A cura
del Laboratorio di didattica della matematica

Bollettino dei docenti di matematica

47

Dicembre
2003

Ufficio
dell'insegnamento medio
Centro
didattico cantonale

Bollettino
dei docenti di matematica
47

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport

ISBN 88-86486-71-5

Bollettino dei docenti di matematica 47

Dicembre
2003

Ufficio dell'insegnamento medio
Centro didattico cantonale

Indice

Prefazione

Questo numero offre un ampio ventaglio di stimoli per tutti i gusti. Nella prima parte, dedicata ad argomenti di vario genere, troviamo spunti di matematica superiore, grazie in particolare al sempre presente Mauro Cerasoli. L'articolo di apertura è un omaggio matematico al grande e indimenticato Gian Carlo Rota. Ma si trovano anche una riflessione di Gianfranco Arrigo sullo stato attuale della matematica come disciplina scolastica e, dello stesso autore, un saggio dedicato alla dinastia Bernoulli, che – fatto unico nella storia della scienza – è stata sulla ribalta internazionale per ben due secoli.

Nutrita anche la sezione dedicata alla didattica, con gli interventi di Silvia Sbaragli che esamina con maestria il concetto di punto geometrico nei diversi contesti, della coppia Piatti-Zenoni che pubblica un'interessante sperimentazione effettuata nelle seconde medie e di Claudio Beretta che esprime idee importanti sui delicati rapporti tra matematica e fisica in ambito scolastico.

Dalla bricolla abbiamo pescato due proposte per il liceo: le presentano Arrigo e Beretta. Riguardano attività di geometria che si prestano ad essere affrontate mediante i metodi sintetico, vettoriale e analitico.

Il laboratorio matematico vede di nuovo all'opera Giorgio Mainini con una sua creazione originale che ha a che fare con i divisori di un numero naturale, e Gianfranco Arrigo con una proposta… matematico-sportiva.

Le segnalazioni sono particolarmente importanti. Vi si trova il primo annuncio del Convegno internazionale di didattica della matematica che si svolgerà a Locarno, all'ASP, nei giorni 24 e 25 settembre 2004. La nuova iniziativa si prefigge di proseguire, con ritmo quadriennale, la catena di convegni iniziata nel 2000 a Bellinzona. Il secondo annuncio è particolarmente gradito perché informa sulle iniziative della SMASI (neonata Società Matematica della Svizzera Italiana) nei confronti degli insegnanti delle scuole medie: un'esperienza incoraggiante, che potrebbe cambiare il quadro delle offerte della formazione continua dei docenti.

Infine abbiamo le recensioni di alcuni testi di didattica da parte di Giorgio Bagni e di altri testi di sicuro interesse da parte di Giorgio Mainini.

Dimenticavamo: c'è il nuovo quiz di Aldo Frapolli. Da brivido.

Errata corrige
concernente l'articolo «Sezioni piane di un cubo»
apparso sul numero 46, pag. 103.

Le tre figure 38, 39, 40 vanno sostituite con le seguenti:

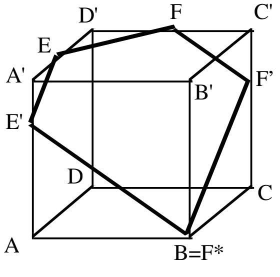


fig. 38

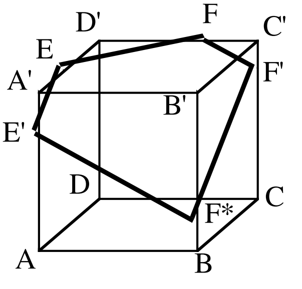


fig. 39

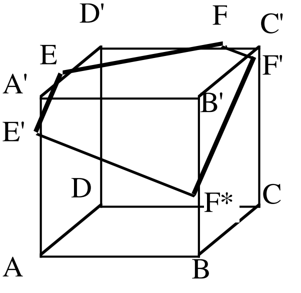


fig. 40

L'autore e la redazione si scusano per l'inconveniente.

1. La probabilità di Gian Carlo Rota

Mauro Cerasoli, Stefania Costabile, Gennaro Eduardo Tangari

When the going gets rough, we have recourse to a way of salvation that is not available to ordinary mortals: we have that Mighty Fortress that is our Mathematics. This is what makes us mathematicians into very special people. The danger is envy from the rest of the world.
(Gian Carlo Rota)

1. Analisi, first love

I primi 18 articoli di matematica scritti da Gian Carlo Rota dal **1958** al **1963**, rivelano che in gioventù i suoi interessi furono rivolti all'Analisi Funzionale. Infatti non è un caso che egli abbia collaborato attivamente alla stesura del monumentale lavoro *Linear Operators* di N. Dunford e J.J. Schwartz, I 1953, II 1963, III 1971. Con Schwartz come Dissertation Advisor, aveva preso il Ph. D. alla Yale University nel 1956. Un'altra prova dei suoi giovanili interessi in questo ramo della matematica è la pubblicazione nel 1962 di *Ordinary Differential Equations,* 318 pp., con Garrett Birkhoff.

La svolta decisiva per Gian Carlo avviene nel **1964** quando pubblica gli ormai storici lavori *On the Foundations of Combinatorial Theory: I. Theory of Mobius functions,* Zeitschrift fur Wahrscheinlinchkeitstheorie, Vol. 2, pp. 340-368 e *The number of partitions of a set*, American Mathematical Monthly, Vol. 71, pp. 498-504. Con questi egli dà inizio ad una serie di studi che pongono le basi dell'Analisi Combinatoria. Il suo è un lavoro analogo a quello svolto da Weierstrass nella fondazione rigorosa dell'Analisi Matematica. Che questi lavori siano causati da interessi ed idee della probabilità appare evidente fin dall'inizio, a cominciare dalla stessa rivista tedesca, appunto di probabilità, che pubblica il suo primo lavoro sui fondamenti dell'Analisi Combinatoria. Nessuno, oggi, che si interessa di Combinatoria può ignorare i lavori di Gian Carlo e dei suoi numerosi allievi sparsi in tutto il mondo. Si veda ad esempio il sito internet di Daniel Loeb che riporta tutti i lavori di Gian Carlo.

2. Le dispense del MIT

Il primo libro di Rota dedicato alla probabilità è *Introduzione alla Probabilità* del **1984**, scritto con Kenneth Baclawski e con Mauro Cerasoli, edito dalla Unione Matematica Italiana e pubblicato da Pitagora Editrice a Bologna. In realtà questo volume, l'unico che abbia avuto una seconda edizione di quelli editi dall'UMI, era una rielaborazione italiana delle sue dispense *An Introduction to Probability and Random Processes.* Queste erano state scritte con Baclawski, per il suo famoso corso di probabilità al MIT a Boston dove insegnava Applied Mathematics e Philosophy. Erano dedicate a Stanislaw Ulam, il grande matematico e fisico, uno dei padri della bomba all'idrogeno ed uno dei fondatori della teoria della probabilità, con il quale Rota lavorava spesso ai laboratori di Los Alamos.

Se a Ulam si aggiunge il nome di William Feller, che era stato professore di probabilità di Gian Carlo a Princeton, si intuisce subito lo spirito probabilistico che anima questi scritti: un'idea intuitiva, concreta, fisica, basata soprattutto sul concetto fondamentale di variabile aleatoria e quasi per nulla sulla teoria della misura. «*La teoria della misura sta alla probabilità come lo stucco messo male sta alle pareti: prima o poi cade*» aveva confessato un giorno Gian Carlo in una di quelle passeggiate a Cortona, per il sentiero che riportava al Palazzone.

In queste dispense, *An Introduction to Probability and Random Processes,* apparse in Italia la prima volta nel **1979** durante il corso di Probabilità che tenne in luglio a Perugia, Rota basava lo studio della probabilità su cinque processi stocastici fondamentali:

1. il processo stocastico *finito* o di Maxwell-Boltzmann, più semplicemente illustrato come il processo della messa a caso di n biglie in s scatole (l'intervallo naturale [1,s]);
2. il processo di *Bernoulli*, ovvero del lancio ripetuto di una moneta di trucco p;
3. il processo *uniforme* della scelta a caso di n punti sul segmento [0,a];
4. il processo di *Poisson* degli arrivi radi con intensità α sulla semiretta $[0, \rho)$;
5. il processo di *Wiener-Levy*, o del moto browniano, di media B e deviazione standard ~ sulla retta.

Solo i primi quattro, però, vengono trattati. Secondo Rota, in natura ci sono soltanto questi cinque processi stocastici e loro combinazioni. Questa visione della teoria della probabilità faceva pensare al modo in cui si studiava geometria al liceo. Si parlava di poligoni e di solidi in generale ma in effetti si studiavano poi soltanto triangoli, quadrati, rettangoli, trapezi, rombi, parallelogrammi, parallelepipedi, cubi, piramidi, sfere, coni e cose simili riscontrabili in natura o nelle fabbriche di piastrelle, mattoni, mattonelle ecc., cioè di cose utili per l'uomo. Raramente si parlava di pentagoni ed esagoni, mai di ettagoni ecc. Probabilmente perché un ettagono, cioè un poligono di sette lati non serve a nessuno, in quanto le mattonelle in genere sono fatte a forma di quadrati, rettangoli, triangoli equilateri, rombi e talvolta esagoni. È difficile che un muratore possa pavimentare un pavimento con mattonelle di sette o di undici lati.

Lo stesso discorso vale per la probabilità: perché insegnare a studenti di ingegneria (Rota insegnava al MIT: Massachussetts Institute of Technology, una delle più prestigiose scuole di ingegneria al mondo) processi stocastici astratti e inutili? Perché insegnare modelli che stanno solo su Marte o nella mente di alcuni pseudo-matematici invece di quei modelli che si trovano in natura e che quindi sono più utili per le applicazioni?

Nelle dispense di Rota e di Baclawski si insegnava a calcolare la probabilità di fare un terno al lotto, di avere un poker d'assi servito o che un aereo precipiti se almeno due motori su quattro devono funzionare. Si discuteva del paradosso di Monty Hall o delle tre scatole e quindi del pensiero bayesiano, senza il quale non si acquista conoscenza dal mondo reale, cioè dall'esperienza. Si calcolava la distribuzione limite del modello di Eherenfest per la diffusione dei gas. Ma non mancava neppure la parte matematica astratta: è in queste dispense che appare il primo tentativo di assiomatizzare il processo di Poisson in modo *pointless* alla Von Neumann, oppure viene utilizzata la funzione zeta di Riemann per assegnare una misura di probabilità sui naturali.

A distanza di tanti anni gli appunti del mitico MIT Course 18.313 tenuto da Rota nel 1998, stesi dal suo allievo John N. Guidi, trasmettono lo stesso modo di vedere la probabilità. Soltanto una cosa sembra essere stata aggiunta: la visione bayesiana.

Nelle note di Guidi rileggiamo le parole di Rota:

4/2/98

The idea of probability is one of the great ideas developed in this century: you can find it in all the sciences.

(La probabilità è una delle più grandi scoperte di questo secolo: puoi trovarla in tutte le scienze).

6/2/98

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

This is a great discovery of mathematics.

That the intuitive idea of 2 events being independent is rendered mathematically with this extremely simple equation. It's an incredible discovery.

(Questa è una grande scoperta della matematica. L'idea intuitiva che due eventi siano indipendenti è matematicamente sintetizzata da questa semplicissima equazione. È una scoperta incredibile).

11/2/98

I will guarantee you one thing. Every word in this course will be used later in your life. You are not wasting any time. On the other hand, you can not afford to fall behind. If you fall one weak behind, you will be unable to follow the lecture. You should take careful notes. Part of your training is to take careful notes of this course. The material in the lectures is strongly at variance with the material in the so-called text, which I am trying to rewrite. At lot of this material is not covered in any textbook. It is in research papers. If you miss these classes, fine. You won't find this material anywhere else. For the kind of tuition you pay, that's what you deserve. Otherwise, you take any old probability book: go to Oshkosh College. It will cost you half as much.

Take down everything I say. And treat it for later references. You may got a job on one remark in this course. I'm not joking.

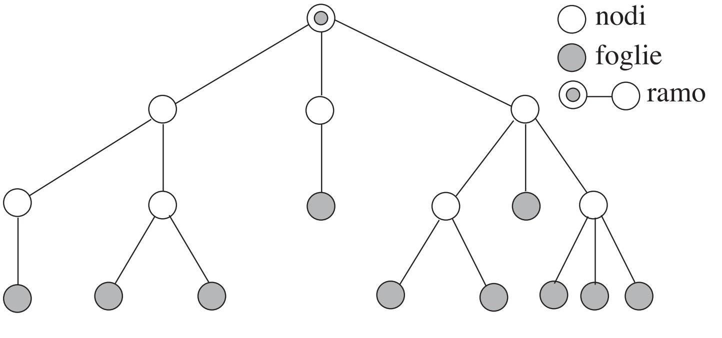
(Vi assicuro una cosa. Ogni parola di questo corso sarà utilizzata in futuro nella vostra vita. Non state perdendo tempo. D'altra parte però, non potete permettervi di rimanere indietro. Se vi fermate per una set-

timana non sarete in grado di seguire le lezioni. Dovete prendere gli appunti con cura. Parte della vostra preparazione è prendere buoni appunti del corso. Il materiale nelle conferenze è fortemente in disaccordo con il materiale nel cosiddetto testo, che sto provando a riscrivere. La maggior parte del materiale non si trova in alcun testo, ma su articoli di ricerca. Se mancherete a questo corso, bene! Non troverete il materiale da nessuna parte. Per il tipo di insegnamento per cui pagate, questo è ciò che vi devo. Diversamente, potete prendere qualsiasi vecchio libro di probabilità: andate al College di Oshkosh, pagherete la metà.
Appuntate tutto ciò che vi dico. E segnalatelo nelle vostre future referenze. Potreste trovare lavoro su un argomento trattato in questo corso. Non sto scherzando!).

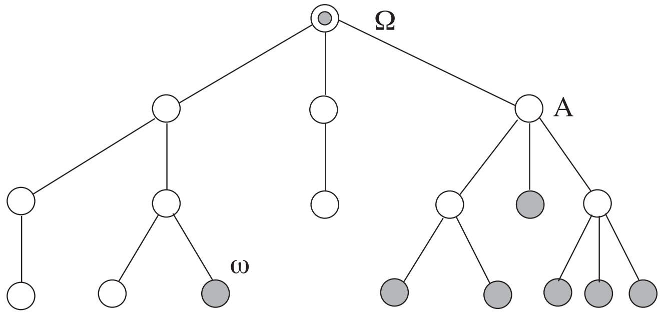
The theory of distribution and occupancy
This is a central chapter of probability and one that is very easy to visualize. Because this has to do with placing balls into boxes.
(Questo è il capitolo centrale della probabilità e uno dei più semplici da visualizzare, perché si opera disponendo palline nelle scatole).

Era il suo cavallo di battaglia quando gli chiedevano cosa è l'Analisi Combinatoria. Aveva detto infatti in una intervista al Los Alamos Science del **1985**: *La parola d'ordine attuale è concretezza. Ora che abbiamo imparato ad essere astratti possiamo permetterci di essere di nuovo concreti. Guardate la matematica combinatoria: è un argomento onesto. Nessuna «adèle», nessuna «sigma-algebra». Si contano le palline in una scatola e si ottiene, oppure no, il numero giusto.*

2/3/98
Sample spaces on trees
(none of this is in the book, by the way)
(Esempi di spazi su alberi)



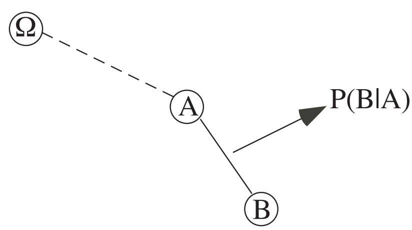
The **sample spaces** that are associated with trees have for a **sample point**, a complete branch of the tree.
(Gli spazi campione che sono associati ad alberi hanno come punti campione un intero ramo dell'albero)



$$\text{Ramo} = \omega \in \Omega$$

$$\text{Nodo} = A = \text{evento} \subseteq \Omega = \{\omega \text{ che escono da } A\}$$

Every vertex of the probability tree is an event. If vertex A is closer to the root than vertex B, event A contains B.
(Ogni vertice di un albero probabilistico è un evento. Se il vertice A è più vicino del vertice B alla radice, l'evento A contiene B).



A **probability tree** means that you give probability to each of these sample points that add up to 1. We can give an interpretation to the edge of the tree by **conditional probability**. If we have A immediately above B, then we assign to the edge (A, B) the conditional probability **P(B|A)**.
The point is, in real life, you are not given the probabilities of the sample points. You are only given the conditional probabilities. And you build the probabilities of the sample points from the conditional probability.
That's called Bayesian Theory.
(Un albero probabilistico significa che si assegna una probabilità a ciascuno di questi punti campione in modo che la somma sia 1. Possiamo dare un'interpretazione ai lati dell'albero per mezzo della probabilità condizionata. Se A è immediatamente sopra B, possiamo assegnare al ramo (A,B) la probabilità condizionata P(A|B). Il punto è, nella realtà, che non stai fornendo la probabilità di punti semplici. Stai solo dando le probabilità condizionate. E costruisci le probabilità dei punti campione da probabilità condizionate. Questa è la Teoria Bayesiana.)

Una scatola contiene s palline di due tipi soltanto: rosso e blu; ne vengono estratte n senza rimessa ($n < s$). Si considerino le seguenti variabili aleatorie:
R_s = «numero di palline rosse nella scatola»
S_n = «numero di palline rosse nel campione estratto».

Allora valgono le seguenti relazioni fondamentali:

$$(s+1)\,P(R_s = r \mid S_n = k) = (n+1)\,P(S_n = k \mid R_s = r) \quad \text{caso ipergeometrico}$$

$$B(s,k,n)\binom{n}{k} P(R_s = r \mid S_n = k) = P(S_n = k \mid R_s = r) \quad \text{caso binomiale}$$

dove $B(s,k,n) = \sum_{0\le r\le s} \left(\frac{r}{s}\right)^k \left(1-\frac{r}{s}\right)^{n-k}$ è la *funzione beta discreta*.

Per dimostrare queste formule sono necessarie le identità combinatorie duali

$$\sum_{0\le r\le s}\binom{r}{k}\binom{s-r}{n-k} = \binom{s+1}{n+1} \qquad \sum_{0\le k\le n}\binom{r}{k}\binom{s-r}{n-k} = \binom{s}{n}$$

3. Le lezioni Fubini del 1998

A parte le lezioni di probabilità al MIT o i corsi tenuti su argomenti simili dove spesso venivano proposti esercizi che erano veri e propri problemi aperti, le ricerche di Rota si sviluppano ormai sempre più su questioni di matematica combinatoria e teoria degli invarianti. Anche i lavori sul principio d'inclusione-esclusione sono di sapore prettamente algebrico. Inoltre tutte le sue ricerche sul calcolo umbrale non hanno più nulla a che vedere con la probabilità, anche se un primo esempio di calcolo umbrale si ha proprio in quell'*Ars Conjectandi* di Jacob Bernoulli del 1713 dove si iniziavano a porre le basi della moderna teoria della probabilità e dove appaiono per la prima volta i numeri di Bernoulli. Fa eccezione il bellissimo articolo *Probabilità*, scritto con J.P.S. Kung per l'Enciclopedia del Novecento della Treccani, nel **1985**. In questa voce, di ben 20 pagine, viene illustrato chiaramente il pensiero di Rota sulla probabilità.

Un'altra eccezione è l'uscita del volume *Introduction to Geometric Probability* del **1997**, edito dalla Cambridge University Press, dove in collaborazione con Daniel A. Klain raccoglie le sue Lezioni Lincee tenute nel 1986 a Pisa per conto della Scuola Normale e dell'Accademia Nazionale dei Lincei. A differenza degli altri lavori che partendo dalla probabilità vertevano in realtà su questioni puramente algebriche o di natura assiomatica, in questo volume Rota e Klain riscrivono l'antica *Probabilità Geometrica*, o geometria integrale, nata con il problema dell'ago di Buffon e sviluppata nell'ottocento da Barbier, Sylvester, Crofton, per fare solo alcuni nomi.

Un altro contributo notevole di Rota alla probabilità era stato dato nel

1992, quando tenne prima a L'Aquila e poi a Milano un corso sull'*entropia*. Le note, raccolte da Carlo Merenghetti, sono apparse nel volume edito a settembre del **1999**, in occasione della Giornata di Studio in ricordo di Gian Carlo organizzata da Ottavio D'Antona a Milano. In quella giornata si parlò delle Lezioni Fubini che Rota aveva avuto l'anno prima a Torino, invitato dal suo grande amico Edoardo Vesentini, allora Presidente dell'Accademia Nazionale dei Lincei. Il tema delle lezioni era stato *Twelve problems in probability no one likes to bring up.*

I dodici problemi sono i seguenti. In inglese è riportato qualche stralcio dello scritto di Rota che è stato pubblicato nel **2001** in *Algebraic Combinatorics Computer Science, A Tribute to Gian Carlo Rota* a cura di Henry Crapo e Domenico Senato, Springer Editore.

---

1. **The algebra of probability**
   The beginning definitions in any field of mathematics are always misleading, and the basic definitions of probability are perhaps the most misleading of all. In a strictly formal sense, probability is the study of sets of random variables on a sample space, and of their joint probability distributions.
   (Le definizioni iniziali in ogni campo della matematica sono sempre fuorvianti, ingannevoli e le definizioni di base della probabilità sono più fuorvianti di tutte le altre. In senso strettamente formale, la probabilità è lo studio di insiemi di variabili casuali in uno spazio campione e delle loro distribuzioni congiunte).

---

2. **Densities of random probability**
   More specifically, the density $f_{g(X)}(x)$, in whatever sense it is to be defined, of a function g(X) of the random variable X is to be related to the density $f_X(x)$ of the random variable X by an explicit formula similar to the formula that is used for positive continuous random variables and for differentiable functions g with a positive derivative, namely

$$f_{g(X)}(x) = \frac{f_X\left(g^{-1}(x)\right) dg^{-1}(x)}{dx}$$

   I have no idea whether this problem has solution, or even whether it makes sense.
   (Più specificatamente, la densità $f_{g(X)}(x)$, in qualsiasi senso debba essere definita, di una funzione g(X) della generica variabile X deve essere collegata alla densità $f_X(x)$ della variabile generica X attraverso una formula esplicita simile alla formula utilizzata per generiche variabili continue e positive e per le funzioni differenziabili g con derivata positiva:

$$f_{g(X)}(x) = \frac{f_X\left(g^{-1}(x)\right) dg^{-1}(x)}{dx}$$

   Non ho idea di quando questo problema ammetta soluzione, o quando abbia senso.)

3. Structure theory for Boolean σ-algebras

---

4. Entropy

The lattice of σ-subalgebras plays for information the role that the lattice of events plays for probability. Entropy plays for σ-subalgebras (partitions) a role analogous to the role of probability for events. If π is a finite partition of Ω, the entropy of π is a real number $H(\pi)$ subject to the following axioms, plus some additional technical conditions which I deliberately omit:

a) $H(\pi) \geq 0$

b) $\textit{if } \pi \leq \sigma \textit{ then } H(\sigma) \leq H(\pi)$

c) $H(\pi \cup \sigma) \leq H(\pi) + H(\sigma)$

d) $\textit{If } \pi \textit{ and } \sigma \textit{ are independent partitions then } H(\pi \cup \sigma) = H(\pi) + H(\sigma)$

e) $\textit{If } \pi \textit{ and } \sigma \textit{ are isomorphic then } H(\pi) = H(\sigma)$

Under these conditions, one can shows that there is a function H, unique except for normalization, which is defined on partitions π by the well-known formula

$$\mathrm{H}(\pi) = -\sum_{A \in \pi} P(A) \log_2 P(A)$$

The classical definition of the Boltzmann entropy of a random variable X (of density f(x)) is given by the expression

$$H(X) = -\int_R f(x) \log f(x)\, dx$$

In this and other thermodynamical situations, the passage from the discrete to the continuous has remained difficult and mysterious.

(Il reticolo delle σ-algebre gioca un ruolo per l'informazione pari a quello che gioca il reticolo degli eventi per la probabilità. L'entropia sta alle σ-algebre (partizioni) come la probabilità sta agli eventi. Se π è una partizione finita di Ω, l'entropia di π è un numero reale $H(\pi)$ soggetto ai seguenti assiomi, con altre condizioni tecniche che deliberatamente ometto:

a) $H(\pi) \geq 0$

b) $\textit{se } \pi \leq \sigma \textit{ allora } H(\sigma) \leq H(\pi)$

c) $H(\pi \cup \sigma) \leq H(\pi) + H(\sigma)$

d) *se* π *e* σ *sono partizioni indipendenti allora* $H(\pi \cup \sigma) = H(\pi) + H(\sigma)$

e) *se* π *e* σ *sono isomorfi allora* $H(\pi) = H(\sigma)$
Sotto queste condizioni, esiste una funzione H, unica a meno di normalizzazione, definita sulle partizioni dalla ben nota formula

$$\mathrm{H}(\pi) = -\sum_{A \in \pi} P(A)\, log_2 P(A)$$

La classica definizione dell'entropia di Boltzmann di una variabile generica X (di densità f(x)) è data dall'espressione:

$$H(X) = -\int_R f(x)\, log\, f(x)\, dx$$

In queste due situazioni termodinamiche, il passaggio dal discreto al continuo rimane difficile e misterioso.)

---

5. The maximum entropy principle
Kampé de Fériet stated that among all random variables with finite variance, those having the normal distribution have maximum Boltzmann entropy. Kampé de Fériet discovery was soon followed by the discovery that every stochastic process that has been observed can be characterized by a MEP. ... Among all mathematical recipes, this is to the best of my knowledge the one that has found the most striking applications in engineering practice. The best techniques of image reconstruction known to date rely on the MEP.... Computations that follow the MEP are endowed with a statistical correctness that disappears the moment we try to explain what makes such computations work. I am reminded of St Augustine's quip about time: "Si nemo a me quaerat, scio; si quaerenti explicare velim, nescio".
(Kampé de Fériet ha dimostrato che fra tutte le variabili aleatorie con varianza limitata, quelle con distribuzione normale hanno la massima entropia di Boltzmann. La scoperta di Kampé de Fériet presto è stata seguita dalla scoperta che ogni processo stocastico noto può essere caratterizzato da un MEP... Fra tutte le ricette matematiche, questo è tra le cose migliori della mia conoscenza, quella che ha trovato le applicazioni più notevoli nella pratica di ingegneria. Le tecniche migliori di ricostruzione di immagine conosciute fin qui contano sul MEP... I calcoli che seguono il MEP sono dotati da una precisione statistica che scompare nel momento in cui noi proviamo a spiegare che cosa li fa funzionare. Mi viene in mente un pensiero di Sant'Agostino a proposito di cosa sia il tempo: «Se nessuno me lo chiede, lo so; se mi chiedono di spiegarlo, non lo so»).

---

6. Conditional probability, conditional expectation and Bayes' law
In order to see through the mystery one is forced to dig up the original instance of Bayes'law, due to Laplace. Unless one is privy to this

example, Bayes'law will remain mysterious. Suppose that we are given a set of s balls in an urn, of which an unknown subset of balls is red, the others being black. We extract n balls and find that k of the extracted balls are red. What is our estimate of the number of red balls?

$$\frac{R \cdot (k+1)}{n+2}$$

(Per vedere oltre il mistero uno è costretto a scovare l'esempio originale della legge di Bayes, dovuto a Laplace. Per chi non conosce questo esempio, la legge di Bayes rimarrà sempre misteriosa. Supponiamo di avere un insieme di s palline in un'urna, di cui un sottoinsieme sconosciuto delle palline è rosso, le altre sono nere. Estraiamo n palline e troviamo che k di esse sono rosse. Qual è la nostra valutazione del numero di palline rosse?)

---

7. Justification of the univariate normal distribution

The Bayesian motto is: there are no constants, there are only random variables, or equivalently: every constant is a random variable with a sharp density. Frequentists believe otherwise.The value of a parameter s to be estimated is a God-given constant which is to be approximated by statistical measurements. It is hard to take seriously the suggestion that Planck's constant is a random variable with a sharp density.

(Il motto Bayesiano è: non ci sono costanti, ci sono solo variabili aleatorie, o equivalentemente: ogni costante c è una variabile aleatoria con una densità avente un picco in c. I frequentisti la pensano diversamente. Il valore di un parametro s da calcolare è una costante data da Dio che deve essere approssimata da misurazioni statistiche. È difficile prendere sul serio l'idea che la costante di Planck è una variabile aleatoria con una densità quasi tutta concentrata in essa).

---

8. Probability-preserving transformation

---

9. From ordinary probability to quantum probability

---

10. The multivariate normal distribution and the Clifford distribution

---

11. Cumulants

It appears therefore that a random variable is better described by its cumulants than by its moments or its characteristic function.

(Risulta quindi che una variabile aleatoria viene descritta meglio dai suoi cumulanti piuttosto che dai suoi momenti o dalla sua funzione caratteristica.)

Sia X una variabile aleatoria su uno spazio di probabilità (W,F,P) avente momenti

$$\left\langle X^k \right\rangle = \int_\Omega X^k \, dP \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Fissata una indeterminata t, sia

$$\left\langle e^{tX} \right\rangle = \sum_{k \geq 0} \frac{\left\langle X^k \right\rangle t^k}{k!}$$

la funzione generatrice dei momenti di X.
Per n = 1, 2, … il *cumulante* n-esimo di X è il coefficiente $K_n(X)$ di $t^n/n!$ nello sviluppo di Taylor di log<e^{tX}>.
In altri termini

$$K_n(X) = D^n \log \left\langle e^{tX} \right\rangle \Big|_{t=0}$$

Si può facilmente controllare che i primi tre cumulanti sono

$$K_1 = \langle X \rangle = \mu = \text{la media di } X$$

$$K_2 = \left\langle (X-\mu)^2 \right\rangle = \sigma^2 = \text{la varianza di } X$$

$$K_3 = \left\langle (X-\mu)^3 \right\rangle = \text{il coefficiente di asimmetria}$$

e il quarto è la curtosi.
Valgono poi le seguenti proprietà: se c è una costante,
$K_n(X+c) = K_n(X)$
$K_n(cX) = c^n K_n(X)$

Se X e Y sono indipendenti
$K_n(X+Y) = K_n(X) + K_n(Y)$

La distribuzione di Poisson di parametro 8 ha tutti i cumulanti uguali a 8; quella normale ha tutti i cumulanti nulli per n>2.

