quale si ha a che fare con *cittadini liberi e meritevoli di rispetto*.

Il mio punto di vista ha conseguenze interessanti sotto l'aspetto didattico.

Quando insegniamo matematica dobbiamo presupporre di avere davanti persone libere e meritevoli di rispetto. Tanto per cominciare, possiamo benissimo immaginare che l'allievo non nutra, per così dire geneticamente, alcun interesse per la matematica: è un suo diritto. Se ci limitiamo a prendere atto del fatto saremo dei pessimi retori. Tocca a noi mettere in pratica gli insegnamenti della retorica per *convincere* l'uditorio della bontà della nostra tesi, consistente, nella fattispecie, nella *nostra* convinzione che la matematica vale la pena di essere studiata.

Se, poi, una determinata nozione ci limitiamo a *trasmetterla* (=*insegnarla*) perché accettata dalla comunità matematica, in pratica *obblighiamo* l'allievo a ritenerla vera per il semplice fatto che lo diciamo noi. A chi lasceremo il compito del contraddittorio? Dobbiamo *insegnare in due*, con un docente che sostiene N e l'altro che sostiene non-N? L'ipotesi appare, ed è, risibile. Ne consegue che deve essere l'allievo stesso a costituirsi da contraddittore. Ciò equivale a dire che deve essere messo in una situazione per uscire dalla quale possa provare varie vie, comprese (e ci mancherebbe altro) quelle che non portano da alcuna parte.

Se allievi diversi propongono vie diverse, ci si trova in una «causa» in parte giudiziaria e in parte deliberativa. Provino, a loro volta, a sostenere la bontà delle reciproche tesi!

Sarà poi nostro compito avviarli verso la «causa» di tipo dimostrativo.

Ed ecco il «rigore»: la dimostrazione dovrà basarsi su qualcosa di precedente che tutti avranno accettato. Oppure si dovrà ricorrere all'invenzione, che, interpretata nella nostra prassi di insegnanti, sarà rappresentata dall'*intuizione*, che, all'inizio, fa avanzare il ricercatore (l'allievo in situazione) senza che lo stesso sappia necessariamente dove andrà a parare, ma che, raffinata dall'esercizio, diventerà vieppiù mirata ed efficace.

Certo che non si può pretendere di arrivare alla costruzione di una teoria, completa di alfabeto, assiomi, postulati, regole di inferenza e quant'altro, ma ad una qualche «mini-assiomatica» si dovrà pur poter aspirare.

«Non c'è matematica senza rigore», dice uno slogan, con buona pace di Kurt Gödel.

Ma sicuramente è più di uno slogan: è una dichiarazione d'intenti.

Nessuno, in Matematica, ha il diritto di sostenere una tesi con il principio dell'*ipse dixit*.

La Matematica è essenzialmente democratica.

II. Didattica

1. Quando si definiscono competenze…

Gianfranco Arrigo

Nowadays, all over the world, in schools "competences" are a common topic of discussion. Anybody concerned with teaching is in the process of building up their personal mental images of the concept of "competence". However people hardly ever go beyond the theoretical aspects.

The real difficulties begin as soon as one wants to apply the concept to the didactic practice. To form specific disciplinary competences is an intricate task which everyone has to perform. In the paper the different phases of this complex operation are unfolded and an instance of these activities, recently carried out within the redefinition of the programmes for the low secondary school, is also illustrated.

1. Ragionare sulla competenza

Oggi, in tutto il mondo, nella scuola, si parla di competenze. Ogni insegnante, ogni didatta, chiunque insomma si occupi di insegnamento, sta costruendo le proprie immagini mentali del concetto di competenza. Quasi sempre, però, ci si limita a questioni teoriche, ci si esibisce in più o meno complicate enunciazioni che poi si rifanno al tale o al tal altro autore. C'è chi sbandiera il nuovo concetto didattico come se fosse una grande creazione, qualcosa che potrà finalmente risolvere i problemi dell'apprendimento e che causerà una rivoluzione senza precedenti nella prassi didattica. D'altra parte c'è chi si dispone a riccio, assimila queste nuove idee al fenomeno della globalizzazione e considera il tutto alla stregua di un nuovo tentativo del Grande Fratello di orwelliana memoria, questa volta indirizzato alla conquista della didattica.

Chi si occupa di didattica della matematica e ha vissuto intensamente le vicissitudini degli scorsi decenni difficilmente si lascia convincere dalle due tesi opposte sopracitate. Se da un lato la questione delle competenze non appare proprio come grande e sconvolgente novità, dall'altro non si vede nemmeno come possa presentarsi gravida di pericoli per quella libertà d'azione che la scuola in generale e gli insegnanti in particolare rivendicano a giusta ragione. Oggettivamente, la pedagogia della competenza, così come l'abbiamo presentata ed esemplificata sull'ultimo numero di questa pubblicazione, è innanzi tutto una (nuova) modellizzazione dell'apprendimento concettuale. Si va dicendo, giustamente, che la competenza viene raggiunta da un allievo quando, di fronte a una determinata situazione (didattica), conosce i contenuti essenziali, sa rendere operativa la propria conoscenza, sa assumere atteggiamenti improntati, fra l'altro, al giudizio e alla riflessione metacognitiva. Fin qui, tutto bene, tutti in chiaro, tutti soddisfatti: si riscrivono i programmi secondo il concetto di competenza e si ridisegnano (nuove) metodologie per la valutazione, si riscopre la valutazione criteriale.

Ma le difficoltà iniziano quando si vuole passare dalle *macrocompetenze* (che servono a poco) alle *microcompetenze* (che danno sostanza all'intera operazione). Ci si rende conto che se è (relativamente) facile esprimere macrocompetenze, come per esempio a matematica «Saper risolvere problemi» o a italiano «Tematizzare i propri sentimenti in modo adeguato ed efficace»; tutt'altra cosa è dover definire una competenza (microcompetenza) evitando il più possibile ambiguità e genericità. È qui che la definizione teorica di competenza mostra tutti i suoi pregi e difetti, a volte in modo irriverente sia nei confronti dei teorici che l'hanno creata – ma che (quasi) sicuramente non hanno provato a calarsi in una disciplina –, sia nei confronti dell'insegnante che scopre di non essere del tutto in chiaro sul proprio operato, o, per lo meno, di aver agito in passato più di istinto che di riflessione.

2. Definire una competenza matematica

Se terminassimo qui il discorso, commetteremmo lo stesso errore appena rinfacciato ai teorici della pedagogia. Parleremmo, cioè, teoricamente, astrattamente, senza l'imprescindibile supporto sperimentale che deve accompagnare ogni teoria didattica. L'esempio che seguirà non dev'essere però visto solo come contributo dovuto all'aspetto sperimentale appena sottolineato. Al contrario, il didatta disciplinare parte sempre dal concreto, perché sa che la materia prima della sua elaborazione la trova nelle classi, nella mente degli insegnanti così come in quella degli allievi in fase di apprendimento. È dunque inimmaginabile pensare a una competenza senza entrare nel vivo del problema didattico. Prima di tutto, occorre inserirsi coerentemente nel quadro degli obiettivi (ai tre livelli) che interessano la competenza che si vuole costruire.

Al primo livello troviamo le finalità della scuola, in particolare del settore scolastico in cui ci si situa. Per esempio, nella scuola media ticinese queste indicazioni (scelte pedagogiche e didattiche di fondo) le troviamo nella *Mappa formativa*. Quelle riguardanti le scuole medie superiori sono invece contenute nel documento *Piano quadro degli studi* (emanato dalla Conferenza svizzera dei direttori cantonali della pubblica educazione). In passato questi documenti non esistevano, ma in una società (e di conseguenza in una scuola) statica, come quella di qualche decennio fa, non erano strettamente necessari: l'insegnante esordiente trovava le stesse finalità che erano alla base dell'insegnamento da lui ricevuto come allievo: possiamo dire che le finalità erano tramandate per via naturale. In una società complessa e in continuo movimento come quella attuale, questo fenomeno non si può più verificare, evidentemente; ecco quindi nascere la necessità di avere documenti-guida come quelli appena citati.

Al secondo livello, coerentemente con le finalità scelte, occorre riflettere sulla natura cognitiva degli apprendimenti: qui si entra già nel campo disciplinare. Si tratta di definire la tipologia e la qualità cognitiva degli apprendimenti che si vogliono inserire nella competenza. Uno strumento utile per svolgere questo lavoro è la Tavola tassonomica degli apprendimenti matematici. Essa ci aiuta a calibrare quel generico miscuglio di saperi, saper fare e saper essere che troviamo, per esempio, nella definizione di competenza dovuta a Roegiers.

Infine al terzo livello troviamo i «mattoncini» della competenza, cioè gli obiettivi sepcifici disciplinari che la compongono. E già che siamo nella metafora, ci piace precisare che la costruzione della competenza è simile a quella di un muro: dopo aver consultato i piani della costruzione stabiliti dall'architetto (obiettivi del primo livello), il capomastro decide le modalità di esecuzione (obiettivi del secondo livello) e il muratore predispone i mattoni (obiettivi del terzo livello) combinandoli opportunamente, saldandoli insieme e infine intonaca la parete. Quando il muro è finito, i singoli mattoni non si vedono più. Così come il muro non è l'insieme dei suoi mattoni, ma molto di più, la competenza non è l'insieme dei suoi obiettivi, ma molto di più.

3. Esempio: competenza sul calcolo letterale per la quarta media

Passiamo finalmente all'azione. Vogliamo costruire una competenza per la classe quarta (diciamo corso attitudinale) sul calcolo letterale.

Iniziamo col chiederci quali finalità potrebbero essere interessate dall'apprendimento del calcolo letterale. Sulla mappa formativa troviamo, per esempio:

1.1 Numeri (… calcolo numerico e letterale;…)

L'indicazione è chiara: il calcolo letterale va visto come generalizzazione di quello numerico. La lettera rappresenta un numero. Può essere un numero qualunque di un prefissato insieme (di definizione), cioè una *variabile*; oppure un qualunque numero costante, un *parametro*; oppure ancora un numero sconosciuto, da trovare, un'*incognita*.

2.1 Sviluppare processi progressivi di astrazione (…)

Messaggio importante: il passaggio dal numero alla lettera dev'essere fatto lentamente, continuamente, progressivamente, seguendo un naturale processo di generalizzazione.

3.1 (…) la presa di coscienza del suo (della matematica) valore applicativo a problemi di natura pratica, professionale, personale (…).

Le situazioni di apprendimento dovranno tenere conto delle applicazioni a situazioni extra-matematiche. Il calcolo letterale può servire per generalizzare situazioni pratiche particolari, rispondenti a questioni non necessariamente matematiche: in questo caso l'allievo è chiamato a costruire il modello matematico (segnatamente algebrico-letterale) della situazione.

1.2 Aspetti di storia della matematica nella costruzione e nello sviluppo della conoscenza matematica (segnatamente nella conquista del calcolo letterale come generalizzazione di quello numerico).

Nella definizione della relativa competenza bisognerà far entrare anche la presa di coscienza del lungo e travagliato cammino storico (filogenetico) che ha portato i matematici alla definizione e all'uso corrente dell'odierna simbologia algebrica. L'allievo potrà così apprezzare i grandi vantaggi che questa fondamentale conquista culturale ha apportato.

2.2 Agire in diversi contesti e piani applicativi (…).

L'abitudine ad usare lettere e a sviluppare calcoli letterali dev'essere spinta fintanto che l'allievo sia capace autonomamente di farne uso opportuno nei vari campi applicativi, anche in contesti non noti.

3.2 Alimentare il grado di fiducia nelle proprie capacità di operare (…).

Quando l'allievo riesce a raggiungere pienamente la competenza, incrementerà la fiducia nei propri mezzi e acquisirà più coraggio nell'operare con le lettere.

1.3 (…) l'universalità della matematica (del calcolo letterale) (…).

Quello letterale-algebrico è un linguaggio universale. In tutte le culture, comprese quelle che usano alfabeti diversi dal nostro (cirillico, ideografico, ecc.) il calcolo algebrico si scrive allo stesso modo. In virtù di ciò, qualsiasi allievo ticinese può comunicare, in linguaggio algebrico, la risoluzione di un problema, per esempio, a un compagno svizzero tedesco, a uno russo o a uno cinese. Un allievo competente nel calcolo letterale e cosciente di questa realtà prova piacere e rinnovata motivazione a perfezionare le proprie capacità.

2.3 (…) comunicare in linguaggio matematico, anche facendo capo a mezzi tecnologici.

La comunicazione in linguaggio algebrico sta alla base dell'interazione uomo-macchina per questioni matematiche. Senza dovere necessariamente fare allusione ai linguaggi classici (BASIC, PASCAL, ecc.), l'uso corretto del calcolo letterale è necessario per l'allestimento di un foglio elettronico, per poter lavorare con un programma di elaborazione simbolica o con programmi specifici, come per esempio quelli predisposti per l'elaborazione statistica.

Vediamo ora quali particolari categorie di apprendimenti possono essere interessate dall'acquisizione della competenza sul calcolo letterale. Ci aiutiamo con la Tavola tassonomica per la matematica di Arrigo-Frabboni.

111 Riconoscere e usare un simbolo

121 Eseguire operazioni elementari

122 Eseguire procedimenti automatizzati

La tecnica del calcolo letterale poggia sul riconoscimento dei simboli algebrici (lettere, segni di operazione, parentesi, segni di uguaglianza e di disuguaglianza, esponenti, segni di frazione, ecc.). Il raggiungimento della competenza comprende anche l'automatizzazione di alcune operazioni elementari e procedimenti, come per esempio: $a+a = 2a$; $a \cdot a = a^2$; $a \cdot (b+c) = ab + ac$

212 Riconoscere un procedimento / concetto / principio

Essere competenti significa anche essere in grado di far agire la propria conoscenza e per fare ciò è necessario riconoscere dove poter operare in un certo modo.

214 Adattare procedimenti noti a diverse situazioni note

Nell'applicare proprie conoscenze di calcolo letterale, molto spesso, capita di doverle adattare alla situazione contingente; anche questa abilità fa parte del bagaglio della competenza che stiamo costruendo.

221 Eseguire procedimenti non automatizzati

Fra i procedimenti del calcolo letterale che concorrono alla conquista della competenza figurano anche quelli che ragionevolmente un allievo di scuola media non può automatizzare (né sarebbe opportuno che lo facesse…). Al contrario di ciò che avviene per gli automatismi, questi algoritmi vengono eseguiti con l'aiuto del ragionamento cosciente; quindi impegnano costantemente l'intelletto. Come esempi citiamo: la semplificazione di un'espressione letterale, lo sviluppo del quadrato di un binomio, la fattorizzazione di un polinomio, la risoluzione di equazioni o disequazioni, la costruzione di formule.

222 Applicare procedimenti / concetti / principi

223 Controllare e giustificare procedimenti

La competenza comprende anche l'applicazione di una conoscenza di calcolo letterale a un nuovo contesto (anche extra-matematico); in questi casi è importante la verifica e può essere decisiva la ricerca di una giustificazione, senza la quale l'applicazione potrebbe apparire arbitraria o addirittura scorretta.

3111 Analizzare

3112 Confrontare, scegliere, decidere

La situazione viene presentata all'allievo, di solito, mediante un testo scritto, oppure con una figura geometrica o una rappresentazione grafica funzionale (non sono escluse combinazioni dei diversi registri semiotici). Al primo livello, più alto, la situazione non propone domande specifiche: le stesse sono lasciate all'intuizione degli allievi. Al secondo livello, intermedio, potrebbero esserci una o più domande di carattere generale. Infine, al terzo livello, più basso, la situazione è accompagnata da una serie di domande precise che segnano le grandi linee dell'iter risolutivo. Le diverse possibilità di proporre una situazione implicano altrettanti gradi di sollecitazione delle capacità analitiche e decisionali. Mentre il primo livello esige un'analisi completa e una importante presa di decisioni, il terzo livello riduce notevolmente soprattutto la necessità di confrontare e decidere. Le capacità di analizzare e di prendere una decisione, non possono essere direttamente insegnate: occorre svilupparle, gradatamente, con l'esercizio.

3113 Impostare un ragionamento deduttivo

L'analisi di un contesto problematico è essenzialmente un processo deduttivo: dal generale al particolare, dal macro al micro, da situazioni complesse (anche non matematiche) a semplici relazioni matematiche.

3121 (…) Matematizzare situazioni

L'analisi della situazione, le relative decisioni e le deduzioni sono effettuate con lo scopo di tradurre la situazione in linguaggio matematico. In altre parole, la situazione viene modellizzata in termini matematici; si costruisce il modello matematico. Ovviamente il modello costruito da allievi di scuola media è commisurato alle loro conoscenze. Può essere uno schema risolutivo algoritmico, espresso a parole o mediante schematizzazione grafica; oppure un'equazione o una funzione; oppure ancora una figura geometrica, una tabella, un grafico funzionale; o altro.

3122 Impostare un ragionamento induttivo

Nel combinare i vari elementi analizzati per ottenere un modello matematico della situazione, si opera per induzione. Si passa, cioè, da una situazione dettagliata a un modello sintetico che generalizza i casi particolari analizzati. Ciò avviene mediante un processo di sintesi: dal particolare al generale, dal dettaglio alla macrostruttura.

