A cura
del Laboratorio di didattica della matematica

Bollettino dei docenti di matematica

46

Maggio
2003

Ufficio
dell'insegnamento medio
Centro
didattico cantonale

Bollettino
dei docenti di matematica
46

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport

ISBN 88-86486-74-X

Bollettino dei docenti di matematica 46

Maggio
2003

Ufficio dell'insegnamento medio
Centro didattico cantonale

Indice

Prefazione

Il numero apre con il secondo articolo di Jean Dhombres, noto storico della matematica, intervenuto alla due giorni di aggiornamento del 2001 alla Perfetta di Arzo: questo suo contributo riguarda l'interessante ruolo giocato dalla matematica nella storia della costruzione navale. Con grande piacere troviamo un inedito André Delessert, il quale, tolti gli abiti di matematico, ci invita a una importante riflessione filosofico-sociologica sul "culto del cambiamento". Giorgio Mainini ci presenta una coda del suo studio sulla matematica elettorale, soffermandosi sui paradossi. Abbiamo poi dato spazio al giovane Stefano Leonesi che ci ha inviato una valida sintesi sulla problematica che fa da sfondo all'assioma del continuo. Singolare l'intervento del direttore del Laboratorio chimico cantonale, Mario Jäggli, che ci regala un interessante studio di tipo combinatorio.

La sezione dedicata alla didattica propone la sintesi della seconda parte della ricerca di Gianfranco Arrigo e Bruno D'Amore sull'apprendimento dei concetti relativi all'infinito attuale e da una riflessione del primo su una stimolazione avuta durante una visita di abilitazione al giovane insegnante Andrea Morandi. Sperando di fare un regalo gradito ai lettori, questo numero introduce una nuova rubrica "Racconti matematici": vi si cimentano Giorgio Bagni e Giorgio Mainini. Si tratta di letture che possono essere consigliate anche ad allievi particolarmente interessati alla matematica. Chi avesse voglia, estro e tempo di scrivere, sappia che la tribuna è aperta.

L'intermezzo è come sempre curato da Aldo Frapolli che ci presenta un nuovo quiz.

La bricolla accoglie con rinnovato piacere Antonio Steiner, creatore della rubrica, con una delle sue famose stimolazioni sul teorema di Pitagora e si completa con una proposta di Gianfranco Arrigo sui numeri triangolari e tetraedrici. Segue poi il Laboratorio matematico tenuto dagli specialisti Edo Montella (che conclude il discorso sulle sezioni piane di un cubo iniziato sul numero 45) e Claudio Beretta che ha risolto in modo originale un interessante problema di geometria. In chiusura, la segnalazione del "convegnone" di Castel San Pietro Terme (insegnanti ticinesi: partecipate!) e le recensioni mirate e accurate del tandem Arrigo-Mainini.

A partire da questo numero entra nel comitato di redazione Alberto Piatti al quale diamo il benvenuto, sicuri che saprà dare un apporto consistente.

Infine ringraziamo Camillo Tanzi, il quale, nella sua qualità non comune di insegnante di matematica e di inglese, ci redige gli *abstracts* con notevole impegno e perizia.

1. Matematica e marina[1]

Jean Dhombres[2]

Two different outlooks on mathematics have often been rivaling one another: the Platonic vision, glorifying mathematics, vs. the Aristotelian vision, confining it on the fringe of philosophy. The relationships between pure mathematics (ideas) and that called applied mathematics (reality) have always been quite diversified as the history of shipbuilding can very well testify. The coming of integral calculus was a turning point for the evolution that has taken place ever since. The article takes us through this peculiar account and lays emphasis not only on mathematical aspects, but also on technical and, generally speaking, scientific and epistemological aspects.

L'utilità della matematica

Sul piano filosofico, la matematica si è trovata spesso contesa tra due visioni: l'una, quella platonica che la glorifica, l'altra quella aristotelica che la tiene ai margini. Questa opposizione ha scandito differenti ritmi storici nel coinvolgimento della matematica nello scibile. Così, le relazioni lentamente stabilite tra la matematica detta *pura* (le idee) e quella detta *applicata* (il reale) – nell'ordine delle motivazioni, dell'ispirazione, del senso della generalizzazione del ruolo dell'induzione – incontrano una grande varietà di modalità delle quali la storia delle costruzioni navali potrebbe essere testimone fino ai nostri giorni, anche come sintesi della eredità caotica di Archimede. Non bisogna lasciarsi trarre in inganno dal movimento generale di matematizzazione partito nel XVI secolo; esso scherma la percezione di progressi più sottili e richiede la capacità di leggere le forti e giustificate reticenze alla matematizzazione nei suoi vari aspetti. Così la storia che voglio raccontare parte dal rifiuto della matematizzazione troppo semplicistica del mondo delle costruzioni navali del XVIII secolo. Questo rifiuto viene da uno specialista della marina, che stava rivivendo il pensiero di Archimede a proposito del problema dell'equilibrio delle navi.

A Roma, la posizione dei matematici non era certamente invidiabile, tant'è vero che Cicerone chiamava *mathematici* gli astrologi; in Cina i matematici non potevano accedere ai più alti livelli del mandarinato. È solo in Francia, con l'avvento della Scuola Politecnica, che fu data per la prima volta ai matematici una posizione sociale, confermata poi dal positivismo della Terza Repubblica. Nel 1795 la giustificazione si basava sulla convinzione che la matematica gestisce il discorso analitico efficace, perché così il discorso era comprensibile per tutti gli attori, con l'algebra da una parte,

1. La redazione presenta il testo completo di Jean Dhombres della conferenza da lui tenuta alla Perfetta di Arzo nei giorni 27 e 28 agosto 2001. A Jean Dhombres vada un sentito ringraziamento per questo dono prezioso.
2. Direttore di ricerca al CNRS, direttore degli studi all'EHESS, Centre A. Koyré, 27, rue Damesme, F-75013 Paris.

l'analisi delle figure con la geometria descrittiva dall'altra. C'era dunque un ottimismo nei confronti della cultura matematica di un intero popolo, ma le applicazioni non costituivano l'argomento principale. In ogni caso, nella maggior parte dei paesi la formazione matematica appare agli inizi del secolo XIX come prerequisito per ogni mestiere ingegneristico, quindi anche per l'ingegneria nautica, ma anche per la formazione di ufficiale. Per gli ingegneri, la nuova giustificazione si basava sul successo della meccanica, seguito poi da quello della scienza dei materiali (elasticità) e dell'idrodinamica; la trigonometria sferica rimaneva essenziale per determinare la posizione in mare e tanto bastava per dare una giustificazione sufficiente del ruolo importante della matematica nell'arte nautica. Nonostante ciò, la Marina non è diventata una branca della matematica; la matematica della Marina non è entrata nell'insegnamento ordinario della matematica.

Le differenze di ampiezza dell'oscillazione della matematizzazione nel tempo sono le cause, ma anche le conseguenze, di un apprezzamento modulato della matematica, troppo spesso considerata come cane da guardia del pensiero esatto, negli ultimi secoli della civiltà occidentale. Così, l'attitudine attuale di considerare indistinguibile la matematica pura da quella applicata non dev'essere considerata una tappa di tipo metafisico, come avrebbe potuto dire Auguste Comte[3]. In questa posizione epistemologica si arrischia di concepire la matematica come risorsa inestinguibile di modelli esatti, dunque di dimenticare le altre sorgenti di modelli e infine di sperare che ogni modello matematico offra la scatola degli utensili *ad hoc*.

Newton non ha trovato il calcolo differenziale e integrale già pronto per descrivere la meccanica dei pianeti secondo un modello orbitale, a partire dal quale, nel tempo, si sarebbe potuto fondare un riferimento in mare delle longitudini attraverso l'osservazione, confrontata alla previsione, della posizione dei satelliti di Giove. Sarebbe difficile sostenere che Newton abbia trovato la matematica nei calcoli numerici degli astronomi, nei disegni dei cartografi, o nelle combinazioni degli astrologhi! Il titolo della sua opera, *Principia mathematica Philosophiae naturalis*, esprimeva che era nato un nuovo sapere che si perpetuerà come fisica matematica. Newton non ha forse tentato di riuscire nello stesso modo di Archimede? La presenza della matematica in questa fisica distrusse la filosofia naturale di stampo aristotelico, ma il nuovo sapere non fu fagocitato dalla matematica. Questa fisica vedrà ben presto i propri limiti matematici, nel tentativo di prevedere con precisione determinati fenomeni naturali, come per esempio il comportamento delle maree nei vari porti. Con la teoria del potenziale, la matematica di Laplace giungerà a questa precisione e solo a torto si può non vedere in questo passo una continuazione della matematica newtoniana. Un altro esempio storico è rivelatore. La fisica del XVIII secolo aveva stabilito che la modellizzazione dei fenomeni del continuo, per esempio il calore, o l'acustica, era governata dalle funzioni e dalle equazioni alle derivate parziali di secondo ordine. Ma la scatola degli utensili di allora, se permetteva di trovare delle soluzioni, non permetteva di ottenere soluzioni adattate alla modellizzazione lineare, cioè i vettori propri degli operatori differenziali in gioco. Dovette inventarli Fourier, il quale concluse che la matematica nasce dai bisogni del

3. Auguste Comte, filosofo positivista, è conosciuto soprattutto come il creatore della sociologia, della quale ha posto le basi in due trattati: *Cours de Philosophie positive* (1830-1842) e *Système de Politique positive* (1851-1854).

calcolo e della comprensione della fisica, che chiamava natura, secondo il linguaggio classico e aristotelico[4].

Nella storia del XVIII secolo all'idrodinamica mancava ancora una base matematica; non era una scienza sicura e le equazioni che la governavano non erano risolte in condizioni utili a superare gli ostacoli posti per esempio dall'avanzare di una nave. Questo bisogno non fece nascere nuova matematica subito; lo si sapeva e si tentava di supplire sia evitando il più possibile l'idrodinamica (per esempio lavorando sulla statica della nave e sull'equilibrio: come vedremo Archimede tornerà ancora utile), sia ponendo ipotesi di comportamento, sovente errate, come avvenne per la forma delle carene in funzione della maggiore velocità.

Nel XX secolo, a proposito dell'invenzione, Godfrey Hardy[5] parlò della matematica come padrona dei padroni (giocando sull'ambiguità del termine inglese *patterns*). In modo eccentrico combinava così il punto di vista platonico delle Idee eterne, quello di un costante aggiustamento pratico (quello della sarta con il «padrone» del vestito, o quello del marinaio come vedremo più avanti) e infine quello aristotelico che vede nell'opera un'astrazione organizzativa, posizione mista, per mezzo della quale questo matematico intendeva paradossalmente magnificare la matematica pura all'alba del XX secolo, secolo che portò un rinnovamento senza precedenti della logica[6]. Hardy infatti non vedeva alcuna possibilità di invenzione matematica per mezzo delle applicazioni; il mio proposito è di contraddirlo, mostrando un'invenzione matematica suscitata dalla Marina nel XVIII secolo e ritrovando il genio di Archimede; non ho perciò bisogno di mascherare l'insufficienza della matematica dell'idrodinamica d'allora, né di pretendere che l'invenzione nasce dalla sola e pura logica come un normale ragionamento analitico. Senza voler trovare la motivazione nella sola pratica navale, considero utile esaminarla nel suo sviluppo storico e più precisamente nel suo processo di matematizzazione.

L'aggettivazione matematica «pura» non è dunque antica e il vantaggio di averla adottata fu di poterla distinguere dalla fisica matematica, che non era giusto considerare unicamente matematica applicata[7]; la distinzione che l'aggettivo «puro» apporta è ben più vecchia e sarà adottata dalla Marina per il suo ruolo di distinzione sociale. Il termine «distinzione» dev'essere letto nel suo senso aristocratico, come dire «essere distinti», perché lo spirito dell'invenzione, con il cambiamento che permette, separa dagli altri. Non è forse così che viene ricordato Archimede, principe per se stesso, principe di un altro spazio, soprattutto. Il termine «invenzione» ha tuttavia due accezioni: una è la scoperta a partire da ciò che già esiste, l'invenzione risulta dall'osservazione delle tecniche esistenti nei mestieri. Archimede non inventò la leva, della quale usò così magnificamente le proprietà matematiche, ancora impiegate teoricamente nel XVIII secolo. Si potrebbe ancora parlare di una tecnicizzazione della matematica, così come di una razionalizzazione della tecnica.

L'altro senso del termine «invenzione» assume l'originalità e la libertà dello spirito, e se questo tipo di invenzione parrebbe uscito unicamente dalla matemati-

4. Si veda: Jean Dhombres, Jean-Bernard Robert, *Fourier, créateur de la physique mathématique*, Paris, Belin, 2[e] édition, 2000.
5. Matematico inglese (1877-1947).
6. G.H. Hardy, *A Mathematician's Apology*, Cambridge 1940; L'apologie d'un mathématicien, trad. fr., Paris, Belin, 1985.
7. Si veda G.H. Hardy, *A Course of Pure Mathematics*, Cambridge University Press, 1912.

ca, è solo perché questa si colloca al di fuori della realtà, anche quando le idee sarebbero di fisica matematica (per esempio nel mondo astratto dei pianeti della meccanica celeste); l'applicazione può venire in seguito concretamente su oggetti tecnici (è il caso per esempio della teoria del potenziale che mancava nel XVIII secolo per l'idrodinamica e che trova una sorta di illustrazione nell'elettricità, dunque in un ambito di saper fare).

Per lo storico è difficile distinguere tra i due tipi di invenzione di fronte all'innovazione che implica cambiamenti effettivi nella pratica tecnica; l'esempio navale che mostrerò non sfugge a questa difficoltà e rappresenta una bella sfida intellettuale. In ogni caso, agli inizi del XVIII secolo, l'Accademia francese delle scienze non aveva dubbi sulla possibilità di migliorare attraverso la teoria, e per questo istituiva dei premi, ai quali concorsero i più grandi matematici dell'epoca come Leonhard Euler e Johann Bernoulli, professori di idrografia come Pierre Bouguer, oltre a una folla di anonimi, stimolati dallo spirito «dei Lumi» che voleva migliorare tutto. Archimede ridiventava un modello.

Il dibattito sull'invenzione è ineluttabile in un ambito così discusso in Europa come quello della Marina, che sembrava ancor più popolare di quello della città. Il dibattito porta forzatamente sull'«utilità» di ogni teoria, anche se questo termine non conserva lo stesso significato da un'epoca all'altra[8], Aristotele ci ricorda nella *Retorica* che «*è dell'utile che si può persuadere chiunque, e ciò che è utile agli stati sono le cose che si riferiscono alla loro conservazione*». Una delle caratteristiche delle navi del XVIII secolo era la corta durata di vita, venticinque anni di uso, anche se intenso come nella Compagnia delle Indie Orientali di Amsterdam, la celebre V.O.C. Quale utilità può esserci nell'impiego della matematica sofisticata per una nave? Anche se ciò comporta un apprendimento difficile dei marinai? E poi la matematica non può certo prolungare la vita di una nave, per contro potrebbe disturbare una produzione standardizzata e accettata per quello che valeva. Proprio per questo, l'Ammiragliato inglese nel XVIII secolo non accettò le «tecniche matematiche». Il mondo «dei Lumi» francese non adottò il principio della razionalità della produzione, e diede fiducia alla matematica solo per favorire la qualità.

Sul Continente, la matematica illuministica rivolse la sua utilità all'applicazione a tutto campo del calcolo differenziale e integrale, scoperto negli ultimi decenni del XVII secolo (*Grand Siècle*), per ottimizzare le caratteristiche già conosciute delle navi e fornire migliori prestazioni, modificando e perfezionando la forma dello scafo. Qui ritroviamo il primo senso che avevo dato al termine «invenzione», importante per il primo esempio che mi accingo a sviluppare, perché la pratica architettonica delle navi fu il motore dell'invenzione per il vecchio professore d'idrografia Pierre Bouguer, frequentatore di porti e accademico. Il lavoro di riflessione sui risultati, la seconda accezione di invenzione, ha in seguito modificato l'organizzazione della matematica stessa, facendo apparire l'integrale come largamente indipendente dal differenziale. Questa scelta epistemologica, mi sembra, ha fatto sì che il problema della stabilità della nave non entrasse nella matematica insegnata. Eppure questo problema ha avuto un ruolo

8. Avevo pensato di terminare questo articolo con alcuni dati statistici, per dare un'idea dell'evoluzione nel tempo della produzione, sia pura che applicata, nelle riviste matematiche. Vedere Jean Dhombres, *Applications des mathématiques et mathématiques appliquées. Des premiers journaux spécialisés à l'Encyclopédie germano-française*, in *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, J. Gabay (éd.), Paris, 1999.

importante nella serie di innovazioni del XVIII secolo che trasformarono la marina, costringendo i progettisti, per esempio, a modificare la forma delle carene. La marina riconobbe allora che occorreva dare una solida formazione matematica non solo ai costruttori, ma anche agli ufficiali.

Aveva capito che la matematica fornisce gli strumenti, non tanto per spiegare e regolare tutto, ma per permettere le scelte. Così, la teoria che esporrò mostrava che una certa configurazione della carena, con una pronunciata *altezza metacentrica*, assicurava una grande stabilità alla nave. Ma la stessa teoria stabiliva che il periodo del rollio[9] è inversamente proporzionale all'altezza metacentrica, dunque che una migliore stabilità esigeva un rollio più rapido, più duro secondo l'espressione dei marinai. È evidente che, verso la fine del XVIII secolo, la nave imbarcava molta matematica, come si può vedere dai *piani di forme*, divenuti di uso comune.

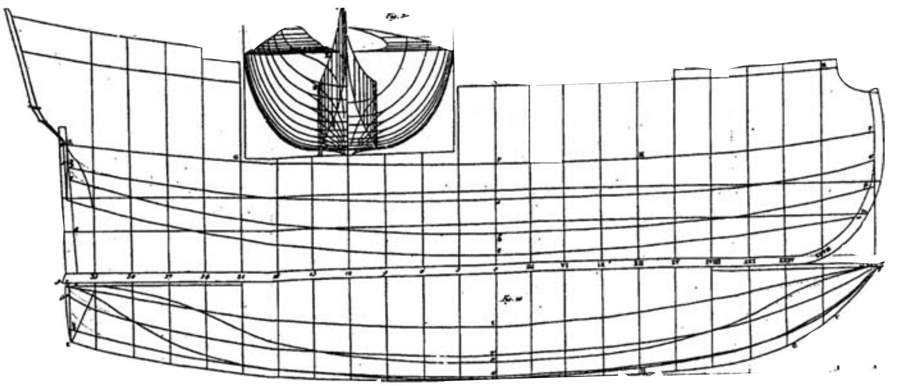
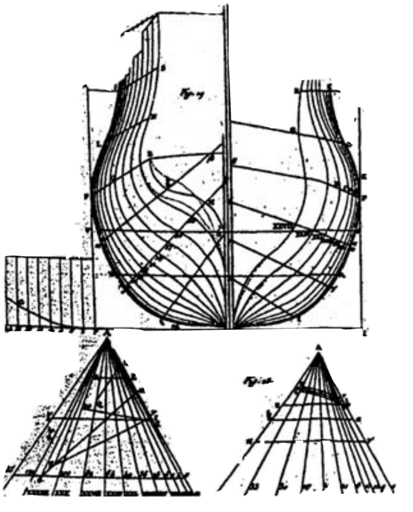


Figura 1.
Insieme di piani di forme,
usato comunemente
nella marina della seconda
metà del XVIII secolo



9. Oscillazione di natante o aereo intorno al proprio asse longitudinale.

Non è mia intenzione liquidare troppo in fretta questo argomento, come di solito fanno i matematici quando parlano di un passato riscoperto, la cui eredità è movimentata. La mia intenzione è di spiegare storicamente i disegni della figura 1. Lasciamo dunque maturare la storia, una storia che implica anche l'insegnamento della matematica. Il rapporto pura/applicata è un problema da insegnanti; essi esitano a prendere applicazioni come motivazione o come illustrazione. Talvolta col pretesto della «purezza» della matematica, spesso con quello della complicazione numerica delle applicazioni, quasi sempre perché un'applicazione tecnica si presta a una pluralità di spiegazioni, ciò che rende difficile la messa a fuoco delle conoscenze matematiche da attivare. I disegni di architettura navale della figura 1 sono senza dubbio troppo complicati, per entrare nell'insegnamento secondario. La difficoltà didattica risiede nel fatto che, una volta applicata, un'idea matematica diventa banale per la maggioranza dei professionisti, mentre il compito dell'educatore è di far capire a giovani non ancora professionisti il rigore matematico insito nella banalità stessa. Pensiamo ai sistemi di coordinate: le x e le y che meravigliano ancora non appena appaiono su un giornale di larga diffusione, e alla banalità delle longitudini e latitudini usate senza imbarazzo nella cronaca di un navigatore solitario. A questo proposito è significativa l'opera di Archimede, così difficile da leggere ancora oggi, perché situata nell'intersezione tra la banalità e la massima esigenza teorica.

Voglio iniziare col commento di un'immagine di Archimede che presenta banalità matematiche, perché offre il rapporto puro/applicato prima dell'avvento del calcolo integrale. Detto questo, posso passare ad alcune utilizzazioni nella Marina, risalente ai secoli XVI e XVII, di una matematica antica come quella delle proporzioni di Archimede. Questi metodi furono criticati solo al momento dell'avvento del calcolo integrale che rivoluzionò la matematica distinguendo tra elementare e trascendente. La mia inchiesta si concluderà con le considerazioni sulla stabilità delle navi e sul ruolo che vi gioca il concetto di metacentro. La premessa storica ed epistemologica aveva come scopo di spiegare ciò che intendo con l'espressione «eredità di Archimede», riferita al XVIII secolo.

Una rappresentazione archimedea della matematica delle navi

Sul frontespizio di un'opera in tedesco su Archimede, di Johann Christoph Sturm, apparsa nel 1670, vi è niente di meno che una raffigurazione teatrale di battelli. Dall'antichità, Archimede è sempre stato figura emblematica del genio, come Omero della fantasia. Il principio di Archimede dei corpi galleggianti non si insegnava correntemente nel secolo XVI, le opere del Siracusano non erano oggetto di molte pubblicazioni: troppo difficili o troppo tecniche?

Sul citato frontespizio, in una cornice teatrale retta da due pilastri, spiccano i grandi risultati di Archimede. Il tutto è però visto da un balcone, dunque la raffigurazione assume un tono di contemplazione intellettuale del mondo reale, che, a sua volta, è rappresentato da un porto con la città e diverse navi ancorate. Per contrasto, il globo appeso al centro appartiene al mondo delle forme immaginate, nel quale risaltano inequivocabilmente le forme geometriche riferite al nome di Archimede. In alto a destra, vicino a un bambino con le ali di cartone, è disegnato il centro di gravità di un segmento

Figura 2. Frontespizio di una traduzione in tedesco delle Opere di Archimede, Norimberga, Paul Fürsten, Imp. C. Gerhard, 1670

di parabola che divide un diametro uscente dal vertice nel rapporto 3:2. Simmetricamente, a sinistra, è rappresentato il centro di gravità di un triangolo, nel quale è messo in risalto il rapporto 1:2 lungo la mediana. I numeri appaiono solo nei rapporti, perché solo i rapporti sono valevoli per tutte le parabole e per tutti i triangoli. Quella è una matematica di proporzioni, perché solo loro hanno carattere di universalità. Solo più tardi, con la Rivoluzione francese e l'introduzione del sistema metrico decimale, anche i numeri assoluti servirono per le generalizzazioni. La regola spagnola 3, 2, 1 designava nel secolo XVI i rapporti che dovevano esistere in una buona nave fra lunghezza, larghezza e profondità. Nella Bibbia invece sono indicati dati assoluti per l'arca di Noè.

Le proprietà della parabola non si studiano più nell'odierno liceo: sono utili? Sono applicate? È ancora necessario occuparsi a scuola del peso, quando il concetto di baricentro è diventato vettoriale? Le figure disegnate nel frontespizio del 1670 sono effettivamente «pure» : triangoli e segmenti parabolici non hanno alcuno spessore che possa far pensare alla realtà. Il disegnatore rispetta lo spirito della matematizzazione operata da Archimede molto tempo prima; questi fu effettivamente il fondatore di una statica «puramente geometrica» (in seguito, la scienza dell'equilibrio dei corpi solidi è diventata scienza del centro di gravità e scienza vettoriale). Nel frontespizio, il disegnatore ha deliberatamente evitato di disegnare le ombre delle figure geometriche, perché altrimenti avrebbero subito fatto pensare a qualcosa di reale. Siamo nel campo delle convenzioni e il rapporto 2:3, che si legge in basso al frontespizio è ormai il rapporto tra l'area laterale del cilindro e l'area della superficie sferica. Questo ritorno al realismo può dare fastidio; anche la figura femminile appoggiata alla colonna di destra – che è evidentemente l'incarnazione della Geometria perché tiene in mano il compasso – nell'altra mano tiene una bilancia, dunque la leva di Archimede, che è un oggetto non ridotto a idea pura. Sul balcone, sono rappresentate insieme la matematica e la fisica. Nella tradizione aristotelica – che fu quella dell'Università fino al Rinascimento – fisica e matematica non avevano la stessa dignità. La matematica ipotizza ciò che la fisica verifica, aveva detto Lefebvre d'Étaples all'inizio del XVI secolo. Fu poi contraddetto un secolo più tardi da Galileo.

Inoltre, il compasso in mano alla Geometria femminilizzata disegna la figura famosa con la quale Archimede spiegava come dedurre l'area di un'ellisse da quella di un cerchio: vi si vedono i lati dei poligoni inscritti nel cerchio e nell'ellisse, che, grazie al metodo di esaustione, reggono la dimostrazione archimedea. Purtroppo, per ragioni di prospettiva, il realismo pittorico ha fatto rappresentare il cerchio con un'ellisse, il che disturba non poco la dimostrazione matematica. A che serve il compasso, se poi le figure sono deformate dalla prospettiva? Non tanto per misurare, ma per far capire che un sapere dev'essere adattato. La prospettiva, scienza della rappresentazione esatta delle figure, era diventata materia per i matematici nel XVII secolo, ma questi non usavano la prospettiva nelle loro spiegazioni elementari!

Qui vediamo un aspetto interessante per l'insegnamento. Tutti i libri che riproducono gli Elementi di Euclide (dalla prima edizione di Ratdolt a Basilea nel 1482) sono confrontati col problema di rappresentare figure solide (prismi, piramidi, sfere, ecc.). Parecchi di questi rispettano la prospettiva, anche se questa non è spiegata negli Elementi. La prospettiva però deforma le figure: non è scomodo dover ragionare bene su figure deformate? In ogni caso questo problema non toccava gli universitari dell'epoca perché non si studiava Euclide per i suoi risultati matematici, ma solo con l'obiettivo di imparare la logica della dimostrazione. Ma l'autore del frontespizio del 1670, sa benissimo che occorre anche spiegare i risultati per se stessi, perché raccontano la realtà. I risultati permettono di padroneggiare il mondo; la logica consente l'abilità del discorso.

Il piedistallo del frontespizio offre altri elementi che fanno parte dell'eredità di Archimede. Sul piedistallo di sinistra vi è il calcolo della quadratura del cerchio: l'area del cerchio è uguale a quella del triangolo rettangolo costruito sul raggio (ab) con l'altro cateto (ac) la cui misura è uguale alla circonferenza. Risultato notevole, più avanzato di quello di Euclide che si limita a considerare π (senza indicarlo) come rapporto comune a tutti i cerchi, cioè di carattere universale. La scritta in gotico dice che si tratta del primo teorema sull'area del cerchio. Sull'altro piedistallo è pure riportato il risultato di Archimede riguardante la misura di una spira della spirale. Sul piedistallo di sinistra troviamo ancora la quadratura della parabola: i numeri 4 e 3 indicano che il segmento di parabola ha area uguale ai 4/3 di quella del triangolo disegnato. Sull'altro piedistallo si vede la stessa figura, ma con altri numeri. Se si guarda più da vicino si scopre una nuova convenzione per il disegno: l'utilizzazione del tratteggio nel modo che poi diventerà classico in matematica, per indicare che si tratta di solidi e non di figure piane.

È un po' più difficile riconoscere l'Arenaria nel disegno cosmologico dello sfondo, secondo il sistema copernicano, con i pianeti attorno al sole e la luna che ruota attorno alla terra seguendo un'orbita circolare. Una scrittura indica che Archimede è capace di scrivere un numero a priori più grande di quello dei granelli di sabbia che potrebbero riempire l'universo: magnifico esempio matematico, ma più significativo dal punto di vista filosofico: si può pensare la grandezza dell'universo con un numero finito. Mentre la Geometria guarda al suo livello, l'altra figura femminile, che rappresenta l'Astronomia, guarda verso il cielo e ha in mano una sfera, oggetto reale, ma anche strumento di rappresentazione. Sulla tavola che tiene salda con l'altra mano si può vedere un apparecchio rudimentale di navigazione (sostituito poi dal sestante): si vede nello stesso disegno un oggetto messo in rilievo con l'ombreggiatura e la geometria rettilinea dei raggi del sole. Ritroviamo lo stesso tema della realtà e della raffigurazione, già incontrata a proposito dei cilindri e delle sfere.

La discussione in linguaggio matematico

Che cosa si vede dal balcone? Qualcosa di completamente diverso, senza figure geometriche: una città portuale, poco costruita per la verità, ma la porta fortificata sul mare e la gru sono talmente caratteristici che non sarebbe nemmeno necessario rappresentare tutte quelle navi che solcano il mare. I militari riuniti sulla riva, le navi del tipo galeone, la struttura delle loro vele, ecc., tutto indica che si tratta di un assedio: l'assedio di Siracusa, operato dal generale romano Marcello, durante il quale Archimede morì per mano di un soldato che non lo riconobbe. Archimede meritava una simile morte perché inventò un gran numero di stratagemmi bellici, fino ai famosi specchi ustori che riuscivano a incendiare le navi nemiche. Ma, nella rappresentazione, nessuna nave brucia. P. Proschel, il disegnatore, non ha voluto dare credito a questa storia, molto spesso esibita dagli storici come esempio di applicazione della matematica. È veramente credibile che Archimede, con i materiali di cui disponeva, potesse incendiare le navi nemiche? Teoricamente la domanda è interessante, ma la risposta non può essere che negativa. E poi, ammettendo che ci sia riuscito, come mai nessun altro fece la stessa cosa? Bisogna avere una concezione bizzarra della scienza per pensare diversamente e Sturm non commette questo errore. La sua divulgazione dell'opera di Archimede era volutamente corretta; comunque la correttezza non gli impedì di dare esempi di applicazioni.

Guardiamo da vicino la ruota dentata posta sopra i meandri di un fiume: è la ruota che Archimede costruì per trasportare l'acqua in salita per poi farla fluire nel laghetto che si vede. Senza dubbio si tratta di un'allusione alla famosa vite di Archimede. Con ciò l'autore voleva forse significare che nella realtà non c'è posto per la teoria? No di certo! Sulle colline alla destra del paesaggio si vede una grande nave tirata in secco, apparentemente senza fatica, da un solo uomo. Questi porta un turbante: è un orientale. Un altro uomo sta a guardare. Quello che tira la nave è Archimede; l'altro è Aristotele, il quale credeva che ci volesse almeno una forza minima per riuscire a vincere l'attrito, non avendo altre risorse per capire, se non il buon senso. Archimede ha teoricamente ragione nel quadro della meccanica geometrica, che è ancora quella sulla quale sono basate tutte le costruzioni odierne. In altre parole, Archimede ha ragione: una macchina può demoltiplicare la forza occorrente fino a ridurla al di sotto di qualsiasi minimo prefissato. Non è forse la matematica che si impone alla fisica, aprendo il campo alle possibilità della tecnica?

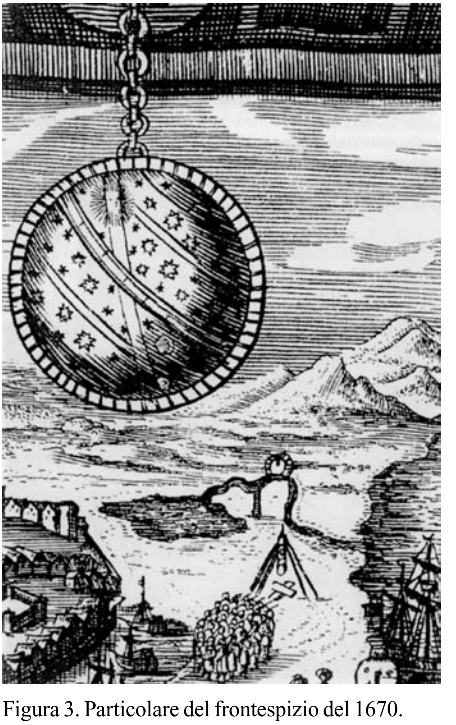


Figura 3. Particolare del frontespizio del 1670.

La discussione sulla validità della teoria era largamente conosciuta nel campo della filosofia naturale (nome dato nelle università alla fisica fin che rimase una fisica senza matematica). Sturm non sente il bisogno di aggiungere altro, tanto più che la sua opera non era rivolta specificamente alle università (per questo l'ha scritta in tedesco, non in latino). Nella stessa ottica, il disegno del frontespizio non distingue tra i due mondi – quello matematico e quello fisico, come faceva Aristotele – l'uno richiedente un quadro astratto, l'altro ragionante sul reale. La matematica può agire sul reale e non c'è alcuna dignità dell'astratto sul concreto, tale può essere definita l'eredità di Archimede.

Un segreto matematico?

Un'immagine poteva simboleggiare l'armonia tra astratto e concreto: quella del 1616, che rappresenta il geometra Talete mentre lavora su un libro, con i fedeli strumenti matematici ai suoi piedi, che sembra gli obbediscano come le navi che solcano il mare, ma che lui non guarda.

Per quel che ne sappiamo, nell'ambito delle costruzioni navali e della navigazione d'alto mare, la matematica fino alla metà del XVIII secolo sembra giocare un ruolo secondario e non ci si chiede ciò che possa pensare Talete che sia in qualche modo utile alle navi. Né la forma delle caravelle, né quella delle vele per navigare di bolina, che fecero la fortuna dei portoghesi nella conquista delle coste africane, né l'uso della bussola richiedono una matematica che non sia possibile tramandare da capitano a capitano. Per contro, l'immagine consegnataci dalla storia è diversa: la scuola di Sagres, che sarebbe stata fondata da Enrico il Navigatore all'inizio del secolo XV, manifesta una conoscenza teorica difficilmente trasmissibile e non acquisibile naturalmente (per esempio: sapere arabo o orientale, mediazione ebrea). Piuttosto occorre vedere questa scuola come esempio di una conoscenza che si capitalizza e si teorizza sulla base dell'esperienza marittima acquisita dai diversi navigatori, unita alla necessità di conservare il segreto.

Figura 4. Talete di Mileto, incisione dell'inizio del XVI secolo

Alcuni manoscritti portoghesi, spagnoli e inglesi del secolo XVI spiegano un metodo di costruzione applicabile a tutti i tipi di navi, non solo alle caravelle che fecero la gloria dei portoghesi, ma che scomparvero prima del 1500. Il metodo consiste nel posare la chiglia, poi le nervature e infine la carena: una questione tecnicamente delicata. Parecchi parametri entrano in gioco e inoltre la dimensione delle navi aumenta col passare del tempo. Si possono distinguere i vari parametri nella figura 5 nella quale sono visibili le altezze variabili delle coppie che sagomano la chiglia e la curva che serve da riferimento per il fasciame; è una curva matematica con segmenti verticali disposti

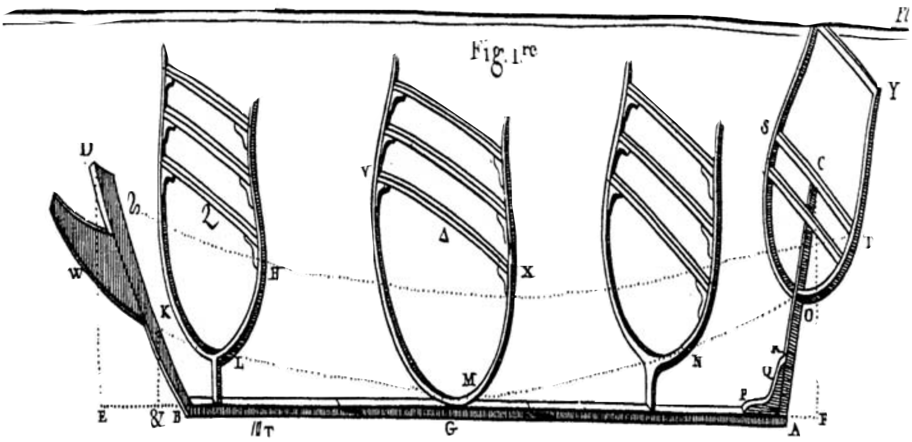


Figura 5. Disegno del 1746 che si trova nel Traité du Navire di Pierre Bouguer: si vedono due parabole tratteggiate che indicano la curvatura variabile dello scafo

a intervalli regolari. Sul disegno si vedono anche dati numerici e geometrici che fissano determinate caratteristiche della costruzione. La simmetria delle coppie può essere verificata mediante bilanciamento e filo a piombo, ma questi strumenti non sono sufficienti. Né si possono copiare altre navi, perché se cambiano i parametri non si possono applicare semplici proporzioni e cambia anche la curva di riferimento. Ci devono essere state per forza delle regole, trasmesse dai costruttori di uno stesso porto, come per esempio a Lisbona in prossimità della *Praça de commercio* nel secolo XV. Mathew Baker, autore del disegno del XVI secolo, lavora sulle rive del Tamigi a Deptford, a est di Greenwich nei pressi di Londra, in un cantiere navale aperto da Enrico VIII nel 1513. Ma questo cantiere non era aperto a tutti: lo spionaggio faceva già parte del gioco tra le differenti potenze in lizza. Si potevano forse visitare i cantieri spagnoli a Siviglia e a Cadice nei quali si trovavano disegni simili con indicazioni numeriche per elaborazioni matematiche? Come si costruiva la curva di riferimento e quelle ad essa quasi parallele che indicano la sagoma della nave e che si vedono bene nel disegno spagnolo?