One can guess the central limit theorem in one minute by staring at cumulants of standardized averages of independent random variables. It is therefore natural to surmise that cumulants might be better functionals in dealing with random variables than characteristic functions. I personally believe that this dream will come true, and that cumulants will eventually displace characteristic function and moments. ...
The explicit determination of the fundamental inequalities satisfied by the cumulants of a random variable is surely the most important problem in probability theory.
(Uno può intuire il teorema centrale in un minuto guardando i cumu-

lanti delle medie standardizzate di variabili indipendenti. È comunque naturale che i cumulanti possano essere migliori per trattare le variabili aleatorie piuttosto che le funzioni caratteristiche. Io personalmente credo che questo sogno diventerà realtà e che i cumulanti, prima o poi, sostituiranno la funzione caratteristica ed i momenti. La determinazione esplicita delle disuguaglianze fondamentali soddisfatte dai cumulanti oggi è sicuramente il più importante problema aperto nella teoria della probabilità).

Rota ricorda poi i lavori di Terry Speed degli anni '80 sui cumulanti.

12. Free probability theory

Il logico Daniele Mundici confidò a Milano, durante la Giornata di Studio per ricordare il nostro grande maestro, che quelle lezioni Fubini erano il testamento spirituale di Rota sulla probabilità. Un giudizio condiviso da tutti gli allievi di Gian Carlo.

Bibliografia

G.C. Rota
On the Foundations of Combinatorial Theory: I. Theory of Mobius functions, Zeitschrift für Wahrscheinlinchkeitstheorie, Vol. 2, (1964) pp. 340-368

G.C. Rota
The number of partitions of a set, American Mathematical Monthly, Vol. 71, (1964) pp.498-504

K. Baclawski, G.C. Rota
An Introduction to Probability and Random Processes, dispense MIT,1979

K. Baclawski, M. Cerasoli, G.C. Rota
Introduzione alla Probabilità, UMI, Pitagora Editrice, 1984, 1990

M. Cerasoli
Cumulanti e inversione di Mobius, Ratio Matematica (1992) pp.51-59

J.P.S. Kung, G.C. Rota
Probabilità, Enciclopedia del Novecento, Treccani, vol. V, 1985

D.A. Klain, G.C. Rota
Introduction to Geometric Probability, Cambridge University Press, 1997

J.N. Guidi
Introduction to Probability, appunti del MIT Course 18.313 di Gian Carlo Rota, 1998

H. Crapo, D. Senato (a cura di)

2. Il ruolo della matematica nella formazione di base

Gianfranco Arrigo

The article is a reflection on the important role that mathematics has to play in the education of young people at the obligatoty school. Similarly, the author portrays an image of mathematics, different from the one most people hold: a dry and harsh subject. In juxtaposition, mathematics is here described as a discipline, certainly exacting, though stimulating and leading to the development of creativity among young students.

Una situazione difficile

In questi tempi di recessione economica e di tagli alla spesa pubblica tornano a galla vecchi discorsi riguardanti la scuola (che costerebbe troppo, che non starebbe al passo con i tempi,…) e di conseguenza la liceità (o convenienza) di continuare a promuovere tale o tal altra disciplina. «Se s'ha da tagliare, si tagli» e la matematica pare sia nel mirino dei risparmiatori. Per diverse ragioni. Prima di tutto perché occupa «molte» ore nell'orario settimanale (un po' meno dell'italiano, ma nettamente di più della geografia), dunque la matematica stessa ci insegna che se m>g, allora il taglio relativo 1/m è minore di 1/g. Ma questa è una povera ragione, nemmeno degna del più fantozziano dei funzionari statali. Vi sono ragioni più serie, eccome!

- La matematica dà fastidio a molta gente. La pratica di questa disciplina mette a nudo inesorabilmente i pregi e i difetti di ordine cognitivo degli alunni, indipendentemente dalla loro estrazione sociale. Così può capitare che il figlio dell'Onorevole abbia meno successo dell'ultimo profugo arrivato in classe.
- La matematica si è fatta una cattiva immagine nel grande pubblico. Immagine alimentata anche da grosse pecche della scuola che in parecchi casi ha contribuito a creare – e lo fa tuttora – prima una disaffezione nei giovani verso la disciplina, poi addirittura – in taluni casi – un sentimento di odio. Ciò succede quando è insegnata male, quando è sfruttata come strumento di selezione, quando addirittura viene proposta come punizione.
- La matematica (come ogni disciplina impegnativa) non è attrattiva. Gli idoli dei giovani li troviamo fra gli sportivi di élite, fra le rock-star, fra gli attori del cinema commerciale, ecc. Nessuno ammira Euclide, Euler, Gauss, Gödel,…, anzi nessuno ne ha mai sentito parlare, salvo forse quando questi nomi sono legati a determinati teoremi. Ma i teoremi pos-

sono resuscitare immagini spiacevoli. Già, i teoremi; da una parte l'espressione più alta del pensiero matematico, dall'altra la rovina dell'immagine della matematica a scuola.
- La matematica, in parte, è mal insegnata. L'errore più diffuso è proprio quello di voler far studiare i teoremi. Il che significa: mettere l'allievo nella necessità di dover riprodurre contenuti matematici ripuliti, ordinati, rigorosamente strutturati, ma che l'allievo stesso non ha mai vissuto. Quindi materia alla quale l'allievo non sa (perché non può) dare alcun senso. Questa è la matematica che si fa facilmente odiare, al pari di qualunque imposizione che venga dall'alto e che non si riesce a giustificare.
- L'insuccesso in matematica crea assuefazione. Capita non raramente di sentirsi dire da un allievo «Scusi prof, io di matematica non ho mai capito nulla: non se la prenda. Cercherò di fare il possibile per strappare una nota non troppo insufficiente». E succede anche di sentire personalità affermate del mondo «che conta» dire con sfrontatezza: «Io di matematica non ho mai capito niente».

Chiudiamo qui l'elenco per non cadere troppo nella depressione e cerchiamo di ragionare su questa situazione.

Usciamo dal tunnel

Propongo, per iniziare, una riflessione di Keith Devlin, grande divulgatore scientifico americano[1]. Egli sostiene (e il libro citato in nota ne dà in un certo senso la dimostrazione) che non esiste alcun «gene della matematica», nel senso di una sequenza specifica di DNA umano che conferisca l'abilità matematica a chi lo possieda. Devlin ha prodotto una sottile riflessione sulla predisposizione che un individuo dovrebbe possedere per riuscire in matematica e sul perché molta gente non riesce a entrare nell'affascinante quanto culturalmente importante mondo della matematica. La tesi di fondo di Devlin può stupire: la predisposizione per riuscire in matematica è la stessa che necessita per imparare un linguaggio. In altri termini, chi possiede una lingua al punto tale da saperla usare «per spettegolare» (sic!) possiede anche le doti necessarie per imparare la matematica. E allora – si dirà – perché al mondo vi sono molti pettegoli e pochi matematici? Ottima domanda, tutt'altro che facile. Devlin ha dedicato molto tempo all'indagine volta a ricercare i motivi di questo dato di fatto.

A sostegno della sua tesi l'autore dà un'interessante spiegazione del fatto che nei concorsi internazionali i bambini cinesi e giapponesi se la cavano sempre meglio degli americani e di molti loro coetanei dell'Europa occidentale. È ragionevole supporre che tra le cause che determinano questi risultati possano esserci la differenza culturale e la diversità dei sistemi scolastici. Secondo l'autore, però, una buona parte dei

1. Professore alla *School of Science* del St. Mary's College di Moraga, California e *Senior Researcher* al *Center for the Study of Language and Information* della Standford University. Si fa riferimento in particolare al libro di Keith Devlin – Il gene della matematica / Per scoprire il matematico (nascosto) in ognuno di noi – Longanesi & C., Milano, 2002. Questo volume è stato recensito sul BDM 45, dicembre 2002, pag. 108.

fattori determinanti si ritrova proprio nel linguaggio. Per i bambini orientali, fare aritmetica – in particolare imparare le tabelline – è in effetti più facile, perché nella loro lingua le parole che indicano i numeri sono molto più brevi e più semplici: in genere si tratta di monosillabi, come per esempio *si* per 4 e *qi* per 7. Inoltre le regole grammaticali usate per costruire i termini che denotano i numeri sono molto più semplici che in inglese o nelle altre lingue europee. Per esempio, in cinese, per indicare i numeri oltre il dieci, si procede così: 11 è *dieci uno*, 12 *dieci due*, 13 *dieci tre* e così via fino a 20 che è *due dieci*, 21 *due dieci uno*, 22 *due dieci due*, eccetera. Si pensi per esempio al povero bambino francese che 97 lo deve leggere *quatre-vingt-dix-sept* e a quello tedesco che deve dire *siebenundneunzig*.

Tutto ciò impedisce spesso ai bambini svantaggiati di costruirsi un «senso del numero», immagine importante e decisiva per la comprensione dell'aritmetica. Senza dare un senso ai numeri, il soggetto si limita ad apprendere acriticamente un certo numero di regole. Ciò facilita il nascere e lo svilupparsi dell'impressione – molto frequente – che la matematica sia una cosa «arida», «priva di senso», che occorre sopportare fin quando, conseguito un determinato titolo di studio, ci se ne può definitivamente liberare. Da quel momento ci si sente autorizzati a dire – purtroppo anche con un certo vanto – di non aver mai capito nulla di matematica. E invece non c'è proprio di che vantarsi, anzi…

Ma allora, perché ciò non avviene sempre? Una delle tante immagini proposte da Devlin – per dare almeno un'idea delle ragioni che stanno alla base dell'insuccesso – è quella dell'apprendimento musicale. Imparare a suonare uno strumento non è facile. Intanto occorre imparare un linguaggio (quello delle note), poi occorre impadronirsi delle tecniche fondamentali (per esempio le scale, le tonalità, gli accordi, le forme musicali,…), infine occorre parecchio esercizio. Quest'ultimo richiede una certa forza di volontà. Lo stimolo può essere dato dal grande desiderio di riuscire a suonare, di avvicinarsi a propri idoli (musicisti, interpreti, star internazionali,…). Le stesse tappe si possono intravedere nell'apprendimento della matematica, con una differenza: che per la matematica, in generale, manca la stimolazione, quella carica che dà la forza di volontà necessaria per superare i momenti di apprendimento delle tecniche e delle nozioni di base, cose importanti, queste ultime, perché senza un minimo di conoscenza e di abilità tecnica non si può fare matematica come non si può suonare uno strumento musicale, con un minimo di successo.

Da queste riflessioni – che sono solo un esempio fra i tanti esistenti – mettono in evidenza l'importanza dell'insegnamento scolastico della matematica e in particolare del delicato ruolo che devono assumere gli insegnanti: quello cioè di dare motivazione all'apprendimento dei loro allievi. Come fare?

Costruire il senso in matematica

Nella loro varietà, i contenuti matematici sono legati da relazioni essenziali che ne determinano il senso. Il matematico sa che un teorema isolato non ha un gran senso: lo acquista se viene messo in relazione con la teoria alla quale appartiene e nella quale acquista un significato e un'importanza che altrimenti non avrebbe. Tutti possono capire che un calcolo isolato, in sé, non ha senso, ma che lo stesso acquista significato quando è collocato in un contesto di risoluzione di un problema. Analogamente, una definizione –come tante che si fanno studiare a scuola – non ha senso, ma lo acquista quando la si vede agire, per esempio, nella dimostrazione di un teorema; anzi, meglio sarebbe se la definizione venisse aggiustata all'interno di una dimostrazione.

Detto con Vergnaud, i concetti matematici si dotano di significato a partire da una varietà di situazioni; ogni situazione non può essere analizzata usualmente con l'aiuto di un solo concetto, dato che intervengono vari di essi (Vergnaud, 1990). Qui considero importante richiamare l'attenzione degli insegnanti sull'opera di Imre Lakatos[2], «Dimostrazioni e confutazioni»[3],

Più che le mie parole, può servire uno stralcio di quest'opera.

Professore

Nella nostra ultima lezione avevamo fatto una congettura sui poliedri, cioè che per tutti i poliedri V–S+F=2, dove V è il numero dei vertici, S il numero degli spigoli e F il numero le facce. L'abbiamo controllata, ma non l'abbiamo ancora dimostrata. Qualcuno ha trovato una dimostrazione?

Studente Sigma

Io per primo devo ammettere che non sono ancora riuscito a escogitare una dimostrazione rigorosa per questo teorema... Tuttavia, dato che la sua verità è stata stabilita in tanti casi, non ci può essere dubbio che essa valga per tutti i solidi. La proposizione mi sembra dunque provata in modo soddisfacente. Ma se Lei ha una dimostrazione, per favore, ce la dica.

Professore

Sì, ne ho una. Consiste nel seguente esperimento mentale. (…)

[Il professore esegue la dimostrazione consistente nel passare dal poliedro (nel caso particolare un cubo) al suo grafo, togliendo una faccia al cubo (vedi figura 1) e proiettando su un piano; poi il grafo viene suddiviso in triangoli (vedi figura 2) e infine si verifica che levando ad uno ad uno i triangoli la somma V–S+F non cambia, cioè rimane uguale a 1.

2. Imre Lakatos, ungherese (1922-1974), frequenta il Real Gymnasium e poi all'Università di Debrecen studia filologia greca e latina e storia della matematica. Nel 1944 si laurea in matematica, fisica e filosofia all'Università di Debrecen. Traduce dall'inglese all'ungherese il famoso libro del suo connazionale Gyorgy Polya How to solve it (Come porre e risolvere un problema). Nel 1962 pubblica l'opera Infinite Regress and Foundations of Mathematics, nella quale rivendica per la filosofia della matematica un ruolo diverso da quello di mera indagine sui fondamenti. Tra il 1963 e il 1964 scrive l'opera «Proofs and Refutations» (Dimostrazioni e confutazioni) nella quale polemizza con il modo tradizionale di presentare e insegnare la matematica.
3. Pubblicato nel 1979 da Feltrinelli, Milano, il libro è purtroppo scomparso dal commercio. Gli interessati mi possono contattare: ne posseggo una copia fotostatica, gentilmente procuratami dall'amico Mario Barra.

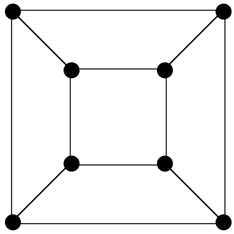


figura 1

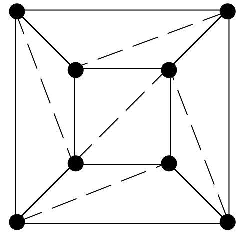


figura 2

Quando si giunge all'ultimo triangolo, si verifica facilmente che 3–3+1=1. E quindi il teorema sarebbe dimostrato. Sennonché…]

Studente Delta

Dovrebbe ora chiamarla teorema. Non ha più nulla di congetturale.

Studente Alfa

Sono perplesso. Capisco che questo esperimento può essere eseguito per un cubo o un tetraedro; ma come posso essere sicuro che si possa eseguire per ogni poliedro? Per esempio, è sicuro, Professore, che ogni poliedro, dopo che è stata asportata una faccia, può essere disteso sul piano della lavagna? Ho qualche dubbio sul suo primo passaggio.

Studente Beta

È sicuro anche che triangolando la figura piana così ottenuta si otterrà sempre una nuova faccia per ogni nuovo spigolo? Ho dei dubbi sul secondo passaggio.

Studente Gamma

È sicuro che vi siano solo due alternative – la scomparsa di uno spigolo oppure di due spigoli e un vertice – quando vengono asportati uno a uno i triangoli? I miei dubbi concernono il suo terzo passaggio.

Professore

Naturalmente non ne sono affatto sicuro.

Studente Alfa

Ma allora stiamo peggio di prima! Invece di una congettura ne abbiamo almeno tre! E Lei chiama tutto ciò «dimostrazione»!

Professore

Ammetto che con ragione il nome tradizionale di «dimostrazione» per questo esperimento mentale si può considerare un po' fuorviante. Non credo che esso riesca a stabilire la verità della congettura.

Studente Delta

A cosa serve allora? Cosa mai pensa Lei che dimostri una dimostrazione matematica?

Professore

È un quesito sottile cui cercheremo di rispondere in seguito. Fino a quel momento propongo di usare costantemente il termine tecnico, tradizionalmente accettato, di «dimostrazione» nel senso di esperimento mentale – o «quasi esperimento» –, che suggerisce una scomposizione della congettura originale in sottocongetture o lemmi, immergendola così in un corpo di conoscenze eventualmente molto distante. La nostra dimostrazione, per esempio, ha immerso la congettura originale sui cristalli – o, poniamo, sui solidi – nella teoria delle superfici di gomma. Descartes o Euler, i padri della congettura originale, di certo non se lo erano neppure sognato. (…)

Al di là del contenuto matematico e di una certa ricercatezza dei dialoghi (il linguaggio usato non è proprio lo stesso di quello che si usa per esempio in una scuola media) è importante cogliere lo spirito costruttivo col quale il professore e i suoi allievi ragionano. Nulla è dato per scontato, mai si sentirebbe dire «è così perché è così» e nemmeno «ecco come si dimostra il teorema: fra una settimana verificheremo se l'avete imparato». Gli studenti di Lakatos sono spinti costantemente a dare senso a ciò che stanno apprendendo.

Pensare matematicamente

La matematica è un vasto e complesso insieme di conoscenze organizzate deduttivamente: lo si può verificare aprendo a caso un qualsiasi libro serio di matematica. Ma imparare la matematica non significa assorbire acriticamente questo complesso di conoscenze, bensì entrare nella problematica che sta alla base della teoria descritta e agire in una situazione appartenente a un campo concettuale di questa teoria. Questo termine va inteso nel senso dato da Gérard Vergnaud. Cioè, un campo concettuale è un insieme di problemi e di situazioni per trattare i quali sono necessari concetti, procedure e rappresentazioni di tipo diverso ma in stretta connessione tra loro (Vergnaud, 1990).

Insegnare la matematica deve quindi assumere il significato di condurre gli allievi attraverso un'avvincente avventura intellettuale, con lo scopo di perfezionare le loro capacità di pensare matematicamente e quindi di risolvere problemi. L'attività matematica è una sorta di contrappunto tra immaginazione (intuizione) e ragionamento logico. L'uno e l'altro di questi aspetti fondamentali del «fare matematica» devono intrecciarsi continuamente, mai essere divisi. L'analisi e la sintesi devono combinarsi armoniosamente con l'intuizione e l'invenzione; l'attività di induzione deve trovare coronamento nel ragionamento deduttivo; quest'ultimo, a sua volta deve stimolare una nuova fase di induzione. Questo, per me, significa, in poche parole, pensiero matematico. E così dovrebbe essere praticato in tutte le aule, dalla scuola di base all'università.

Matematica e cultura

Anche se in molti ambienti della nostra società (purtroppo anche nella scuola), si tende a distinguere tra matematica (vista come disciplina tecnica, arida e chiusa) e cultura (alla quale, però, senza alcuna esitazione si associano certe creazioni dette «artistiche» o certe scienze… poco – o per nulla – scientifiche), è assolutamente indiscutibile –e occorre sottolinearlo con tutta la forza – che la matematica è una componente culturale essenziale che ha segnato e indirizzato la storia del pensiero umano.

E che dire dello stretto rapporto tra matematica e poesia? Lasciamo spazio a qualche citazione.

Karl Weierstrass (1815-1897), matematico tedesco

«Nessun matematico può essere un vero matematico se non è in parte anche un poeta».

Frederick Pollock (1845-1937), giurista inglese

«Che la Scienza e la Poesia siano sorelle non è un vero segreto per chi le conosce, ma rimane un mistero e un ostacolo insormontabile per molti, al punto che, nelle più astratte, formali e controintuitive branche della ricerca scientifica un'elevata immaginazione, simile a quella del poeta, è spesso più utile di un lavoro perseverante».

Gustave Flaubert (1821-1880), romanziere francese

«La poesia è una scienza esatta come la Geometria».

Betrand Russell (1872-1970), filosofo e matematico inglese

«Il vero spirito dell'estasi, l'esaltazione, la sensazione di essere qualcosa di più di un semplice uomo, che è la più importante pietra di paragone, va ricercata tanto nella matematica quanto nella poesia».

E infine, citiamo una delle terzine di Dante Alighieri (Paradiso, canto XXVIII, 91-93), versi che ci sono familiari grazie anche all'opera di Bruno D'Amore (D'Amore, 2001)…

«L'incendio suo seguiva ogni scintilla;
ed eran tante, che 'l numero loro
più che 'l doppiar delli scacchi s'inmilla».

… versi nei quali Dante sembra ricorrere alla serie geometrica di ragione 1000 per indicare il numero di angeli che nascono ogni secondo.

Ma potremmo continuare citando le importanti relazioni tra matematica e musica – pensando per esempio a Mozart – e tra la matematica e le arti figurative con riferimenti che possono partire da Piero della Francesca e arrivare a M. C. Escher e, perché no, a Oscar Reuterswärd.

Matematica e mondo post-industriale

La civiltà tecnologica risparmia all'uomo la maggior parte (almeno) dei lavori di routine.

La maggior parte delle attività umane poggia sia sul pensiero razionale sia sulle relazioni umane, artistiche, sportive,…

È difficile prevedere il futuro ma sicuramente l'attuale tendenza – richiesta di capacità razionali piuttosto che di abilità ripetitive – si rafforzerà almeno in un futuro prossimo.

Parallelamente, a meno di cataclismi non augurabili, sarà sempre più importante una buona formazione matematica… nella matematica «di oggi», nella quale non ha assolutamente senso distinguere tra «pura» e «applicata», come pretendeva fare in uno scritto polemico un professore di elettrotecnica che nel non lontano 1993 si esprimeva così:

«Da circa tre decenni, prima in Francia (sotto la spinta dei bourbakisti), poi in Belgio e infine nella Svizzera romanda, a matematica, si insegna ciò che di più astratto, di più verbale, di più inutile si possa trovare (…). La chiamano «La Matematica» e toglie lo spazio necessario all'insegnamento di quei contenuti matematici che per molto tempo hanno dato prova di essere utili agli ingegneri, agli economisti, ai fisici, ecc. (…)».

Chi conosce un po' la storia della matematica non può trattenere le risa davanti a tanta goffaggine. È comunque demenziale voler dipingere la teoria matematica con aggettivi del tipo «astratto, verbale, inutile». Quante volte, nel corso dei secoli, si sono dati giudizi di questo tipo a teorie matematiche rivelatesi poi essenziali in applicazioni tecnologiche. Già che siamo nel campo dell'elettrotecnica, può essere utile ricordare che i numeri complessi, furono prima usati per bisogni puramente matematici (per esempio da Leonhard Euler nel XVIII secolo) e poi a poco a poco accettati e definiti (grazie anche all'opera di Gauss, circa un secolo dopo), molto prima che gli ingegneri li sfruttassero per cercare di costruire modelli matematici dei circuiti elettrici.

E che dire delle geometrie non euclidee? Puro esercizio di logica, all'inizio essenzialmente «astratto, verbale, inutile», ma qualche tempo dopo servite meravigliosamente ad Einstein per la sua rivoluzionaria teoria della relatività, così come ai moderni navigatori e aviatori.

Matematica e formazione civica

In ogni stato democratico, nel quale (almeno nelle intenzioni) si riconosce la sovranità al popolo, diventa sempre più importante formare il futuro cittadino – quindi l'allievo della scuola obbligatoria – alla luce del pensiero razionale e di una cultura matematica di base.

Basta riflettere sulle numerose votazioni nelle quali si è chiamati ad esprimersi su questioni tecnologiche, tecnocratiche, economiche e via dicendo…

Qui occorre citare l'abuso dei dati statistici che abili personaggi fanno con estrema disinvoltura. A livello elementare usando, a seconda della convenienza, dati assoluti o dati relativi. È evidente che al cittadino medio un risparmio (o una spesa) di 3 milioni fa colpo; ma se questa somma viene confrontata a un totale di un miliardo, si ridimesiona fortemente: è come dire 3 franchi su 1000. Chi è quel padre di famiglia che negherebbe 3 franchi al proprio figlio solo per ridurre le spese da 1000 franchi a 997 franchi?

A livello più raffinato, gli abusi si operano nei processi di inferenza statistica. Le previsioni, le proiezioni, le indagini di mercato o di opinione, anche le più attendibili, poggiano sempre su un rischio ben definito in termini di probabilità. Per esempio, se si annuncia per il giorno dopo una temperatura di 14 gradi, con un errore di al massimo 1 grado, in una situazione statisticamente normale significa che la probabilità che la reale temperatura si riveli effettivamente tra 13 e 15 gradi è circa del 68%. Che cosa significa la probabilità 0,68? Si supponga che la propria vita dipenda dall'estrazione di una pallina bianca, sapendo che nell'urna si trovano 68 palline bianche e 32 palline nere: con che animo vi accingereste a pescare la pallina?

Un capitolo interessante nell'ambito dell'educazione civica è quello relativo ai sistemi elettorali. Qui la matematica gioca il suo ruolo e grazie al modello matematico è possibile capire meglio l'influenza sui risultati (in termini di assegnazione di seggi in parlamento) dei diversi parametri che vengono definiti nelle leggi elettorali. Così, per esempio, ci si può rendere conto che non sempre un sistema proporzionale è migliore di uno maggioritario e viceversa. Per capire questi meccanismi, occorre conoscere un po' di matematica: poca, in vero, se si tratta di nozioni e tecniche; molta, se si tratta di capacità ragionative.

Finale con citazione

«*La migliore tecnica di sopravvivenza che possiamo offrire ai nostri bambini è la capacità di acquisire conoscenze e competenze nuove. Parte di quell'arsenale di capacità di sopravvivenza è costituita proprio da una comprensione generale della matematica e dall'abilità di acquisire capacità matematiche specifiche nel momento in cui si rendono necessarie*».

K. Devlin

Bibliografia

B. D'Amore
Elementi di didattica della matematica, Pitagora editrice, Bologna, 1999.

B. D'Amore
P*iù che 'l doppiar delli scacchi s'inmilla*, Pitagora editrice, Bologna, 2001.

G. Vergnaud
La théorie des champs conceptuels. Recherches en didactique des mathématiques, 10, 1990, Ed. La Pensée sauvage, Grenoble.

David Wells
Personaggi e paradossi della matematica, Arnoldo Mondadori, Milano, 2000.

G. Mainini
Matematica elettorale, BDM 45, UIM, Bellinzona, dicembre 2002.

3. Statistiche d'ordine discrete e formula di Bayes

Mauro Cerasoli[1]

The author gives us an interesting essay on the problem of scientific induction, or Bayes' law. Starting from considerations of the great master Gian Carlo Rota, he presents an interesting series of theorems on discrete statistics. The article, surely specialized, is presented with great didactic clarity.

1. La formula di Bayes

La formula (o legge) di Bayes, nella sua forma più semplice, afferma che se H e A sono due eventi e se P(A), la probabilità di A, e P(H) sono diverse da 0, allora[2]

$$P(H \mid A) = \frac{P(H)\, P(A \mid H)}{P(H)\, P(A \mid H) + P(H^c)\, P(A \mid H^c)}$$

Scriveva Harold Jeffreys, a proposito di questa formula, nel suo *Theory of Probability* del 1939 (ristampato nel 1985 dalla Clarendon Press di Oxford):

«*This is the principle of inverse probability, first given by Bayes in* 1763. *It is the chief rule involved in the process of learning from experience*».

Più recentemente, Gian Carlo Rota nelle sue dispense redatte da John Guidi nel 1998 ha scritto: «*Una popolazione è composta di s persone. Alcune sono buone, altre no. Per esempio, un'urna contiene s palline: alcune sono rosse altre no. Vengono estratte n persone dalla popolazione (n palline dall'urna) senza rimessa. Se nel campione ci sono k persone buone (palline rosse) qual è l'inferenza più probabile sul numero di persone buone nella popolazione (di palline rosse nell'urna)? Il problema dell'induzione scientifica, o Legge di Bayes, è questo. È un problema che si presenta sempre*».

Aggiunge inoltre Rota:

«*The problem is that for a long time, people didn't believe in Bayes' Law. And now, there is a big turn towards Bayesian statistics. If you look at all the classic statistics books, the word Bayes is* forbidden. *And all this stuff is left out*».

1. Noto specialista di calcolo delle probabilità e statistica, particolarmente sensibile ai problemi dell'insegnamento della matematica, già professore all'Università dell'Aquila, membro del comitato scientifico di questa rivista, della quale è anche apprezzato collaboratore. Fu grande amico del compianto Gian Carlo Rota.
2. Il segno «|» indica la probabilità condizionata; H^c è il complemento di H [ndr].

William Feller, il maestro di Rota, probabilmente non aveva una buona opinione di Bayes. Scrive infatti a pag. 124 del suo trattato *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. I, 1950-1970 a proposito della formula di Bayes:

«*The beginner is advised always to do so and not to memorize the formula* (2.12) (la formula di Bayes), *which we shall now derive. It retraces in a general way what we did in special cases, but it is only a way of rewriting* (1.3) (la legge delle alternative, ovvero il denominatore della formula di Bayes, uguale alla P(A)). *Mathematically,* (2.12) *is a special way of writing* (1.3) *and nothing more*».

Feller non era il solo ad avere questa strana opinione della regola di Bayes. Anche Alfred Renyi nel suo trattato *Foundations of Probability* del 1971, di ben 366 pagine, relega la dimostrazione della formula di Bayes in un esercizio a pag. 90 e poi non la tratta più. Un'altra gaffe si può trovare nel trattato *Mathematical Statistics* del 1956, di B.L van der Waerden, più famoso come algebrista per il suo *Modern Algebra* del 1931, dove la formula e il nome di Bayes semplicemente non compaiono affatto.

Gian Carlo Rota, a proposito della formula di Bayes, ha scritto:

«*In order to see through the mistery one is forced to dig up the original instance of Bayes'law, due to Laplace. Unless one is privy to this example, Bayes'law will remain mysterious*».

Vediamo allora questo problema di Laplace ma prima bisogna presentare una formula combinatoria necessaria per la sua soluzione.

2. Le statistiche d'ordine discrete (caso ipergeometrico)

Una scatola contiene un numero sconosciuto s di oggetti: si sa solo che sono numerati da 1 ad s. Come si può stimare s?

Si estraggono a caso n oggetti senza rimessa e sia X_k il numero del k° oggetto estratto. Sia poi $X_{(k)}$ il k° in ordine crescente dei numeri estratti. Allora $X_{(1)}$ è il minimo ed $X_{(n)}$ è il massimo dei numeri estratti. Le v.a. $X_{(k)}$ costituiscono le *statistiche d'ordine* delle X_k. Dato h = 1, 2,…, s si dimostra facilmente che

$$P\left(X_{(k)} = h\right) = \frac{\binom{h-1}{k-1}\binom{s-h}{n-k}}{\binom{s}{n}}$$

Sommando su h da 1 ad s la somma deve essere uguale ad 1; sostituendo s, n e k rispettivamente con s+1, n+1, k+1 e ponendo h–1= r si ottiene così la famiglia di identità combinatorie fondamentali

$$\sum_{0\le r\le s}\binom{r}{k}\binom{s-r}{n-k}=\binom{s+1}{n+1} \qquad (1)$$

valida per ogni k = 0, 1, 2, …, n.