3131 Cogliere le strutture interne di una situazione matematica

Gli allievi della scuola media riflettono sulla loro attività matematica più di quanto comunemente si pensa. Ovviamente non lo fanno spinti da curiosità epistemologiche, ma da bisogni concreti. L'esperienza di vita ha loro insegnato che, quando si riesce bene in una qualsiasi realizzazione, è buona cosa ricordarsi come si è fatto e soprattutto la natura delle scelte operate: così, quando capita di dover ripetere la stessa operazione, si economizzano le energie e si evita di ripetere gli errori già commessi. Succede così, per esempio, nella pratica dello sport e nelle attività ludiche: perché non dovrebbe succedere anche a scuola? Compito degli insegnanti, semmai, è di aiutare gli allievi ad approfondire, ad affinare la loro introspezione: ne guadagnerà sicuramente la qualità degli apprendimenti. Anzi, come già detto, senza un minimo di riflessione metacognitiva non si raggiunge alcuna competenza.

3213 Riconoscere il problema-chiave

3214 Intuire un nuovo procedimento / concetto / principio

Ogni vero problema (dunque un problema del quale l'allievo non conosce ancora alcun iter risolutivo) presenta uno o più punti-chiave. Scoprirli, significa fare un passo decisivo verso la soluzione. Molto spesso, tutto ciò conduce a intuire nuove conoscenze matematiche. Siamo di fronte a obiettivi di saper fare strategico, che dunque non possono essere direttamente insegnati, ma che, come abbiamo già detto per l'analisi, occorre coltivare, sviluppare, rinfrancare (anche in senso affettivo) con la pratica di diverse situazioni che li stimolino.

3221 Inventare per analogia procedimenti / concetti / principi

3222 Estrapolare procedimenti / concetti / principi

Ribadiamo la nostra convinzione che l'attività matematica, quando si esplica all'interno di una situazione ben scelta, è altamente creativa. Oltre che per l'intuizione – che si traduce per esempio nel riuscire a capire dove si trovi la chiave di un problema oppure quale concetto matematico sia nascosto in un dato contesto – vi è spazio per l'invenzione, che, almeno in matematica, non può prescindere da determinate condizioni di fondo, ma proprio per questo – diciamo e sottolineiamo – acquista maggior valore cognitivo. Sempre, nell'attività di apprendimento in situazione, i momenti di creazione possono essere distinti in due categorie: l'inventare per analogia (per esempio: siamo in chiaro sull'addizione in **N**, vediamo se e come possiamo costruirne una analoga in **Z**) e l'estrapolare (per esempio, estendere le proprietà delle potenze a esponente naturale a quelle a esponente intero o razionale).

3223 Formulare problemi nuovi / soluzioni nuove

Qui siamo al punto di arrivo di tutto ciò che abbiamo appena descritto: un apprendimento in situazione – che sia ben riuscito – porta gli allievi a porsi nuove domande, a formulare nuovi problemi che porteranno, a loro volta, a nuove conquiste cognitive.

Possiamo finalmente enunciare una competenza relativa al calcolo letterale per la classe quarta, corso attitudinale. Eccola direttamente presa dai documenti del Piano formativo:

«In una situazione (anche extra-matematica), saper utilizzare lettere sia come variabili, sia come parametri, sia come incognite per costruire modelli matematici mediante l'impiego dei concetti di funzione, equazione, disequazione e sistema; saper semplificare espressioni letterali, saper calcolare con radici quadrate e saper risolvere equazioni, disequazioni e sistemi relativi alla situazione data.»

4. Costruire una situazione della famiglia relativa alla competenza enunciata

Perché l'opera sia completa, occorre però proporre situazioni che si pensa siano adatte a sviluppare la competenza mirata.

Questo lavoro è sicuramente il più delicato da svolgere, anche perché le situazioni devono cambiare continuamente, di anno in anno, di volta in volta. Una situazione ripetuta perde infatti gran parte della sua efficacia, così come un problema conosciuto (nel senso che lo si è già risolto almeno una volta) perde buona parte del suo lato… problematico. Quindi c'è un grande bisogno di situazioni. Sono gli insegnanti i primi ad essere chiamati a creare situazioni. Certo, non si devono mettere davanti a un foglio bianco. Occorre produrre qualche esempio. Nel documento «Competenze per classe (…)» del Piano formativo della scuola media ne troviamo alcuni. Di seguito è descritta un'esperienza vissuta lo scorso anno, nel tentativo di creare una nuova situazione relativa alla competenza sopracitata.

L'esempio, pensato a tavolino, è il seguente (ne diamo alcune versioni, a diversi livelli di complessità):

Primo livello

«Il rapporto tra l'apotema e il lato di un qualsiasi esagono regolare è sempre lo stesso?»

Secondo livello

«Calcola il rapporto tra l'apotema e il lato di un esagono regolare ed esprimi il risultato nella forma più semplice.»

Terzo livello

*«Sia **r** il lato di un esagono regolare e **a** il suo apotema.*

*i) Esprimi l'apotema **a** in funzione del lato **r***

*ii) Calcola, sempre in funzione di **r**, il rapporto tra l'apotema **a** e il lato **r**.*

iii) Che cosa ne deduci?

Non a caso abbiamo detto «pensato a tavolino», perché quando è stato sottoposto ad alcuni insegnanti ne è sorta una discussione. Taluni ritenevano l'esempio fuori dalla portata degli allievi di quarta media, altri scommettevano che, sì, si sarebbe potuto proporre, ma solo nella versione iii). La discussione è stata importante e ha indotto alcuni docenti a provare con le loro classi. Prima di mostrare qualche risultato, mandiamo un sentito ringraziamento a tutti coloro che in un modo o nell'altro ci hanno trasmesso un feedback in merito, ma in particolare alle insegnanti Manuela Gerber e Margherita Tavarini della Scuola media di Breganzona e Claudia Mattei della Scuola media di Castione, per l'ottimo lavoro di rilevazione.

4.1. Esperienza di Manuela Gerber

Formulazione della situazione: al secondo livello.

Breve cronaca

Un allievo chiede conferma se «calcola il rapporto tra apotema e lato di un esagono regolare» significa trovare ad esempio una forma simile a

$$a = \frac{3}{4}\ell$$

Docente: Conferma e aggiunge che più precisamente come risultato del rapporto si pensa a

$$\frac{a}{\ell} = \frac{3}{4}$$

Commento

Qui si vede la difficoltà principale incontrata da questi allievi: interpretare correttamente il testo della consegna. Eppure si tratta di un testo lineare, breve, chiarissimo.

Un gruppo presenta la scrittura seguente e chiede se è corretta:

$$a = \sqrt{r^2 \pm \left(\frac{1}{2}r\right)^2}$$

Docente: chiede a cosa corrisponde la formula scritta e perché sia stata applicata; dopo aver ascoltato la motivazione degli allievi, li rassicura e li invita a continuare.

Un gruppo presenta la scrittura seguente e chiede se il risultato ottenuto è corretto (non è inteso come soluzione del problema):

$$a = \sqrt{r^2 \pm \frac{1}{2}r^2} = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

Docente: segnala (senza indicarlo) l'esistenza di un errore e invita il gruppo a riflettere sulla scrittura. Dopo qualche minuto il gruppo indica che l'errore consiste nella dimenticanza delle parentesi.

Dopo 12 minuti di lavoro, **un gruppo** consegna la soluzione, affermando «ecco la soluzione»: risulta corretta.

Dopo 17 minuti **un altro gruppo** mostra la soluzione richiedendo un parere perché ha qualche dubbio sulla correttezza del seguente calcolo:

$$a = \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{1}{2}\ell\right)^2} = \sqrt{\ell^2 - \frac{1}{4}\ell^2} = \frac{\sqrt{3\ell^2}}{4} = \frac{3}{4}\ell$$

Un allievo del gruppo spiega di aver usato il Teorema di Pitagora e giunto a

$\frac{\sqrt{3\ell^2}}{4}$ si accorge che la scrittura corretta è $\sqrt{\frac{3\ell^2}{4}}$

e quindi propone $\sqrt{\frac{3}{4}}\,\ell$

Quando la docente segnala la consegna «esprimi nella forma più semplice», **l'allievo** propone

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\,\ell$$

e rivede di conseguenza il resto della risoluzione.

Commento

Queste sono vere diffcoltà di calcolo letterale, ma, come si può notare, sono superate abbastanza facilmente, con l'aiuto (peraltro discreto) dell'insegnante.

Un **altro gruppo** afferma di non capire bene. Questi allievi hanno considerato una piramide retta avente per base un esagono regolare e di conseguenza cercano il rapporto tra l'apotema della piramide e il lato dell'esagono regolare. La **docente** rilegge il problema con gli allievi e li aiuta ad analizzare la richiesta.

Commento

Di nuovo riscontriamo una grossa difficoltà nell'interpretare correttamente il testo. L'analisi dell'enunciato è carente: il termine «apotema» richiama immediatamente «piramide»; il resto scompare.

Altri che hanno impostato

$$\sqrt{x^2 \pm \left(\frac{1}{2}x\right)^2}$$

affermano di non saper continuare. In seguito a una stimolazione della docente, scrivono

$\frac{\sqrt{3x^2}}{2}$ e infine $\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

Gli **allievi** che sono in chiaro sul significato di rapporto scrivono

$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x}{x}$ ma elaborano $\frac{\sqrt{3}}{2}x \cdot x$.

La **docente** ricorda che la frazione di frazione è una divisione e che la scrittura equivale a

$\frac{\sqrt{3}}{2}x : \frac{x}{1}$ a questo punto gli **allievi** elaborano $\frac{\sqrt{3}}{2}x \cdot \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{3}x}{2x}$.

La **docente** chiede se il risultato è semplificato al massimo. Dopo qualche titubanza arriva la soluzione

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Commento

Questa è una tipica difficoltà legata al calcolo algebrico con frazioni letterali: una frazione fratto un numero (non frazionario) risulta ben più arduo da semplificare rispetto al quoziente tra due frazioni.

Un gruppo presenta il risultato

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\ell$$

e chiede se è già la soluzione («Va bene così o devo continuare?»)

La **docente** si fa spiegare dagli allievi ciò che hanno fatto e questi si accorgono di aver solo espresso l'apotema in funzione del lato dell'esagono.

La **docente** fa rileggere la consegna e chiede che cosa significa «il rapporto tra…». Gli allievi non sanno rispondere. La **docente** spiega con un esempio (rapporto tra lunghezza e larghezza dell'aula), in seguito ritorna sul problema e chiede agli allievi di spiegare che cosa devono trovare. A questo punto capiscono la richiesta e intravedono la strada da seguire.

Commento

Qui la difficoltà principale risiede nella scarsa conoscenza del concetto di rapporto, nozione questa da non trascurare perché molto importante nelle applicazioni del calcolo.

Dopo 35 minuti l'ultimo **gruppo** presenta la soluzione corretta.

4.2. Esperienza di Margherita Tavarini

Formulazione della situazione: al secondo livello, scritta alla lavagna**, accompagnata da domande poste oralmente dalla docente (D), del tipo: «Come facciamo senza i dati?», «Se non ci sono dati, voi che cosa suggerite di fare?»**

Risposta unanime degli allievi (A):

A: Usiamo le lettere.

Gli allievi incominciano a lavorare individualmente o a piccoli gruppi.

A: Che cos'è il rapporto? Non è mica una divisione? Uno fratto l'altro?

D: Sì. Dimmi con altre parole che cos'è un rapporto fra grandezze.

A: Fare la differenza?!? Ma nooo, che…, è vedere quante volte è più piccola o più grande, cioè moltiplicare una grandezza per il numero trovato con la divisione e trovare l'altra grandezza.

D: Può andare.

(…)

A: Si può risolvere con un sistema di equazioni?
D: Spiegami.
A: Ci sono tre incognite.
D: Quali?
A: ℓ il lato, x l'apotema e r il raggio e quindi…
D: Attenzione; che cos'è l'incognita?
A: Ah, la x è l'incognita, cioè l'apotema.
D: Perché è l'incognita?
A: È quella che devo trovare.
D: Quali sono i dati?
A: ℓ
D: Allora ℓ è un'incognita?
A: No.
D: Quante sono quindi le incognite?
A: Una.
D: Dunque hai un'incognita x e un dato ℓ?
A: Adesso trovo x con il teorema di Pitagora.
D: Vai!
(…)

Commento

All'inizio gli allievi non hanno dubbi sul fatto che si debbano usare le lettere: significa che sono in grado di intraprendere questo processo di generalizzazione.

Vengono però a galla le difficoltà tipiche di questa attività: il concetto di rapporto (non così scontato come si penserebbe…) e il ruolo delle lettere interessate dal problema (non sempre gli allievi di quarta media riescono a distinguere subito il parametro dalla variabile o dall'incognita).

A: Questo problema è presentato malissimo.
D: Perché?
A: Perché chiede una cosa, invece è un'altra.
D: Spiegati meglio.
A: Non viene specificato che cosa bisogna trovare.
D: Leggiamo assieme il problema.
A&D: Calcola il rapporto tra l'apotema e il lato...
A: Allora trovo a fratto ℓ?
D: Trova a fratto ℓ.
(…)

Commento

Qui vediamo chiaramente la difficoltà che genera un simile enunciato (non è il solito problema con dati e con una richiesta chiara). È la difficoltà ipotizzata nella discussione preventiva fra gli insegnanti.

A: Scusi è giusto? (ha trovato l'apotema con Pitagora; i calcoli sono giusti)
D: Che cos'hai trovato?
A: L'apotema e adesso trovo il rapporto.

A: (Dopo un po' ha trovato l'apotema correttamente)
È giusto?
D: Sì.
A: E il rapporto?
D: Avanti. Prova.
A: Si fa questo (l'apotema) diviso ℓ oppure ℓ diviso l'apotema?
D: Leggi attentamente il problema.
(…)

Commento

Incontriamo un altro segnale del fatto che il testo non è stato analizzato bene.

A: È giusto? $a = \ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$

A: (Cogliendo l'espressione di dissenso della docente)
Ho dimenticato la radice.

$$a = \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = \ell - \frac{\ell}{2}$$

D: E gli esponenti di ℓ dove sono finiti?
A: Ah, è vero, li ho semplificati con la radice. Non si può. Adesso lo rifaccio.
(…)

Commento

Fa capolino l'errore tipico $\sqrt{a^2 \pm b^2} = a \pm b$, *che, con molta pazienza, va eliminato entro la fine della quarta media.*

A: Finito! $\frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\ell} = \sqrt{3}$

D: Mi spieghi che cosa hai fatto?
A: Ho moltiplicato l'apotema per l'inverso del lato.
D: $\frac{2}{\ell}$ è l'inverso di ℓ?
A: No è l'inverso di 2 ℓ
D: Sei sicuro?
A: Se è ℓ l'inverso è…
D: Supponiamo che ℓ sia 5 l'inverso di 5 è?
A: 1/5
D: Allora...
A: Ahh!
(…)

Commento

Le lettere fanno anche questi scherzi: l'allievo che è capace di trovare l'inverso di 5, non è detto che lo sappia fare correttamente con ℓ. L'apparizione dell'elemento parassita «2» può essere collegata a una (cattiva) abitudine che l'allievo assume quando a scuola è troppo abituato a trovare risultati che si semplificano al massimo.

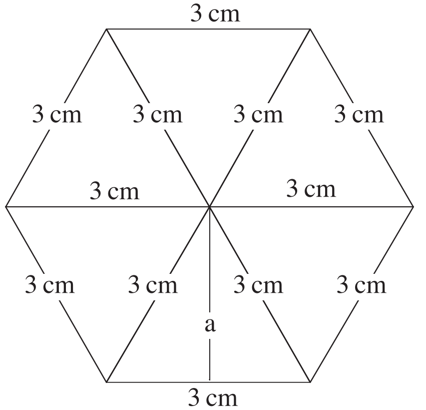
D: Avete finito?
A: Dobbiamo fare la verifica.
D: Come?
A: Sostituendo ℓ con un numero subito all'inizio, fare tutto il problema senza usare le lettere, verificare se poi esce lo stesso rapporto.
D: Mi sembra una buona idea.
A: (Dopo un po')
Abbiamo trovato lo stesso risultato. Quindi è giusto.
D: Molto probabilmente è giusto.

È finita l'ora. La maggior parte degli allievi ha portato a termine il problema. Non tutti hanno verificato la correttezza della soluzione raggiunta.

4.3. Esperienza di Claudia Mattei

Claudia ha proposto questa situazione come prova di valutazione nella sua classe di quarta media, adottando l'enunciato al secondo livello. Ci ha fornito fotocopie di alcuni elaborati, che ci permettono di dedurre alcune interessanti osservazioni.