Una figura fornita nel *Traité du navire*, apparso alla metà del secolo XVIII, nella quale i matematici sono onorati, mostra che l'allineamento delle varie sezioni segue una traiettoria parabolica, la curva così intelligentemente trattata da Archimede.

Le tecniche di progettazione delle navi non sono certo basate su una teoria matematica del galleggiamento né della stabilità né della dinamica. Le regole non sono scritte su trattati, né sono raccolte in piani pubblicati. Ma i disegni mostrano la presenza della conoscenza matematica. Le regole sono rispettate nella costruzione, a partire dall'uso di strumenti graduati, sul tipo di curvilinei articolati o di tavolette graduate, la cui manipolazione non richiede alcuna conoscenza matematica. Come graduare una tavoletta? Come realizzare le articolazioni di un curvilineo? Si sa che i costruttori cambiano spesso gli strumenti, un po' come gli architetti greci cambiavano unità di misura ad ogni tempio. La concezione stessa di questi strumenti, se non il loro impiego, richiede una buona pratica matematica.

Un'illustrazione di un manoscritto portoghese del 1580, del Padre Fernando Oliveira, è esplicita, perché mostra una curva con degli interi in ascissa e in ordi-

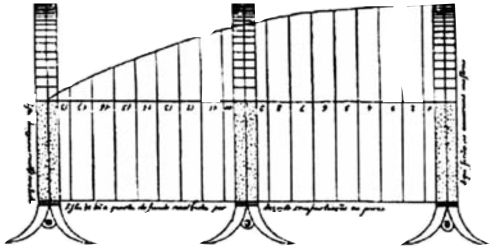


Figura 6. Tavoletta
di un manoscritto portoghese del 1580,
opera di Fernando Oliveira.

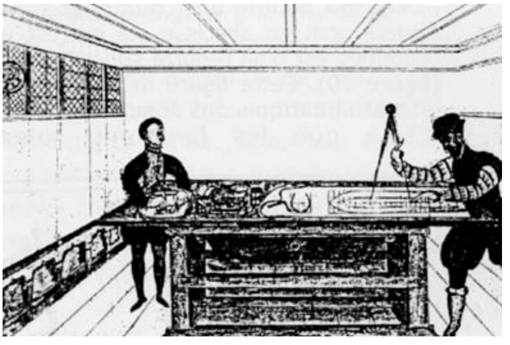


Figura 7. Lo studio
di un costruttore inglese del XVI secolo.

nata una tavoletta. Questa figura fa giocare la matematica delle funzioni, prima ancora che le stesse siano considerate da un punto di vista concettuale, come fu il caso alla fine del XVII secolo con Leibniz. Occorre supporre una conoscenza dei costruttori non riducibile a saperi rudimentali del tipo «regola del tre semplice», che del resto non faceva nemmeno parte della teoria euclidea delle proporzioni. La curva del manoscritto portoghese è evidentemente una parabola, e le cifre in ascissa fanno capire come prendere i quadrati per leggere in senso inverso. È un metodo numerico.

Il disegno portoghese apparve poco prima di una funzione nuovissima, la funzione logaritmica, della quale Napier dà le tavole nel 1614. Queste tavole entrano immediatamente nella Marina perché servono per calcolare le lossodromie, cioè le curve sul globo terrestre che tagliano i meridiani con angoli costanti, introdotte dal matematico portoghese Pedro Nunez[10]. Anche un'incisione inglese del 1586 rappresenta uno studio occupato da due distinti costruttori navali che, nel disegnare la sezione longitudinale di una carena, riportano col compasso delle misure.

Il portoghese Fernando Oliveira, geometra ma non costruttore, nella stessa epoca disegna figure circolari di diverse curvature a partire da una medesima lunghezza in senso longitudinale, dando l'impressione di voler suggerire la regola per la costruzione.

I metodi effettivamente usati appartengono senza dubbio alle tradizioni locali: tutti lasciano molta iniziativa al costruttore, che può scegliere l'intensità di varia-

10. Il ruolo analitico dei logaritmi è discusso da Jean Dhombres, "Ce qu'il y a d'algèbre en analyse, avec le logarithme comme objet d'histoire", in *Analyse et démarche analytique: les neveux de Descartes*, Reims, 1998, pp. 139-204.

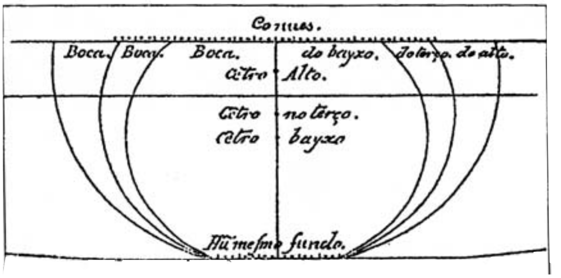


Figura 8.
Disegno di Fernando Oliveira
del 1580.
Cerchi diversi indicano
le diverse curvature

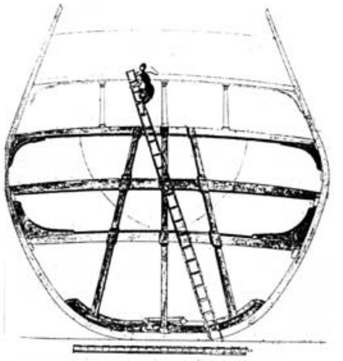


Figura 9. Illustrazione di Matthews Baker, 1580

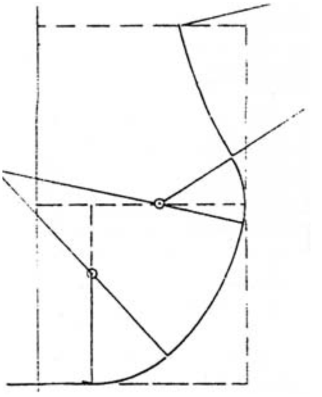


Figura 10. Disegno geometrico del profilo di una nave eseguito con archi di cerchio (1600).

zione delle curvature, e non prescrivono nemmeno le variazioni più accentuate nella prua e nella poppa. Ci fu probabilmente un conflitto tra due modi di realizzare la graduazione di una crescita o di una diminuzione della curvatura. Un modo numerico (meia lua) che si avvale di tavole numeriche e un modo geometrico basato su una figura che permette di leggere la successione numerica ritenuta opportuna, per esempio quella dei numeri quadrati.

È la teoria delle proporzioni che governa le due modalità, ma la teoria non si riduce alla similitudine e vi si scorgono conoscenze archimedee. Le conoscenze sulle proporzioni devono permettere la *concordia de medidas*, come scrive Oliveira; come tutti gli architetti e i filosofi sin dall'antichità, gioca sulle parole, sulla proporzione (come calcolo matematico) e l'armonia o l'equilibrio (senso estetico o meccanico). Il «buon senso del costruttore» decide quale regola adottare: una volta deciso, si segue una regola che però è di natura matematica.

Qualunque sia la spiegazione data, un sapere trasmesso da padre in figlio attraverso strumenti numerici o geometrici che forzatamente dovevano essere fissati su carta, il XVI secolo inizia con tecniche di costruzione navale essenzialmente medievali e si conclude con la costruzione di vascelli di linea, un po' ovunque fino al nord dell'Europa. Le informazioni circolano veloci, come gli uomini; i portoghesi si rivolgono ai genovesi, gli inglesi ai veneziani; i portoghesi si spostano a Rouen, i genovesi a Bruges.

È notevole la rappresentazione di Baker, del 1580, di un uomo che sta lavorando all'interno di una grande nave in costruzione: la sua statura è sproporzionatamente grande, come se il disegnatore volesse ottenere un primo piano.

La figura 6, del Padre Oliveira, con la sua funzione iperbolica che permette la graduazione, è ancora più affascinante se si pensa che la matematica universitaria del *quadrivium* dell'epoca non disponeva di una tale figura, essendo Archimede troppo difficile da interpretare. Altri disegni mostrano l'impiego di un semplice cerchio (forse come approssimazione di una parabola) e le ordinate determinano su una tavola la graduazione della curvatura. Non ho però visto nella marina costruzioni della parabola a partire da una famiglia di cerchi, come quella concepita dal matematico Werner nel XVI secolo.

Nella pratica corrente degli architetti navali la geometria interveniva nel disegno, non però direttamente nella concezione delle navi. Nel disegno si vedono diversi centri che permettono di tracciare archi di cerchio che danno il contorno della carena. Non c'è alcuna ragione derivante dalla meccanica delle navi che giustifichi tale forma; dubito che questi disegni geometrici abbiano potuto aiutare il carpentiere, perché sembrano più che altro trucchi del disegnatore. Non fu questa geometria che cambiò la costruzione navale. Fu necessario passare a un'altra concezione.

Una visione del mondo attraverso la matematica

Mi piace mostrare un disegno apparso su una tesi di laurea scientifica sostenuta in un collegio gesuita a Lovanio. Il tema è la legge della caduta dei corpi lungo un piano inclinato, secondo il pensiero di Galileo, che, a quell'epoca, non aveva ancora pubblicato nulla in merito. Un particolare sorprendente: sono rappresentati due piani ortogonali che formano un riferimento e la traccia della Terra su uno dei due. È difficile dire in modo più chiaro che la matematica è il riferimento del mondo, che la Terra è al centro solo per convenzione, che la teoria eliocentrica di Copernico può essere accettata, ecc. Naturalmente la presenza di un tale sistema di riferimento conduce all'utilizzazione della notazione algebrica che sarà quella di Descartes e della geometria analitica.

Nella figura seguente (particolare da una tesi di laurea del 1699 di César de Pallas a Tolone), anche se non si vedono progetti di navi, anche se è la guerra soprattutto che viene esaltata, anche se le figure su un rotolo di pergamena sono ancora di geometria euclidea piana come nel caso degli archi di cerchio che determinano la forma della carena, un'altra pergamena srotolata mostra la novità attraverso formule algebriche. Si tratta della risoluzione di un'equazione di secondo grado e si riferisce a un problema euclideo. L'evoluzione dei frontespizi delle opere di Archimede è evidente e questa figura rappresenta un'interessante pubblicità per l'algebra al servizio della navigazione.

Non c'è algebra nell'immensa opera *Hydrographie*, del 1643, che padre Georges Fournier S.J. (l'Archimede tedesco) pubblicò prima ancora di dedicarsi al più vecchio gioco letterario consistente nel raccontare l'antichità e nell'aggiungere del proprio alle traduzioni dal greco e dal latino; Fournier vi aggiunge informazioni sui metodi matematici del disegno, che però non sono antichi, ma quelli già citati dei portoghesi e degli inglesi. Alla maniera dei corpi enciclopedici del Medioevo, Fournier coniuga i racconti dei primordi della navigazione – per esempio il colore del mare per la stima della profondità – con gli scritti moderni nei quali la matematica è presente. Nell'opera di Fournier c'è un'illustrazione particolarmente interessante: egli sovrappone su uno stesso foglio di carta tre o quattro sezioni trasversali della carena di una nave. L'occhio vede allora la nave con una sensazione di rilievo e l'effetto è molto migliore di quello,

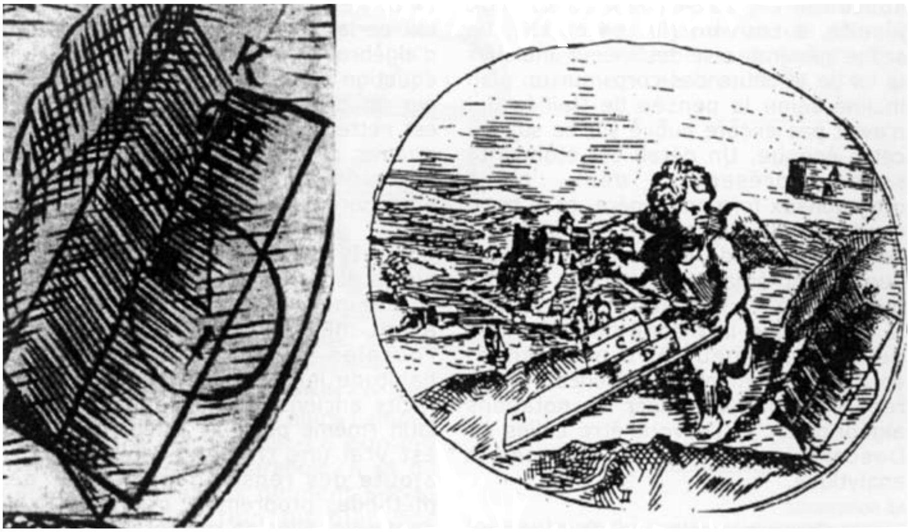


Figura 11.Incisione figurante su una tesi di statica, difesa al collegio gesuita di Anversa nel 1624 (dettaglio)

per esempio, della figura 2. Non solo si vede meglio (effetto banale), ma in più si può calcolare o graduare. Questa figura nascente assumerà un grande ruolo nell'architettura navale ed è utilizzata correntemente ancora oggi col nome di *piano di forme*. È possibile che sia semplicemente nata dal bisogno di rappresentare correttamente delle coppie su un foglio di disegno: non sarebbe la prima volta che ragioni di comodità conducono a una nuova pratica e a una teoria. Un'immagine olandese del 1690 in un libro di N. Witsen dà infatti una rappresentazione rudimentale delle coppie a partire da uno schema della nave: si possono considerare pronte per un rilevamento verticale, secondo l'operazione usuale dei disegnatori di prospettive[11].

Figura 12. Incisione che accompagna una tesi del 1699, Biblioteca municipale di Lyon, 26 540

La figura rudimentale che Fournier ha dato di un piano di forme è stata subito complicata dai disegnatori della marina; ci hanno messo tutte le loro conoscenze per indicare dati numerici che si potevano sfruttare con la nuova impostazione della figura; hanno aggiunto nuove linee in

11. N. Witsen, architectura navalis et regimen nauticum… Skeeps-bouw en bestier, Pieter e Joan Blaeu, Amsterdam, 1690

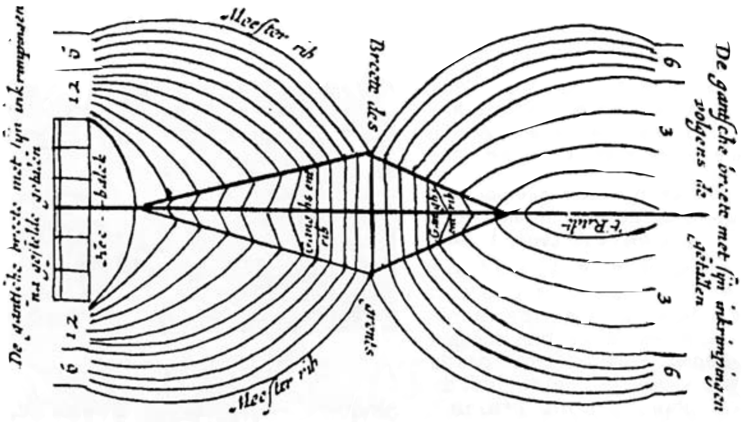


Figura 13. Disegno olandese della fine del XVII secolo

corrispondenza ad elementi provvisori della costruzione. Alla complicazione dell'architettura si sovrapponeva il gioco sofisticato del disegno, con il gioco di archi di cerchio che danno il profilo della carena. Il piano di forme è utilizzato nel trattato *Scientia navalis* del matematico Leonhard Euler (1749). *Scienza navale* nella penna di Euler non può che significare *scienza matematizzata*. Tre anni più tardi, Pierre Bouguer utilizza il piano di forme della pratica architettonica recente, congiungendolo con il calcolo integrale che fornisce un modo di addizionare. Egli mostra che questo metodo è in fondo quello già praticato numericamente nelle costruzioni navali da quasi una cinquantina d'anni. Ma spiegava di più: come disporre di una teoria della stabilità addizionando gli effetti dell'acqua e del peso sulle strutture delle navi per contribuire all'equilibrio. Per la prima volta la costruzione navale riceveva regole direttamente uscite dalla matematica, perché quest'ultima dava un linguaggio alla meccanica delle navi.

Pensato matematicamente, il piano di forme di Bouguer non può che essere più semplice dei piani di forme che si trovano sui libri di architettura navale degli inizi del XVIII secolo, nei quali le linee sono molto numerose. La semplificazione del disegno, secondo Bouguer, la leggibilità stessa e l'utilizzazione numerica generano una nuova tecnica di disegno: ci si avvia ad apprendere a disegnare, se non esattamente, almeno con un'approssimazione sufficiente, i profili delle coppie che non hanno più bisogno di essere composte di archi di cerchio e nemmeno di pezzi di parabola. Si sono scoperte le curve *splines*, per mezzo delle loro proprietà grafiche, curve che oggi otteniamo grazie ai processi di ottimizzazione dell'analisi numerica[12]. Idee nuove come quella di Bouguer agiscono in un va e vieni fra pratica e teoria.

Questo piano è chiaramente innovativo ed è in questo senso che Bouguer lo analizza.

«*Il piano serve per disegnare diverse sezioni di un edificio matematicamente immaginato, con lo scopo di tracciare le proiezioni delle sue parti principali e facilitare così la comprensione della struttura o di particolari, come pure delle spiegazioni teoriche*».

12. Horst Nowacki, Splines im Schiffbau.

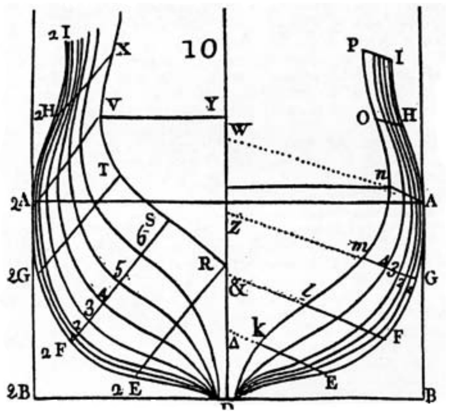


Figura 14. Il piano di forme di Pierre Bouguer, del 1746

Il *Dizionario della marina a vela* del 1847 non ricorda per nulla il lavoro lento effettuato per giungere all'analisi della nave attraverso un disegno ottenuto mediante il calcolo e felicemente mescolato con il *gabarit* (usato dai portoghesi), il *Devis* (descrizione quasi contabile dei pezzi di una nave, delle coppie in particolare, e che si trova nell'*Encyclopédie* di d'Alambert e Diderot della metà del XVIII secolo), la sezione trasversale secondo una coppia e il piano di forme che è l'unione ordinata di tutte le coppie. Le differenti forme delle varie coppie trasversali o le differenti coppie, siccome si ha interesse a conservare il doppio linguaggio dell'oggetto e della sua rappresentazione, non si deducono per similitudine, ma si ottengono con la stessa esattezza. Il vantaggio rispetto ai disegni antichi è evidente, perché questi ultimi potevano concernere solamente la parte centrale della nave. Con il piano di forme si possono trattare ugualmente le coppie vicine alla prua o alla poppa e l'asimmetria del piano di forme consistente nel fatto che una parte rappresenta le coppie ordinate verso la poppa e l'altra parte quelle ordinate verso la prua. La matematica impone questa economia, a spese del realismo banale: è un'altra cosa che impara il costruttore.

Pierre Bouguer inizia la sua opera, *Il trattato della nave della sua costruzione e dei suoi movimenti*, uscito nel 1746, con una dura critica ai predecessori e all'utilizzazione della matematica in Marina, che definisce errata. Rimprovera l'impiego abituale della teoria delle proporzioni nella costruzione navale e i disegni empirici della carena. Indica che il calcolo integrale è il solo strumento che corrisponde alla realtà della nave e non fissa regole, come quella della tavola numerica uscita dalla parabola in un modo non razionale, del tutto empirico. Per dimostrarlo, Bouguer si appoggia non sull'autorità del calcolo integrale, ma sulla pratica marittima.

La stabilità statica delle navi

Non è questa la sede per spiegare come, servendosi della teoria della leva di Archimede, Bouguer riduce a una coppia l'insieme delle forze che agiscono su una nave in equilibrio nell'acqua, senza tenere conto della scia e della velocità. L'analisi

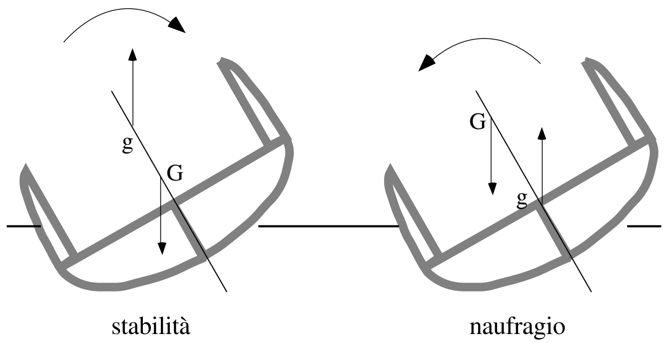


Figura 15. La stabilità della nave spiegata per mezzo delle posizioni relative del metacentro g e del centro di gravità G.

scientifica conduce a distinguere i fenomeni e Bouguer si limita dapprima alla stabilità che può definirsi statica della nave. Il termine coppia è quello assunto in meccanica all'inizio del secolo XIX; i due vettori direttamente opposti allo stato di riposo – la forza peso e la spinta di Archimede – formano coppia quando si verifica una qualunque inclinazione della nave e fanno ruotare la nave per rollio.

La figura 15 mostra, secondo la posizione del punto di applicazione della spinta di Archimede rispetto a quella del centro di gravità della nave, quando c'è stabilità e quando no. Nel senso che il movimento d'inclinazione in un caso è ampliato (si ha naufragio) nell'altro è smorzato (si ha stabilità). Il punto di applicazione è chiamato metacentro. Il termine è dovuto a Bouguer ed è rimasto fino ai nostri giorni. Ciò spiega perché i marinai, nel caso drammatico di un pericolo di naufragio, tagliavano gli alberi: con ciò abbassavano il centro di gravità al di sotto del metacentro. Calcolare la posizione del metacentro su una singola coppia non è difficile: basta la matematica delle proporzioni, ma secondo la teoria di Archimede, perché si tratta di un gioco fra centri di gravità. Occorre comunque senso matematico per calcolare il metacentro di una sezione, che nessuno ha mai considerato come corpo galleggiante: ecco la potenza della matematica. Per convenzione rappresentiamo il movimento della nave sulla sezione trasversale nel passaggio dalla posizione orizzontale AB a una nuova orizzontale ab. Si fa muovere il mare e non la nave! La figura sintetizza la prima parte del ragionamento di Bouguer.

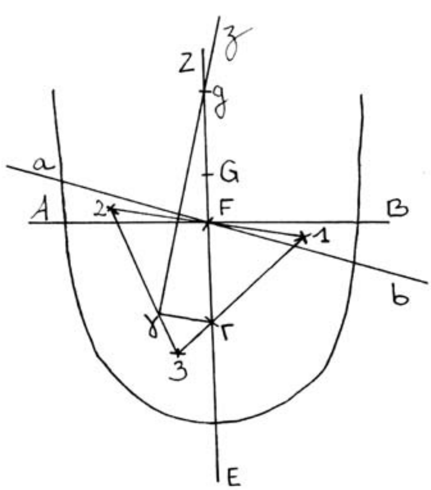


Figura 16. Sezione trasversale di una nave e movimento di rollio

G è il centro di carena, definito come centro di gravità della parte immersa, supposta omogenea (come se la nave fosse riempita d'acqua, anche se qui si tratta di una sezione), G è il centro di gravità della nave, ma non entra nel calcolo del metacentro e per il primo impiego della figura. La scoperta di Bouguer consiste nell'aver osservato che il metacentro non dipende né dalla forma della carena, né dal peso della nave né dalla ripartizione del carico. Col movimento di inclinazione, appare un nuovo centro di carena immersa: è il punto g.

Il metacentro è definito come intersezione della verticale iniziale GZ e della nuova verticale gz. Più precisamente, il metacentro è il limite di questo punto quando l'angolo di inclinazione tende verso zero. La piccolezza di questo angolo gioca un ruolo nel calcolo, ma Bouguer deve far capire che la sua spiegazione vale anche per una nave che oscilla fortemente e la pratica navale fissa a 20° la tolleranza massima per quest'angolo (capiremo perché). La sezione della carena della nave viene scomposta in tre parti, le due parti quasi triangolari BFb, Afa, l'una uscita dall'acqua e l'altra ancora sommersa e la parte AFbE. Queste superfici piane hanno nell'ordine i punti 1, 2, 3 come centri di gravità e il gioco consiste nel calcolare g come baricentro dei punti 2 e 3, e G come baricentro di 1 e 3. Il calcolo è svolto per mezzo di proporzioni. Se, per convenzione, 1G è la distanza dei punti 1 e G, ecc. e se AEbF è l'area della superficie così delimitata, ecc., secondo il calcolo caratteristico dei centri di gravità, abbiamo:

$$\frac{1\Gamma}{3\Gamma}=\frac{AEbF}{BFb} \quad \text{e analogamente} \quad \frac{2\gamma}{3\gamma}=\frac{AEbF}{AFa}$$

Siccome il peso totale della nave non cambia durante l'oscillazione, e non cambia la spinta di Archimede perché la nave non affonda, nella sezione si deduce che le aree aFA e FBb sono uguali. Si è tenuto conto del fatto che i piccoli segmenti di curva aA e bB sono uguali, ciò che non vale per grandi oscillazioni (e in quel caso occorrerebbe tener conto della forma della carena, babordo e tribordo). Questa condizione di uguaglianza permette di fissare in F (punto situato sulla verticale iniziale della nave) l'intersezione di AB e ab. Dall'uguaglianza delle aree AFa e BFb si deduce

$$\frac{1\Gamma}{3\Gamma}=\frac{2\gamma}{3\gamma}$$

Questa proporzione stabilisce il parallelismo delle rette gG e «12» (congiungente i punti 1 e 2), secondo quello che da noi si chiama «inverso del teorema di Talete». Quando l'angolo di inclinazione tende verso zero, la retta gG tende verso la tangente alla curva del centro di carena, e la retta «12» tende verso l'orizzontale AB. Risulta quindi dimostrato che la tangente alla curva del centro di carena è parallela all'orizzontale della nave.

Questo risultato è generale. Non è necessario fissare una posizione particolare della nave, ma è sufficiente muovere leggermente la nave attorno a una data posizione; il ragionamento stabilisce dunque che la tangente in un punto g qualunque della curva del centro di carena è parallela alla corrispondente orizzontale ab. C'è un metacentro per ogni inclinazione della nave e quindi una *curva metacentrica*. È difficile sfuggire all'imperiosa astrazione del modello matematico! Bisogna ovviamente distinguere l'inclinazione di una posizione della nave dall'inclinazione infinitesimale che serve al ragionamento.

La proprietà fisica (fisica perché si parla di orizzontale, nozione non euclidea) è comunque interpretata geometricamente e il metacentro appare come intersezione di due normali infinitamente vicine alla curva del centro di carena. Dalla pubblicazione dei lavori di Huygens (fine del XVII secolo) sulle curve, si sa dedurre che il metacentro coincide con il centro di curvatura della curva del centro della carena. Questa importante proprietà non è però direttamente sfruttabile per fissare numericamente il metacentro perché è riferita solamente a una sezione mentre si dovrebbe considerare tutto il volume. Chi accetterebbe una stabilità calcolata su una sola sezione trasversale?

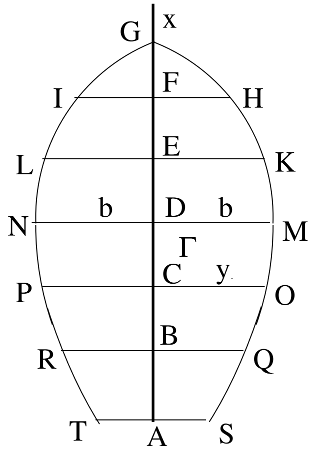


Figura 17. Sezione di una nave su un piano orizzontale per eseguire il calcolo del metacentro. L'origine è nell'intersezione di AG e NM, alla massima larghezza della nave, larghezza indicata con 2b

Conviene quindi operare diversamente: se una sezione non basta, per coinvolgere tutta la nave occorre sommare più sezioni. Per ottenere questa somma, il piano di forme gioca un ruolo centrale. Così, Bouguer adotta un riferimento analitico, con l'asse delle x che rappresenta la chiglia e l'asse delle y la larghezza del ponte. La seconda tappa analitica di Bouguer consiste nel rappresentare una sezione orizzontale del piano di galleggiamento[13]. Come annunciato dalla tesi tolonese del 1699, la geometria analitica cartesiana è entrata nella navigazione.

Una volta preparato lo strumento analitico, occorre conoscere bene ciò che va sommato. La conoscenza della piccola distanza Γ_γ permette di conoscere Γ_g grazie all'angolo di inclinazione, ma Γ_γ è stato calcolato solo per una sezione, anche se è facile dedurlo dalla proporzione:

$$\frac{\Gamma_\gamma}{BFb} = \frac{"12"}{AEB} \qquad (P)$$

Il metodo consiste nell'esprimere successivamente BFb, «12» e AEB[14] come funzioni di x, poi sommare ciascuna funzione secondo l'asse x per ottenere il volume della nave. La sezione trasversale è pensata come una fetta di un certo spessore; la fetta è ordinata dalla variabile x; il differenziale dx interviene come scansione della divisione in fette e permette poi l'integrazione. Il suo ruolo è diverso da quello dell'inclinazione infinitesimale e non esige alcun calcolo di derivate. Terza tappa analitica di Bouguer: visualizzare nello spazio il piano di forme. La designazione BFb, per esempio, è un'area particolare, secondo una determinata sezione, in modo che l'area AEB sia massima. Ma in generale l'area BFb, variabile sul piano di forme, è una funzione di x e per designare quest'area generica della sezione è opportuno notarla con BFb(x), mentre (BFb) indica il volume costituito dall'assemblaggio di tutte le sezioni.

L'integrazione delle funzioni BFb, «12» e AEB dà grandezze analoghe,

13. Sezione di una nave sul piano orizzontale per il calcolo del metacentro. L'origine è l'intersezione di AG e NM, posta nel punto di massima larghezza (questa misura è indicata con 2b).

14. Il significato di queste funzioni verrà spiegato nel seguito.

rappresentabili su una sola sezione, formalmente simile a quella della figura 12. Ultima tappa di Bouguer: su questa sezione interpretata diversamente appaiono infine il centro di gravità G della nave e il metacentro g, obiettivo di tutto il calcolo.

Per calcolare (BFb), un solido non infinitamente piccolo, il ragionamento si basa su funzioni di x, determinate a partire dalla sezione fatta in Aeb, nel punto x corrispondente a y=b. Non è la sezione mediana in senso geometrico, perché lo scafo non è simmetrico in senso longitudinale. Tutte le funzioni si deducono per similitudine; la variabile y determina in ogni caso il rapporto di similitudine. L'altezza del triangolo generale BFb(x) vale

$\frac{e}{b}y$, dove e indica l'altezza infinitamente piccola del triangolo BFb, rettangolo in B. La lettera e sostituisce qui l'inclinazione infinitamente piccola del ragionamento connesso alla figura 12. Il volume elementare del prisma triangolare diventa

$$\frac{e}{2\,b}\,y\cdot y\,dx \quad \text{e quindi} \quad (\mathrm{Bfb}) = \frac{e}{2\,b}\int y^2\,dx$$

In quel tempo non si indicavano i limiti di integrazione in basso e in alto del simbolo di integrale; qui non vi sono difficoltà di comprensione perché si integra da prua a poppa; scegliere un'origine centrale non porterebbe alcun vantaggio.

Il termine («12») della proporzione (P), inteso come risultato dell'integrazione (questo è il significato delle parentesi) esce dall'integrazione di «12»(x), distanza calcolata a partire da («12»). Ma l'integrazione non può essere fatta direttamente perché i punti 1 e 2 sono centri di gravità e la regola di addizione dev'essere quella dei centri di gravità, in altri termini bisogna integrare i momenti. Dividendo la nave in due secondo l'asse longitudinale del piano di galleggiamento, si calcola dapprima 1F(x); si ottiene $\frac{2}{3}y$ perché si considerano solo gli infinitesimi di ordine 1.

L'integrando è un momento, cioè il prodotto di una distanza per un'area:

$$\frac{2}{3}y\,\frac{e}{2\,b}\,y^2$$

In totale si ha l'integrale:

$$\frac{2\,e}{6\,b}\int y^3\,dx$$

Si ottiene poi («12») dividendo per (BFb); infine occorre moltiplicare per 2 perché abbiamo tralasciato la parte destra della nave, che si suppone simmetrica rispetto all'asse trasversale («fianchi sempre uguali», spiega Bouguer)[15].

Risultato:

$$(\text{"12"}) = \frac{4}{3}\,\frac{\int y^3\,dx}{\int y^2\,dx}$$

15. Questi giochi di simmetria sono spesso impiegati per evitare difficoltà dovute ai segni e all'orientamento, in questa geometria che non è interamente analitica. Più avanti, Bouguer apporterà correzioni nei casi di non simmetria.

L'infinitesimo e è ovviamente scomparso. L'ultimo termine della proporzione, il volume della carena (AEB) è indicato con la lettera p e viene chiamato «solidità» della carena.

La distanza Γ_γ inserendo i risultati di tutte le integrazioni nella proporzione (P):

$$\left(\Gamma_\gamma\right) = \frac{2\,e}{3\,b\,p} \int y^3\,dx$$

L'obiettivo è di ottenere Γ_g, questa volta senza parentesi, perché Γ è diventato il centro di gravità della carena immersa (considerata omogenea, o piena d'acqua, secondo il principio di Archimede) e g il metacentro della nave. L'ultimo passo di questo lavoro analitico si compie con la sezione trasversale particolare della nave, passante per il centro di gravità. Spero si capisca quello che avevo annunciato all'inizio della storia, cioè che se la nave ha imbarcato molta matematica, è solo grazie alla versatilità del piano di forme che si sono potuti compiere gli infiniti passaggi da un profilo al successivo.

È sufficiente osservare che il rapporto e/b, che dà l'inclinazione infinitesimale della nave, è uguale al rapporto $\frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma_g}$ perché i lati dei triangoli corrispondenti sono ortogonali.

La distanza tra il centro della carena immersa e il metacentro della nave è:

$$\Gamma_g = \frac{2}{3\,p} \int y^3\,dx$$

Oggi, in fisica e in meccanica, questo integrale si chiama *inerzia I della superficie di galleggiamento*, per sottolineare il suo significato strettamente legato alla nave. Allora la formula che dà il raggio metacentrico diventa:

$$\Gamma_g = \frac{2\,I}{3\,p}$$

Bouguer non aveva dubbi sul significato realistico del suo ragionamento, ma gli premeva di più proseguire esprimendo pure realisticamente il concetto di integrale, fino ad allora pensato come operazione di addizione. Ed è ancora il piano di forme con le sezioni che fornisce l'interpretazione numerica dell'integrale. Dà un calcolo esplicito, secondo le fette nelle quali si è suddiviso lo scafo, con

$y_i = y\left(x_i\right)$ per i=1,2,…,n e inoltre

$h_n = \left(x_1 - x_0\right) = \left(x_2 - x_1\right) = \ldots = \left(x_n - x_{n-1}\right) = \frac{\left(x_n - x_0\right)}{n}$ e n=8,

leggiamo l'espressione dell'integrale secondo la regola dei trapezi:

$$\int_{x_0}^{x_n} y^3\,dx \approx \left[\frac{1}{2}\,y_0^3 + \frac{1}{2}\,y_1^3 + \ldots \frac{1}{2}\,y_n^3\right] h_n$$

ciò che Bouguer dice senza formule algebriche, ma con i dati numerici.

«Se si suppone che la sezione orizzontale della nave fatta a fior d'acqua sia lunga 100 piedi e che le semilarghezze misurate a $12\frac{1}{2}$ *piedi di distanza l'una dal*

l'altra siano, cominciando da prua, di 1 piede, 9, 12, 13$\frac{1}{2}$, *13*$\frac{1}{2}$, *12*$\frac{1}{2}$, *12*$\frac{1}{2}$, *11*$\frac{1}{2}$, *9*$\frac{1}{2}$ *e 7*$\frac{1}{2}$, *si troverà facilmente (...) l'integrale* $\int y^3\,dx$: *perché si avrà 1, 729, 1728, 2460*$\frac{3}{8}$, *2460*$\frac{3}{8}$, *1953*$\frac{1}{8}$, *1520*$\frac{7}{8}$, *857*$\frac{3}{8}$ *e 421*$\frac{7}{8}$ *per i nove cubi* y^3; *e se si sommano questi numeri, prendendo solo la metà del primo e dell'ultimo e moltiplicando poi la somma per* 12$\frac{1}{2}$ *(distanza da una fetta all'altra) si ottiene 149006. Dopo di che non rimane altro che dividere i 2/3 di questo numero per la solidità p della carena e ottenere così l'altezza* Γ_g »

Il raggio metacentrico dipende dunque dalla forma della carena al livello di galleggiamento; questa dipende ovviamente dal peso delle componenti della nave e di tutto il suo carico; il centro di gravità della nave dà una misura particolare di questi pesi. Bouguer mostra che il calcolo del centro di gravità dipende dalle stesse addizioni compiute per ottenere il metacentro e afferma che occorre distinguere accuratamente la composizione dei vari elementi della nave, soprattutto quelli in ferro da quelli in legno. Bouguer ha dato un'unità concettuale alla scienza navale attraverso il suo modo elegante di considerare il calcolo integrale sia come strumento sia come costituente stesso della nave. Per contrasto, faccio seguire un disegno di Leonhard Euler tolto dalla *Scientia navalis* del 1749: vi è raffigurata una sezione trasversale, ma la sagoma della carena può far inorridire qualsiasi marinaio: evidentemente Euler l'ha disegnata così con lo scopo di tenere conto di tutte le asimmetrie possibili e mostrare la potenza dell'analisi matematica, capace di tenere conto di tutto. Bouguer aveva preferito collocare il punto F al centro del suo disegno per esprimere l'uguaglianza dei due triangoli, secondo il principio di Archimede (vedere figura 12).

