A cura
del Laboratorio di didattica della matematica

Bollettino dei docenti di matematica

49

Dicembre
2004

Ufficio
dell'insegnamento medio
Centro
didattico cantonale

Bollettino
dei docenti di matematica
49

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport

ISBN 88-86486-68-5

Bollettino dei docenti di matematica 49

Dicembre
2004

Ufficio dell'insegnamento medio
Centro didattico cantonale

Indice

Prefazione

La prima parte di questo numero è dedicata al Convegno di Didattica della Matematica svoltosi a Locarno, all'Alta Scuola Pedagogica, nei giorni 24 e 25 settembre 2004. Su richiesta di alcuni partecipanti, abbiamo tradotto le tre conferenze che sugli Atti figurano in francese: quelle di Brousseau, di Delessert e di Radford. Con questo gesto di buona volontà (non è semplice tradurre testi così complessi e specialistici!) speriamo di fare cosa gradita anche ai nostri lettori che non hanno potuto partecipare al Convegno. Le traduzioni sono state curate da Gianfranco Arrigo e da Giorgio Mainini. Gli Atti sono comunque ancora disponibili presso il Centro Didattico Cantonale di Bellinzona. Chiude questa parte una descrizione delle Mostre Didattiche con il contributo di Silvia Sbaragli.

La parte riservata alla Didattica ospita dapprima due articoli, dedicati agli insegnanti di matematica e fisica dei licei, concernenti l'insegnamento dell'opzione caratterizzante «Fisica e applicazioni della Matematica (FAM)», con il contributo di Michele D'Anna. Completa questa sezione un nuovo articolo di Alberto Piatti sulle diverse interpretazioni del concetto di probabilità e sulle interessanti implicazioni di carattere didattico che ne possono conseguire. A tale proposito, rinnoviamo l'invito a partecipare alla ricerca che si vorrebbe intraprendere sulle concezioni del concetto di probabilità che hanno gli allievi, in particolare nella fascia di età corrispondente alla scuola media.

L'intermezzo è sempre curato da Aldo Frapolli, che propone un nuovo intrigante quiz.

Un nuovo intervento di Gianfranco Arrigo sugli 'Atolli matematici'.

Le segnalazioni si riducono al secondo annuncio del Simposio di Chivilcoy (Buenos Aires), al quale partecipa come invitato principale Gianfranco Arrigo.

Interessanti, come sempre, le recensioni curate, oltre che dal solito Giorgio Mainini, da Bruno D'Amore e Martha I. Fandiño Pinilla.

Arrivederci tutti al numero 50, che sarà speciale e festeggerà degnamente il traguardo raggiunto in 25 anni di continua riflessione sulla Matematica e sulla sua Didattica.

I relatori del Convegno di didattica della matematica 2004, da sinistra: Giorgio Mainini, Giovannina Albano, Aldo Frapolli, Silvia Sbaragli, Gianfranco Arrigo, Guy Brousseau, Claudio Beretta, Ubiratan D'Ambrosio, Martha I. Fandiño Pinilla, Bruno D'Amore, Luis Radford, Salvador Llinares.

1. Appendice al Convegno di Didattica della Matematica ASP, Locarno, 24-25 settembre

Gianfranco Arrigo

La bella avvetura è finita: se l'è portata via l'estate e le pioggie ottobrine hanno fatto di tutto per cancellarne il ricordo. Senza riuscirvi. Gli incontri con tante persone interessanti, le relazioni, le comunicazioni, le mostre ci hanno procurato grandi emozioni e fornito parecchi stimoli per continuare nelle nostre riflessioni didattiche. Una boccata d'ossigeno, questo convegno, che ci auguriamo possa continuare con scadenza quadriennale. Un punto di riferimento per tutti, questo incontro, che ha portato conoscenza distribuita in un ampio ventaglio: per i didatti, per gli insegnanti di matematica di ogni ordine di scuola (dalla scuola dell'infanzia alle superiori), per i docenti e i didatti di altre discipline (innumerevoli gli spunti interdisciplinari offerti in modo particolare dalle mostre didattiche), per gli studenti dell'ASP (che hanno potuto effettuare – molto opportunamente – visite integrate nelle ore di didattica della matematica), per chi ama i numeri, per chi si lascia affascinare dalla geometria, per chi cerca la matematica del caso, per chi cerca elementi di storia della matematica, per chi preferisce l'interdisciplinarità (in particolare con la lingua madre, con la musica, con l'arte figurativa, con il *design*), persino per gli amanti degli scacchi che hanno potuto stupirsi di fronte alla presentazione di un'esperienza scacchistica nella scuola dell'infanzia. Su questo numero si trova una sintesi delle varie mostre didattiche.

Di seguito riporto l'elenco delle relazioni e delle comunicazioni che hanno costituito l'ossatura principale del convegno. Penso che possa tornare utile a coloro che, pur essendo interessati alla didattica della matematica, non hanno potuto partecipare al convegno e siano intenzionati ad acquistare gli Atti, che sono ancora ottenibili, al prezzo di 30 franchi, presso il Centro Didattico Cantonale di Bellinzona.