Per k = 0 vale l'identità combinatoria

$$\sum_{0\le r\le s}\binom{s-r}{n}=\binom{s+1}{n+1} \qquad (1a)$$

che è bene ricordare perché sarà utilizzata in seguito.

Si noti poi che la (1) è una formula duale della più nota identità combinatoria di Vandermonde (o di Pascal)

$$\sum_{0\le k\le n}\binom{r}{k}\binom{s-r}{n-k}=\binom{s}{n} \qquad (2)$$

che generalizza l'identità di Stifel.

Inoltre, sempre con la (1), si può calcolare la media di $X_{(k)}$ che vale

$$\langle X_{(k)}\rangle=\frac{k(s+1)}{n+1}$$

Pertanto

$$\langle X_{(1)}\rangle=\frac{s+1}{n+1} \quad , \quad \langle X_{(n)}\rangle=\frac{n(s+1)}{n+1}$$

e quindi la v.a. $X_{(1)}+X_{(n)}-1$ è uno *stimatore corretto* di s nel senso che

$$\langle X_{(1)}+X_{(n)}-1\rangle=s$$

La varianza delle statistiche d'ordine vale

$$\sigma^2\left(X_{(k)}\right)=\frac{k(s+1)(s-n)(n-k+1)}{(n+1)^2(n+2)}$$

Le lacune L_k delle statistiche d'ordine discrete sono le variabili aleatorie così definite per k=1,2,…,n:

$$L_k=X_{(k)}-X_{(k-1)} \quad , \quad L_1=X_{(1)}$$

Teorema. *Le lacune sono equidistribuite con distribuzione*

$$P(L_k=h)=\frac{\binom{s-h}{n-1}}{\binom{s}{n}}$$

La dimostrazione inizia considerando che per la prima lacuna risulta ovviamente:

$$P(L_1=j)=\frac{\binom{s-j}{n-1}}{\binom{s}{n}}$$

Poi è sufficiente applicare la legge delle alternative alla seconda lacuna, condizionando alla prima, ed ottenere:

$$P(L_2 = h) = \sum_{1\le j\le s} P(L_1 = j)\, P(L_2 = h \mid L_1 = j) = \sum_{1\le j\le s} \frac{\binom{s-j}{n-1}}{\binom{s}{n}} \cdot \frac{\binom{s-j-h}{n-2}}{\binom{s-j}{n-1}}$$

$$= \sum_{1\le j\le s} \frac{\binom{s-j-h}{n-2}}{\binom{s}{n}} = \frac{\binom{s-h}{n-1}}{\binom{s}{n}}$$

in virtù della (1a). La dimostrazione segue per induzione su k.

Sarebbe interessante conoscere le distribuzioni delle statistiche d'ordine discrete nel caso con rimessa (caso binomiale).

3. Un problema d'induzione scientifica

L'identità (1) permette di risolvere due problemi fondamentali della probabilità. Il primo riguarda un'applicazione della formula di Bayes dovuta a Laplace e che risolve un problema dell'induzione scientifica di cui parlava Rota.

Una scatola contiene s palline di due tipi soltanto: rosso e blu; ne vengono estratte n senza rimessa ($0 < n \le s$). Si considerino le seguenti variabili aleatorie:

R_Σ = «numero di palline rosse nella scatola»

S_n = «numero di palline rosse nel campione estratto».

È ben noto che la probabilità che il campione contenga k palline rosse, se nella scatola ci sono r palline rosse (statistica di Maxwell-Boltzmann), vale

$$P(S_n = k \mid R_\Sigma = r) = \frac{\binom{r}{k} \cdot \binom{s-r}{n-k}}{\binom{s}{n}}$$

Viceversa, per la formula di Bayes relativa a più alternative H_r

$$P(H_r \mid A) = \frac{P(H_r)\, P(A \mid H_r)}{\sum_r P(H_r)\, P(A \mid H_r)}$$

si può affermare che

$$P(R_\Sigma = r \mid S_n = k) = \frac{P(R_\Sigma = r)\, P(S_n = k \mid R_\Sigma = r)}{\sum_{0\le r\le s} P(R_\Sigma = r)\, P(S_n = k \mid R_\Sigma = r)}$$

Supponendo, per il principio di Bernoulli, che sia uguale ad 1/(s+1) la probabilità a priori $P(R_\Sigma=r)$ di avere r palline rosse nella scatola prima dell'estrazione, si ottiene, in virtù della (1), il risultato

$$P\left(R_\Sigma = r \mid S_n = k\right) = \frac{\binom{r}{k}\binom{s-r}{n-k}}{\binom{s+1}{n+1}}$$

Pertanto le due probabilità soddisfano la relazione fondamentale

$$\left(n+1\right) P\left(S_n = k \mid R_\Sigma = r\right) = \left(s+1\right) P\left(R_\Sigma = r \mid S_n = k\right)$$

La formula (1), necessaria per questa applicazione della formula di Bayes, dalla quale si può iniziare a vedere il pensiero bayesiano in statistica, non appare negli ormai classici trattati summenzionati, ad eccezione di quello di Jeffrey.

Possiamo risolvere il problema anche nel caso in cui le palline vengono rimesse nell'urna dopo ogni estrazione (caso binomiale). Allora

$$P\left(S_n = k \mid R_\Sigma = r\right) = \binom{n}{k}\left(\frac{r}{s}\right)^k\left(1-\frac{r}{s}\right)^{n-k}$$

mentre, sempre nell'ipotesi che $P(R_\Sigma=r)=1/(s+1)$, si ha

$$P\left(R_\Sigma = r \mid S_n = k\right) = \frac{r^k\left(s-r\right)^{n-k}}{\sum\limits_{0\le r\le s} r^k\left(s-r\right)^{n-k}}$$

Si noti che la sommatoria al denominatore è la *funzione beta discreta* B(k,n,s).

4. Una formula famosa di Laplace

Un altro esempio di applicazione della formula di Bayes fu dato ancora da Laplace nel problema seguente. Sempre nell'ipotesi di avere una scatola con palline rosse e blu, e supponendo che il campione estratto di n palline (senza rimessa) ne contenga k rosse, qual è la probabilità che estraendo un'altra pallina questa sia rossa (evento A)?

Per la legge delle alternative, condizionando all'evento $(R_\Sigma = r|S_n = k)$, tale probabilità vale

$$P\left(A\right) = \sum_{0\le r\le s} P\left(R_\Sigma = r \mid S_n = k\right)\cdot P\left(A \mid R_\Sigma = r, S_n = k\right) = \frac{\sum\limits_{0\le r\le s}\left[\frac{\binom{r}{k}\binom{s-r}{n-k}}{\binom{s+1}{n+1}}\right]\left(r-k\right)}{\left(s-n\right)} = \frac{k+1}{n+2}$$

Si noti che questa probabilità non dipende da s. La formula, dovuta a Lapalce, apparve per la prima volta in Mém. de l'Acad. R. d. Sci., Parigi, 6, 1774, pag. 621. Stranamente essa non viene riproposta nella *Théorie Analytique des Probabilités* del 1812.

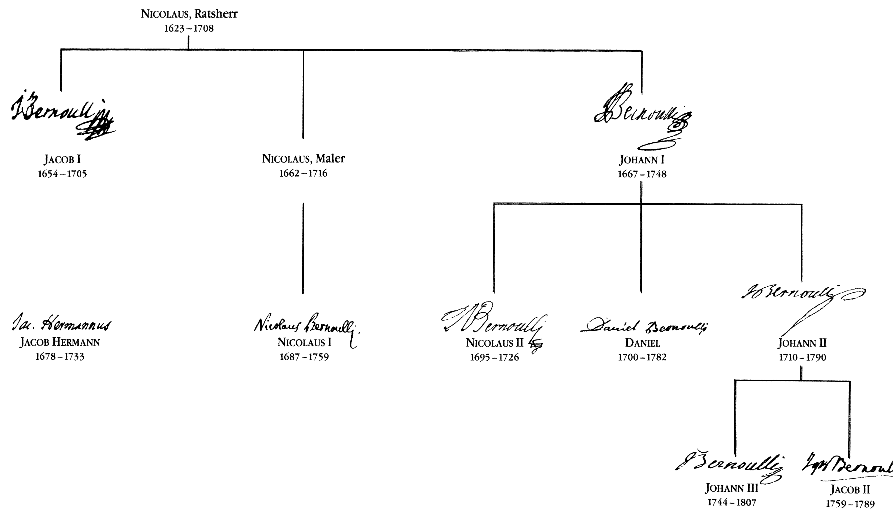
Un caso particolare notevole si ha per k = n. Allora, se tutte le palline estratte sono rosse, la prossima estratta sarà rossa con probabilità (n+1)/(n+2). Naturalmente, questa tende ad 1 quando n tende all'infinito. Per una errata applicazione di questo risultato (espresso in forma diversa) alla probabilità che domani sorga il sole, si rimanda al trattato del Feller, sempre a pag. 124.

4. I Bernoulli: la più grande dinastia di scienziati[1]

Gianfranco Arrigo

The article is dedicated to the Bernoullis'saga, certainly the greatest dinasty of scientists in history. Probably of Basque origins, the Bernoullis settled in Basle and from there they could weave important ties with the whole scientific community and in general with the cultural circles of the 17th and 18th century.

Radici



Non si sa con certezza se le radici della famiglia siano da collocare nella Borgogna francese o nei Paesi baschi spagnoli. Le prime tracce sicure risalgono alla metà del XVI secolo, anni in cui, ad Anversa, visse un certo Léon Bernoulli, i cui tre figli Peeter, Jacob e Nicolaus furono attivi come artigiani. Di Jacob rimane il ricordo di un uomo molto energico e intraprendente, divenuto proprietario di parecchi immobili di Anversa, in quel tempo centro commerciale di importanza europea. Ci sono sufficienti ragioni per credere che nel 1567 Jacob si spostò con l'intera famiglia a Frank-

1. Il presente articolo è una rielaborazione dello scritto «I gransignori della matematica» pubblicato dall'autore sul numero 8 /2001 della rivista Arte & Storia, Editoriale Ticino Management, Lugano.

furt-am-Main: la famiglia aveva abbracciato la causa luterana e rimanendo in Olanda si sarebbe esposta alle azioni controriformistiche promosse da Carlo V e condotte nei Paesi Bassi dal crudele e spietato Fernando Alvarez de Toledo, duca d'Alba. Nel 1570 Jacob diventò cittadino di Frankfurt e qualche tempo dopo troviamo traccia di una sua attività di armaiolo. I cinque figli di Jacob, raggiunta l'età matura, si occuparono di commercio – in particolare delle spezie –, intessendo contatti con le più importanti città tedesche e olandesi. Nel 1592, il figlio maggiore Nicolaus sposò ad Amsterdam Anna de Hartoge, che gli diede tre figli: due femmine e Jacob. Fu proprio Jacob che nel 1620 si stabilì a Basilea e aprì un commercio di spezie. Nel 1622 ricevette la cittadinanza di Basilea e sposò Maria Frey, che nel 1623 diede alla luce un figlio maschio, Nicolaus. Nel 1646 Nicolaus sposò Margaretha Schönauer, figlia di un importante amministratore della città. I due ebbero tre figli maschi: Jacob (indicato con Jacob I), Nicolaus e Johann (indicato con Johann I). Così iniziò la più grande dinastia di scienziati che la storia ricordi.

La prima generazione: amore e odio di due fratelli

Jacob I (1654-1705)

Jacob I nacque nel 1654. Per volontà del padre venne avviato alla carriera ecclesiastica. Studiò a Basilea dove ottenne il master in filosofia (1671) e la licenza in teologia nel 1676.

In questo periodo avvertì una forte attrazione verso gli studi naturalistici e matematici. Dal 1676 al 1678 insegnò a Ginevra, poi intraprese un viaggio in Francia dove entrò in contatto con i seguaci di Decartes.

Nel 1681 lo vediamo in Olanda e per un breve soggiorno in Inghilterra, dove conobbe, fra gli altri, il fisico e matematico (nonché astronomo) Robert Hooke (1635-1703). Al suo ritorno a Basilea, nel 1684, sposò Judith Stupanus, ma nessuno dei suoi figli venne attratto dalla matematica.

Da parte sua, Jacob I in questo periodo iniziò i suoi studi sulla geometria di Descartes (quella che oggi chiamiamo «geometria analitica») e sulla probabilità, studi questi ultimi che diedero poi vita alla sua più importante pubblicazione: l'*Ars Conjectandi* (Basilea, 1713). In questa opera venne formulata per la prima volta la cosiddetta «Legge dei grandi numeri», una pietra miliare nell'interpretazione frequentistica del concetto di probabilità matematica. Si racconta che l'intuizione decisiva Jacob l'ebbe nel 1688, mentre degustava una tazza di delizioso caffè e lui stesso disse più volte che questa scoperta «gli procurò più piacere che se avesse dimostrato la quadratura del cerchio, poiché questa, anche se dimostrata, avrebbe un utilizzo ristretto».

Che cos'è la «Legge dei grandi numeri»?

Esempio

Tutti possono capire che se si lancia una moneta (come fa, per esempio, l'arbitro del gioco del calcio per assegnare il campo) e se questa è perfetta, si può ottenere come risultato testa o croce e che ciascuno di questi risultati ha la stessa probabilità di verificarsi, cioè 1 su 2 (1/2 o anche 50%).

Ora pensiamo di lanciare una simile moneta 10 volte di seguito: se si ottiene 5 volte testa e 5 volte croce, nessuno ha alcunché da ridire: è «normale» che sia così. Se otteniamo 6 teste e 4 croci, di solito si tollera questo fatto come un normale incidente sul lavoro. Ma se si ottengono 7 oppure 8 oppure 9 oppure 10 volte testa, si pensa subito che la moneta sia truccata.

Jacob Bernoulli, con la sua legge ci dice che su 10 lanci può anche accadere che una moneta perfetta dia 10 volte testa.

La Legge dei grandi numeri applicata al lancio ripetuto di una moneta

Supponiamo di lanciare più volte una moneta e di annotare con un trattino ogni apparizione di testa. Indichiamo con m il numero di volte che si è verificato testa su n lanci effettuati.

La Legge dice che la probabilità che la frazione m/n (detta frequenza relativa) si avvicini al valore atteso 1/2 tende a 1 (cioè al 100% che indica la sicurezza) quando n è molto grande.

Ma attenzione: tende, in matematica, non vuol mica dire è uguale, anzi non si ha mai l'uguaglianza (cioè la certezza), anche se n fosse spaventosamente grande. In altre parole: è illusorio aspettarsi **con certezza** che lanciando un numero anche grande di volte una moneta si ottenga la frequenza relativa 1/2.

Diamo una versione della Legge dei grandi numeri come (più o meno) l'ha formulata Jacob Bernoulli:

Se p rappresenta la probabilità (costante) di un evento A e se m è il numero di volte che si verifica A in una sequenza di n prove aleatorie, allora per ogni numero ε positivo prefissato e per n sufficientemente grande, la probabilità

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}$$

si avvicina arbitrariamente a 1.

Può forse interessare il fatto che Jacob fu costretto a ritardare la pubblicazione della sua *Ars Conjectandi* (con la dimostrazione della Legge dei grandi numeri) di almeno quattro o cinque anni (fu pubblicata solo nel 1713) per colpa del grande maestro Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) al quale aveva inviato la dimostrazione per un controllo. La sfortuna volle che Leibniz, proprio in quel tempo, intraprendesse un viaggio che lo tenne lontano da casa per tre anni. Altri sostengono che Leibniz fu titubante perché non si muoveva affatto bene nel nuovo campo della probabilità…

Jacob ottenne altri importanti risultati matematici, tra i quali ci piace citare:

— Lo studio di alcune serie infinite (1689), grazie anche al rapporto di amicizia che ebbe con gli inglesi John Wallis (1616-1703) e Isaac Barrow (1630-1677), noto come il professore di matematica del grande Isaac Newton (1642-1727). Quest'ultimo, uno dei due creatori del calcolo differenziale (l'altro è il già citato Leibniz), potè basare la costruzione del nuovo calcolo anche sui risultati di Jacob Bernoulli.

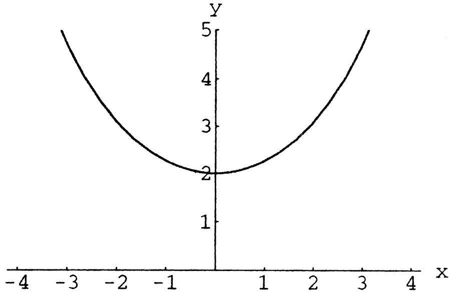
— Uno studio dettagliato sulla curva *isocrona*, cioè la traiettoria descritta da una particella che cade nel vuoto in modo che la sua altezza dal suolo subisca una variazione lineare rispetto al tempo.

— La formulazione del problema relativo alla catenaria, cioè a quella curva descritta da un filo elastico sospeso alle sue estremità, sotto la sola influenza della forza di gravità (si pensi ad esempio alle curve descritte dai cavi elettrici dell'alta tensione). È interessante ricordare che Galileo Galilei (1564-1642) credeva che tale curva fosse una parabola, mentre Huygens nel 1646 mostrò che non poteva essere una parabola. Il merito di Jacob fu di porre il problema in termini nuovi, usando il calcolo infinitesimale. Alla soluzione (la curva è molto nota oggi e si chiama *catenaria*) pervennero indipendentemente Leibniz, lo stesso Huygens e il fratello minore di Jacob, Johann (1691).

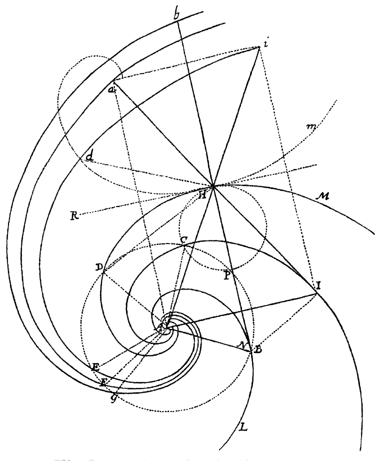
L'equazione della catenaria è

$$y = a\,\mathrm{Cosh}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}$$

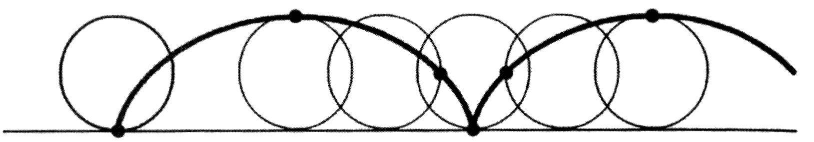
e il suo grafico:



— La determinazione dell'equazione della spirale logaritmica, detta *spira mirabilis*, una curva affascinante, che possiede la seguente proprietà: in ogni suo punto l'angolo tra il raggio vettore e la tangente è costante.



— La formulazione del problema della *brachistocronia* (cioè del tempo più corto). Immaginiamo di prendere un piano verticale e su di esso due punti: qual è la forma della traiettoria che deve compiere una particella sotto l'influenza del solo peso per passare dal punto più alto a quello più basso nel minor tempo possibile? La traiettoria non è un segmento di retta, come si sarebbe tentati di pensare, ma un arco di *cicloide*, cioè la curva idealmente percorsa da un punto fissato sulla ruota di una bicicletta, quando questa è in marcia.



La cicloide ha un'altra importante proprietà: se si lascia oscillare una pallina lungo un binario a forma di cicloide, la durata dell'oscillazione risulta indipendente dall'ampiezza dell'angolo di oscillazione. Questa proprietà è stata sfruttata da Huygens nel suo *Horologium Oscillatorium* (1673). Si dice che Newton venne a conoscenza del problema il 29 gennaio 1696, mentre stava lavorando alla Zecca e la sera stessa, dopo cena, lo risolse. Il giorno seguente comunicò la soluzione in forma anonima alla Royal Society. Si dice che Jacob Bernoulli, appena lesse la soluzione del suo problema, riconobbe la mano del grande Newton ed esclamò: «Ah! Riconosco il leone dalla sua zampa».

— Diversi contributi nell'ambito della risoluzione di equazioni differenziali.
— Primi passi nella teoria del calcolo delle variazioni.
— La determinazione dell'equazione relativa all'oscillazione di una trave sospesa alle estremità, sottoposta a una sollecitazione esterna.
— Una prima formulazione della legge fisica dei momenti.

Jacob morì improvvisamente nel 1705 quando era all'apice della creatività scientifica. Negli ultimi anni della sua vita, come si può riconoscere dall'elenco precedente, il primo rampollo matematico della famiglia Bernoulli si interessò anche di fisica: i suoi lavori sull'oscillazione della trave sono citati ancora oggi nei moderni trattati di statica.

Johann I (1667-1748)

Johann I, il minore dei figli di Nicolaus e Margaretha, aveva 13 anni meno del fratello Jacob I. Si mostrò subito uno spirito ribelle. Rifiutò di continuare con il commercio del padre e ottenne di poter frequentare l'università a Basilea, dove fu iscritto alla facoltà di medicina. Ma mentre studiava medicina incominciò ad interessarsi di matematica, dietro stimolazione del fratello maggiore. I due si immersero nella pratica del calcolo infinitesimale, studiando soprattutto i lavori di Leibniz. Si dice che dopo tre anni di lavoro in comune, il fratellino Johann ne sapesse di più dell'altro. Questa, pare, fu la causa dei primi dissapori tra i due fratelli: questione di gelosia…

Nel 1690 Johann conseguì la sua licenza in medicina, ma da allora abbandonò questo campo di studio per dedicarsi in modo completo alla matematica. Si trasferì a Ginevra, dove insegnò matematica. Nel maggio dello stesso anno il fratello Jacob pubblicò il trattato *Acta Eruditorum* nel quale fra l'altro formulò il problema della *catenaria*. Johann, lo risolse immediatamente e pubblicò la soluzione nel giro di pochi mesi. Per Jacob fu una sconfitta… Da quel momento la bella e proficua collaborazione tra i due fratelli si trasformò in competizione e si caricò di tensione.

L'anno dopo Johann arrivò a Parigi, dove, grazie alla fama conquistatasi con la soluzione del problema della catenaria, fu accolto nel circolo di Malebranche, dove conobbe il marchese Guillaume François de L'Hospital (1661-1704) detto *Grand-seigneur des Sciences Mathématiques*, ma che, ciononostante, era poco cognito del nuovo calcolo (infinitesimale). Fu così che Johann iniziò ad insegnare la nuova disciplina al marchese, cosa che continuò per via epistolare, anche dopo che Johann rientrò a Basilea. Nel 1696 accade un fatto che ruppe di colpo l'amicizia fra i due: L'Hospital pubblicò l'opera *Analyse des Infiniment Petits*, che lo rese famoso in tutto il mondo. Ma in quest'opera ci mise parecchi risultati di Johann, senza aggiungere alcuna nota in merito. A nulla valsero le rimostranze dello svizzero: la comunità internazionale non diede retta a Johann e celebrò la gloria di L'Hospital. Soltanto due secoli più tardi, nel 1923, a cura dell'editore Schafheitlin, furono pubblicate le lezioni di Bernoulli che, insieme alla divulgazione delle lettere di Johann a L'Hospital, resero evidente il furto che quest'ultimo perpretò ai danni di Bernoulli.

Nel 1692 Johann conobbe il matematico francese Pierre de Varignon e l'anno dopo finalmente potè stringere la mano a Leibniz.

Nel 1694 tornò a Basilea e completò il suo studio in medicina, conseguendo il dottorato con la tesi *De Motu Musculorum*. Nello stesso anno sposò Dorothea

Falkner, figlia di un amministratore della città di Basilea e accettò la cattedra di Professore di Matematica all'Università di Groeningen.

Agli inizi del nuovo secolo ricevette parecchi inviti per insegnare, in particolare dalle università di Leiden e Utrecht, ma, per le già citate questioni religiose, la vita di un calvinista nei Paesi Bassi era troppo rischiosa anche se matematico della fama di Johann, per cui lo stesso decise di rientrare nella sua Basilea (1705).

Nel 1727 morì Newton e Johann Bernoulli diventò il più famoso matematico d'Europa. La sua attività di insegnante a Basilea durò 38 anni e in quell'ateneo Johann occupò posti di responsabilità. Si dedicò anche alla riorganizzazione del liceo (Gymnasium) e fu insignito di parecchi riconoscimenti pubblici *honoris causa*.

Lavorò fino alla fine dei suoi giorni. La sua Opera Omnia fu pubblicata nel 1744 a Ginevra dall'editore Cramer.

Fra i vari lavori di Johann ci piace ricordare:

— La soluzione del problema della *velaria*, cioè della forma che assume una vela rettangolare gonfiata dal vento (la *velaria* è più propriamente la curva sezione della vela gonfiata con un piano verticale).

— I primi passi verso lo studio degli sviluppi in serie delle funzioni (lavoro portato a compimento dall'inglese Brook Taylor e reso noto, nel 1715, con l'opera *Methodus incrementorum directa et inversa*).

— La soluzione completa dell'equazione differenziale, detta *di Bernoulli*, affrontata per la prima volta dal fratello Jacob, che però diede un risultato non soddisfacente. Si tratta della seguente equazione di primo ordine, non lineare:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)\,y^n$$

nella quale P e Q sono funzioni continue di x (caso limite: costanti); $n \neq 0$ e $n \neq 1$.

Se si opera dapprima la divisione membro a membro per y^n…

$$y^{-n}\,\frac{dy}{dx} + P\,y^{-n+1} = Q$$

… poi la sostituzione

$$z = y^{-n+1} \quad \text{e quindi} \quad \frac{dz}{dx} = (-n+1)\,y^{-n}\,\frac{dy}{dx}$$

l'equazione di Bernoulli diventa lineare:

$$\frac{dz}{dx} + (-n+1)\,P\,z = (-n+1)\,Q$$

— Una pubblicazione sul calcolo delle variazioni, la nuova disciplina che il fratello Jacob contribuì in modo consistente a fondare.

— Un contributo allo studio delle curve geodetiche di superfici convesse (dati due punti su di una superficie, l'arco di geodetica è la linea più breve che li congiunge; per esempio sul piano la geodetica è una retta, sulla superficie sferica la geodetica è un cerchio massimo), pubblicato nel 1698.

— L'elaborazione del calcolo dell'integrale indefinito delle funzioni razionali (1699-1701).
— La formulazione moderna della legge di Kepler. Più precisamente, si tratta della seconda legge, relativa al moto dei pianeti attorno al sole, che può essere così espressa: *il segmento congiungente il centro del sole col centro di un pianeta percorre aree uguali in tempi uguali*.
— Lo studio sul movimento dei vascelli, che ci regalò l'unico libro da lui pubblicato, dal titolo *Essai d'une nouvelle théorie de la manoeuvre des Vaisseaux*, presso l'editore König di Basilea nel 1714.
— Nuovi studi sul movimento dei pianeti, in particolare sull'inclinazione della loro orbita (1735).
— Uno studio pionieristico sull'applicazione della legge di Newton a un elemento fisico infinitamente piccolo (1747).

La seconda generazione

Nicolaus I (1687-1759)

Nicolaus I è figlio di Nicolaus, il fratello di Jacob I e di Johann I, che diventò artista e che quindi non abbiamo incluso nel nostro racconto. Nel 1704 Nicolaus I ottenne il master in matematica all'Università di Basilea con una dissertazione in difesa del metodo, creato dallo zio Jacob I, che introduceva l'impiego delle serie infinite nella risoluzione di problemi, in tempi in cui il calcolo infinitesimale non era ancora rigorosamente fondato ed anzi era guardato con sospetto dalla matematica ufficiale. Negli anni successivi studiò legge e contemporaneamente si interessò della Teoria delle probabilità. Nel 1709 ottenne la licenza in diritto con una tesi sull'applicazione di questa teoria matematica alle questioni legali. Nello stesso anno pubblicò i suoi risultati a Basilea in un'opera dal titolo *De usu artis conjectandi in Jure*, con l'appoggio dello zio Jacob che in quegli anni stava scrivendo la sua *Ars conjectandi*.

A partire dal 1712 Nicolaus si recò dapprima in Olanda, poi in Inghilterra, in Francia e infine a Padova dove insegnò per quattro anni. Nel 1719 ritornò a Basilea e prese il posto di docente di logica. Nel 1731 scambiò la cattedra di logica con quella di legge e diventò Rettore dell'Università di Basilea. Questa e altre cariche ufficiali non gli permisero di occuparsi come avrebbe voluto della ricerca matematica: fu anche la ragione principale della relativa esiguità della sua produzione scientifica. Ci piace però ricordare Nicolaus come il più grande estimatore di suo zio Jacob. Dopo la morte di quest'ultimo, Nicolaus si occupò personalmente della sistemazione di parecchi articoli dello zio, raccolti in un fascicolo dal titolo *Varia Posthuma*, che oggi troviamo nell'appendice dell'*Opera* di Jacob I. Una delle realizzazioni più interessanti di Nicolaus fu il calcolo della serie (somma di infiniti addendi) dei reciproci dei numeri quadrati, cioè:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

Nicolaus calcolò il risultato di questa somma, riuscendo a dominare quello che era stato definito il *problema specifico di Basilea* e che i suoi due famosi zii non riuscirono a risolvere. Il risultato è tanto semplice quanto inatteso:

$$\frac{\pi^2}{6}$$

Allo stesso era giunto anche il grande matematico Leonhard Euler (1707-1783), pure lui di Basilea, nella metà degli anni 30 (pubblicato nel 1740), ma il metodo usato da Nicolaus apparì subito molto più semplice ed elegante. Questo episodio aiutò decisamente Nicolaus a conquistarsi la stima dei matematici basilesi.

Delle realizzazioni di Nicolaus I ci piace inoltre ricordare:

— I suoi lavori sulla risoluzione dell'equazione differenziale di Jacopo Francesco Riccati (1676-1754), matematico veneto. Si tratta dell'equazione differenziale di primo ordine:

$$\frac{dy}{dx} = P(x)\, y^2 + Q(x)\, y + R(x)$$

Anche questa equazione può essere linearizzata mediante l'ipotesi che $\eta(x)$ sia una soluzione particolare; se si opera la sostituzione

$$y = \eta + \frac{1}{u(x)} \quad \text{e quindi} \quad \eta' = \frac{u'(x)}{u^2(x)}$$

e si ottiene l'equazione lineare:

$$\frac{du}{dx} + 2\,\eta\, P(x)\, u(x) + Q(x)\, u(x) + P(x) = 0$$

— Il suo studio delle traiettorie ortogonali di un fascio di curve, anche se il contributo di Nicolaus è ben più modesto di quelli offerti da Euler, dal cugino Daniel e da Alexis Claude Clairaut (1713-1765).