Allievo 1



$\ell = 3$ cm

$$\text{apotema} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{6,75} \cong 2,6 \text{ cm}$$

$$k_1 = \frac{3}{\sqrt{6,75}} = \frac{\ell}{a} \cong 1,15 \text{ cm}$$

$$k_2 = \frac{\sqrt{6,75}}{3} = \frac{a}{\ell} \cong 0,87 \text{ cm}$$

Commento

Questo allievo mostra di avere una buona capacità di risolvere il problema con dati numerici. Non è però ancora in grado di passare alla generalizzazione. Lo si vede chiaramente osservando due indicatori: all'inizio sostituisce subito il dato parametrico con uno numerico, nel disegno sente la necessità di segnare la misura 3 cm dappertutto. Siamo però fiduciosi perché la correttezza formale mostrata nel calcolo gli dovrebbe permettere di passare all'uso delle lettere senza troppe difficoltà. Basta una piccola spinta… Inoltre, la sua scrupolosità lo spinge a calcolare il rapporto e il suo inverso: per lui, nell'enunciato, si sarebbe dovuto precisare «presi nell'ordine».

Allievo 2

Calcola correttamente il rapporto, ottenendo $\frac{\sqrt{3}}{2}$, ma poi si sente in dovere di aggiungere:

«cioè prendi il lato del triangolo, lo dividi per 2 e lo moltiplichi per $\sqrt{3}$».

Commento

Pur avendo ottenuto il rapporto correttamente, questo allievo ci mostra la difficoltà di considerare un rapporto come tale. L'immagine mentale è ancora quella della frazione come operatore: ecco spiegato perché l'allievo vuole applicare il rapporto al lato. Il concetto di rapporto segue nel tempo quello di operatore frazionario, ma la sua conquista non è per nulla facile.

Allievo 3

Dapprima scrive:

$$\frac{a}{\ell} \qquad a = \frac{\ell}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{rapp} \Rightarrow \frac{\frac{\ell}{2}\sqrt{3}}{\ell} = \frac{\ell}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Poi aggiunge:

$$a = \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{1}{2}\ell\right)^2} = \sqrt{\ell^2 - \frac{1}{4}\ell^2} = \sqrt{\frac{3}{4}\ell^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell$$

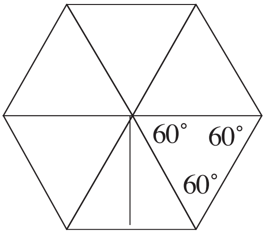
Commento

Questo è l'allievo che tutti sperano di avere. Lui sapeva già che

$$a = \frac{\ell}{2}\sqrt{3},$$

per esperienza precedente. Molto opportunamente usa questo risultato acquisito. Ma, a questo punto, gli sorge il dubbio che l'insegnante non sia d'accordo («Voglio tutti i calcoli…», avrà ripetuto più volte). Quindi per accontentare l'insegnante (la scuola, l'istituzione) si sente in dovere di scrivere il post scriptum.

Allievo 4



$$\frac{360}{6} = 60$$

è formato di 6 triangoli equilateri

$$\ell = \frac{2}{3}a$$

Commento

Siamo di fronte a un tipico esempio di «matematichese». Le prime due righe contengono affermazioni corrette, ma che non sono servite per ottenere il risultato. Da dove venga questo risultato è poco chiaro; potrebbe essere l'effetto di un madornale errore di calcolo, oppure di una stima a occhio, oppure…

4.4. Conclusione

Costruire competenze è un lavoro tutt'altro che facile. Entrano in gioco parecchi fattori: alcuni di tipo «globale», che sono presenti in tutte le competenze (per esempio, la scelta degli obiettivi ai tre livelli, l'individuazione di una famiglia di situazioni,…), altri di tipo «locale» (per esempio, come abbiamo appena visto, l'individuazione preventiva delle diverse misconcezioni che si frappongono come ostacolo al raggiungimento della competenza). Ribadiamo: costruire una competenza non vuole dire solo occuparsi di ciò che l'allievo dovrà essere in grado di produrre alla fine, ma anche ricercare gli ostacoli (didattici ed epistemologici) che possono impedire il suo raggiungimento. Per scoprire questi ultimi, è necessario effettuare un paziente lavoro di osservazione nelle classi. Occorre investire tempo ed energie, ma, alla fine, la ricaduta sull'insegnamento è importante. Abbiamo volutamente tralasciato, in questa sede, di affrontare il problema della valutazione delle competenze. Ci riserviamo di riprenderlo sul prossimo numero.

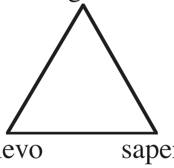
2. Trasposizione didattica, sapere e sapere insegnato: il «caso» delle frazioni[1, 2]

Martha Isabel Fandiño Pinilla[3]

The problem of didactic transposition is discussed in detail, as an essential stage in teaching practice. In particular we study the case of the relationship of part/whole in the learning of fractions. This example is used as a paradigm to demonstrate the complexity of the subject and the crucial importance of "didactic engineering".

1. Trasposizione didattica

La *trasposizione didattica* è argomento oramai diffuso tra tutti coloro che si occupano di Didattica della matematica. Nel cosiddetto *triangolo della didattica*,



il «sapere» cui si fa riferimento è il sapere accademico, quello universitario, quello della ricerca, quello degli scienziati. Ma compito principale dell'insegnante è la cosiddetta *trasposizione didattica*, una sorta di *reinterpretazione funzionale* del sapere, funzionale alla scuola, al sapere dei suoi allievi, al curricolo, al livello scolastico, alle attese della società, alla tradizione ecc. (D'Amore, 1999)

La trasposizione trasforma dapprima il *sapere* in *sapere da insegnare* e poi in *sapere insegnato* (sarebbe utopistico ed ingenuo pensare che il *sapere insegnato* coincida con quello *appreso*...):

1. Questo articolo costituisce una rielaborazione del testo della conferenza che l'autrice ha dato in occasione della «Fine Settimana della Matematica n° 9 per Insegnanti della Scuola di Base» a Castel San Pietro Terme (Bologna, Italia), nei giorni 8 e 9 settembre 2001. Queste giornate di studio sono organizzate dal Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica di Bologna e dall'Assessorato alla Cultura del Comune di Castel San Pietro.
2. Il lavoro è svolto nell'ambito del Progetto di Ricerca dell'Unità di Bologna: «*Ricerche sul funzionamento del sistema: allievo-insegnante-sapere*», inserito nel Programma di Ricerca Nazionale: «*Difficoltà in matematica: strumenti per osservare, interpretare, intervenire*», cofinanziato con fondi M.I.U.R.
3. N.R.D. di Bologna.

sapere
trasposizione didattica
sapere da insegnare
sapere insegnato
sapere appreso

Riflettere su questi «passaggi» aiuta molto nella comprensione della realtà scolastica. Sembra tuttavia che una scarsa dimestichezza negli studi di Didattica ostacoli tale riflessione, cosicché si ritiene opportuno proporre ogniqualvolta possibile esempi concreti che possano far luce su questa problematica: che differenza c'è tra *sapere* e *sapere da insegnare*?

Ci limiteremo qui solo ad un esempio, con alcuni riferimenti però anche al *sapere insegnato* e, di sfuggita, al *sapere appreso*. E ci limitiamo al solo concetto di numero. La scelta è di comodo: tale concetto e la sua costruzione fanno parte della Matematica portata in aula fin dalla più tenera età e fino alla fine della carriera scolastica, anche all'Università ed oltre...

2. Il numero

In Matematica il numero è ben definito (per esempio, il numero naturale è definito tramite gli assiomi di Peano o la costruzione di Von Neumann o altre modalità); tuttavia, in *nessun* livello scolastico si tratta *così* l'introduzione a questo concetto.

Viene dunque spontaneo affrontare il problema della trasposizione del concetto di numero:

- Che cosa del concetto di numero deve essere oggetto della didattica?
- Quali immagini di numero sono opportune ai vari livelli scolastici, per esempio nella Scuola Elementare?

Ci sono questioni tipiche, a questo proposito, oramai prassi consolidata; nella scuola si trattano ovviamente aspetti del numero che non fanno parte del sapere accademico e che tuttavia sono considerati importanti, utili, necessari, irrinunciabili del sapere scolastico, quello atteso nelle aule delle scuole; per esempio:

- il numero come oggetto del contare
- il numero come strumento del misurare
- il numero-etichetta, come strumento per identificare, per indicare
- ...

Fra tutti gli aspetti «scolastici» del numero, ad un certo punto appaiono i numeri «frazionari»; tali «oggetti» non esistono nel sapere accademico, nel quale al loro posto esistono i «numeri razionali» che sono definiti come le classi di equivalenza [(a,b)] ottenute in $\mathbf{N}\times(\mathbf{N}\setminus\{0\})$ grazie alla relazione d'equivalenza: $[(a,b)\cong(c,d)]\Leftrightarrow(ad=bc)$.

Nel sapere accademico non c'è posto per le frazioni, per i numeri frazionari, dato che non ce n'è bisogno. Se si potesse portare a scuola il sapere accademico o una sua parte, quasi non ci sarebbero problemi... a parte l'impossibilità da parte degli allievi di comprendere l'argomento, per ovvii ostacoli ontogenetici.

Dunque, nel sapere scolastico ci sono argomenti che sono attesi, opportuni, dovuti e che riempiono le aule ed i libri di testo, argomenti che sono tipici, specifici, opportuni nel sapere scolastico, ma assenti nel sapere accademico.

Che cos'è dunque questo «numero frazionario»?

In realtà, l'oggetto matematico «numero frazionario» può essere pensato come l'insieme delle sue interpretazioni o rappresentazioni, al plurale.

Qui, più che altrove, dovremmo puntare tutta la nostra attenzione sulla delicata e decisiva questione del passaggio dalla pluralità di rappresentazioni nei vari registri semiotici, alla noetica, cioè all'apprendimento concettuale (che, ricordando Duval, 1993, 1995, è un percorso obbligato).

Non c'è dunque un'*unica* interpretazione o rappresentazione del numero frazionario, dato che ne esistono invece *molte* che fanno riferimento sia alla realtà oggettiva concreta (anche extrascolastica) sia alla realtà scolastica.

Eccone un elenco, piuttosto incompleto, tratto dalla consuetudine didattica.

Frazione come relazione parte/tutto:
- parte di un insieme o raccolta di oggetti distinti: 3/4 di 12 oggetti è 9 oggetti
- misura lineare: inserire 3/4 sulla retta numerica vuol dire misurare 3/4 di una determinata unità stabilita; oppure: 3/4 della lunghezza di un segmento è una certa lunghezza, minore, di un segmento che è una parte del primo
- area: colorare i 3/4 di un dato rettangolo:
- …

Frazione come rapporto:
la frazione a/b esprime il rapporto tra a e b in diverse situazioni:
- scale
- proporzionalità
- percentuali
- …

Frazione come divisione:
ricerca del quoziente, il che comporta competenze su:
- numeri con la virgola
- Sistema Metrico Decimale
- …

Frazione come espressione della probabilità:

- misura della probabilità di un evento
- presentazione di situazioni su cui fare ipotesi: Su 10 persone, 3 hanno gli occhiali; qual è la probabilità che, scegliendo a caso una persona, essa abbia gli occhiali?
- …

Frazione come operatore:

- Esempio: I 2/5 di 3/4 sono 3/10: non è una vera misura, né una vera divisione.

Una volta deciso che i punti precedenti costituiscono in un determinato momento della carriera scolastica un *sapere da insegnare*, sorge il problema dell'ingegneria didattica: come insegnare questi concetti? E, soprattutto: come far sì che gli studenti li apprendano?

Limitiamoci ora all'esempio della frazione come relazione parte/tutto; quali sono le domande che si presentano al docente quando decide di affrontare questo argomento?

Conviene prima lavorare nel continuo (area e misura) e poi nel discreto (parte di un insieme)?

3. Preliminari sull'apprendimento del numero frazionario come parte/tutto

Prima di proseguire, è necessario cercare di identificare le caratteristiche della struttura cognitiva che permette di maneggiare la nozione di «parte/tutto». Alcune delle abilità necessarie per dominare questa nozione sono state studiate dapprima da Piaget, Inhelder, Szeminska (1960) (cit. in Llinares Ciscar, Sánchez Garcia, 1996). Tali studi hanno precisato che la nozione di frazione nel suo aspetto parte/tutto (in contesti continui) si basa su 7 attributi:

- un tutto che è però scomponibile in elementi o parti tra loro separabili;
- tale separazione si può fare in un numero determinato di parti costituenti;
- le suddivisioni nel loro insieme completano il tutto;
- il numero delle parti non coincide con il numero dei «tagli»;
- le parti devono essere uguali tra loro (congruenti, se l'unità lo permette);
- ciascuna delle parti così ottenute può a sua volta essere intesa come una nuova unità;
- il tutto si conserva, anche se diviso in parti.

Payne (1976) (cit. in Llinares Ciscar, Sánchez Garcia, 1996), considera invece basilari tre principi per l'apprendimento della nozione di frazione come parte/tutto, e cioè che gli allievi:

- abbiano un controllo simbolico delle frazioni;

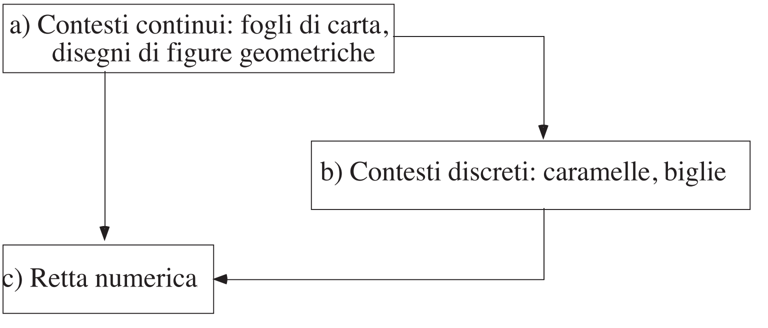
- considerino la nozione parte/tutto sia in contesti continui sia in contesti discreti;
- facciano suddivisioni equivalenti (per esempio congruenti, se l'unità lo permette).

Nel contesto dell'apprendimento di questo concetto, più che in altri, è importante far sì che lo studente NON passi dalle immagini ai modelli troppo presto e soprattutto che non si faccia modelli solo di uno degli aspetti parziali detti. (D'Amore, 1999)

4. Insegnamento/apprendimento della frazione parte/tutto

Torniamo dunque alle domande che ci eravamo posti nel paragrafo 2. Le esperienze internazionali di *ingegneria didattica* degli ultimi 30 anni mostrano ampiamente che conviene partire dall'immagine della frazione come area, e trattare a lungo solo frazioni minori dell'unità.

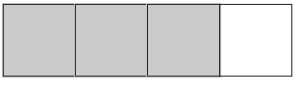
Schematizzando questa idea:



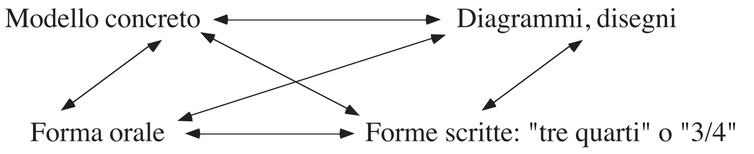
Questa «scoperta» sostanzialmente coincide con l'attività più diffusa nel mondo della scuola, nel senso che tutti gli insegnanti, più o meno, partono così. La «novità», se così vogliamo chiamarla, sta nel fatto che risulta inoltre ampiamente dimostrato che occorre dare una pluralità, il più possibile estesa, di *immagini* della frazione, mentre esistono ancora insegnanti o testi che si limitano ad una sola o che ne privilegiano una sola.

È importante far notare che cosa si stia evidenziando, tenendo fermo il registro semiotico e cambiando però rappresentazioni (questo tipo di *trasformazione semiotica* si chiama: *trattamento*) (Duval, 1993, 1995; D'Amore, 2001b, specie alle pagine 321-358):

- dire ad alta voce «tre quarti»
- scrivere sulla lavagna o sul quaderno «tre quarti»
- in simboli «3/4»
- colorare:



sono tutte forme diverse di rappresentazione semiotica. Le forme diverse di rappresentazione si possono indicare nel seguente schema nel quale si introduce come ulteriore forma di rappresentazione quella tratta dal mondo reale:

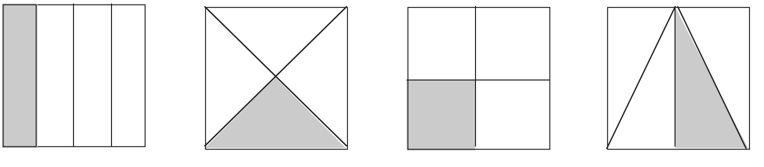


Le rappresentazioni delle situazioni che portano con sé implicitamente la nozione di frazione attraverso diagrammi, disegni, schemi, possono essere presentate agli allievi con l'intenzione di dar loro un *modello di appoggio* che permetta di passare da situazioni concrete o intuitive ad un livello più formale come potrebbe essere il lavoro direttamente numerico.

Dal gioco e da attività del tipo «*Tu fai le parti ed io scelgo*» (nelle quali si conduce l'allievo a suddividere diversi materiali, cercando di far sì che le parti siano congruenti), si può spingere a mettere in rilievo i criteri che gli studenti usano per verificare appunto che dette parti siano «uguali»; la letteratura internazionale su questo tema è vastissima.

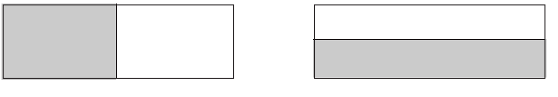
Vediamo esempi concreti.