Relazioni

Luis Radford (Canada) *La generalizzazione matematica come processo semiotico.* [in francese, versione italiana su questo numero]

Ubiratan D'Ambrosio (Brasile) *Una riflessione dell'Etnomatematica: perché insegnare matematica?*

Salvador Llinares (Spagna) *La costruzione della conoscenza come aiuto per insegnare.*

Gianfranco Arrigo (Svizzera) *Ostacoli epistemologici e didattici nell'apprendimento dell'infinito.*

Guy Brousseau (Francia) *I doppi giochi dell'insegnamento della matematica.* [in francese, versione italiana su questo numero]

André Delessert (Svizzera) *Che cosa significa «eccetera»?* [in francese, versione italiana su questo numero]

Bruno D'Amore (Italia) *La noetica e la semiotica nell'apprendimento della matematica.*

Comunicazioni

Silvia Sbaragli (Italia) *Le convinzioni degli insegnanti sull'infinito matematico.*

Martha Isabel Fandiño Pinilla (Colombia-Italia) *Competenze matematiche e competenze in Matematica.*

Giovanna Albano (Italia) *Didattica assistita.*

Aldo Frapolli (Svizzera) *Il piano formativo di matematica della scuola media ticinese.*

Alberto Piatti (Svizzera) *I miei primi contatti con la ricerca in didattica della matematica.*

Giorgio Mainini (Svizzera) *Gli atolli matematici: una nuova avventura per gli allievi della scuola media ticinese.*

Claudio Beretta (Svizzera) *Il ruolo della SSIMF*[1] *nello Stato federale.*

Chiudo con i ringraziamenti di rito e con uno speranzoso… arrivederci.

Grazie all'Alta Scuola Pedagogica, nella persona del direttore Boris Janner, che ha messo a disposizione le nuovissime infrastrutture e ha sopportato buona parte dell'onere finanziario; grazie agli sponsor.

Grazie ai colleghi che hanno reso possibile l'apertura delle mostre nei fine settimana e agli studenti che hanno prestato servizio volontario presso la segreteria del convegno.

Grazie a tutti coloro che ci hanno onorato con la loro presenza.

Grazie a Bruno D'Amore per il prezioso aiuto nel non facile compito di ingaggio dei conferenzieri e a Silvia Sbaragli che ci ha procurato alcune preziose mostre didattiche.

Grazie a Aldo Frapolli – come sempre generoso operatore – a Stelio Righenzi e Dario Lilla del Centro Didattico per la preziosa collaborazione nella stampa degli Atti e nell'allestimento, smontaggio e trasporto delle mostre, a Giorgio Häusermann che ha giocato egregiamente il ruolo di tecnico audio-video nei due giorni del convegno.

Infine un grazie particolare a Donatella Bonetti, segretaria perfetta, gentile, paziente, precisa.

Un arrivederci, lo spero proprio, fra quattro anni.

1. Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica.

2. Una modellizzazione dell'insegnamento della matematica[1]

Guy Brousseau[2]

The theory of situations is not a pedagogic ideology, but an instrument that allows us to analyse the complex relations taking place at school. As such, it lends itself to the examination of any teaching situation, either real or simulated, and it gives the possibility to highlight the choices made by the teachers and to class them according to their consequences.

1. Introduzione

La teoria delle situazioni non è un'ideologia pedagogica: è soltanto uno strumento per analizzare rapporti complessi e per stanare le inconsistenze degli approcci meno approfonditi. Essa mira essenzialmente all'analisi di *qualunque* situazione d'insegnamento effettiva o immaginata, cioè a mettere in evidenza le scelte del docente e di gerarchizzarle in funzione delle loro conseguenze. Le domande che permette di porre possono provocare l'emergere di situazioni didattiche «nuove», in particolare sotto forma di giochi, ma senza attribuire loro alcuna virtù speciale. Come tutti gli oggetti tecnici, le situazioni hanno alcune proprietà, buone o cattive, e sono più o meno adatte nelle reali circostanze di utilizzazione.

La teoria delle situazioni è certamente insufficiente sotto tutti i punti di vista. È molto pesante e molto complessa. È difficile da capire e da maneggiare perché ha dovuto volgarizzare le sue modellizzazioni in forma di metafore. Essa non coincide spesso con le opinioni degli insegnanti. Essa non fornisce loro una bacchetta magica che risolva la maggior parte dei loro problemi difficili. Se pure non è contraddetta da nessuna disciplina ad essa connessa (matematica, psicologia, sociologia, linguistica, ecc.) non va d'accordo con le estrapolazioni azzardate che taluni ne traggono abusivamente per assoggettare l'insegnamento alla loro disciplina. Infine non vedo nessuna