— Nella grande controversia che vide di fronte Leibniz e Newton, tutti e due convinti di aver avuto il maggior merito nella costruzione del nuovo calcolo infinitesimale, Nicolaus (come del resto suo zio Jacob I) parteggiò decisamente per Leibniz e in particolare trovò un errore nell'Esempio I della Proposizione X dei *Principia* di Newton. Quando nel 1712 Nicolaus si recò a Londra, comunicò a Newton questo particolare, ma i due non si intesero. Sta di fatto che nella seconda edizione dei *Principia*, uscita nel 1713, l'errore venne corretto.

Nel 1717 Nicolaus ottenne il dottorato in giurisprudenza, ma nella storia rimarrà di lui indelebile l'immagine di un matematico, che, anche se non ha fatto cose strabilianti, è stato pur sempre un grande e fine conoscitore dell'analisi matematica: la disciplina che in quei tempi stava crescendo con l'etichetta di calcolo infinitesimale (o semplicemente col nome di Calcolo) e che più tardi sarà distinta in calcolo differenziale e integrale.

Nicolaus II (1695-1726)

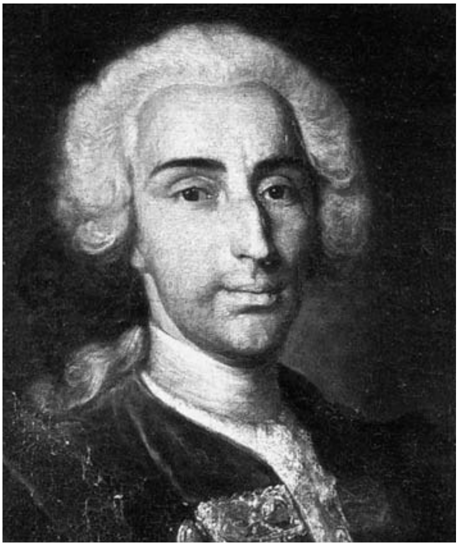
Nicolaus II era il figlio maggiore e prediletto di Johann I. Fu un bambino prodigio: già a 8 anni padroneggiava ben quattro lingue e a 13 anni si iscrisse all'Università di Basilea (grazie anche all'intervento del padre). Tre anni dopo conseguì il suo primo master. A vent'anni ottenne la licenza in giurisprudenza. Nel 1723 gli fu affidata la cattedra alla facoltà di legge dell'Università di Berna. Parallelamente, coltivò il suo talento matematico e tra il 1715 e il 1720 fu autore di una serie di pubblicazioni di geometria e di meccanica, nelle quali si intravede uno stretto nesso con la teoria delle traiettorie ortogonali. Contribuì anche in modo importante alla corrispondenza di suo padre in difesa di Leibniz, contro l'odiato Newton. Tra il 1715 e il 1717 e dal 1720 al 1722 Nicolaus fu in Italia. Tre anni dopo riuscì a trovare la soluzione completa e corretta dell'equazione di Riccati. Nel 1725 fu invitato dalla zarina Caterina I all'Accademia di San Pietroburgo insieme al fratello Daniel. Dopo neanche un anno di permanenza, nel 1726, fu assalito da un attacco di febbre che lo portò alla morte. L'ultimo onore tributatogli furono i funerali di stato, per ordine della zarina.

Daniel (1700-1782)

La sua fama di matematico non è certo paragonabile né a quella del padre Johann né a quella dello zio Jacob, ma la sua versatilità tecnica lo fece sicuramente uno dei maggiori fisici sperimentali della sua epoca. A 13 anni anche lui fu iscritto all'Università di Basilea e due anni dopo ottenne il suo primo master in filosofia. In quegli anni si avvicinò allo studio della matematica con l'aiuto del fratello Nicolaus, contrariamente alla volontà del padre che lo voleva avviare al commercio. Daniel riuscì comunque ad ottenere il permesso di continuare gli studi e fu iscritto alla facoltà di medicina, dove nel 1720 ottenne la licenza con una tesi dal titolo *De Respiratione*. Fu subito candidato a due cattedre a Basilea: medicina e logica. Daniel però preferì lasciare Basilea e recarsi a Venezia per completare la pratica in medicina. Ma anche in Italia non abbandonò la sua passione per la matematica e pubblicò, sempre a Venezia, *Exercitationes Quaedem Mathematicae*, una raccolta di problemi sul calcolo di aree, sulle serie convergenti e sull'equazione differenziale di Riccati. È pure evidente il suo interesse per la probabilità, l'idrodinamica e il calcolo infinitesimale. Nel 1725 accettò l'invito di suo fratello Nicolaus e giunse a San Pietroburgo, allora capitale della Russia. Sfortunatamente l'anno dopo il fratello morì e per Daniel iniziò un periodo molto triste. All'Accademia non si trovava bene e meditava continuamente il ritorno in patria. Lo trattenne solo la possibilità di avere contatti con Euler, che arrivò in Russia nel 1727. Fu così che potè irrobustire le sue conoscenze sull'idrodinamica, sulla probabilità e sulla teoria delle oscillazioni. Finalmente nel 1732 ottenne una cattedra di anatomia e botanica a Basilea, ma dopo un anno intraprese un viaggio insieme al fratello Johann II, con diversi soggiorni in Germania, Olanda e Francia dove conobbe parecchi docenti universitari. Ritornò a Basilea nel 1743, dove occupò una cattedra di botanica e fisiologia. Finalmente nel 1750 riuscì ad ottenere la tanto agognata cattedra di fisica, che mantenne fino all'anno del pensionamento (1776). Durante questo quarto di secolo fu apprezzato per le sue magnifiche lezioni e per gli interessanti esperimenti che le accompagnavano. Notevole fu il suo contributo all'introduzione del concetto fisico di potenza. Nel campo della probabilità, Daniel si distinse per l'applicazione di questa teoria all'economia e alla medicina. Usò anche un ingegnoso metodo per il calcolo degli errori, dando a questa disciplina un'apertura ancora oggi avvertibile. Sempre nel campo della fisica si occupò anche della matematizzazione delle onde sonore (fra l'altro usò implicitamente quello che oggi chiamiamo Principio di sovrapposizione) e della teoria del moto delle onde marine.

Più che come matematico, Daniel è ricordato come un grande fisico e un eccellente sperimentatore.

Johann II (1710-1790)



Di tutti i Bernoulli, Johann II è sicuramente colui che ha pubblicato meno. A 18 anni ottenne la licenza in giurisprudenza e quattro anni dopo il dottorato. Nel 1736 (a 26 anni) pubblicò quella che forse rimane la sua opera più importante, dal titolo «*Recherches physiques et géométriques sur la question: Comment se fait la propagation de la lumière?*», opera presentata al Prix de l'Académie Royale (Paris), nella quale si trova per la prima volta il concetto di vibrazione trasversale dell'etere, che verrà ripreso nel secolo successivo da Maxwell. Nel 1743, Johann I si ritirò e la sua cattedra di matematica all'Università di Basilea venne affidata al figlio Johann II che la conservò fino al 1790. In questo periodo Johann II curò la pubblicazione presso l'editore Cramer di Ginevra dell'*Opera omnia* del padre. Come professore universitario, intessè importanti relazioni epistolari con personaggi del mondo culturale europeo del calibro di François-Marie Voltaire (1694-1778) e del filosofo e scrittore francese Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759). Quando quest'ultimo, nel 1756, a causa della controversia avuta con Voltaire, abbandonò la presidenza dell'Accademia di Berlino, fu invitato e ospitato a Basilea da Johann II, dove soggiornò fino alla sua morte (1759).

La terza generazione

Johann III (1744-1807)

È figlio di Johann II; come suo zio Nicolaus II fu un bambino prodigio. Già a 14 anni conseguì il master, ma la sua produzione matematica risulta limitata, per due ragioni: la cattiva salute e la sua sete di conoscere tutto. A vent'anni accettò l'invito di Federico II di Prussia di riorganizzare l'Osservatorio astronomico dell'Accademia di Berlino e fu subito nominato Astronomo Reale. A Berlino conobbe Johann Heinrich Lambert (1728-1777), matematico, fisico e filosofo, autore di numerose opere nei campi della matematica (di lui si ricorda anche una dimostrazione dell'irrazionalità di π), della fisica e della meccanica celeste. Johann III curò la pubblicazione postuma delle opere di Lambert e dal 1786 al 1789 fu collaboratore della rivista *Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik*. Insieme al padre, ebbe anche occasione di scambiare una ricca corrispondenza – in particolare con Voltaire e Maupertuis – che però risulta di scarso valore scientifico. In questo campo, la sua opera più significativa risulta essere *Recherche sur l'extension que souffrent les fils avant de se rompre* (1778).

Jacob II (1759-1789)

Fu senza dubbio uno dei membri della grande famiglia che contribuì maggiormente ad assicurarne la fama nel mondo intero. A 18 anni ottenne la laurea in giurisprudenza e contemporaneamente si addentrò nello studio della matematica e della fisica. Quando nel 1782 morì lo zio Daniel, Jacob II si candidò alla cattedra di fisica all'università. Ma in quel tempo, a Basilea, le cattedre venivano assegnate mediante estrazione a sorte fra i candidati ritenuti idonei. A Jacob andò male e in generale, fin che restò in uso questo deprecabile metodo di assegnazione delle cattedre, Basilea conobbe un periodo di stanca nel panorama scientifico internazionale. Quando poi nel 1783 morì Euler, Jacob II ricevette l'invito dell'Accademia di San Pietroburgo. Accettò, e qualche tempo dopo sposò una nipote di Euler. Negli anni seguenti Jacob II scrisse parecchi trattati di idrodinamica ed elasticità nei quali presentò la soluzione di problemi che il grande Euler aveva lasciato irrisolti, emulando, nella capacità di risolvere problemi estremamente difficili, il vecchio zio Jacob I. Uno dei risultati più interessanti raggiunti da Jacob II fu quello relativo alla vibrazione di una lastra elastica, enunciato da Daniel Bernoulli e fino a quel tempo mai risolto in modo soddisfacente, nemmeno da personaggi come Leonhard Euler e Joseph Louis Lagrange (1736-1813). In verità la soluzione di Jacob II conteneva una piccola lacuna, che lo stesso stava correggendo quando, malauguratamente, nel 1789, a trent'anni, fu vittima di un tragico incidente: morì annegato mentre stava nuotando. Con la morte di Jacob II si estinse la più grande famiglia di scienziati che la storia ricordi.

1. La scoperta dell'importanza del contesto: il punto nei diversi ambiti

Silvia Sbaragli[1]

In the lessons of compulsory school the difference between the mathematical point and the point in the other contexts (like the iconographic one) is not emphasized. This means that when the point is finally studied in a more sophisticated mathematical sense at high school, it becomes too late for the students to get it: the other meanings have had the upper hand.

This paper informs of researches made by the author on a sample population of pupils from elementary, lower and higher secondary school.

1. Una provocazione…

Il lettore può osservare le due figure rappresentate e rispondere alle seguenti domande tratte da un lavoro sui concetti figurali di Fischbein (1993):

3a 3b

In 3a ci sono quattro linee che si intersecano (punto 1). In 3b, ci sono due linee che si intersecano (punto 2). Confronta i due punti 1 e 2. Questi due punti sono diversi? Uno di loro è più grande? Se sì, quale? Uno di loro è più pesante? Se sì, quale? I due punti hanno la stessa forma?

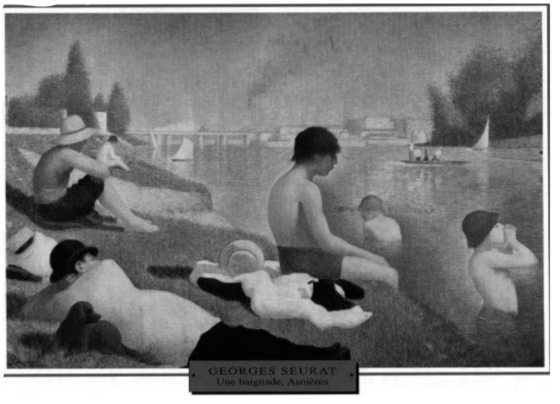
Risposta di un agrimensore di «vecchio stampo» con oltre 40 anni di professione: «*È ovvio che un punto è… un punto, ma nel disegno cambia a seconda di quale pennino usi e così un punto può diventare più grosso o meno grosso. Se usi pennini diversi o se ripassi con un numero sempre maggiore di linee il punto visivamente diventa più grosso*».

L'agrimensore non ha ancora «concettualizzato»[2] o la «concettualizzazione» dipende invece dal contesto?

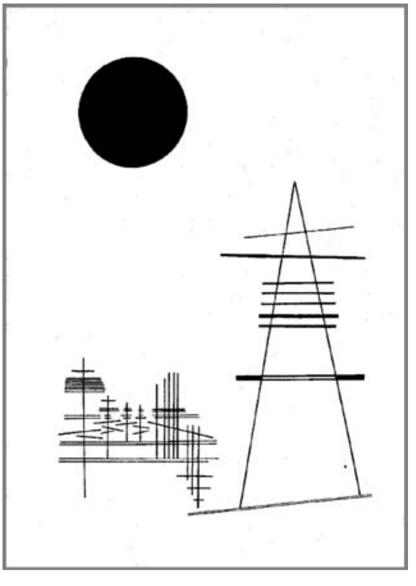
1. Ricercatrice del NRD di Bologna.
2. Siamo consapevoli che stiamo usando in modo molto ingenuo un termine: concettualizzazione, assai complesso e delicato: «*Addentrarsi in questa avventura, conduce a rendersi conto almeno di una cosa: che la domanda: Che cos'è o Come avviene la concettualizzazione? Resta fondamentalmente un mistero…*» (D'Amore, 2003). Questa scelta consapevole, nasce dall'uso di questo termine da parte di Fischbein (1993) nell'esempio del punto; esempio che rappresenta per noi una forte provocazione che sarà analizzata nel paragrafo 4.

Che cosa avrebbe risposto a queste sollecitazioni Seurat, pittore puntinista? Per Seurat il punto era concepito come un concetto astratto, nel senso inteso da Fischbein, o assumeva grande importanza la dimensione del punto?

Possiamo affermare che Seurat non è riuscito a «concettualizzare» nel senso inteso da Fischbein? Riflettiamo sull'effetto che farebbe il quadro di Seurat qui sotto rappresentato se il punto fosse concepito solo come posizione, «rappresentato» privo di dimensione …



Che cosa potrebbe pensare Kandinsky (1989) della domanda posta da Fischbein, dato che ha intitolato un suo quadro: «Le linee sottili tengono testa alla pesantezza del punto»?



Che cosa penseranno gli aborigeni australiani del punto dato che lo usano come base per rappresentare ogni immagine?

Nel rispondere alla domanda iniziale di Fischbein, chissà a quale contesto avrà pensato il nostro lettore…

2. Da dove nasce l'idea del punto nei diversi ambiti

Dopo due anni dal quindicesimo Convegno di Castel San Pietro dove fu proposto un seminario sul tema: «Infiniti e infinitesimi nella scuola di base», sono nati forti spunti di riflessione e diverse collaborazioni con insegnanti che hanno spinto l'analisi in varie direzioni: una di queste riguarda il punto nei diversi ambiti. Per spiegare il percorso seguito è bene far riferimento ad un articolo precedente (Sbaragli 2003), dove vengono messe in evidenza le convinzioni delle insegnanti elementari relative all'infinito matematico. Tra queste risulta lampante un fenomeno chiamato da Arrigo e D'Amore (1999, 2002): *dipendenza*, in base al quale vi sono più punti in un segmento più lungo, rispetto ad uno più corto (Tall, 1980). È ovvio che, come immagine visiva, un segmento più corto sembra essere incluso nell'altro, quindi vi è una grande influenza del modello figurale che in questo caso condiziona negativamente la risposta, ma è bene tener presente che per l'infinito matematico non vale la nozione euclidea: «*Il tutto è maggiore della sua parte*».

Il fenomeno sopra descritto è legato all'idea di retta vista secondo il «modello della collana» (Arrigo e D'Amore, 1999; 2002), ossia concepita come una fitta collana formata da perline, che rappresentano i punti, unite da un filo.

Questo viene indicato spesso dagli studenti come modello adatto per rappresentarsi mentalmente i punti sulla retta ed è stato a volte evidenziato dagli alunni come modello fornito dai loro insegnanti di scuola elementare, modello che resiste ad ogni attacco successivo (Arrigo e D'Amore, 1999; 2002).

Eppure ricerche accurate hanno ampiamente evidenziato che studenti maturi (ultimo anno delle superiori e primi anni di università) non riescono a diventare padroni del concetto di continuità proprio a causa del modello intuitivo persistente di segmento come «collana di perle» (Tall, 1980; Gimenez, 1990; Romero i Chesa e Azcárate Giménez, 1994; Arrigo e D'Amore, 1999, 2002).

È proprio in questo modello che si possono rileggere diverse convinzioni degli allievi e degli insegnanti legate all'idea di punto come ente avente una certa dimensione, anche se molto piccola. Convinzione derivante dalla rappresentazione che viene comunemente fornita del punto e che condiziona l'immagine che si ha di questo oggetto matematico.

Durante un lavoro di ricerca ancora in corso realizzato a Milano con studenti a partire dalla scuola dell'infanzia fino alla scuola superiore, si sono ottenute diverse risposte in forma di TEP's (D'Amore, Maier, 2002) relativi agli enti primitivi della geometria, in particolare al punto.

Alla richiesta: «*Immagina di dover spiegare ad un tuo compagno che cos'è un punto in matematica*» si sono avute le seguenti risposte (se ne riportano solo alcune tre le oltre 350 in nostro possesso):

«Io penso che il punto matematico sia un punto che fa finire una frase matematica anche per fare finire i numeri». (Terza elementare)

«Non si sa ancora bene che cos'è un punto però per me è solo un punto su un foglio che può essere di diverse dimensioni». (Quarta elementare)

«Il punto in matematica è un segnetto così "." oppure è la questione da risolvere.

Il punto in matematica è anche quello che si mette sopra certi numeri es 1˙000.

Nelle calcolatrici il punto viene considerato una virgola.

Il punto può essere anche per le equazioni es 100 x … = 200». (Quinta elementare)

«Un punto in matematica è importante per poter prendere un voto per essere felici». (Prima media)

«Il punto in geometria è il punto di riferimento di una figura». (Seconda media)

«È un punto rotondo che forma le linee». (Terza media)

«Il punto è una parte di piano indeterminato, perché può avere varie dimensioni, che costituisce l'inizio, la fine o entrambi di un segmento, una retta etc.». (Terza media)

«Un punto è un piccolo segno ed è un ente geometrico fondamentale». (Prima liceo scientifico)

«Un punto è l'elemento più piccolo preso in considerazione». (Seconda liceo scientifico)

«Un punto è un elemento geometrico, il più piccolo immaginabile tendente a 0. Tra due punti ce n'è sempre un terzo». (Terza liceo scientifico)

«Un punto minimo». (Quarta liceo scientifico)

«. ⟵ questo è un punto». (Quinta liceo scientifico)

«Un luogo geometrico infinitamente piccolo che, collocato in un piano cartesiano, possiede 2 coordinate (x, y)». (Quinta liceo scientifico)

Di seguito si riporta invece uno stralcio di conversazione avvenuta tra insegnanti di scuola elementare come conseguenza della domanda posta dal ricercatore: «*Ci sono più punti nel segmento CD* (di lunghezza maggiore) *o nel segmento AB* (di lunghezza minore)*?»* (Sbaragli, 2003):

B.: Nel segmento CD; per forza, ha una lunghezza maggiore.

S.: Quanti in più?

B.: Dipende quanto li fai grandi.

M.: Anche da come li fai larghi o attaccati; ma se li avvicini al massimo e li fai grandi uguali ce ne sono di più in CD.

Perché queste convinzioni non siano la base di modelli scorretti che creino ostacoli per gli allievi, occorre aiutare il soggetto a staccarsi dal modello del segmento come «collana», per creare immagini più opportune che consentano di concepire punti senza spessore. Per far questo, il soggetto deve poter varcare il confine della propria conoscenza precedente, per costruire una nuova conoscenza.

3. Il quadro teorico

L'analisi che affronteremo tenta di mettere in risalto l'importanza del contesto, facendo riferimento ad un approccio situazionista e socio-culturale del costruttivismo sociale. In quest'ottica il sapere, in particolare il sapere matematico, deve:

— in primo luogo essere il prodotto della costruzione attiva dell'allievo (Brousseau, 1986);
— avere le caratteristiche di essere situato, cioè riferito ad un preciso contesto sociale e culturale, pur restando sempre in relazione ad altri contesti;
— essere il frutto di particolari forme di collaborazione e negoziazione sociale (Brousseau, 1986);
— essere usato e ulteriormente ridefinito in altri contesti sociali e culturali (Jonnasen, 1994).

Facendo queste considerazioni vogliamo inserirci all'interno di una visione «antropologica» che punta tutta l'attenzione sul soggetto che apprende (D'Amore, 2001a; D'Amore e Fandiño Pinilla, 2001; D'Amore, 2003), anziché sulla disciplina, privilegiando il «rapporto e l'uso del sapere», piuttosto che il «sapere»; impostazione che contempla la scelta di una filosofia a monte di stampo pragmatica (D'Amore, 2003). È in effetti l'«uso» che condiziona la significatività e quindi il valore di un dato contenuto, che in questo caso coinvolgerà il termine punto in diversi ambiti. In quest'ottica risulta per noi fondamentale far capire all'allievo l'importanza del contesto, quindi considerare i diversi «usi» di un sapere che determinano il significato degli oggetti.

In effetti all'interno della teoria pragmatica da noi scelta come quadro di analisi possibile le espressioni linguistiche, i singoli termini, i concetti, le strategie per risolvere un problema… hanno significati diversi a seconda del contesto in cui si usano: per questo vanno opportunamente decodificate, interpretate, selezionate e gestite dall'allievo. Come osserva D'Amore (2003) risulta impossibile all'interno di questa teoria ogni osservazione scientifica in quanto l'unica analisi possibile è «personale» o soggettiva, comunque circostanziata e non generalizzabile. Non si può quindi far altro che esaminare i diversi «usi»: l'insieme degli «usi» determina infatti il significato degli oggetti. Questo non deve significare per l'insegnante lasciare l'apprendimento solamente ad un atto di intuizione o ad una semplice interpretazione personale dell'allievo, soprattutto in ambito matematico dove si rischia che l'immagine intuitiva dell'allievo si trasformi in modello parassita (D'Amore, 1999). Come scrive D'Amore (2003): «*Una delle difficoltà è che all'idea di "concetto" partecipano tanti fattori e tante cause; per dirla in breve, e dunque in modo incompleto, non pare corretto affermare per esempio che "il concetto di retta" (supposto che esista)* (l'esempio è generalizzabile ovviamente anche per il punto) *è quello che risiede nella mente degli scienziati che a questo argomento hanno dedicato la loro vita di studio e riflessione; sembra più corretto affermare invece che vi sia una forte componente per così dire "antropologica" che mette in evidenza l'importanza delle relazioni tra $R_I(X,O)$ [rapporto istituzionale a quell'oggetto del sapere] e $R(X,O)$ [rapporto personale a quell'oggetto del sapere]* (in questo caso D'Amore fa esplicito riferimento a simboli e termini tratti da Chevallard, 1992)*… Dunque, nella direzione che ho voluto prendere, alla "costruzione" di un "concetto" parteciperebbe tanto la parte istituzionale (il Sapere) quanto la parte personale (di chiunque abbia accesso a tale Sapere, quindi anche l'allievo non solo lo scienziato)*».

Ma che cosa succede tradizionalmente per gli enti primitivi della geometria? In particolare per il punto e per la retta? La sensazione è che per questi oggetti matematici tutto venga lasciato semplicemente all'aspetto «personale», affidandoli solitamente ad un semplice atto di intuizione. Questo atteggiamento però rischia di radicare nella mente degli allievi modelli parassiti come il cosiddetto «modello della collana» che vincola l'apprendimento matematico successivo, facendo prevalere l'aspetto figurale su quello concettuale (Fischbein, 1993). Riteniamo invece didatticamente importante seguire un approccio pragmatico, con una costante mediazione da parte dell'insegnante per far sì che gli oggetti matematici ed il significato di tali oggetti non rimangano solo «personali» ma diventino «istituzionali» (Chevallard, 1992; D'Amore 2001a, 2003; Godino e Batanero, 1994).

In questa direzione rientrano anche le considerazioni riportate in Fischbein (1993): «*Uno studente di scuola superiore dovrebbe essere reso consapevole del conflitto e della sua origine, per dare rilievo nella sua mente alla necessità di basarsi nei ragionamenti matematici soprattutto sui limiti formali. Tutto ciò porta alla conclusione che il processo di costruzione dei concetti figurali nella mente dello studente non deve essere considerato un effetto spontaneo degli usuali corsi di geometria. L'integrazione delle proprietà concettuali e figurali in strutture mentali unitarie, con la predominanza dei limiti concettuali rispetto a quelli figurali, non è un processo naturale. Ciò dovrebbe costituire una continua, sistematica e principale preoccupazione dell'insegnante».* Queste considerazioni di Fischbein riferite ad allievi di scuola superiore dovrebbero a nostro parere essere trasferite ad ogni livello scolastico, anzi riteniamo indispensabile che gli insegnanti possiedano questa attenzione didattica fin dalla scuola elementare. A partire dalle riflessioni fin qui emerse, si sono strutturate alcune interessanti attività che sono state progettate e sperimentate insieme ad un gruppo di insegnanti di scuola elementare di Milano[3]. Si è partiti da questo livello scolastico poiché dai risultati dei TEPs sopra menzionati, emerge chiaramente come siano già presenti in bambini di scuola elementare misconcetti sui diversi enti geometrici; idee ingenue che risultano molto spesso legate a contesti diversi, ma che vengono trasferiti con disinvoltura anche in ambito matematico soprattutto a causa di una analogia linguistica. In queste attività, le finalità educative e didattiche che ci siamo posti non si riducono all'acquisizione di conoscenze, abilità e competenze da parte degli studenti, bensì mirano all'«uso» del sapere da parte di ciascuno. Si tratta quindi non solo di imparare, ma anche di saper gestire il proprio sapere e di fare le scelte opportune di fronte ad una complessità di informazioni o ad un evento problematico.

Riprendendo le parole di Gardner (1993): «*Uno degli obiettivi base dell'educare al comprendere o insegnare al comprendere è: formare la capacità del bambino a trasferire ed applicare la conoscenza acquisita a più situazioni e a più contesti*».

Per quanto riguarda in particolare il punto, basta cercare in un qualsiasi dizionario, come ad esempio il «Grande dizionario della lingua italiana» edito dalla UTET, per trovare per la parola punto circa 40 significati diversi; inoltre, se si guardano le locuzioni, le espressioni d'uso corrente, è possibile rintracciare per questo termine per lo meno 200 contesti d'uso diversi. Ovviamente tra questi significati vi è anche quello di punto matematico, ma questo didatticamente di solito viene lasciato all'intuizione o viene affrontato tardi rispetto agli altri, provocando così una sedimentazione esclusiva degli altri significati. In effetti, nella scuola di base, di solito non si mette in evidenza la differenza che c'è tra il punto matematico e il punto negli altri contesti (come quello figurale). Questo fa sì che, quando finalmente il punto alle scuole supe-

3. Colgo l'occasione per citare e ringraziare: Luigina Cottino, Claudia Gualandi, Carla Nobis, Adriana Ponti, Mirella Ricci.

riori viene affrontato in un senso matematico più sofisticato, per gli allievi risulta troppo tardi: gli altri significati hanno preso il sopravvento, diventando così inaccettabile l'idea di un nuovo significato che contraddice quelli fino ad allora sedimentati.

4. La rilettura della provocazione

Il primo paragrafo di questo articolo voleva essere una provocazione per far riflettere sull'importanza del contesto. Rimandiamo il lettore alla prima domanda di questo paragrafo e cerchiamo di capire di che cosa si tratta. Nel famoso articolo del 1993, relativo ai concetti figurali, Fischbein presenta la situazione sperimentale del punto, come intersezione di 4 o di 2 segmenti, che era stata rivolta a soggetti di età compresa tra i 6 e gli 11 anni. Le domande poste erano volutamente ambigue. Come afferma Fischbein (1993), queste domande potevano essere considerate o da un punto di vista geometrico o da un punto di vista materiale (grafico).

L'intenzione era di scoprire l'evoluzione con l'età dell'interpretazione dei soggetti e la possibile apparizione dei concetti figurali (punto, linea).

Come riferisce Fischbein, i risultati mostrano un'evoluzione relativamente sistematica delle risposte da una rappresentazione concreta ad una concettuale-astratta. Ma siamo certi che l'interpretazione concettuale sia esclusivamente quella astratta, o questo dipende dal contesto? È certo che in ambito matematico la concettualizzazione del punto si ha quando si è in grado di astrarre e di concepire un punto come privo di dimensioni, ma nella domanda non si è parlato di punto matematico, quindi l'attenzione poteva concentrarsi su un qualsiasi tipo di punto: per l'agrimensore, per il pittore, per l'aborigeno, per il disegnatore, per il musicista, per il geografo... A nostro parere un agrimensore di «vecchio stampo» abituato a disegnare con i pennini che non sia in grado di distinguere la diversa grossezza di un punto, fatto ad esempio con un pennino 0,2 o 0,8, non è riuscito a concettualizzare nel suo ambito. La concettualizzazione quindi dipende dal contesto, per questo riteniamo che nella esplicitazione della domanda risultava fondamentale chiarire l'ambito di riferimento.

Viene lecito domandarsi: è sempre vero che la percezione grafica sia meno concettuale di quella astratta, o forse questo dipende dal contesto di riferimento? In particolari ambiti, come quello grafico, l'aspetto figurale può essere ritenuto più concettuale di quello astratto? A nostro parere, notare la diversa dimensione di due punti, richiede una sensibilità, una finezza e un grado di «concettualizzazione» fondamentale in certi contesti. Da queste considerazioni emerge da parte nostra l'esigenza di esplicitare agli allievi l'ambito al quale ci riferiamo quando poniamo le domande per essere certi che le risposte, inattese ed insperate, non siano il risultato derivante dal fatto che l'intervistato si è collocato in un ambito diverso rispetto a quello immaginato dall'intervistatore. In un certo senso sarebbe come auspicare che vengano fornite le soluzione di un'equazione in un particolare insieme, senza però avere esplicitato l'insieme di definizione.