Nei 4 esempi seguenti, che rappresentano tutti 1/4, si deve evidenziare esplicitamente che la parte colorata è la quarta parte dell'area dello *stesso* quadrato:

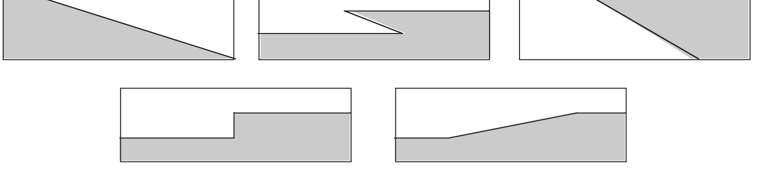


È bene usare più situazioni ed affidare agli stessi studenti la gestione del compito. Per esempio, le metà dell'area di un rettangolo non sono solo:

questa e questa

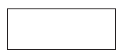
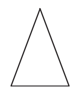
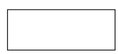
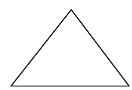


ma infinite altre:

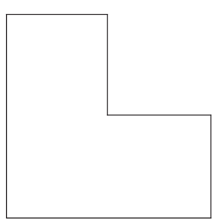


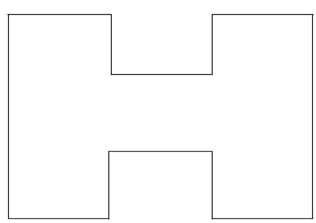
È necessario che tutte le attività che hanno come obiettivo finale la formalizzazione della nozione di frazione vincolino l'esistenza delle frazioni all'unità: la «misura» della metà di «un qualche cosa» è funzione di questo «qualche cosa»; ciò evita che gli allievi ignorino il contesto nel quale si sta lavorando e che questo successivamente si converta in un ostacolo per la nozione di frazione in un contesto discreto.

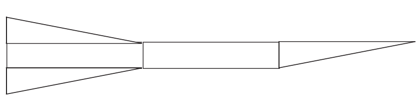
È altrettanto importante non intendere il frazionamento dell'unità in maniera unidirezionale, cioè non solo chiedere di colorare i 3/4 di una determinata figura, ma anche proporre problemi del tipo inverso:

	Forma della unità	
	Rettangolo	Altra figura
Si parte da frazioni unitarie	 Questo è 1/4 di una figura; qual è la figura?	 Questo è 1/4 di una figura; qual è la figura?
Si parte da frazioni qualsiasi	 Questo è i 3/4 di una figura; qual è la figura?	 Questo è i 2/5 di una figura; qual è la figura?

È bene non cadere in stereotipi o figure sclerotizzate; per esempio, non solo «trovare i 3/4 di» figure compatte e convesse, ma anche di figure più complesse, per esempio concave come:







5. Frazioni come misura e altre considerazioni generali

Passiamo ora alla frazione come misura facendo però riferimento solo alla cosiddetta «linea dei numeri».

Una cosa è individuare sulla linea dei numeri la frazione 3/4 avendo preso come misura di riferimento l'unità, altra cosa è prendere i 3/4 di 2 e segnare sulla linea dei numeri, appunto, i 3/4 di 2.

Così, la metà della distanza Roma-Innsbruck e la metà della distanza Bressanone-Innsbruck, pur essendo entrambe «una metà» di qualche cosa, sono tra loro ben diverse, perché sono frazioni di misure diverse, in ciascun caso considerate come l'unità. Dunque: non tutte le metà sono uguali dipende di che cosa sono ciascuna la metà!

Sia nel numero frazionario come area, sia nel numero frazionario come misura lineare, tutti sappiamo bene che è sempre possibile trovare una data frazione. Per esempio, si sa che è possibile trovare i 22/25 di area di una data figura o di una data distanza, anche se fisicamente (per esempio con il disegno) la cosa potrebbe risultare complicata (dividere una figura in 25 parti uguali, e poi prenderne 22, non sempre è tanto agevole).

Ma vi sono frazioni, intese come parte di un insieme-tutto, per le quali è impossibile trovare un'immagine significativa. Per esempio, se l'insieme di partenza è formato da 5 persone, è impossibile pensare e rappresentare in modo ingenuamente realistico i 3/4 di tale insieme.

Diventa allora anzi per esempio interessante chiedersi, rispetto a casi concreti: per quali frazioni ha *senso* porsi domande, di fronte ad una raccolta di 5 persone? Per esempio ha senso prenderne 2/5, 6/10 (per quanto sia assurdo applicare il primo passo intuitivamente appreso «dividere per 10»), 1/5 ecc.?

Nella relazione parte/tutto, in ciascuno dei casi visti: area (continua), misura lineare (continua), parte di un insieme (discreta), vi sono elementi che contribuiscono alla formazione dell'idea di numero frazionario e tuttavia vi sono costituenti del concetto generale che non si riescono a *vedere* in ciascuno di essi.

Per esempio, nel primo possiamo anche dimenticare ogni riferimento all'unità di misura perché qualsiasi frazione m/n venga richiesta (con $m<n$, m ed n numeri naturali ed ovviamente $n\neq0$), essa certamente si può rappresentare; mentre questo non capita né nel II caso (dove l'unità è fondamentale) né nel III caso (dove il numero di elementi dell'insieme di riferimento è condizionante).

6. Uguaglianza tra frazioni

C'è un aspetto fondamentale che riguarda i numeri frazionari ed è l'uguaglianza tra frazioni. Noi vogliamo che i nostri allievi, alla fine, sappiano riconoscere che: 1/2 = 2/4 = 3/6 = ... e che sappiano trovare altre frazioni uguali (c'è chi dice «equivalenti», ma poi usa il segno «=»).

Ora, questa catena di uguaglianze infinita ha senso per i casi continui (area e misura lineare), per i quali dire 1/2 o dire 3/6 è la stessa cosa… Ma cessa di avere senso per i casi discreti, giacché può esistere 1/2 di una raccolta di 10 persone, ma diventa oltremodo complesso giustificarne i 3/6 in modo intuitivo, senza dare già per acquisito che vale l'uguaglianza detta sopra e quindi lavorare direttamente sulla frazione… più comoda[4].

Qui si deve far notare come il modello concreto si converte in un ostacolo nell'apprendimento, dato che, per trovare frazioni equivalenti con numeratore e denominatore *più grandi*, l'azione aritmetica o concreta reale è di *dividere* ulteriormente l'unità. Per esempio, per passare da 2/3 a 4/6, l'unità (che era divisa in 3 parti) va idealmente divisa in più parti (6). Dunque, apparentemente, per arrivare a numeri (numeratore e denominatore) più grandi, bisogna dividere l'unità in parti più piccole.

Mentre la cosiddetta semplificazione, che è una riscrittura con numeri al numeratore ed al denominatore *più piccoli*, si ottiene facendo parti *più grandi*. Per esempio, per semplificare 4/6 ed ottenere 2/3, bisogna idealmente prendere le 6 parti nelle quali era divisa l'unità, a due a due, dunque bisogna prendere parti dell'unità più grandi.

Ciò costituisce un apparente paradosso, più evidente in quei Paesi dove la prassi scolastica ha portato gli insegnanti ad usare i seguenti nomi rispettivamente per le due attività descritte in precedenza: *ingrandire le frazioni* e *rimpicciolire le frazioni*. L'origine di queste denominazioni, di sicuro non accademiche e assai discutibili, aveva certo lo scopo di dare l'idea dell'operazione da eseguire ma è finita invece per diventare motivo di ulteriore ostacolo. Fortunatamente non è in uso nella scuola di lingua italiana.

Inoltre bisogna osservare che tutto ciò ha modelli reali (quando ce li ha) solo nel continuo!

7. Frazioni «mostro» (da un punto di vista intuitivo)

Veniamo ora a frazioni-mostro, come le cosiddette «frazioni improprie» del tipo m/n con m>n (e sempre, ovviamente, n≠0).

Nei casi «continui» è relativamente facile pensare ai 3/2 di una data figura o ai 3/2 di una data unità, da rappresentare sulla linea dei numeri:

anche se il modello unitario usuale (pizza o torta da dividere in parti uguali) non funziona più.

Ma se abbiamo un insieme di 4 persone, trovarne i 3/2 costituisce un ostacolo; anche se lo studente accetta che tale frazione rappresenti alla fine 6 persone, entra però in contrasto con immagini precedenti: cessa d'esser vero che le 4 persone (raccolta discreta) rappresentino l'unità.

Così, mentre ha senso la frazione 3/3 nel caso continuo, potrebbe non averlo nel caso discreto o, per lo meno, potrebbe non essere affatto evidente. Si pensi ai 3/3 di un insieme di 4 persone.

4. D'altra parte, una cosa è la semiotica (rappresentazione di un concetto in un dato registro semiotico), ben altra è la noetica (apprendimento di un concetto).

8. Conclusioni

Come dicevamo poco sopra, questo non è che un esempio, scelto (non a caso) tra quelli che si rivelano più difficili nell'apprendimento.

Una cosa è un *oggetto del sapere accademico* ben altro è un *oggetto del sapere da apprendere* in situazione scuola. La trasposizione didattica non è dunque, banalmente, come taluni credono, la scelta di una parte dei contenuti nei quali l'insegnante è esperto, è invece una vera e propria *trasformazione di sapere*.

Bibliografia

Sulle frazioni

Llinares Ciscar S., Sánchez Garcia M.V.
Fracciones. La relación parte-todo. Madrid: Sintesis, 1996.

Hart K.
Le frazioni sono difficili. In: Artusi Chini L. (a cura di) (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Bologna: Zanichelli-U.M.I. 134-143, 1985.

Sulla terminologia specifica della Didattica della matematica qui utilizzata

D'Amore B.
Elementi di Didattica della matematica. Bologna: Pitagora, 1999.

D'Amore B.
Didattica della matematica. Bologna: Pitagora, 2001a.

Altri riferimenti

D'Amore B.
Scritti di Epistemologia Matematica. 1980-2001. Bologna: Pitagora, 2001b.

Duval R.
Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65, 1993.

Duval R.
Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentisages intellectuels. Berne: Peter Lang, 1995,

Sulle frazioni

Llinares Ciscar S., Sánchez Garcia M.V.
Fracciones. La relación parte-todo. Madrid: Sintesis, 1996.

Hart K.
Le frazioni sono difficili. In: Artusi Chini L. (a cura di) (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Bologna: Zanichelli-U.M.I. 134-143, 1985.

Sulla terminologia specifica della Didattica della matematica qui utilizzata

D'Amore B.
Elementi di Didattica della matematica. Bologna: Pitagora, 1999.

D'Amore B.
Didattica della matematica. Bologna: Pitagora, 2001a.

Altri riferimenti

D'Amore B.
Scritti di Epistemologia Matematica. 1980-2001. Bologna: Pitagora, 2001b.

Duval R.
Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65, 1993.

Duval R.
Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentisages intellectuels. Berne: Peter Lang, 1995

3. Ricerca sul senso dell'infinito nei ragazzi della scuola media

Alberto Piatti

During two weeks the pupils of a 9th grade class (last year of low secondary school) did a research work on some issues regarding the infinite, particularly the infinite series and the cardinalities of infinite sets. The results, as well as emphasizing the lack of all that concerns the understanding of the concept of infinite from the official programmes, also pointed out some interesting phenomena which involve the didactic contract, the image of mathematics among the pupils and the consistency in their reasoning.

1. Introduzione

Questa sperimentazione è nata dal mio desiderio di studiare il comportamento degli allievi di fronte a temi mai visti prima e, in apparenza, completamente slegati da quanto svolto durante le lezioni di matematica. I ragazzi, divisi in gruppi, hanno lavorato nella massima indipendenza potendo contare solo su se stessi e sui propri compagni di gruppo; il mio comportamento, volutamente distaccato, li ha fatti sentire in una situazione di contratto didattico sperimentale ([6], pag 119) e li ha portati ad assumere posizioni e comportamenti che difficilmente avrebbero assunto in una lezione «normale». La sperimentazione è stata svolta con una classe di 14 allievi tra i 14 ed i 15 anni della Scuola media di Barbengo (Cantone Ticino, Svizzera). Tutti i riferimenti a programmi e al corpo docente sono da intendersi relativi alla realtà ticinese.

2. Metodologia della ricerca

Ho proposto agli allievi due serie di fogli (vedi Appendice 1 e 2); la prima serie era dedicata alle somme infinite di numeri (serie numeriche), la seconda era dedicata alla cardinalità degli insiemi **N**, **Z** e **N**×**N**. Le modalità di lavoro per i due argomenti sono state fondamentalmente diverse: di seguito tratterò quindi i due argomenti separatamente.

Somme infinite

I ragazzi hanno ricevuto la consegna di dividersi in tre gruppi di 4-5 persone e di disporsi in modo che gli altri gruppi non potessero sentire le loro discussioni. Ho in seguito distribuito i fogli che si trovano nell'appendice 1. Si tratta di alcuni problemi con delle proposte di soluzione (che chiamerò in seguito *versioni*) ricavate dalla storia della matematica ([5] e [9]) o inventate da me. Le versioni relative alla somma infinita di Grandi erano tutte volutamente false, contraddittorie e basate sulle regole di calcolo in ambito finito. Prima di spiegare agli allievi il compito che avrebbero dovuto svolgere ho descritto loro il funzionamento della ricerca universitaria in matematica: ho spiegato che solitamente diversi gruppi in diverse università lavorano sullo stesso tema e ogni tanto pubblicano i loro risultati perché possano venire valutati, corretti o confutati dagli altri gruppi e che spesso tutto funziona come una specie di gara; ho quindi detto loro che avrebbero dovuto fare in piccolo la stessa cosa sul tema da me proposto. In particolare i ragazzi dovevano criticare le versioni descritte sui fogli e quindi preparare una loro versione da sottoporre in seguito agli altri in una lezione plenaria alla fine dell'attività. I ragazzi sono stati al gioco e hanno proceduto con impegno e in maniera abbastanza indipendente, come se si trattasse di una vera gara. Alla fine i rappresentanti dei tre gruppi hanno presentato i loro risultati davanti a tutta la classe, risposto alle domande dei compagni e sostenuto le loro tesi (le presentazioni sono state registrate e sono a disposizione).

Cardinalità degli insiemi infiniti

In questa fase i ragazzi hanno lavorato individualmente (per una definizione di lavoro individuale vedi [7]) sui fogli che si trovano nell'appendice 2; il tempo di lavoro purtroppo era limitato a due ore per motivi di forza maggiore. Sui fogli comparivano diversi problemi riguardanti la cardinalità degli insiemi numerabili infiniti con una proposta di soluzione; le versioni presentate erano quasi tutte corrette ma chiaramente contrastanti se considerate nella logica del calcolo del finito. Alla fine i ragazzi mi hanno consegnato i fogli con le loro soluzioni.

3. Risultati

Somme infinite

Durante il lavoro di gruppo le discussioni si sono rivelate di buon livello; quasi tutti gli allievi hanno avuto il coraggio di esporre le proprie idee (anche in forte contrasto con quanto affermato dai loro compagni); hanno sostenuto intelligentemente le proprie idee e hanno cercato insieme agli altri una soluzione convincente per tutti. La discussione è spesso scivolata sul concetto generale di infinito. Le domande più ricorrenti sono state:

— Può una somma di infiniti termini avere un valore finito?
— Che cosa cambia se una somma finisce o non finisce?
— Come posso sommare infinite frazioni? Come posso trovare un denominatore comune?

Dalle discussioni ho dedotto che gli allievi non sono ancora in grado di intuire un infinito attuale (vedi [2], [3] e [9]). Il risultato di una somma infinita è vissuto nel migliore dei casi come un'entità in movimento, come un infinito potenziale (vedi [2], [3] e [9]), come un valore al quale la somma si avvicina senza mai raggiungerlo. In altri casi invece difficilmente viene accettata l'idea che una somma di infiniti termini possa avere un risultato finito. Per avere un paragone ho proposto lo stesso tipo di lavoro in una classe di una collega, parallela alla mia, per verificare se gli effetti osservati nella mia fossero estensibili: è risultato che i ragazzi dell'altra classe avevano ancora meno idea di che cosa significasse infinito; alcuni sono arrivati a dire (in maniera convinta) che l'infinito non è qualcosa di utilizzabile nei calcoli ma che è semplicemente un concetto (nel senso di qualcosa di completamente astratto).

Nella mia classe ho osservato altri effetti interessanti che descrivo brevemente.

Quando hanno saputo che alcune delle versioni da loro stessi confutate erano state proposte, alcuni secoli prima, da matematici, alcuni allievi sono entrati in crisi. La loro visione assolutistica della matematica (vedi ad esempio [4] pag. 87), purtroppo indotta da un certo atteggiamento didattico non del tutto scomparso, è crollata miseramente. Improvvisamente hanno avuto l'impressione che la matematica non fosse un vecchio monumento ammuffito, bensì qualcosa in movimento, qualcosa di costruito nei secoli, qualcosa di vivo (per una piccola carrellata storica vedi [1], pag. 137). Questo è stato indotto secondo me anche dalla descrizione del funzionamento della ricerca accademica in matematica, a dimostrazione che un contatto degli allievi di scuola media con questo mondo non è affatto superfluo e che è giusto che i ragazzi provino a loro volta a fare ricerca.