In seguito, Bouguer passa alla dinamica della nave ed è confrontato con difficili problemi di calcolo concernenti l'azione del vento sulle vele, già diventate gigantesche a quell'epoca, come pure con i problemi di resistenza dell'acqua all'avanzamento della nave e alla deriva (cioè velocità della nave deviata rispetto alla direzione dell'asse longitudinale). Questi problemi saranno risolti con l'avvento della propulsione a motore che permise un confronto fra i due modi di navigare. Ma questa è un'altra storia.

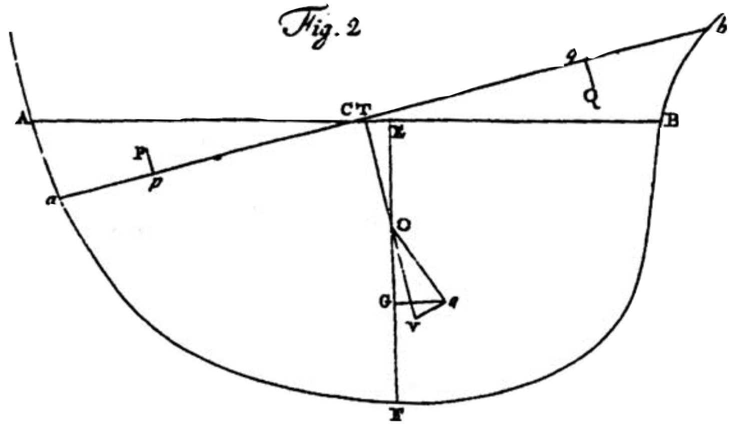


Figura 18. Figura da Scientia navalis di Leonhard Euler (figura 2, tavola XX)

A noi basta osservare che Bouguer, con la coppia, dispone di una dinamica per spiegare il rollio e il suo periodo. Ciò che conta è la distanza Gg (G centro di gravità, g metacentro) dei due punti di applicazione delle forze della coppia (altezza metacentrica); con una semplice equazione differenziale si vedrebbe che il movimento oscillatorio ha un periodo inversamente proporzionale alla radice quadrata dell'altezza metacentrica. Tanto più questa altezza è grande quanto più stabile è la nave e il rollio è veloce: ma in questo caso i marinai si lamentano. La matematica dell'Illuminismo mostra ciò che si può ottimizzare, ma non può ottimizzare tutto.

Bouguer ha dato anche un'interpretazione geometrica della dicotomia stabilità/instabilità, come mostra chiaramente la figura che segue.

Grazie alla sua costruzione teorica, Bouguer arriva presto alla teoria del beccheggio[16]. Basta considerare un altro metacentro, ottenuto mediante le sezioni longitudinali della nave; si completa poi il piano di forme con sezioni longitudinali, sulla falsariga dei disegni portoghesi e inglesi del XVI secolo, con le loro parabole, ma Bouguer dispone di una matematica adeguata. L'insieme di disegni mostrati nell'introduzione, presi dalla traduzione dallo spagnolo dell'opera *Esame Marittimo* di Jorge Juan, pubblicata nel 1771 (traduzione realizzata a Nantes nel 1783 da Pierre Lévêque), riassume una lunga storia e un reale imbarco della matematica sulle navi.

Tre immagini per concludere

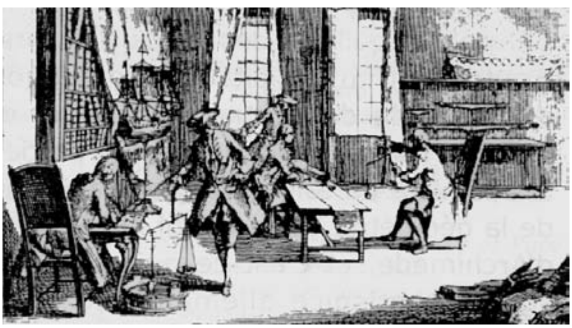


Figura 19.
Nicole Ozanne, atelier di un costruttore di navi

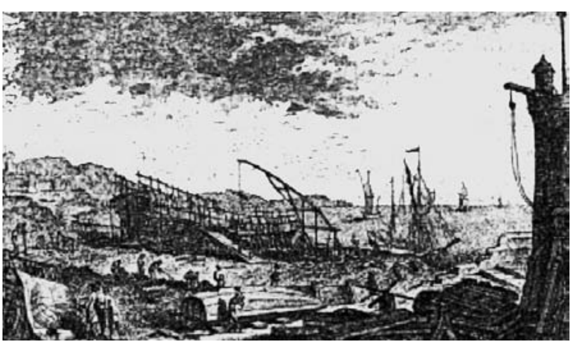


Figura 20.
Un cantiere navale rappresentato nel Traité du navire di Pierre Bouguer, del 1746

16. Serie di oscillazioni ripetute della nave da poppa a prua, o dell'aereo nel verso longitudinale.

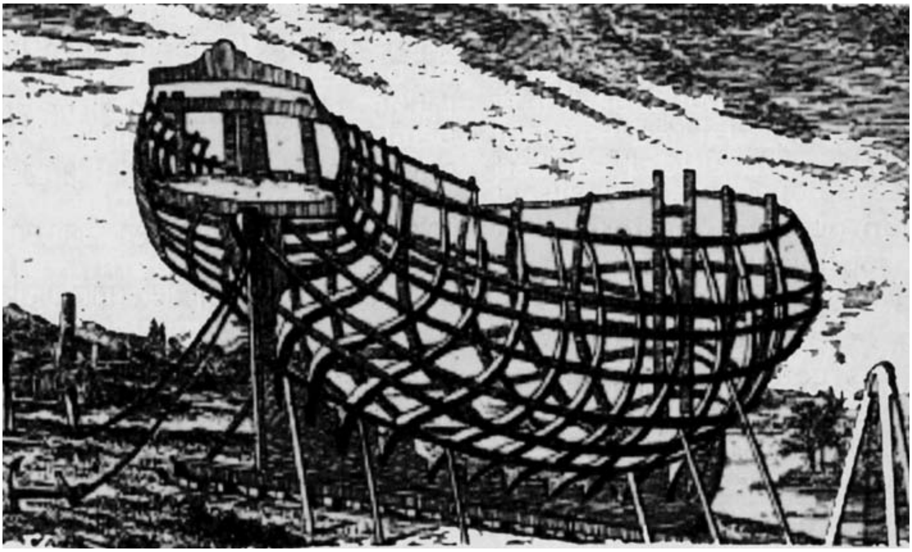


Figura 21. Disegno della carcassa di una nave, presente in parecchi trattati di architettura navale del XVIII secolo

Per concludere, mi appoggio su tre immagini che modificano leggermente ciò che il frontespizio iniziale lasciava credere sull'eredità scientifica di Archimede e il suo ruolo nella teoria della navigazione. L'incisione di Nicole Ozanne utilizzata nel *Traité d'architecture navale* di Duhamel du Monceau – un trattato nelle intenzioni destinato ai costruttori, privo di teorie e in particolare senza contributi matematici – mostra l'atelier di un costruttore di navi della metà del XVIII secolo. L'illustrazione assume un carattere pedagogico e pubblicitario in favore della fisica.

In primo piano, un dimostratore sperimenta la spinta di Archimede e, vicino, un personaggio sembra immerso in calcoli che potrebbero essere quelli di Bouguer che ha trasformato il principio di Archimede in una teoria della stabilità. Un altro personaggio seduto si serve della leva per dare una spiegazione e si può supporre che la lunga pergamena sul tavolo sia un piano di forme. I modelli in legno di navi indicano che il costruttore vende i suoi progetti e quindi esiste una pratica liberale della costruzione navale. I libri nella biblioteca, di grande formato, testimoniano la conoscenza teorica ormai necessaria ai costruttori e garantiscono la scientificità. Tutti i personaggi indossano abiti che esprimono la loro distinzione sociale, giustificata dal loro sapere.

Bouguer stesso mostra un'immagine di un cantiere nel suo *Traité du navire* e distingue nettamente il piano di forme, piano uscito dall'ambiente dei disegnatori. La matematica è raffigurata come ciò che fornisce il linguaggio adeguato alla costruzione navale. I personaggi attorno al grande piano di forme appartengono alla stessa classe sociale dei costruttori raffigurati da Ozanne; simbolicamente non guardano la nave in costruzione, perché il progetto è fedelmente riassunto nel piano di forme e permette la discussione. L'ultima figura riassume l'immaginario di Bouguer, banalizzando l'astrazione del piano delle forme e valorizzando il suo vantaggio; è con un disegno nello spazio che si riesce a vedere l'unione additiva, o integrale, delle coppie: nello stesso tempo una suddivisione in strati e un assemblamento degli stessi.

Questa rappresentazione corrisponde a ciò che spiega un *Dizionario della marina*, e non è quindi necessario precisare il significato dei termini specifici:

«Le coppie formano con la chiglia, i madieri, i paramezzali e gli staminali (elementi longitudinali) lo scheletro o la carcassa di legno della nave; sono per così dire le pareti laterali, ciò che determina la forma della nave; è su questi elementi che si inseriscono poi i sottodormienti (tavole orizzontali), le mastre (che dovevano sostenere gli alberi) e il fasciame (che ricopriva le fiancate in modo impermeabile all'acqua)».

L'effetto banalità non è così frequente nella marina a vele, nella quale per distinguersi si preferisce usare termini che non sono immediatamente comprensibili. In questa rappresentazione, se da un lato la tecnica del disegno è ammirevole e si avvale del gioco delle ombre, dall'altro non si presta per i bisogni del carpentiere, il quale necessita del piano delle forme, sul quale è possibile determinare esattamente il metacentro sia col calcolo che graficamente. Per riuscire in questo intento, Bouguer ha usato almeno tre idee di Archimede: prima di tutto la generalizzazione del suo principio dei corpi galleggianti, poi il concetto archimedeo di centro di gravità e infine l'interpretazione integrale della somma delle varie sezioni trasversali. Il legame tra geometria e calcolo costituisce lo stile di Archimede, ed è quello che abbiamo ammirato sul frontespizio tedesco. Lo stile di Archimede è stato ripreso e migliorato durante l'Illuminismo: *è questa la sua eredità*.

2. Il culto del Cambiamento ovvero i baffi della Gioconda

André Delessert

The author defines as "worship of change" the present widespread mentality, easily detectable in advertising and propaganda. Every day commercial items are thrown on the market as "novelties" and nothing is advertized without being labelled as "new". The media live out of changes, providing novelties themselves. This hammering makes the audience passive and weakens their judgement capacity. The article provides a serious analysis of this phenomenon and aims at drawing the reader's attention on its negative and degenerating consequences.

Per oltre due secoli la nozione di Progresso è stata vista come la vocazione prima dell'umanità. Campeggiava al fianco di altre esigenze come la Giustizia o la Libertà. Ma, mentre si ammetteva che è possibile sottrarsi alla Giustizia o fare qualche concessione alla Libertà, il Progresso era considerato ineluttabile. «Non si va contro il progresso» era diventata una massima.

È difficile capire perché, in certi momenti della Storia, gli uomini di una determinata civiltà sono spinti ad adottare principi così ambigui. Il Progresso può accrescere le possibilità umane sia verso il meglio sia verso il peggio, indifferentemente. Così, l'accumulo dei saper-fare tecnici aumenta nella stessa misura i mezzi di azione dei benefattori come quelli degli individui asociali e parassiti. Ogni pensatore disinteressato dovrebbe prendere in considerazione le due facce del Progresso. Questi, lungi dal cadere in adorazione davanti al falso dio, dovrebbe pensare anche ai procedimenti atti ad arginare le ondate di egoismo e di crudeltà rese possibili da quest'ultimo.

Per molto tempo l'ideologia del Progresso ha ricevuto vigorosi incoraggiamenti. La Scienza, che sembra essere la sola maniera ragionevole per acquisire conoscenze, progredisce necessariamente. La teoria dell'evoluzione biologica mette in scena una Natura progressista che crea in permanenza organismi più complessi più competenti. L'Uomo è considerato, forse provvisoriamente, la tappa più avanzata della progressione. Gli esploratori e i conquistatori hanno confermato l'esistenza di una gerarchia di civiltà, delle quali la nostra, per fortuna, occupa la vetta. Anche nell'arte, i pretesi specialisti danno la palma del migliore a chi ha saputo liberarsi dai condizionamenti che limitavano i suoi predecessori.

Molto presto si sono levate critiche isolate contro la religione del Progresso. Ma è alla svolta delle due Guerre Mondiali che la nozione di Progresso ha cominciato a sollevare perplessità più estese. Le nuove tecniche della guerra e gli omicidi metodici su larga scala hanno attirato l'attenzione sulla faccia nascosta del Progresso. Le rivelazioni tardive sul comportamento umano di regimi che si definivano progressisti, gli orrori perpetrati e tollerati nel nome della superiorità della nostra civiltà hanno accentuato questa disaffezione. Il termine «progresso» appare con frequenza sempre minore nei programmi politici. Conserva però il suo prestigio in certi settori scientifici e in certe rivendicazioni sociali.

Gli slogan atti ad addormentare il senso critico della gente sono simili a quei germi morbidi che, senza nulla perdere in virulenza, assumono costantemente forme imprevedibili. Il dogma del Progresso si è trasformato in dogma del Cambiamento. I fedeli del Progresso ammettono che il mondo è imperfetto ma che, sotto l'azione dell'Uomo, può avvicinarsi indefinitamente a un ideale di perfezione. Gli zelatori del Cambiamento considerano il mondo negativo nella misura in cui esso è stabile e permanente. La loro missione è dunque di perturbarlo, senza dimenticare che un mutamento sarebbe comunque detestabile se conducesse il mondo a un nuovo stato di stabilità. In questa ottica, considerano pericoloso e inutile preoccuparsi delle conseguenze remote dei cambiamenti che preconizzano.

Come ogni ideologia, quella del Cambiamento deve rispondere – almeno apparentemente – alle attese di una massa di individui. Nel caso particolare, questa folla riunisce quelli che sono terrorizzati al pensiero di trovarsi in faccia alla loro inesorabile condizione umana, quelli che vogliono essere distratti in senso pascaliano. Attendono sempre nuove emozioni, nuove trasgressioni. Non trovano in se stessi alcuna ragione d'essere. Solo un cambiamento, che sia doloroso o catastrofico poco importa, può risvegliare la loro sensibilità. Fuori di questo zoccolo duro di adoratori del Cambiamento, numerosi sono quelli che considerano il termine «nuovo» sinonimo di «migliore». Fra tutti gli argomenti pubblicitari, e malgrado lo si usi da molto tempo, quello della novità rimane certamente il più efficace. Ciò vale per parecchi prodotti. Anche se hanno perso da tempo la loro qualità originale, sono presentati con nomi invariati ma muniti periodicamente della menzione «nuovo». Le modifiche apportate dai fabbricanti sono dovute a ragioni soprattutto economiche. Ma la sostituzione è operata all'insegna della novità. Le opinioni, le iniziative di qualsiasi natura sono anche considerate come prodotti. Gli autori si vantano di saperle vendere, di provocare l'adesione del pubblico, sollecitando le sue reazioni più primitive. Ancora una volta è la «novità» apparente che serve da impatto. Tale legge ha venticinque anni: è ora di cambiarla. È costume che ciascuno abbia un padre e una madre. Liberiamoci da questo vecchiume. Non passa giorno senza che esca dalla bocca di un politico una suggestione assurda. I fautori del Cambiamento sono una legione.

Da dove attinge il culto del Cambiamento la seduzione che esercita sui suoi adepti? In gran parte dal fatto che la nostra epoca ha orrore della trascendenza. Questo fenomeno è espresso ammirevolmente dal fisicismo definito da R Ruyer: «*la tesi secondo la quale ogni realtà è fondamentalmente un fatto o un avvenimento fisico localizzato, rappresentato e datato: la tesi che sostiene che nulla può prescindere dall'esistere fisicamente, dall'occupare il suo posto e il suo rango nella tavola con la quale il fisico rappresenta il continuo spazio-tempo, e non può collocarsi al di sopra del mondo degli esseri estesi e presenti*».

L'ideologia del Cambiamento si ispira a questa concezione. Evoca il fatto che «*tutto ciò che ci circonda*» è soggetto a movimento e a trasformazione. Con l'espressione «*tutto ciò che ci circonda*» occorre intendere tutti gli oggetti materiali che i nostri sensi, aiutati da opportuni apparecchi, ci assicurano che evolvono nel tempo.

Osserviamo che la totalità delle cose che ci attorniano non può essere, direttamente o no, osservata dai nostri sensi. Non saprebbe appartenere, come individuo, a tutto ciò che essa stessa costituisce. Le cose che circondano una persona non sono mai tutte identiche a quelle che attorniano un'altra persona. Tuttavia la «*totalità delle cose che ci circondano*» è la stessa per tutti. È una nozione unica, immateriale, accessibile solo al pensiero. Tale condizione non vale solo per il fisicismo, ma per tutte le teorie, per tutte le «dottrine»: un discorso, qualunque sia, acquista senso solo se si fonda su principi trascendenti, fatti immutabili che lo precedono. L'incoerenza propria all'ideologia del Cambiamento sta nel fatto che nega l'esistenza di cose stabili, immutabili. Come il fisicismo, si basa su una contraddizione. Ora, si sa che da una contraddizione si può logicamente dedurre ogni asserzione e il suo contrario. In un simile sistema, la logica è il mezzo più sicuro e più «scientifico» per dimostrare qualsiasi cosa. Il procedimento consistente nell'argomentare dottamente a partire da una contraddizione non è per nulla una rarità. Per esempio, i pensatori scettici assumono un tono che tradisce la propensione ad attribuire ai loro discorsi il peso della verità autentica, quando essi stessi si accaniscono nel professare che tale verità non esiste. Simili «teorie» hanno i mezzi per giustificare le peggiori assurdità sotto la cupola della scienza.

Ogni lingua, che sia retta o no da un'accademia, deve conservare una certa stabilità se vuol essere mezzo di comunicazione efficace fra la gente che la parla. Questa costrizione eccita il demone che alberga nell'intimo degli adepti del Cambiamento. Li spinge a sostituire le espressioni intelligibili con giri di frase fantastici. Ciò li porta a praticare un gergo inconsistente che legittima il loro dogma fondamentale. Questa perversione della lingua invade a poco a poco tutti i loro discorsi. Tale fenomeno esigerebbe uno studio approfondito. Non si tratta qui di denunciare la sana e naturale evoluzione della lingua, l'apparizione di termini nuovi o di nuove accezioni associate a modi di dire tradizionali. I mutamenti del linguaggio diventano perversioni quando i termini del discorso sono scelti deliberatamente in modo da impedire qualsiasi senso. Per spiegare questo punto, confrontiamo due brevi frasi. La prima figura in un romanzo: «*è più di un'ora che stanno avanzando e la foresta si trasforma in ogni istante*»[1]. Anche se presa fuori da ogni contesto – non si sa chi siano i personaggi, né il loro numero, ecc. – la frase ha un senso limitato ma chiaro. La seconda è attribuita a Lacan[2]: «*La struttura è l'asferico nascosto nell'articolazione linguistica fin quando un effetto di soggetto se ne impadronisce*». Questa affermazione non ha alcun senso e non ne può nemmeno ricevere. Figura in mezzo a un vasto gioco di parole su termini matematici che l'autore non conosce o vuole ignorarne il senso.

Il culto del Cambiamento appare come il braccio armato di un vasto movimento destinato a sopprimere i legami fra le cose e fra le parole che dovrebbero permettere di distinguere queste cose. Eliminando ogni riferimento stabile e permanente, lo zelatore del Cambiamento mira a privare ciascuno – lui stesso per primo – degli strumenti di pensiero capaci di esercitare una seria critica in ogni dominio. Questa mutilazione è voluta. Essa autorizza tutte le turpitudini del linguaggio: le menzogne, l'incoerenza verbale, il disprezzo della parola data, l'assenza di significatività e così via. La folla delle vittime di questa logomachia cresce incessantemente e si nutre di una moltitudine di opinioni aberranti.

1. Anne-Lise Thurler, *Lou du fleuve*, romanzo, p. 96. Zoé, Carouge-Genève, 2000.
2. Jacques Lacan, *L'étourdi*, in Silicet no. 4. pp. 5-32. Citato da Alan Sokal e Jean Bricmont, *Imposturtes intellectuelles*, Odile Jacob, Paris, 1997.

La proliferazione di tali discorsi crea assuefazione ai testi privati di qualsiasi legame con la realtà. Il locutore è dispensato dal produrre messaggi coerenti in se stessi e in accordo con l'universo del sapere basato sulla lingua usata. Il recettore, dal canto suo, non deve più fare lo sforzo di confrontare questi messaggi con il proprio mondo di conoscenze. «Il modo di trasmissione del messaggio è il messaggio stesso» dichiarava già MacLuhan che, con questa formulazione illustrava lo stato di depravazione del linguaggio. Giunto a questo stadio, ogni discorso è un sistema chiuso su se stesso, condannato a criticare i propri principi a partire da questi ultimi. Si risolve in puro verbalismo. Perde qualsiasi attitudine a riferire su cose alle quali dovrebbero riferirsi le parole. Per contro acquista una pericolosa efficacia nel mondo delle opinioni e della credulità praticando l'incantesimo, la ripetizione ininterrotta di formulazioni inintelligibili. Redigere un elenco minimamente serio degli ambiti nei quali oggi si ammettono queste elucubrazioni è compito enorme, anche se necessario. Ci limiteremo a una breve carrellata.

La pubblicità e la propaganda ci impongono esempi quotidianamente. Tutte sventolano lo stendardo della novità. Procedono in due tempi. Dapprima denunciano l'attaccamento ai valori che, per decreto, proclamano sorpassati. Ne ridicolizzano la fedeltà. La discrezione è da loro assimilata alla dissimulazione. Tutti i mezzi sono adatti a screditare chi vuole esercitare il proprio senso critico, le proprie capacità di giudizio e chi resiste alle pressioni della moda. Poi si accaniscono nel disorientare il proprio pubblico. I loro discorsi mirano a sconcertare l'uditore o il lettore per mezzo di neologismi nebulosi, di abbreviazioni ambigue, di sigle indecifrabili, di termini rubati a lingue straniere e di espressioni private di senso. Ricorrono volentieri alla logica, della quale si conosce l'efficacia in un sistema inconsistente e non esitano a servirsi della scienza. La fabbricazione e la vendita di un nuovo prodotto provoca l'apparizione di due schieramenti: da un lato quelli che vi hanno interesse – generalmente economico –, dall'altro quelli che si considerano lesi, talvolta pure economicamente. Ciascun gruppo chiede un rapporto scientifico sulla nocività eventuale del prodotto considerato. I rapporti giungono quasi sempre a conclusioni incompatibili. Almeno uno dei due è menzognero. Succede anche che taluni propagandisti affermino in modo altisonante che tale fatto o tal altro siano scientificamente dimostrati, anche quando nessuna scienza può esaminare il fatto stesso.

I media vivono del Cambiamento: ci forniscono *novità*. Sono in agguato di avvenimenti interessanti, non tanto per la loro importanza o per il loro significato, quanto per il loro carattere emozionale, inatteso, violento, traumatico. Le diffondono nella fretta di essere i primi, senza dubbio, ma soprattutto con l'intenzione di sconvolgere il pubblico con l'imprecisione delle loro informazioni: «*… ma non si esclude l'ipotesi di un atto criminale*». Il gusto dello scandalo, che porta del nuovo nel tran tran della vita quotidiana, spinge il lettore o l'uditore a ipotizzare le supposizioni più assurde. Questi ultimi sono pronti ad appassionarsi ai risvolti e alle pieghe superficiali di un affare il cui fondo rimarrà loro nascosto. A partire da questa curiosità irresistibile basata su una massa di informazioni debole e lacunosa, ai media non resta che aprire il portello dei commenti a loro volta instancabilmente commentati. Danno la parola a «specialisti», a «esperti» e dirigono i «dibattiti». Contrariamente al simposio che riunisce persone ragionevolmente qualificate, in quel dibattito si dà la parola, in nome dell'equità, a persone posizionate su tutti i gradi dell'ignoranza. Può essere detto tutto e il contrario di tutto. È la sede più adatta al proliferare dei discorsi più vuoti. E, siccome è la funzione che crea lo strumento, ben presto si vedono infierire personaggi specializzati in questa logorrea. Prendono il posto della gente di mestiere, dei sapienti, di quelli che hanno acquisito le loro competenze al di là delle parole. I media si contendono questi tuttologi pronti a parlare di qualsiasi cosa.

Il culto del Cambiamento ha provocato disastri anche nell'arte. Ogni artista degno di questo nome, che si tratti di Vivaldi o di Cézanne, o di uno scultore anonimo, introduce nel suo ambito qualcosa di nuovo. Ma l'origine della novità consiste nel fatto che il suo estro creativo non è paragonabile a quello di altri. L'artista è cosciente di camminare su sentieri che nessuno ha percorso prima di lui. Ma non produce roba inedita solo per il gusto di cambiare. Egli ubbidisce, non senza sofferenza, a ingiunzioni impostegli dal profondo dell'essere dell'oggetto che sta facendo nascere. Per contro, non pochi artisti auto-proclamati, adulati da una critica complice, sono spinti dal solo desiderio di realizzare qualcosa che non è mai stato fatto prima. Ma, per poter raggiungere la grande notorietà, le novità che propongono questi artisti devono essere immediatamente percepite anche dall'ultimo dei profani. Ed ecco che l'universo delle fantasie demenziali si offre loro. Il prototipo di questi capricci derisori è rappresentato dai baffi della Gioconda. Qualcuno raggiunge la gloria per essere stato il primo a incorporare vera spazzatura nella sua pittura. Qualcun altro rivoluziona la scultura spargendo su un prato i fogli strappati di un elenco telefonico. Nel teatro e nel cinema poi sono rare le opere degne di essere considerate creative. Una farsa medievale viene adattata a tragedia truculenta. Un dialogo di Platone diventa un balletto per solista. Il Crepuscolo degli Dei si svolge in un bar equivoco. Lo spettatore pecorone esulta: quello che non riesce a capire in queste contraffazioni lo consola per quello che non ha mai capito nelle opere originali. La vuotezza di queste produzioni è sottolineata dalla presenza obbligata di commenti esplicativi. L'autore stesso o uno dei suoi complici abile a manipolare il gergo pseudo-lacaniano si sforza di allontanare gli spiriti critici che avvertono il vuoto di tutto ciò.

La creazione artistica è un parto doloroso che parte dall'intimo dell'artista. Quando la si sostituisce con una semplice ricerca dell'inatteso, si mette l'arte alla portata della gente senza alcuna sensibilità, emozione e pensiero. L'acquisizione dei saper-fare, della padronanza di certi strumenti e di certi materiali diventa inutile. Esistono artisti pittori che si vantano di non aver mai imparato né a disegnare né a dipingere. Chiunque può proporsi artista e, apparentemente, lo fa. La vera arte vive in sordina, in disparte. L'arte nel senso volgare non è che un sistema complesso di mode. È accompagnata da un gigantesco traffico di merci artistiche, di un mercato che ha finito per infettare l'arte autentica.

Nel mondo dell'arte degenerata dall'ideologia del cambiamento, si può osservare un fenomeno curioso. I critici d'arte, tutti quelli che si fregiano di *specialisti* del mondo dell'arte, difendono due tesi incompatibili. Da una parte, essi insorgono contro la concezione di un'arte elitaria che sarebbe apprezzata solo da una minoranza di conoscitori. L'arte, dicono questi, è fatta per tutti. Ognuno deve potere accedervi. D'altra parte, in qualità di *esperti* nel mercato dell'arte, si arrogano il diritto di giudicare e distinguere tra ciò che è e ciò che non è arte. Questa contraddizione, generatrice di tutte le banalità, non li disturba affatto. Al contrario, li autorizza nel loro ambito a fare i discorsi più deliranti. Un campo illimitato si offre alla loro logomachia.

Questa aberrazione non si limita ai discorsi sull'arte: si manifesta ogni volta che un'attività richiede un'iniziazione o un apprendistato. Un tempo, per problemi di falegnameria, ci si rivolgeva al falegname. Gli si riconoscevano le «regole dell'arte». Lo stesso si poteva dire per il maestro di scuola o per la sarta, per quel che concerneva le rispettive specificità. Si riconosceva loro una specifica competenza, cioè un'attitudine a risolvere autonomamente problemi non abituali. Ma le «regole dell'arte» presuppongono qualche principio stabile, che gli amanti del cambiamento non gradiscono. Si assiste allora a un rivolgimento. Prima la competenza di un personaggio in una data attività era il risultato della presa di coscienza delle sue facoltà latenti. Oggi si tende a radicare la competenza verso l'esterno. Siamo nell'età dell'accesso a masse quasi illimitate di informazioni. Il talento non è più una capacità personale. Si identifica con la possibilità di agganciarsi a una base di dati. In questo modo, il primo venuto può dichiararsi competente nell'insegnamento, in dietetica o in strategia sportiva. La scuola favorisce questo rivolgimento. Ripete incessantemente che la sua missione è trasmettere conoscenze. Ora, dovrebbe prima di tutto svegliare in ogni allievo le facoltà assopite delle quali non suppone nemmeno l'esistenza. Al contrario, abbandona la maieutica per la scatola delle connessioni. Agisce nel senso dell'ideologia del Cambiamento. Abbasso il greco. Basta col latino. Inutile leggere Montaigne o Pascal: la prosa spontanea dei bambini vale tutte le altre, perché non segue regole. Rinunciamo a curare l'ortografia: esiste un comando di correzione sui computer. Sopprimiamo l'aritmetica che famigliarizza gli allievi con l'idea sottile di numero: provvede la calcolatrice. Alcuni pedagogisti sostengono che barare in classe può essere un buon metodo per apprendere. Pretendono di obbligare gli allievi a barare. Qui si tocca la più pura assurdità. Qualsiasi buon metodo di apprendimento non può essere una truffa. Dunque «truffa» uguale «non truffa».

Quest'ultimo esempio riporta a galla il denominatore comune alle aberrazioni evocate a proposito della pubblicità, della propaganda, dell'arte, dei mestieri o della scuola. La preferenza sistematica data al cambiamento genera uno spirito truffaldino. Di fronte a una situazione delicata sono possibili due atteggiamenti. Il primo tende a esaminare le cause, le circostanze del problema e gli effetti prevedibili di una decisione, allo scopo di potersi assumere la responsabilità. Il secondo atteggiamento consiste nel cambiare la questione. Il nostro tempo sembra segnato dall'abitudine di rifiutare sistematicamente l'ostacolo. Possiamo osservarla nella vita di tutti i giorni, a scala ridotta, a tutte le età. Ma può anche manifestarsi in grande. Così, nel corso degli anni 1960-1970, milioni di persone si sono riunite in luoghi diversi, con l'intenzione di «*cambiare l'uomo*», di «*cambiare il mondo*». Le denuncie di certi disordini contemporanei erano generalmente pertinenti. Ma ne dimenticavano una. Non avevano voluto vedere che la riunione di milioni di persone per alcuni giorni in un dato luogo era comunque qualcosa che si trascinava nel mondo. Avendo ben presto constatato la loro impotenza nel risolvere il problema, queste persone hanno barato. Sono evase verso mondi fittizi. Prima di tutto verso quelli della droga e dell'alcol. Poi verso ciò che si è chiamato, con un'ammirevole sincerità assurda, la *realtà virtuale*.

La fortuna avuta da questa espressione mostra che il fascino del Cambiamento è giunto a un apogeo. Il programma consistente nel sostituire le cose reali con parole senza alcun nesso reale segna uno stadio insuperabile nella decadenza della vita intellettuale. Solo uno spirito sempre sveglio e un attaccamento costante all'azione del pensiero permettono di sfuggire al contagio. È chiedere troppo al primo venuto. E tuttavia constatiamo che il male lo ha raggiunto se prima di tutto è sensibile alla moda, alla pubblicità di ogni genere e se rimane affascinato dagli abili parlatori. È spesso ingenuo, molto lontano dal sospettare di essere stato rapinato della sua libertà intellettuale.

L'ampiezza dei movimenti che mirano a cambiare il mondo è sorprendente. Finora abbiamo elencato solo danni provocati da singoli individui o da gruppi abbastanza chiusi. Il loro nocumento è dovuto più all'aumento del loro numero che non alla loro associazione o alla loro connivenza. Le grandi masse psichedeliche suggeriscono di risalire alla dottrina stessa del Cambiamento. Sappiamo che si inscrivono nel quadro delle teorie materialiste. Assume un'attitudine potenziale a produrre futilità. Ma le teorie materialiste, come buona parte delle scienze naturali per esempio, non cadono nell'incoerenza nella misura in cui evitano di uscire dal dominio che si sono date. Che ne è della dottrina del Cambiamento?

Il passaggio dalla nozione concreta di cambiamento all'idea assoluta di Cambiamento solleva una difficoltà. Quando il signor X provoca un incidente d'auto, introduce manifestamente un cambiamento nella vita di alcune persone. Ma, bene o male, esiste un gran numero di simili avvenimenti. Il caso del signor X non modifica il mondo. In generale, le conseguenze di un atto puntuale sono osservabili solo in un intorno limitato e durante un tempo finito, ambito nel quale si possono fare previsioni. Per contro, quando l'azione progettata è ambiziosa, l'anticipazione è impossibile. In altre parole, si perde il potere di affermare che questa azione è la causa di un avvenimento lontano nel tempo e nello spazio.

I teorici del cambiamento hanno progetti ambiziosi. Non disprezzano i piccoli cambiamenti causati da dilettanti. Ma si propongono di modificare le regole sociali o morali fortemente radicate nella storia dei gruppi sociali. Dicono di volere «*cambiare le mentalità*». Di più: vogliono impedire che il mondo si installi in un'evoluzione stabile, per esempio simile a quella della rivoluzione dei pianeti, tale che in ogni istante sia possibile prevedere il prossimo stato del sistema. Il loro obiettivo è sicuramente di «*cambiare il mondo*». Ma l'espressione «*cambiare il mondo*» – o qualsiasi altra maniera di dire la stessa cosa – non ha senso. Avrebbe senso solo se fosse possibile osservare contemporaneamente due mondi. Il primo seguirebbe la sua evoluzione naturale. Il secondo evolverebbe come il primo fino al momento in cui la sua traiettoria subirebbe una perturbazione manifesta rispetto al primo mondo, sotto l'effetto di una determinata azione umana. Ma la nozione di «*mondo*», come totalità delle cose che esistono, esclude una tale possibilità. Più semplicemente, non è dato all'uomo di sapere che cosa avverrebbe se un dato fatto reale non si producesse. È una condizione primitiva che la saggezza ci impone di ammettere.

I teorici del Cambiamento non l'accettano. Si arrogano il potere insensato e quasi diabolico di conoscere lo sviluppo di due mondi, il mondo reale e quello fittizio della loro fantasia. Se introducono un cambiamento, pretendono di conoscere che cosa sarebbe successo se non l'avessero fatto. Se rinunciano a provocare un Cambiamento, si credono capaci di sapere che cosa sarebbe successo se l'avessero provocato. Questa disposizione di spirito nell'operare indifferentemente in due mondi incompatibili e di tentare azioni impossibili non può che produrre discorsi stravaganti.

Si constata che l'assurdità concernente le azioni dei semplici praticanti del cambiamento appartiene già propriamente alla dottrina. Il culto del Cambiamento, preso in tutti i suoi aspetti, possiede un enorme potere di distruzione e di demoralizzazione. Abbiamo visto in precedenza alcuni esempi particolari. Ma se ci si dà la pena di leggere i testi pubblicitari, di seguire i dibattiti televisivi, di leggere i giornali, si capisce che le persone preoccupate, distratte da problemi privati, sono ingozzate a loro insaputa da menzogne e da favole assurde. A poco a poco la loro vita personale si adatta a questo caos verbale, perde l'istinto di preservare una certa coerenza di comportamento. La loro personalità si scompone in altrettanti fantocci necessari per seguire le mode del momento. Finiscono per riunirsi tutte senza conoscersi. Tutto accade come se forze senza discernimento e senza nome avessero ricevuto la missione di ridurre l'uomo al rango di termite. Forse sarà questa l'ultima destinazione dell'umanità e che oggi si sta compiendo un grande processo in questo senso. Bisognerebbe allora constatare che il culto del Cambiamento sta riuscendo brillantemente laddove l'ideologia del Progresso aveva pietosamente fallito.

3. I tre famosi paradossi elettorali

Giorgio Mainini

This paper relates to the article published in the issue no. 45 of this journal under the title "Matematica elettorale". It shows the pathological features of the electoral systems. The conclusion already asserted in the previous paper – i.e. that there is no perfect electoral system – gets here further support. It is essential that people are aware of this, also because, since electoral laws have first been devised, those who hold the political power have always made sure to choose the procedures which would favour them.

Consideriamo da vicino il metodo dei maggiori resti «puro», cioè senza «barrage» o altre limitazioni, quoziente Hare[1].