Da questo punto di vista potrebbe risultare pericoloso, se generalizzato ad ogni ambito, ciò che auspica Fischbein (1993), ossia che il punto si stacchi dal contesto, così da preparare il concetto geometrico di punto. In effetti riteniamo importante che l'allievo sia consapevole del contesto nel quale si sta muovendo e che elabori un concetto coerentemente rispetto al particolare ambito, ma allo stesso tempo auspichiamo che l'allievo sappia variarne l'«uso» all'interno dello stesso contesto e in contesti diversi.

5. Un breve cenno sulle attività

Le attività che abbiamo strutturato insieme agli insegnanti di scuola elementare si basano sull'«uso» della parola punto in diversi contesti: nella musica, nella lingua, nella geografia, nell'arte, nel disegno, nella matematica… analizzando in dettaglio ciò che caratterizza ogni contesto. Per esempio se parliamo della pittura facciamo notare che si tratta di un punto con caratteristiche particolari come la grandezza, la forma, la pesantezza, il colore, … che dipendono dagli strumenti con cui si è disegnato; si tratta di un punto che assume significato diverso a seconda di ciò che l'artista vuole esprimere. Entrando nel mondo della matematica invece si può riflettere e discutere sulla scelta di Euclide relativa al punto privo di dimensione, che è stata assunta da questo matematico come «punto» di partenza, «regola iniziale» del grande gioco della matematica al quale si invitano i bambini a partecipare. Ma come in ogni gioco che si rispetti, per partecipare è necessario accettarne e rispettarne «le regole», che in questo caso condurranno a saper «vedere con gli occhi della mente». La capacità di saper accettare, rispettare e condividere le scelte degli altri e l'esplicitazione delle caratteristiche dei diversi ambiti, rappresentano per questa trattazione elementi fondamentali per poter consentire ai bambini di staccarsi dalla fisicità dei punti che solitamente disegnano, per accettare un mondo diverso, quello della matematica, dove esistono «regole» diverse da quelle della loro quotidianità.

Le attività menzionate, ed altre ancora, sono la base di articoli per l'anno scolastico 2003/2004 rientranti in laboratori didattici all'interno della rivista, assai diffusa in Italia, dal titolo: «La Vita Scolastica», rivolta a docenti di scuola elementare. Questo rappresenta a nostro parere un grande risultato, in quanto la problematica degli enti primitivi della geometria e dell'infinito matematico avrà così una ricaduta didattica sempre più ampia, consentendo a molti insegnanti di avvicinarsi a queste tematiche e alle problematiche ad esse collegate. Inoltre è significativo il fatto che gli articoli siano strutturati sotto forma di laboratori[4], dove gli allievi diventano protagonisti *costruendo,* anche nel senso concreto del termine, oggetti che tentano di sradicare diversi misconcetti. In questo modo si instaurano meccanismi relazionali (insegnanti-allievi) molto particolari e relazioni cognitive (allievo-matematica) di estremo interesse teorico (Caldelli, D'Amore, 1986; D'Amore, 1988, 1990-91, 2001b).

4. Come sostiene D'Amore (2001b): «*Il laboratorio è un ambiente dove si fanno oggetti, si lavora concretamente, si costruisce qualche cosa; soprattutto è caratteristica del laboratorio una certa qual pratica inventiva; nel Laboratorio deve essere viva una tensione verso l'ideazione, la progettazione, la realizzazione di qualche cosa di non ripetitivo né banale, altrimenti basterebbe … un'officina*».

Arrigo G., D'Amore B.
«Lo vedo ma non ci credo...». Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 22B, 5, 465-494, 1999.

Arrigo G., D'Amore B.
«Lo vedo ma non ci credo...», seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La matematica e la sua didattica.* 1, 4-57, 2002.

Brousseau G.
Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques.* 7, 2, 33-115, 1986.

Caldelli M. L., D'Amore B
Idee per un laboratorio di matematica nella scuola dell'obbligo. Firenze: La Nuova Italia, 1986.

Chevallard Y.
Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques.* 12, 1, 73-112, 1992.

D'Amore B.
Il laboratorio di Matematica come fucina di idee e di pensiero produttivo. *L'educazione matematica.* 3, 41-51, 1988.

D'Amore B.
Imparare in laboratorio. *Riforma della scuola*. In 4 puntate sui numeri: 11 (novembre 1990); 1 (gennaio 1991); 5 (maggio 1991); 9 (settembre 1991).

D'Amore B.
Elementi di Didattica della Matematica. Bologna: Pitagora. III ed. 2001, 1999.

D'Amore B.
Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione «ingenua» in una teoria «realista» vs il modello «antropologico» in una teoria «pragmatica». *La Matematica e la sua didattica*. 1, 4-30, 2001a.

D'Amore B.
Nel segno della creatività. *La Vita Scolastica*. 1. Settembre 2001. 41-43, 2001b.

D'Amore B.
Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica. Pitagora: Bologna, 2003.

D'Amore B., M.I. Fandiño Pinilla
Concepts et objects mathématiques. In: Gagatsis A. (ed.) (2001). *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology*, Nicosia (Cipro), Intercollege Press Ed. Atti del «Third Intensive Programme Socrates-Erasmus, Nicosia, Università di Cipro, 22 giugno - 6 luglio 2001. 111-130, 2001.

D'Amore B., Maier H.
Produzioni scritte degli studenti su argomenti di matematica (TEP's) e loro utilizzazione grafica. *La matematica e la sua didattica.* 2. 144-189, 2002.

Fischbein E.
The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics.* 24, 139-162, 1993.

Gardner H.
Educare al comprendere. Milano: Feltrinelli, 1993.

Gimenez J.
About intuitional knowledge of density in Elementary School. *Atti del XIV PME.* Mexico. 19-26, 1990.

Godino J., Batanero C.
Significado institucional y personal de los objectos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 14, 3, 325-355. [Traduz. italiana Bologna: Pitagora, 1999, come libro nella collana: Bologna-Querétaro], 1994.

Jonassen D.H.
Thinking Tecnology. *Educational Technology*. 34-4, 34-37, 1994.

Kandinsky V.V.
Punto, linea, superficie. Biblioteca Adelphi. 16, 1989.

Romero i Chesa C., Azcárate Giménez C.
An inquiry into the concept images of the continuum. *Proceedings of the PME XVIII*. Lisboa. 185-192, 1994.

Sbaragli. S.
Le convinzioni delle insegnanti elementari sull'infinito matematico Prima parte. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 26A, 2-3. Seconda parte in corso di stampa, 2003.

Tall D.
The notion of infinity measuring number and its relevance in the intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*. 11, 271-284, 1980.

2. Immagini mentali e numeri in seconda media

Alberto Piatti[1], Gianmarco Zenoni[2]

This article illustrates a new approach to the teaching of the rational numbers (fractions) and in general of the real numbers involving several teaching metodologies. This approach was experimented in two second-year classes of two different secundary schools (Cadenazzo and Lodrino, Switzerland) during the year 2003-2004. The results, which were collected primarily by TEP's, are in part surprising: they highlight the importance of the mathematical concepts studied in the primary school.

Introduzione

Da tempo nei programmi della scuola media del Canton Ticino, lo studio dei numeri segue lo schema N,Z,Q,R. Letto in senso stretto, in prima praticamente solo numeri naturali in seconda numeri interi e frazioni e infine in terza e quarta i numeri razionali e irrazionali (reali). Questo tipo di approccio ha mostrato i suoi limiti (vedi 1) e 6)) soprattutto per quanto riguarda la comprensione della densità dei numeri razionali, del continuo e dei numeri reali in generale. Inoltre lo studio delle frazioni si è sempre concentrato sul concetto di frazione come operatore e ha sempre dato meno importanza al concetto di frazione come numero.

Durante l'anno scolastico 2002-2003 abbiamo sperimentato in due classi di scuola media, la IIC di Cadenazzo (docente A. Piatti) e la IIB di Lodrino (Docente G. Zenoni), un approccio didattico innovativo allo studio dei numeri. Lo scopo di questo metodo era quello di introdurre l'allievo a tutti i numeri contemporaneamente, sia razionali sia irrazionali, partendo da forti basi di calcolo con numeri scritti in forma decimale e quindi proponendo le frazioni puramente come numero. Le frazioni come operatore sono state introdotte solo a fine anno come applicazione. Per progettare il nostro corso abbiamo prestato molta attenzione alle immagini mentali che l'allievo si sarebbe potuto creare ed abbiamo deciso di incanalarle verso la visualizzazione dei numeri sulla retta dei numeri. La retta veniva disegnata indicando solo la posizione dello zero; la scala e il senso positivo venivano determinati dalla posizione di un secondo numero (questo veniva fatto anche dagli allievi). Abbiamo volutamente rinunciato a qualsiasi rappresentazione di immagini mentali classiche che potessero richiamare la frazione come operatore come ad esempio torte, tavolette di cioccolato, ecc.

Periodicamente abbiamo valutato lo stato delle conoscenze degli allievi tramite dei TEP's (vedi 2) e 4)). I risultati ottenuti, soprattutto nei TEP's sul concetto di frazione, sono sorprendenti e in parte sconcertanti.

1. USI Lugano e SUPSI Manno.
2. Liceo di Locarno e Sme Lodrino.

Il metodo: prima parte, numeri decimali e negativi

Durante le lezioni ci siamo serviti di diverse forme didattiche come ad esempio lavori individuali, lavori in coppia e di gruppo, discussioni di classe e altro (5)). I ragazzi sono stati valutati tramite prove formative (a casa e in classe) e prove sommative. Come già detto anche i TEP's hanno fornito un importante contributo. I ragazzi sono stati sensibilizzati sul fatto che stavamo svolgendo una sperimentazione didattica; questo li ha fatti sentire in una situazione di contratto didattico particolare (vedi 3)), ciò che ha influito positivamente sull'ambiente in classe. Le fasi sono state le seguenti in ordine cronologico:

Calcolo con numeri decimali. In questa fase abbiamo fatto lavorare i ragazzi con ogni sorta di numero scritto in forma decimale, compresi anche numeri con infiniti decimali periodici e non periodici[3] (numeri irrazionali). I ragazzi hanno dovuto risolvere calcoli con e senza calcolatrice, stimare risultati, ordinare numeri con molte cifre decimali e approssimare numeri qualsiasi. Sono stati inoltre sensibilizzati (preventivamente) sul fatto che divisioni tra numeri interi possono dare come risultati numeri con molte (eventualmente infinite) cifre decimali. Infine abbiamo fatto (ri-)scoprire agli allievi alcune proprietà delle operazioni, in particolare la proprietà distributiva della divisione e della moltiplicazione. Per studiare le proprietà delle operazioni abbiamo fatto uso anche del calcolo letterale.

Introduzione dei numeri negativi. Per introdurre i ragazzi ai numeri negativi abbiamo lavorato sulla retta dei numeri con l'usuale relazione d'ordine. In partenza abbiamo indicato su questa retta alcuni numeri (etichettati con una lettera) chiedendo agli allievi di metterli in ordine dal più piccolo al più grande. Abbiamo quindi discusso su quali numeri potessero essere minori di zero e i ragazzi hanno dimostrato di possedere già intuitivamente il concetto di numero negativo.

Operazioni con i numeri negativi. Abbiamo giustificato le operazioni lavorando con la retta dei numeri. In particolare la somma[4] non ha posto problemi e nemmeno la moltiplicazione (rispettivamente la divisione) di un numero negativo con un numero positivo e viceversa. L'ostacolo delle moltiplicazioni (rispettivamente divisioni) tra due numeri negativi è stato risolto in sede di discussione di classe confrontando calcoli come ad esempio

$$3 \cdot (-2.5) = -7.5$$
$$-3 \cdot (-2.5) = ?$$

I ragazzi hanno intuito subito che l'aggiunta di «un meno» nel calcolo doveva cambiare il segno del risultato. In seguito essi hanno potuto consolidare le loro

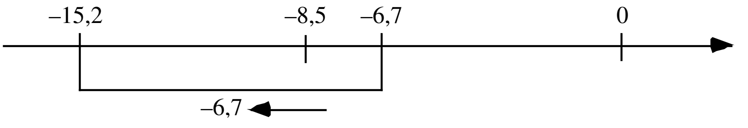
3. In questo caso abbiamo usato la notazione con i punti di sospensione, ad esempio 7.14973865… Gli allievi sono stati sensibilizzati sul fatto che un numero con infiniti decimali periodici può anche possedere un periodo molto lungo ed è quindi confondibile con un numero irrazionale.
4. Con somma indichiamo anche la sottrazione.

intuizioni con un opportuno lavoro di gruppo in aula di informatica seguito da uno in classe in cui hanno dovuto riassumere le regole di calcolo con i numeri razionali. Infine sono state introdotte le potenze con basi negative; questa fase non ha creato problemi particolari essendo state ben comprese le regole di calcolo precedenti e le proprietà delle operazioni.

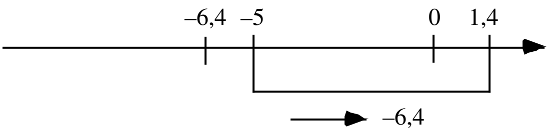
Vediamo alcuni estratti dai lavori di gruppo sulle operazioni con numeri reali scritti dagli allievi della IIC di Cadenazzo:

Primo caso: tutte le spiegazioni sono corredate da immagini sulla retta dei numeri:

- *Se aggiungi un numero negativo vai verso sinistra sulla retta dei numeri.*



- *Se togli un numero negativo vai verso destra sulla retta dei numeri naturali.*



- *Se moltiplichi un numero negativo per un numero positivo o viceversa il risultato sarà negativo.*

Commento

I ragazzi dimostrano di aver capito bene le regole: i disegni allegati sono molto esplicativi. Interessante il piccolo lapsus nella seconda frase dove chiama la retta dei numeri *retta dei numeri naturali.*

Secondo caso: le operazioni sono state descritte esclusivamente sulla retta dei numeri utilizzando parentesi graffe e frecce per illustrare il procedimento. Purtroppo la moltiplicazione è stata tralasciata, forse proprio perché era difficilmente rappresentabile.

Commento

Questa descrizione rispecchia il fatto che in questi allievi le operazioni, perlomeno la somma, sono già consolidate. Gli allievi di questo gruppo soffrono forse un po' il fatto che la moltiplicazione sia difficilmente rappresentabile graficamente.

Terzo caso:

$$-5-(-6.4)=1.4$$

- *Dato che ci sono due meno vicini, si annullano tutti e due e subentra il +*

Commento

La spiegazione è meno convincente delle precedenti; la sottrazione di numeri negativi è per loro una regola meccanica ma non sembra ancora realmente acquisita.

Nel complesso in questa prima parte non ci sono stati problemi di rilievo. I ragazzi hanno acquisito importanti basi di calcolo e in generale una buona flessibilità.

Risultati intermedi

Alla fine di questa fase i ragazzi hanno svolto un TEP con la seguente stimolazione:

*Immaginate di essere una maestra della scuola dell'infanzia. Un vostro bambino vi si avvicina e vi dice: «Mio fratello maggiore mi ha detto che esistono dei numeri che non si possono vedere e che si chiamano numeri negativi, ma io non ci credo»**.** Cosa rispondereste al bambino per convincerlo del contrario?*

Primo TEP: «*Tuo fratello ha **in parte** ragione: i numeri si possono vedere, anche i numeri negativi, solo che i numeri negativi sono sotto lo zero*».

Commento

Il ragazzo dimostra di aver capito bene la consegna e dà una risposta puntuale. Lui i numeri negativi «li vede», probabilmente pensando alla retta dei numeri, e sembra aver capito. Interessante notare che ha avuto il «coraggio» di contestare la frase data: in un ambito di contratto didattico usuale, questo sarebbe stato più difficile.

Secondo caso: «*Io per covincerli direi che se c'è lo 0 per andare sotto zero ci vogliono i numeri negativi. Gli farei una riga e gli dico sotto la riga del mare sono sotto zero e sopra naturale o cos'è poi e se non mi capisce gli dò una caramella così mi crede*».

Commento

L'allievo confonde diverse immagini mentali. Probabilmente quella predominante è relativa al livello del mare (negativo sotto il livello del mare), ma tenta comunque di far contento il docente usando le immagini viste in classe: un tipico esempio di *esigenza della giustificazione formale* (D'Amore-Sandri, 1998; D'Amore 1999). Molto probabilmente l'allievo non ha compreso pienamente il concetto di numero negativo. Singolare la battuta finale: nei TEP's c'è posto anche per l'umorismo.

Terzo caso. «*Tu devi capire che c'è una linea dei numeri e la linea dei numeri è come lo specchio, al centro c'è lo 0 e poi da una parte ci sono i numeri positivi e dall'altra i numeri negativi, ora ti faccio la linea* (disegna una retta dei numeri)… *Ecco vedi è molto semplice,lo vedrai poi in II media*».

Commento

Notevole il linguaggio semplice e corretto usato dall'allievo che dimostra un'ottima comprensione dei concetti.

In generale gli allievi hanno dimostrato di aver capito i numeri negativi anche se hanno difficoltà a trovare applicazioni nel mondo reale; i loro esempi si limitano al termometro, ai debiti, agli ascensori e alle profondità marine.

Il metodo: seconda parte, le frazioni

Le radici. Prima di occuparci di frazioni abbiamo trattato le radici e le loro proprietà, e subito abbiamo lavorato con espressioni contenenti radici. Abbiamo inoltre ripreso il calcolo letterale e lo abbiamo usato per approfondire la proprietà distribuitiva della moltiplicazione e della divisione.

Le frazioni. Abbiamo introdotto le frazioni come metodo più semplice per scrivere i numeri. Gli allievi hanno stimato e calcolato il risultato di divisioni tra numeri interi e, viceversa, hanno trovato divisioni tra numeri interi, aventi un risultato dato. Subito hanno intuito che per ogni numero dato esistono diverse divisioni (tra numeri interi) che hanno questo numero come risultato.

È stata poi introdotta la notazione frazionaria (questa è stata una delle poche volte che abbiamo usato l'approccio frontale). Dopo questa introduzione abbiamo insistito subito sull'ordinamento di frazioni sia con denominatore uguale sia con diversi denominatori, con e senza calcolatrice, anche rappresentandole sulla retta dei numeri. In questo modo, confrontando diverse frazioni, abbiamo concettualizzato l'equivalenza tra frazioni e messo a punto la tecnica di riduzione di una frazione ai minimi termini.

Somma di frazioni. I ragazzi hanno utilizzato il concetto di frazione equivalente per trasformare diverse frazioni in frazioni tutte con lo stesso denominatore ed intuitivamente sono giunti all'idea della somma di frazioni.

Per consolidare ulteriormente le loro intuizioni abbiamo fatto trascrivere la proprietà distributiva della divisione studiata in precedenza in notazione frazionaria, mostrando così come non sia possibile sommare due frazioni con denominatori in maniera semplice senza prima trovare un denominatore comune. Da questo punto in avanti abbiamo deciso di *differenziare* tutte le prove formative e le prove sommative in modo da permettere agli allievi un apprendimento più individualizzato. I risultati della differenziazione sono stati positivi ma rimandiamo la discussione sulla differenziazione ad un altro momento.

Frazioni come operatore. Infine la frazione è stata vista come operatore. Abbiamo fatto riferimento alla retta dei numeri mostrando come vengono collocate le frazioni su di essa. In pratica, l'unità viene divisa in tante parti uguali, quante ne indica il denominatore, e di queste se ne prendono tante quante ne indica il numeratore: si trova così la posizione della frazione sulla retta dei numeri.

La frazione come operatore è stata presentata utilizzando lo stesso approccio, sostituendo però la grandezza desiderata all'unità della retta dei numeri. Anche a questo punto non abbiamo mai fatto uso di immagini che non fossero basate sulla retta dei numeri.

Risultati intermedi

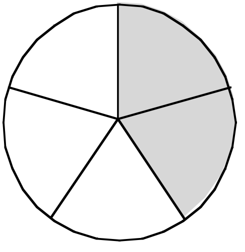
Anche questa fase non ha posto apparentemente problemi particolari: tutti gli allievi sono riusciti a manipolare le frazioni e la frazione come operatore scegliendo il livello più adeguato per loro nelle prove differenziate. I lavori di gruppo svolti sugli aspetti tecnici delle frazioni hanno dati buoni risultati. Le sorprese e i risultati inquietanti di questo lavoro sono venuti alla luce solo nell'ultimissima fase: i TEP's sul significato di frazione.

Sorpresa...

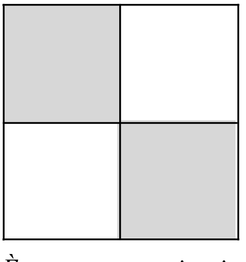
Alla fine di tutto il corso i ragazzi hanno dovuto scrivere un TEP con stimolazione: *spiega a un bambino piccolo che cos'è una frazione*. I risultati sono insieme interessanti ed inquietanti.

Vediamone alcuni

- *Una frazione è un calcolo, ad esempio*, *questa torta è divisa in 5 e Filippo ne mangia i 2/5, cioè 2 fette su 5.*

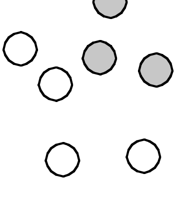


- *Una frazione è un altro modo di scrivere i numeri, ad esempio 2/5 è 0.4 oppure 10:5=10/5. Il denominatore divide il numeratore come se fosse una divisione, ad esempio questo quadrato è stato diviso in 4 parti uguali e ne vengono colorati 2 quadratini quindi la frazione è 2/4.*



- *È un numero scritto in modo più semplice costituito da una divisione.*

- *La frazione è un calcolo oppure una parte di qualcosa, 5/8=5:8, oppure se ho sette biglie e ne prendo tre ho preso i 3/7 delle mie biglie.*



Commento

Dei 31 TEP's consegnati, 14 parlano esplicitamente di torte, alcuni altri utilizzano immagini simili. **Ma noi non abbiamo mai disegnato una torta in tutto l'anno!**

Sono pochi i TEP's come il terzo o il quarto dei precedenti che dimostrano che l'allievo ha capito il concetto di frazione come numero, rispettivamente che sa cogliere la differenza tra la frazione come numero e la frazione come operatore. Eppure tutti hanno manipolato correttamente le frazioni e le hanno rappresentate sulla retta di numeri. Crediamo che TEP's come il secondo esempio siano i più significativi. Gli allievi hanno capito i concetti importanti ma, riguardo alla definizione di frazione, e accanto a immagini mentali fortemente radicate, ci sono modelli parassiti (D'Amore, 1999) che interferiscono nella mente del ragazzo.

Discussione e conclusioni

I risultati dei TEP's sulle frazioni ci hanno sconcertato: i ragazzi hanno dimostrato di possedere delle immagini mentali di frazione fortemente legate a rappresentazioni elementari della frazione come operatore. Esse hanno agito da modello parassita, compromettendo in parte l'apprendimento del concetto di numero razionale. Un altro problema che è venuto alla luce anche nei TEP's sui numeri negativi è l'ingombrante presenza dei numeri naturali nella mente dei ragazzi. Ad esempio, in un TEP un ragazzo ha scritto: «*sopra lo zero c'è l'uno*».

La nostra opinione è che queste immagini mentali siano rimaste agli allievi da esperienze scolastiche precedenti, alla scuola media. Queste agiscono da modello parassita e, se non sradicate in tempo, interferiscono nell'attività matematica del ragazzo durante tutta la sua vita.

Noi proponiamo che alla scuola elementare

- Si rinunci completamente a introdurre le frazioni o immagini mentali legate ad esse.
- Si introducano prima possibile i numeri con cifre decimali e si abituino gli allievi a fare stime e approssimazioni con essi.

Inoltre auspichiamo che nella formazione degli insegnanti di scuola elementare

- Si preveda una formazione adeguata in didattica della matematica in modo che i docenti siano preparati sensibilizzati e in grado di evitare la formazione di modelli parassiti e soprattutto di permettere lo sviluppo nei bambini di basi solide su cui fondare la conoscenza matematica nelle scuole successive. Una formazione, per intenderci, fortemente basata sui fondamenti della matematica e sulla sua didattica. Siamo sempre più coscienti del fatto che i docenti di scuola elementare hanno una grande responsabilità nella formazione matematica dei bambini e che, proprio per questo, occorra maggiormente valorizzare la qualità della loro formazione.

La nostra sperimentazione ha dimostrato che non basta un anno scolastico intero per rimuovere certi modelli parassiti consolidatisi negli anni. Ci auguriamo che la ricerca possa continuare nella direzione indicata, nell'immediato futuro, in modo da permettere di circoscrivere questo fenomeno che ci appare preoccupante.

In sintesi presentiamo gli altri risultati della sperimentazione:

• Il nostro approccio ha raggiunto gli obiettivi espressi nella mappa formativa della scuola media e rappresenta un'alternativa valida a quello tradizionale.
• I TEP's si sono rivelati strumenti di diagnosi molto utili ed efficaci, sia per gli allievi sia per i docenti.
• Nella programmazione di un qualsiasi curricolo di scuola elementare o media bisogna tener conto anche delle implicazioni legate alla costruzione di immagini mentali.
• La distinzione esasperata dei diversi insiemi numerici (del matematico) può avere effetti negativi sulle capacità del ragazzo di manipolare i numeri.
• Crediamo che i numeri vadano introdotti tutti fin dalla scuola elementare e concludersi in seconda media. In parallelo vanno allenate le capacità di stima ed approssimazione.
• La differenziazione può agevolare l'attività didattica in una classe, quando le competenze di calcolo dei diversi allievi si rivelano molto diverse.
• *Dulcis in fundo*, occorre una maggiore armonizzazione tra le filosofie che reggono l'insegnamento della matematica nei due ordini di scuola elementare e medio. Il che significa: intensificare il rapporto diretto tra la ricerca in didattica della matematica e i responsabili didattici dei due ordini di scuola.

Bibliografia

G. Arrigo
Verifica della qualità dell'apprendimento: le produzioni testuali autonome degli allievi (TEP's), Bollettino dei docenti di matematica, no 46, Bellinzona (2003)

G. Arrigo, B. D'Amore
"Lo vedo, ma non ci credo...", seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor, La matematica e la sua didattica, n-1-2002, Pitagora Editrice, Bologna

B. D'Amore
Elementi di didattica della matematica, Pitagora editrice, Bologna (1999)

B. D'Amore, H. Meier
Produzioni scritte degli studenti su argomenti di matematica (TEP's) e la loro utilizzazione grafica, La matematica e la sua didattica, n-2-2002, Pitagora Editrice, Bologna

B. D'Amore, P. Sandri
Risposte degli allievi a problemi di tipo scolastico standard con un dato mancante, La matematica e la sua didattica, 1, 4-18 [pubblicato in lingua francese su: Scientia paedagogica experimentalis, XXXV, 1, 55-94]

A. Piatti
Combinazione di forme didattiche nell'insegnamento della matematica, Lavoro di abilitazione, non pubblicato, ASP, Locarno (2002)

A. Piatti
Ricerca sul senso dell'infinito nei ragazzi della scuola media, Bollettino dei docenti di matematica, no 45, Bellinzona (2002)

3. Matematica e insegnamento della fisica

Claudio Beretta

A lot of pupils find it difficult to use mathematics within applicative fields, which makes some physics teachers say that students know very little about mathematics.

Perhaps a more honest and correct explanation is that the physics teachers banalize the way mathematics is used. Actually, the situation is more intricate because behind concepts and arguments of physics, seemingly simple, the necessity of further knowledge always hides and thus the obligation to make use of more complex and varied mathematical objects.The author tries to justify his thesis through a concrete example.

Introduzione

Molti allievi trovano difficoltà ad utilizzare la matematica in ambiti applicativi, il che fa dire a certi insegnanti di fisica che gli studenti non sanno niente di matematica.

Forse una versione più onesta e corretta è che alcuni docenti di fisica banalizzano la matematica utilizzata. Di fatto la situazione è più complessa poiché dietro a concetti o argomenti di fisica apparentemente semplici si cela sempre la necessità di conoscere di più e di conseguenza l'obbligo di servirsi di oggetti matematici più variati e complessi, mentre l'approccio tradizionale dell'insegnamento della matematica è strutturato per temi distinti. Solo nella fase finale del curricolo liceale si fa capo contemporaneamente a più argomenti della matematica.

Facciamo un esempio: il moto.

Pensiamo al lancio di un oggetto, ad esempio di un pallone calciato dalla bandierina del calcio d'angolo. Il fenomeno fisico concerne una massa, quella del pallone (che in seguito si considera concentrata nel centro di gravità e dunque il pallone viene rappresentato con un punto materiale) e una forza (quella che viene trasmessa al pallone dal calcio).

All'inizio del tiro il pallone è fermo. Questo non significa assenza di forze che agiscono su di esso, ma la presenza di un sistema di forze che si annullano: nel modello matematico, un insieme di vettori con somma nulla. Per esempio, la forza-peso del pallone e la reazione del terreno (il pallone non penetra nel terreno).

$$\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right| \text{ o meglio } \vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \text{ cioè } \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$$

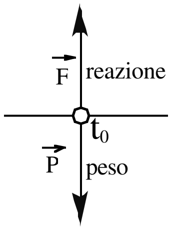


Figura 1

e siamo solo alla situazione iniziale.

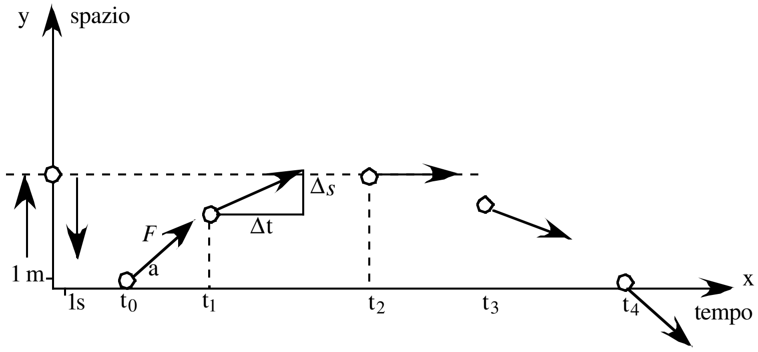


Figura 2

Dopo il calcio dato al pallone dal giocatore, sul pallone agisce un insieme di forze, ossia una somma di vettori non nulla (il pallone si muove!).

La forza $\vec{F}_p$ del pallone calciato si combina con l'accelerazione gravitazionale del pallone di massa m:

$\vec{F}_p = m \cdot \vec{g}$ (il peso del pallone).

Ne risulta la forza utile al movimento

$$\vec{F}_u = \vec{F}_p + \vec{F}_g$$

che genera una traiettoria che a livello elementare si può considerare piana, di tipo parabolico. Per completare il quadro introduciamo l'angolo α di incidenza del tiro, che dipende da come viene colpito il pallone. Questo influisce sulle proiezioni del vettore $\vec{F}_u$ sugli assi cartesiani. Qui entra in gioco la trigonometria elementare.