Gli allievi hanno dimostrato di essere fortemente dipendenti dal contratto didattico (vedi ad esempio [6], pag. 97) soprattutto nelle presentazioni orali hanno sempre fatto riferimento a piccole cose dette da me durante il lavoro di gruppo. Per giustificare l'esattezza delle proprie proposte si sentivano obbligati a fare riferimento al docente, come se le proposte fossero sue: sembrava che non fossero in grado di sostenere una verità costruita interamente da loro. Ancora una volta i vincoli e certi pericoli del contratto didattico sono venuti alla luce.

Cardinalità di insiemi infiniti

L'analisi dei risultati di questa parte ha proposto altri spunti interessanti che riassumo brevemente.

Nella maggior parte dei casi i ragazzi hanno utilizzato immagini mentali (per una definizione di immagine mentale vedi [6], pag.145 e segg.) legate ai calcoli con i numeri finiti; questo ha portato naturalmente a un forte effetto di dipendenza[1] (vedi [2], [3] e [9]). In altri casi gli allievi hanno effettivamente utilizzato una primitiva immagine mentale di infinito ma sono caduti in un forte appiattimento[2] (vedi [2], [3] e [9]).

I complicati effetti descritti in precedenza hanno portato gli allievi ad essere completamente incoerenti nelle loro risposte rispetto al loro sistema di riferimento (le regole di calcolo in ambito finito), ad esempio alcuni hanno risposto che

$$\#(\mathbf{N}) = \frac{1}{2}\#(\mathbf{Z}) \quad \text{e che} \quad \#(\mathbf{N}) = \#(\mathbf{Z})$$

ma senza notare che le due affermazioni, nell'ambito del finito, sono in chiara contraddizione. Non hanno intuito che, con l'infinito, le regole di calcolo cambiano. Evidentemente i ragazzi di scuola media non concepiscono ancora la necessità di coerenza di una teoria matematica.

1. Misconcezione secondo la quale ci sono più punti in un segmento lungo piuttosto che in un segmento corto, oppure più numeri nell'insieme Z piuttosto che nell'insieme N poiché il primo è «più grande».
2. Misconcezione secondo la quale gli infiniti sono tutti uguali, ad esempio cade in appiattimento chi afferma che N e Z hanno lo stesso numero di elementi poiché sono entrambi infiniti, ma anche chi non fa alcuna distinzione tra numerabile e continuo.

Slegati dal contratto didattico per via del mio atteggiamento, alcuni allievi hanno avuto il coraggio di dire che alcune versioni, seppure fossero apparentemente corrette, non li convincevano assolutamente.

Questo ha evidenziato che gli allievi di scuola media non distinguono assolutamente una dimostrazione rigorosa da un'argomentazione (per una distinzione vedi [6], pag. 325 e segg.).

4. Conclusioni

1. I programmi attuali di scuola media non contemplano l'introduzione dell'infinito[3]. L'approccio assolutamente finito in prima e seconda media induce l'allievo ad usare le stesse regole anche nel biennio successivo compromettendo così la formazione di una corretta immagine mentale di infinito. Conseguentemente viene compromessa pure una vera comprensione del calcolo infinitesimale durante la scuola media superiore. Anche secondo me l'infinito va assolutamente inserito, in maniera adeguata all'età, fin dal primo anno di scuola media (alcune mie sperimentazioni in prima media hanno portato a risultati incoraggianti).
2. I ragazzi hanno dimostrato di avere assolutamente bisogno, durante il processo di apprendimento, di un interlocutore (tradizionalmente l'interlocutore privilegiato è il docente). Questo porta però al rafforzamento del contratto didattico con le conseguenze descritte in precedenza.
   Per educare l'allievo all'indipendenza di pensiero bisogna abituarlo ad avere come interlocutori i propri compagni e non da ultimo se stesso. Il docente deve essere vissuto come un interlocutore privilegiato, ma non come depositario della verità assoluta. Ancora meglio se l'allievo riesce a vivere il docente semplicemente come una risorsa. A mio modo di vedere, una forma didattica come quella da me sperimentata va proprio in questa direzione.
3. La visione assolutista della matematica presente negli allievi va decisamente combattuta e l'arma privilegiata per vincere questa battaglia è la storia della matematica. Quando si spiega un concetto è senz'altro utile raccontare come questo si sia formato nel tempo e quali cambiamenti abbia portato all'epoca alla matematica ufficiale. La matematica deve essere vissuta come qualcosa di vivo ed in movimento. Questo punto, già presente nella mappa formativa (vedi [8]) viene, a mio modo di vedere, spesso frainteso.
4. L'incoerenza dimostrata dagli allievi e la non distinzione tra argomentazione e dimostrazione dovrebbe portare il docente a rivedere la maniera con cui giustifica davanti a loro i suoi risultati. In particolare egli dovrebbe assumere forme didattiche, chiaramente slegate dal contratto didattico, per valutare il grado di convinzione che gli allievi mostrano di avere rispetto ai concetti appresi.

3. Questo conferma alcune conclusioni contenute nella ricerca «Lo vedo ma non ci credo» (seconda parte) di Arrigo-D'Amore (2002), vedi [3].

5. Spunti di ricerca

La mia ricerca è stata svolta su un campione ristretto di allievi ed è stata condizionata dalla mia poca esperienza nel campo. Sicuramente i seguenti punti andrebbero ulteriormente approfonditi in future sperimentazioni e ricerche.

– Introduzione di aspetti della storia della matematica nelle normali lezioni di scuola media.
– Educazione al senso dell'infinito nelle diverse classi di scuola e di età (ricerca già in corso).
– Armonizzazione dei corsi di scuola media e media superiore per quanto riguarda l'analisi infinitesimale.
– Raffinamento del senso del numero reale negli allievi del secondo biennio di scuola media.
– Argomentazione e dimostrazione nella scuola media.
– Coscienza dell'importanza della coerenza nei ragionamenti di un ragazzo di scuola media.

Appendice 1: Somme infinite

Somma infinita di Grandi (Guido Grandi, 1671-1742)

Considera la somma infinita

$s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + - \ldots$

Nella storia della matematica alcuni studiosi hanno tentato di assegnarle un valore, vediamo le loro versioni:

1. Versione di Grandi

   Se

   $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + - \ldots$

   allora

   $1 - s = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + - \ldots)$
   $= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + - \ldots = s$

   abbiamo quindi dimostrato che: $1-s=s$ e quindi $2s=1$, $s = 1/2$.

2. Versione della somma di zeri

   $s = (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + - \ldots$
   $= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$

Credi che una di queste versioni sia corretta? Prova a scovare l'errore se credi che ci sia qualcosa che non va e alla fine scrivi la tua versione.

Somma infinita Geometrica

1. Considera le seguenti somme infinite:

   (a) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$

   (b) $1 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \dots$

   (c) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots$

   (d) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\dots$

Quali di queste somme possiedono un valore infinito e quali invece un valore finito? Prova a giustificare le tue risposte nella maniera più convincente possibile.

2. La somma infinita geometrica.
   Una somma infinita è detta geometrica se può essere scritta nella forma:

   $1+q+q^2+q^3+q^4+\dots$

   dove q è un numero reale maggiore di zero $(q \in \mathbf{R},\ q>0)$.

Prova a stabilire quali delle somme infinite che hai trattato prima sono geometriche.

3. Un metodo per il calcolo della somma geometrica.
   Prendiamo una serie geometrica a caso

   $s = 1+q+q^2+q^3+q^4+\dots$

   Moltiplichiamola per il numero q, otteniamo

   $q \cdot s = q\left(1+q+q^2+q^3+q^4+\dots\right) = q+q^2+q^3+q^4+\dots$

Vediamo che aggiungendo 1 al risultato otteniamo di nuovo la somma di partenza:

$1+q\cdot s = 1+\left(q+q^2+q^3+q^4+\dots\right) = 1+q+q^2+q^3+q^4+\dots = s$

e quindi possiamo concludere che
$1 + q \cdot s = s$

risolvendo questa equazione rispetto ad s otteniamo

$$s = \frac{1}{1 \pm q}$$

Sei convinto della correttezza di questo metodo? Oppure pensi che valga solo in alcuni casi? Oppure che non vale mai?

Prova ad applicare i risultati che consideri corretti alle serie geometriche che hai trovato all'inizio di questa sezione. Prova a scrivere una regola per il calcolo di una somma geometrica infinita.

Appendice 2: Numerosità degli insiemi N e Z

Nelle seguenti versioni trovate alcuni modi per stabilire il numero di elementi presenti nei due insiemi di numeri

N = {0; 1; 2; 3; 4; …} (insieme dei numeri naturali)

Z = {…; –3; –2; –1; 0; +1; +2; +3; …} (insieme dei numeri interi)

che tutti conosciamo.

Leggete assieme ogni versione e di ognuna fate un commento (se è vera, confrontatela con le altre per vedere se sono pure possibili, se è falsa, mostrate dov'è l'errore).

Versione 1

L'insieme **Z** *possiede il doppio degli elementi rispetto all'insieme* **N**.

Motivazione: tutti gli elementi di **N** «si trovano» nell'insieme **Z**, inoltre «si trovano anche tutti i numeri di N con il meno davanti», quindi troviamo **N** due volte all'interno di **Z** da cui segue la presente versione.

Versione 2

L'insieme **N** *e l'insieme* **Z** *hanno lo stesso numero di elementi.*

Motivazione: ad ogni elemento di **N** posso far corrispondere un elemento di **Z** e viceversa nella seguente maniera:

$$\begin{array}{lcr} 0 & \longrightarrow & 0 \\ 1 & \longrightarrow & +1 \\ 2 & \longrightarrow & -1 \\ 3 & \longrightarrow & +2 \\ 4 & \longrightarrow & -2 \\ 5 & \longrightarrow & +3 \\ 6 & \longrightarrow & -3 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Così facendo, ad ogni numero di **N** corrisponde un solo numero di **Z** e viceversa, quindi i due insiemi devono avere lo stesso numero di elementi.

Versione 3

$\mathbf{N}$ e $\mathbf{Z}$ hanno lo stesso numero di elementi poiché sono infiniti tutti e due.
Motivazione: l’infinito è infinito e quindi è unico.

Versione 4

Considera la tabella

	1	2	3	4	5	…
1	11	12	13	14	15	…
2	21	22	23	24	25	…
3	31	32	33	34	35	…
4	41	42	43	44	45	…
5	51	52	53	54	55	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Allora il numero di elementi all’interno della tabella è minore del numero di elementi di **N**.

Motivo: i numeri che compaiono all’interno della tabella appartengono a N e compaiono una sola volta, ma all’interno della tabella non ci sono tutti i numeri naturali, ad esempio manca il 2.

Versione 5

Se nell’insieme **N** *ci sono n elementi (dove* n *è chiaramente infinito) allora nella tabella vista sopra ce ne devono essere* n^2, *e si sa che per ogni* $n > 1$ *vale* $n^2 > n$.

Motivo: in una tabella due per due ci sarebbero 4 elementi ($4 = 2^2$), in una tre per tre ce ne sarebbero stati 9 ($9 = 3^2$) e via dicendo, quindi nella nostra ce ne sono n^2.

Versione 6

Nella tabella vista sopra ci sono tanti elementi quanti ce ne sono in **N**.

Motivazione: gli elementi della tabella possono essere messi in fila seguendo le diagonali come ad esempio:

$$\begin{tikzcd}
11 \arrow[r] & 12 \arrow[dl] & 13 \arrow[r] & 14 \arrow[dl] \\
21 \arrow[d] & 22 \arrow[ur] & 23 \arrow[dl] & \cdots \\
31 \arrow[ur] & 32 \arrow[dl] & \cdots & \\
41 \arrow[d] & \cdots & & \\
{} & & &
\end{tikzcd}$$

Quindi posso mettere in fila gli elementi della tabella e far corrispondere ad ognuno un numero di **N**, ad esempio al primo numero (11) faccio corrispondere 1, al secondo (12) faccio corrispondere 2, ecc. È come seguire un percorso: faccio corrispondere ad ogni numero che raggiungo il numero di passi percorsi dall'inizio. Il numero di passi può avere come valore qualsiasi numero di **N** e così facendo raggiungo sicuramente ogni numero della tabella. I due insiemi devono quindi avere lo stesso numero di elementi.

Ringraziamenti

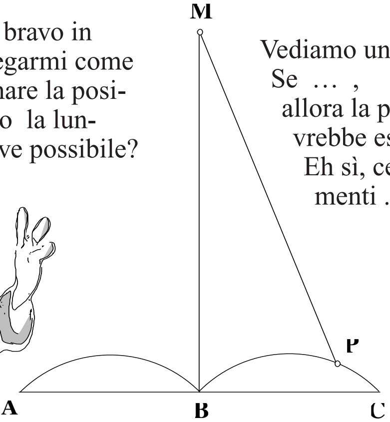
Ringrazio innanzitutto Gianfranco Arrigo per avermi introdotto allo stupendo mondo della didattica della matematica, la collega Cristina Izquierdo per avermi messo a disposizione la sua classe e infine i miei allievi delle classi IVD e IVE: Jelena, Lisa, Lara, Sara, Alessia, Andrea, Tito, Manoj, Giacomo, Alessandra, Gabriele, Angela, Mattia, Nica per tutto quanto mi hanno insegnato durante il mio primo anno di insegnamento.

Riferimenti bibliografici

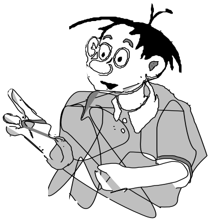
[1] B. D'Amore, Scritti di Epistemologia Matematica, 1980-2001, Pitagora Editrice, Bologna 2001.
[2] G. Arrigo, B. D'Amore, «I see it but I don't believe it…», epistemological and didactic obstacles to the process of comprehension of a theorem of Cantor which involves actual infinity, Scientia Pedagogica Experimentalis (Belgio) XXXVI, 1, 1999, 93-120.
[3] G. Arrigo, B. D'Amore, «Lo vedo, ma non ci credo…», seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor, La matematica e la sua didattica, n.1-2002, Pitagora Editrice, Bologna.
[4] F. Speranza, Scritti di epistemologia della matematica, Pitagora Editrice, Bologna (1997).
[5] G. T. Bagni, Storia della matematica, Volume II, Dal Rinascimento ad oggi, Pitagora Editrice, Bologna (1996).
[6] B. D'Amore, Elementi di didattica della matematica, Pitagora Editrice, Bologna (1999).
[7] A. Piatti, Combinazione di forme didattiche nell'insegnamento della matematica, Lavoro di Abilitazione, Non pubblicato, ASP, Locarno (2002).
[8] Piano di formazione della scuola media, Ufficio dell'insegnamento medio, Bellinzona (1999).
[9] G. Arrigo, B. D'Amore, Infiniti, Angeli, Milano (1992).

Quiz numero 28

Amici miei, nella figura vedete due archi di circonferenza AB e BC, entrambi corrispondenti a un quarto di una stessa ciconferenza e con gli estremi A, B, C allineati. Il segmento MB è perpendicolare al segmento AC.
Prendo un punto P e lo faccio “muovere” sulla linea formata dall’unione dei due archi.
Caro Archie, tu che sei bravo in geometria, sapresti spiegarmi come posso fare per determinare la posizione esatta di P quando la lunghezza MP è la più breve possibile?



Vediamo un po’ !
Se … ,
allora la posizione di P dovrebbe essere lì ... .
Eh sì, certo! Perchè altrimenti ...



Bravo Archie,
credo che hai ragione.
Ma allora, caro Joe,
siamo anche in grado di calcolarla questa lunghezza minima.
Basta conoscere qualche misura.
Facciamo che AC sia 1m e che l’ampiezza dell’angolo MAC sia 60°.
...

Forza ragazzi! Mettetevi al posto dei nostri due amici Archie e Moore.
Qual è la posizione di P e quant’è la lunghezza minima di MP nel caso scelto da Moore?

In palio per i risolutori c’è un bel libro che parla di scacchi e Divina commedia.

Soluzione del Quiz numero 27

Ecco la soluzione proposta da un gruppo di ragazze e ragazzi di scuola media:

1) A quali condizioni, dati i lati, un triangolo è costruibile? Il lato maggiore dev'essere minore della somma degli altri due.
2) Nel caso particolare il taglio lo si può effettuare solo tra 1m e 2m.

3) La probabilità cercata è quindi 1/3, ossia circa 33%.