Apparentemente è quanto di più equo si possa immaginare.

Difatti, chiamando

— c il *contingente*, cioè il numero di seggi che *teoricamente* (cioè non tenendo conto del fatto che deve essere intero) spetterebbe ad ogni partito,
— S il numero totale dei seggi da attribuire,
— S_{k1} il numero di seggi che saranno attribuiti al partito P_k alla prima distribuzione,
— S_k il numero totale di seggi che saranno attribuiti al partito P_k,
— V_k il numero di voti ottenuti dal partito P_k,
— V il numero totale dei voti ottenuti da tutti i partiti,
— q il quoziente Hare, per definizione uguale a $\frac{V}{S}$,

se si desidera che il numero di seggi da assegnare ad ogni partito sia esattamente proporzionale al numero dei voti ottenuti da quel partito, si ha:

$$\frac{c}{S} = \frac{V_k}{V}$$

da cui

$$c = \frac{S \cdot V_k}{V} = \frac{S}{V} \cdot V_k = \frac{1}{q} \cdot V_k = \frac{V_k}{q}$$

Poiché, con il metodo Hare, si ha

$$S_{k1} = \mathrm{INT}\left(\frac{V_k}{q}\right) = \mathrm{INT}(c)$$

si vede che la differenza massima tra S_k e c è al massimo 1. Difatti, o S_k=S_{k1} o S_k=S_{k1}+1, nel caso che il partito P_k abbia uno dei maggiori resti.

1. V. Giorgio Mainini, *Matematica elettorale*, sul BDM numero 45.

Bene, se non che… … se non che il metodo è inficiato dai tre più famosi paradossi elettorali[2].

Paradosso demografico

Supponiamo che tre partiti ottengano i voti e i seggi indicati nella tabella che segue (S=21):

P_k	V_k	S_{k1}	R_k	S_{k2}	S_k
P_1	67000	13	2000		**13**
P_2	20000	4	0		**4**
P_3	18000	3	3000	1	**4**
V	105000				
q	5000				

Supponiamo ora che, alla votazione successiva, P_1 perda 100 voti, P_2 ne guadagni 1300 e P_3 ne perda 1200.

Si ha allora

P_k	V_k	S_{k1}	R_k	S_{k2}	S_k
P_1	66900	13	1900	1	**14**
P_2	21300	4	1300		**4**
P_3	16800	3	1800		**3**
V	105000				
q	5000				

Cioè: P_1, pur avendo perduto voti, guadagna un seggio!

Paradosso dell'Alabama[3]

P_k	V_k	S_{k1}	R_k	S_{k2}	S_k
P_1	140000		140000	1	**1**
P_2	400000	1	66667		**1**
P_3	460000	1	126667		**1**
V	1000000				
q	333333				

I politici locali, però, non sono soddisfatti: la sproporzione è palese. Allora decidono di aumentare di 1 il numero dei seggi, portandolo a 4.

2. Per quanto segue ho fatto capo a Jean-Louis Boursin, *Les dés et les urnes*, Éditions du Seuil, 1990
3. Così detto perché, sulla base di studi effettuati dall'Ufficio del censimento statunitense dopo il censimento del 1880, si scoprì che se i seggi al Congresso fossero stati 299, l'Alabama ne avrebbe ottenuti 8, ma che, se fossero stati 300, ne avrebbe ottenuti 7.

Si ha allora:

P_k	V_k	S_{k1}	R_k	S_{k2}	S_k
P_1	140000		140000		
P_2	400000	1	150000	1	**2**
P_3	460000	1	210000	1	**2**
V	1000000				
q	250000				

Cioè, pur rimanendo invariati i voti, ed essendoci inoltre a disposizione un seggio in più, P_1 perde un seggio!

Nel caso specifico dell'Alabama, la tabella calcolata dall'Ufficio del censimento era la seguente:

Stato	**c, se S=299**	**maggior frazione**	**c, se S=300**	**maggior frazione**	**Δc**
Alabama	7,646	0,646	7,671	0,671	0,025
Texas	9,640	0,640	9,672	0,672	0,032
Illinois	18,640	0,640	18,702	0,702	0,062

Ancor più curioso è il caso del Maine: secondo i dati del censimento del 1900, si è potuta stilare la seguente tabella:

Seggi al Congresso	**Seggi per il Maine**
350 - 382	3
383 – 385	4
386	3
387 - 388	4
389 – 390	3
391 - 400	4

Paradosso del nuovo Stato

Nel 1907 l'Oklahoma entrò a far parte, come nuovo Stato, degli Stati Uniti.

All'epoca, il Congresso contava 386 deputati per una popolazione di 74 562 608 membri.

Al nuovo Stato, che contava circa 1 000 000 di abitanti, furono assegnati 5 nuovi seggi, portando dunque i membri del Congresso a 391.

Ed ecco che cosa si venne a trovare:

P_k	$S_k(386)$	$S_k(391)$
Oklahoma	-	5
Maine	**3**	**4**
New York	**38**	**37**
Altri	345	345
S	386	391

Cioè: la semplice entrata di un nuovo Stato, con aumento proporzionale del totale dei seggi, ha fatto perdere un seggio a New York e ne ha fatto guadagnare uno al Maine!

A questo punto, rileggersi (e ripensare?) le modalità di assegnazione dei seggi in Ticino è più che opportuno!

4. Cantor, l'Infinito e l'Ipotesi del Continuo

Stefano Leonesi[1]

In the morning of August 8th, 1900, at the Second International Convention of Mathematicians held in Paris, in the opening lecture David Hilbert set 10 of the 23 problems which were then still unsolved and by him regarded as the basic challenges of mathematics for the 20th century. The first of these problems concerned the so-called Continuum Hypothesis, enunciated by the German mathematician Georg Cantor in 1877. First the article retraces the journey that led Cantor to propose the mentioned hypothesis. Then it displays the after-Cantor unfolding, making it an enjoyable to read, synthetic description.

Premessa

La mattina dell'8 agosto del 1900 al Secondo Congresso Internazionale dei Matematici svoltosi a Parigi, David Hilbert, forse il più eminente matematico dell'epoca, nella conferenza introduttiva propose 10 dei 23 problemi (allora non risolti) che egli considerava come le sfide fondamentali della matematica per il XX secolo. Il primo di questi problemi riguardava la cosiddetta *Ipotesi del Continuo*, formulata dal matematico tedesco Georg Cantor nel 1877. Dapprima ripercorriamo brevemente i tratti salienti che hanno portato Cantor a proporre la suddetta ipotesi.

Le origini dell'Ipotesi del continuo

Cantor, prendendo spunto da alcuni insiemi «patologici» incontrati nello studio delle serie trigonometriche, punta ad estendere agli insiemi infiniti il concetto di numero di elementi e di misura di grandezza. Secondo Cantor due insiemi A e B (finiti o infiniti) si dicono *equipotenti*, e si scrive $A \sim B$, se esiste una corrispondenza biunivoca tra A e B. Si verifica facilmente che l'equipotenza è una relazione di equivalenza e pertanto è sensato definire la cardinalità di un insieme A, e si scrive $|A|$, come la classe di equivalenza di A rispetto a $\sim$. Naturalmente la cardinalità di un insieme finito coincide con il numero dei suoi elementi, ma la novità è che tale nozione sostituisce il concetto di numero degli elementi per insiemi infiniti. Manipolando gli insiemi con un numero infinito di elementi emergono risultati sorprendenti o quanto meno inattesi; ad esempio è possibile porre in corrispondenza biunivoca un insieme infinito con un suo sottoinsieme proprio (ed invero questa è una caratteristica esclusiva degli insiemi infiniti, tanto che può essere adottata come loro definizione), si pensi ai naturali con i numeri pari, ai

1. Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Camerino.
email: stefano.leonesi@unicam.it

punti del lato di un quadrato con i punti della superficie del quadrato stesso ecc. Gli insiemi che possono essere posti in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali vengono detti *numerabili*.

La grande scoperta di Cantor fu quella di dimostrare che non tutti gli insiemi infiniti hanno la stessa cardinalità. Inizialmente egli provò, tramite il suo famoso metodo diagonale, la non equipotenza tra i numeri naturali ed i punti dell'intervallo reale [0,1] e di conseguenza l'impossibilità di porre in corrispondenza biunivoca i numeri naturali ed i numeri reali. Ciò sanciva l'esistenza di almeno due gradazioni di infinito, ossia di due differenti cardinalità transfinite: quella dei numeri naturali, detta *cardinalità del numerabile*, indicata da Cantor con $\aleph_0$ (si legge *aleph*, la prima lettera dell'alfabeto ebraico) e quella dei numeri reali, denominata *cardinalità* o *potenza del continuo* (spesso indicata con la lettera ***c*** gotica minuscola, pensando al continuo reale cioè ai numeri reali come coordinate dei punti sulla retta). Ma in realtà questa era solo la punta dell'iceberg; infatti di lì a poco Cantor provò l'esistenza di una intera gerarchia infinita di insiemi infiniti. Il risultato centrale in questo ambito fu il seguente:

Teorema

Dato un insieme *A* (finito o infinito), si ha che|A|<|P(A); dove con P(A) indichiamo l'insieme dei sottoinsiemi di *A* (*insieme potenza*).

L'applicazione iterata del teorema precedente permette la creazione di insiemi con cardinalità sempre strettamente maggiori di quella dell'insieme di partenza:

$$|A| < |P(A)| < |P(P(A))| < |P(P(P(A)))| < \ldots$$

Assumendo la presenza di almeno un insieme infinito, ne scaturisce l'esistenza di un numero infinito di cardinali transfiniti sempre più grandi. Si erano così dischiusi gli occhi su un nuovo mondo fino ad allora inesplorato ed in cui sorgeva naturale l'esigenza di assegnare dei nomi anche ai nuovi numeri, i numeri cardinali, che oramai avevano assunto la medesima dignità dell'1, del 2 o di qualsiasi altro. La scelta di Cantor ricadde sulla serie infinita

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots \text{ con } \aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \ldots$$

Ne derivava una aritmetica cardinale con proprietà talmente sorprendenti e, per certi versi, controintuitive; ad esempio

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0 \quad , \quad \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \quad , \quad \aleph_0 + \aleph_1 = \aleph_1 \quad , \quad \aleph_0 \times \aleph_2 = \aleph_2$$

Era giunto il momento perché a Cantor si presentasse il problema di capire se la cardinalità ***c*** dei numeri reali fosse uguale a $\aleph_1$, ovvero al livello di infinito immediatamente superiore a $\aleph_0$ oppure no. In altri termini, si trattava di dimostrare o confutare l'esistenza di insiemi *X* tali che $\aleph_0 < |X| < \mathbf{c}$. Cantor tentò ripetutamente di determinare un tale insieme, ma nonostante gli sforzi non riuscì nel suo intento. Ciò lo indusse a supporre che un tale insieme in verità non esistesse affatto. Questa sua congettura prese il nome di *Ipotesi del continuo* (*CH* =

continuum hypothesis) ed il problema della sua dimostrazione o confutazione si collocò al primo posto nella celebre lista di Hilbert.

In effetti, le velleità di Cantor e di altri matematici del periodo dovevano scontrarsi ineluttabilmente con l'approccio intuitivo con cui ci si accostava alla teoria degli insiemi; occorrevano nuovi principi e nuovi strumenti per manipolare gli insiemi infiniti, unitamente ad un maggior rigore metodologico per evitare i paradossi che in quegli anni sorgevano numerosi, come il *Paradosso di Russel*, quello della *classe totale* o altri analoghi. I tempi sembravano maturi per lo sviluppo della logica matematica, per precisare i concetti di teoria assiomatica, di dimostrazione, di coerenza e completezza di una teoria.

Il nuovo approccio

Non vi era altra strada da seguire se non quella già percorsa da Euclide per la geometria più di due millenni prima e cioè porre delle fondamenta più solide e rigorose alla teoria degli insiemi attraverso l'assiomatizzazione della teoria stessa. La matematica, ed in particolare la teoria degli insiemi, doveva basarsi su «poche» verità indimostrabili, dette *assiomi*, dalle quali derivare delle *dimostrazioni* attraverso regole di inferenza stabilite a priori. I *teoremi* non sarebbero stati altro che le ultime righe (gli ultimi passi) delle dimostrazioni. Tutto ciò rientrava nel cosiddetto *Programma di Hilbert*. La visione di Hilbert si differenziava sostanzialmente da quella di Euclide; infatti, mentre per il primo era basilare il ricorso all'intuizione per la scelta degli assiomi e per la determinazione dei teoremi, per Hilbert la norma da seguire per la scelta del sistema di assiomi doveva essere la ricerca non tanto dell'evidenza, quanto della sua coerenza, ovvero della certezza che da esso non si sarebbero potute dimostrare delle contraddizioni e assurdità. La completezza era l'altra caratteristica fondamentale che la teoria doveva possedere; ricordiamo che una teoria è completa quando per ogni proposizione, partendo dagli assiomi, è possibile dimostrare, o la proposizione stessa, o la sua negazione.

Fu il matematico tedesco Ernst Zermelo a proporre nel 1908 (vedi [12]) un sistema di assiomi per la teoria degli insiemi che garantisse la non contraddittorietà della teoria stessa. Egli mostrò che i suoi assiomi permettevano la definizione dei principali concetti matematici. Il sistema di Zermelo conserva il *Principio di estensionalità* di Frege, secondo cui due insiemi con gli stessi elementi sono uguali, e indebolisce il *Principio di astrazione* (o *di comprensione*) che, proprio per la libertà che consente nel definire insiemi a partire da qualunque proprietà, era all'origine del Paradosso di Russel e di altri. Tale assioma venne sostituito dal cosiddetto *Assioma di isolamento* che permette la costruzione di insiemi di elementi soddisfacenti, sì, una determinata proprietà, ma solo a partire da insiemi già preesistenti:

Per ogni proprietà P(x) e per ogni insieme fissato a esiste l'insieme $\{x : (x \in a) \wedge P(x)\}$

Zermelo aggiunse poi altri assiomi che garantiscono l'esistenza di determinati insiemi, come l'insieme vuoto ed un insieme infinito, e permettono basilari costruzioni di insiemi quali l'insieme potenza, l'insieme unione ecc. Invero, nell'assiomatizzazione originale di Zermelo compare anche una formulazione equivalente dell'*Assioma della scelta* (detta impropriamente *«Teorema» di Zermelo*) che garantisce la possibilità di bene ordinare qualsiasi insieme non vuoto. Successivamente, Abraham Fraenkel [4], coadiuvato da Von Neumann e Skolem, presentò una riformulazione del sistema di assiomi di Zermelo, attualmente denominata *ZF*, basata su un linguaggio logico formale più rigoroso, con lo scopo di eliminare le ambiguità proprie del linguaggio più «informale» usato da Zermelo. Inoltre dal sistema vennero eliminate alcune ridondanze, imprecisioni ed anche l'assioma della scelta a causa della sua non riconosciuta ovvietà.

In seguito comparvero anche altri sistemi di assiomi per la teoria degli insiemi, come i *Principia-Mathematica* di Russel e Whithead, fondato sulla Teoria dei Tipi, oppure la Teoria delle Classi di Von Neumann, o il sistema *NGB* (Neumann, Bernays e Gödel) o più recentemente i sistemi di Quine o quelli di Lawvere basati sul concetto di categoria. Tuttavia, gradualmente il sistema *ZF* è stato preferito dalla maggior parte dei matematici perché ritenuto più agevole ed intuitivo per fare matematica e quindi una buona base per la teoria degli insiemi. C'è da sottolineare il fatto che Zermelo non riuscì mai a dimostrare la non contraddittorietà del suo sistema di assiomi ed in realtà a tutt'oggi, grazie al *Secondo Teorema di Incompletezza* di Gödel (1931), sappiamo che non può esistere una prova assoluta della coerenza di una qualunque teoria abbastanza espressiva da provare i teoremi dell'aritmetica elementare (è sufficiente che provi gli assiomi di Peano), prova ottenuta all'interno (come teorema) della teoria stessa; in altre parole è impossibile per *ZF* una «autocertificazione» di coerenza secondo la concezione tanto agognata da Hilbert nel suo famoso Programma; pertanto non resta altro che fare un atto di fede al riguardo e comunque sino ad ora da *ZF* non è stata dedotta alcuna contraddizione.

I teoremi di Gödel e la svolta di Cohen

Abbiamo appena parlato del *Secondo Teorema di Incompletezza* di Gödel, ma l'anno precedente, nel 1930, Gödel aveva pubblicato il *Primo Teorema di Incompletezza,* il quale asserisce che dato un qualunque sistema formale con un insieme di assiomi S *decidibile* (cioè tale che esiste un algoritmo effettivo che per ogni enunciato α, dopo un numero finito di passi dica se α è provabile da S oppure se $\neg\alpha$ è provabile da S), coerente e che includa l'aritmetica di Peano, allora l'insieme *T* dei teoremi che si dimostrano a partire da S non è completo, ovvero esiste almeno un enunciato α tale che $\alpha \notin \mathrm{T}$ e $\neg\alpha \notin \mathrm{T}$, quindi α risulta indecidibile all'interno della teoria *T* non potendo essere né dimostrato né confutato.

A seguito dei teoremi di Gödel si rinunciò a perseguire prove di coerenza assoluta per passare a quelle di coerenza di un sistema formale relativamente ad altri. E finalmente arriviamo al 1938, anno in cui lo stesso Gödel dimostra che *se ZF è coerente allora anche* $ZF \cup \{CH\}$ *lo è,* ovvero che se da $\mathrm{ZF} \cup \{\mathrm{CH}\}$ si possono dedurre delle contraddizioni allora queste devono essere già nascoste in *ZF*. In particolare si dimostra che da *ZF* non è possibile derivare la negazione dell'Ipotesi del continuo e cioè che l'insieme dei numeri reali non ha cardinalità $\aleph_1$.

Si noti che il problema del continuo era stato risolto solo parzialmente, nel senso che Gödel non aveva provato *CH*, ma solo che non poteva essere dimostrata la sua negazione. Comunque, a seguito di tale risultato molti erano i matematici convinti, o almeno speranzosi, che la soluzione completa del problema del continuo, in accordo con la congettura di Cantor, fosse solo una questione di tempo. Ma nel 1963 un lavoro dell'allora ventinovenne Paul Cohen della Standford University era destinato a sconvolgere tutte le loro aspettative. Il teorema dimostrato da Cohen asserisce che

se ZF è coerente allora anche $ZF \cup \{\neg CH\}$ *lo è.*

In altri termini, assumendo che *ZF* non conduca a contraddizioni, allora da *ZF* non è possibile dimostrare *CH*. Il risultato di Cohen unitamente a quello precedente di Gödel affermavano in definitiva la indecidibilità di *CH* nel sistema *ZF*. Cohen provò l'*indipendenza* (cioè la non implicazione) di *CH* da *ZF* costruendo un modello di *ZF* in cui *CH* era falso. L'innovativa tecnica usata da Cohen per costruire tale modello, il cosiddetto *forcing* (costrizione), costituisce già di per sé una pietra miliare della matematica che trovò e trova tutt'ora numerose ed importanti applicazioni anche in ambiti esterni alla teoria degli insiemi nelle dimostrazioni di indecidibilità di problemi quali la congettura di Borel in analisi reale, la congettura di Kaplansky nello studio delle algebre di Banach ecc.

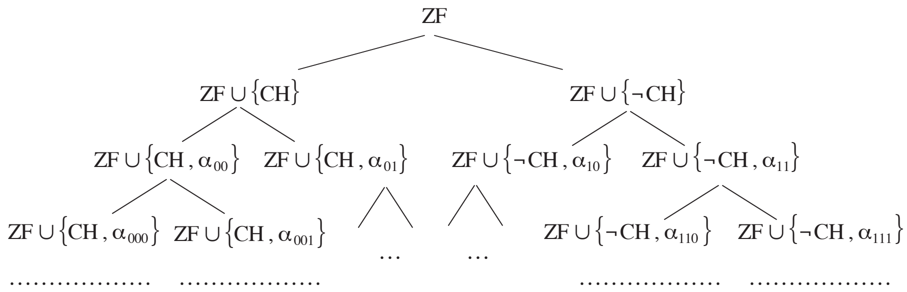
Il lavoro svolto da Cohen gli valse nel 1966 la Medaglia Fields, una sorta di Nobel per la matematica.

Conclusioni

Giunti a questo punto il lettore potrebbe chiedersi se non sia lecito considerare direttamente *CH*, o la sua negazione, come un ulteriore assioma della teoria degli insiemi. Ma qualunque sia il criterio che si intende adottare per la scelta degli assiomi (consistenza, plausibilità o credibilità di essi e delle loro conseguenze), né *CH* né $\neg \mathrm{CH}$ sembrano soddisfarlo.

Ritornando invece al teorema di Cohen, è importante sottolineare che a sconvolgere e turbare i matematici non fu tanto la scoperta di una nuova proposizione indecidibile – l'esistenza delle quali era stata già sancita da Gödel con più di un trentennio di anticipo nel Primo Teorema di Incompletezza –, quanto il fatto che per la prima volta una proposizione indecidibile riguardasse un problema essenziale della matematica che ne andava addirittura ad intaccare le fondamenta e non fosse un'affermazione meramente artificiosa, tecnica, non sostanziale, costruita quasi ad hoc come era stato per Gödel.

Con la soluzione nel 1963 del problema del continuo non si chiudeva soltanto un filone di ricerca iniziato da Cantor 86 anni prima, ma piuttosto si aprivano nuove ed importanti prospettive paragonabili soltanto a quelle nate dopo la scoperta delle geometrie non euclidee: sia *CH* che il Postulato delle parallele di Euclide non sono dimostrabili o refutabili a partire dagli assiomi delle rispettive teorie e pertanto come sono possibili diverse geometrie, tutte di pari dignità, ognuna con i propri assiomi e i propri teoremi, così sono possibili anche diverse teorie degli insiemi, in una parte delle quali *CH* è vera (*teorie Cantoriane*) e nell'altra è falsa (*teorie non Cantoriane*). Più precisamente, visto che una qualunque estensione coerente T_ω di *ZF* soddisfa le ipotesi del Primo Teorema di Incompletezza di Gödel e che quindi è sempre possibile trovare nuove proposizioni α_ω indecidibili in T_ω, allora esiste una famiglia della cardinalità del continuo di teorie Cantoriane ed una famiglia della cardinalità del continuo di teorie non Cantoriane. Possiamo pensare tali teorie come etichette del seguente albero binario infinito



dove per ogni sequenza binaria finita ω si ha che $\alpha_{\omega 0}$ è la negazione di $\alpha_{\omega 1}$. Ai matematici l'arduo compito di stabilire quali tra queste infinite teorie degli insiemi, Cantoriane e no, siano matematicamente interessanti.

Bibliografia

[1] Cohen P., *Set theory and the continuum hypothesis*, Benjamin, New York, 1966.
[2] Cohen P., Hersh R., *La teoria non Cantoriana degli insiemi*, Le Scienze Quaderni, n. 60, (1991).
[3] Devlin K., *Dove va la matematica*, Bollati Boringhieri, Torino, (1994).
[4] Fraenkel A. A., *Zu den grundlagen der Cantor-Zermeloschen mengenlehre*, Math. Ann. 86 (1922), pp. 230-237.
[5] Kunen K., *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*, North-Holland, 1980.
[6] Leonesi S., Tulipani S., Il metodo assiomatico e lo sviluppo storico-concettuale della logica matematica, Periodico di Matematiche, vol. 1, num. 1 (2001), pp. 7-22.
[7] Leonesi S., Toffalori C., Tordini S., *Matematica, miracoli e paradossi*, preprint.
[8] Lolli G., *Incompletezza, Saggio su Kurt Gödel*, Il Mulino, Bologna, (1992).
[9] Mangione C., Bozzi S., *Storia della Logica,* Garzanti, Milano (1993).
[10] Sierpinski W., *Hypothèse du continu*, Monografie Matematyczne, Tom IV, Warsaw, (1934).
[11] Woodin W. H., *The contiuum hypothesis, part* I, Notices of the American Mathematical Society 48 (2001), pp. 567-576.
[12] Zermelo E., *Untersuchungen über die grundlagen der mengenlehre*, I, Math. Ann. 65 (1908), pp. 261-281.
[13] Dawson J. W., *Dilemmi Logici*, Bollati Boringhieri, Torino, (2001).

5. Disposizioni «originali» di n elementi a m a m

Mario Jäggli[1]

1. Introduzione

Disponendo a due a due le tre lettere a, b, c otterremo le seguenti nove coppie:

a a   b b   c c   a b   b a   a c   c a   b c   c b

Il numero D delle disposizioni può essere calcolato applicando la formula generale:

$D = n^m$ (1)

dove D è il numero delle disposizioni con ripetizione ed n è il numero degli elementi che si dispongono a m a m.

Nel nostro caso abbiamo:

$D = 3^2 = 9$

Le ultime 6 disposizioni dei 3 elementi sono però a due a due equivalenti: infatti «ruotando» una delle due si ottiene l'altra. In questo caso, le disposizioni che definiamo «originali» sono 6 (3+3), su un totale di 9 possibili.

A differenza del numero delle disposizioni di n elementi a m a m, quello delle disposizioni «originali» tiene conto solo della successione degli elementi, indipendentemente dal fatto se si leggano da sinistra a destra o viceversa.

Le disposizioni «originali» stanno alle disposizioni nello stesso rapporto logico che estiste tra le combinazioni e le disposizioni di n elementi a m a m.

Come abbiamo visto, il numero totale delle disposizioni con ripetizione può essere calcolato per mezzo della formula (1): scopo di questo lavoro è di trovare delle relazioni che ci permettano di calcolare il numero delle disposizioni «originali» di n elementi a m a m.

1. Direttore del Laboratorio chimico cantonale.

2. Formule

Il numero di disposizioni «originali» di n elementi a m a m, si può calcolare così:

se m è numero intero pari: $O_p = \frac{1}{2} \cdot \left(n^m + n^{\frac{m}{2}} \right)$

se m è dispari: $O_d = \frac{1}{2} \cdot \left(n^m + n^{\frac{m+1}{2}} \right)$

3. Dimostrazione

3.1. m-pari

Consideriamo ad esempio alcune delle disposizioni di 5 elementi a 4 a 4 e designamo questi ultimi con le lettere a, b, c, d, e:

asse di dimmetria

a b	b b	equivalenti
b b	b a	
c a	b e	equivalenti
e b	a c	
a a	a a	simmetrica
c b	b c	simmetrica
d a	a d	simmetrica

Le disposizioni che si presentano simmetriche rispetto all'asse di simmetria sono tutte del tipo «originale» in quanto possono presentarsi una sola volta.

Le disposizioni asimmetriche si presentano invece sempre anche nella forma ruotata orizzontalmente di 180° attorno all'asse di simmetria, formando delle coppie equivalenti.

Una sola delle disposizioni di una di queste coppie, rappresenta una disposizioni «originale».

Per calcolare il totale delle disposizioni asimmetriche «originali», dobbiamo dapprima sottrarre al totale di tutte le disposizioni degli n elementi a m a m – dato dalla formula (1) – il numero delle disposizioni simmetriche e dividere per 2.

Per potere effettuare questo calcolo dobbiamo essere in grado di calcolare il numero totale di disposizioni simmetriche. Se si considera ogni disposizione simmetrica, si noterà che essa può venir scomposta in due metà, ognuna delle quali rappresenta l'immagine speculare dell'altra. Queste metà risultano da tutte le possibili disposizioni degli n elementi a m/2 a m/2. Il loro numero D'_s ci dà dunque quello delle disposizioni simmetriche e lo otteniamo dalla (1):

$$D'_s = n^{\frac{m}{2}} \qquad (2)$$

Mentre il numero delle disposizioni asimmetriche D'_a è:

$$D'_a = D - D'_s \qquad (3)$$

dove D rappresenta il numero totale delle disposizioni degli n elementi a m a m (vedi formula 1).

Sostituendo la (1) e la (2) nella (3) avremo:

$$D'_a = n^m - n^{\frac{m}{2}} \qquad (4)$$

Il totale O_p delle disposizioni «originali» di n elementi a m a m ci è dato dal totale delle disposizioni simmetriche (tutte del tipo «originale») più la metà di quello delle disposizioni asimmetriche che, come abbiamo visto, sono «originali» a 2 a 2.

Abbiamo:

$$O_p = D'_s + \frac{D'_a}{2}$$

da cui

$$O_p = n^{\frac{m}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \left(n^m - n^{\frac{m}{2}} \right)$$

cioè:

$$O_p = \frac{1}{2} \cdot \left(n^m + n^{\frac{m}{2}} \right)$$

c. v. d.

3.2. m-dispari

Vediamo ad esempio alcune delle disposizioni di 4 elementi (a, b, c, d) a 5 a 5:

asse di dimmetria

|

a b c d a
a d c b a — equivalenti

a a c d d
d d c a a — equivalenti

a a c a a — simmetrica

a b c b a — simmetrica

d a c a d — simmetrica

|

Analogamente al caso precedente, anche qui si tratta di determinare il numero delle disposizioni simmetriche. Se non consideriamo gli elementi posti sul-l'asse di simmetria, avremo m–1 colonne.

Il numero delle possibili disposizioni simmetriche D_{ss} ci viene dunque fornito da tutte le disposizioni che possono assumere gli n elementi nelle colonne poste a destra o a sinistra dell'asse di simmetria, che sono $(m-1)/2$.

Abbiamo:

$$D_{ss} = n^{\frac{m-1}{2}} \qquad (5)$$

Considerando ora anche gli elementi dell'asse di simmetria, si ha che il numero D_s'' delle disposizioni simmetriche risulta da:

$$D_s'' = n \cdot D_{ss} \qquad (6)$$

perché da ognuna delle disposizioni precedenti ne otteniamo n facendo variare l'elemento centrale.

Segue:

$$D_s'' = n \cdot n^{\frac{m-1}{2}} = n^{\frac{m+1}{2}} \quad (7)$$

Nell'esempio abbiamo volutamente considerato solo disposizioni con lo stesso elemento centrale, per meglio evidenziare il ragionamento visto sopra.

Per le disposizioni asimmetriche valgono le stesse considerazioni viste al punto 3.1. Il loro numero D_a'' è:

$$D_a'' = D - n^{\frac{m+1}{2}} = n^m - n^{\frac{m+1}{2}} \qquad (8)$$

Il numero totale O_d delle disposizioni «originali», con m dispari, ci viene dunque dato da:

$$O_d = D_s'' + \frac{D_a''}{2} = n^{\frac{m+1}{2}} + \frac{\left(n^m - n^{\frac{m+1}{2}}\right)}{2}$$

da cui risulta:

$$O_d = \frac{1}{2} \cdot \left(n^m + n^{\frac{m+1}{2}}\right) \qquad \text{c. v. d.}$$

1. «Lo vedo, ma non ci credo...», seconda parte[1]

Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor[2] (Testo di sintesi[3])

Gianfranco Arrigo[4] – Bruno D'Amore[5]
Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica (N.R.D.)
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia

In this article we study the epistemological and didactic obstacles encountered by Italian and Swiss students (aged 17-19) in understanding Cantor's theorem that there is a larger infinity of real numbers between 0 and 1 than the infinity of natural or rational numbers. This is followed by another analogous study of another theorem of Cantor. This therefore constitutes a preliminary look at understanding the difficulty encountered by students arising from topics involving mathematical infinity. Particular attention is paid to didactic obstacles, created at the start by the same teachers in previous years, of intuitive models that then become transformed into misconceptions that sometimes become insuperable.

1. Nota introduttiva

In un nostro precedente lavoro (Arrigo, D'Amore, 1999) abbiamo messo in evidenza quali siano le enormi difficoltà che rendono non accettabile da parte della quasi totalità degli studenti dei due ultimi anni della scuola secondaria superiore (ossia ad allievi tra i 17 ed i 19 anni) il celebre teorema di Georg Cantor secondo il quale, per dirla nella maniera più divulgata possibile, vi sono tanti punti in un quadrato quanti in un suo lato[6].

In quel lavoro più della metà degli studenti osservati sembrava non comprendere il senso stesso dell'enunciato; una minoranza significativa ha dichiarato di aver capito, ma con opportune interviste abbiamo appurato che non si trattava di vera e propria comprensione.

Questa rilevazione ci ha indotto a ricercare nuovamente, in particolare *come* lo studente sia disposto ad accogliere il fatto che esistono diverse cardinalità infinite. Abbiamo quindi deciso di riproporre alcuni teoremi di Georg Cantor sulla cardinalità di insiemi numerici.

1. Una sintesi della prima parte è pubblicata sul numero 42 di questa rivista, pagine 31-43.
2. Lavoro eseguito nell'àmbito del Programma di Ricerca dell'Unità di Bologna: «*Ricerche sul funzionamento del sistema: allievo-insegnante-sapere: motivazioni della mancata devoluzione*», inserito nel Programma di Ricerca Nazionale: «*Difficoltà in matematica: strumenti per osservare, interpretare, intervenire*», cofinanziato con fondi MIUR.
3. Il testo completo della ricerca è pubblicato sulla rivista *«La matematica e la sua didattica»*, numero 1/2002; in questa sede se ne propone una sintesi.
4. Alta Scuola Pedagogica, Locarno, Svizzera. (gianfranco.arrigo@span.ch).
5. Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna. Facoltà di Scienza della Formazione primaria dell'Università di Bolzano. (damore@dm.unibo.it).
6. Per informazioni storico-critiche su questo teorema e per una sua formulazione più aderente alla realtà storica, rinviamo ad Arrigo, D'Amore (1999).

2. Cenni storici sull'evoluzione del concetto matematico di infinito e note critiche

I contenuti matematici che concernono la nostra nuova ricerca hanno costituito per oltre due millenni un difficile ed affascinante terreno di indagine sul quale si sono impegnati e a volte scontrati molti pensatori, dai filosofi greci (in particolare Aristotele) fino a Cantor e Dedekind, passando da Giovanni Duns Scoto da Galileo Galilei e da Bernhard Bolzano (pensatori dai quali abbiamo ricavato spunti didattici).

Con gli studenti soggetti delle prove ci siamo concentrati soprattutto sulle due questioni basilari della numerabilità dell'insieme dei numeri razionali **Q** e della non numerabilità dell'insieme dei numeri reali **R** e sull'equipotenza di segmenti e rette.

3. Descrizione del quadro teorico di riferimento

La complessità dell'apprendimento dell'infinito è ampiamente dimostrata e documentata, nel contesto internazionale, da una letteratura vastissima, testimoniata per esempio in D'Amore (1996, 1997).

Per non ripetere qui le considerazioni già ivi fatte ed il quadro teorico di Arrigo, D'Amore (1999) che copre ampiamente anche il presente lavoro, ci limitiamo a ricordare solo quei testi che costituiscono stretto riferimento nell'attuale ricerca.

Trattando di corrispondenza biunivoca tra enti geometrici, ed in particolare tra segmenti, resta basilare il classico lavoro di Tall (1980) che evidenziava il fenomeno che noi abbiamo chiamato *dipendenza* in base al quale vi sono più punti in un segmento lungo (al limite in una retta), rispetto ad uno più corto.

In questo lavoro, come si vedrà, la dimostrazione (per assurdo) di fatti legati alle cardinalità viene basata sui modi di scrivere numeri, cioè sulle forme di scrittura dei numeri reali. Ciò fa scattare la problematica dello *scivolamento*, evidenziata in una certa prospettiva (maggiormente linguistica) da Duval (1995) e da noi estesa in Arrigo, D'Amore (1999), secondo cui lo studente accetta a fatica o non accetta addirittura una dimostrazione nella quale si passa da un oggetto di discorso ad un altro; per esempio, si sta parlando di fatti geometrici e si passa invece a considerazioni aritmetiche (come nel caso della dimostrazione oggetto del nostro lavoro del 1999), oppure si sta parlando di elenchi di numeri in una successione e si passa invece a considerazioni sulle modalità di scrivere i numeri stessi (come avverrà nel caso presente).

Questo lavoro tende a far luce in modo particolare sul fenomeno dell'*appiattimento*, nome che abbiamo voluto dare a quanto già evidenziato nei classici lavori di vari Autori, tra i quali segnaliamo Waldegg (1993) e alcuni altri contributi della scuola di Tel Aviv, con particolare riferimento a Efraim Fischbein e suoi allievi. Si tratta del fenomeno, già ricordato poco sopra, in base al quale lo studente che, su spinta del docente o del ricercatore, accetta che alcuni insiemi infiniti siano tra loro equipotenti (come N e Z), lo fa perché pensa che ciò sia legato all'infinità e che dunque, come generalizzazione, tutti gli insiemi infiniti lo siano. Questa misconcezione è il risultato di un positivo passaggio da una prima concezione nella quale (per dirla con parole prese a prototipo da uno studente) «In Z c'è il doppio degli elementi di N, è ovvio», ad una seconda concezione nella quale, dopo aver accettato la dimostrazione che N è invece equipotente a Z, «Tutti gli insiemi infiniti sono equipotenti tra loro, dato che sono infiniti». La seconda misconcezione è, in un certo senso, un «miglioramento» rispetto alla precedente, una «scalata» lenta e graduale verso la costruzione di un concetto finale corretto, che potremmo chiamare «modello di infinito».

Dipendenza e *appiattimento* sono fenomeni a fatica distinguibili, a nostro avviso, come due facce di una stessa medaglia. Ciò non solo in questo lavoro nel quale ci sono da confrontare l'intervallo aperto]0, 1[in R e tutto Q_a (i razionali assoluti, 0 compreso):

- *dipendenza*: è ovvio che, come immagine visiva, appare che il primo «segmento» sembra essere incluso nel secondo
- *appiattimento*: i due insiemi da confrontare sono entrambi infiniti.