1. L'introduzione a questo scritto è tratta dalla mia conferenza all'ICME 10 (luglio 2004) tenuta in occasione del conferimento del Premio Felix Klein dell'ICMI. Il resto è un testo nuovo che riassume e completa qualche testo precedente, salvo la parte sui doppi giochi, che è tratta dall'articolo Brousseau Guy «Les doubles jeux de l'enseignement des mathématiques», (2002), p 83-155, *Questions éducatives, l'école et ses marges: Didactique des mathématiques*, n. 22-23 dicembre 2002 Centre de recherches de l'Université Jean Monnet Saint Etienne. Questo contributo comprende in annesso altri esempi di situazioni. Inoltre, nel medesimo numero della rivista citata, parecchi articoli – in particolare quelli di Alain Denis e di Marc Derycke – danno chiarimenti interessanti sui problemi trattati qui.
2. Università di Bordeaux, Francia.

possibilità di forzare le congetture sull'insegnamento a incarnarsi in elementi contemporaneamente osservabili e maneggiabili.

Un argomento del genere non può stare nei limiti di un articolo di conferenza, ma mi auguro di darvi un'idea della coerenza, della potenza e del valore di questo approccio. È per questo motivo che vorrete perdonarmi di trattare, nei due primi punti, soltanto l'indispensabile per trattare il terzo e, parallelamente, di lasciar traccia del trattamento di alcune questioni sotto forma di piani. Tali questioni sono sviscerate in altri testi, ma in modo diverso e ho voluto spostarle per meglio poter raggiungere i miei obiettivi.

Nella prima parte visiteremo la modellizzazione matematica attraverso due giochi formali, appoggiandoci ad un esempio. Nella seconda parte riprenderemo rapidamente i principali metodi classici. Nella terza sottometteremo questi metodi all'analisi di situazioni. Metteremo in evidenza i necessari doppi giochi degli allievi e la struttura dell'ambiente di insegnamento; infine analizzeremo i doppi giochi dell'insegnante e mostreremo che il costruttivismo radicale e i modelli classici sono contraddittori.

2. Il Gioco della matematica. La Teoria delle Situazioni matematiche

2.1. L'ingrandimento di un puzzle

Prendiamo un esempio ben noto del genere di situazioni che costruiamo. Si tratta di modellizzare le situazioni matematiche nelle quali interviene la proporzionalità.

Quasi tutte le funzioni trattate nelle scuole elementari sono delle proporzionalità e questa proprietà è accettata come evidente o è insegnata senza giustificazione. Come fare perché gli allievi scelgano la proporzionalità fra molte altre possibilità, e che lo facciano per ragioni matematiche e non soltanto empiriche? L'insegnante mostra agli allievi un puzzle quadrato di 11 cm di lato (fig. 1) utilizzabile (fig. 2),

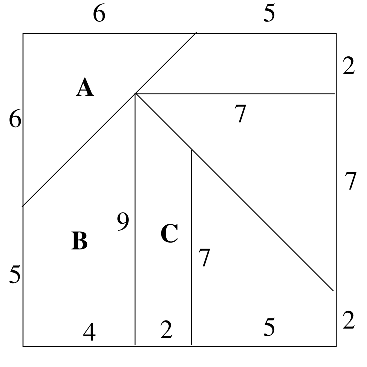


Figura 1

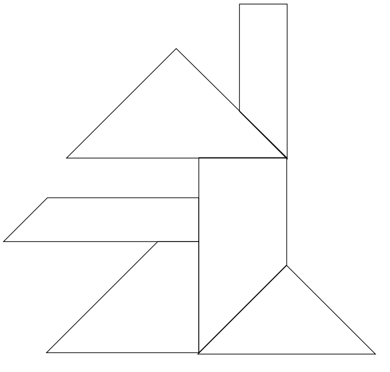


Figura 2

e dice loro:

«Dovete ritagliare da un cartone un puzzle simile a questo (il modello). Ma, per i bambini della scuola materna, dovrete farlo più grande. Questo lato, che misura 4 cm nel modello, dovrà misurare 7 cm nell'immagine (o riproduzione). Ma bisogna poter fare le stesse figure sia con il puzzle grande sia con il modello».

«Per realizzare il puzzle grande lavorerete in gruppi. Ogni gruppo farà un solo pezzo e poi metterete insieme i pezzi in un secondo tempo».

Quasi tutti i gruppi cominciano con il pensare che si devono «aggiungere 3 cm» ad ogni misura.

Disastro! I pezzi non possono essere raccordati!

La prima ipotesi è che non si sono ritagliati bene i pezzi…

Dopo aver scartato diverse ipotesi, gli allievi arrivano alla conclusione che bisogna tirare in ballo la proporzionalità.

«Occorre che il lato 2 sia la metà del lato 4». Ma, se pure questa osservazione è accettata dagli allievi, non è giustificata e non fornisce mezzi di calcolo (di funzione) che permettano di ottenere 7 a partire da 4.

Allora qualcuno propone di raddoppiare la lunghezza del modello e di togliere 1. Il metodo è «quasi accettabile».