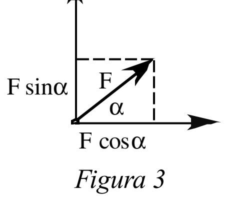


Figura 3

Il modello matematico è un'approssimazione della realtà

Siamo consci di aver costruito un modello astratto, che per esempio non tiene conto né dell'attrito dell'aria (che farebbe ricadere il pallone più vicino rispetto al punto di partenza), né della presenza di un vento laterale, turbolento o no, e nemmeno del fatto che un calciatore può imprimere un effetto rotatorio al pallone. Il modello, dunque, è un'approssimazione della realtà (in generale del lancio di un oggetto in un ideale piano verticale), sottintendendo poi che il tutto si svolga a temperatura, densità e umidità dell'aria costanti…

Se dovessimo tener conto di tutto ciò, la situazione risulterebbe molto complessa.

Ne segue che la traiettoria parabolica è un'approssimazione della realtà. È un modello buono purché i parametri non considerati siano ininfluenti.

Tuttavia il modello matematico traduce abbastanza fedelmente ciò che si osserva e in prima approssimazione ce ne possiamo accontentare.

Scelta dello strumento matematico

Ne segue che lo spazio percorso dopo t secondi, che i matematici scrivono come funzione di t, è esprimibile vettorialmente con la relazione:

$$\vec{s} = \vec{s}_0 + \vec{v}_0 . t \pm \frac{1}{2} \vec{g} . t^2$$

Lo strumento vettoriale si addice perché sia il moto sia il vettore geometrico sono caratterizzati da una direzione (tangente alla traiettoria), un senso (di percorrenza della traiettoria) e una intensità (una misura).

La funzione può essere rappresentata graficamente in un sistema cartesiano ortogonale con il tempo in ascissa e l'altezza alla quale si trova la massa in ordinata (vedi figura 2).

Fase di astrazione

Nella trattazione scolastica del moto, troppo spesso, si abbandonano – magari senza dirlo – le equazioni vettoriali dello spazio

$$\vec{s} = \vec{s}_0 + \vec{v}_0 . t \pm \frac{1}{2} \vec{g} . t^2$$

[in cui $\vec{s}_0$ è lo spazio iniziale (al tempo zero); $\vec{v}_0$ è la velocità iniziale e $\vec{g}$ l'accelerazione gravitazionale]

e della velocità

$\vec{v} = \vec{v}_0 \pm \vec{g} . t$

e dell'accelerazione

$\vec{a} = \vec{g}$

… per passare direttamente alle equazioni algebriche, riferite alle singole componenti del vettore.

Questo significa perdere il senso del modello.

Inoltre nasce una nuova difficoltà: la correttezza dell'equazione e la coerenza delle unità di misura. Premetto che qui siamo in un approccio non relativistico (vedi intuizione di Einstein sulla relatività ristretta), quindi spazio, velocità e accelerazione sono additivi; ciò significa che l'equazione dev'essere corretta anche nelle dimensioni.

Qualche interrogativo

1. Cosa significa per lo studente? Riesce lo studente a dedurre l'equazione e a verificarne la coerenza fisica e la correttezza dimensionale? Siete convinti che partendo da

   $v = \frac{s}{t}$ e $g = \frac{v}{t}$

   lo studente sappia subito dedurre che l'equazione

   $s = s_0 + v_0 . t \pm \frac{1}{2} g . t^2$ è corretta dal profilo dimensionale?

2. Fino a che punto lo studente è cosciente che l'equazione esprime uno spazio in funzione del tempo? (Osservando l'equazione, lo studente vede che $v_0 . t$ e $g . t^2$ sono spazi che si sommano a s_0?)

3. Pensate che se non si fa capire bene il gioco delle unità, si possa generare confusione nella mente dello studente?

Ma se è vero che nel tiro del pallone esiste una natura di moto uniformemente accelerato, le equazioni proposte non descrivono l'importanza dell'angolo di tiro.

Se poi si aggiunge l'aspetto dell'istante, cioè di un intervallo $(t, t + \Delta t)$ piccolissimo che tende a zero, ecco apparire il concetto di limite che non è proprio di facile concezione.

Abbiamo la seguente situazione:
al tempo t

$$s_{(t)} = s_0 + v_0 . t \pm \frac{1}{2} g . t^2$$

al tempo $t+\Delta t$

$$s_{(t+\Delta t)} = s_0 + v_o . (t + \Delta t) \pm \frac{1}{2} g \, (t + \Delta t)^2$$

velocità media in $(t, t+\Delta t)$

$$v_{media} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_{(t+\Delta t)} - s_{(t)}}{\Delta t} = \frac{v_o \cdot \Delta t \pm \frac{1}{2} g\left(t^2 + 2\,t\,\Delta t + \Delta t^2 - t^2\right)}{\Delta t}$$

cioè:

$$v_{media} = v_0 \pm g\,t \pm \frac{1}{2} g\,\Delta t$$

per $\Delta t \to 0$

$$v = v_0 \pm g\,t$$

Come tenere conto dell'angolo di tiro?

Mantenendo costante la forza trasmessa al pallone e aumentando l'angolo nasce ciò che in gergo si dice «tiro a campanile» al posto del precedente «tiro teso» in cui il pallone ricade più lontano.

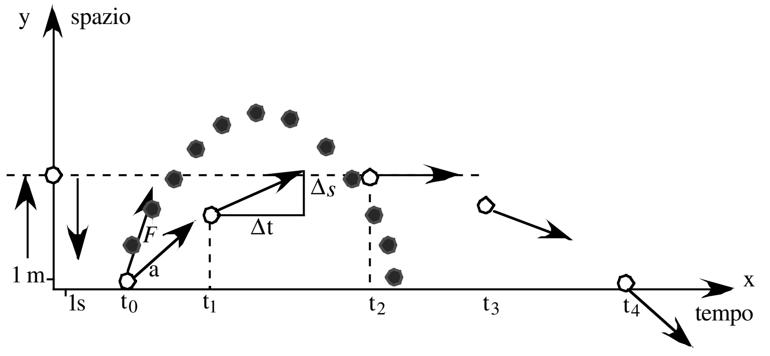


Figura 4

È importante che lo studente capisca che le equazioni si scrivono in un sistema che descrive separatamente le proiezioni orizzontale (sull'asse y) e verticale (sull'asse x) del moto del pallone. Nasce un'altra difficoltà: x è una costante mentre y varia con t. (La pedata iniziale è sempre quella e verticalmente il pallone è sempre sottoposto alla gravitazione).

$$\begin{cases} x = \quad v_0 \cos\alpha \\ y = -g\,t + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

Come si vede, occorre continuamente passare dal linguaggio matematico a quello fisico e viceversa.

Conclusione

Ho proposto un esempio, quello del calcio al pallone, apparentemente semplice, in realtà – se si volessero considerare tutti i parametri – alquanto complesso.

Per poterlo proporre in classe occorre apportare delle semplificazioni. In sostanza ciò significa considerare trascurabili determinati parametri.

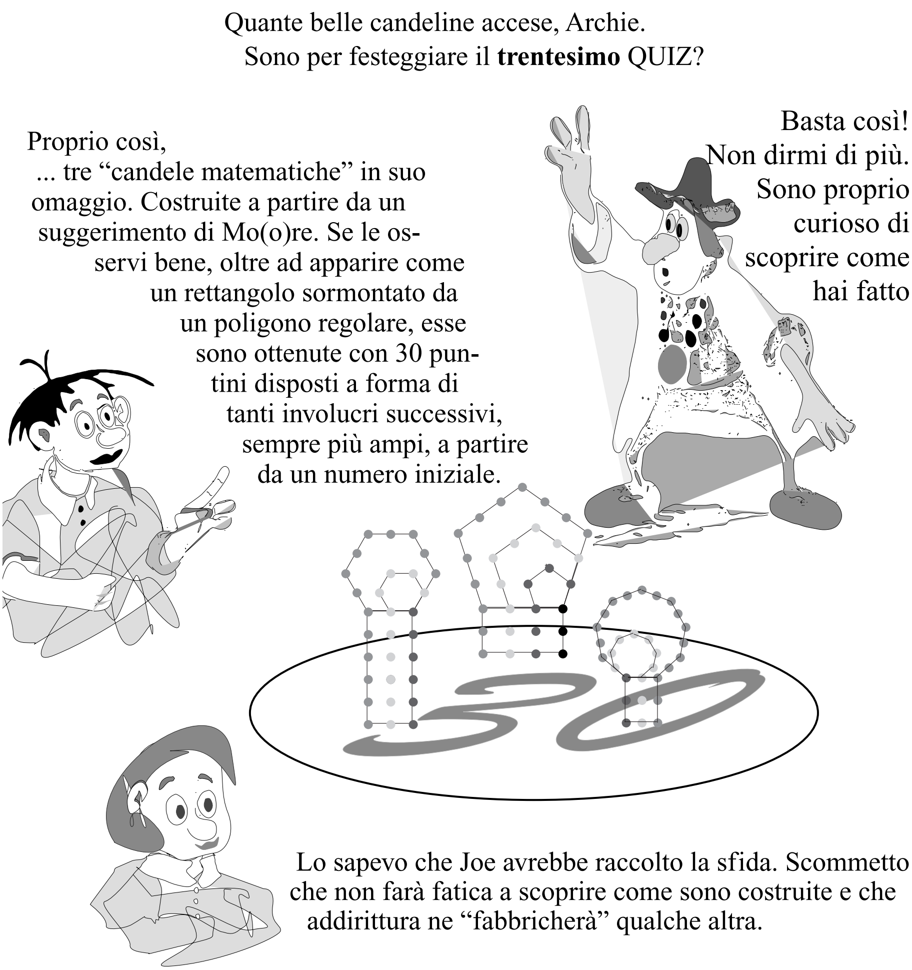
In sintesi dal profilo degli strumenti matematici abbiamo cercato le **equazioni** che ne descrivono la traiettoria, la velocità – ossia un **rapporto** spazio/tempo – l'accelerazione.

Abbiamo rappresentato la funzione spazio-tempo con **grafici cartesiani**. Tutto ciò costituisce il **modello matematico** che approssima la realtà. Per ottenere un modello plausibile ma relativamente facile abbiamo scelto certi **parametri** e ne abbiamo tralasciati altri.

Il bagaglio matematico necessario non è da poco e i concetti che ho appena evidenziato in neretto mostrano la ricchezza dei riferimenti necessari all'allievo per capire veramente. Dunque, prima di dire «*gli studenti non hanno le basi (matematiche) per capire la fisica*», occorre prendere atto della complessità della modellizzazione matematica di un fenomeno fisico, anche se tra i più elementari (almeno nelle apparenze).

Quiz numero 30

Aldo Frapolli



E voi sapreste fare altrettanto? Provateci. Al QUIZ farà piacere ricevere altre candeline per festeggiare la ricorrenza, magari accompagnate dal piano di costruzione. Ai più abili e intrapprendenti lanciamo anche la sfida seguente: costruire una candela matematica in onore del 2004 che è alle porte. Auguri e buon divertimento!!!

Ricordatevi che riceviamo sia posta cartacea sia posta elettronica. Quest’ultima all’indirizzo alfra@ticino.com

Il miglior contributo verrà premiato come sempre con un bel libro.

Soluzione del Quiz numero 29

Effettivamente 2048, non può essere scomposto in una somma di numeri naturali consecutivi, siccome è una potenza di 2. **Ma perché?**

Ecco cosa scrive un gruppo di allievi della IVD della scuola media di Breganzona:

1) Abbiamo effettuato tentativi per trovare la soluzione. Scoperte:

- *tutti i numeri dispari possono e sempre essere ottenuti come somma di due numeri consecutivi.*
- *un numero pari, invece non è mai esprimibile come somma di due consecutivi (ce ne vogliono almeno tre).*

Non è incoraggiante. Per fortuna arriva:

*2) La congettura di Valérie:"**Se lo zio di Archie ha ragione saranno "parenti" di 2048 tutti i numeri che si ottengono moltiplicando o dividendo successivamente per due".** Calcolando osserviamo che questi numeri non sono altro che le potenze di 2, ossia 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048,4096, ...*

3) Abbiamo così deciso di redigere la seguente tabella:

0	1	**2**	3	**4**	5	6	7	**8**	9	10	11	12	13	14	15	**16**	17	18	...	No	
			2		2		2		2		2		2		2		2			3+2n	
						3			3			3			3			3		6+3n	
										4				4				4		10+4n	
															5					15+5n	
																				...	
																				(a+1)a/2 + an	a≥2, n≥0

Da leggersi così:

- *ad es. il No 15 può essere espresso come somma di 2, 3 oppure 5 numeri consecutivi (7+8, 4+5+6, 1+2+3+4+5)*
- *Il numero più piccolo esprimibile con 4 numeri consecutivi (diversi da 0) é il 10=1+2+3+4. Il successivo é 14=2+3+4+5. Tali numeri vanno di 4 in 4 poiché ogni elemento della seconda quaterna aumenta di un'unità rispetto a quelli della prima. Analogamente quelli della terza... Per lo stesso motivo i numeri esprimibili con 5 n.c. andranno di 5 in 5 a partire dal più piccolo (il 15). E così via. Si giustificano così le formule dell'ultima colonna.*
- *L'ultima colonna contiene l'espressione letterale che esprime la successione di tutti i numeri ottenibili come somma di 2, 3,4, 5, ..., a numeri consecutivi.Di questa successione è difficile trovare il numero più piccolo quando non lo si può leggere nella tabella.Ci viene però in mente un calcolo fatto in 2ª per trovare la somma dei primi 100 numeri naturali: S=(1+100).100/2.*

*4. L**a tabella ci dice che la congettura di Valérie può essere vera**. Sicuramente vale fino al 64, abbiamo provato. Sarà vera anche per tutte le altre potenze di 2?*

- *Di sicuro da nessuna potenza di 2 comincerà una successione (come ad es. inizia dal 10 quella dei numeri esprimibili come somma di 4 n.c.). Questo perché a(a+1)/2 non può essere una potenza di due: dovrebbero esserlo sia a sia (a+1), ciò che è impossibile.*
- *La domanda finale è: aggiungendo an, potrà diventarlo?*

$$\frac{a(a+1)}{2}+an=\frac{a^2+a+2an}{2}=\frac{a(a+1+2n)}{2}$$

L'ultima frazione può essere una potenza di 2 se e solo se a e (a+1+2n) sono potenze di 2. Se a è una potenza di due (a+1+2n) non può esserlo a causa del +1.

La congettura di Valérie è dunque vera. Perciò 2048 (che è 2^{11}) è uno di quei "rari" numeri (ma sono infiniti!!!) che non possono essere scritti come somma di numeri consecutivi.

5. *Resterebbe da trovare una formula o un procedimento veloce per rispondere alla domanda: dato ad es. il numero 5720, trovare tutte le possibilità di esprimerlo come somma di n.c.*
Non siamo però riusciti a trovare qualcosa di veloce e sicuro.
Firmato: Amalia, Andrea, Anna, Davide, Fatima, Francesca, Luca, Michele, Myriam, Nico, Nicola, Pamela, Simone, Tusco, Valérie, IVD SM Breganzona.

Complimenti. Il lavoro ci è piaciuto e abbiamo deciso di premiarlo. Pur lasciando aperte diverse domande questa soluzione ha due grandi pregi:

- mostrare che problemi apparentemente fuori dalla loro portata possono essere affrontati con soddisfazione anche da allievi di scuola media in situazioni di laboratorio;
- evidenziare la ricchezza della situazione numerica proposta che può essere rilanciare a più riprese e con obiettivi diversi.

Abbiamo ricevuto anche molte soluzioni interessanti di colleghi docenti di matematica. Li ringraziamo tutti di cuore per i contributi forniti e che abbiamo cercato di riassumere in un unico testo di dimostrazione-giustificazione. Ci siamo prefissati di fornire qualcosa di facilmente comprensibile con risorse matematiche elementari e che rispondesse sia alla questione dell'esistenza di una tale scomposizione additiva sia al problema di una sua eventuale costruzione concreta. La proponiamo in particolare ai ragazzi della IVD che potranno così rispondere alla questione rimasta aperta nel loro punto5).

Anzitutto dimostriamo che una potenza di 2 ***non*** *può essere espressa come somma di numeri naturali consecutivi. Supponiamo che ciò sia vero, cioè che esistano s,k,n naturali strettamente positivi tali che $2^k=s+1+s+2+s+3+...+n$.*

Come noto la somma dei primi naturali è $\frac{n(n+1)}{2}$, *quindi per sottrazione dovr*à *essere* $2^k=\frac{n(n+1)}{2}-\frac{s(s+1)}{2}=\frac{n^2-s^2+n-s}{2}=\frac{(n-s)(n+s+1)}{2}$

Questa uguaglianza conduce ad un assurdo siccome i fattori (n-s) e (n+s+1) sono uno pari e l'altro dispari (come si dimostra facilmente) e dunque 2^k avrebbe un divisore dispari, ciò che è impossibile.
Mostriamo ora che qualunque numero ***non*** *potenza di un pari si può esprimere come somma di naturali consecutivi.*
Se il numero è dispari, cioè del tipo 2n+1 è evidente: 2n+1= n+(n+1)
Se il numero è pari allora è della forma $\mathbf{2^h.d}$*, con h >0 e d >1, dispari.*
Poniamo ***d=2s+1****.*
Se $\mathbf{2^h \leq s}$ *, consideriamo la seguente successione di numeri consecutivi (suggerita da tentativi di scomposizione applicati a casi particolari):* $s-2^h+1, s-2^h+2, s-2^h+3, ..., s, s+1,..., s+2^h$. *Sono* 2.2^h *addendi; se addiziono il primo con l'ultimo, il secondo con il penultimo ecc. ottengo sempre come risultato2s+1 Quante volte?* 2^h *volte,quindi la somma di tali consecutivi è proprio* 2^h *d, cioè il nostro numero.*
Se $\mathbf{2^h > s}$ *, consideriamo quest'altra sucessione di interi consecutivi:* $2^h-s, 2^h-s+1, 2^h-s+2, ..., 2^h-1, 2^h, 2^h+1, ..., 2^h+s$. *Sono 2s+1 interi consecutivi per come sono costruiti si elidono in parte a vicenda analogamente al caso precedente. Resta il termine* 2^h *preso 2s+1 volte, cioè il numero considerato.*

Le due successioni proposte nella seconda parte della dimostrazione sono frutto della generalizzazione di casi particolari e permettono di trovare **una** scomposizione additiva. Restano aperte molte domande, del tipo di quelle sollevate dai ragazzi della IVD, relative al numero di scomposizioni esistenti e alla loro lunghezza.

1. Baricentri…

Gianfranco Arrigo

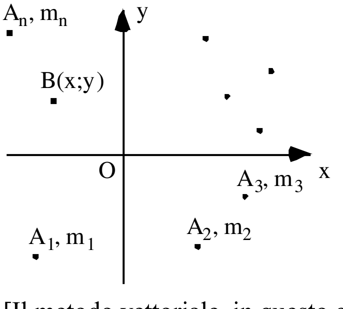
Introdurre i vettori nel programma liceale significa dotare gli allievi di uno strumento nettamente più efficace delle elementari metodologie di geometria algebrica. Sarebbe però sconveniente se questo nuovo oggetto matematico, una volta acquisito, rimanesse parcheggiato… nel capitolo vettori e fosse usato unicamente in attività imperniate sul metodo vettoriale. Nell'apprendimento, ogni nuovo oggetto matematico dovrebbe poter interagire con gli altri. Nell'ambito della risoluzione di problemi, lo studente dovrebbe essere messo nella condizione di scegliere di volta in volta lo strumento che meglio si presti.

La proposta che mi accingo a presentare si inserisce in questo ordine di idee e fa capo a semplici concetti di statica.

Iniziamo col definire il **baricentro di un sistema di n punti A_i associati a n masse m_i.**

È il punto B tale che:

$$m_1\,\overrightarrow{BA_1} + m_2\,\overrightarrow{BA_2} + \ldots + m_n\,\overrightarrow{BA_n} = \vec{0} \qquad (1)$$



[Il metodo vettoriale, in questo caso, mostra tutta la sua potenza e sinteticità.]

Siano inoltre $A_i(a_{1i}\,;a_{2i})$, i=1,2,…,n

L'uguaglianza (1) diventa:

$$m_1\begin{pmatrix} a_{11}-x \\ a_{21}-y \end{pmatrix}+\ldots+m_n\begin{pmatrix} a_{1n}-x \\ a_{2n}-y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dalla quale si ricava il sistema…

$$\begin{cases} m_1\,(a_{11}-x)+\ldots+m_n\,(a_{1n}-x)=0 \\ m_1\,(a_{21}-y)+\ldots+m_n\,(a_{2n}-y)=0 \end{cases}$$

che ha l'unica soluzione:

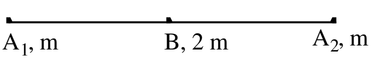
$$\begin{cases} x=\dfrac{m_1\,a_{11}+m_2\,a_{12}+\ldots+m_n\,a_{1n}}{m_1+m_2+\ldots+m_n} \\ y=\dfrac{m_1\,a_{21}+m_2\,a_{22}+\ldots+m_n\,a_{2n}}{m_1+m_2+\ldots+m_n} \end{cases}$$

Essa dà le coordinate del baricentro B.
E qui sarebbe tutto finito, sennonché…

… ci si può chiedere quali applicazioni tecnologiche può avere una simile teoria.

La più immediata consiste nel determinare il centro di gravità di un corpo solido. Siccome ci siamo limitati al piano, la nostra teoria è applicabile alla statica delle barre o delle lastre, che per semplicità supporremo piane e omogenee.

Primo caso: barra unidimensionale A_1A_2, $m_1 = m_2 = m$



Coordinate del baricentro:

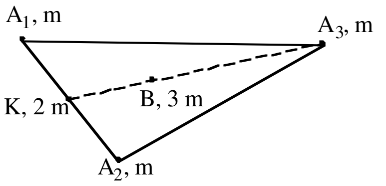
$$\begin{cases} x=\dfrac{m\,a_{11}+m\,a_{12}}{2\,m}=\dfrac{a_{11}+a_{12}}{2} \\ y=\dfrac{m\,a_{21}+m\,a_{22}}{2\,m}=\dfrac{a_{21}+a_{22}}{2} \end{cases}$$

Il centro di gravità coincide col punto medio della barra. Il risultato è scontato, ma ci permette almeno di affermare che il nostro modello, per ora, è fedele alla realtà.

Secondo caso: lastra triangolare $A_1A_2A_3$, $m_1 = m_2 = m_3 = m$

Principio: due o più punti di un sistema $\{(A_i;m_i)\}$ possono essere sostituiti da un unico punto – il loro baricentro – associato alla somma delle loro masse: così facendo, il baricentro del sistema non cambia.

Nel caso del triangolo, procediamo così:



Il baricentro del sistema $(A_1;m),(A_2;m),(A_3;m)$ è il punto B tale che:

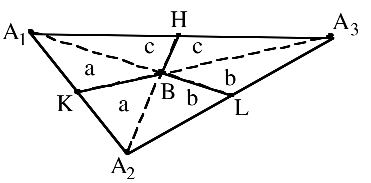
$$2\,m\,\vec{BK}+m\,\vec{BA_3}=\vec{0}$$

cioè

$$\vec{BA_3}=-2\,\vec{BK}$$

Anche questo risultato è conosciuto: significa che B è situato sulla mediana A_3K in modo che la distanza dal vertice A_3 sia il doppio di quella dal punto medio K. Ma una domanda è lecita: il baricentro del sistema $(A_1;m),(A_2;m),(A_3;m)$ coincide con quello della lastra triangolare omogenea (col suo centro di gravità)?

La risposta è sì, e la ragione è interessante dal punto di vista geometrico sintetico.



Ricordiamo che ogni mediana di un triangolo qualunque suddivide lo stesso in due triangoli di uguale area. Le lettere a, b, c indicano le aree dei triangoli nei quali si trovano.

La mediana A_3K divide il triangolo $A_1A_2A_3$ in due triangoli equiestesi, dunque:

$2\,c + a = a + 2\,b$, da cui $c = b$

La mediana A_2H divide il triangolo $A_1A_2A_3$ in due triangoli equiestesi, dunque:

$c + 2\,a = 2\,b + c$, da cui $a = b$

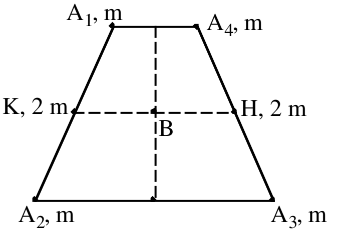
Si ottiene infine:

$a = b = c$

Questo risultato ci permette di concludere che i quadrilateri A_1KBH, A_2LBK, A_3HBL (che formano una partizione del triangolo $A_1A_2A_3$) hanno la stessa area, cioè che la lastra triangolare omogenea può essere scomposta in tre parti di stessa massa. Ciascuna di queste masse può essere associata a ciascun vertice; in questo modo risulta chiaramente che il baricentro del sistema $(A_1;m),(A_2;m),(A_3;m)$ coincide col centro di gravità della lastra omogenea.

Sarà così anche per una lastra quadrangolare omogenea?

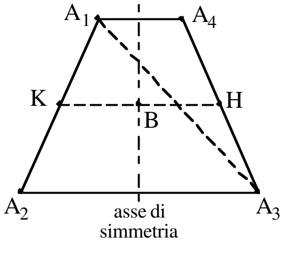
Consideriamo il seguente trapezio isoscele.



Il sistema $(A_1;m),(A_2;m),(A_3;m)\,(A_4;m)$ ha lo stesso baricentro B del sistema (K, 2 m), (H, 2 m). B è punto medio della mediana HK e anche dell'altra mediana del trapezio.

B coincide con il centro di gravità G della lastra omogenea?
La domanda è interessante.

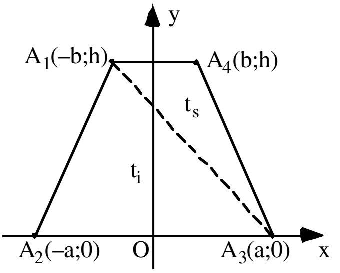
Vediamo le cose dal punto di vista fisico.



Per ragioni evidenti, il centro di gravità G si deve trovare sull'asse di simmetria del trapezio. Coinciderebbe con B, a condizione che le aree (le masse) dei triangoli $A_1A_3A_4$ e $A_1A_3A_2$ fossero uguali, il che è evidentemente errato in generale, cioè per $|A_1A_4| \neq |A_2A_3|$.

Nel caso della nostra figura, per esempio, visto che $|A_1A_4| < |A_2A_3|$, l'area (e quindi la massa) del triangolo $A_1A_3A_4$ risulta minore di quella del triangolo $A_1A_3A_2$. Ciò significa che il baricentro G sarà più «basso» del punto B.

Di quanto «più basso»?
Per rispondere, facciamo capo alla geometria analitica.



a, b, h sono numeri reali positivi
t_s significa triangolo superiore
t_i significa triangolo inferiore.

Coordinate del baricentro B_s del triangolo t_s:

$$B_s\left(\frac{a}{3};\frac{2h}{3}\right)$$

Area (massa) m_s del triangolo t_s:
$m_s = b\,h$
Coordinate del baricentro B_i del triangolo t_i:

$$B_i\left(\frac{-b}{3};\frac{h}{3}\right)$$

Area (massa) m_i del triangolo t_i:
$m_i = a\,h$

Il problema si riduce a trovare il baricentro (che è anche il centro di gravità) del sistema $(B_s,m_s),(B_i,m_i)$. Le sue coordinate sono:

$$\begin{cases} x=\dfrac{b\,h\left(\frac{a}{3}\right)+a\,h\left(\frac{-b}{3}\right)}{b\,h+a\,h}=0 \\ y=\dfrac{b\,h\left(\frac{2h}{3}\right)+a\,h\left(\frac{h}{3}\right)}{b\,h+a\,h}=\dfrac{h(2b+a)}{3(b+a)} \end{cases}$$

Esempio numerico:

a=5 ; b=3 ; h=6

Il baricentro del sistema $(A_1;m),(A_2;m),(A_3;m),(A_4;m)$ è B(0;3), mentre il centro di gravità della lastra triangolare omogenea $A_1A_2A_3A_4$ è G(0;2,75).

Da ultimo possiamo chiederci quali sono i quadrilateri per i quali vale B=G. Sono tutti quelli le cui diagonali li suddividono in due triangoli equiestesi, cioè i parallelogrammi.

Che cosa succederà nel caso di una lastra omogenea pentagonale, esagonale, o, in generale, a forma di poligono con n lati?

A questo punto la risposta è facile da dare.

In generale, B e G sono diversi. Per determinare G si può procedere così:

– si suddivide il poligono di n lati in n–2 triangoli
– si determina il baricentro B_j di ciascuno dei triangoli
– si calcola l'area (la massa) m_j di ciascuno dei triangoli
– si riduce il problema a un sistema di n–2 punti B_j, associati alle masse m_j.
– si ricomincia da capo, fino a quando si arriva a una barra (per n pari) o a un triangolo (per n dispari); entrambi questi problemi sono già stati risolti.

Complicato?

L'esecuzione, evidentemente sì. Ma con un computer…

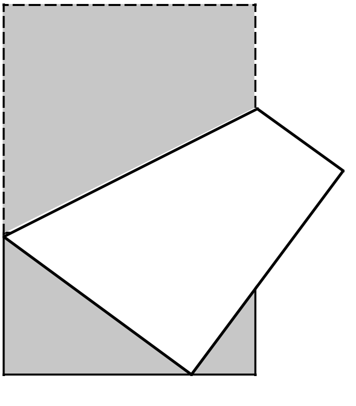
2. Il foglio piegato

Gianfranco Arrigo - Claudio Beretta

La situazione

Sul numero 92 del Bulletin della SSIMF (Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica), a firma Marcel-Yves Bachmann, viene fra l'altro presentato un problema che si presta ad essere risolto con varie metodologie. Potrebbe essere interessante proporlo nel laboratorio liceale. Ecco il problema.

Si prende un foglio rettangolare (per esempio di formato A4) e si piega in modo che un vertice cada all'interno del lato opposto (vedi figura). Si tratta di calcolare la lunghezza della piegatura.