Come mostreremo più avanti, nel corso del paragrafo 8, si possono pensare come due aspetti di uno stesso *errore* che consiste nel tentativo di *applicare ad insiemi infiniti procedure proprie di quelli finiti*, tentativo già evidenziato in letteratura (Shama, Movshovitz Hadar, 1994) ma da noi qui rilevato in modo netto, soprattutto nelle discussioni e nelle interviste. Ci pare opportuno anticipare qui una conclusione che vedremo, e cioè che diventa modello intuitivo del concetto di equipotenza quel che (davvero) è nel campo finito e che, pur potendosi e dovendosi estendere nell'infinito, provoca però traumi cognitivi. Se «infinito» è un numero naturale, e se vi sono diversi insiemi con tale cardinalità, allora tutti devono poter essere messi in corrispondenza biunivoca tra loro. L'origine di tale misconcezione (che pure ha certo caratteristiche di ostacolo epistemologico, ben messe in evidenza dalla storia della matematica e da moltissime ricerche) è di natura prevalentemente didattica; l'allievo, mediante conteggi e mediante corrispondenze biunivoche, si appropria con sicurezza di tali concetti. D'altra parte, l'ostacolo non è di per sé il segnale di un errore; l'ostacolo è un'idea che, al momento della formazione di un concetto, è stata efficace per affrontare problemi (anche solo cognitivi) precedenti, ma che si rivela fallimentare quando si tenta di applicarla ad una situazione nuova. Visto il successo ottenuto (anzi: a maggior ragione a causa di questo successo), si tende a conservare l'idea già acquisita e comprovata e, nonostante il fallimento, si cerca di salvarla; ma questo fatto finisce con l'essere una barriera verso successivi apprendimenti.

Questa osservazione ed i risultati negativi dell'attuale ricerca ci spingono a prendere in esame la possibilità-necessità di rivedere i contenuti a carattere disciplinare da proporre nel corso della formazione iniziale degli insegnanti, anche di scuola primaria; non tanto perché modifichino i contenuti della loro azione didattica, quanto perché evitino il formarsi di quei modelli intuitivi che produrranno poi situazioni di disagio cognitivo.

Ma torniamo al quadro teorico.

Tutte le precedenti considerazioni chiamano in causa altri due fenomeni interessanti:

- la difficoltà che sembra avere lo studente a trattare con l'infinito attuale, piuttosto che con quello potenziale, già rilevata in molteplici lavori, e che solo marginalmente tocca questo nostro [per cui rimandiamo il quadro teorico contenuto in Arrigo, D'Amore (1999)]; tuttavia segnaliamo Tsamir (2000) nel quale si evidenzia come questo tipo di difficoltà non si incontra solo tra studenti, ma anche tra insegnanti (in formazione), il che rafforza la necessità di prendere in futuro sempre più in esame gli ostacoli didattici e i contenuti disciplinari della formazione;

- la difficoltà che incontra lo studente per rendersi conto della contraddizione tra due affermazioni, quando vi cade; si aggiunga la quasi totale indifferenza che talvolta lo studente dimostra, anche quando si dà conto di essere in contraddizione; anche su questo punto ricordiamo solo due classici (Stavy, Berkovitz, 1980; Hart, 1981), rimandando al nostro solito lavoro precedente per una bibliografia più ampia.

4. Problemi che hanno stimolato la ricerca

P1. Seguendo un percorso didattico opportuno, è possibile far sì che gli studenti di penultimo ed ultimo anno delle superiori arrivino a comprendere il senso delle affermazioni poste a tesi dei teoremi oggetto di questo lavoro?

P2. In caso negativo, perché no? Quali sono i motivi? Gli ostacoli epistemologici sono evidenti, la storia della matematica stessa ce li illustra; ma vi sono ostacoli didattici?

P3. In caso positivo, che ne sarà dell'*appiattimento*? Cioè: come reagiranno gli studenti, inizialmente caduti nell'appiattimento, di fronte al teorema che stabilisce la non numerabilità di **R**, che si rivela evidente contraddizione?

P4. Fino a che punto è radicato l'apprendimento degli studenti che rispondono correttamente al test?

5. Ipotesi della ricerca

Le ipotesi si appoggiano su alcuni elementi usciti dalla ricerca precedente; in particolare si è consolidata l'intenzione di fare ricorso a colloqui ed interviste cliniche con i soggetti testati, dato che le risposte scritte non rivelano la qualità dell'apprendimento.

I1. Anche se le dimostrazioni dei nuovi teoremi in esame appaiono, agli occhi di matematici esperti, come molto elementari, ipotizzavamo che sarebbero stati pochi gli studenti in grado di comprenderle davvero. Per ogni teorema bisogna distinguere tra:

- il significato della tesi
- la dimostrazione di essa.

Era nostra convinzione che alcuni studenti si sarebbero illusi di comprendere la dimostrazione e la tesi ma, una volta posti di fronte, oralmente, alla natura vera del senso della tesi, avrebbero mostrato più d'una incertezza e forse un rifiuto. È ben evidenziato dalla letteratura che una delle clausole del contratto didattico agisce proprio nel far accettare tesi di teoremi per fiducia nell'insegnante come rappresentante dell'istituzione e come depositario del Sapere.

Ritenevamo molto interessante esaminare le riserve degli studenti e le modalità della loro espressione.

I2. In caso di non accettazione delle tesi dei teoremi, ipotizzavamo che, oltre agli ostacoli epistemologici, avremmo potuto rilevare ostacoli didattici. Uno di questi, riguarda la natura della densità e della continuità, piuttosto confuse nella mente anche degli studenti che conoscono un po' l'Analisi (l'insieme **R**, la continuità ecc.) ma che non hanno sempre *costruito* tale concetto in modo corretto. La domanda centrale è: *quali* ostacoli didattici vi sono alla comprensione delle tesi dei teoremi che stiamo esaminando? La nostra attenzione si è puntata, negli ultimi anni, sul «modello della collana» che viene esplicitamente indicato come modellizzazione per rappresentarsi mentalmente i punti sulla retta fin dalla Scuola Elementare e che resiste ad ogni attacco successivamente. Per esempio, quando si pongono i cosiddetti numeri frazionari sulla «retta razionale» r_Q, il modello-collana resiste e la densità resta fatto potenziale e non naturale. A molti studenti la densità appare già come... riempitiva della retta e dunque non capiscono che differenza vi sia tra r_Q ed r. Né li aiuta molto, pochi anni dopo, lo studio di **R** e la definizione di continuità... La nostra ipotesi, in sostanza, era che avremmo ritrovato ostacoli didattici tipici di modelli del tutto elementari.

I3. La risposta al terzo problema ci sembrava la più interessante. Eravamo convinti che, durante un adeguato percorso didattico, gli studenti considerati «bravi» avrebbero accettato che, contrariamente all'intuizione, **N** e **Z** sono tra loro equipotenti, e qui pensavamo che più d'uno studente (oralmente) avrebbe fatto riferimento all'appiattimento. Al momento in cui il nuovo teorema avrebbe mostrato che, viceversa, esistono insiemi infiniti tra loro non equipotenti, avremmo potuto apprezzare la reazione degli studenti più motivati di fronte ad una situazione di contraddizione esplicita.

I4. Già nel corso della ricerca precedente avevamo avuto parecchie perplessità sulle ragioni reali che hanno spinto gli studenti a rispondere in un certo modo. In sostanza, le nostre obiezioni concernono l'affidabilità dei risultati del test individuale. Esso ci mostra indubbiamente che cosa risponde lo studente, ma non ci dice nulla sul *perché* risponde così. Ci sembra marcata la fiducia che lo studente ripone in ciò che l'insegnante espone. Inoltre, spingendo al limite la riflessione, si potrebbe addirittura ipotizzare che certe risposte corrette siano dettate da misconcezioni, come già anticipato. Da ultimo, siamo anche interessati al grado di convinzione che lo studente mostra di avere nei confronti di ciò che ha appreso. La particolare problematica relativa agli insiemi infiniti impedisce all'allievo di verificarne con i propri sensi la credibilità costringendolo, nel migliore dei casi, a modificare le proprie immagini mentali e a trasformarle in modelli cognitivi. Ma questo processo, in realtà, avviene sempre? Se no, in quale misura?

Per far fronte a questa delicata problematica, pensammo di effettuare colloqui individuali mirati a stabilire sia le vere motivazioni che stanno dietro le risposte degli studenti, sia il grado di convincimento che lo studente mostra di avere nei confronti delle affermazioni che dichiara di aver appreso.

6. Metodologia della ricerca

Con tutti gli studenti si è sviluppato un percorso didattico, organizzato dall'insegnante della classe, sulla base di un materiale di apprendimento preparato dagli autori della ricerca. Alla conclusione dell'apprendimento, allo studente era affidato un questionario in modo individuale[7].

Sono stati sottoposti all'apprendimento e poi al test 189 studenti liceali, 90 svizzeri e 99 italiani; ne sono poi stati intervistati 68 (36 svizzeri e 32 italiani).

7. Descrizione dei risultati e verifica delle ipotesi formulate in 5

Le **domande 1a, 1b e 2a** sondano elementi di comprensione (su come contare gli elementi di un insieme) che avrebbero potuto rendere inattendibili i risultati della ricerca: i risultati sono stati per noi rassicuranti.

Nella **domanda 2b** lo studente deve esprimersi sul fatto che vi sono tanti multipli di 997 (k·997) quanti sono i numeri naturali (k). Da una parte ha capito la dimostrazione (esistenza di una corrispondenza biunivoca tra i due insiemi), d'altra parte, percorrendo i numeri naturali, «vede» che per costruire il primo insieme se ne scartano tantissimi, ciò che gli impedisce (nella misura del 27% circa) di «credere» davvero al risultato teorico. È un primo esempio di trattamento dell'infinito attuale con procedure del finito. Lo studente può ricavarne la sensazione che la matematica sia una cosa completamente avulsa dalla realtà e che quindi non serva a nulla. (Si veda D'Amore, Fandiño Pinilla, 2001].

La **domanda 2c** mette lo studente di fronte all'equipotenza tra N e l'insieme dei quadrati (riuscita 80%), la **domanda 2d** all'equipotenza fra $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}^{+}$ e $\mathbf{Z}^{-}$ (riuscita solo del 50%). Quest'ultima domanda, posta in modo intrigante, («qualcuno sostiene che il cardinale di $\mathbf{Z}$ è il doppio di quello di $\mathbf{Z}^{+}$») ha messo a disagio maggiormente gli svizzeri, più «scolarizzati», (risposte corrette 40%) che non gli italiani (risposte corrette 60%).

Anche la **domanda 3** è in parte fuorviante: fa notare allo studente la densità di **Q**, per poi dirgli se ci crede ancora alla dimostrazione studiata del fatto che Q è numerabile. Globalmente gli italiani hanno nettamente più successo dei loro colleghi svizzeri: l'82% di loro afferma di credere che vi siano tanti razionali quanti sono i numeri naturali, contro solo il 58% degli svizzeri. Ma se si analizzano le ragioni addotte, balza all'occhio la percentuale di italiani che crede in virtù del fenomeno di appiattimento (67% contro il 30% degli svizzeri). D'altra parte gli svizzeri non smentiscono quanto osservato nel corso della domanda 2, perché il 28% di loro crede nell'equipotenza tra **Q** ed **N** perché «hanno visto in classe una dimostrazione chiara e convincente».

La **domanda 4a** chiede se in [0,1] vi sono più razionali o più reali (riuscita: 60%), la **domanda 4b** spinge il confronto tra i reali in [0,1] e l'intero insieme **Q** (riuscita: 35%), la **domanda 4c** propone il paragone tra **R** e **Q** (riuscita: 54%). Gli svizzeri danno globalmente il 75% di risposte esatte contro il 45%. Certo, qui non c'è più «senso comune» che possa aiutare: chi ha più fiducia in ciò che si fa a scuola, ha più probabilità di rispondere correttamente.

La **domanda 4d** chiede se vi sono più punti in un segmento lungo 2 metri o nella retta intera (riuscita: 52%)

7. Questi documenti, così come i risultati del test, sono pubblicati su *«La matematica e la sua didattica»*, numero 1/2002.

Fra le risposte spiccano gli effetti della *dipendenza* della cardinalità dalla «grandezza» dell'insieme e dell'*appiattimento* (quest'ultimo può anche avere indotto risposte «corrette»!).

8. Descrizione dei risultati dei colloqui e verifica delle ipotesi formulate in 5

Si è concentrata l'attenzione sulle domande 2b, 2d, 3, 4b e 4d. Scopo principale del colloquio era di cercare, nel limite del possibile, di capire le ragioni che si nascondono dietro alle risposte. Il ricercatore ha cercato di imbrogliare gli studenti intervistati, per vedere fino a che punto avevano fondato il loro apprendimento. (**I** = studenti italiani; **CH** = studenti svizzeri)

Domanda 2b *(vi sono tanti multipli di 997 quanti numeri naturali?)*

CH. Cambiamenti di opinione: 5 su 36 (14%). 2 studenti hanno rinnegato la risposta correttamente data nel test, 3 studenti hanno corretto opportunamente.

I. Cambiamenti di opinione: 7 su 32 (22%). 4 studenti passano dalla risposta corretta «del tutto convinto» alla «per nulla convinto»; 3 studenti passano dalla risposta «abbastanza convinto» alla «per nulla convinto». Tutti i cambiamenti di opinione sono, dunque, al negativo: l'apprendimento di questi studenti non era frutto di convinzione né di acquisita competenza.

Domanda 2d *(relativa all'equipotenza fra Z, Z^+ e Z^-)*

CH. Cambiamenti di opinione: 9 su 36 (25%). Ben 6 allievi su 36 hanno rinnegato la risposta correttamente data nel test. 3 allievi hanno invece migliorato il proprio apprendimento giungendo alla consapevolezza.

I. Cambiamenti di opinione: 8 su 32 (25%). 4 studenti hanno rinnegato la risposta correttamente data nel test; 3 studenti, pur cambiando risposta, permangono in errore; 1 studente ammette di non sapere più che cosa dire e pensare. Risulta chiarissimo che per gli studenti non è ipotizzabile un ordine degli elementi di **Z** che non sia quello «naturale»: l'immagine della retta dei numeri è invadente oltre misura. Inoltre è evidente che chi risponde correttamente lo fa non tanto perché è convinto della dimostrazione vista, ma per motivi di *appiattimento*.

Domanda 3 *(visto che **Q** è denso, ci credi ancora che è numerabile?)*

CH. Cambiamenti di opinione: 12 su 36 (33%). 8 studenti hanno rinnegato la risposta correttamente data nel test. Gli altri 4 nel test avevano risposto correttamente spinti però da una ragione legata all'*appiattimento*; nel colloquio tutti e 4 scivolano nella *dipendenza*.

I. Cambiamenti di opinione: 11 su 32 (34%). 8 studenti passano dalla risposta «Vi sono tanti razionali quanti naturali perché l'abbiamo dimostrato», alla risposta negativa «Ci sono più elementi in **Q**» (di nuovo per *appiattimento*). 3 studenti passano dalla risposta corretta, ma data per *appiattimento*, alla risposta negativa; e la causa di ciò è la *dipendenza*.

Si mescolano qui: uno degli assiomi euclidei (il tutto è maggiore della parte) che ha buon gioco nella prassi didattica; ed il continuo e più volte denunciato tentativo di prolungare l'applicabilità di modelli intuitivi che funzionano nel finito, all'infinito, misconcezione di origine didattica.

Domanda 4b *(confronto tra le cardinalità dell'intervallo reale [0,1] e* ***Q****)*

CH. Cambiamenti di opinione: 11 su 36 (31%). Di questi, 1 solo aveva risposto correttamente nel test e a seguito del colloquio sceglie di allinearsi su un laconico «non si può dire». Degli altri, 4 studenti si rifugiano nel «non si può dire», 4 scelgono l'opzione della stessa cardinalità, spinti dall'*appiattimento*, 2 studenti cambiano opinione sotto l'effetto della *dipendenza*.

I. Cambiamenti di opinione: 10 su 32 (31%). 7 studenti cambiano scegliendo la risposta «vi sono più razionali»; 5 studenti spostano la loro convinzione su «i due insiemi hanno la stessa cardinalità»; 1 solo allievo corregge opportunamente la risposta. Ricaviamo l'impressione che un attento esame del vero significato delle domande metta in crisi gli studenti; non solo chi fonda la sua risposta positiva sul contratto cede alla prima analisi critica, ma anche chi si ritiene che abbia costruito una conoscenza, sembra averlo fatto in modo debole e poco fondato.

Domanda 4d *(vi sono più punti in un segmento di 2m o nella retta intera?)*

CH. Cambiamenti di opinione: 8 su 36 (22%). Degli 8 studenti che hanno cambiato idea durante il colloquio, 5 avevano risposto correttamente nel test; 4 di loro correggono in «non si può dire», 2 studenti optano per «più punti sulla retta» (in entrambi i casi per l'effetto *dipendenza*). Infine uno studente che aveva risposto «più punti nel segmento» dice di essersi sbagliato a mettere la crocetta e corregge in «stessa cardinalità» ma, giustificandosi, si allinea fra le vittime dell*'appiattimento*.

I. Cambiamenti di opinione: 9 su 32 (28%). 6 studenti hanno rinnegato la risposta correttamente data nel test (3 scelgono «più punti sulla retta», 3 «non si può dire»). 2 studenti correggono opportunamente la loro risposta. 1 studente passa dalla risposta «più punti sul segmento» alla «non si può dire». Anche qui vengono a galla gli effetti dell'*appiattimento* e della *dipendenza*.

9. Risposte alle domande formulate in 4

Siamo finalmente in grado di rispondere alle domande di ricerca.

P1. Ci pare di poter affermare che il senso di questi teoremi e le loro dimostrazioni si rivelino ampiamente al di sopra delle capacità di comprensione degli studenti, per quanto maturi, degli ultimi anni delle superiori. Il senso dei teoremi sfugge ai più; quanto alle dimostrazioni, esse vengono definite «facile», «l'ho capita», perfino «bella», al momento dello studio; ma poi, quando si intervista lo studente, si trova che esse non penetrano, non incidono, non permangono, non possono insomma far parte del bagaglio cognitivo di uno studente di quell'età (in particolare il teorema che stabilisce la non numerabilità di **R**).

P2. Risulta evidente dalla ricerca che, a parte gli ostacoli epistemologici già noti, vi sono forti ostacoli didattici. Essi riguardano soprattutto il... mistero che circonda a scuola, nei livelli precedenti, tutto quanto concerne l'infinito che o non viene trattato per nulla, o viene banalmente ridotto ad un'estensione del finito. Ciò è causa di modelli intuitivi che costituiscono vere e proprie misconcezioni. Per esempio, l'«essere sottoinsieme» che implica l'«avere meno elementi»: vero nel finito, ma non necessariamente nell'infinito; la retta come collana di punti, che rende complessa o forse addirittura impossibile l'idea di densità e che collabora a rendere impossibile l'idea di continuità; il modello «naturale» dell'ordine di **Z** che si rivela poi univoco ed insuperabile.

Infine, *appiattimento* e *dipendenza*, già messi sotto accusa in Arrigo, D'Amore (1999), si confermano colpevoli di molteplici misconcezioni.

P3. Ci sono dunque vari e notevoli ostacoli didattici. In particolare, l'*appiattimento* e la *dipendenza* ci appaiono come facce di una stessa medaglia, diramazioni da una stessa radice: l'estensione di procedure di insiemi finiti direttamente all'infinito.

P4. Dai colloqui è risultato chiaramente come la comprensione di questa materia sia molto superficiale, spesso basata su una fiducia acritica di ciò che viene proposto in classe oppure sui due errori più frequenti: *appiattimento* e *dipendenza*. Questi risultati inducono la necessità di intervenire sul piano didattico per fare in modo che gli studenti possano affrontare lo studio dell'analisi avendo già acquisito una buona competenza sugli insiemi infiniti.

10. Osservazioni conclusive

Premettiamo che, a nostro avviso, un'educazione matematica attuale non può prescindere da alcune competenze basilari sugli insiemi infiniti.

La trattazione delle problematiche concernenti l'infinito attuale richiede lo sviluppo di modelli intuitivi diversi e in alcuni casi contraddittori rispetto a quelli che si usano nel finito. Ne deriva la necessità di svolgere un'azione didattica già a partire dalla scuola di base, sia nel campo numerico sia in quello geometrico.

Nel campo numerico occorre prima di tutto convincersi della caduta dell'assioma euclideo «il tutto è maggiore di ogni sua parte (propria)», del fatto che un insieme avente infiniti elementi può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio, delle stranezze che si ottengono quando si applicano le operazioni aritmetiche ai numeri transfiniti.

Nel campo geometrico, occorre lavorare presto sulla topologia della retta: i concetti di densità e di continuità non sono per nulla capiti, anzi l'immagine ingenua della retta come collana di perle (nella quale ogni perla rappresenta un punto geometrico) è per molti l'unico supporto alla teoria.

Curare i concetti relativi agli insiemi infiniti già a partire dalla scuola di base non deve essere letto nel senso di un'introduzione nei programmi di nuovi contenuti. Anzi, in questo modo non si farebbe altro che ripetere l'errore che da anni si sta facendo con l'insegnamento dell'Analisi, dove si presenta una teoria parecchio formalizzata a studenti non in grado di capire perché mancanti di una sufficiente esperienza e competenza. Significa invece offrire ai giovani allievi una serie di attività, aventi lo scopo di avvicinare l'alunno alla delicata quanto affascinante problematica concernente l'infinito, aiutandolo così a formarsi immagini mentali non distorte.

Per quel che concerne l'analisi degli errori, ribadiamo che, secondo noi, le due forme patologiche *appiattimento* e *dipendenza* hanno un'origine comune: **l'incondizionata applicazione agli insiemi infiniti di procedure proprie degli insiemi finiti**. Questo atteggiamento è frutto di un'evidente misconcezione, generata da anni di applicazione di determinate procedure sempre e solo in ambito finito, procedure che col tempo sono diventate veri e propri modelli universali.

Infine non possiamo sottacere il problema della (relativa) inattendibilità dei test scritti. A tale proposito, gli esiti dei colloqui sono chiaramente indicativi. Messi alle strette nei colloqui, gli studenti cambiano opinione e modificano la propria risposta data nel test. Taluni passano da una risposta corretta data nel test, ad una errata, data con convinzione. Altri passano da una risposta errata ad un'altra errata. Alcuni, infine, passano da una risposta errata ad una corretta che sembra essere frutto di un apprendimento avvenuto proprio durante il corso dell'intervista.

Bibliografia

Arrigo G., D'Amore B.
«Lo vedo, ma non ci credo...». Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 22B, 5, 465-494. [In versione inglese: «I see it but I don't believe it…». Epistemological and didactic obstacles to the process of comprehension of a theorem of Cantor that involves actual infinity. *Scientia Paedagogica Experimentalis* (Belgio), XXXVI, 1, 1999, 93-120. Un ampio sunto del testo inglese appare in: Gagatsis A. (2000), *Proceedings of the 2nd Mediterranean Conference on Mathematics Education*, 7-9 january 2000, Nicosia, Cyprus, volume II, 371-383. Un altro ampio sunto del testo inglese appare in: *Proceedings of CERME1*, Osnabrück, 1998. In versione spagnola: «Lo veo, pero no lo creo». Obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de un teorema de Georg Cantor que involucra al infinito actual, *Educación matemática*, Mexico DF, 11, 1, 5-24], 1999.

D'Amore B.
L'infinito: storia di conflitti, di sorprese, di dubbi. *La matematica e la sua didattica*. 3, 322-335, 1996.

D'Amore B.
Bibliografia *in progress* sul tema: «L'infinito in didattica della matematica». *La matematica e la sua didattica*. 3, 289-305, 1997.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I.
La «matematica del quotidiano». *La matematica e la sua didattica*. 3, 256-263, 2001.

Duval R.
Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? Actes de l'École d'été 1995.

Fischbein E.
Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. In: Chini Artusi L. (ed.). *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Bologna: Zanichelli-UMI. 122-132, 1985.

Shama G., Movshovitz Hadar N.
Is Infinity a whole number? Atti del XVIII PME. Lisboa 1994. 265-272, 1994.

Stavy R., Berkovitz B.
Cognitive conflict as a basic for teaching qualitative aspects of the concept of temperature. *Science Education*. 28, 305-313, 1980.

Tall D.
The notion of infinity measuring number and its relevance in the intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematicas*. 11, 271-284, 1980.

Tsamir P.
La comprensione dell'infinito attuale nei futuri insegnanti. *La matematica e la sua didattica*. 2, 167-207, 2000.

Waldegg G.
La comparaison des ensembles infinis: un cas de résistance à l'instruction. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 5, 19-36, 1993.

2. Verifica della qualità dell'apprendimento: le produzioni testuali autonome degli allievi (TEPs)

Gianfranco Arrigo

The term TEPs [literally: independent textual productions by pupils] refers to texts autonomously elaborated by pupils about mathematical questions (or generally on scientific issues). These are not to be confused with other written productions, such as class tests, notes or descriptions of procedures, which are non autonomous, but are subject to bounds more or less explicitly fixed. Among the various ways in which TEPs can be used, the article concentrates on the opportunities offered to surveys on the quality of learnings, by introducing some interesting examples.

Introduzione

Nell'articolo di Bruno D'Amore e Hermann Maier (vedi Bibliografia) con il termine TEPs [letteralmente: produzioni testuali autonome degli allievi][1] si intende *testi elaborati in modo autonomo dagli studenti ed aventi come soggetto questioni matematiche* (o generalmente scientifiche). Non bisogna confonderli con altre produzioni scritte, come per esempio compiti in classe, appunti, descrizioni di procedimenti ecc., che non sono autonome, ma sottoposte a vincoli più o meno esplicitamente stabiliti. Più vicina all'idea di TEP è, per esempio, la descrizione di una procedura fatta spontaneamente (per esempio in ambito di *problem solving*); anzi, l'origine degli studi sui TEPs si fa di solito risalire a «protocolli commentati di *problem solving*» Diciamo che si considerano TEPs quelle produzioni nelle quali lo studente, messo nella condizione di *volersi* esprimere in modo comprensibile e con linguaggio personale, accetta di liberarsi da condizionamenti linguistici e fa uso di espressioni spontanee.

Nel citato articolo sono elencati alcuni effetti dei TEPs, fra i quali mi sembrano particolarmente interessanti (i neretti sono nostri):

- La produzione di TEPs stimola lo studente ad analizzare e a riflettere su concetti matematici, relazioni, operazioni e procedure, ricerche e processi di problem solving con cui ha a che fare. Così ciascun allievo può raggiungere una **maggiore consapevolezza** ed una più profonda comprensione matematica di essi;
- i TEPs danno allo studente l'opportunità di tenere continuamente sotto controllo la propria comprensione di questioni matematiche, grazie ad un ragionato e riflessivo riscontro con l'insegnante ed i compagni di classe (**autovalutazione**);
- i TEPs consentono all'insegnante di valutare in modo effettivo la **conoscenza personalmente costruita** e la **comprensione di idee matemati-**

1. La denominazione originale tedesca viene da Ch. Selter, *Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Primarstufe*, Deutsche Universitätsverlag, Wiesbaden, 1994.

che, in maniera più dettagliata e profonda di quanto sia possibile sulla base dei comuni testi scritti, normalmente eseguiti come protocolli di attività di problem solving non commentati.

Se si propone agli studenti di produrre testi che possano dare una visione profonda del loro modo di fare, di pensare e di comprendere la matematica, bisogna essere sicuri che essi indirizzino i loro TEPs a qualcuno che ha *bisogno* di tutte le informazioni relative alla questione di cui si scrive; questo destinatario, per quanto fittizio, non deve coincidere con il vuoto o con l'insegnante stesso. Di solito gli allievi tendono ad immaginare come unico destinatario dei loro scritti l'insegnante, ma sanno benissimo che questi conosce già tutto quello che loro devono comunicare e ne deducono che l'unico suo intento è di esaminare la loro abilità. In questo modo non avvertono affatto il bisogno di dare una descrizione ed una spiegazione dettagliata ed esplicita.

Motivazioni appropriate per cambiare l'atteggiamento di chi scrive verso un ruolo differente da quello di allievo, per esempio, potrebbero essere quelle usate con inviti del tipo: «Immagina di essere un papà / una mamma, / un insegnante, ...» (D'Amore, Sandri, 1996; D'Amore, Giovannoni, 1997), che si sono rivelate incredibilmente coinvolgenti, se usate in modo opportuno. Altre potrebbero essere: quella di scrivere (una lettera) ad un bambino più piccolo o ad un compagno di classe che ha perso alcune lezioni a causa di una malattia e che vorrebbe essere informato su ciò che è stato fatto in sua assenza; scrivere un diario; disegnare un poster per una mostra; comporre un articolo su di un certo tema matematico; ecc. Oppure l'insegnante può organizzare una particolare situazione comunicativa nella quale, per esempio, uno studente deve descrivere un disegno geometrico in modo che il compagno di classe sia in grado di ricomporre la figura solo sulla base della sua descrizione. A volte può essere d'aiuto scostarsi dalle comuni situazioni di problem solving proponendo domande aperte o incomplete (D'Amore, Sandri, 1998).

Un esempio[2]

L'attività alla quale mi riferisco è stata svolta in una classe di seconda media. Gli alunni precedentemente hanno imparato a conoscere i numeri interi relativi, a disporli sulla retta dei numeri, e a eseguire nel loro insieme **Z** l'addizione e la sottrazione, che hanno poi accomunato nel concetto di somma algebrica. Si trattava ora di trovare un modo per moltiplicare i numeri interi relativi. L'insegnante non ha spiegato nulla, ma ha invitato gli allievi a eseguire una successione di moltiplicazioni (rigorosamente in **Z**), aiutandosi con i mezzi a disposizione, fra i quali vi era anche la calcolatrice. L'obiettivo era di spingere gli allievi a **indurre** in generale l'algoritmo che permette di eseguire correttamente la moltiplicazione in **Z**. Finito di eseguire i calcoli, gli allievi sono stati invitati a scrivere con parole proprie quello che avevano intuito. Ogni alunno è stato così stimolato ad analizzare e a riflettere sulla procedura appena indagata, al fine di raggiungere una maggiore consapevolezza.

Per l'insegnante la raccolta di questi testi rappresenta una ricca fonte d'informazione sulla qualità dell'apprendimento conseguito dalla classe e dai singoli.

2. Ringrazio l'insegnante Andrea Morandi che, in occasione di una mia visita nella sua classe, ha consentito la raccolta del materiale, oggetto della presente riflessione.

Le produzioni sono state classificate secondo… tipologie. Di ciascuna, produrrò un esempio. Il testo è riportato fedelmente, senza alcun intervento né sulla morfologia né sulla sintassi.

a) Sintesi corrette, senza commenti

TEP a1

È come fare delle moltiplicazioni normali, a parte che certe volte c'è davanti il «+» o il «–» e poi, «–» e «–» dà «+», «–» e «+» dà «–», «+» e «+» dà «+», «+» e «–» dà «–».

Commento

L'allievo mostra di avere capito in modo completo la procedura della moltiplicazione in **Z**; per descriverla si riallaccia ai casi «normali» (che sono poi quelli concernenti i numeri naturali), quindi a conoscenze già acquisite, ed esprime la «novità» mediante un'elencazione esaustiva. Il ricorso a conoscenze precedentemente assunte è indice di una corretta collocazione del nuovo apprendimento nella rete concettuale.

TEP a2

*La moltiplicazione in **Z** è uguale a l'insieme **N**, solo una cosa che cambia è che se c'è un numero negativo il risultato è sempre negativo però se ci sono 2 etichette uguali il risultato diventa positivo.*

Commento

L'allievo mostra di avere ben capito e inoltre di possedere già una buona capacità di sintesi e di generalizzazione. Si riallaccia anch'egli alla conoscenza già acquisita, ma lo fa usando un linguaggio più matematico, rispetto ad a1. Occorre interpretare correttamente l'espressione «*se c'è un numero negativo*», che va letta «se c'è **solo** un numero negativo». A questa età l'insegnante deve aiutare gli allievi ad acquisire un linguaggio più curato, coerente con la logica matematica.

b) Sintesi corrette, con commenti o interpretazioni originali

TEP b1

Quando in uno dei due numeri c'è l'etichetta meno si moltiplica andando verso sinistra. Quando i numeri sono entrambi negativi si calcola come se l'etichetta meno non ci fosse e anche quando sono entrambi positivi.

Commento

Qui si nota l'espressione «*verso sinistra*» che sta a significare la parte negativa di **Z**. L'allievo ha una predilezione per l'immagine figurale, che usa correttamente in senso matematico. Si può osservare come questo allievo identifichi il numero naturale con il numero intero positivo, la qual cosa non disturba affatto nemmeno la nostra mente matematica.

TEP b2

Noto che sono come le formule per l'addizione e la sottrazione: «+» e «+» dà risultato «+», «–» e «–» dà risultato «+», «+» e «–» dà risultato «–».

Commento

Ecco un caso difficile da interpretare. Presa alla lettera, la prima affermazione risulta evidentemente errata. Ma, con forte probabilità, l'allievo si riferisce ai casi che si riscontrano in una somma algebrica in **Z**, e cioè:

$+(+a)=+a$, $-(-a)=+a$, $+(-a)=-(+a)=-a$

Se così fosse, sarebbe il momento buono per fargli notare l'equivalenza seguente:

$+(+a) = (+1) \cdot (+a)$,
$-(+a) = (-1) \cdot (+a)$.
$+(-a) = (+1) \cdot (-a)$
$-(-a) = (-1) \cdot (-a)$

A questo punto la conoscenza è completa e la rete concettuale si arricchisce di una nuova importante maglia.

TEP b3

Noto che «+ · + = +», che «– · + = –», che «– · – = +», che «+ · – = –»! Con il segno per (·) molte volte il risultato è alto o in altri casi è basso in maniera molto marcata. Prima si esegue il calcolo e poi si utilizzano le tecniche scritte in precedenza.

Commento

Dopo aver detto che anche questo allievo dà prova di una buona capacità di sintesi e di generalizzazione (vedere la prima e la terza frase), fermiamo l'attenzione sulla seconda frase. Ci sconcerta? Ci fa sorridere o ci incavola? Basta ricordarsi del «matematichese», così ben descritto da Bruno D'Amore e Patrizia Sandri. L'allievo ha sentito dire dall'insegnante: «Scrivete tutto ciò che vi viene in mente». Ha considerato che la sua risposta era un po' troppo sintetica e ha pensato bene di aggiungere una frase… riempitiva.

c) Sintesi… ermetica e incompleta

TEP c1

Noto che nei calcoli con la sottrazione non si bada più al suo segno, ma si tralascia subito via (nei calcoli che hanno lo stesso segno).

Commento

L'allievo ha subito catturato l'aspetto che lo ha più colpito: il caso dei segni uguali. Non dice nulla dell'altro caso: forse lo ritiene sottinteso?

d) Sintesi incompleta e legata a casi particolari

TEP d1

Con i numeri positivi è normale la moltiplicazione, ad esempio:
$(+3) \cdot (+7) = + 21$ e $3 \cdot 7 = 21$
quindi con i positivi si aggiunge il «+».
Invece con i numeri negativi si aggiunge il «–», ad esempio
$(-2) \cdot (+9) = -18$

Commento

L'allievo si aggrappa subito al caso più semplice, quello che lo tranquillizza e lo fa aiutandosi con un esempio concreto (non è ancora in grado di generalizzare correttamente). Poi, sbagliando, riunisce tutti i casi in cui c'è il segno meno (almeno uno). Rimane scoperto il caso dei due segni meno. Questo allievo ha ancora un serio problema di apprendimento: occorrerà prenderlo a parte e aiutarlo a completare la sua conoscenza.

TEP d2

Se si toglie il più dell'etichetta il calcolo è come una normale moltiplicazione:
(+3) · (+7) = 21   3 · 7 = 21
Nelle moltiplicazioni con un numero negativo è come una normale sottrazione solo che c'è un per.
Il per e meno diventano un per.

Commento

Anche questo allievo si aggrappa subito al caso più semplice, quello che lo tranquillizza e lo fa aiutandosi con un esempio concreto (non è ancora in grado di generalizzare correttamente), mostrando chiaramente il parallelismo tra **Z+** e **N**. La seconda frase può probabilmente essere interpretata come nel caso b2.

Di fronte all'ultima frase, però, si rimane molto perplessi: essa può essere indice di una pericolosa confusione.

Considerazioni dell'insegnante Andrea Morandi

Nei momenti di apprendimento ritengo l'utilizzo dei TEPs utile ed interessante per diversi aspetti. Soprattutto quando si tratta di introdurre un nuovo argomento, perché il fatto di dover scrivere e descrivere ciò che si è osservato (intuìto, scoperto, …) obbliga (o perlomeno stimola) l'allievo a impegnarsi al massimo, a soffermarsi sul problema, a superare la difficoltà e, di conseguenza, facilita il raggiungimento di un determinato obiettivo. Non è irrilevante anche il fatto che, dovendo produrre un testo autonomamente, tutti gli allievi sono impegnati e lavorano, ciò che potrebbe non capitare con la stessa intensità durante una lezione dialogata. In particolare, ritengo che produrre un testo metta l'allievo sotto pressione (in senso positivo), più che in una discussione con la classe intera. Inoltre, l'allievo, essendo confrontato con un foglio e non direttamente con il docente, si sente sicuramente più libero e meno condizionato nella propria produzione. Diventa allora importante la consegna «scrivi tutto quello che ti viene in mente e che ritieni corretto, dopo averlo analizzato».