$4 \rightarrow (2 \times 4) - 1 = 7$
$6 \rightarrow (2 \times 6) - 1 = 11$
$2 \rightarrow (2 \times 2) - 1 = 3$

Altri hanno ottenuto per tentativi soluzioni «accettabili», visto che possono giocare con un buon puzzle.

Alla fine gli allievi devono notare che è necessario che **l'immagine della somma di due segmenti sia la somma delle immagini di quei segmenti** (fig. 4).

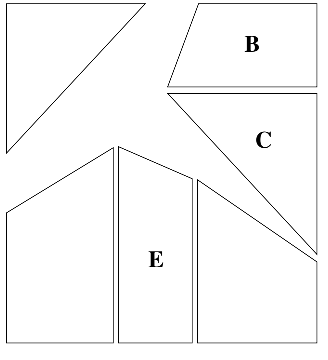
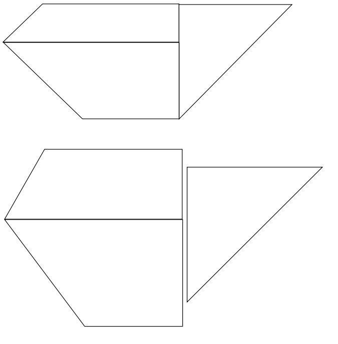


Figura 3



$2 \rightarrow 2 + 3 = 5$
$4 \rightarrow 4 + 3 = 7$
$6 \rightarrow 6 + 3 = 9$

Allora
$2 + 4 = 6$
Ma
$5 + 7 > 9$

Figura 4

Allora verificheranno che i rapporti sono proprio conservati, e di conseguenza utilizzeranno la definizione delle frazioni-misure, sia direttamente (7 è i 7 quarti di 4), sia calcolando l'immagine di 1.

Ho scelto questo esempio perché permette di capire il nostro metodo di lavoro. Le relazioni dell'allievo con il suo ambiente rispondono ad un elenco di condizioni suscettibili di assicurargli la massima autonomia senza cadere sulla determinazione delle conoscenze matematiche da utilizzare. Queste condizioni sono parecchio differenti da quelle di molti problemi ed esercizi proposti di solito in classe.

a. Soltanto la conoscenza matematica mirata deve essere il mezzo adatto a risolvere correttamente il problema.

b. La consegna non deve richiamare nessuna delle conoscenze che si vuole far apparire. Essa determina le decisioni permesse e le situazioni iniziali e finali che stabiliranno il guadagno o la perdita.
c. Gli allievi possono cominciare ad agire con «competenze di base» inadatte.
d. Possono costatare da soli la riuscita o il fallimento del proprio tentativo.
e. Senza prefigurare la soluzione, queste considerazioni sono suggestive (favorendo certe ipotesi, fornendo informazioni appropriate, né troppo chiuse né troppo aperte).
f. Gli allievi possono eseguire rapidamente parecchi tentativi, ma l'anticipazione deve essere favorita.
g. Fra tutte le soluzioni empiricamente accettabili una sola può risponedere a tutte le obiezioni.
h. La soluzione può essere trovata e provata da qualche allievo in tempi ragionevoli in una classe normale e può essere velocemente messa in comune e verificata dai compagni.
i. Essa si presta a tentativi di riutilizzazione e sollecita domande che rilanciano il processo (per esempio: tutti gli ingrandimenti si fanno in questo modo?)
j. eccetera.

2.2. Le situazioni definite come giochi

Queste condizioni fanno pensare immediatamente a quelle che definiscono un gioco formale. All'inizio il giocatore si trova davanti un sistema che gli si presenta in uno stato determinato: nel caso dato un pezzo di cartone da ritagliare. Gli viene proposto di raggiungere uno stato finale ben determinato: nell'esempio, presentare un pezzo di cartone adatto a prendere un posto determinato in qualche figura pure ben determinata. Notiamo che le forme e le grandezze che deve ottenere non sono esplicitate, ma le condizioni date determinano un risultato unico, verificabile dall'allievo. Il giocatore può modificare lo stato iniziale e gli stati successivi del sistema seguendo regole pure determinate: può tracciare e ritagliare il cartone come gli pare. Le regole non determinano una procedura unica: al contrario, si può adottare un'infinità di strategie e di tattiche. D'altra parte, il giocatore può, a sua volta, fare tutti i tentativi che vuole e valutarli lui stesso, uno dopo l'altro. La funzione lineare non è la sola soluzione pratica soddisfacente: è però la sola intellettualmente e razionalmente soddisfacente. Tale soluzione non è fornita direttamente dalla cultura naturale o didattica dell'allievo: per lui ci sono incertezze sul metodo di soluzione e indeterminazione sulla soluzione teorica.

Questa situazione non si riduce tuttavia a un «gioco contro natura» perché il controllo delle decisioni passa attraverso la cooperazione con i compagni. In tal modo le eventuali soluzioni empiriche saranno sottoposte a un altro tipo di gioco: il gioco della validazione sociale di una soluzione.