A conferma del risultato abbiamo programmato un foglio di calcolo (Excel) e abbiamo poi effettuato (più volte) 1000 tagli. All'incirca i risultati favorevoli, ossia i numeri compresi tra 1 e 2 , si sono aggirati intorno ai 300-360, ma se prendessimo più tagli, in teoria dovrebbero aggirarsi intorno al 33% con più facilità. Qui siamo riusciti ad ottenere la precisione, ma solo per fortuna.
Ecco una parte della tabella con le relative formule:

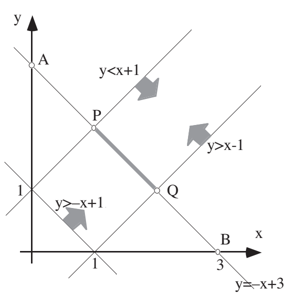
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	1o lato	2o lato	SI 1 / NO 0		Numero di Si				
2	= CASUALE()*3	= 3-A5	= SE(E(A5>1;A5<2);1;0)		330				
3	2.13	0.87	0		Numero di tagli				
4	1.77	1.23	1		1000				
5	1.48	1.52	1		Probabilità				
6	1.02	1.98	1		**33%**				
7	0.49	2.51	0						

Nella soluzione proposta abbiamo apprezzato la semplicità e la sinteticità [anche se l'affermazione al punto 2) andrebbe giustificata]. E ci è piaciuta anche l'idea della verifica sperimentale con il metodo di Montecarlo.
Complimenti a Daniel, Ilaria, Laura, Elisa Angelica, Lisa, Barbara e Luca della classe IVABC, della scuola media di Breganzona! Con questa soluzione molto stringata vi siete aggiudicati l'intrigante libro *Sherlok Holmes e le trappole della logica* di Bruce Collins, Cortina ed.

Ed ecco un'altra soluzione, un po' più sofisticata ma non troppo, che potrebbe dare qualche spunto a chi cerca attività di applicazione delle disequazioni lineari in IVa media.

Siano x e y le misure dei due segmenti. Per motivi geometrici evono essere rispettati i seguenti vincoli algebrici:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x < 3 \\ y < 3 \\ x + y = 3 \\ x < y + 1 \\ y < x + 1 \\ 1 < x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x < 3 \\ y < 3 \\ y = \pm x + 3 \\ y > x \pm 1 \\ y < x + 1 \\ y > \pm x + 1 \end{cases}$$



Ragionando sulla traduzione grafica dei vincoli e sul concetto di probabilità geometrica si può concludere che la probabilità:

$$p(\text{ottenere un triangolo}) = \frac{PQ}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$$

1. Il più famoso aneddoto su Johann Carl Friedrich Gauss

Corrado Guidi[1]

Si racconta che agli alunni della seconda elementare frequentata da Gauss viene assegnato dal docente un calcolo apparentemente lungo e noioso, cioè addizionare i numeri naturali da 1 a 100. Dopo nemmeno un minuto, Gauss si alza e dà la soluzione esatta: 5050. Come avrà fatto?

Probabilmente, così:

1	2	3	…	…	…	98	99	100
100	99	98	…	…	…	3	2	1

$2\,S = 101 \cdot 100 = 10100$ da cui $S = 5050$

Semplice, no? Come sempre, bastava arrivarci…

Il risultato si lascia generalizzare facilmente:

$$\text{(g)}\quad S(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Lo stesso esercizio proposto dal maestro di scuola elementare al suo allievo Gauss fu sottoposto agli studenti di una prima liceo in Germania con la seguente formulazione: «Scopri una formula per calcolare la somma dei primi n numeri naturali».

Ecco alcune formule trovate dagli studenti tedeschi:

$$\text{(a)}\quad S(n) = \frac{n^3 + 3\,n^2 + 2\,n}{2\,n - 2}$$

1. Docente alla Scuola media di Acquarossa e all'Istituto Cantonale di Economia e Commercio di Bellinzona, esperto per la matematica nella scuola media.

2. Il gioco dell'oca in Z

Azzurra Marchio[3]

Tutti conoscono il gioco dell'oca. Quello classico consiste nel lanciare a turno uno o due dadi e avanzare di tante caselle quanti sono i punti ottenuti, seguendo un percorso che nella figura seguente è rappresentato mediante una scacchiera. Vince il primo che supera il traguardo. L'idea che mi accingo a presentare consiste nell'introdurre due dadi diversi: uno colorato che fa avanzare, uno bianco che fa indietreggiare.

In questo modo, se si lanciano i due dadi può capitare che si avanzi, che si indietreggi o che si stia fermi. Ecco una bella situazione per introdurre i numeri relativi. Nelle caselle che obbligano a lanciare il dado bianco si dovrà per forza indietreggiare. Gli spostamenti in avanti e indietro, il risultato di un avanzamento unito a un indietreggiamento si lasciano modellizzare dall'addizione in **Z**.

Esempio di tabellone

1	**2** Lancia ancora il dado colorato	**3**	**4**	**5**
6 Lancia ancora i due dadi	**7**	**8**	**9**	**10** PARTENZA
11 Lancia ancora il dado colorato	**12**	**13** Lancia ancora il dado bianco	**14**	**15**
16	**17**	**18**	**19**	**20** Lancia ancora il dado colorato
21 Lancia ancora i due dadi	**22**	**23**	**24**	**25**
26	**27**	**28** Lancia ancora il dado bianco	**29** Lancia ancora il dado colorato	**30**
31	**32**	**33**	**34**	**35** HAI VINTO!!

3. Docente alla Scuola media di Barbengo.

(b) $S(n)=\dfrac{n^3+3n^2+2n}{2n+4}$

(c) $S(n)=\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{2}{n-3}+\dfrac{n^2-3n-4}{2n-6}$

(d) $S(n)=\dfrac{1-n}{3}\cdot\dfrac{3n^2+3n}{2-2n}$

(e) $S(n)=\dfrac{(n-1)(n+1)}{2}+1$

(f) $S(n)=\dfrac{n^3+3n^2+2n}{2n-2}:\dfrac{n+2}{n-1}$

Sono tutte corrette? Sono tutte equivalenti alla formula (g)?

Commento[2]

Ecco un esercizio sensato di calcolo algebrico, da preferire senza alcun dubbio a quelle liste di espressioni da semplificare, senza senso, col solo scopo (per lo più illusorio) di fare esercitare il calcolo con le lettere. La discussione sui risultati è interessante, perché può toccare due questioni matematiche di non poco conto.

Prima questione: il controesempio come metodo per confutare una formula errata (così le formule (a), (e) si scoprono subito errate).

Seconda questione: l'equivalenza logica delle formule (la formula (c) è equivalente alla (g) solo in N/{3}, mentre la (d) e la (f) in N/{1}; solo la formula (b) è equivalente alla (g) in tutto l'insieme N).

2. Il commento è di Gianfranco Arrigo.

Prime osservazioni

La maggior parte degli allievi trova velocemente il modo per calcolare di quante caselle spostarsi lanciando simultaneamente i due dadi.

Già durante il gioco alcuni allievi sono curiosi di sapere il collegamento del gioco con la matematica. Alcuni allievi hanno intuito da soli che il gioco era in relazione con i numeri negativi.

Mi sono resa conto che l'immagine del gioco dell'oca ha aiutato in seguito gli allievi nel concretizzare i calcoli in Z: osservando gli allievi che risolvevano gli esercizi in classe ho notato che molti ricorrevano all'esempio del gioco dell'oca quando si trovavano in difficoltà nella risoluzione di un esercizio.

Dopo aver lasciato giocare per un po' gli allievi di seconda, ho posto loro le seguenti domande:

1. Carlo ha ottenuto il seguente punteggio: 6 col dado colorato, 4 col dado bianco. Di quante caselle si deve spostare Carlo e in che direzione? Spiega la risposta.
   Piero ha ottenuto 1 col dado colorato, 5 con quello bianco. Di quante caselle si deve spostare e in che direzione? Spiega la risposta.
2. Ogni volta che tiri i dadi può succedere una delle seguenti cose:
   a) vai avanti.
   b) torni indietro.
   c) resti fermo.
   Inventa un punteggio dei due dadi per ognuna delle situazioni a), b), c).
3. Hai trovato un modo veloce per capire di quante caselle ti devi spostare? Quale?

Commento[4]

*Trovo molto interessante l'idea di estendere il gioco dell'oca all'insieme **Z**. Gli allievi sono subito messi in una situazione di gioco nella quale i numeri interi appaiono come differenze di numeri naturali. Questa immagine mentale è sicuramente la migliore, almeno per iniziare. L'addizione esce dalla necessità di unire i risultati dei due dadi. Il gioco può essere arricchito. Per esempio, in certe caselle si potrebbe scrivere: «Lancia il dado e indietreggia a seconda del punteggio ottenuto». Si presenterebbe il problema di decidere che cosa fare quando si ottiene, per esempio, 1 sul dado colorato e 5 sul bianco. Indietreggiare di (–4) non può che essere equivalente ad avanzare di 4.*

Ma si potrebbe anche introdurre la moltiplicazione: una sorta di «super tiraggio» nel quale il punteggio ottenuto si moltiplica per quello uscito da un secondo lancio dei due dadi. Inutile dire che sorgono i problemi fondamentali della moltiplicazione in Z. Possono essere risolti cercando soluzioni non contraddittorie. L'unica possibile risulterà quella adottata dai matematici. Gli allievi hanno così giocato, pensato, analizzato, tentato, verificato e infine sintetizzato… la regola dei segni.

A questo punto, il lavoro di concettualizzazione si inserisce su un terreno ben arato e non costituirà più un ostacolo importante.

4. Il commento è di Gianfranco Arrigo.

1. Una successione…

Patrizia Fedeli Simonetto

Partiamo da 1 e consideriamo la successione concatenata alternata:

1 ; 1·2–1=1 ; 1·2+1=3 ; 3·2–1=5 ; 5·2+1=11 ; 11·2–1=21 ; 21·2+1=43; 43·2–1=85 ; 85·2+1=171 ; 171·2–1=341 ; 341·2+1=683 ; ecc.

(Cfr. con successione di Jacobsthal)

In questa catena sono ben distinguibili due tipi di maglie orientate separabili:

ante=X·4–1 (per esempio, 11=5·2+1 è sostituibile con 11=3·4–1)

post=Y·4+1 (per esempio, 21=11·2–1 è sostituibile con 21=5·4+1).

Le successioni di numeri **ante** e di numeri **post**, convenientemente trasformate, danno insieme quella delle potenze di 2, come appare dalle tabelle seguenti. Perché?

numeri ante	numeri post
X * 4 - 1	Y * 4 + 1
1	
	1
3	
	5
11	
	21
43	
	85
171	
	341
683	
	1'365
2'731	
	5'461
10'923	
	21'845
43'691	

Potenze di 2: antepost oppure postante oppure...	
6 * ante - 2	6 * post + 2
4	
	8
16	
	32
64	
	128
256	
	512
1'024	
	2'048
4'096	
	8'192
16'384	
	32'768
65'536	
	131'072
262'144	

(Per continuare, vedere il sito http://www.research.att.com/~njas/sequences/index.html)

… che può stimolare un'interessante riflessione

Redazionale

Patrizia Fedeli (PF) considera la «successione concatenata alternata» seguente:

1
$1 \cdot 2 - 1 = 1$
$1 \cdot 2 + 1 = 3$
$3 \cdot 2 - 1 = 5$
$5 \cdot 2 + 1 = 11$
$11 \cdot 2 - 1 = 21$
…
cioè
1 ; 1 ; 3 ; 5 ; 11 ; 21 ; 43 ; 85 ; 171 ; 341 ; 683 ; …
e osserva due cose:

1. a partire dal terzo termine compreso, ogni termine può essere calcolato sia moltiplicando il precedente per 2 e aggiungendo/togliendo 1, sia moltiplicando il secondo precedente per 4 e togliendo/aggiungendo 1,
2. si trova una potenza di 2 se si moltiplica un termine della successione per 6 e si toglie/aggiunge 2.

Entrambe le cose sono vere, e si possono dimostrare.

Premessa
La successione P(atrizia) può essere definita ricorsivamente:

Definizione 1
$P(0) = 1$
$P(n) = 2\ P(n\text{-}1)+(-1)^n$

Dimostrazione di 1.
Segue dalla definizione di P

$P(n+1) = 2\ P(n)+(-1)^{n+1}$

$P(n+2) = 2\ P(n+1)+(-1)^{n+2}$ **(A)**

$= 2\ [2\ p(n)+(-1)^{n+1}]+(-1)^n = 4\ P(n)+2\ (-1)^{n+1}+(-1)^n =$

$= 4\ P(n)+(-1)^n\ [2\ (-1)+1] = 4\ P(n)+(-1)^n\ [-2+1] = 4\ P(n)+(-1)^n\ (-1) =$

$= 4\ P(n)+(-1)^{n+1}$ **(B)**

(A) e **(B)** sono i due modi osservati da PF di ottenere ogni termine a partire dal terzo, cioè P(2), compreso.

Dimostrazione di 2.

L'osservazione di PF prevede di «alternare» i termini di P: quelli di posto pari e quelli di posto dispari, così

P_p: 1 ; 3 ; 11 ; 43 ; 171 ; 683 ; … (il primo termine ha indice 0)
P_d: 1 ; 5 ; 21 ; 85 ; 341 ; …

poi osserva:

da P: $6 \cdot 1 - 2 = 4 = 2^2$
$6 \cdot 3 - 2 = 16 = 2^4$
$6 \cdot 11 - 2 = 64 = 2^6$
…

da P_d: $6 \cdot 1 + 2 = 8 = 2^3$
$6 \cdot 5 + 2 = 32 = 2^5$
$6 \cdot 21 + 2 = 128 = 2^7$
…

Dimostriamo **2.** per induzione in due fasi: prima per n pari, poi per n dispari.

I fase: n pari

L'affermazione è vera per n = 0 $\quad (6 \cdot P(0) - 2 = 6 \cdot 1 - 2 = 4 = 2^2)$

Sia ora vero che

$6\,P(k) - 2 = 2^{k+2}$ (k pari)

$$\begin{aligned} 6\,P(k+2) - 2 &= 6\,[4\,P(k) + (-1)^{k+1}] - 2 && \text{(per } \mathbf{(B)}\text{)} \\ &= 6\,[4\,P(k) - 1] - 2 = \\ &= 24\,P(k) - 6 - 2 = 24\,P(k) - 8 = \\ &= 4\,[6\,P(k) - 2] && \text{(per ipotesi d'induzione)} \\ &= 2^2 \cdot 2^{k+2} = 2^{(k+2)+2} && \text{CVD} \end{aligned}$$

II fase: n dispari

L'affermazione è vera per n = 1 $\quad (6 \cdot P(1) + 2 = 6 \cdot 1 + 2 = 8 = 2^3)$

Sia ora vero che

$6\,P(k) + 2 = 2^{k+2}$ (k dispari)

$$\begin{aligned} 6\,P(k+2) + 2 &= 6\,[4\,P(k) + (-1)^{k+1}] + 2 && \text{(per } \mathbf{(B)}\text{)} \\ &= 6\,[4\,P(k) + 1] + 2 = \\ &= 24\,P(k) + 6 + 2 = 24\,P(k) + 8 = \\ &= 4\,[6\,P(k) + 2] && \text{(per ipotesi d'induzione)} \\ &= 2^2 \cdot 2^{k+2} = 2^{(k+2)+2} && \text{CVD} \end{aligned}$$

Osservazione 2.2.

A questo punto aggiungiamo noi un'osservazione:

non solo da P_p si ricavano potenze di 2, come visto sopra, ma si ricavano quadrati delle potenze successive di 2.

Dimostrazione di 2.2.

Poiché, nella prima fase della dimostrazione di **2.**, si suppone k pari, si può continuare così, ponendo k = 2h:

$$6\,P(k)-2 = 2^{k+2} = 2^{2h+2} = (2^{h+1})^2$$

Visto che la base dell'induzione è k = 0, consegue h = 0 e quindi il valore minimo di 6 P(k) – 2 è 4. Da qui via si hanno tutte le potenze di 2.

Ridefinizioni

Vista la dimostrazione di 2.2., P_p può essere ridefinita:

$$2^4 \longrightarrow \left(2^4\right)^2 \longrightarrow \frac{\left(2^4\right)^2+2}{6} \longrightarrow 43 = P_P(4)$$

In generale

$$2^n \longrightarrow \left(2^n\right)^2 \longrightarrow \frac{\left(2^n\right)^2+2}{6} \longrightarrow P_P(n) \qquad \text{con } n \in \mathbf{N}$$

Anche P_d può essere ridefinita, osservando (e non dimostrando, tanto è banale) che, come i termini di P_p si possono ricavare dalle potenze di 2, così i termini di P_d si possono ricavare dalle potenze di 2 moltiplicate per $\sqrt{2}$.

Esempio:

$$2^3\sqrt{2} \longrightarrow \left(2^3\sqrt{2}\right)^2 \longrightarrow 2\cdot 2^6 \longrightarrow 2^7 \longrightarrow \frac{2^7 \pm 2}{6} \longrightarrow 21 = P_D(3)$$

In generale

$$2^n\sqrt{2} \longrightarrow \left(2^n\sqrt{2}\right)^2 \longrightarrow 2\cdot 2^{2n} \longrightarrow 2^{2n+1} \longrightarrow \frac{2^{2n+1} \pm 2}{6} \longrightarrow P_D(n)$$

con $n \in \mathbf{N}$

Le due ultime ridefinizioni possono essere elaborate e compattate per dar luogo ad una definizione **non** ricorsiva di P:

$$P(n) = SE\left(n \;\; \text{pari}\,;\, \frac{\left(2^{(n+2)/2}\right)^2+2}{6}\,;\, \frac{\left(2^{(n+1)/2}\cdot\sqrt{2}\right)^2 \pm 2}{6}\right) \qquad \textbf{(F1)}$$

Una visita al sito:
http//:www.research.att.com/~njas/sequences/index.html
(una fonte inesauribile di «ispirazioni» sulle successioni numeriche) permette di scoprire che la successione P viene generata anche dalla definizione ricorsiva seguente

Definizione 2
a(0) = 1 ; a(1) = 1 ; a(n) = 2 a (n–2)+a (n–1)

Applicando il metodo descritto nell'appendice del contributo «Di nuovo gli ottagoni sulla griglia»[1], si può procedere nel seguente modo.
Si consideri la successione: $1, t, t^2, \ldots$ che soddisfaccia la condizione, per ogni n,
$t^n = 2\,t^{n-2} + t^{n-1}$ oppure, dividendo per t^{n-2} $t^2 = 2 + t$
con le soluzioni a = –1 e b = 2.