Un altro ambito nel quale utilizzo i TEPs è quello del problem solving; richiedere agli allievi una descrizione della procedura utilizzata per la risoluzione del problema (meglio se la richiesta non è per il docente ma per una persona che ha più difficoltà dell'allievo stesso) stimola quest'ultimo a soffermarsi, a riflettere maggiormente e con senso critico su ciò che sta facendo.

Ovviamente tutto ciò presuppone uno sforzo ed un dispendio d'energie e tempo maggiore da parte degli allievi. Questi, però, se vengono convenientemente messi al corrente della problematica, accettano di buon grado il compito supplementare, coscienti che lo stesso ha influenze positive sul loro apprendimento.

Considerazioni conclusive

Gli esempi prodotti ci danno anche una prima idea dell'utilità che possono avere i TEPs per quel che concerne l'indagine sulla qualità dell'apprendimento. In questo ambito, non ci si accontenta della riuscita (tutti questi allievi avevano eseguito correttamente i calcoli assegnati), ma si vuole approfondire la ricerca per mettere in luce **come** l'allievo si costruisce le proprie convinzioni e **come** tesse la sua rete concettuale. Qui entrano in gioco parecchie variabili, oltre a quella relativa al rendimento in senso stretto; variabili che concernono, sì, le prestazioni dei singoli, ma anche il modo con cui si è verificato l'apprendimento, come pure il modo nel quale questo apprendimento convive con altri già acquisiti (inserimento del segmento di apprendimento nel curricolo scolastico[3]).

In questa prospettiva si innesta pure il discorso sulla *robustezza degli apprendimenti*, che è attualmente oggetto di una ricerca nel Canton Ticino[4]. Il problema è il seguente: fino a che punto una risposta corretta è indice di un apprendimento completo (cosciente, fondato, resistente a determinate obiezioni)? Potremmo anche dire: è indice di una competenza veramente raggiunta? Per dare una risposta sensata occorre andare oltre il test scritto tradizionale e portare alla luce le ragioni nascoste che hanno indotto il soggetto a scegliere la risposta corretta. Questa indagine può essere fatta mediante colloqui e TEPs. I primi rivelano per lo più aspetti che l'insegnante cerca, dunque particolari ipotizzati a priori. I TEPs, per contro, hanno il pregio di far uscire anche quello che l'insegnante non ha affatto previsto. Negli esempi appena citati si possono riconoscere alcune manifestazioni di questo interessante e importante aspetto dell'indagine valutativa.

Bibliografia

B. D'Amore, H. Maier
Produzioni scritte degli studenti su argomenti di matematica (TEPs) e loro utilizzazione grafica, La matematica e la sua didattica, Pitagora editrice, n. 2, 2002, pagg.144-189.

A.B. Powell, M. Ramnauth
Beyond questions and answers: prompting reflections and deepening understandings of mathematics using multiple-entry logs, For the learning of mathematics, 12, 2, pagg. 12-18.

B. D'Amore, P. Sandri
«*Fa' finta di essere …». Indagine sull'uso della lingua comune in contesto matematico nella scuola media*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 19A, 3, pagg. 223-246.

B. D'Amore, L. Giovannoni
Coinvolgere gli allievi nella costruzione del sapere matematico. Un'esperienza didattica nella scuola media. La matematica e la sua didattica, n. 4, pagg. 360-399.

3. Si vedano in particolare i testi: M. Fandiño Pinilla, *Curricolo e valutazione*, Pitagora, Bologna, 2002; Autori vari, *Il curricolo di matematica dalla scuola dell'infanzia alla secondaria superiore*, Pitagora, Bologna, 2003, curato dal NRD di Bologna.
4. La ricerca-azione è condotta da Gianfranco Arrigo e si svolge nell'ambito dei corsi di formazione continua organizzati dall'Alta Scuola Pedagogica di Locarno. È iniziata lo scorso mese di settembre e si prolungherà nell'anno scolastico 2003-04, con l'inserimento di un gruppo di insegnanti italiani.

III. Racconti matematici

1. Alice e lo Stregatto colorano il piano

Giorgio T. Bagni[1]

In this work we propose some elementary considerations about the least number of colours needed in order to colour R^2 being any couple of point whose distance is 1 associated to two different colours. It is an open problem (2002).

Era una mattinata davvero molto calda. Per qualche istante la bambina appoggiò dolcemente la testa sul banco: forse chiuse gli occhi e la voce dell'insegnante sembrò affievolirsi…

«Alice! Alice! Non ti starai addormentando, vero?»

Alice	«Oh, ciao caro Stregatto! Scusami, forse stavo proprio per appisolarmi: stamattina non riesco a concentrarmi sulle cose serie».
Stregatto	«E quali sarebbero queste cose serie?»
Alice	«Beh, quello che sta spiegando l'insegnante sarà di certo una cosa seria».
Stregatto	«Sì, può darsi; ma il guaio è che quest'aula è tutta troppo scura, triste. Dovreste ravvivarla con qualche colore… Guarda la lavagna, ad esempio: così, tutta nera, concilia il sonno!»
Alice	«E tu di che colore la vorresti?»
Stregatto	«Non di un colore solo, ma di tanti colori: sarebbe molto più allegra».
Alice	«È vero: come la giubba di Arlecchino!»
Stregatto	«Facciamo così: la coloreremo in modo che tutti i punti distanti un'unità (diciamo un pollice, per fissare le idee) siano di colore diverso».
Alice	«E quanti colori servono? Tantissimi, la lavagna è piuttosto grande».
Stregatto	«Ma no, vedrai. Anzi, faremo di più: cercheremo il minimo numero di colori necessari per colorare in quel modo una lavagna grande quanto vuoi tu! Una lavagna grandissima… infinitamente grande».
Alice	«Ecco, Stregatto: il sonno mi è già passato!»
Stregatto	«Lo sapevo. Ma adesso mettiamoci al lavoro e cerchiamo di capire di quanti colori diversi abbiamo bisogno».
Alice:	«Vediamo un po': un colore ovviamente non basta…».

1. Dipartimento di Matematica, Università di Roma «La Sapienza».

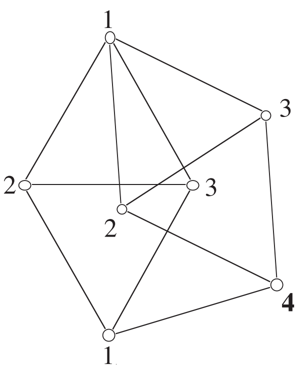
Stregatto: «E nemmeno due».

Alice «Credo proprio di no: ma perché?»

Stregatto «Alice, mi meraviglio di te: se costruisci un triangolo equilatero di lato unitario, i vertici devono essere colorati diversamente l’uno dall’altro!»

Alice «Benissimo. Ma allora forse potrebbero essere sufficienti tre colori: potrei costruire due triangoli equilateri di lato unitario con un solo lato in comune e i quattro vertici della figura potrebbero essere colorati correttamente con tre colori».

Stregatto «Cara bimba, sbagli ancora, ma hai avuto un’idea carina: la figura che hai immaginato di disegnare ti servirà: traccia infatti la tua coppia di triangoli che richiederà tre colori, chiamali 1, 2, 3; quindi disegna un’altra coppia di triangoli, immaginando di ruotare la figura intorno al vertice più in alto in modo che il vertice più in basso si sposti di una distanza unitaria. A questo punto puoi colorare tutto con i tuoi tre colori iniziali, ma non quest’ultimo vertice: ti servirà un quarto colore. La figura che hai disegnato si chiama “fuso di Moser”».



Alice «Davvero ingegnoso! Dimmi, allora: possiamo essere sicuri che bastano sempre quattro colori?»

Stregatto «Ahi, qui la cosa diventa difficile… Ma invece di ragionare in termini così generali, di parlare di dimostrazioni, comincia concretamente a colorare una parte del piano; o almeno immagina di farlo! Ricorda che devi usare il minimo numero di colori possibile: quindi ti conviene non cambiare troppo spesso colore, almeno se non sarai obbligata a fare ciò dalle regole del gioco».

Alice «Dunque, comincio da un punto qualsiasi con il colore numero 1: finché resto abbastanza vicina a quel punto posso usare lo stesso colore».

Stregatto «Che cosa significa “abbastanza”?».

Alice «Beh, diciamo che potrei colorare con uno stesso colore tutti i punti interni ad una figura geometrica la cui massima corda sia unitaria: penso ad esempio ad un cerchio di diametro unitario. Escluderò magari una semicirconferenza».

Stregatto «D’accordo, la tua idea mi sembra proprio buona: in parole povere tu stai cercando di considerare delle figure geometriche senza coppie di punti a distanza unitaria che abbiano la massima area. Ti anticipo però che questa non è una condizione indispensabile. Comunque secondo me il cerchio potrebbe non essere una figura molto conveniente per il tuo scopo».

Alice «Perché?».

Stregatto «Perché il cerchio non tassella».

Alice «E che cosa vuol dire?».

Stregatto «Prova a ricoprire completamente un piano con dei cerchi: ce la fai?».

Alice «No, mi resteranno sempre delle piccole zone tra un cerchio e l'altro: un po' come accade quando delle bottiglie sono affiancate, in una cassa o su di uno scaffale».

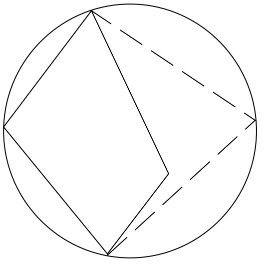
Stregatto «Appunto: il cerchio non tassella! E allora ti restano sempre quelle piccole zone da colorare e ciò può voler dire tanti colori… Meglio puntare su di un'altra figura geometrica».

Alice «Una figura in grado di «tassellare», come dici tu: che cosa mi consigli?»

Stregatto «Io non do consigli, ti faccio solo ragionare: e tu ragioni bene! Sempre seguendo la tua idea di usare figure con l'area più grande possibile, io punterei su figure che possano essere inscritte in una circonferenza».

Alice «E perché inscritte in una circonferenza?»

Stregatto «Beh, considera una figura non inscrivibile in una circonferenza, per semplicità pensa ad un poligono, e traccia la circonferenza avente per diametro la corda massima della tua figura, che come sai deve essere unitaria: almeno uno dei vertici si troverà all'interno di quella circonferenza. Ebbene, è facile costruire una nuova figura inscrivibile con l'area maggiore della figura di partenza, sempre con la corda massima unitaria. E questa nuova figura ti consente di colorare una più vasta parte di piano con uno stesso colore».



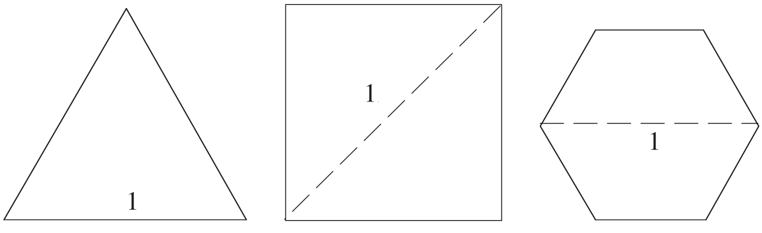
Alice «Hai ragione, sono d'accordo con te. Dunque quali figure dovrei usare?»

Stregatto «Tutti sanno che tra tutti i poligoni di n lati inscrivibili in una circonferenza quello con la massima area è il poligono regolare. A questo punto, tu devi decidere il numero dei lati, cioè quale n scegliere. Le possibilità non sono poi tante: i poligoni regolari che tassellano sono solo tre, il triangolo equilatero, il quadrato e l'esagono regolare, in quanto hanno gli angoli interni che dividono esattamente l'angolo giro: 60°, 90° e 120° sono la sesta, la quarta e la terza parte di 360°».

Alice «E devo scegliere a caso?»

Stregatto «Non si sceglie mai a caso, bambina mia. Se vuoi puoi continuare a cercare la figura che ha l'area maggiore, sempre tenendo presente che la corda massima deve essere unitaria».

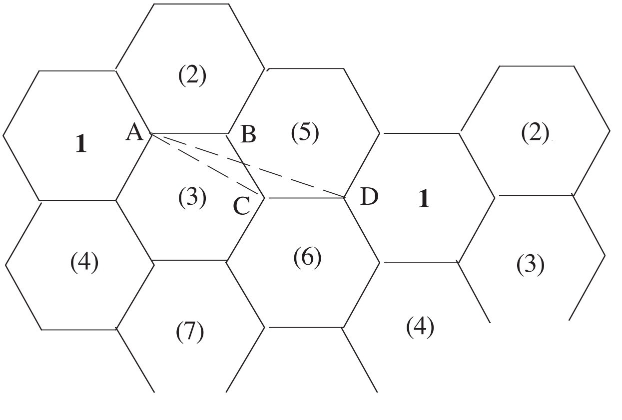
Alice «Vediamo un po': facendo qualche calcolo, il triangolo equilatero ha area $\sqrt{3}/4$, il quadrato $1/2$ e l'esagono regolare $3\sqrt{3}/8$, che è la più grande, poco più di 0,6495. Punterei sull'esagono regolare! Corda massima che misura 1, dunque doppio del lato $1/2$».



Stregatto «E va bene. Adesso pensa ad un piano ricoperto da esagoni con corda massima unitaria, che dunque possono essere colorati ciascuno di uno stesso colore: basta che tu stia un po' attenta a colorare bene i lati, per evitare che coppie di punti a distanza unitaria abbiano lo stesso colore, ma non è una cosa difficile, lo farai da sola. Bisogna capire quanti colori servono per fare in modo che due di questi esagoni con lo stesso colore non abbiano punti distanti 1».

Alice «Ad esempio due esagoni adiacenti, cioè con un lato in comune, devono essere colorati diversamente».

Stregatto «Certo, ma non basta. Ci sono anche esagoni non adiacenti che hanno punti a distanza unitaria e che dunque devono essere colorati con due diversi colori. Ad esempio AB e AC misurano rispettivamente $1/2$ e $\sqrt{3}/2$ e se prolunghi un po' tali segmenti devi concludere che gli esagoni che hanno tali punti come vertici non possono essere colorati con lo stesso colore».



Alice «E allora? Quale altro esagono posso colorare con il colore 1?»

Stregatto «Guarda bene la figura: AD è abbastanza lungo, misura addirittura $\sqrt{7}/2$.

Dunque gli esagoni che contengono le lettere A e D sono abbastanza lontani da poter essere colorati con lo stesso colore. Ed un ragionamento del genere vale per tutte le coppie di esagoni a quella distanza!»

Alice «In conclusione, quanti colori mi servono?»

Stregatto «Basta contare: per colorare correttamente questi esagoni hai bisogno di sette colori. Se n'erano già accorti in parecchi, il primo è stato un certo Hadwiger; molti grandi matematici si sono occupati di queste cose: hai mai sentito parlare di un certo Erdös?»

Alice «No, non conosco questo signore. Però sono un po' delusa: visto quello che avevamo fatto all'inizio speravo di cavarmela con quattro».

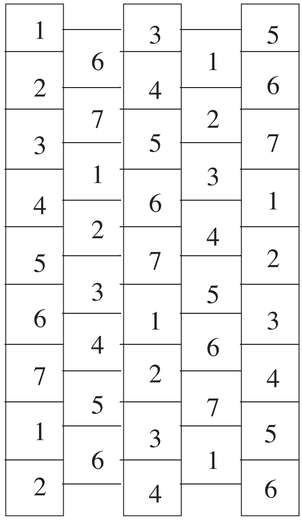
Stregatto «Ma perché delusa, cara bambina? Sette è un numero come un altro: in matematica non ci sono numeri belli e numeri brutti. Il fatto che sette sia maggiore di quattro non è una sconfitta. E poi, parlando di colorazioni, il quattro ha già avuto il suo momento di gloria: tanto tempo fa, nel 1852, uno studente, un certo Francis Guthrie, cercava di colorare una carta geografica in modo che due nazioni confinanti avessero colori diversi…».

Alice «Non mi interessano le carte geografiche di questo Francis. Voglio colorare la mia lavagna, io: non si può abbassare questo limite di sette colori?»

Stregatto «Non ho detto questo: tu hai costruito una tassellazione del piano molto simpatica e anche famosa, che rispetta tutte le regole del gioco e che ti dice che con sette colori ce la fai. Ma non è certo detto che questa soluzione sia l'unica! Intanto, non è unica per quanto riguarda le dimensioni: tieni presente che i lati degli esagoni potrebbero essere anche un po' più piccoli di 1/2 basta che la misura del segmento AD non sia minore di 1. Naturalmente non devi esagerare: se vuoi divertirti a fare qualche semplice calcolo, puoi trovare che la misura della corda massima del tuo esagono deve stare tra $2/\sqrt{7}$ e 1: infatti se fosse minore di $2/\sqrt{7}$ il segmento AD sarebbe troppo piccolo e non potresti più colorare con lo stesso colore gli esagoni che nella tua figura contengono le lettere A e D; ma se invece fosse maggiore di 1 avresti due punti dello stesso esagono a distanza unitaria colorati con lo stesso colore, cosa che come sai è proibita; considerando poi che la corda massima dell'esagono regolare, come tu hai notato, è il doppio del suo lato, la misura del lato deve stare tra $1/\sqrt{7}$ e1/2 Scegliendo ad esempio un lato che misura 2/5 puoi permetterti di non preoccuparti dei punti che si trovano sul perimetro di uno stesso esagono».

Alice «Tutto qui? Se è solo una questione di dimensioni, il limite dei sette colori resta comunque valido».

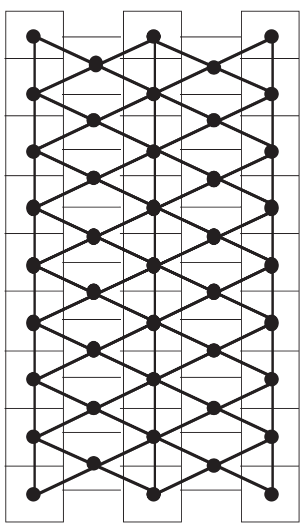
Stregatto «Eh no, non si tratta solo di dimensioni! Nel tuo ragionamento hai introdotto molte ipotesi implicite: quella di usare solo figure poligonali, poligoni tutti uguali, poligoni di area massima eccetera. Anche volendo usare poligoni regolari e tutti uguali la tua soluzione non è la sola possibile: ad esempio, si può colorare il piano con dei quadrati di lato $\sqrt{2}/2$ usando ancora sette colori…».



Alice «Ah, ma allora tutte le preoccupazioni che mi hanno portato a scegliere l'esagono erano inutili!»

Stregatto «Inutili? Fino ad un certo punto: tieni presente che questi quadrati di lato $\sqrt{2}/2$, collocati così, si comportano un po' come degli esagoni».

Alice «Strano davvero: io non ho mai visto dei quadrati che si comportano come degli esagoni».



Stregatto «Vedrai che quello che dico non è poi così strano: prendi un punto al centro di ogni quadrato e collega due di questi punti se e solo se i due quadrati corrispondenti hanno una parte di contorno in comune. Otterrai una specie di ragnatela che, quando sarai un po' più grande, ti insegneranno a chiamare "grafo duale"».

Alice «Che nome buffo, grafo duale: ma per adesso io posso continuare a chiamarla ragnatela, vero? È molto più carino».

Stregatto «Certo, ragnatela andrà benissimo. Adesso costruisci la tua ragnatela e poi, quando ne avrai voglia, con le stesse regole, ripeterai la costruzione di una ragnatela nel caso dei tuoi esagoni. Forse quello che disegnerai non avrà proprio le stesse dimensioni della ragnatela che hai disegnato adesso, ma… la sua forma ti farà capire perché poco fa ti dicevo che a volte i quadrati possono comportarsi come degli esagoni».

Note

Il problema della determinazione del minimo numero di colori che servono per colorare il piano R^2 in modo che ogni coppia di punti distanti 1 sia associata a due diversi colori è un problema aperto (2002): tale numero è limitato dai valori 4 e 7, come notato nel corso dell'articolo. Per un'introduzione alla questione e per una rassegna delle estensioni agli spazi *n*-dimensionali si veda: Meliddo, 2001, che riporta molte indicazioni bibliografiche specialistiche. Per un'elementare panoramica sulla Teoria dei Grafi si veda ad esempio: Ore, 1965. Ricco di spunti è Wells, 1991.

Bibliografia

Meliddo, M.
Sulle colorazioni di spazi metrici, Tesi di Laurea, Università degli studi di Roma «La Sapienza», anno accademico 2000-2001, 2001.

Ore, O.
I grafi e le loro applicazioni, Zanichelli, Bologna, 1965.

Rogers, C.A.
A note on coverings, *Mathematica* 4, 1-6, 1957.

Szekely, L.A.
Erdös on unit distances and the Szemerédi-Trotter theorems, *Paul Erdös amd his Mathematics*, Bolyai Soc. Math. Stud., Budapest, 2000.

Wells, D.
Dictionary of Curious and Interesting Geometry, Penguin, London, 1991.

Woodall, D.R.
Distances realized by sets covering the plane, *J. Combin Theor.* Ser. A 14, 187-200, 1973.

2. Trascrizione del «Rapporto intermedio su uno *screening* della valnite»

Giorgio Mainini

Rapporto intermedio su uno *screening* della valnite
Oliver Kreuzfelder Jakobssen[1]

«Valnite» è il nome popolare della *Sindrome degenerativa del ductum valnycense* (SDDV, nei paesi anglosassoni DVDS)[2].

La valnite è una sindrome molto grave di cui soffre circa l'1‰ di alcune popolazioni aborigene delle contee meridionali del New Sunsetshire (NSSh): se non tempestivamente curata, conduce alla morte in meno di un anno. La sua terapia è inoltre estremamente costosa: circa 100 $[3] al giorno. Disgraziatamente, le popolazioni presso le quali la valnite è endemica possono calcolare su un reddito medio pro capite aggirantesi sui 200 $ mensili. È quindi della massima importanza individuare il più presto possibile chi ne è affetto.

«Ma, quando io avrò durata l'eroica fatica di trascriver questo rapporto da questa scientifica e patinata rivista, e l'avrò dato, come si suol dire, alla luce, si troverà poi chi duri la fatica di leggerlo?

Nell'atto però di chiudere lo scartafaccio, per riporlo, mi sapeva male che un rapporto così interessante dovesse rimanersi tuttavia sconosciuto; perché, in quanto rapporto, può essere che al lettore ne paia altrimenti, ma a me era parso interessante, come dico; molto interessante. "Perché non si potrebbe, pensai, prender la serie de' fatti da questo originale inglese, e rifarne la dicitura?". Non essendosi presentata alcuna obiezion ragionevole, il partito fu subito abbracciato. Ed ecco l'origine della presente "Trascrizione del Rapporto", esposto con un'ingenuità pari all'importanza dell'originale medesimo.

1. Docente di Analisi percentuale alla South New Zeeland University.
2. Da Antoinette Virginie Valny, 1940, Sault (Francia), vivente, etnobiologa molecolare. A lei si devono studi fondamentali sulla valnite, in particolare sulle sue cause, sulla sua diffusione epidemiologica ed endemiologica, e sulla sua terapia.
3. Qui, come in seguito, si intende 1 $ al cambio interbancario del 2.1.2002.

Taluni però di que' fatti, certi costumi descritti dal nostro autore, c'eran sembrati così moderni, così strani, per non dir peggio, che, prima di prestargli fede, abbiam voluto compulsare altre riviste; e ci siam messi a frugar nelle memorie scientifiche disponibili in rete, per chiarirci se veramente il mondo cammini anche qui a quel modo. Una tale indagine dissipò tutti i nostri dubbi: a ogni passo ci abbattevamo in cose consimili, e in cose più forti: e, quello che ci parve più decisivo, abbiam perfino ritrovati alcuni studi, de' quali non avendo mai avuto notizia fuor che dal nostro originale, eravamo in dubbio se fossero realmente esistiti».

Di conseguenza, uno *screening* su vasta scala è indispensabile.
La dottoressa Valny ha messo a punto un test molto efficiente e di basso costo: il DVDS-test.
Le sue caratteristiche fondamentali sono: affidabilità (assolutamente straordinaria) del 99% e costo di 1 $ per persona.
Nel 1998 è stato effettuato un primo *screening* su 200'000 aborigeni del NSSh: si vuole qui rendere conto dei risultati ottenuti.

Popolazione testata	200'000 individui scelti a caso		
Risultati attesi	malati	200	(1‰ di 200'000)
	sani	199'800	
Risultati del DVDS-test	malati	2'227	
	sani	197'773	

Si osservino da vicino i risultati del test:
— i 2'227 malati, detti «malati dichiarati», differiscono di pochissimo (dell'1,41% circa) dal risultato prevedibile di 2'196 (vedi in seguito);
— i 197'773 sani, detti «sani dichiarati», risultano da un lato dalla differenza tra 200'000 e 2'227, dall'altro differiscono di pochissimo (meno di un trascurabile 0,02% circa) dal risultato prevedibile di 197'804 (vedi in seguito);
— i 2'196 malati, detti «malati dichiarati prevedibili», risultano dalla somma di 1'998 con 198 (v. in seguito);
— i 1'998 individui, che rappresentano l'1% dei 199'800 sani attesi, sono detti «falsi malati prevedibili»: essi risultano dal fatto che l'affidabilità del test è del 99%. In altre parole, dal fatto che il test sbaglia nell'1% dei casi;
— i 198 individui, che rappresentano il 99% dei 200 malati attesi, sono detti «malati confermati»;
— i 197'802 individui, che rappresentano il 99% dei 199'800 sani attesi, sono detti «sani confermati prevedibili»;
— i 2 individui, che rappresentano l'1% dei 200 malati attesi, sono detti «falsi sani prevedibili»: pure essi risultano dal 99% di affidabilità del test.

La spesa finora sostenuta dalle Autorità sanitarie del NSSh è stata di 200'000 $, 1 $ per test (il personale medico e paramedico, che ha somministrato il test, ha lavorato all'insegna del volontariato).

Ci si aspetta ora una nuova spesa: quella per le cure dei malati (non si è ancora decisa la chiave di ripartizione fra Ente pubblico e malati. Il Milton[4] Party propone infatti la chiave detta del «50/50», mentre il Maynard[5] Party propone, in linea del tutto interlocutoria, la chiave detta del «90/10»).

Poiché i soggetti che, in base ai risultati del test, vanno (o andrebbero) curati sono 2’227, cioè i «malati dichiarati», la spesa è valutata, per eccesso, a 222’700 $ al giorno. «Per eccesso», perché le Autorità sanitarie si dicono certe che non tutti i «malati dichiarati» si sottoporranno alla cura, chi per un motivo, chi per l’altro.

D’altro canto, i 2 «falsi sani» si saranno estinti entro l’anno.

La preoccupazione delle Autorità sanitarie è dovuta alla seguente considerazione: dei 2’227 «malati dichiarati» da curare, se tutti decidessero di sottoporsi alla terapia, solo 198 sono «malati confermati». Agli altri 2’029 verrà, in pratica, «messo un cerotto sulla gamba di legno», essendo essi di fatto sani, e risultati «malati» solo per il grado di affidabilità del test.

Altrimenti detto: dei 222’700 $ al giorno, solo 19’800 $ saranno spesi per cure effettivamente utili.

Si noti che 19’800 rappresenta solo, circa, l’8,89% della spesa prevista, se pur per eccesso.

Tale valore percentuale viene indicato con s, che corrisponde anche alla percentuale di «malati confermati» rispetto ai «malati dichiarati».

Ora, poiché anche nel NSSh il contenimento della spesa pubblica è una priorità politica dichiarata, le Autorità, e non solo quelle sanitarie, si sono seriamente poste il problema se non sia meglio, tutto sommato, lasciar morire di SDDV chi ne è affetto e, parafrasando il titolo di un famoso film, «imparare a non preoccuparsi e ad amare la SDDV». Il dibattito è aperto.

Ultimamente, da parte di chi trova eticamente discutibile lasciar morire i malati senza tentare terapia alcuna, è venuta la proposta di rifare il test solo sui «malati dichiarati» per uscire dal dilemma su una base scientificamente corretta. Il Dipartimento di Statistica della mia Università si è pensosamente chinato sul problema: i risultati sono attesi entro fine dicembre 2003.

Sempre ultimamente, qualche membro dell’ala umanitaria del Milton Party si è detto favorevole ad una chiave di ripartizione (Ente pubblico)/malati dell’«80/20» se il valore di s dovesse superare il 75%. La dottoressa Valny è stata incaricata di approfondire gli studi sul DVDS-test onde migliorarlo, portandolo al grado di affidabilità necessario.

4. Da Milton Friedman, (nato nel 1912), premio Nobel per l’economia nel 1976. Fautore del *laissez faire* in economia, fu ispiratore e consulente dei «Chicago boys», a loro volta consulenti economici di Augusto Pinochet dal 1973 al 1989.

5. Da John Maynard Keynes (1883-1946), economista inglese. Condannò il *laissez faire* in economia, invocò l’uso dei lavori pubblici contro la disoccupazione e si batté contro la paura dei reggitori delle finanze pubbliche per i deficit di budget.

Commento a «Rapporto intermedio su uno *screening* della valnite»

Redazione

Gli ultimi due paragrafi del «Rapporto» ci hanno lasciati perplessi.

Osservazione al penultimo paragrafo

Popolazione testata	2’227 malati dichiarati		
Risultati attesi	malati:	198 (i malati confermati)	
	sani:	2’029 (=2’227 -198)	
Risultati attesi del DVDS-test	malati:	216	(= 20.29+196,2 = 1% di 2’029+99% di 198)
	sani:	2’011	(= 2’008.71+1,98 = 99% di 2’029+1% di 198)

Il numero di 216 «malati confermati» risultante dal test di conferma è assai vicino al numero di 200 malati che ci si può aspettare in una popolazione di 200’000 individui. Come mai «i risultati sono attesi entro fine dicembre 2003» soltanto? «Il Dipartimento di Statistica della mia [*di Oliver Kreuzfelder Jakobssen*] Università» dorme forse in piedi?

Osservazione all’ultimo paragrafo

Ci siamo «messi sotto» di buzzo buono e abbiamo ottenuto i seguenti risultati. Ponendo

P: numero di individui scelti a caso
s: vedi la sua definizione nel rapporto
a: affidabilità del DVDS-test, in percento
m: incidenza di malati sulla popolazione, in permille
m_{att}: numero dei malati attesi
s_{att}: numero dei sani attesi
m_{conf}: numero dei malati confermati
f_m: numero dei falsi malati
m_{dich}: numero dei malati dichiarati

si ha

$$m_{att} = \frac{P \cdot m}{1000}$$

$$s_{att} = \frac{P \cdot (1000 - m)}{1000}$$

$$m_{conf} = \frac{m_{att} \cdot a}{100}$$

$$f_m = \frac{s_{att} \cdot (100 - a)}{100}$$

$m_{dich} = m_{conf} + f_m$

Dovrà essere

$m_{dich} = m_{conf} + f_m$ **(A)**

da cui, risolvendo rispetto a s,

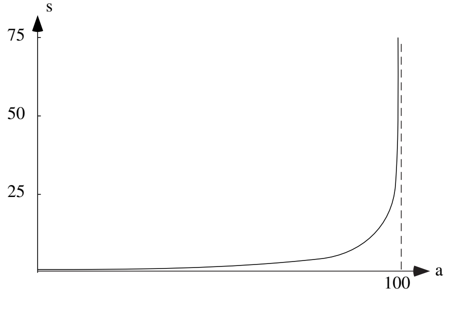
$$s = \frac{50\ a\ m}{a \cdot (m - 500) - 50 \cdot (m - 1000)}$$

Nel caso in esame è m=1, dunque

$$s = \frac{50\ a}{49950 - 499\ a}$$

e si vede bene che il grafico di s in funzione di a è un'iperbole con asintoto verticale per

$$a = \frac{49950}{499} \cong 100{,}1$$



La figura riproduce solo una parte dell'iperbole, perché, ragionevolmente, dev'essere $a \in \left]0;100\right[$.

Si vede inoltre che P è ininfluente.

Se si desidera che s assuma un valore maggiore o uguale a 75%, dovrà essere

$$\frac{50a}{49950 - 499a} \geq 75$$

cioè, come unica soluzione sensata,

$a \geq 99{,}9666...$

Che si possa ottenere un test con un tale grado di affidabilità ci sembra del tutto impossibile.

Non per «buttarla in politica», ma ci pare che il Milton Party non abbia alcuna intenzione di accettare la chiave dell'«80/20».

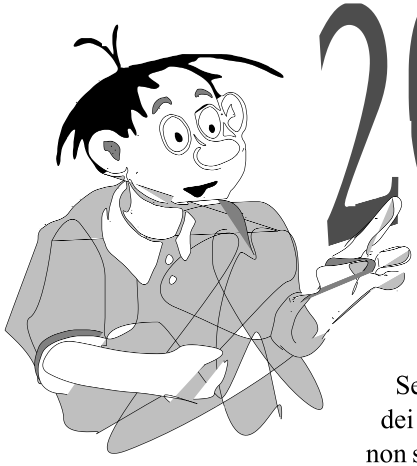
Quiz numero 29

Aldo Frapolli

Caro Moore,
ti ricordi di mio zio Load,
quello stravagante, amante dei numeri?

Mi ha confessato un desiderio molto curioso. Desidera fortemente campare almeno fino a 97 anni.
È nato nel 1951 ed è convinto che l'anno del suo novantasettesimo compleanno, cioè il 2048, sia una rarità che vale la pena festeggiare.

2048 ?!
Che cos'ha di speciale questo numero?



...

10 = 1+2+3+4
27 = 13+14
2'004 = 667+668+669
...

Secondo lui è uno dei "rari" numeri che non si possono scrivere come somma di due o più numeri consecutivi.

L'ultimo con le stesse caratteristiche è stato visto nei primi anni dello scorso millennio. Il prossimo lo si vedrà solo fra più di 2000 anni.

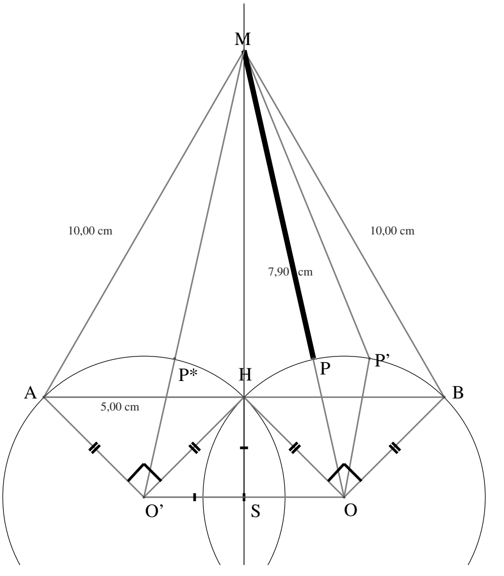
Sarà vero quanto affermato dallo zio di Archie?

Attendiamo vostre opinioni, congetture, dimostrazioni, ... tutto quello che vorrete farci pervenire sul tema, insomma. Sia in forma cartacea che elettronica. Quest'ultima all'indirizzo alfra@ticino.com

Il miglior contributo verrà premiato anche stavolta con un bel libro.

Soluzione del Quiz numero 28

1. Costruiamo la figura con Cabri in scala 1:10. Facendo scorrere il punto P lungo i due archi si legge il valore minimo MP’=7,9 cm corrispondenti a circa 79 cm nel problema.



2. Soluzione del problema: abbiamo l’idea di congiungere M con O e si vede che se i punti M, P, O sono allineati allora MP è la distanza minima. Ecco perché:
$MO<MP'+P'O$, $MP+PO<MP'+P'O$.
Siccome PO=P’O segue $MP<MP'$
Lo stesso vale per P simmetrico di P.*

3. Calcolo (con Excel)

	A	B	C	D	E	F
1	MH	=	RADQ(100^2-50^2)	≈	86.60	(cm)
2	MS=MH+HS	≈	86.60+25	≈	111.60	(cm)
3	MO	≈	RADQ(111,6^2+25^2)	≈	114.37	(cm)
4	PO=HO	=	RADQ(25^2+25^2)	≈	35.36	(cm)
5	**MP=MO-PO**	≈	114,37-35,36	≈	**79.01**	(cm)
6						

Questo risultato coincide, approssimativamente, con quello trovato con Cabri.