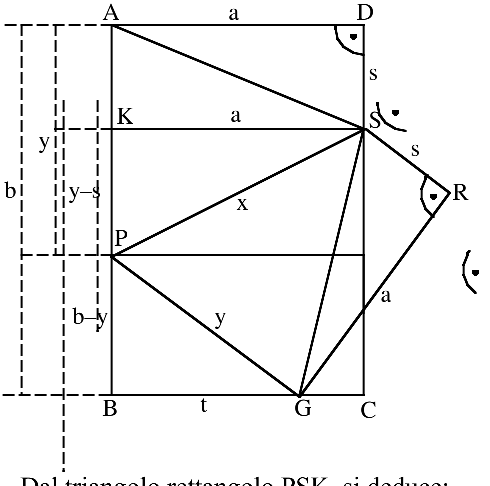


Attiriamo l'attenzione sul fatto che la consegna può essere data con una semplice dimostrazione manipolatoria. Si prende un foglio rettangolare e lo si piega come indicato: la stimolazione è fatta.

Possibili iter risolutori

1) Risoluzione «sintetica»

Modello geometrico:



Dal triangolo rettangolo PSK, si deduce:

$$x^2 = a^2 + (y-s)^2 \qquad (1)$$

Dal triangolo rettangolo BGP, si deduce:

$$y^2 = (b-y)^2 + t^2$$

$$y = \frac{b^2+t^2}{2b} \qquad (2)$$

I triangoli ASD e GRS sono isometrici, perciò: |GS| = |SA|

In conseguenza alla piegatura, risulta anche |PA| = |PG| = y ; quindi il quadrilatero PGSA è un aquilone e come tale deve avere le diagonali perpendicolari, quindi:

$$\vec{GA} \cdot \vec{SP} = 0 \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ y-s \end{pmatrix} = 0$$

$$a\,t + b\,y - b\,s = 0$$

$$s = \frac{a\,t + b\,y}{b} \qquad (3)$$

Sostituendo (2) e (3) in (1) si ottiene:

$$x^2 = a^2 + \left[\frac{b^2+t^2}{2b} - \frac{a\,t + b\,\frac{b^2+t^2}{2b}}{b} \right]^2$$

e infine

$$x^2 = a^2 + \left[\frac{a\,t}{b}\right]^2$$

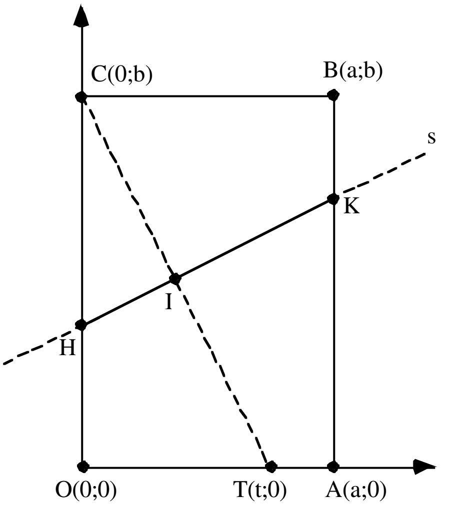
$$x^2 = a^2 + \frac{a^2\,t^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2}\left(b^2 + t^2\right)$$

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + t^2}$$

x è la lunghezza cercata, cioè quella della piegatura.

2) Risoluzione analitica

Modello analitico:



Per effetto della piegatura, il punto C va a finire in T; geometricamente significa che la retta s è asse di siummetria del segmento CT; quindi possiamo determinare le coordinate di I che è punto medio di CT.

$$I\left(\frac{t}{2};\frac{b}{2}\right)$$

Il coefficiente angolare di CT è $\frac{-b}{t}$; quello dell'asse s è allora $\frac{t}{b}$.

Equazione dell'asse s:

$$y - \frac{b}{2} = \frac{t}{b}\left(x - \frac{t}{2}\right)$$

Coordinate di H:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{b}{2} - \dfrac{t^2}{2b} \end{cases}$$

Coordinate di K:

$$\begin{cases} x = a \\ y = \dfrac{b}{2} + \dfrac{t\,a}{b} - \dfrac{t^2}{2b} \end{cases}$$

Infine:

$$|HK| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2} + \frac{t\,a}{b} - \frac{t^2}{2b} - \frac{b}{2} + \frac{t^2}{2b}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{t^2 a^2}{b^2}} = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + t^2}$$

Commento

La soluzione sintetica è più ardua. È stata semplificata introducendo i vettori e applicando la condizione di perpendicolarità espressa mediante il prodotto scalare. L'interesse di questo metodo di risoluzione sta nell'aver combinato ragionamenti di geometria sintetica con elementi di geometria vettoriale. Abbiamo già detto che facendo matematica può capitare di dover cambiare registro: è un passaggio delicato, che lo studente liceale a poco a poco dovrebbe poter compiere autonomamente.

La soluzione analitica del nostro problema appare decisamente più semplice, grazie soprattutto all'essenzialità del modello usato, ben diverso da quello geometrico articolato su costruzioni ausiliarie che complicano non poco la figura di partenza.

Questo fatto dovrebbe spingere lo studente, di fronte a un problema nuovo, a riflettere inizialmente sul metodo da applicare. Nasce un suggerimento chiaro per il docente: non assegnare un problema come questo all'interno di un capitolo (che sia di geometria sintetica, vettoriale o analitica), perché si priverebbe lo studente della possibilità di poter riflettere preventivamente sul metodo da usare. Ovviamente deve trattarsi di un problema mai incontrato. Se poi lo studente dovesse scegliere male il registro e incorrere in serie complicazioni, dovrebbe lui stesso ritornare all'inizio e ripartire con altri strumenti: anche questo vuol dire fare matematica autonomamente.

Concludiamo dicendo che tutto il lavoro viene leggermente semplificato nel caso di un foglio quadrato (a=b). Il vantaggio è che si semplificano i calcoli, ma rimane intatta l'esigenza del ragionamento geometrico.

1. Altezza dei numeri

Giorgio Mainini

The author proposes three possible definitions of "height" of a number (natural and different from 0). Starting from these definitions the author asks himself a few questions to which he gives accurate answers. For instance: is any natural number, different from 0, height of a number? Is there a way to establish the height of a number without listing all its divisors?

1. Idea base

Chiamo *altezza* di un numero (naturale, diverso da 0) il numero dei suoi divisori.
Indicherò l'altezza di un numero n con il simbolo h(n).
h è dunque una funzione da N* a N, meglio, da N* verso N*.

Esempi

h(1) = 1 perché 1 ha un solo divisore
h(2) = 2 perché 2 ha 2 divisori
h(3) = 2 perché 3 ha 2 divisori
h(4) = 3 perché 4 ha 3 divisori

Osservazione 1.1

h(n) = 1 se e solo se n = 1
h(n) = 2 se e solo se n è primo

Domanda 1.1

Evidentemente, ogni numero ha una sua altezza: ma, data una certa altezza k, esiste almeno un numero n tale per cui h(n) = k?

Esempi

Trovare n tale per cui h(n) = 6
Sperimentalmente, si trova che h(18) = h(20) = h(28) = … = 6
Trovare m tale per cui h(m) = 21
Qui, sperimentalmente, la faccenda si fa spessa: bisogna procedere per altra via.

Risposta 1.1
La ricerca di divisori coinvolge, prima o poi, i numeri primi.
Siano allora primi i numeri indicati con p_j, per ogni j.
Consideriamo allora il numero p_1^t.
I suoi divisori sono 1, p_1, p_1^2, p_1^3, p_1^4, …, p_1^t, e sono esattamente t+1, cioè $h(p_1^t) = t+1$
Di conseguenza, per ogni altezza $k \neq 0$, esistono infiniti numeri n tali per cui h(n) = k, cioè almeno tutti i p_j^{k-1}, per ogni j.

Domanda 1.2
Esiste un modo per determinare l'altezza di un numero **senza** elencare tutti i suoi divisori?

Esempio
h(81000) = ?
$h(81000) = h(2^3 . 3^4 . 5^3)$
I divisori di 81000 sono

1	ed è 1
$2, 2^2, 2^3, 3, 3^2, 3^3, 3^4, 5, 5^2, 5^3$	e sono 10, cioè 3 + 4 + 3 (somma degli esponenti)
$2 . 3, 2 . 3^2, 2 . 3^3, 2 . 3^4$	
$2^2 . 3, 2^2 . 3^2, 2^2 . 3^3, 2^2 . 3^4$	
$2^3 . 3, 2^3 . 3^2, 2^3 . 3^3, 2^3 . 3^4$	e sono 12, cioè 3 . 4 (prodotto degli esponenti di 2 e 3)
$2 . 5, 2 . 5^2, 2 . 5^3$	
…	
$2^3 . 5, 2^3 . 5^2, 2^3 . 5^3$	e sono 9, cioè 3 . 3 (prodotto degli esponenti di 2 e 5)
$3 . 5, 3 . 5^2, 3 . 5^3$	
…	
$3^4 . 5, 3^4 . 5^2, 3^4 . 5^3$	e sono 12, cioè 3 . 4 (prodotto degli esponenti di 3 e 5)
$2 . 3 . 5, 2 . 3 . 5^2, 2 . 3 . 5^3$	
$2. 3^2 . 5, 2 . 3^2 . 5^2, 2 . 3^2 . 5^3$	
…	
$2^3 . 3^4 . 5, 2^3 . 3^4 . 5^2, 2^3 . 3^4 . 5^3$	e sono 36, cioè 3 . 4 . 3 (prodotto di tutti gli esponenti)

Totale: 1 + 10 + 12 + 9 + 12 + 36 = 80
Quindi: h(81000) = 80

Non pare che si sia andati molto lontano, ma una più attenta analisi permette, se non altro, di individuare un controllo di aver trovato tutti i divisori.
Si ha infatti
80 = 1 + (3+4+3) + (3.4+3.3+3.4) + (3.4.3)

cioè
1 numero singolo (1)
3 numeri singoli (i 3 esponenti dei fattori primi di 80)
3 prodotti di 2 numeri (gli esponenti presi a 2 a 2)
1 prodotto di 3 numeri (tutti gli esponenti)

(1, 3, 3, 1): questa quadrupla non dice niente? Certo che dice qualcosa: i suoi elementi sono i coefficienti di $(a+b)^3$, e 3 sono proprio i fattori primi di 81000!
Che si andasse a cascare sui coefficienti binomiali non era facilmente prevedibile.

Si può allora prevedere che, per il conteggio dei divisori di 62752536 = $= 2^3 . 3^3 . 7^4 . 11^2$, si avrà a che fare con la quintupla (1, 4, 6, 4, 1), così:
1 numero singolo (1)
4 numeri singoli (i quattro esponenti dei fattori primi di 62752536)
6 prodotti di 2 numeri (gli esponenti presi a 2 a 2)
4 prodotto di 3 numeri (gli esponenti presi a 3 a 3)
1 prodotto di 4 numeri (tutti gli esponenti)
Si avrà che i divisori di 62752536 sono
$1 + (3+3+4+2) + (3.3+3.4+3.2+3.4+3.2+4.2) +$
$+ (3.3.4+3.3.2+3.4.2+3.4.2) + (3.3.4.2) = 240$
cioè h(62752536) = 240.
Provare per credere!

Risposta 1.2.1

Per trovare l'altezza di un numero si procede così:

1. si scompone il numero in fattori primi,
2. si contano i fattori primi, e siano k,
3. si prepara la (k+1)-upla adatta (i coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^k$) per il controllo del numero di prodotti,
4. si calcolano i vari prodotti tra gli esponenti (a 2 a 2, a 3 a 3, a 4 a 4, …, tutti),
5. si sommano i prodotti e si aggiunge 1.

Osservazione 1.2

Che ci siano di mezzo i coefficienti binomiali appare, a questo punto, evidente: basta osservare che i coefficienti binomiali descrivono in quanti modi si possono scegliere 1, 2, 3, …, k elementi, senza ripetizione da un insieme di k elementi distinti.

Risposta 1.2.2

Ma si può fare di meglio, molto meglio!
Sia
$$n = p_1^{a_1} . p_2^{a_2} . p_3^{a_3} \ldots . p_n^{a_n}$$
allora tutti i divisori di n sono i numeri m della forma
$$m = p_1^{b_1} . p_2^{b_2} . p_3^{b_3} \ldots . p_n^{b_n} \text{ con } 0 \le b_j \le a_j, \forall j$$

Questo implica che ogni b_j può assumere $a_j + 1$ possibili valori. In totale, dunque, i divisori di n sono

$$h(n) = (a_1+1)\,(a_2+1)\,(a_3+1)\,\dots\,(a_n+1) = \;= \prod_{j=1}^{n}\left(a_j+1\right)$$

E questa formula «compatta» offre una possibilità decisamente migliore, per il calcolo di h(n), della procedura proposta in Risposta 1.2.1.

Esempio

$h(62752536) = h(2^3 \,.\, 3^3 \,.\, 7^4 \,.\, 11^2) = (3+1)\,(3+1)\,(4+1)\,(2+1) =$
$= 4 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 3 = 240$

Quiz

Chi riesce a calcolare, in meno di 3 secondi,
$h(134444186892379) = h(7^3 \,.\, 13^3 \,.\, 19^4 \,.\, 37^2)$?

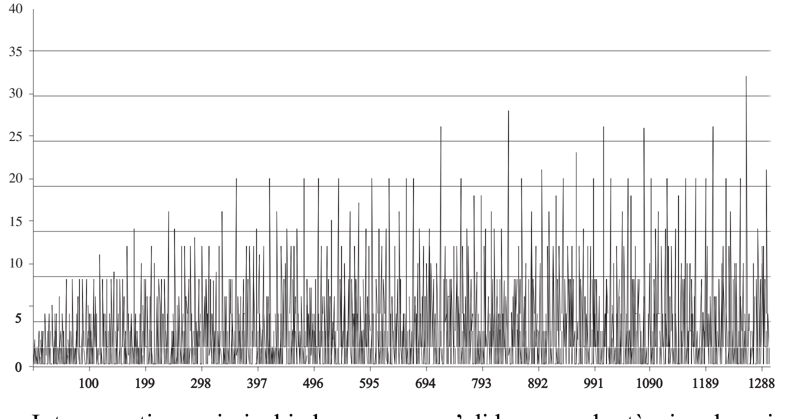
Si lascia al lettore la determinazione del numero di divisori di r.s, h(r.s) e di r^s, $h(r^s)$.

La formula trovata in Risposta 1.2.2. consente di calcolare h(n) senza troppe difficoltà, se n non è troppo grande.

Si può ottenere una tabella le cui prime colonne sono le seguenti.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
h(n)	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4

Il grafico di h è estremamente irregolare: quello che segue rappresenta h(n) con $2 \le n \le 1300$.



Interessanti sono i picchi che, con un po' di buona volontà, si vedono in corrispondenza di

$n \in \{2, 4, 6, 12, 24, 36, 48, 60, 120, 180, 240, 360, 720, 840, 1260\}$

Che cosa hanno di speciale?

Hanno di speciale che sono più alti di tutti i picchi che li precedono.

I numeri 2, 4, 6, 12, 24, 36, 48, 60, 120, 180, 240, 360,720, 840, 1260, … sono detti, in inglese, «highly composite numbers»: traduco con «numeri supercomposti».

Cioè: un numero è supercomposto se la sua altezza è maggiore di quella di tutti i numeri minori di lui.

Ri-cioè: n è supercomposto se h(n) > h(k) per ogni k<n.

Le tabelle che seguono mostrano i primi numeri supercomposti (sc) e le rispettive altezze:

sc	2	4	6	12	24	36	48	60	120	180	240	360	720	840	1260	1680	2520	5040	7560
h(sc)	2	3	4	6	8	9	10	12	16	18	20	24	30	32	36	40	48	60	64

sc	10080	15120	20160	25200	27720	45360	50400	55440	83160
h(sc)	72	80	84	90	96	100	108	120	128

sc	110880	166320	221760	277200	332640	498960	554400	665280
h(sc)	144	160	168	180	192	200	216	224

sc	720720	1081080	1441440
h(sc)	240	256	288

E allora?

Sia SC l'insieme dei numeri supercomposti e HSC quello delle loro altezze.

Bene: come per i numeri primi, non sono note formule che generano (tutti e solo) gli elementi di SC e (tutti e solo) quelli di HSC.

Qualcuno vuol provare a trovarle?

Nella bibliografia sono riportati alcuni riferimenti utili.

(Attiro l'attenzione su due nomi: Paul Erdös[1] e Srinivasa Ramanujan[2], personaggi, per un verso o per l'altro, di cui si dovrebbero leggere le biografie[3]).

Per provare il gusto, si dimostrino i seguenti teoremi:

Teorema 1

Se q è un numero supercomposto, allora almeno uno dei numeri $q', q' \in [q+1, 2q]$ è supercomposto.

1. Paul Erdös, 26 marzo 1913 (Budapest) - 20 settembre 1996 (Varsavia).
2. Srinivasa Ramanujan, 22 dicembre 1887 (Erode, Stato Tamil Nadu, India) - 26 Aprile 1920 (Kumbakonam, Stato Tamil Nadu, India).
3. Brevi biografie si trovano, ad esempio, nel sito www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/ poi Biographies Index (attenzione: dopo www c'è un trattino, non un punto).

Teorema 2
Se il massimo numero primo che compare nella scomposizione di un sc è $p > 2$, allora vi compaiono anche tutti i numeri primi minori di p.
Teorema 3
Se gli esponenti dei fattori primi in ordine crescente di un sc sono e_1, e_2, e_3, …, e_n, allora si ha
$e_1 \geq e_2 \geq e_3 \geq \ldots \geq e_n$

2. Variante 1

Chiamo *altezza canonica* di un numero (naturale, diverso da 0) il numero dei suoi fattori primi.
Indicherò l'altezza canonica di un numero n con il simbolo c(n).
c è dunque una funzione da N* a N

Esempi

c(1) = 0	perché 1 non ha fattori primi
c(2) = 1	perché 2 ha 1 fattore primo
c(12) = 2	perché 12 ha 2 fattori primi
c(300) = 3	perché 300 ha 3 fattori primi

Attenzione!
Non è vero che c(n) = 1 se e solo se n è primo.
Difatti
$c(5) = c(25) = c(125) = c(5^k) = 1, \forall k, k \neq 0$

Domanda 2.1
Evidentemente, ogni numero ha la sua altezza canonica: ma, data una certa altezza canonica k, esiste almeno un numero n tale per cui c(n) = k?

Risposta 2.1
Certo che sì: se si vuole un numero di altezza canonica k, basta moltiplicare fra loro k numeri primi diversi, non importa elevati a quale esponente.

Domanda 2.2
Se c(n) = x e c(m) = y
quanto fa c(nm)?

Esempi

c(30) = 3	c(77) = 2	e	c(30 . 77) = c(2310)	= 5 = 3 + 2	ma
c(30) = 3	c(22) = 2	e	c(30 . 22) = c(660)	= 4 ≠ 3 + 2	e, addirittura
c(30) = 3	c(36) = 2	e	c(30 . 36) = c(1080)	= 3 ≠ 3 + 2	!

Difatti

$30 = 2 . 3 . 5$ e $77 = 7 . 11$ segue $2310 = 2 . 3 . 5 . 7 . 11$ ma
$30 = 2 . 3 . 5$ e $22 = 2 . 11$ segue $660 = 2^2 . 3 . 5 . 11$ e, addirittura
$30 = 2 . 3 . 5$ e $36 = 2^2 . 3^2$ segue $1080 = 2^3 . 3^3 . 5$!

Chiamerò appoggio di un numero (naturale diverso da 0) l'insieme dei suoi fattori primi.
L'altezza canonica di un numero (naturale diverso da 0) può essere ridefinita come la cardinalità dell'appoggio.
Se si indica con a(n) l'appoggio del numero n, si ha
$a(30) = \{2, 3, 5\}$, $a(77) = \{7, 11\}$, $a(22) = \{2, 11\}$, $a(36) = \{2, 3\}$
$a(2310) = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ e $c(2310) = \#(\{2, 3, 5\} \cup \{7, 11\})$
$a(660) = \{2,3,5,11\}$ e $c(660) = \#((\{2, 3, 5\} \cup \{2, 11\}) \setminus (\{2, 3, 5\} \cap \{2, 11\}))$
$a(1080) = \{2,3,5\}$ e $c(1080) = \#((\{2, 3, 5\} \cup \{2, 3\}) \setminus (\{2, 3, 5\} \cap \{2, 3\}))$
e allora anche
$a(2310) = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ e $c(2310) = \#(\{2, 3, 5\} \cup \{7, 11\}) \setminus (\{2, 3, 5\} \cap \{7, 11\})$
dove #(A) significa "cardinalità di A".

Risposta 2.2
Se $c(n) = x = \#(A)$ e $c(m) = y = \#(B)$
cioè
$a(n) = A$ e $a(m) = B$
Allora
$c(nm) = \#((A \cup B) \setminus (A \cap B))$

Ma guarda un po' dove saltano fuori le unioni e le intersezioni! Non sono (erano) roba da anni '60?

3. Variante 2

La differenza fra un'unione e un'intersezione non è il massimo della simpatia!
Si consideri allora la seguente variante:
si dice *altezza canonica completa* di un numero (naturale, diverso da 0) il numero dei suoi fattori primi contati con la loro molteplicità, cioè tenendo conto dei loro esponenti.
Indicherò l'altezza canonica completa di un numero n con il simbolo k(n).
k è dunque una funzione da N* a N.

Esempi
$k(1) = 0$ perché 1 non ha fattori primi
$k(2) = 1$ perché $2 = 2^1$
$k(12) = 3$ perché $12 = 2^2 . 3^1$ e $2 + 1 = 3$
$k(300) = 5$ perché $300 = 2^2 . 3^1 . 5^2$ e $2 + 1 + 2 = 5$

Osservazione 3.1
$k(n) = 1$ se e solo se $n = 1$
$k(n) = 2$ se e solo se n è primo

Domanda 3.1
Evidentemente, ogni numero ha la sua altezza canonica completa: ma, data una certa altezza canonica completa m, esiste almeno un numero n tale per cui $k(n) = t$?

Risposta 3.1
Almeno tutti i p^t, per ogni p primo, hanno altezza canonica completa t. In alternativa, visto che l'altezza canonica completa non è altro che una somma, basta trovare un qualunque insieme di numeri aventi somma t, attribuire ogni numero ad altrettanti numeri primi diversi come esponente e moltiplicare il tutto.

Domanda 3.2
Se $k(n) = x$ e $k(m) = y$
quanto fa $k(nm)$?

Risposta 3.2
Si lascia al lettore interessato la facile dimostrazione che $k(nm) = x + y$

Domanda 3.3
Se $k(n) = x$
quanto fa $k(n^a)$?

Risposta 3.3
Si lascia al lettore interessato la altrettanto facile dimostrazione che $k(n^a) = ax$

Osservazione 3.4
Riassumendo, si hanno le tre proprietà
$k(1) = 0$
$k(nm) = k(n) + k(m)$
$k(n^a) = a\,k(n)$

La funzione k non assomiglia, da questo punto di vista, ad un'altra, ben nota quella, funzione?

È interessante il grafico di k: in esso si nota che, in corrispondenza delle potenze di 2, si hanno picchi più alti di tutti i picchi precedenti. Più precisamente, in corrispondenza di 2^k il picco è alto k, e $k = \log_2(2^k)$. Ciò equivale a dire che la funzione k è maggiorata da $\log_2$.

In parole povere:

la somma degli esponenti dei fattori primi di n è minore o uguale a $\log_2(n)$.

Come mai?

Chiamando S(n) la somma degli esponenti dei fattori primi di n, le “parole povere” diventano

$$S(n) \leq \log_2(n)$$

quindi, successivamente

$$2^{S(n)} \leq 2^{\log_2(n)}$$

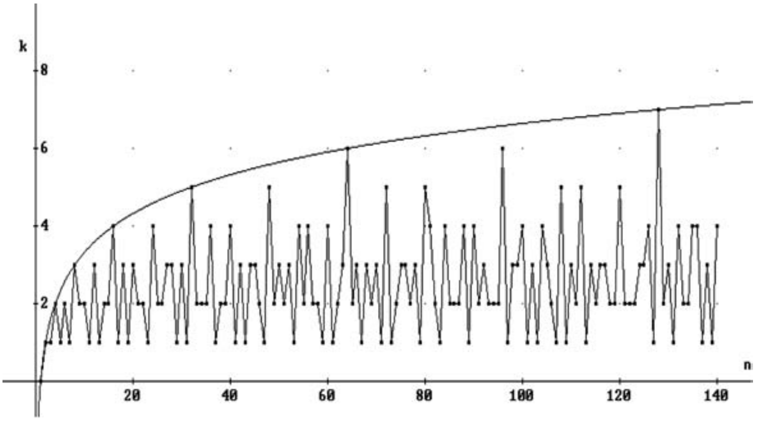
$$2^{S(n)} \leq n$$

Ora,

- se n è una potenza di 2, il suo unico fattore primo è 2, e dunque vale il segno di uguaglianza;
- se invece ci sono altri fattori, questi sono tutti, ovviamente, maggiori di 2: eliminarli tutti e attribuire i loro esponenti al fattore due darà per forza un risultato minore di n.

E ciò spiega l’arcano…

Il grafico che segue mostra visivamente la situazione:



Bibliografia

L. Alaoglu and P. Erdös

On highly composite and similar numbers, Trans. Amer. Math. Soc., 56 (1944), 448-469.

L. E. Dickson

History of Theory of Numbers, I, p. 323.

P. Erdös

Journal of London Math. Soc. 19, 130-133 (1944).

R. Honsberger

An introduction to Ramanujan's Highly Composite Numbers, Chap. 14 pp. 193-200 Mathematical Gems III, DME no. 9 MAA 1985

J. L. Nicolas

On highly composite numbers, pp. 215-244 in Ramanujan Revisited, Editors G. E. Andrews et al, Academic Press 1988

S. Ramanujan

Collected Papers, Ed. G. H. Hardy et al., Cambridge 1927; Chelsea, NY, 1962, p. 87.

D. Wells

The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers. Penguin Books, NY, 1986, 128.

2. Play off

Gianfranco Arrigo

La situazione

I campionati di basket (di hockey o di altri sport di squadra) terminano con i cosiddetti play off, un torneo fra le migliori squadre per l'assegnazione del titolo di campione.

La caratteristica di queste gare finali è che due squadre s'incontrano fra di loro più volte. Ci si può chiedere: perché partite ripetute? Supponiamo che due squadre siano giunte all'atto finale: solo una di loro può vincere il campionato. Supponiamo anche che nessuna partita può terminare con un pareggio (si possono giocare tempi supplementari, tirare calci di rigore o… si può lanciare una monetina).

Che differenza c'è fra giocare una sola partita, giocare 3 partite, giocare 5 partite, ecc.?

Un problema

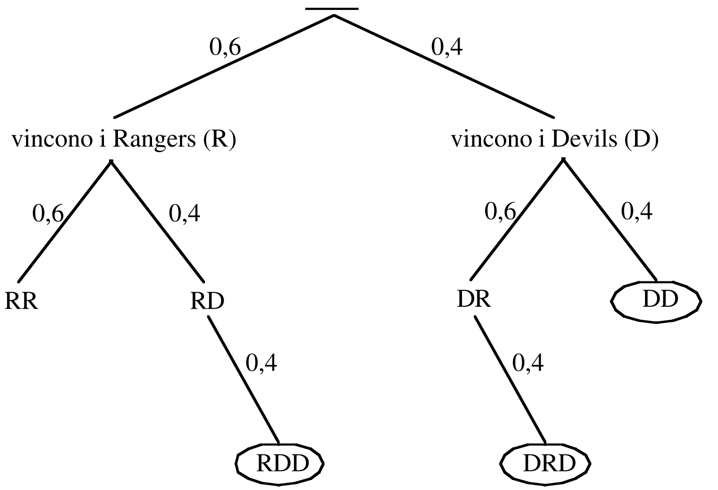
I Rangers e i Devils sono giunti all'ultimo atto dei play off. Le statistiche indicano che la probabilità di vittoria dei Rangers è 0,6.

Qual è la probabilità che la squadra ritenuta più debole (i Devils) vinca la sfida contro i Rangers se si giocassero 1, 3, 5, 7 partite?

Un iter risolutivo

Sia D_k l'evento «vincono i Devils in k partite».

Ecco la situazione se si giocassero 3 partite:



$$Pr(D_3) = 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,4 = 0,352$$

La probabilità che i Devils (la squadra più debole) vinca in 3 partite è 0,352: un po' meno che con una sola partita (0,4). Per contro, aumenta la probabilità che vinca la squadra più forte.

Azzardiamo la congettura che, aumentando il numero di partite, diminuisca la probabilità di un risultato abnorme (vittoria della squadra più debole).

Affrontiamo ora il caso di 5 partite (cioè la sfida al meglio delle 5 partite).

$$\begin{aligned} Pr(D_5) &= Pr(\mathbf{DDD}) + \\ &+ Pr(R\mathbf{DDD}) + Pr(\mathbf{D}R\mathbf{DD}) + Pr(\mathbf{DD}R\mathbf{D}) + \\ &+ Pr(RR\mathbf{DDD}) + Pr(R\mathbf{D}R\mathbf{DD}) + Pr(R\mathbf{DD}R\mathbf{D}) + Pr(\mathbf{D}RR\mathbf{DD}) + \\ &+ Pr(\mathbf{D}R\mathbf{D}R\mathbf{D}) + Pr(\mathbf{DD}RR\mathbf{D}) \\ &= 0,4^3 + \binom{3}{1} \cdot 0,6 \cdot 0,4^3 + \binom{4}{2} \cdot 0,6^2 \cdot 0,4^3 = 0,4^3 + 3 \cdot 0,6 \cdot 0,4^3 + 6 \cdot 0,6^2 \cdot 0,4^3 = 0,31744 \end{aligned}$$

Il simbolo combinatorio $\binom{3}{1}$

indica il numero di casi di vittoria (dei Devils) in 4 partite:

siccome l'ultima partita, in senso cronologico, dev'essere per forza una vittoria dei Devils (D), i casi sono tanti quanti gli anagrammi della parola RDD, che precedono la D fissa.

Il simbolo combinatorio $\binom{4}{2}$

indica il numero di casi di vittoria (deiDevils) in 5 partite:

siccome l'ultima partita, in senso cronologico, dev'essere per forza una vittoria dei Devils (D), i casi sono tanti quanti gli anagrammi della parola RRDD che precede la D fissa.

Osserviamo che la probabilità di un risultato abnorme diminuisce ancora.

Affrontiamo ora il caso di 7 partite (cioè la sfida al meglio delle 7 partite).