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ \alpha\, c_1 + \beta\, c_2 = 1 \end{cases}$$

(perché 1 e 1 sono i primi termini della successione P), cioè il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ \pm c_1 + 2\, c_2 = 1 \end{cases} \quad \text{si ha} \quad \begin{cases} c_1 = 1/3 \\ c_2 = 2/3 \end{cases}$$

da cui

$$P(n) = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \quad \text{con } n \in [2,\infty[\qquad \textbf{(F2)}$$

che è una formula proprio ben compatta!

Per la verità, **F2** funziona anche con n = 1 ma, vista la Definizione 2, tale valore non ha un gran senso.

Resta da dimostrare che la Definizione 1 equivale alla Definizione 2.
La cosa si può fare per induzione, difatti
P(n) = a(n), sia per n=0 sia per n=1.

Si supponga che sia P(k) = a(k): si deve dimostrare che P(k+1) = a(k+1).
Poiché
$P(k+1) = 2\,P(k)+(-1)^{k+1}$ per la Definizione 1
e
a(k+1) = 2 a(k–1)+a(k) per la Definizione 2
= 2 a(k–1)+P(k) per ipotesi d'induzione

1. *Di nuovo gli ottagoni sulla griglia*, Giorgio Mainini, Aleardo Villa, BDM 42, maggio 2001.

deve aversi
$2\ a(k-1)+P(k) = 2\ P(k)+(-1)^{k+1}$

Ciò si verifica quando
$2\ a(k-1)+2\ P(k-1)+(-1)^{k} = 2\ P(k)+(-1)^{k+1}$ per definizione di P
cioè quando
$2\ a(k-1)+2\ P(k-1)-2\ P(k) = (-1)^{k+1}-(-1)^{k}$
cioè quando
$2\ a(k-1)+2\ P(k-1)-2\ P(k) = -2(-1)^{k}$

cioè, ponendo k–1 = h (lecitamente, senza forzare l'ipotesi d'induzione. Difatti l'uguaglianza è vera per k=1: ne consegue che il valore minimo di h è 0, anche per il quale l'uguaglianza è vera), quando
$\cancel{2}\,a(h)+\cancel{2}\ P(h)-\cancel{2}\ P(h+1) = -\cancel{2}\ (-1)^{h+1}$

cioè quando, per ipotesi d'induzione
$2\ P(h)-P(h+1) = -(-1)^{h+1}$

cioè quando
$P(h+1) = 2\ P(h)+(-1)^{h+1}$

cioè **sempre**, per la definizione di P. La dimostrazione è conclusa.

Alla fin fine abbiamo ottenuto che per calcolare l'n-esimo termine di P basta applicare una delle due formule **F1** o **F2**.

2. Laboratorio sulla spirale logaritmica[1]

Claudio Beretta

La spirale logaritmica di equazione polare $\rho = a\,.e^{b\vartheta}$ è il luogo dei punti tali che il raggio vettore ρ cresce in progressione geometrica allorquando l'ampiezza dell'angolo ϑ cresce in progressione aritmetica.

1. Conferma di una proprietà

Una delle proprietà è che ogni raggio vettore taglia ogni spira secondo angoli di ampiezza costante (angolo tra retta e curva uguale angolo tra retta e tangente nel punto d'intersezione).

Se in $\rho = a\,.e^{b\vartheta}$ poniamo b=1 otteniamo

$$\rho = a\,.e^{\vartheta} \Rightarrow \frac{d\rho}{d\vartheta} = 0\,.e^{\vartheta} + a\,.e^{\vartheta}\,.1 \Rightarrow \rho' = a\,.e^{\vartheta}$$

e dunque $\tan\vartheta = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{a\,.e^{\vartheta}}{a\,.e^{\vartheta}} = 1$ ossia l'angolo in questo caso è di 45 gradi[2].

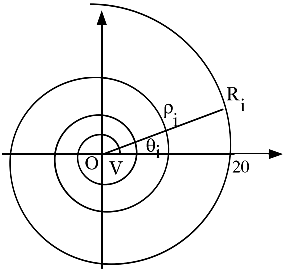
Non ci sono asintoti; infatti se ρ tende all'infinito, l'angolo ϑ tende pure all'infinito.

Disegniamo per punti $\rho = a\,.e^{\vartheta}$ (con tangenti a 45 gradi) e in seguito considereremo il caso generale $\rho = a\,.e^{b\vartheta}$.

1. Dedico questo articolo alla nuova Società Matematica della Svizzera Italiana (SMASI) e in particolare a chi ha reso possibile la prima importante conferenza: *La fusione controllata: un'opzione energetica per il futuro dell'umanità*, in particolare al relatore Mihn Quang Tran, direttore del Centro di ricerca sulla fisica dei plasmi per l'EURATOM e professore presso il Politecnico federale di Losanna, nonché all'Alta Scuola Pedagogica e in particolare a Viviana Ravasi, che dirige la formazione continua dei docenti.
2. Vedere il paragrafo "4. Tangente a una curva data in coordinate polari".

ϑ	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\rho = a.e^{\vartheta}$	$a = OA$	$a.e^{\frac{\pi}{2}} \cong 4{,}81\ a$	$a.e^{\pi} \cong 23{,}1407\ a$
$3 \cdot \frac{\pi}{2}$	$2\ \pi$	$5 \cdot \frac{\pi}{2}$	$3\ \pi$
$a.e^{3\frac{\pi}{2}} \cong 111{,}32a$	$a.e^{2\pi} \cong 535{,}5\ a$	$a.e^{5\frac{\pi}{2}} \cong 2576\ a$	$a.e^{3\pi} \cong 12391{,}6\ a$

Schizzo (con a=1): rappresenta la curva della funzione $\rho = a.e^{\vartheta}$ sul tratto partendo da V si giunge in R_i che è definito da ϑ e dal raggio vettore $OR_i = \rho_i$ per ogni R_i.



Come si vede, questa prima parte non pone difficoltà. Essa permette di concretizzare il ragionamento sul calcolo della derivata e il suo aspetto geometrico, che si traduce nel calcolo appena presentato che porta a

$$\tan \vartheta = \frac{\rho}{\rho'} .$$

Inoltre permette di evidenziare l'importanza della tangente al fine di limitare e perfezionare lo schizzo rappresentativo della funzione.

2. Che effetto produce un coefficiente b posto davanti a ϑ ?

ϑ	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\rho = a \cdot e^{b\vartheta}$	a	$a \cdot e^{b\frac{\pi}{2}}$	$a \cdot e^{b\pi}$
$\rho' = a \cdot b \cdot e^{b\vartheta}$	a b	$a.b.e^{b\frac{\pi}{2}}$	$a.b.e^{b\pi}$
$\tan \vartheta = \frac{\rho}{\rho'}$	$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{b}$

si vede che l'angolo è ancora costante e vale arc tan $\frac{1}{b}$

Dunque si dà sostanza all'effetto della curvatura perché b agisce su ϑ .
Si può osservare la curvatura nei casi di

$\rho = a \cdot e^{\vartheta}$ e di $\rho = a \cdot e^{b\vartheta}$

Ricordiamo che il raggio di curvatura in coordinate polari è dato da:

$$\rho = f(\vartheta) \Rightarrow R_C = \frac{\left\{\left[f(\vartheta)\right]^2 + \left[f'(\vartheta)\right]^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left|\left[f(\vartheta)\right]^2 + 2\cdot\left[f'(\vartheta)\right]^2 - f(\vartheta)\cdot f''(\vartheta)\right|}$$

funzione data	spirale logaritmica naturale b=1	spirale logaritmica naturale
forma algebrica	$\rho=a\cdot e^{\theta}$ $\theta\geq 0$	$\rho=a\cdot e^{b\theta}$ $\theta\geq 0$
derivata prima	$\rho=a\cdot e^{\theta}$	$ab\cdot e^{b\theta}$
derivata seconda	$\rho=a\cdot e^{\theta}$	$ab^2\cdot e^{b\theta}$
Numeratore	$\left[2\left(a\cdot e^{\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$	$\left(a\cdot e^{b\theta}\right)^3\cdot\left(1+b^2\right)^{\frac{3}{2}}$
Denominatore	$2\left(a\cdot e^{\theta}\right)^2$	$\left(a\cdot e^{b\theta}\right)^2\cdot\left(1+b^2\right)$
R_C	$\sqrt{2}\left(a\cdot e^{\theta}\right)=a\sqrt{2}\cdot e^{\theta}$	$a\sqrt{1+b^2}\cdot e^{b\theta}$

Come si vede, b agisce non solo sull'esponente, ma anche sul coefficiente di e.

Altre considerazioni sull'effetto di b

Tutte le curve partono dal punto (ρ =a ; ϑ =0), con un angolo corrispondente alla prima colonna della tabella seguente per ogni valore di b desiderato e per a=1.

funzione $\rho=ab\cdot e^{b\theta}$	angolo tra OP e la tangente	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$b=\frac{1}{2}$	$\cong 63^0,4$	$\cong 1,217$	$\cong 1,48$	$\cong 2,19$	$\cong 4,81$
b=1	45^0	$\cong 1,48$	$\cong 2,19$	$\cong 4,81$	$\cong 23,14$
b=2	$\cong 26^0,5$	$\cong 2,19$	$\cong 4,81$	$\cong 23,14$	535,5

La conclusione è evidente e può essere lasciata allo studente: è un buon esercizio di deduzione.

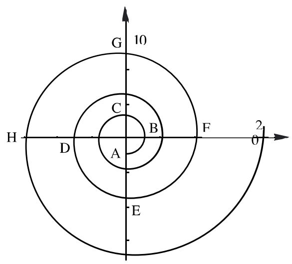
Per ogni fattore b positivo, se consideriamo le curve corrispondenti, appaiono altri spunti per l'intuizione di determinate "regolarità" che si possono presentare.

Scelto un valore di a, al variare di b nasce una famiglia di funzioni $\rho = a\cdot e^{b\vartheta}$ che hanno le stesse proprietà e che possono essere rappresentate da un membro della famiglia, che chiamiamo **modello**.

3. Dal disegno all'intuizione alla verifica

Supponiamo che si intraveda nella curva $\rho = a \cdot e^{b\vartheta}$ una relazione tra le aree delle superfici delimitate dall'arco, da Ox e da Oy in sequenza rotatoria di periodo $\frac{\pi}{2}$, come illustrato nelle figure della tabella seguente.

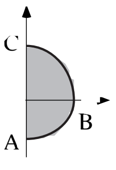
Funzione $\rho = a\, .e^{b\vartheta}$ in $\left[-\frac{\pi}{2}; 3\pi\right]$

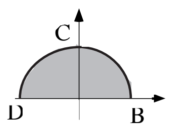


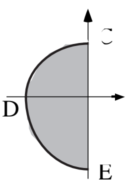
intervalli

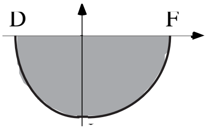
$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ $\quad$ $[0; \pi]$ $\quad$ $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ $\quad$ $[\pi; 2\pi]$

Superfici









calcolo:

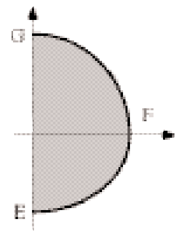
$\frac{a^2}{4b}\left| e^{2b\vartheta} \right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$ $\quad$ $\frac{a^2}{4b}\left| e^{2b\vartheta} \right|_{0}^{\pi} =$ $\quad$ $\frac{a^2}{4b}\left| e^{2b\vartheta} \right|_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} =$ $\quad$ $\frac{a^2}{4b}\left| e^{2b\vartheta} \right|_{\pi}^{2\pi} =$

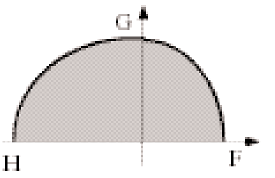
$\frac{a^2}{4b}\cdot\frac{1}{e^{b\vartheta}}\cdot\left(e^{2b\vartheta}-1\right)$ $\quad$ $\frac{a^2}{4b}.1\left(e^{2b\vartheta}-1\right)$ $\quad$ $\frac{a^2}{4b}e^{b\vartheta}\left(e^{2b\vartheta}-1\right)$ $\quad$ $\frac{a^2}{4b}.e^{2b\vartheta}\left(e^{2b\vartheta}-1\right)$

intervalli:

$\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ $\quad$ $[2\pi; 3\pi]$

Superfici





calcolo:

$$\frac{a^2}{4\,b}\left| e^{\,2b\vartheta} \right|_{5\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} = \qquad\qquad \frac{a^2}{4\,b}\left| e^{\,2b\vartheta} \right|_{5\pi}^{3\pi} =$$

$$\frac{a^2}{4\,b}.e^{3\,b\vartheta}\left(e^{\,2b\vartheta}-1\right) \qquad\qquad \frac{a^2}{4\,b}.e^{4\,b\vartheta}\left(e^{\,2b\vartheta}-1\right)$$

Ricordiamo che in generale, per le curve in coordinate polari, l'area è data da

$A=\frac{1}{2}\left|\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\rho^2\,d\vartheta\right|$, dunque nel nostro caso

$$A=\frac{a^2}{2}\left|\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}e^{2b\vartheta}\,d\vartheta\right| \quad =\frac{a^2}{4\,b}\left| e^{\,2b\vartheta} \right|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

inoltre, se osserviamo i risultati dell'ultima riga, e li scriviamo in successione, mettendo in evidenza

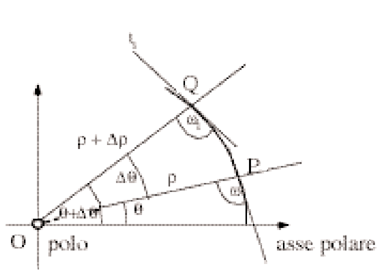
$$\frac{a^2}{4\,b}\cdot\left(e^{\,2b\vartheta}-1\right) \;,$$

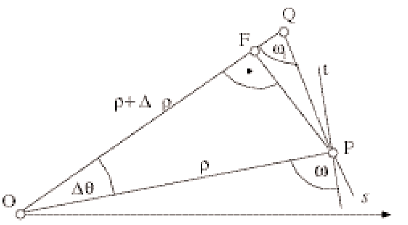
otteniamo una progressione geometrica (delle aree), di ragione $e^{b\vartheta}$, la cui somma è:

$$\frac{a^2}{4\,b}\cdot\left(e^{\,2b\vartheta}-1\right)\cdot\left[\frac{1}{e^{b\vartheta}}+1+e^{b\vartheta}+e^{2\,b\vartheta}+e^{3\,b\vartheta}+e^{4\,b\vartheta}+....\right]$$

4. Tangente a una curva data in cordinate polari

Consideriamo un punto fisso P qualunque e un punto Q diverso da P.
Il raggio vettore OP forma con l'asse polare un angolo ϑ.





Da P traccio la perpendicolare a OQ, che lo interseca in F.

Sia ω_1 l'angolo tra OQ e QP in Q.

Faccio scorrere Q sulla curva fino ad arrivare in P. Allora $\Delta\vartheta$ tende a zero e la secante s, passante per Q e P, diventa la tangente **t** in P. L'angolo ω_1 diventa ω e definisce l'angolo tra il raggio vettore OP e la tangente in P.