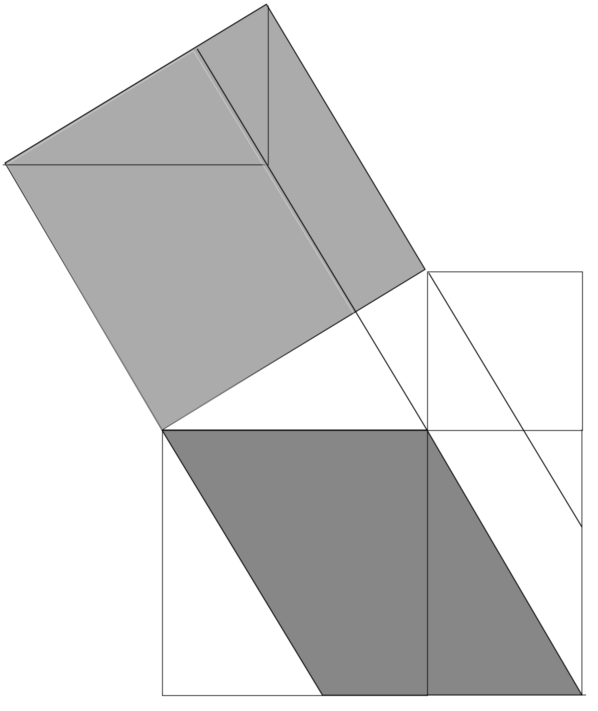
Quella che vi abbiamo appena proposto fin nei dettagli è la soluzione vincente, inviataci da Angelica, Alessandra, Anna, Sarah, Maja, Paola, Fabian, Daniel, Lucia, Valeria, Ramona, Lisa e Andrea, classe IVBC della scuola media di Breganzona.
È stata ritenuta la migliore, fra quelle pervenuteci, per la ricchezza del percorso seguito: dalla congettura scaturita grazie all’uso di Cabri, ad una vera e propria dimostrazione della stessa; il tutto seguito dal calcolo mediante Excel della lunghezza del segmento minimo.
Complimenti ai vincitori! Anche se il calcolo del valore esatto di MP sarebbe stata la cigliegina sulla torta. Si sono aggiudicati il libro *Più che ‘l doppiar de li scacchi s’inmilla* di Bruno D’Amore.
E complimenti anche a tutti gli altri amici che ci hanno inviato le loro soluzioni. Questa volta sono stati veramente numerosi e ne siamo felici.
A proposito, qual era il valore esatto della distanza minima? Eccolo, preso a prestito da un’altra soluzione pervenuta:

$$MP = \frac{\sqrt{14+4\sqrt{3}}-\sqrt{2}}{4}(cm)$$

V. Dalla bricolla

1. Senza parole

Antonio Steiner



Commento redazionale

È con particolare piacere che pubblichiamo questa nuova sollecitazione di Antonio Steiner, caro amico e appassionato sostenitore della nostra rivista. Dal punto di vista scientifico-epistemologico, la figura ha un significato che va al di là della semplice – quanto geniale – dimostrazione del teorema di Pitagora. Richiama le dimostrazioni dei matematici dell'India vedica, autori dei *Sulbasutra* (500 a.C. circa), e addirittura quelle dei babilonesi della dinastia di Hammurabi (1792-1750). Senza paura di essere parziali, aggiungiamo che se qui ci troviamo di fronte ad una elegante e stimolante raffigurazione, dall'altro (nella dimostrazione di Euclide) ci si presenta una serie di deduzioni (intellettualmente poco accattivanti) che fanno capo a non pochi teoremi dimostrati in precedenza. Due stili diversi, sicuramente, ma anche l'eleganza figurale stimolante da una parte e la pesante complessità logico-deduttiva dall'altra[1].

1. Si veda, ad esempio, l'articolo di Gianfranco Arrigo, *Pitagora tra Oriente e Occidente*, Arte e Storia, Edizioni Ticino Management, Lugano, 2003.

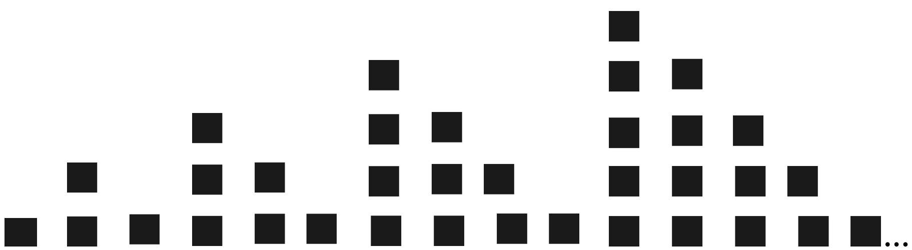
2. Giocando con i numeri triangolari e tetraedrici

Gianfranco Arrigo

Somma dei primi n numeri naturali

Sul numero 45 della presente rivista, a pag. 87, a firma Corrado Guidi, si trova un'interessante attività didattica centrata sul famoso aneddoto attribuito al piccolo Johann Carl Friedrich Gauss. Il bambino (pare frequentasse ancora la scuola elementare) trovò un modo ingegnoso per calcolare la somma di tutti i numeri naturali da 1 a 100, estremi compresi. Il suo metodo è essenzialmente numerico.

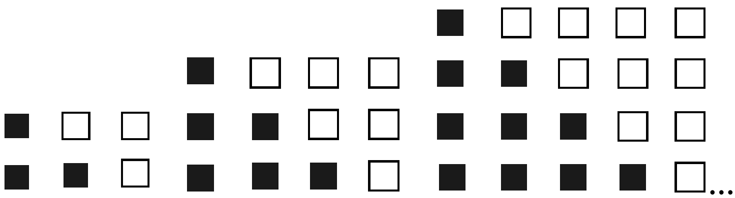
Lo stesso problema può anche essere risolto, in modo altrettanto elegante e semplice, per via geometrica, o grafica, se si preferisce. Tutto ha origine con… un gioco: quello che concerne i numeri triangolari. Eccoli:



1   3=1+2   6=1+2+3   10=1+2+3+4   15=1+2+3+4+5
…

Quale sarà il 100-esimo numero triangolare T_{100}? E l'n-esimo T_n?

Constatazione vincente:



$T_2 = (2 \cdot 3) : 2$ $T_3 = (3 \cdot 4) : 2$ $T_4 = (4 \cdot 5) : 2$ …

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

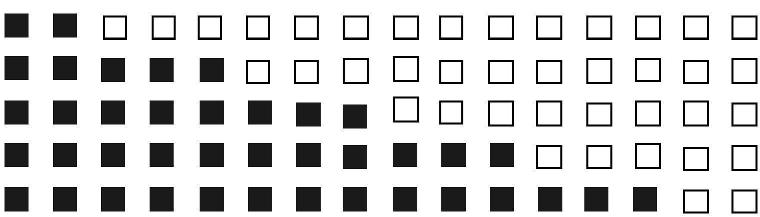
che coincide con la nota formula dimostrata per via algebrica.

Somma di addendi equispaziati

Il metodo può essere esteso alla somma di numeri in «progressione aritmetica», cioè numeri che, ordinati in senso crescente, sono tali che, a partire dal secondo, la differenza tra uno qualunque e il suo precedente è costante. Si possono chiamare anche «numeri equispaziati»: anche se l'espressione non è molto gradevole, ha pur sempre il vantaggio, rispetto all'altra, di essere più comprensibile.

Per esempio, una somma di 5 numeri equispaziati è: $S_5 = 2+5+8+11+14$. Quanto vale?

Constatazione vincente:



$S_5 = [5 \cdot (14+2)] : 2 = 40$

Congettura:

se p è il primo numero, u l'ultimo, n il numero di addendi:

$$S_n = \frac{n \cdot (p+u)}{2}$$

se poi si osserva che $u = p + (n-1)\,d$,

con d che rappresenta la differenza costante tra due addendi consecutivi, sostituendo si ottiene:

$$S_n = n\left[p + \frac{(n-1)\,d}{2}\right]$$

Ovviamente si potrà obiettare che queste formule andrebbero dimostrate. Nell'ottica strettamente matematica la dimostrazione può essere fatta per induzione su n ed è un esercizio alla portata di un allievo liceale.

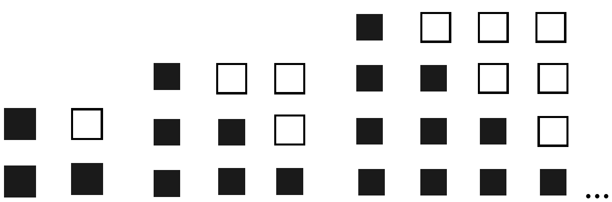
Ma al didatta interessa anche l'immagine mentale che sta dietro a questi apprendimenti. Bisogna riconoscere che l'immagine figurale appena presentata è forse la più nitida fra tutte quelle che concorrono alla formazione del concetto: e questo non solo per l'intelletto di un ragazzino della scuola media, ma anche per quella del matematico più avvezzo alla risoluzione di problemi. Ce lo ha detto più volte anche Paul Erdös.

Verso la somma dei quadrati dei primi n numeri

Riprendiamo i numeri triangolari:

$\Delta_1 = 1 \quad ; \quad \Delta_2 = 3 \quad ; \quad \Delta_3 = 6 \quad ; \quad \Delta_4 = 10 \quad ; \quad \Delta_5 = 15$

Se li rappresentiamo graficamente e combiniamo due numeri triangolari successivi, scopriamo una cosa interessante:

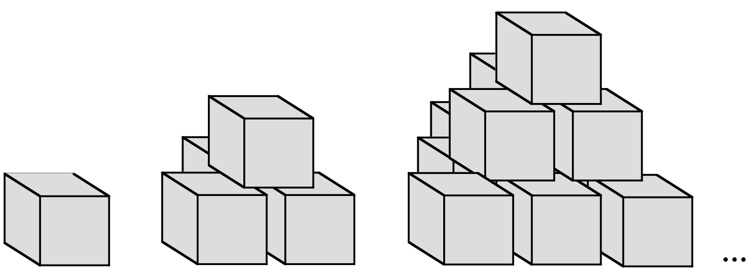


1 + 3 = 4 **3 + 6 = 9** **6 + 10 = 16** **…**

Congettura:

$\Delta_{\mathbf{n-1}} + \Delta_{\mathbf{n}} = \mathbf{n^2}$

A questo punto, compiamo un passo decisivo: scopriamo i numeri tetraedrici.



$\mathbf{T_1 = 1}$ $\mathbf{T_2 = 1 + 3 = 4}$ $\mathbf{T_3 = 1 + 3 + 6 = 10}$ **…**

$\mathbf{T_1} = \Delta_{\mathbf{1}}$ $\mathbf{T_2} = \Delta_{\mathbf{1}} + \Delta_{\mathbf{2}}$ $\mathbf{T_3} = \Delta_{\mathbf{1}} + \Delta_{\mathbf{2}} + \Delta_{\mathbf{3}}$ **…**

Per calcolare T_n, facciamo una manipolazione, per esempio con T_5: consideriamo la somma di tre T_5 disposti così:

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & & & 1\\
 & & & 1 & 2\\
 & & 1 & 2 & 3\\
 & 1 & 2 & 3 & 4\\
1 & 2 & 3 & 4 & 5
\end{array}
\quad + \quad
\begin{array}{rrrrr}
 & & & & 1\\
 & & & 2 & 1\\
 & & 3 & 2 & 1\\
 & 4 & 3 & 2 & 1\\
5 & 4 & 3 & 2 & 5
\end{array}
\quad + \quad
\begin{array}{rrrrr}
 & & & & 5\\
 & & & 4 & 4\\
 & & 3 & 3 & 3\\
 & 2 & 2 & 2 & 2\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{rrrrr}
 & & & & 7\\
 & & & 7 & 7\\
 & & 7 & 7 & 7\\
 & 7 & 7 & 7 & 7\\
7 & 7 & 7 & 7 & 7
\end{array}
$$

Deduciamo l'uguaglianza:

$$3\,T_5 = 3 \cdot (1+3+6+10+15) = (1+2+3+4+5) \cdot 7$$

Congettura:

$$3\,T_n = 3\left(\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n\right) = \Delta_n \cdot (n+2) = \frac{n\,(n+1)}{2}\,(n+2)$$

ossia

$$\mathbf{T_n = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{6}}$$

D'altra parte:

$$T_n + T_{n-1} = \left(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \ldots + \Delta_n\right) + \left(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \ldots + \Delta_{n-1}\right)$$

$$\mathbf{2^2} \qquad \mathbf{3^2} \qquad \mathbf{n^2}$$

Da cui possiamo ricavare:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{6} + \frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{6} = \frac{n\,(n+1)\,(n+2+n-1)}{6} = \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6}$$

Anche questa formula – del resto riportata su tutti i formulari di matematica –, all'occorrenza, può essere dimostrata per induzione completa.

Commento conclusivo

Questa attività può essere proposta come laboratorio matematico in una quarta media o in una prima liceo. Al di là dei risultati strettamente matematici, la sua peculiarità consiste nel permettere di ragionare partendo da situazioni particolari, rappresentabili graficamente o addirittura riproducibili manualmente con materiali di fortuna. Ciò facilita notevolmente il processo di induzione che porta alla generalizzazione mediante la formulazione di congetture tradotte in formule algebriche. Proprio per questo, l'attività è vivamente consigliata in tutti i casi in cui si osservasse negli allievi un'importante difficoltà nel produrre ragionamenti induttivi.

1. Sezioni piane di un cubo Seconda parte[1]

Edoardo Montella

2.8. Sezione trapezio isoscele

Nel caso della precedente fig. 23 (vedi BdM 44), il cubo è diviso dal piano per i punti EGLI nei due solidi S_1 e S_2:

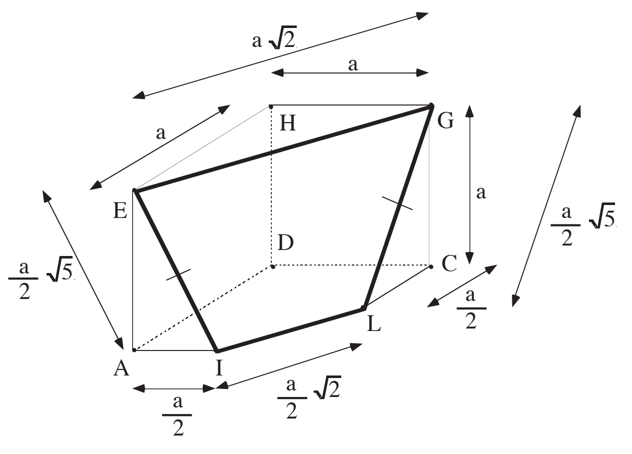


fig. 24

1. La prima parte è apparsa sul numero 44, maggio 2002.

Solido S_1

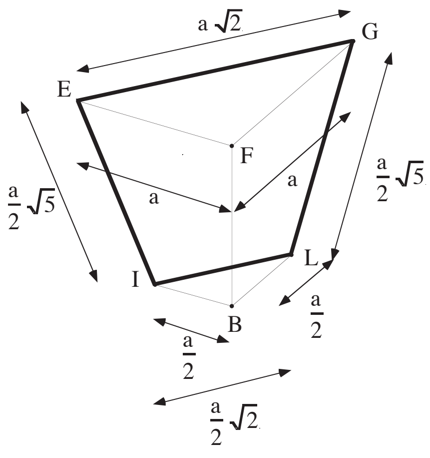


fig. 25

Solido S_2: tronco di piramide di altezza pari allo spigolo del cubo
Calcoliamo le aree totali dei due solidi iniziando con l'analizzarne gli sviluppi:

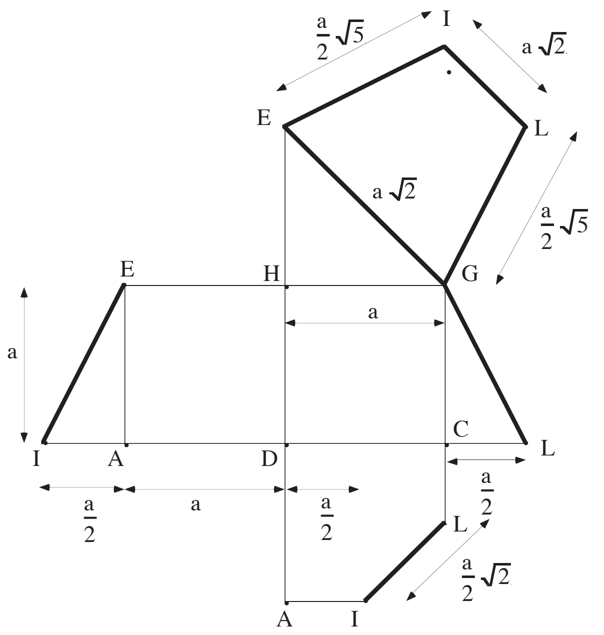


fig. 26

Sviluppo piano del solido S_1

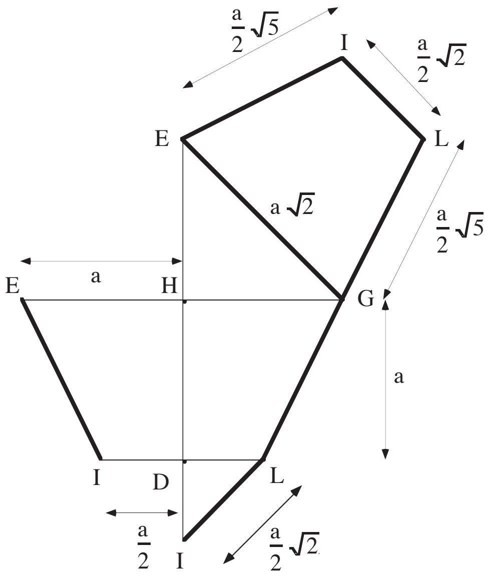


fig. 27

Sviluppo piano del tronco di piramide S_2
Evidenziamo ora il trapezio-sezione EGLI:

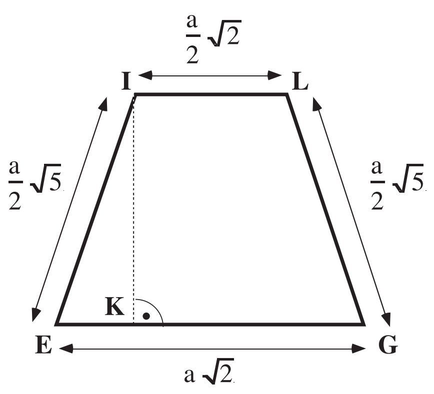


fig. 28

Si ha:

$$\overline{EK} = \frac{a\sqrt{2} - \frac{a}{2}\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{4}\sqrt{2} \ \ (u)$$

$$\overline{IK} = \sqrt{\left(a\sqrt{5}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3}{4}a\sqrt{2} \ \ (u)$$

A questo punto possiamo calcolare facilmente le due aree totali:

AT$_{S1}$ =

$$2a^2 + 2\cdot\frac{a\cdot\frac{a}{2}}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{\left(a\sqrt{2}+\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)\cdot\frac{3}{4}a\sqrt{2}}{2} + \left(a^2 - \frac{a^2}{8}\right) = 5a^2 \ \left(u^2\right)$$

AT$_{S2}$ =

$$\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} + \frac{a^2}{2} + 2\cdot\frac{\left(a+\frac{a}{2}\right)\cdot a}{2} + \frac{\left(a\sqrt{2}+\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)\cdot\frac{3}{4}a\sqrt{2}}{2} = \frac{13}{4}a^2 \ \left(u^2\right)$$

Verifichiamo i risultati:

AT$_{S1}$ + **AT$_{S2}$** =

$$5a^2 + \frac{13}{4}a^2 = 6a^2 + 2\cdot\frac{9}{8}a^2 \ \left(u^2\right) = AT_{cubo} + 2\cdot A_{trap.\ sezione}$$

Calcoliamo ora i volumi dei due solidi S_1 e S_2; ancora una volta (come nel paragrafo precedente) scegliamo una strada un po' più lunga, ma molto più pagante sotto il profilo didattico.

Iniziamo dal primo solido; osserviamo che, tracciando le diagonali DE, DI, DL, DG, esso viene scomposto in quattro piramidi:

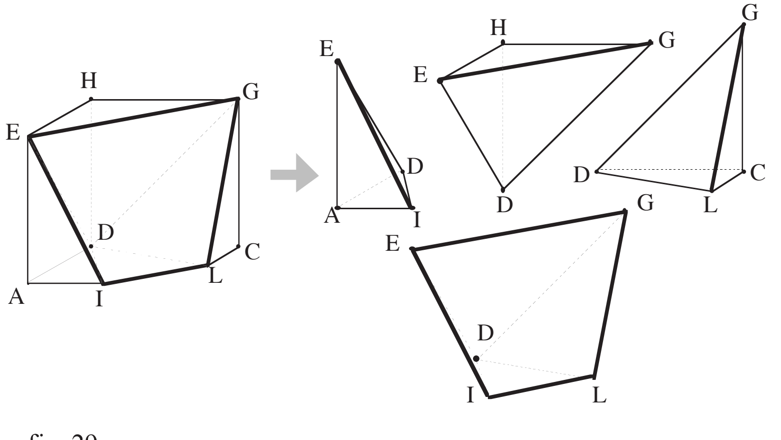


fig. 29

Osserviamo che le due piramidi AIDE e DLCG sono congruenti.

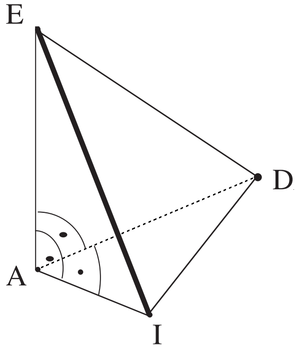


fig. 30

Gli angoli EAI, DAI, EAD sono retti. Si ha inoltre:

$$\overline{AI} = \frac{a}{2}(u) \quad \overline{AD} = a(u) \quad \overline{AE} = h = a(u)$$

$$V_1 = V_2 = \frac{\dfrac{\frac{a}{2} \cdot a}{2} \cdot a}{3} = \frac{a^3}{12}\left(u^3\right)$$

Consideriamo la seconda piramide, EHGD:

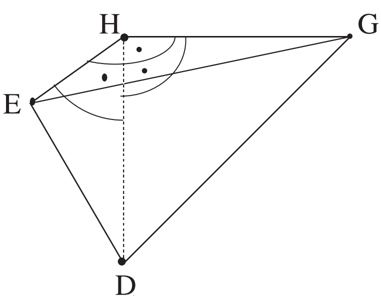


fig. 31

Gli angoli EHG, EHD, DHG sono retti. Si ha inoltre:

$$\overline{EH} = \overline{HG} = \overline{HD} = a(u)$$

$$V_3 = \frac{\dfrac{a^2}{2} \cdot a}{3} = \frac{a^3}{6}\left(u^3\right)$$

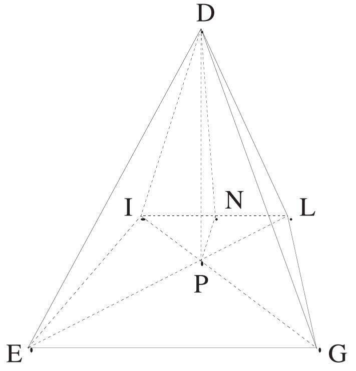


fig. 32

L’ultima piramide (EILGD) è una piramide non retta che ha per base il trapezio isoscele sezione. Con considerazioni empiriche[2] (derivate da un’attenta osservazione di un modellino in cartone) si può dedurre che l’altezza cade nel punto di incontro della diagonale di base.

Consideriamo il triangolo DPN

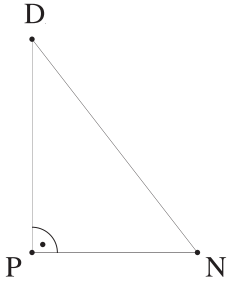


fig. 33

dove DN è l’altezza del triangolo isoscele DIL:

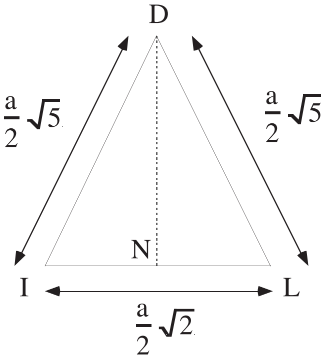


fig. 34

2. La dimostrazione esula dai limiti di un lavoro didattico rivolto alla scuola media.

Si ha: $\overline{NL} = \frac{a}{4}\sqrt{2}(u)$ e $\overline{DN} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\sqrt{5}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3}{4}a\sqrt{2}\ (u)$

Analizzando bene il trapezio-sezione EGLI:

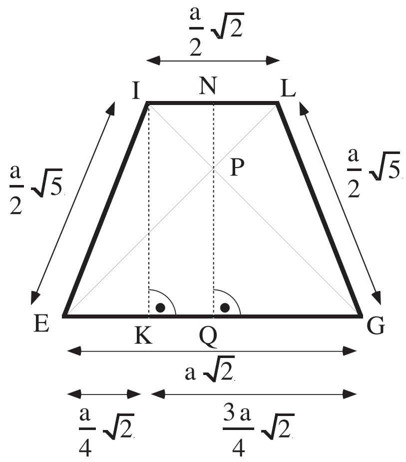


fig. 35

si ha

$$\overline{IK} = \overline{NQ} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\sqrt{5}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3}{4}a\sqrt{2}(u)$$

inoltre IKG e PQG sono simili, quindi:

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{IK}} = \frac{\overline{QG}}{\overline{KG}} \quad \Rightarrow \quad \overline{PQ} = \frac{a}{2}\sqrt{2}\ (u)$$

e infine:

$$\overline{PN} = \frac{3}{4}a\sqrt{2} - \frac{a}{2}\sqrt{2} = \frac{a}{4}\sqrt{2}\ (u)$$

A questo punto, tornando al triangolo DPN, possiamo aggiungere:

$$\overline{DP} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}a\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\sqrt{2}\right)^2} = a(u)$$

Quindi:

$$V_4 = \frac{\dfrac{\left(a\sqrt{2} + \dfrac{a}{2}\sqrt{2}\right) \cdot \dfrac{3}{4}a\sqrt{2}}{2} \cdot a}{3} = \frac{9}{24}a^3 \ \left(u^3\right)$$

E infine:

$$V_{S1} = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 2 \cdot \frac{a^3}{12} + \frac{a^3}{6} + \frac{9}{24}a^3 = \frac{17}{24}a^3 \ \left(u^3\right)$$

Consideriamo ora il secondo solido S_2, il tronco di piramide; esaminiamolo in due posizioni diverse, dopo aver aggiunto in ognuna la piramide LBIV per semplificare i calcoli:

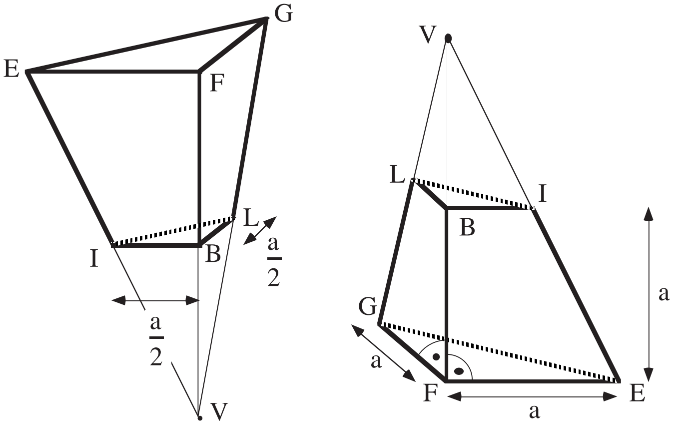


fig. 36

Estrapoliamo dalla figura precedente il triangolo VFE:

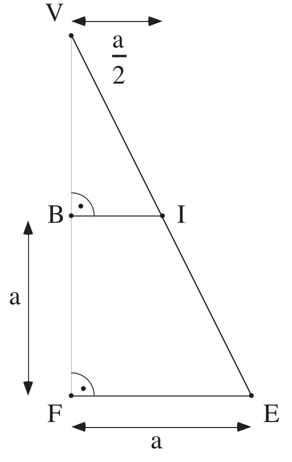


fig. 37

Dall'evidente similitudine dei triangoli VBI e VFE si ha, ponendo

$\overline{VB} = x$:

$$\frac{a+x}{x} = \frac{a}{\frac{a}{2}} \Rightarrow \overline{VB} = a \ (u)$$

Quindi $\overline{VF} = 2a \ (u)$

Calcoliamo ora il volume del tronco di piramide S_2:

$$\mathbf{V}_{S2} = \frac{\frac{a \cdot a}{2} \cdot 2a}{3} - \frac{\frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{2} \cdot a}{3} = \frac{7}{24} a^3 \ (u^3)$$

E infine verifichiamo i risultati:

$$\mathbf{V}_{S1} + \mathbf{V}_{S2} = \frac{17}{24} a^3 + \frac{7}{24} a^3 = a^3 \ (u^3) = V_{cubo}$$

2.9. Sezione pentagonale

Otteniamo una sezione pentagonale quando il piano secante interseca cinque facce del cubo in un segmento e non interseca la sesta faccia (se non, al limite, in un vertice, ma interseca il piano che la contiene).

Esempi

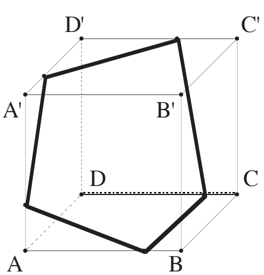


fig. 38

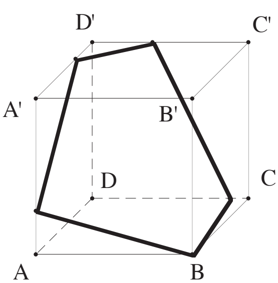


fig. 39

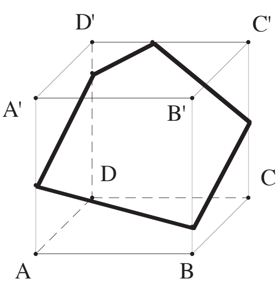


fig. 40

I casi di sezione pentagonale non presentano interesse dal punto di vista metrico, perché i pentagoni sezione non sono mai regolari[3].

Per questo motivo tralascerò lo studio di questo caso, limitandomi agli esempi proposti.

3. Anche questo si potrebbe dimostrare, ma la cosa esulerebbe da una trattazione didattica a livello di scuola media.

2.10. Sezione esagonale

La sezione è un esagono quando il piano secante incontra tutte le facce del cubo in un segmento. L'esagono-sezione è regolare quando il piano sezionante è perpendicolare alla diagonale del cubo e la incontra nel suo punto medio.

Esempi

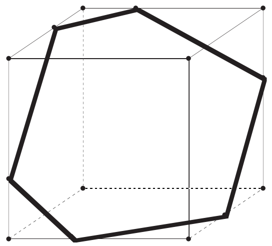


fig. 41

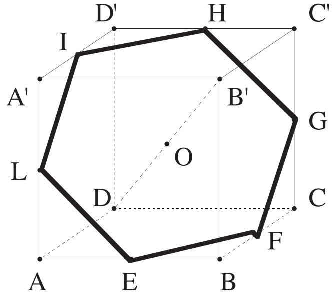


fig. 42

E,F,G,H,I,L sono punti medi di spigoli del cubo: l'esagono è regolare e il suo piano è perpendicolare alla diagonale DB' e passa per il centro O del cubo, che è anche centro dell'esagono regolare.

L'unico caso di un certo interesse dal punto di vista metrico è quello dell'esagono regolare; esaminiamolo più in dettaglio.

2.11. Sezione esagono regolare

In questo caso il piano sezionante divide il cubo in due poliedri di sette facce ciascuno, congruenti perché corrispondenti in una simmetria di centro O.

Riportiamo lo schizzo di uno di questi poliedri e un suo possibile sviluppo:

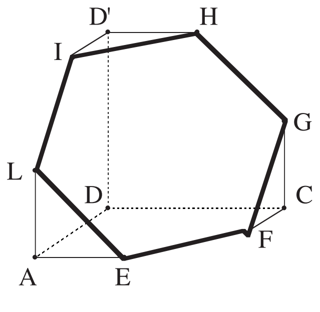


fig. 43

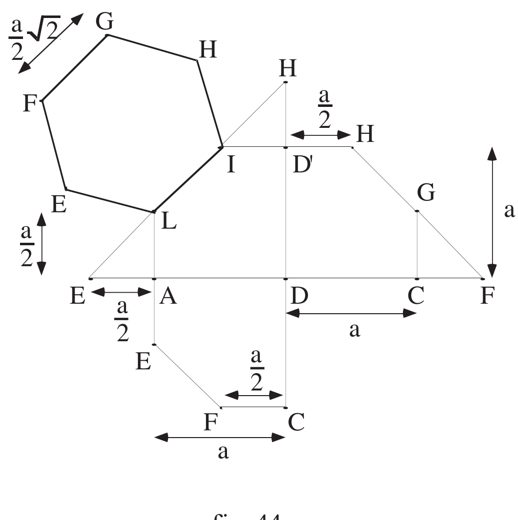


fig. 44

Ed ecco un altro possibile sviluppo del solido (trovato dagli allievi)

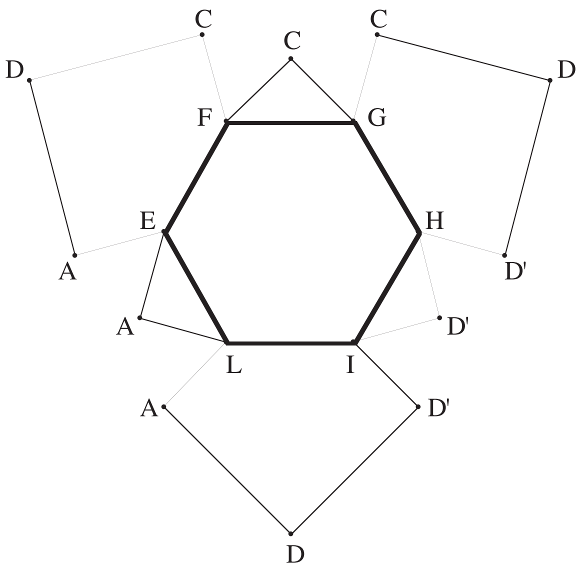


fig. 45

Con considerazioni elementari troviamo che l'apotema a dell'esagono è:

$$a = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\sqrt{2}\right)^2} = \frac{a}{4}\sqrt{6}\ (u)$$

e quindi l'area dell'esagono è:

$$\mathbf{A_{esag.}} = \frac{6 \cdot \frac{a}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{a}{4}\sqrt{6}}{2} = \frac{3}{4}a^2\sqrt{2}\ \left(u^2\right)$$

Per calcolare l'area totale di ognuno dei due poliedri congruenti, basta scomporre e ricomporre sei delle sette figure che compongono lo sviluppo: si osserva che l'area totale è pari alla somma delle aree di tre facce del cubo più l'area dell'esagono sezione. Si ha quindi:

$$\mathbf{A_{t1}} = \mathbf{A_{t2}} = 3a^2 + \frac{3}{4}a^2\sqrt{3} = 3a^2 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\ \left(u^2\right)$$

Per quanto riguarda, infine, il volume di ognuno dei due poliedri la cosa è banale: essendo congruenti, il volume di ognuno di essi è pari a metà del volume del cubo:

$$\mathbf{V_1} = \mathbf{V_2} = \frac{V_{cubo}}{2} = \frac{a^3}{2}\ \left(u^3\right)$$

2. Laboratorio sul poligono qualunque circoscritto a una circonferenza

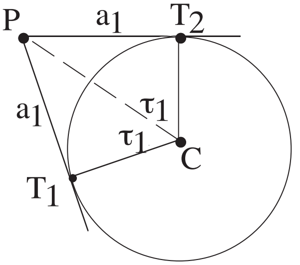
Claudio Beretta

La situazione[1]

Domanda centrale: esiste una relazione che lega il **perimetro** di un qualsiasi poligono circoscritto a una circonferenza e il **raggio della circonferenza**?

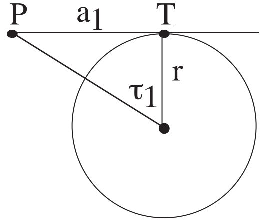
Preliminari

Con a_i indichiamo i segmenti di tangenza condotti da un vertice del poligono circoscritto alla circonferenza.



$a_1 = PT_1 = PT_2$

Figura 1



$\mathrm{tg}\,\tau_1 = \frac{a_1}{r}$

Figura 2

1. Da una stimolazione di Clara Bozzolo apparsa su *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, CRD Ugo Morim, Paderno del Grappa, aprile 1995, p. 127.

Caso del triangolo

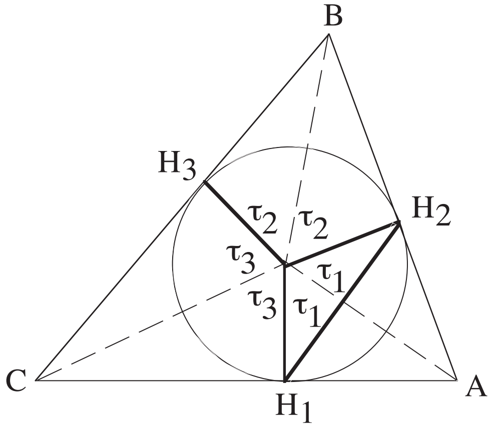


Figura 3

$$2\,\tau_1 + 2\,\tau_2 + 2\,\tau_3 = 2\,\pi \quad \Rightarrow \quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = \pi \quad \Rightarrow \quad \tau_1 = \pi - (\tau_2 + \tau_3)$$

$$\operatorname{tg} \tau_1 = -\operatorname{tg}(\tau_2 + \tau_3) = -\frac{\operatorname{tg} \tau_2 + \operatorname{tg} \tau_3}{1 - \operatorname{tg} \tau_2 \cdot \operatorname{tg} \tau_3}$$

da cui

$$\frac{a_1}{r} = -\frac{\operatorname{tg} \tau_2 + \operatorname{tg} \tau_3}{1 - \operatorname{tg} \tau_2 \cdot \operatorname{tg} \tau_3} = -\frac{\frac{a_2}{r} + \frac{a_3}{r}}{1 - \frac{a_2}{r} \cdot \frac{a_3}{r}} = -\frac{r\,(a_2 + a_3)}{r^2 - a_2 \cdot a_3} \qquad (2)$$

infine

$$a_1\,(r^2 - a_2\,a_3) + r^2\,(a_2 + a_3) = 0$$

Si trrova dunque un primo risultato

$$(a_1 + a_2 + a_3)\,r^2 + (a_1 a_2 . a_3)\,r^0 = 0$$

del tipo $A\,r^2 - B\,r^0 = 0$

La corda H_1H_2 sottende in questo caso sia $2t_1$ sia $2(t_2 + t_3)$, una sola coppia di angoli sommati.

Caso del quadrilatero

Prudentemente distinguiamo anche nella notazione i casi dei poligoni aventi un numero dispari di lati da quelli che ne hanno un numero pari. Sfruttiamo il risultato (2). La corda H_1H_3 sottende in questo caso sia $2(d_1+d_4)$ sia $2(d_2+d_3)$, una sola coppia di angoli sommati.