Senza sconfitta: no. casi

DDDD 1

Con una sconfitta (in una delle prime 4 gare):
RDDD**D**, … (tutti gli anagrammi di RDDD) $\binom{4}{1} = 4$

Con due sconfitte (nelle prime 5 gare):
RRDDD**D**, … (tutti gli anagrammi di RRDDD) $\binom{5}{2} = 10$

Con tre sconfitte (nelle prime 6 gare):
RRRDDD**D**, … (tutti gli anagrammi di RRRDDD) $\binom{6}{3} = 20$

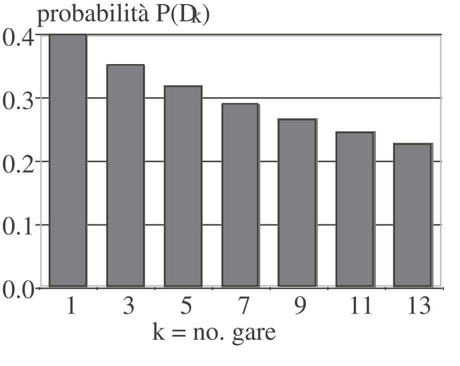
Ora possiamo calcolare:

$$P(D_7) = 0{,}4^4 + \binom{4}{1} \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^4 + \binom{5}{2} \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^4 + \binom{6}{3} \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^4 = 0{,}289792$$

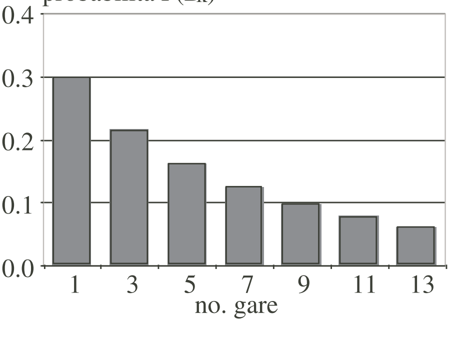
La probabilità di un risultato abnorme diminuisce ancora: la congettura iniziale sembra tenere.

A questo punto è utile affidarsi alla velocità di calcolo di un computer. Ecco qualche risultato… ragionevole.

P(D) = **0.4** No. partite (k)	$P(D_k)$
1	0.400000000
3	0.352000000
5	0.317440000
7	0.289792000
9	0.266567680
11	0.246501868
13	0.228843953



P(D) = **0.3** No. partite (k)	$P(D_k)$
1	0.300000000
3	0.216000000
5	0.163080000
7	0.126036000
9	0.098808660
11	0.078224791
13	0.062222122



Conclusione

Anche i risultati del computer confermano la congettura iniziale: il caso abnorme, con l'aumento del numero di partite, diventa sempre meno probabile.

Possiamo inoltre aggiungere che la diminuzione della probabilità $P(D_k)$ si fa più marcata al diminuire della probabilità di partenza P(D). Cioè: più forte è il divario di forza tra le due squadre, meno probabile diventa la vittoria della squadra più debole. Forse, agli occhi dello sportivo competente, stiamo dicendo banalità, ma ciò che importa è che abbiamo costruito un modello matematico, di tipo stocastico, che dà senso all'effettuazione delle partite ripetute.

1. II. Convegno ticinese di didattica della matematica

24-25 settembre 2004
Locarno, Alta Scuola Pedagogica[1]

Il convegno del 2004 continuerà il discorso sulla teoria didattica iniziato con Matematica 2000, manifestazione svoltasi a Bellinzona in occasione dell'anno dedicato alla matematica. La profondità delle riflessioni innescate da quell'evento non potevano rimanere senza una nuova ventata di ossigeno: giunge quindi propizio questo secondo convegno di Didattica della Matematica, organizzato dall'Alta Scuola Pedagogica, nel magnifico chiostro dell'antico convento annesso alla chiesa di San Francesco. Come già avvenne nel 2000, gli oratori sono stati scelti accuratamente, grazie anche alla preziosa collaborazione del prof. Bruno D'Amore.

Il Ticino è un piccolo mondo, ma anche una realtà essenziale nel panorama culturale svizzero. La scuola ticinese vi appartiene di diritto ed è sempre stata consapevole del fatto che, in quanto scuola di una minoranza, non può essere inferiore né a quella di cultura tedesca né a quella romanda. Questa nostra peculiarità è sempre stata un forte stimolo per la promozione di una scuola di qualità: il passato ce lo insegna. In tempi difficili, come sembrano essere quelli che stiamo vivendo, è necessario trovare la forza di continuare e il coraggio di operare senza lasciarsi troppo condizionare dalle difficoltà quotidiane. Forza, coraggio, determinazione, caparbietà sono abiti mentali che l'insegnante sa vestire soprattutto se la sua prassi didattica è ben fondata teoricamente. Il convegno di didattica ha lo scopo di mantenere alto l'interesse nei confronti dei principali problemi teorici che attualmente si pongono nel delicato e meraviglioso processo di insegnamento-apprendimento. Raggiungerà lo scopo se riuscirà a stabilire un collegamento diretto tra la ricerca didattica e la pratica in classe. Ecco perché il Canton Ticino è orgoglioso di accogliere in questi due giorni, a Locarno, sede dell'Alta Scuola Pedagogica, alcuni fra i più autorevoli didatti della matematica del mondo intero.

1. Piazza S. Francesco 19
Tel. 091 816 02 11
Fax 091 816 02 19
e-mail:
http://asp.ti-edu.ch

Programma

Venerdì 24 settembre 2004

8.30-8.45	Saluto delle Autorità
8.45-9.45	**Luis Radford** (Canada): «La generalizzazione matematica come processo semiotico»
10.15-11.15	**Ubiratan D'Ambrosio** (Brasile): «Una riflessione dell'Etnomatematica: perché insegnare matematica?»
11.15-11.55	Comunicazioni: **Martha Isabel Fandiño Pinilla** (Colombia-Italia): «Competenze matematiche e competenze in Matematica» **Giovanna Albano** (Italia): «Didattica assistita»
14.00-15.00	**Salvador Llinares** (Spagna): «La costruzione della conoscenza come aiuto per insegnare» [in spagnolo]
15.30-16.30	**Gianfranco Arrigo** (Svizzera): «Ostacoli epistemologici e didattici nell'apprendimento dell'infinito»
16.30-16.50	Comunicazione: **Silvia Sbaragli** (Italia): «La concezione dell'infinito negli insegnanti delle scuole elementari»
16.50-18.00	Visita guidata alla mostra didattica – Rinfresco

Sabato 25 settembre 2004

8.30-9.30	Comunicazioni: **Aldo Frapolli** (Svizzera): «Il piano formativo di matematica della scuola media ticinese» **Alberto Piatti** (Svizzera): «I miei primi contatti con la ricerca in didattica della matematica» **Giorgio Mainini** (Svizzera): «Gli atolli matematici: una nuova avventura per gli allievi della scuola media ticinese»
9.30-10.30	**Guy Brousseau** (Francia): «I doppi giochi dell'insegnamento della matematica» [in francese]
11.00-12.00	**André Delessert** (Svizzera): «Che cosa significa "eccetera"?» [in francese]
14.00-14.20	Comunicazione: **Claudio Beretta** (Svizzera): «Il ruolo della SSIMF nello Stato federale»
14.20-15.20	**Bruno D'Amore** (Italia): «La noetica e la semiotica nell'apprendimento della matematica»
15.20	Chiusura del convegno

Conferenzieri

Luis Radford (Università Laurentienne, Ontario, Canada)

Ha ottenuto un dottorato in didattica della matematica presso l'Università Louis Pasteur, Strasburgo, Francia. È stato attivo nella formazione degli insegnanti di matematica nel suo paese d'origine, il Guatemala, presso l'Università del Quebec a Montréal e attualmente a Ontario. Noto per gli studi sulle generalizzazioni simboliche complesse.

Ubiratan D'Ambrosio (Università Campinas, São Paulo, Brasile)

È presidente della Società Brasiliana di Storia della Matematica e presidente onorario della Società Brasiliana di Educazione Matematica. Noto soprattutto per le pubblicazioni relative all'etnomatematica, termine da lui introdotto per indicare gli studi sulla conoscenza matematica nelle varie culture, comprese quelle minoritarie.

Salvador Llinares (Università di Alicante, Spagna)

Laurea in matematica nel 1981 all'Università di Valencia e dottorato in Scienze dell'Educazione all'Università di Siviglia nel 1987. Dal 1987 al 2001 è professore a Siviglia e dal 2001 opera all'Università di Alicante. Le sue ricerche sono legate ai problemi relativi alla formazione degli insegnanti di matematica, in particolare all'impiego didattico delle nuove tecnologie della comunicazione.

Gianfranco Arrigo (ASP Locarno, Svizzera)

Diploma in matematica al Politecnico di Zurigo nel 1965. Animatore di una importante rivista, attento interprete delle esigenze culturali e di ricerca in didattica della matematica, disciplina che attualmente insegna all'ASP di Locarno. I suoi studi sull'infinito matematico gli hanno dato spazio in importanti riviste e convegni internazionali.

Guy Brousseau (Università di Bordeaux, Francia)

Professore emerito all'Università di Bordeaux. È certo lo studioso che più di ogni altro ha contribuito alla nascita della moderna ricerca in Didattica della Matematica. È l'artefice degli studi sul contratto didattico, sulla teoria degli ostacoli, sulla teoria delle situazioni e sul milieu.

André Delessert (Università di Losanna, Svizzera)

Dottorato in matematica a Losanna nel 1962, rettore di quell'università dal 1983 al 1987. Dal 1964 al 1972 è stato Segretario della CIEM e ha occupato importanti cariche in Svizzera. Il Canton Ticino è riconoscente a Delessert per l'aiuto che ha dato per tanti anni alla riflessione didattica.

Bruno D'Amore (Università di Bologna e Bolzano, Italia)

Come didatta della matematica può vantare tre lauree: in Matematica (1969), in Pedagogia (1992) e in Filosofia (1994), tutte conseguite a Bologna, centro delle sue innumerevoli attività. Logico di formazione, ma i suoi interessi lo hanno spinto verso la Didattica, diventando ben presto una figura di spicco. Di lui, si può dire, si sono intrecciate al meglio una solida cultura umanistica, la formazione matematica e la sensibilità pedagogica.

Anteprima conferenze

La generalizzazione matematica come processo semiotico
(Luis Radford)

Siccome, per poter compiere una generalizzazione, un fatto non può rinviare a se stesso, ogni atto di generalizzazione presuppone il ricorso a qualcosa d'altro. Questa «altra cosa» è attinente al campo della rappresentazione. Il passaggio a generalizzazioni simboliche complesse pone difficoltà precise agli allievi che iniziano l'apprendimento dell'algebra. Queste difficoltà possono essere meglio comprese se si paragonano le generalizzazioni simboliche a quelle pre-simboliche che gli stessi allievi effettuano.

Una riflessione dell'Etnomatematica:
perché insegnare matematica?
(Ubiratan D'Ambrosio)

In questo lavoro si trattano le dimensioni cognitiva, epistemologica, storica e politica dell'insegnamento della Matematica nell'ambiente multiculturale presente nelle scuole. È la proposta del Programma Etnomatematica. Presenta molte difficoltà, soprattuto riguardanti la formazione di insegnanti. Le visioni tradizionali della matematica, sia in quanto riflessione intellettuale, sia come pratica utilitaristica, devono essere aggiornate, soprattutto tenendo conto della presenza dominante della tecnologia nella società moderna.

La costruzione della conoscenza come aiuto per insegnare:
pratiche sociali e tecnologia
(Salvador Llinares)

Apprendere da un punto di vista socio-culturale ha a che fare con l'appropriazione e la padronanza di strumenti per pensare e agire in una «comunità di pratica». In ciò sono importanti due idee. Una è che la conoscenza sia vista come l'uso di strumenti fisici e concettuali. L'altra è che l'apprendimento sia considerato come la trasformazione dell'individuo attraverso la partecipazione crescente a pratiche sociali a seconda della natura dei compiti che affronta. Una implicazione di questo modo di concepire l'apprendimento è il ruolo del sociale nella costruzione della conoscenza.

Ostacoli epistemologici e didattici nell'apprendimento dell'infinito
(Gianfranco Arrigo)

La relazione vuol fare il punto sulle ricerche effettuate in seno al NRD di Bologna aventi come tema centrale l'esame degli ostacoli epistemologici e didattici che si frappongono all'apprendimento dell'infinito in atto. Tali ostacoli sono ben evidenti nella storia della matematica e si ripropongono ad ogni individuo che si accosta per la prima volta alle tematiche concernenti l'infinito matematico.

I doppi giochi dell'insegnamento della matematica.
(Guy Brousseau)

La matematica, come le altre attività umane, può essere modellizzata mediante situazioni, cioè «giochi» matematici, diversi a seconda delle conoscenze considerate. A che cosa bisogna giocare per avere bisogno della proporzionalità? Anche gli apprendimenti spontanei o indotti si modellizzano attraverso tipi di «giochi» diversi dai precedenti. Ma le attività di insegnamento della matematica presentano caratteri paradossali che rivelano «doppi giochi» ben più complessi. La Teoria delle situazioni didattiche in matematica tende a spiegare e a giustificare la retorica didattica. Dalle istituzionalizzazioni alle devoluzioni, gli insegnanti devono trasformare false cause di apprendimento in vere ragioni di sapere.

Che cosa significa «eccetera»?

(André Delessert)

Tutti gli allievi di questo mondo seguono lezioni di matematica. Il programma è molto carico e si appesantisce anno dopo anno. Solitamente si giustificano questi grossi sforzi affermando che conferiscono rigore allo spirito e che permettono poi di usare la matematica nella professione. In classe non c'è il tempo per approfondire la natura degli oggetti matematici. Questo genere di riflessioni ci giunge dalla filosofia della matematica e di questo si sono occupati gli spiriti più illustri. La filosofia della matematica ci insegna che la matematica non è semplicemente uno strumento al servizio dei fisici e dei tecnici. La matematica è una scienza autonoma, con materia e finalità proprie. Essa apre prospettive sulle potenzialità del pensiero. La relazione ha lo scopo di far sentire che tutto ciò concerne sia l'apprendista sia il matematico affermato. Filo conduttore del discorso sarà il concetto di infinito.

La noetica e la semiotica nell'apprendimento della matematica

(Bruno D'Amore)

L'apprendimento concettuale (noetica), in matematica, ha necessità di essere «filtrato» dalla rappresentazione dei concetti per mezzo di vari registri semiotici, a causa della speciale natura degli oggetti matematici. Quali sono i legami tra semiotica e noetica? Che cosa significa «costruire» un concetto? Quali elementi della cosiddetta «scuola francese» di Didattica della Matematica sono rilevanti da questo punto di vista?

2. Nuove offerte SMASI per la scuola media

Con l'inizio di quest'anno scolastico la SMASI (Società Matematica della Svizzera Italiana) si è rivolta in particolare ai docenti di scuola media offrendo loro due pomeriggi di studio interessanti e ben frequentati.

Il primo incontro si è tenuto alla Scuola media 1 di Bellinzona. Si è trattato di una riflessione sul perché insegnare ancora la matematica nella scuola dell'obbligo e sul ruolo che la nostra disciplina dovrebbe giocare nell'educazione del giovane di oggi. Nella prima parte Gianfranco Arrigo ha illustrato alcuni aspetti problematici riguardanti lo statuto della disciplina matematica in un contesto scolastico mettendo in luce i rischi che la nostra disciplina corre per via di alcune visioni eccessivamente semplicistiche che albergano non solo nel cittadino comune ma anche in funzionari e uomini politici. Tant'è che, anche alle nostre latitudini, si stanno delineando scenari poco tranquillizzanti che vedrebbero penalizzato l'insegnamento della matematica nel prossimo futuro. Questo è stato lo stimolo principale della lunga e animata discussione che si è tenuta nella seconda parte del pomeriggio. La SMASI si impegna a organizzare altri momenti di incontro per permettere ai docenti interessati di poter discutere assieme ai colleghi in maniera informale e costruttiva di tutti i problemi che riguardano la scuola e la matematica in particolare.

Il secondo pomeriggio si è svolto presso la scuola media di Massagno su richiesta di alcuni docenti di questa sede e l'attenzione è stata fissata sull'insegnamento del calcolo delle probabilità. Anche in questo caso si è iniziato con una stimolazione didattica di Arrigo seguita da un lavoro comune, condotto dal presidente Alberto Piatti: una riflessione su materiali preparati e relativi interrogativi. I docenti presenti hanno apprezzato le attività e hanno deciso, insieme alla SMASI, di ritrovarsi ancora in febbraio per continuare le discussioni ed esaminare i risultati delle attività didattiche svolte nelle classi.

La SMASI ha l'intenzione di rivolgersi anche agli allievi delle nostre scuole, offrendo loro alcuni «Pomeriggi matematici» nei quali in tutta serenità possono dedicarsi a una libera (e ci auguriamo divertente) attività matematica. Con questa iniziativa di carattere squisitamente volontario, la SMASI accoglierà con grande piacere gli allievi che sentono il bisogno di affinare le loro attitudini matematiche.

La SMASI resta sempre volentieri a disposizione di tutti i docenti per raccogliere ed elaborare le loro ideee e per conoscere i loro bisogni, le loro aspettative, tutto ciò che l'apparato statale non riesce a fornire con generale soddisfazione. Ai docenti di matematica giunga da queste righe l'appello di rivolgersi alla società, per qualsiasi necessità o progetto o anche solo idea abbozzata relativa all'insegnamento della matematica.

Per un contatto ci si può rivolgere al presidente Alberto Piatti al seguente indirizzo:
Alberto Piatti
6817 Maroggia
alberto.piatti@lu.unisi.ch

3. Recensioni

Giorgio Bagni - Giorgio Mainini

B. D'Amore, J.D. Godino, G. Arrigo, M.I. Fandiño Pinilla – Competenze in matematica – Pitagora, Bologna, 2003, pag. 120, 10 €

«Una sfida per il processo di insegnamento-apprendimento»: proprio in questa «sfida», esplicitamente indicata nel sottotitolo del volume Competenze in matematica, troviamo la chiave di lettura dell'opera, firmata da quattro studiosi di didattica della matematica tra i più noti ed impegnati nella ricerca in campo internazionale.

Davvero il conseguimento di «competenze» rappresenta una sfida, impegnativa e stimolante, per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica: che significa, infatti, «comprendere la matematica»? E quando i nostri allievi possono essere detti «competenti» in matematica? Come si esprimono queste competenze? Quali sono le implicazioni antropologiche? A queste e ad altre domande rispondono, coniugando profondità e chiarezza, Bruno D'Amore, docente di Didattica della Matematica presso le Università di Bologna e Bolzano e presso l'Alta Scuola Pedagogica di Locarno, Juan D. Godino, docente di Didattica della Matematica presso l'Università di Granada, Gianfranco Arrigo, docente di Didattica della Matematica presso l'Alta Scuola Pedagogica di Locarno e Martha Isabel Fandiño Pinilla, incaricata di Didattica della Matematica presso l'Università di Urbino e l'Alta Scuola Pedagogica di Locarno.

La riflessione che sta alla base dell'opera è espressa nell'incisiva Prefazione, curata da B. D'Amore e da J. Godino. Molti termini vengono usati, oggi, sia nella ricerca in didattica della matematica che all'interno della stessa pratica scolastica: spesso si parla di «conoscere la matematica», di «comprendere la matematica», infine di «conseguire delle competenze in matematica». Ma siamo sempre certi di mettere a fuoco completamente i significati di queste espressioni? Siamo, ad esempio, sempre certi di individuare correttamente le caratteristiche essenziali dell'«insegnamento per competenze»? Quanto mai, a giudizio degli Autori, appare oggi opportuna ed urgente una rigorosa «chiarificazione concettuale»: infatti «un modo di avvicinare tra loro il mondo della ricerca e quello dell'azione pratica» è proprio «quello di chiarire preliminarmente ed efficacemente l'uso che facciamo dei termini cognitivi, anche cercando di trovare complementarità e divergenze» (pp. 2-3).

Il volume raccoglie sei saggi di estremo interesse: «Competenze: obiettivo per chi costruisce il proprio sapere», di B. D'Amore e M.I. Fandiño Pinilla; «Contenuti, conoscenze, competenze, capacità, nuclei fondanti: la complessità dell'educazione e della costruzione del sapere», di B. D'Amore; «Competenza e comprensione matematica: che cosa sono e come si ottengono?», di J. Godino; «Prospettiva semiotica della competenza e della comprensione matematica», di J. Godino; «Diventare competente, una sfida con radici antropologiche», di M.I. Fandiño Pinilla; infine: «Definire competenze in matematica», di G. Arrigo. (G.T.B.)

Bruno D'Amore – Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica – prefazione di Guy Brousseau, Pitagora Editrice, Bologna, 2003, ISBN 88-371-1400-1, pag. 124, 15 €

«La Didattica della Matematica ha superato il quarto di secolo di età», osserva Bruno D'Amore nella Premessa (p. 7) al proprio ultimo libro, Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica: una disciplina, dunque, particolarmente giovane, che soltanto negli ultimi decenni ha messo a punto «paradigmi scientifici ampiamente condivisi fino a costituirsi come scienza autonoma» (p. 7). Eppure una specifica sensibilità alle problematiche didattiche e la consapevole riflessione razionale su di esse risale addirittura a diversi secoli fa: nell'incisiva, dottissima Prefazione di Guy Brousseau al volume di D'Amore, il «fondatore della Didattica della Matematica in senso moderno» (p. 10) cita un'affermazione del pastore boemo Jan Amos Komensky (1592-1670, lat. Comenius): «Non esiste che un solo metodo per insegnare tutte le scienze: è il metodo naturale, valido tanto nelle arti che nelle lingue» (da Didaktika, lat. Didactica Magna, 1647, Capitolo IX, Problema IV).

La ricerca delle leggi dell'educazione che Komensky persegue nella sua Didaktika è basata sull'osservazione dei processi della Natura; e usi non del tutto dissimili dell'analogia sono ripresi anche ai giorni nostri da alcune moderne teorie didattiche (suggestivo potrebbe essere, ad esempio, un raffronto critico dell'analogia intesa nel senso di Komensky con il ragionamento metaforico che sta alla base del pensiero embodied di G. Lakoff e R. Nuñez, la cui applicazione alla Didattica della Matematica risale a pochissimi anni fa). Ma non è l'impiego dell'analogia che viene ad essere al centro della vivace e puntuale dissertazione di Bruno D'Amore, quanto la supposta generalità della Didattica, dunque la questione cruciale della stessa esistenza di un'impostazione generalista da affiancare, ovvero da contrapporre, agli approcci propriamente disciplinari.

Nella propria Prefazione (pp. 1-6), Guy Brousseau osserva che la riflessione di Bruno D'Amore «potrebbe indicare una strada verso (...) nuove basi della didattica, che d'altro canto egli presenta, ma nell'ordine e nella problematica classici» (p. 5); infatti, per quanto riguarda le diverse impostazioni teoriche della Didattica della Matematica, molti ricercatori e moltissimi insegnanti «auspicherebbero di vedere i diversi approcci (...) in un'armoniosa organizzazione schematica nella quale tali approcci si possano ordinare fianco a fianco senza sovrapporsi, per abbracciare la totalità del campo» (p. 1). Dunque D'Amore esamina con chiarezza ed efficacia alcune concezioni filosofiche che stanno alla base della stessa conoscenza e, di conseguenza, della Didattica; quindi, all'interno di tale pluralità, egli individua come proprio il punto di vista «antropologico» (Capitolo 1, Le basi filosofiche. La svolta «antropologica», pp. 13-22).

Se poi Komensky, sulla base del proprio naturalismo scientifico, indicava come fondamentale il metodo naturale, D'Amore riprende alcuni aspetti della concezione del pensatore boemo per indicarne da un lato una qualche sostanziale, seppure aggiornata, validità (Capitolo 2, L'accezione paradigmatica, condivisibile con le diverse didattiche disciplinari, pp. 23-34) e, d'altro canto, i limiti precisi, collegati alla inalienabile specificità della Didattica disciplinare nel più vasto àmbito della Didattica generale (Capitolo 3, La specificità della Matematica e della Didattica della Matematica, pp. 35-62). Nel Capitolo 4, Le basi oggi condivise della ricerca in Didattica della Matematica e della prassi che ne usa i risultati (pp. 63-112), viene infine proposta un'incisiva panoramica delle principali tendenze della ricerca. Una ricca Bibliografia (pp. 113-124) elenca ben 133 titoli e costituisce essa stessa un preziosissimo strumento di lavoro per tutti gli studiosi di Didattica della Matematica.

L'opera di Bruno D'Amore, pur proponendo una riflessione teorica assai profonda, organica e completa, non corre il rischio di restare confinata nella mera speculazione dottrinaria: essa nasce infatti da considerazioni vive e reali, da valutazioni condotte «sul campo», dalle esperienze dei corsi di Didattica della Matematica tenuti dall'Autore.

Un libro, dunque, la cui impostazione può far pensare ad una summa, ad una sintesi ordinata e profonda di teorie (e di meta-teorie), che potrebbe essere dunque interpretato come un punto di arrivo, ma che si rivela molto di più: un punto di partenza, una preziosa occasione «su cui riflettere, il che costituisce la miglior forma di insegnare» (dalla Prefazione di Guy Brousseau, p. 6). Dunque un avvenimento importante per la comunità scientifica, certamente non solo italiana, di Didattica della Matematica. (G.T.B.)

Mario Livio – La sezione aurea (Storia di un numero e di un mistero che dura da tremila anni) – Rizzoli, Milano, 2003, pag. 415, 19 €

La storia del rapporto aureo (o sezione aurea) indicato classicamente con t, ora con f, comincia qualche millennio fa. Euclide ne parla come di «proporzione estrema e media»; Ippaso da Metaponto, un pitagorico cui si fa risalire la scoperta dell'irrazionalità di f, fu da Pitagora considerato tanto empio da meritarsi una lapide, come se fosse morto; d'altra parte, si narra che i pitagorici furono a tal punto sconvolti dalla scoperta di Ippaso da sacrificare agli dei cento buoi: un'ecatombe, nel senso letterale del termine. Il libro di Livio ci porta a trovare f dove già sappiamo che c'è e dove, invece, no. Tra i «luoghi» dove f regna, troviamo il pentagramma (la stella a cinque punte iscritta nel pentagono regolare), la fillotassi, la forma di alcune conchiglie, l'architettura (si pensi al Museo Guggenheim di Nuova York, opera di Frank Lloyd Wright), l'arte («Il Sacramento dell'Ultima Cena» di Salvador Dalì), la disposizione degli ammassi di galassie, e, evidentemente, la matematica. L'analisi degli esempi portati sopra evidenzia, secondo l'autore, questioni a tre livelli di profondità. Primo livello: le apparizioni di f nella natura e nell'arte sono reali o sono frutto di abbagli? Secondo livello: la matematica ha una dimensione estetica? Terzo livello: che cosa rende la matematica così potente e universale? Nel libro, Livio «tenta» (parola sua) di dare risposte argomentate alle domande: accettati o no dal lettore, i «tentativi» inducono a riflettere profondamente. Anche per l'attività scolastica di matematica si trovano stimoli: frazioni continue, radici «inscatolate» all'infinito, poliedri platonici, rettangoli aurei, successione di

Fibonacci (che non la smette di creare sorprese: si veda alle pagine 147 e seguenti e alla 334 e seguenti). Per l'attività scolastica in generale si raccomanda la lettura del capitolo «Sotto una piramide orientata alle stelle?». Con cortesia, ma con fermezza, si smontano le tesi parascientifiche sulla presenza di determinati rapporti in monumenti antichi e in opere d'arte. Altrettanta fermezza, ma forse minore cortesia, dovremmo usare nei confronti di altre «certezze» che ci vengono quotidianamente ammannite, ammantate di una patina «scientifica»… (G.M.)

Arturo Sangalli – L'importanza di essere fuzzy (Matematica e computer) – Bollati Boringhieri – Saggi, Torino, 2000, pag. 196, 20,66 €

Fosse solo per il primo capitolo (Classi dai contorni incerti), il libro meriterebbe di essere letto da tutti gli insegnanti di matematica. I meno giovani ricorderanno quella che fu chiamata «la sbornia insiemistica». Ecco, qui si può prendere un Alca Selzer. Classicamente, un dato oggetto x può essere, o no, elemento di un dato insieme E. Se lo è, diciamo che x ha grado di appartenenza 1, se non lo è, diciamo che ha grado di appartenenza 0. Tutti i docenti, di conseguenza, hanno sempre scartato dai loro esempi l'insieme dei bei quadri, quello delle auto costose, eccetera. Se si ammette, invece, che il grado di appartenenza di un elemento sia compreso nell'intervallo [0,1] allora le cose cambiano. Una Panda potrà essere considerata elemento dell'insieme delle auto costose con grado di appartenenza gP=0,1 e una Rolls lo sarà con grado di appartenenza gR=0,9. L'unione, l'intersezione e le altre operazioni sugli insiemi saranno definite in modo congruo. Insiemi come quelli citati sopra sono chiamati insiemi fuzzy (rivolgersi al collega di Inglese per informarsi sulla corretta pronuncia…). In italiano potremmo tradurre con sfocato, confuso, indistinto, ma anche con sfrangiato o coperto di peluria. L'idea di insieme fuzzy ha trovato, forse inaspettatamente anche per il suo inventore, Lotfi A. Zadeh [Fuzzy Sets, in «Information and control», VIII (1965), pp. 338-56], applicazioni nella pratica quotidiana. Come programmare una lavatrice che scelga da sé il tipo di lavaggio? Si tenga presente che la biancheria è più o meno sporca. Come programmare una macchina fotografica che metta a fuoco da sola un'immagine un po' sfocata? E altro ancora: gli aggeggi fuzzy hanno invaso il mercato. Ma l'interesse del libro va ben oltre il capitolo citato. Vi si scrive, in modo piano, di limiti del calcolo classico (con trattazione dei famosi teoremi di Gödel e di Turing), di reti neurali, di algoritmi generativi: il tutto condito di esempi parecchio stimolanti. Qual è il percorso più corto che un commesso viaggiatore deve seguire se vuole visitare 100 città? Si può scrivere, almeno in teoria, una lista di tutte le funzioni da N a N? Considerato il successo che stanno avendo visioni del mondo in cui la sopravvivenza del più forte (qualunque cosa ciò significhi) è ciò che realmente conta, l'osservazione a pagina 175 dovrebbe indurre a più miti consigli: «La lezione da imparare qui è che un piano evolutivo che aiuta individui deboli a sopravvivere potrebbe avere vantaggi a lungo termine». Meditate, gente, meditate! (G.M.)

Progetto grafico
Bruno Monguzzi
Fotocomposizione
Taiana
Stampa
Veladini

Redazione
Laboratorio di didattica della matematica
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera

Telefono
091 814 34 28/57/58
Fax
091 814 44 92

Amministrazione
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera
Fax
091 814 44 92

Esce due volte all'anno
a maggio e a dicembre

Abbonamento annuo
Sfr. 30.–
€ 16