Calcoliamo:

nel triangolo FPQ si ha $FQ = OQ - OF = (\rho + \Delta\rho) - \rho \cdot \cos\Delta\vartheta$;

nel triangolo OFP si ha $FP = \rho \,.\sin\Delta\vartheta$;

$$\tan\omega_1 = \frac{FP}{FQ} = \frac{\rho \,.\sin\Delta\vartheta}{(\rho+\Delta\rho) - \rho \,.\cos\Delta\vartheta} = \frac{\rho \,.\sin\Delta\vartheta}{\rho\,(1-\cos\Delta\vartheta)+\Delta\rho} = \frac{\rho\cdot\sin\Delta\vartheta}{\rho\cdot 2\sin^2\dfrac{\Delta\vartheta}{2}+\Delta\rho}$$

$$\tan\omega_1 = \frac{\rho\cdot\dfrac{\sin\Delta\vartheta}{\Delta\vartheta}}{\dfrac{\rho\cdot\sin^2\dfrac{\Delta\vartheta}{2}}{\dfrac{\Delta\vartheta}{2}}+\dfrac{\Delta\rho}{\Delta\vartheta}} = \frac{\rho\cdot\dfrac{\sin\Delta\vartheta}{\Delta\vartheta}}{\rho\dfrac{\sin\dfrac{\Delta\vartheta}{2}}{\dfrac{\Delta\vartheta}{2}}\cdot\sin\dfrac{\Delta\vartheta}{2}+\dfrac{\Delta\rho}{\Delta\vartheta}}$$

Passando al limite, usando le proprietà del calcolo e ricordando che

$\lim\limits_{\Delta\vartheta\to 0}\dfrac{\sin\Delta\vartheta}{\Delta\vartheta} = 1$, otteniamo:

al numeratore $\lim\limits_{\Delta\vartheta\to 0}\rho\cdot\dfrac{\sin\Delta\vartheta}{\Delta\vartheta} = \rho\cdot\lim\limits_{\Delta\vartheta\to 0}\dfrac{\sin\Delta\vartheta}{\Delta\vartheta} = \rho\cdot 1 = \rho$

e al denominatore:

$$\lim_{\Delta\vartheta\to 0}\left[\rho\frac{\sin\dfrac{\Delta\vartheta}{2}}{\dfrac{\Delta\vartheta}{2}}\cdot\sin\frac{\Delta\vartheta}{2}+\frac{\Delta\rho}{\Delta\vartheta}\right] = \lim_{\Delta\vartheta\to 0}\rho\frac{\sin\dfrac{\Delta\vartheta}{2}}{\dfrac{\Delta\vartheta}{2}}\cdot\lim_{\Delta\vartheta\to 0}\sin\frac{\Delta\vartheta}{2}+\lim_{\Delta\vartheta\to 0}\frac{\Delta\rho}{\Delta\vartheta} = \rho©$$

e quindi, infine, $\tan\omega_1 = \dfrac{\rho©}{\rho}$

5. Considerazioni didattiche

Questo articolo costituisce una proposta di laboratorio per il liceo e costituisce anche un esempio di lavoro in cui, partendo da una congettura, si cerca di avanzare ipotesi e nuove congetture, di verificarle, eventualmente di confutarle. Facendo questo, si sviluppano le attitudini tassonomicamente superiori, anche divergenti, proprie ad un lavoro di ricerca scientifica.

1. CIEAEM 55

Commission internationale pour l'étude et l'amélioration
de l'enseignement des mathématiques
Plock, Polonia, 22–28.07.2003

Tema generale

L'utilizzazione dei materiali didattici per sviluppare l'attività matematica degli allievi.

La città che ospiterà la conferenza: Plock

I partecipanti verranno ospitati nel campus di una delle più grandi scuole superiori private della Polonia. Vi si trovano anche una biblioteca e un centro sportivo.

La città di Plock è situata al centro della Polonia, nei pressi di Varsavia. La regione è nota per i suoi bei paesaggi disegnati da verdi foreste, fiumi e laghi. A pochi chilometri da Plock nacque Frederik Chopin, il celebre pianista e compositore.

Comitato CIEAEM

Luciana Bazzini (I)
Françoise Cerquetti (F)
Marianna Ciosek (PL)
Uwe Gellert (D)
Christine Keitel (D)
Maciej Klakla (PL) - président
Stefan Turnau (PL)

Per informazioni, rivolgersi a:

Maciej Klakla
Akademia Pedagogiczna im. Komisji Edukacji Narodowej, Instytut Matematyki, 30-084 Krakowia, Polonia
Tel.: 0048-12-662-62-73
e-mail : smklakla@cyf-kr.edu.pl
Bogdan J. Nowecki
Tel: 0048-12-662-62-73
e-mail : nowecki@wsp.krakow.pl

Segretariato della CIEAEM
Luciana Bazzini
Università di Torino, Dipartimento di Matematica
Via Carlo Alberto 10
I–10123 Torino, Italia
Tel.: 0039-011-670-29-18
e-mail: luciana.bazzini@unito.it

2. Ciclo di conferenze: Sondaggi-proiezioni-exit poll Elezioni e Comunicazione

SSIG, Scuola superiore di informatica di gestione, 6500 Bellinzona

Questa iniziativa, nata dall'interesse dimostrato da alcuni studenti per il tema delle proiezioni elettorali e resa attuale dal fatto che in aprile si svolgeranno le elezioni cantonali, coinvolge attivamente gli allievi della SSIG. Quelli del secondo anno dal punto di vista pratico: nell'ambito dei corsi di statistica essi dovranno infatti prendere confidenza con gli strumenti e i metodi utilizzati per realizzare queste ricerche al fine di applicare le conoscenze acquisite sul campo. Gli studenti del primo anno sono invece responsabili della comunicazione e della promozione del progetto sia all'interno, che all'esterno della scuola. Lo scopo ultimo del progetto è quello di proporre a tutti gli interessati una riflessione sull'efficacia, sul significato e sui limiti dei risultati ottenuti tramite questo tipo di indagini statistiche.

Appuntamenti 2003, nell'Aula Magna dell'Istituto cantonale di economia e commercio:

Venerdì 17 gennaio – ore 13.30
Giorgio Mainini
Matematica elettorale

Martedì 28 gennaio – ore 20:15
Tavola rotonda:
" *Informazione o manipolazione? Il ruolo dei sondaggi d'opinione*"
Partecipano:
Giancarlo Dillena (Corriere del Ticino); Gianni Giorgetti (Ticinonline)
Giuseppe Richeri (USI); Dario Rivoir (APE); Dario Robbiani (IMMES)
Corrado Barenco (RTSI, moderatore)

Venerdì 14 marzo – ore 15.00
Sergio Ravasi
Passato, presente e futuro dello spoglio informatizzato

3. Recensioni

Gianfranco Arrigo - Giorgio Mainini

Paul Hoffman – L'uomo che amava solo i numeri (La storia di Paul Erdös, un genio alla ricerca della verità matematica) – Oscar Saggi Mondadori, Milano, 2000, pag. 272, 15,49 €

Il volumetto narra la vita di Paul Erdös, matematico di origine ungherese (1913-1996).

Vita, bisogna pur dire, che pochi di noi sarebbero disposti a vivere nello stesso modo. Scrisse da solo o in collaborazione con altri 1475 saggi accademici, e, allo scopo, strutturò la propria vita in modo da massimizzare il tempo da dedicare alla matematica: mediamente 19 ore al giorno. Non ebbe moglie (e nemmeno rapporti sessuali, né con donne né con uomini), né un lavoro, né hobby, né casa. Viveva di una valigia logora e di una borsa di plastica, si nutriva di benzedrina, caffè forte e compresse di caffeina ed usava un linguaggio personale qualche po' discutibile: Dio era «SF» (Sommo Fascista), i bambini «espsilon», le donne «capi», gli uomini «schiavi», sposato si dice «catturato» (e divorziato «liberato»), ed altre amenità del genere; aveva l'abitudine di condividere immediatamente le proprie scoperte con altri matematici, telefonando loro a qualunque ora del giorno e della notte o presentandosi inaspettatamente a casa loro. Insomma, non fu un modello da additare ad esempio ai nostri figli, ma fece più matematica di chiunque altro. La sua specialità erano i numeri, con particolare simpatia per i primi, sui quali dimostrò in modo «elementare» (cioè ricorrendo solo agli elementi di R - non aveva, in principio, niente contro quelli di C, ma, se poteva, ne faceva volentieri a meno) un gran numero di teoremi. Aveva inoltre la capacità di trovare soluzioni a problemi che avevano fatto impazzire gli altri matematici. Ma qui si desidera attirare l'attenzione su una caratteristica del volume, che lo rende particolarmente degno di lettura da parte degli insegnanti: la gran quantità e varietà di problemi e di ricerche in esso citati. Dai grafi ai numeri di Mersenne, dai numeri «altamente composti» alla probabilità, dalla scomposizione degli interi in somme alle frazioni di numeratore 1, dai postulati di Euclide a Riemann a Lobaçewskij, dal papiro Ahmes a Fibonacci,… Una vera miniera. Come assaggio: non è a tutti noto che 1/a=1/(a+1)+1/((a(a+1)). Di conseguenza, ad esempio, 1/2=1/3+1/6=1/3+(1/7+1/42)=(1/4+1/12)+1/7+1/42=… Ecco allora un esercizio non banale con le frazioni, che può essere corredato di informazioni sui metodi di calcolo degli Egizi. Altri esempi? *Voilà*: dimostrare che, comunque si scelgono n+1 numeri tra 1 e 2n, tra essi c'è sicuramente una coppia di numeri primi fra loro (è poco più di un curioso «gioco matematico»); costruire una successione di Fibonacci che non contenga numeri primi (distinguere il caso facile da quello difficile, considerando il caso f(1)=3794765361567513, f(2)=20615674205555510 -?-); informarsi sul *numero di Graham*, citato nel Guinness dei primati come il più grande numero mai utilizzato in una dimostrazione; trovare un algoritmo che consenta di mettere sui due piatti di una bilancia dei pesi (interi) in modo che la differenza fra i pesi totali sia, ragionevolmente, la minore anche se non la minima; eccetera.

Altro lato interessante del libro è la narrazione, come in un gioco di scatole cinesi, della vita e/o dei lavori di matematici di tutti i tempi: Abel, Bell, Cantor, Descartes, Eulero, Fermat, Germain (Sophie, che firmò spesso con lo pseudonimo di Antoine-Auguste Le Blanc, visto che per le donne, nel mondo accademico di allora – primi decenni del secolo XIX –, non era aria), Hilbert, Ipazia, Jarvik, Kronecker, Leibniz, Minkowski, Nash, Oltikar, Poincaré, Ramanujan, Steiner, Taniyama, Ulam, Vászonyi, Wiles, tra gli altri, con perdonabili assenze di studiosi in Q, Y e Z.

Keith Devlin – Il gene della matematica / Per scoprire il matematico (nascosto) in ognuno di noi – Longanesi & C., Milano, 2002, pag. 377, 16,80 €

Questo è un libro importante per noi docenti di matematica. Il titolo stesso è provocatorio. L'autore, dopo aver ribadito che non esiste alcun «gene della matematica», nel senso di una sequenza specifica di DNA umano che conferisca l'abilità matematica a chi lo possieda, si addentra nella riflessione sulla predisposizione che un individuo dovrebbe possedere per riuscire in matematica e sul perché molta gente non riesce a entrare nell'affascinante quanto culturalmente importante mondo della matematica. La tesi di fondo sostenuta in quest'opera può stupire: la predisposizione di fondo per riuscire in matematica è la stessa che necessita per imparare un linguaggio. In altri termini, chi possiede una lingua al punto tale da saperla usare «per spettegolare», possiede anche le doti necessarie per imparare la matematica. E allora – si dirà – perché al mondo vi sono molti pettegoli e pochi matematici? Ottima domanda, tutt'altro che facile. L'autore dedica la quasi totalità del testo all'indagine volta a ricercare i motivi di questo dato di fatto.

A sostegno della sua tesi l'autore dà un'interessante spiegazione del fatto che nei concorsi internazionali i bambini cinesi e giapponesi se la cavano sempre meglio degli americani e di molti loro coetanei dell'Europa occidentale. È ragionevole supporre che tra le cause che determinano questi risultati possano esserci la differenza culturale e la diversità dei sistemi scolastici. Secondo l'autore, però, una buona parte dei fattori determinanti si ritrovano proprio nel linguaggio. Per i bambini orientali, fare aritmetica – in particolare imparare le tabelline – è in effetti più facile, perché nella loro lingua le parole che indicano i numeri sono molto più brevi e più semplici: in genere si tratta di monosillabi, come per esempio *si* per 4 e *qi* per 7. Inoltre le regole grammaticali usate per costruire i termini che denotano i numeri sono molto più semplici che in inglese o nelle altre lingue europee. Per esempio, in cinese, per indicare i numeri oltre il dieci, si procede così: 11 è *dieci uno*, 12 *dieci due*, 13 *dieci tre* e così via fino a 20 che è *due dieci*, 21 *due dieci uno*, 22 *due dieci due*, eccetera. Si pensi per esempio al povero bambino francese che 97 lo deve leggere *quatre-vingt-dix-sept* e a quello tedesco che deve dire *siebenundneunzig*. Tutto ciò impedisce spesso ai bambini svantaggiati di costruirsi un «senso del numero», immagine importante e decisiva per la comprensione dell'aritmetica. Senza dare un senso ai numeri, il soggetto si limita ad apprendere acriticamente un certo numero di regole. Ciò facilita il nascere e lo svilupparsi dell'impressione – molto frequente – che la matematica sia una cosa «arida», «priva di senso», che occorre sopportare fin quando, conseguito un determinato titolo di studio, ci se ne può definitivamente liberare. Da quel momento ci si sente autorizzati a dire – purtroppo anche con un certo vanto – di non aver mai capito nulla di matematica. E invece non c'è proprio di che vantarsi, anzi… perché l'autore sostiene (adducendo ragioni fortemente documentate) che chiunque sia padrone di una lingua (sappia cioè usarla «per spettegolare» come si fa quando, per esempio al bar, si parla di sport, di vip o di motori) è in grado di imparare la matematica. Ma allora, perché ciò non avviene sempre? Una delle tante immagini che ci propone l'autore – per dare almeno un'idea delle ragioni che stanno alla base dell'insuccesso – è quella dell'apprendimento musicale. Imparare a suonare uno strumento non è facile. Intanto occorre imparare un linguaggio (quello delle note), poi occorre impadronirsi delle tecniche fondamentali (per esempio le scale, le tonalità, gli accordi, le forme musicali,…), infine occorre parecchio esercizio. Quest'ultimo richiede una certa forza di volontà. Lo stimolo può essere dato dal grande desiderio di riuscire a suonare, di avvicinarsi a propri idoli (musicisti, interpreti, star internazionali,…). Queste tappe si possono intravedere anche nell'apprendimento della matematica, con una differenza. Troppo spesso, per la matematica, manca la stimolazione (la società, ma anche la scuola in certi casi, non riesce a crearla), quella carica che dà la forza di volontà necessaria per superare i momenti di apprendimento di tecniche e nozioni basilari: cose importanti, queste ultime, perché senza un minimo di conoscenze e di abilità tecnica non si può fare matematica come non si può suonare uno strumento musicale.

Nel finale, l'autore lancia un importante messaggio alla scuola, in particolare agli insegnanti di matematica:

«La migliore tecnica di sopravvivenza che possiamo offrire ai nostri bambini è la capacità di acquisire conoscenze e competenze nuove. Parte di quell'arsenale di capacità di sopravvivenza è costituita proprio da una comprensione generale della matematica e dall'abilità di acquisire capacità matematiche specifiche nel momento in cui si rendono necessarie.»

David Wells – Personaggi e paradossi della matematica – Oscar Mondadori, Milano, 2002, pag. 279, 8,80 €

Si tratta di una ricca raccolta di aneddoti, notizie storiche, curiosità, citazioni sulla matematica, sui matematici e sulla didattica. Siamo sicuri che ognuno può trovare spunti interessanti per colorire le proprie lezioni. Meglio: per dare maggior senso al lavoro in classe. Ma c'è anche il lato interdisciplinare da non sottovalutare: le diverse proposte sciorinate lungo le pagine snelle di questo simpatico volumetto toccano la letteratura (internazionale), la storia (della scienza in generale) e la filosofia. Non a caso abbiamo citato la didattica. Le stimolazioni sono parecchie e iniziano con un controesempio di lezione, che è assolutamente da leggere e da godere (come si può provare piacere guardando un film dell'orrore). Troppo lungo sarebbe elencare tutti i personaggi che si danno il cambio sulla scena. Fra gli uomini di scienza, citiamo per esempio, Newton, Hilbert, Galois, Russel, Von Neumann, Einstein, Maxwell, Erdös, Rota, Halmos, Ramanujan, … Troviamo anche altri personaggi della cultura mondiale (Platone, Plutarco, Montesquieux) e uomini politici. Ecco alcune perle di qualcuno di loro:

«Non ho nulla contro coloro che insegnano geometria. Questa scienza è l'unica che non produce sette o fazioni; è fondata sull'analisi e sulla sintesi e sul calcolo; non si occupa di verità probabili, e segue lo stesso metodo in ogni paese». (Federico il Grande: 1712-1786)

«Una volta immaginai di poter comprendere tutta la matematica. Passo dopo passo tutto mi diventava chiaro. Trovavo la mia strada attraverso i suoi abissi. Vedevo – così come potrei vedere Venere o uno spettacolo di Lord Mayor – i numeri estendersi all'infinito e cambiare di segno dal più al meno. Vidi esattamente come ciò accadesse e compresi perché la confusione era inevitabile; ma tutto avvenne dopo cena e così dovetti smettere.» (Winston Churchill: 1874-1965)

Il libro può essere letto come si fa con un romanzo, ma soprattutto può servire all'insegnante come testo di consultazione, quando desiderasse avere determinate informazioni comodamente e in breve tempo.

Progetto grafico
Bruno Monguzzi
Fotocomposizione
Taiana
Stampa
Veladini

Redazione
Laboratorio di didattica della matematica
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera

Telefono
091 814 34 28/57/58
Fax
091 814 44 92

Amministrazione
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera
Fax
091 814 44 92

Esce due volte all'anno
a maggio e a dicembre

Abbonamento annuo
Sfr. 30.–
€ 16