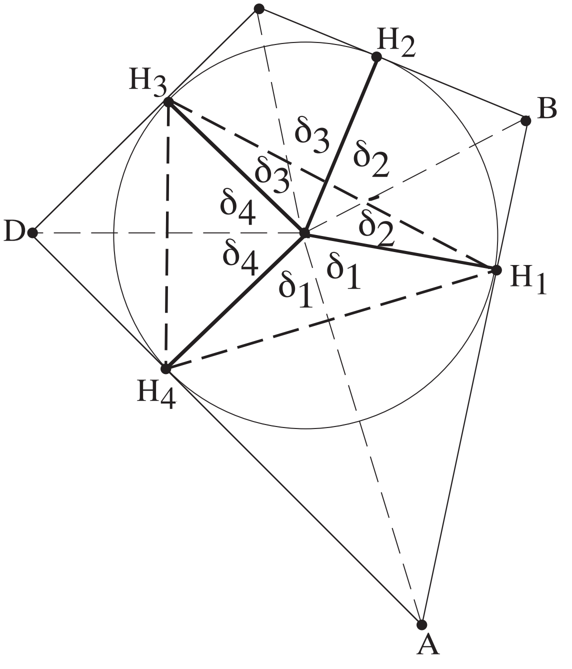


Figura 4

$$\operatorname{tg}\delta_1 = -\operatorname{tg}\left(\left(\delta_2+\delta_3\right)+\delta_4\right)$$

$$\operatorname{tg}\delta_1 = \frac{a_1}{r} = -\frac{\dfrac{r\left(a_2+a_3\right)}{r^2-a_2\cdot a_3}+\dfrac{a_4}{r}}{1-\dfrac{r\left(a_2+a_3\right)}{r^2-a_2\cdot a_3}\cdot\dfrac{a_4}{r}} = -\frac{r^2\left(a_2+a_3+a_4\right)-a_2\,a_3\,a_4}{r^3-\left(a_2\,a_3+a_2\,a_4+a_3\,a_4\right)}$$

da cui

$$a_1\left(r^2-\left(a_2\,a_3+a_2\,a_4+a_3\,a_4\right)\right) = -r^2\left(a_2+a_3+a_4\right)+a_2\,a_3\,a_4$$

infine

$$\left(a_1+a_2+a_3+a_4\right)r^2+\left(a_1\,a_2\,a_3+a_1\,a_2\,a_4+a_1\,a_3\,a_4+a_2\,a_3\,a_4\right)$$

Prime conclusioni concernenti la coppia triangolo-quadrilatero

Si osserva dunque che esiste una sola coppia di angoli consecutivi sommati. Ciò avrà una conseguenza diretta sul tipo di equazione finale. Compariamo i due risultati concernenti il triangolo e il quadrilatero:

$$\left(a_1+a_2+a_3\right) \quad r^2+ \qquad \left(a_1a_2a_3\right) \qquad r^0=0$$

$$(a_1+a_2+a_3+a_4)r^2 + \left(a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+a_1a_3a_4+a_2a_3a_4\right) r^0=0 \quad (4)$$

sono tutti della forma: $A\,r^2 - B\,r^0 = 0$

Osserviamo bene:

il coefficiente A di r^2 è dato dalla somma delle combinazioni a 1 a 1 degli a_i con ordinatamente $1 \le i \le 3$ e $1 \le i \le 4$.

il coefficiente B di r^0 è dato dalla somma delle combinazioni a 3 a 3 degli a_i con ordinatamente $1 \le i \le 3$ e $1 \le i \le 4$.

Caso del pentagono

Anche qui, per evitare calcoli inutili, sfruttiamo i risultati precedenti.

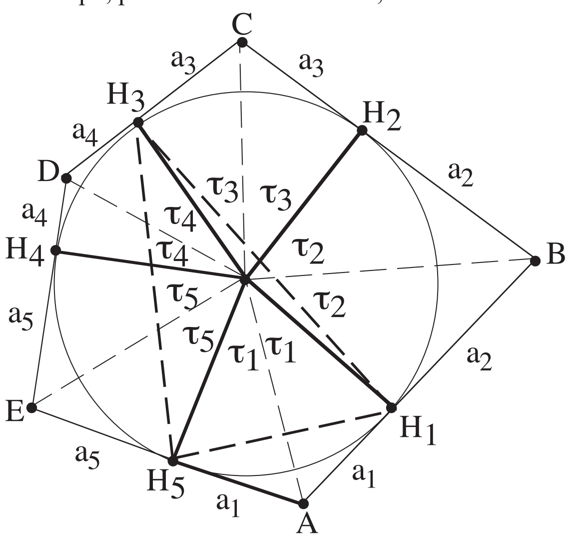


Figura 5

$$\operatorname{tg}\tau_1 = -\operatorname{tg}\Big(\big(\tau_2+\tau_3\big)+\big(\tau_4+\tau_5\big)\Big) = -\operatorname{tg}\Big(\Big(\big(\tau_2+\tau_3\big)+\tau_4\Big)+\tau_5\Big)$$

$$\operatorname{tg}\tau_1 = \frac{a_1}{r} = -\frac{\dfrac{r^2\left(a_2+a_3+a_4\right)-a_2\,a_3\,a_4}{r^3-\left(a_2\,a_3+a_2\,a_4+a_3\,a_4\right)}+\dfrac{a_5}{r}}{1-\dfrac{r^2\left(a_2+a_3+a_4\right)-a_2\,a_3\,a_4}{r^3-\left(a_2\,a_3+a_2\,a_4+a_3\,a_4\right)}+\dfrac{a_5}{r}}$$

Si può dunque prevedere, partendo dal pentagono la situazione per l'esagono e più precisamente:

- il coefficiente di r^4 è dato dalla somma delle combinazioni a 1 a 1 degli a_i con $1 \le i \le 6$;
- il coefficiente di r^2 è dato dalla somma delle combinazioni a 3 a 3 degli a_i con $1 \le i \le 6$;
- il coefficiente di r^0 è dato dalla somma delle combinazioni a 6 a 6 degli a_i con $1 \le i \le 6$.

Otteniamo quindi l'equazione:

$$\left(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6\right) r^4-\left(\underbrace{a_2\, a_4\, a_5+a_3\, a_4\, a_5+a_2\, a_3\, a_5+\ldots}_{\text{le 20 combinazioni a 3 a 3 di } a_1, a_2, \ldots, a_6}\right) r^2+\left(\underbrace{a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5+a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_6+\ldots}_{\text{le 6 combinazioni a 5 a 5 di } a_1, a_2, \ldots, a_6}\right) r^0=0$$

che è dello stesso tipo di quella del pentagono:

$$A\, r^4 - B\, r^2 + C\, r^0 = 0$$

Congettura per la generalizzazione

Se passiamo all'ettagono, prevediamo di ottenere un'equazione del tipo:

$$A\, r^6 + B\, r^4 + C\, r^2 - D\, r^0 = 0$$

dove A è la somma degli a_i con $1 \le i \le 7$ (combinazioni a 1 a 1 degli indici);
B è la somma la somma dei prodotti degli elementi a_i presi secondo le combinazioni a 3 a 3 con $1 \le i \le 7$;
C è la somma la somma dei prodotti degli elementi a_i presi secondo le combinazioni a 5 a 5 con $1 \le i \le 7$;
D è la somma la somma dei prodotti degli elementi a_i presi secondo le combinazioni a 7 a 7 con $1 \le i \le 7$;

Il lettore può divertirsi a controllare che per l'ettagono si ottiene in effetti:

$$\left.\begin{array}{l}
\left(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7\right) r^6 \\
-\left(\underbrace{a_1\, a_2\, a_3+a_1\, a_2\, a_4+a_1\, a_2\, a_5+\ldots}_{\text{le 35 combinazioni a 3 a 3 di } a_1, a_2, \ldots, a_7}\right) r^4 \\
+\left(\underbrace{a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5+a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_6+\ldots}_{\text{le 21 combinazioni a 5 a 5 di } a_1, a_2, \ldots, a_7}\right) r^2 \\
-\left(a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6\, a_7\right) r^0
\end{array}\right\} = 0$$

Generalizzazione

L'equazione corrispondente ai casi dell'**ettagono** e dell'**ottagono** può anche essere scritta così:

$$(-1)^0 A r^6 + (-1)^1 B r^4 + (-1)^2 C r^2 + (-1)^3 D r^0 = 0$$

(il significato dei coefficienti A, B, C, D nel caso dell'ettagono è appena stato espresso; per l'ottagono basta sostituire la condizione $1 \leq i \leq 7$ con $1 \leq i \leq 8$)

Se invece si passa al **poligono di 9 lati**, allora ecco che l'equazione cambia e il suo grado aumenta di 2:

$$(-1)^0 A r^8 + (-1)^1 B r^6 + (-1)^2 C r^4 + (-1)^3 D r^2 + (-1)^4 E r^0 = 0$$

dove:
A è la somma degli a_i con $1 \leq i \leq 9$ (combinazioni a 1 a 1 degli indici);
B è la somma la somma dei prodotti degli elementi a_i presi secondo le combinazioni a 3 a 3 con $1 \leq i \leq 9$;
C è la somma la somma dei prodotti degli elementi a_i presi secondo le combinazioni a 5 a 5 con $1 \leq i \leq 9$;
D è la somma la somma dei prodotti degli elementi a_i presi secondo le combinazioni a 7 a 7 con $1 \leq i \leq 9$;
E è la somma la somma dei prodotti degli elementi a_i presi secondo le combinazioni a 9 a 9 con $1 \leq i \leq 9$.

Questa equazione vale anche per il **poligono di 10** lati: basta sostituire la condizione $1 \leq i \leq 9$ con $1 \leq i \leq 10$.

In generale:

— **l'esponente di r:**
se n (numero dei lati del poligono circoscritto) è dispari parte da (n–1) e decresce a due a due;
se n è pari parte da (n–2) e decresce a due a due.

— **i segni dei termini** sono seterminati dal $(-1)^t$ con t che varia da 0 al numero totale di termini.

— **i coefficienti delle potenze di r** sono la somma dei prodotti degli a_i (misure dei segmenti tangenti) i cui indici ubbiscono alle combinazioni degli indici con $0 < i \leq n$

L'equazione che permette di trovare r assume allora la forma generale:

caso dispari

$$(-1)^0 A_1 r^{n-1} + (-1)^1 A_2 r^{n-3} + (-1)^2 A_3 r^{n-5} - \ldots\ldots + (-1)^{\frac{n-3}{2}} A_{\frac{n-1}{2}} r^2 + (-1)^{\frac{n-1}{2}} A_{\frac{n+1}{2}} r^0 = 0$$

dove A_k è la somma la somma dei prodotti degli elementi a_i presi secondo le combinazioni a k a k degli n indici i.

caso pari

$$(-1)^0 A_1 r^{n-2} + (-1)^1 A_2 r^{n-4} + (-1)^2 A_3 r^{n-6} - \ldots\ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} A_{\frac{n-2}{2}} r^2 + (-1)^{\frac{n}{2}} A_{\frac{n}{2}} r^0 = 0$$

dove A_k è la somma la somma dei prodotti degli elementi a_i presi secondo le combinazioni a k a k degli n indici i.

Considerazioni didattiche

La consegna agli studenti potrebbe essere espressa nel modo più generale, per esempio:

«Esiste un legame algebrico tra il raggio r di una circonferenza e il perimetro di un qualunque poligono circoscritto?».

Subordinatamente potrebbe essere fatta la precisazione:

«Supponendo di conoscere le misure dei segmenti a_i *del perimetro, che congiungono ogni vertice con il punto di tangenza, trovare un'equazione che permetta di determinare r».*

Si potrebbe anche suggerire di iniziare col triangolo, poi di passare al quadrilatero, e così via, facendo bene attenzione a come evolve la situazione.

Nei dati di partenza ci sono suggerimenti che vanno scovati per poter giungere a una risposta, quindi mai come in questo caso la corretta interpretazione dei dati a disposizione e la capacità di analizzare sono decisive.

Occorrono poi competenze elementari di geometria, di trigonometria e di calcolo combinatorio.

Durante lo svolgimento del lavoro – che può essere proposto in forma individuale o a piccoli gruppi – è opportuno limitare i suggerimenti al minimo indispensabile. Per esempio, si può dire di isolare rispettivamente δ_1 e τ_1 e di ricordare che $\operatorname{tg}(\pi - \omega) = -\operatorname{tg}\omega$.

Occorrerà anche avvertire agli studenti che i calcoli sono parecchio complicati, anche se non esigono conoscenze più raffinate di quelle che dovrebbe possedere un allievo già alla fine della scuola media: devono solo tenere duro. Il risultato finale è matematicamente interessante e ripaga dagli sforzi profusi.

Comunque l'aspetto più importante di questo lavoro è senza dubbio il lato formativo del pensiero matematico. Si sviluppano le capacità di analizzare un'espressione algebrica, di intuire la sua struttura e di capire come essa evolve al crescere del numero n dei lati del poligono circoscritto. Non è strettamente necessario giungere alla formalizzazione dell'equazione riprodotta in precedenza, ma per poter capire il senso della generalizzazione è senza dubbio necessario anche interpretare i vari termini nell'ottica combinatoria.

1. XVII Convegno Nazionale: Incontri con la Matematica

Castel San Pietro Terme (Bologna)
7-8-9 novembre 2003
ADT 2003

Conferenze – Venerdì 7 novembre, Palazzo dello Sport

Tutti gli ordini scolastici

14.30-15.30 **Inaugurazione** alla presenza delle Autorità
Saluto del Sindaco di Castel San Pietro Terme, Graziano Prantoni

15.30-16.15 **Athanasios Gagatsis** (Nicosia, Cipro): «Rappresentazioni ed apprendimento della matematica: due facce della stessa medaglia?»

16.45-17.30 **Franco Cambi** (Firenze): «Immagini della scienza tra cultura e formazione»

17.30-18.15 **Daniela Lucangeli** (Padova): «Aspetti emotivo motivazionali dell'apprendimento matematico»

18.15-19.00 **Maria Alessandra Mariotti** (Pisa): «Artefatti e strumenti per l'educazione matematica»

Sabato 8 novembre, Salone delle Terme (Albergo delle Terme)

Scuola dell'Infanzia

15.00-16.00 **Maria Chiara Sangiorgi** (Bologna): «Dall'attività all'esperienza: significato e forme dell'agire didattico»

16.00-17.00 **Ines Marazzani** (NRD Bologna): «Facciamo finta che... I bambini giocano con i numeri»

17.30-19.00 **Giancarlo Navarra** (Modena, Belluno): «Un'attività sperimentale sulla ricerca di regolarità con classi di scuola dell'infanzia (Progetto ArAl)»

Sabato 8 novembre, Palazzo dello Sport

Scuola Elementare, Media e Superiore

14.30-15.15 **Martha Bonilla Estéves** (Bogotà, Colombia): «La moltiplicazione: una questione solo dei primi anni di scolarità?»
15.15-16.00 **Gianfranco Arrigo** (Lugano, Svizzera): «Matematica e formazione del pensiero»
16.00-16.45 **Nicolina Malara** (Modena): «L'esplorazione di situazioni come modalità da privilegiare sin dalla scuola primaria per dare significato allo studio dell'algebra»
17.30-18.15 **Sergio Invernizzi** (Trieste): «La scuola fra le 'due culture': il ruolo della tecnologia»
18.15-19.00 **Mario Ferrari** (Pavia): «Matematica: sfida, impegno, gioia»

Seminari – Sabato 8 novembre, Palazzo dello Sport

Seminari per la Scuola dell'Infanzia, Elementare e Media

9.00-9.45 **Giancarlo Navarra** (Modena, Belluno): «Il progetto ArAl e l'approccio anticipato al pensiero algebrico»
9.45-10.30 **Istituto Comprensivo «A. Manzoni»** di Rescaldina (Milano): «Camminando insieme nello spazio»
I lavori per la Scuola dell'Infanzia proseguono all'Istituto Alberghiero
11.00-11.45 **Maria Alessandra Mariotti** (Pisa): «L'educazione geometrica attraverso l'uso di strumenti»
11.45-14.00 **Visita alle mostre**

Sabato 8 novembre, Istituto Alberghiero

Seminari per la Scuola dell'Infanzia

11.30-12.15 **Irene Foresti** (NRD Bologna): «Probabilmente: giochiamo? Esperienze di probabilità con bambini di Scuola dell'Infanzia»
12.15-14.00 **Visita alle mostre**

Sabato 8 novembre, Sala Giardino (Albergo delle Terme)

Seminari per la Scuola Superiore

9.00-9.45 **Jorge Sagula** (Chivilcoy, Argentina): «Modelli mentali, metaeuristica e cognizione»
9.45-10.30 **Fabrizio Monari** (Bologna): «Studio di funzioni: argomentazioni e congetture»
11.00-11.45 **Carmelo Di Stefano** (Gela): «Quando cominceremo ad insegnare matematica?»

11.45-12.30 **Maura Brambilla** (Jesi): «Specchi, chiasmi e ritornelli: scoprire regole matematiche nel mondo della fantasia»
12.30-14.00 **Visita alle mostre**

Domenica 9 novembre, Istituto Alberghiero

Seminari per la Scuola dell'Infanzia
9.45-10.30 **Scuola dell'Infanzia di Morro d'Alba** (Ancona): «Il gioco del risparmio nello spazio»
10.30-11.15 **Lorella Campolucci, Danila Maori** (Corinaldo, Ancona): «Fantasticanimalando con i numeri»
11.15-12.30 **Visita alle mostre**

Domenica 9 novembre, Palazzo dello Sport

Seminari per la Scuola Elementare e Media
9.00-9.45 **Iliada Elia** (Nicosia, Cipro): «L'influenza del contratto didattico sul problem solving»
9.45-10.30 **Mario Ferrari** (Pavia): «Le definizioni come educazione alla libertà»
10.30-11.15 **Luigina Cottino**, **Silvia Sbaragli** (NRD Bologna): «Uno sguardo all'infinito»
11.15-12.30 **Visita alle mostre**

Domenica 9 novembre, Sala Giardino (Albergo delle Terme)

Seminari per la Scuola Superiore
9.00-9.45 **Jaime Humberto Romero Cruz** (Bogotà, Colombia): «La ricursione come modellatrice di situazioni»
9.45-10.30 **Giovannina Albano** (Salerno), **Matteo Desiderio** (Salerno), **Silvia Sbaragli** (NRD Bologna): «L'uso delle tecnologie e i diversi registri di rappresentazione semiotica»
11.00-11.45 **Sandra De Pietri**, **Leda Bassi**, **Elena Corsi**, **Danila Vezzani** (Mathesis, Reggio Emilia): «Il brainstorming nel gioco del dimostrare»
11.45-12.30 **Paola Di Marco**, **Giuseppa Indovino** (Piazza Armerina, En): «Argomentare, congetturare e dimostrare dalla scuola materna alla scuola secondaria superiore: analisi di un'esperienza nella realtà scolastica di Piazza Armerina»

Mostre e Laboratori, Istituto Alberghiero

Maura Brambilla (Jesi): «Le idee e i percorsi di una divertente collaborazione tra docenti ed alunni di una scuola media inferiore e superiore a spasso tra geometria, aritmetica e…»
Giovannina Albano (Salerno), **Maria Cristina Bonomi Barufi** (Saõ Paolo, Brasile) e **Matteo Desiderio** (Salerno): «La trasposizione didattica in ambiente tecnologico»
Istituto Comprensivo di San Marcello (An) con la collaborazione di **Silvia Sbaragli**: «Giocando con la geometria in continuità»
Rosemarie Udriot (Scuola dell'Infanzia di Sonvico, Svizzera): «Il gioco degli scacchi nella Scuola dell'Infanzia»
Dea Beppiani, Antonella Giacomin (Santa Giustina, Belluno): «Il progetto ArAl e l'approccio anticipato al pensiero algebrico: dalla scuola dell'infanzia alla scuola media»
Istituto Comprensivo «A. Manzoni» (Rescaldina, Milano) con la collaborazione di **Silvia Sbaragli**: «Matematica e lingua: una storia dentro l'altra»
Aldo Spizzichino (Bologna): «L'immagine calcolata. Esperienze di grafica»
Annarita Monaco (Roma): «Il mercatino dell'euro»
Nadia Vecchi (Tollegno, Biella): «Che cosa c'entra Eulero con il mio telecomando»
Carmela Buscemi e **Maria Campagna** (Piazza Armerina, En): «Argomentare, congetturare e dimostrare dalla scuola materna alla scuola secondaria superiore: analisi di un'esperienza nella realtà scolastica di Piazza Armerina (Enna)»
Ines Marazzani (NRD, Bologna): «Prima elementare: i grandi numeri. Dalle esperienze dei bambini ai banchi di scuola»

Nell'ambito del XVII Convegno Nazionale «Incontri con la Matematica» di Castel San Pietro Terme, si svolgeranno anche i lavori del

Convegno Nazionale ADT 2003
8 e 9 novembre 2003, dalle 9.00 alle 12.30

La partecipazione al Convegno ADT è gratuita per chi è iscritto al Convegno «Incontri con la Matematica». È possibile partecipare al solo Convegno ADT, previa iscrizione specifica e versamento della quota prevista. L'iscrizione al solo Convegno ADT non dà permesso di accedere ai lavori del Convegno «Incontri con la Matematica».

Informazioni utili

È stato richiesto al Ministero della Pubblica Istruzione **l'esonero dal servizio** per la partecipazione al **Convegno** (per insegnanti di ogni ordine e grado e per il personale direttivo ed ispettivo).

Verrà rilasciato un attestato per n. 20 ore di **Aggiornamento** in base alla CM 376, prot. 15218, del 23.12.1995 e successive modifiche.

Per avere ulteriori **informazioni**, ci si può rivolgere a:
Assessorato alla Cultura
Comune di Castel San Pietro Terme
piazza XX settembre 3
40024 Castel San Pietro Terme (BO)
telefono 051 6954124 (ore ufficio), fax 051 6954180
e-mail: cultura1@cspietro.provincia.bo.it
http://www.dm.unibo.it
http://www.comune.castelsanpietroterme.bo.it

L'**iscrizione** avviene direttamente durante il Convegno. Non si accettano pre-iscrizioni. Saranno attivate varie sedi di segreteria, per rendere agevoli e rapide le pratiche di iscrizione.

La **segreteria organizzativa centrale** avrà sede presso l'Albergo delle Terme, viale delle Terme 1113. Al momento dell'iscrizione viene consegnata al Convegnista una cartella contenente vario materiale. A ciascun partecipante viene richiesto un contributo alle spese di organizzazione di 40 Euro. Si consigliano i Convegnisti di effettuare se possibile le iscrizioni Venerdì 7 Novembre tra le ore 11 e le 13, per evitare code. Prima delle 11 non verranno accettate iscrizioni.

La Pro Loco sarà a disposizione per **assistenza turistica** gratuita ai Convegnisti ed ai loro Accompagnatori e fornirà ogni indicazione relativa ad orari di aerei, treni e bus.

È assicurata **l'assistenza medica** per tutta la durata del Convegno.

Per tutta la durata del Convegno saranno attivi **servizi di trasporto gratuito** tra la sede della segreteria e le stazioni dei bus e ferroviaria di Castel San Pietro.

Gli **Atti**, editi da Pitagora Ed. Bologna, saranno disponibili fin dal giorno della inaugurazione.

I Convegnisti dovranno provvedere per conto proprio alla **prenotazione alberghiera**. Poiché si prevede un afflusso notevole, si consiglia di provvedere al più presto. La segreteria declina ogni responsabilità per mancato alloggiamento.

Alberghi e Pensioni nel territorio di Castel San Pietro Terme

★★★★ Castello, viale Terme 1010, tel. 051 940138
★★★★ Gloria, [Toscanella], via Emilia 42, tel. 0542 673438
★★★ Delle Terme, viale Terme 1113, tel. 051 941140
★★★ Nuova Italia, via Cavour 73, tel. 051 941932
★★★ Parigi, viale Terme 860, tel. 051 943585
★★★ Park Hotel, viale Terme 1010, tel. 051 941101
★★★ Arlecchino, via Repubblica 23, tel. 051 948519
★★★ Il Gallo, via Repubblica 34, tel. 051 941114
★★ Due Portoni, via Mazzini 133, tel. 051 941190
★★ Terantiga, [Varignana], via di Jani 9/11, tel. 051 6957234
★ Maraz, piazza Vittorio Veneto 1, tel. 051 941236.

Bed & Breakfast
Antico Convento Cappuccini Via Viara, 10 tel. 051 6951471
B&B Pulga Laura via Repubblica, 67 tel. 051 941166
La Vela Via Ca' Priva, 46/48 tel. 051 6951700
Per Cacciatori di Conchiglie via Villalunga, 2604 (loc. Varignana) tel. 051 6957259
Borro di Sopra Via Paniga, 1870 tel. 051 942444
Camere Via Corlo, 120 tel. 051 944191

Agriturismi
Rio Rosso,Via Cà Venturoli, 1948 loc. Varignana Superiore tel. 051 6957043
Rio Soglia, Via Monte Calderaro, 575/G loc. Palesio tel. 051 6957097
Agrituristica S. Martino Via Tanari, 7493 loc. San Martino in Pedriolo tel. 051 949766
Villaggio della Salute Più loc. San Clemente tel. 051 929791

Per ulteriori informazioni ci si può rivolgere a:
Ufficio IAT – Pro Loco
piazza XX settembre 14 - 40024 Castel San Pietro Terme
Tel. e fax 051 6942090

2. Recensioni

Gianfranco Arrigo - Giorgio Mainini

Colin Bruce – Sherlock Holmes e le trappole della logica – Collana Scienza e Idee, Raffaello Cortina Editore, Milano, 2001, pag. 292, € 20,14

Secondo Colin Bruce, fisico, tutti noi perdiamo tempo e danaro ogni giorno, felici nell'illusione che il nostro «buon senso» faccia un buon lavoro e ci guidi. In questo libro, l'autore fa rivivere il famoso detective dei classici «gialli» di Conan Doyle per mostrarci quanto, invece, il «buon» senso tanto buono non è. I «casi» trattati sono 12: da quello «dell'uomo d'affari sfortunato» (che poi sfortunato non è: semplicemente prende decisioni sbagliate confidando nel buon senso), a quello «del giocatore d'azzardo nobile» (che viene salvato dalla rovina da Holmes e dal fedele Watson, grazie ai loro insegnamenti sulle probabilità di perdita al gioco); da quello «dell'erede a sorpresa» (in cui, oltre al noto paradosso del compleanno, l'autore mostra come le «coincidenze possano essere meno improbabili di quanto appaiano e che le correlazioni non manipolate spesso sembrano prevedere che esista una causalità spuria. Si tratta di fattori che svolgono un ruolo fondamentale nel rafforzare le credenze superstiziose» – parole di Colin Bruce nella Postfazione), a quello «del vecchio marinaio», … Il paradosso di Monty Hall, riportato anche da Barbara Berretti a pagina 74 del numero 43 di questo Bollettino, è trattato in forma romanticamente romanzata nel «caso delle tombe senza nome», dove un personaggio esegue scavi per verificare se davvero la sua famiglia ha qualche probabilità di discendere, nientemeno, che da Re Artù! Dal punto di vista matematico, gli argomenti che via via si trovano nei «casi» vanno dalla probabilità (inclusi il concetto di distribuzione normale, costruito a partire dal Triangolo di Pascal, a sua volta ricavato da riflessioni sulla «camminata dell'ubriaco» e la logica bayesiana) alla statistica (con tanto di esempi che mettono in guardia su quanto le statistiche possano essere fuorvianti) alle teorie della decisione e dei giochi. Ma non solo. Vi si trovano un paio di rompicapo sull'inganno, una «spiegazione» del fenomeno dei cerchi nel grano, una «caricatura della lunga tradizione di reperimento di messaggi in codice o di profezie celati nei testi religiosi», un gioco dove da *a migliore di b* e da *b migliore di c* non segue *a migliore di c*, …

Un'avvertenza: in tutto il libro non si trova una sola formula, e i grafici sono davvero pochi. Sembra proprio che si possa fare matematica anche così…

Libro da raccomandare ai docenti interessati a sviluppare nei loro allievi lo spirito critico: essi ne apprezzeranno la prosa piana, gli esempi accattivanti, le storie che fanno lavorare l'immaginazione, che rendono vive e vitali idee e principi che, purtroppo, spesso vengono trattati astrattamente.

Denis Guedj – Il Meridiano – Romanzo Longanesi & C., Milano, 2001, pag. 363, € 16,53

Ecco un libro molto interessante e istruttivo, soprattutto per gli insegnanti della scuola obbligatoria, settore scolastico nel quale occorre far apprendere e possibilmente far padroneggiare il sistema metrico decimale (Sistema Internazionale, nella versione più aggiornata). Certo, perché qui, finalmente, ci si può fare un'idea precisa della storia del metro. Anzi, diremmo che si può proprio rivivere l'avventura dei due astronomi Pierre Méchain e Jean-Baptiste Delambre quando in piena Rivoluzione Francese compirono una delle più ardue imprese scientifiche: la misurazione dell'arco di meridiano terrestre che parte da Dunkerque, nel Nord della Francia, passa da Parigi (ci mancherebbe!) e arriva a Barcellona, la notissima capitale catalana (circa un quarto di meridiano, esteso simmetricamente a nord e a sud del 45° parallelo). Fu così che, il 26 marzo 1791, l'Assemblea nazionale, seguendo il parere dell'Accademia delle scienze, in particolare quello di Condorcet, adottava il quarto di meridiano come campione di misura universale. Vale a dire che aveva scelto la Terra stessa come campione di misura. La Terra comune a tutti gli uomini, invariabile e universale, secondo i principi più genuini della Rivoluzione Francese. Contemporaneamente, l'Assemblea stabiliva che l'unità usuale sarebbe stata la diecimilionesima parte del quarto di meridiano, che avrebbe avuto il nome di metro, da *métron*, misura. Inoltre, stabiliva che le differenti misure sarebbero state legate fra loro e avrebbero formato un *sistema*. Da esso sarebbero derivate le unità di superficie, volume, capacità e massa. Quest'ultima unità, il chilogrammo, veniva definita come «la massa di un decimetro cubo di acqua distillata alla sua massima densità». Quanto ai multipli e ai sottomultipli di una stessa unità di grandezza, sarebbero stati graduati secondo un'unica scala, quella decimale. Così fu costruito il sistema metrico decimale in tutte le sue componenti. L'operazione assume un interesse scientifico che va al di là di questo risultato, comunque importante nella storia dell'umanità, perché, per la prima volta si entrò in possesso di un sistema di misure che col tempo divenne universale. Fu adottato su larga scala il principio della triangolazione, procedimento che permette di misurare la lunghezza di un percorso rettilineo per mezzo di alcune misurazioni di ampiezze angolari e di una sola misura di lunghezza. Si applica il teorema secondo il quale, se si conoscono due angoli e un lato di un triangolo, se ne conoscono tutti i lati. Oltre alle misure angolari sul terreno (gli angoli del triangolo) – che venivano rilevate con l'ausilio di regoli piatti –, occorreva misurare l'ampiezza angolare del pezzo di meridiano relativo al triangolo in questione, come differenza delle latitudini degli estremi. Per misurare le latitudini veniva impiegato il circolo ripetitore, un apparecchio molto delicato e tecnicamente raffinato. I vertici dei triangoli erano chiamate stazioni: erano posti in posizioni strategiche, da ognuna delle quali si doveva vedere le altre due stazioni che assieme formavano un triangolo. Per lo più erano situate su campanili o torri, in cima a colline o su costruzioni di fortuna realizzate con legname raccattato alla bell'e meglio. Per coprire l'intero arco di meridiano fu necessario predisporre 106 stazioni. Da ognuna di esse occorreva eseguire una serie di misurazioni di angoli, delle quali veniva poi calcolata la media. Il lavoro durò sette lunghi anni, in un periodo di grandi disordini nel quale una vita umana non valeva nulla. Da un giorno all'altro, da un'ora all'altra ci si poteva trovare con la testa nella ghigliottina. Non necessariamente in una ghigliottina celebre, come quelle di Parigi, non condannato da un tribunale riconosciuto, ma anche solo spinti da un'orda di poveri disgraziati di uno sperduto paese del Mezzogiorno francese, sospettosi e inferociti, che vedevano il Traditore della Patria in qualsiasi sconosciuto che avesse la malasorte di transitare in quel luogo e in quel momento. Figuriamoci poi se questo sconosciuto viaggia su di una carrozza equipaggiata di apparecchiature scientifiche, facilmente identificabili come strumenti di spionaggio! Aggiungiamo che il povero Méchain, cadendo da un'impalcatura, si fratturò malamente una spalla e rimase menomato per il resto della sua vita. Diciamo infine che la spedizione scientifica fu inizialmente promossa da Luigi XVI, quando ancora era il sovrano della Francia. Con lo scoppio della Rivoluzione, i due astronomi dovettero farsi rinnovare i permessi dall'Assemblea nazionale. Ma anche qui le cose divennero difficili, perché chi metteva la firma oggi, domani cadeva in disgrazia e dopodomani veniva ghigliottinato. Inoltre, i permessi firmati a Parigi non sempre erano riconosciuti nei villaggi della vasta campagna francese; figuriamoci poi in Catalogna! Altra sorpresa: il povero Méchain, finite le misurazioni in Spagna, si vede respinto alla frontiera francese, perché sospettato di essere diventato una spia del nemico della Francia. E così via: ce n'è per tenere desto qualsiasi lettore. A di là di tutto, l'autore sa farci rivivere uno scorcio di vita di quel periodo così caotico e importante quale è stata la Rivoluzione Francese: uno sguardo che, normalmente, non si trova su nessun libro di storia.

Margaret Wertheim – I pantaloni di Pitagora. Dio, le donne e la matematica – Instar Libri, Torino, 1996, pag. 333, € 13,50

Margaret Wertheim, dopo un passato di modella (con tanto di copertina su *Vogue*), si laurea dapprima in matematica pura, poi in fisica sperimentale. Malgrado si trovasse in un ambiente ostile, a bassissimo tasso di femminilità, dopo la seconda laurea le si apre la possibilità di intraprendere la carriera accademica presso l'Università di Sydney. Lei però rifiuta, e decide di dedicarsi totalmente alla divulgazione scientifica, progetto che ritiene ancora più importante e socialmente rilevante. Il libro a prima vista appare come studio della condizione femminile nei confronti della cultura e della carriera universitaria. Con il suo stile lineare, e spinta da una carica emotiva eccezionale, l'autrice ci mostra come, sin dai tempi di Pitagora, la donna abbia continuamente incontrato grossissime difficoltà ad entrare nel mondo accademico, soprattutto scientifico, e persino a farsi riconoscere i risultati – talvolta eclatanti – delle loro ricerche. L'Uomo Matematico, insomma, ha sempre cercato di sbarrare la strada alle donne che avevano l'ardire di affacciarsi alla Cattedrale del Sapere scientifico. Le ragioni di tale comportamento del maschio, nel corso della storia, sono tante, ma sostanzialmente alimentate da due fattori sempre presenti, molto ben spiegati nel testo. L'uno è il lato mistico che la scienza ha sempre cercato di assumere, malgrado qualche tentativo di interpretazione materialistica: lato mistico, religiosità, ricerca di Dio hanno subito tagliato fuori la donna. Non dimentichiamo che anche l'accanimento dimostrato da Einstein nel cercare le equazioni che spiegassero Tutto, la Forza dalla quale derivassero tutte le altre – da quelle che governano l'universo macroscopico a quelle che regolano le particelle subatomiche – si ascrive alla «religiosità cosmica» dello stesso Einstein, che vedeva la Nuova Fisica sostituto della Teologia. L'altro fattore che ha contribuito a frenare la donna nel campo scientifico è l'interpretazione biologica secondo la quale il cervello femminile sarebbe più adatto per le questioni materiali (la donna è sempre stata associata alla Terra, alla materia) e poco portato per il Pensiero astratto, filosofico. Ovviamente i due fattori combinandosi tra loro hanno creato un muro quasi insormontabile per l'emancipazione scientifica della donna: la Scienza è la ricerca della spiegazione del mondo, la donna non è adatta per simili riflessioni. Nel secolo XX si è assistito a un'importante ascesa della Donna Matematica. Verso la fine del secolo nelle facoltà di matematica delle università americane le donne superarono addirittura in numero i colleghi uomini, anche se questa presenza non ha ancora permesso alle donne di accedere facilmente alle cattedre, gelosamente difese dagli uomini. Ecco perché si trovano sempre più donne che insegnano la matematica nelle scuole pre-universitarie. Ciò non è avvenuto nelle facoltà di fisica, dove la presenza maschile è ancora imponente. Perché? Si possono addurre anche ragioni legate all'educazione tradizionale che si impartisce alla bambine. Mentre ai maschietti si regala il Lego – che costituisce un importante strumento di sviluppo delle capacità di visione spaziale e quindi di formazione scientifica – le bambine si fanno giocare con la bambola, che non ha nulla di scientifico. La cosa prosegue poi ogni volta che nel curricolo scolastico occorre operare scelte.

Queste scarne considerazioni dovrebbero invogliare a leggere questa opera importante e utilissima per un insegnante di matematica o di materie scientifiche, ma in generale per chiunque voglia farsi un'idea di dove stia andando la fisica oggi, sorretta da una matematica sempre più sofisticata.

Progetto grafico
Bruno Monguzzi
Fotocomposizione
Taiana
Stampa
Veladini

Redazione
Laboratorio di didattica della matematica
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera

Telefono
091 814 34 28/57/58
Fax
091 814 44 92

Amministrazione
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera
Fax
091 814 44 92

Esce due volte all'anno
a maggio e a dicembre

Abbonamento annuo
Sfr. 30.–
€ 16