Ecco che vediamo apparire il processo fondamentale della teoria delle situazioni. Si tratta di modellizzare le *azioni* di un soggetto in un certo *ambiente*, facendole apparire come le risposte appropriate, da un lato a certe condizioni imposte, appunto, dall'ambiente, dall'altro alle risorse materiali o cognitive note.

L'oggetto è un insieme complesso di relazioni di un soggetto con un ambiente. *Il modello è una situazione*, cioè un gioco – nel senso matematico del termine – tra un attante e un ambiente. Alcuni di questi modelli sono strettamente matematici, altri no.

La modellizzazione può intervenire in due tipi di ricerca:

— la descrizione delle attività osservate: si tratta di scegliere condizioni minime che permettano di spiegare e di prevedere i comportamenti;
— la determinazione di condizioni minime che rendano necessario l'uso ed eventualmente l'apprendimento di una conoscenza data.

Abbiamo coniugato questi due tipi di ricerca nello studio dell'attività matematica.

La situazione del puzzle illustra bene il secondo tipo[3].

D'altronde è necessario insistere sul fatto che le situazioni matematiche, delle quali parliamo qui, sono quelle la cui soluzione può essere trovata o imparata autonomamente dagli allievi. Tutte le attività matematiche che si svolgono in classe e la cui soluzione, in un momento o nell'altro, richiede un intervento formativo da parte del docente costituiscono una classe a parte: le «situazioni didattiche in matematica».

La nostra osservazione solleva almeno tre domande:

a. Tutte le conoscenze matematiche possono essere modellizzate con le situazioni? Sì, perché gli esercizi e i problemi sono teoremi e situazioni semplificate. Queste situazioni classiche presentano caratteristiche «impoverite» se paragonate con le situazioni matematiche reali. Si riferiscono infatti a una epistemologia adattata alla didattica classica ma molto lontana dalle situazioni matematiche effettive. Ma esiste un metodo generale per le situazioni matematiche? Esiste almeno un modello per ogni ramo o per ogni settore delle conoscenze matematiche?
b. L'ingegneria didattica cerca dunque di creare situazioni che integrino al meglio le condizioni più favorevoli e più «essenziali». Ogni circostanza necessaria a far apparire una conoscenza matematica deve e può rientrare in questo modello? Esistono a priori diversi tipi di conoscenza a seconda delle diverse funzioni cui si riferiscono. Le «conoscenze in atto» e i repertori di schemi hanno lo scopo di produrre decisioni ed azioni. Come i messaggi e i linguaggi e come i «teoremi» e le dimostrazioni. Esse richiamano tipi di situazioni distinti: situazioni d'azione, di formulazione, di dimostrazione. Abbiamo notato che a loro corrispondono anche modalità di apprendimento distinte (per esempio quelle di Bateson). Ritroviamo questi tipi di situazioni come fasi successive nello svolgersi della lezione sul puzzle.
c. I tipi di situazioni che permettono di far giocare al meglio certe circostanze utili all'apprendimento. Queste circostanze non sono indipendenti dalle conoscenze in gioco. Qual è l'importanza delle condizioni specifi-

3. In matematica un oggetto O può essere determinato da un predicato R tale che R(O) è una proposizione vera. Allo stesso modo un oggetto matematico può essere determinato da una situazione S tale che S(O) è risolto. Bisogna distinguere nettamente il modello matematico di gioco (nel caso del puzzle non è formalizzato) dalle conoscenze matematiche soluzioni del gioco (nell'esempio la linearità).

che ad ogni conoscenza? Questa domanda è importante per l'organizzazione dell'insegnamento: esiste un modello di situazione utilizzabile in tutte le circostanze? Per esempio, quale rapporto ha l'ingrandimento del puzzle con l'apprendimento della similitudine in geometria?

2.3. L'attività matematica

Ritorniamo alla situazione del puzzle. C'è un'infinità di soluzioni «pratiche», approssimative e persino «matematicamente corrette» che non richiedono la comprensione effettiva e la spiegazione della linearità della funzione. Per esempio ritagliare «a occhio» o usare un abaco (figure 5 e 6) per determinare automaticamente la grandezza dei lati.

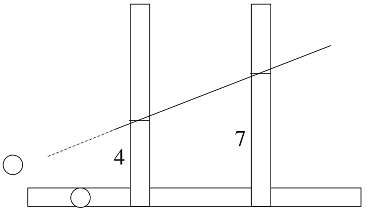


Figura 5

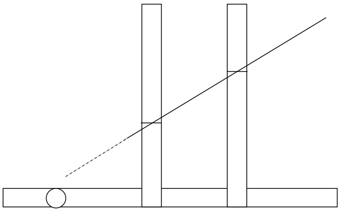


Figura 6

Ma la matematica non consiste soltanto nel «risolvere il problema» adeguatamente: essa consiste essenzialmente nello studio della consistenza (cioè la coerenza, la non contraddizione) della soluzione. L'invenzione dell'abaco presuppone una riflessione e una cultura molto più complessa e sofisticata della condizione di linearità. Non si può aspettarsi di vederla sorgere dalla situazione del puzzle.

Lo sdoppiamento fra la situazione d'azione e quella della dimostrazione è essenziale, consustanziale alla matematica. In questo senso la situazione del puzzle, che presenta i due aspetti – la necessità di efficacia spaziale e la dimostrazione della validità razionale delle soluzioni – prefigura in modo conveniente le situazioni geometriche che gli allievi incontreranno più tardi.

La *geometria* non è una specie di riformulazione teorica delle conoscenze del carpentiere: è invece *lo studio della non contraddizione delle sue conoscenze dello spazio*. È un gioco del tutto diverso. Per mostrare bene questa differenza ai principianti ecco la situazione (didattica) «dei tre centri del cerchio circoscritto», cui si può far capo per spiegare loro la natura della geometria.

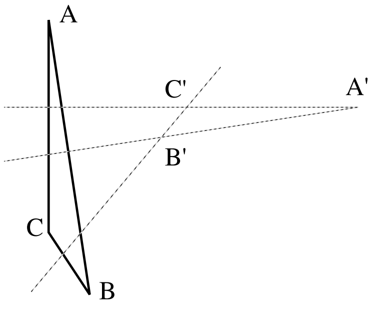


Figura 7

Il docente domanda «seriamente» agli allievi principianti di tracciare le tre mediane di un piccolo triangolo ABC molto appiattito, e sostiene di dare i nomi appropriati A' B' C' ai vertici del piccolo «co-triangolo» che «si deve» ottenere. Di fronte alla grandezza troppo piccola di questo triangolino il docente sostiene di aver scelto un triangolo ABC speciale e scomodo. Chiede allora agli allievi di trovare un triangolo il cui co-triangolo sia il più grande possibile. Gli allievi si affannano. Devono alla fine emettere la congettura che i tre punti potrebbero rappresentarne uno solo e dimostrarla contro «l'evidenza» della figura e non appoggiandovisi. Per questo bisogna mettersi d'accordo sulla definizione della mediana come luogo.

Il docente spiega allora la differenza fra «vedere» e «dimostrare». La geometria non consiste nel descrivere ciò che si vede ma nello stabilire ciò che «deve» essere visto.

Questa relazione tra una situazione d'azione, con le sue necessità pragmatiche ed economiche, e una situazione di dimostrazione, con le sue necessità puramente logiche, si ritrova in tutta la matematica. Gli esempi di coppie di questo tipo sono numerosi. Per esempio, la logica costruita (matematica o no) e la logica del costruttore; le probabilità sono essenzialmente un mezzo – matematico – di giustificare una certa pratica delle statistiche, con lo studio dei loro comportamenti limite: non sono una specie di fisica dell'aleatorio. La statistica stessa, in quanto parte della teoria della misura, fa parte a tutti gli effetti della matematica.

La teoria delle situazioni permette l'uso sistematico di questo sdoppiamento proprio alla matematica tanto nel campo dell'aritmetica quanto in quello dell'algebra.

2.4. La teoria delle situazioni matematiche

Le situazioni matematiche reali sono di solito complesse, ma composte di 4 tipi di situazioni «elementari»: le *situazioni di azione*, nelle quali l'attante deve affrontare un ambiente privo di intenzionalità, le *situazioni di formulazione*, nelle quali l'attante coopera (realmente o no) con un interlocutore per risolvere una situazione d'azione, le *situazioni di validazione*, nelle quali gli attanti si confrontano e cooperano per stabilire la verità di un'affermazione e infine le *situazioni di istituzionalizzazione*, nelle quali diversi attanti si accordano su un repertorio di riferimento.

Rifacendosi ad analisi più precise dell'ergonomia delle soluzioni classiche, queste modellizzazioni hanno fatto sì che ci si interrogasse sull'introduzione delle nozioni principali di matematica elementare e che si proponessero soluzioni spesso molto diverse e di una migliore efficacia.

La modellizzazione delle attività umane attraverso giochi, formali o no, non è nuova[4]. Sono stati soprattutto Morgenstern e Von Neumann che, studiando la modellizzazione dei comportamenti economici, hanno profondamente sviluppato questa idea. Johan Huizinga[5] ha sostenuto[6] che il gioco è un fattore fondamentale di tutto ciò che capita nel mondo, a tal punto che ha proposto di sostituire alle dizioni *homo sapiens* e *homo faber* quella di *homo ludens*.

È interessante mettere in parallelo gli approcci matematici dell'economia e della didattica che si richiamano alla stessa teoria. L'economia è definita da Malinvaud come la scienza che studia come le risorse rare sono impiegate per la soddisfazione dei bisogni degli uomini viventi in società. Io interpreto la didattica della matematica come la scienza delle condizioni di diffusione delle conoscenze matematiche utili agli interessi degli uomini e delle società.

La produzione e l'uso della matematica è abbastanza ben rappresentata dalla teoria delle situazioni matematiche. Dando per scontato senza troppe riflessioni l'idea che la conoscenza dei processi di apprendimento era lo strumento essenziale dell'organizzazione di un buon insegnamento, ho creduto per un certo tempo che questa teorizzazione fosse sufficiente per permettere di capire e di migliorare l'insegnamento della matematica. Basterebbe che il docente proponesse situazioni matematiche come quella che ho appena descritto. Si potrebbe chiamarle «situazioni di autoapprendimento». Gli allievi costruirebbero da soli la conoscenza. Questa ipotesi è stata sviluppata, sotto il nome di «costruttivismo radicale», specialmente da Von Glaserfeld. Ne è conseguita l'idea che l'insegnamento fosse una specie di applicazione delle conoscenze di psicologia.

Vedremo fra poco come la modellizzazione di questa attività umana in termini di gioco ci ha portato a sviluppare una *teoria delle situazioni didattiche in matematica* alla quale la *teoria delle situazioni matematiche* originale ha dovuto essere adattata.

3. Le concezioni didattiche

Qui faremo soltanto un rapido richiamo ad alcune concezioni didattiche, riorganizzandole per sostenere il nostro proposito.

3.1. Le concezioni classiche della didattica

Il *modello minimale* dell'insegnamento non considera che due sistemi in interazione: il docente e l'allievo. Il primo comunica al secondo il testo di un sapere stabilito e giustificato da qualcun altro. Alcuni immaginano un triangolo: «insegnante,

4. Bachelier, *Théorie de la spéculation 1900*, *Théorie mathématique des jeux 1901* poi Poincaré.
5. Grande storico olandese 1872-1945.
6. Johan Huizinga «homo ludens» essai sur la fonction sociale du jeu (1938) Tel Gallimard 1951.

allievo, sapere». ma il sapere non è un attante, è solo un repertorio, differente per ogni attante. Di conseguenza il docente, come, d’altra parte, il matematico, riorganizza il sapere in funzione di certe condizioni legate alla situazione di comunicazione didattica. Per esempio la preoccupazione di non chiamare in causa saperi non ancora insegnati lo induce a una riorganizzazione del discorso didattico di aspetto assiomatico. La preoccupazione di mantenere un livello di difficoltà e un flusso di informazioni accettabili lo induce a prevedere dei lemmi o a evitare le ripetizioni o a utilizzare delle ellissi. In questo modo, così come un repertorio, il sapere prende la forma di *ambiente* della relazione didattica, e non solamente come oggetto di comunicazione.

Questo modello è stato giustamente criticato e migliorato, in nome dell’attività propria ed effettiva del soggetto. La *maieutica socratica* riserva al docente il compito di porre le domande alle quali l’allievo deve rispondere. La scelta e l’organizzazione delle domande adatte a far produrre all’allievo risposte «originali», per lui, hanno portato allo sviluppo di ogni sorta di problemi specifici relativi ad ogni conoscenza matematica.

La modellizzazione dell’attività matematica attraverso problemi ed esercizi è molto antica e figura più o meno in tutte le concezioni didattiche classiche. Georges Glaeser insisteva sulle differenze di proprietà tra problemi ed esercizi e dava, come indice per distinguere le due forme di situazioni didattiche, la difficoltà della soluzione (l’esercizio è facile e riproduttivo, il problema è difficile e originale per l’allievo). Si possono distinguere le situazioni corrispondenti considerando la funzione che viene loro affidata. Il problema, facile o difficile, è una situazione d’azione, e lo scopo dell’allievo è trovarne la soluzione. Lo scopo principale dell’esercizio consiste nel cambiare lo statuto di certe conoscenze, raramente di mezzi opportuni, che devono diventare metodi famigliari. Lo studio dell’uso di problemi è stato oggetto di sviluppi recenti sotto l’impulso di Polya (problem solving methods).

L’introduzione dell’attività dell’allievo pone il problema della condivisione di responsabilità nello svolgimento e il risultato delle sequenze d’insegnamento. A seconda che il contratto didattico assegni la responsabilità dell’apprendimento totalmente all’allievo, visto come un libero recettore, o sul docente, visto invece come un professionista che deve produrre allievi educati con affidabilità industriale, a dipendenza del ruolo che si affida all’attività dell’allievo, ecc., si ottengono diversi «contratti didattici» e diversi metodi, che elencheremo nella seguente tabella.

I diversi tipi di «contratti didattici»[7].

Essi stabiliscono la natura e la ripartizione della posta in gioco tra l’emettore e il recettore delle conoscenze.

Contratti debolmente didattici (vedi in seguito).

Diffusione di conoscenze senza intenzione didattica

— Contratto d’emissione
— Contratto di comunicazione
— Contratto di perizia
— Contratto di produzione
— Contratto di informazione (dialettiche, dogmatiche, assiomatiche)

7. Rif. Corso nr. 2 Ecole d’été 1995 e «Théorie des situations didactques», in corso di stampa.

— Contratto di utilizzazione di conoscenze
— Contratto di iniziazione e di controllo
— Contratto di istruzione e di direzione dello studio

Contratti fortemente didattici (vedi in seguito)
— Contratto di famigliarizzazione
— Contratto di ostensione
— Contratto di condizionamento (behaviorismo)
— Maieutica socratica
— Contratto di apprendimento empirico
— Contratti costruttivisti
— Contratto di ripresa di saperi acquisiti

La prassi classica e reale di insegnamento, tenendo conto del più gran numero possibile di obiezioni, ha moltiplicato e coniugato all'infinito le forme didattiche: esposti, riproduzione di testi, domande di analisi e di sintesi, problemi, esercizi, ecc.

3.2. I modelli costruttivisti

Dato che la soluzione di problemi è stata spesso presentata come il miglior modello di attività matematica, e come prova dell'acquisizione di conoscenze, si è visto lo sviluppo di teorie dove essa può sostituire l'esposizione di conoscenze. Sono le *teorie costruttiviste*. L'allievo costruisce la propria conoscenza con la sua attività.

Il *costruttivismo radicale* postula in più che le conoscenze si possono acquisire solo per attività autonoma. Rifacendosi a questo principio il costruttivismo radicale ha bandito ogni tipo di pratiche didattiche come gli esposti, definiti «dogmatici» e perfino ogni tipo di intervento da parte del docente: i problemi devono essere «aperti» per il docente, e anche il porre domande è respinto. Questo costruttivismo radicale è a tutti gli effetti una ideologia didattica nichilista, della quale si devono mostrare le contraddizioni: mostrare i suoi fallimenti non basterebbe, perché, in tal caso, la responsabilità ricadrebbe sulle spalle del docente. L'analisi in termini di gioco permette questo studio attraverso due vie convergenti.

Da un lato, la modellizzazione dell'attività matematica degli allievi conduce a oggettivare l'ideale perseguito in via di principio dal costruttivismo. La teoria delle situazioni matematiche postula che in ogni conoscenza matematica siano insite situazioni e processi genetici fondamentali, e l'ingegneria ha abbondantemente illustrato questo postulato. Sembra agevole, in queste circostanze, immaginare l'insegnamento nella forma radicale seguente: il docente propone all'allievo situazioni che provocano e permettono l'autoapprendimento delle nozioni matematiche, la loro formulazione, la loro dimostrazione e la loro istituzionalizzazione e si accontenta di gestire gli aspetti periferici, materiali, psicoaffettivi, altro ancora, senza intervenire direttamente nella costruzione delle conoscenze dell'allievo. Il lettore curioso troverà[8] una descrizione dettagliata dell'organizzazione didattica nel contesto descritto. Il movimento costruttivista si è nutrito di questo punto di vista.

8. Principalmente nell'articolo citato nella nota 1, pag. 110-112.

Ma gli stessi metodi hanno condotto a prolungare questa prima modellizzazione con la teoria delle situazioni didattiche in matematica, che permette di considerare oggettivamente i rapporti del docente con il sistema composto dall'allievo e dall'ambiente (problema classico o no).

4. I doppi giochi dell'allievo

Per prima cosa bisogna approfondire l'analisi della situazione dell'allievo.

a) Attante e Giocatore

L'attante accetta la regola del gioco e cerca di vincere applicandola, il giocatore, invece, nel gioco ricerca un piacere non necessariamente definito dalle regole del gioco. Per esempio, nella fase iniziale della «corsa a 20» si vedono allievi, che hanno la possibilità di vincere per la quarta volta consecutiva, perdere apposta per evitare che l'avversario si scoraggi e si rifiuti di continuare a giocare. Così facendo l'attante cede il passo al giocatore… che, evidentemente, è la stessa persona. Altro esempio: molti giocatori sono interessati più all'incertezza che alla vincita. Se scoprono una martingala o una strategia decisiva sono soddisfatti ma anche delusi, e smettono di giocare: anche se trovano una spiegazione, questa gli rovina il piacere «uccidendo il gioco». Certi ragazzi fingono l'ignoranza per continuare a vivere in una incertezza confortevole, ecc.

Nella stessa situazione il giocatore e l'attante giocano contemporaneamente due giochi diversi che spesso si contraddicono.

b) Attante e Apprendente

Se in una situazione l'attante ha fallito, l'apprendente cerca alternative e tenta di modificare il suo repertorio con una nuova azione. La scelta tra persistere con lo stesso repertorio (agire) o cambiare repertorio (imparare) è sempre il luogo di un antagonismo doloroso. Per questo motivo a certi allievi ripugna, spesso, entrare in un gioco «autoeducativo»: sanno che dovranno mettere in campo modi di conoscere da abbandonare in seguito. Certi ragazzi odiano questa esperienza. L'imparare richiede un certo distacco dall'azione in corso: in fondo, è un altro gioco. Scegliere di imparare significa perdere l'innocenza dell'infanzia dell'arte…

c) Apprendente e Allievo

Se l'attante non vede alternative alle sue decisioni, si potrebbe pensare che l'apprendente ha tutto l'interesse a cercare altrove la conoscenza che gli manca. In altre parole squalificare l'attante nel suo procedere empirico (smettere il gioco dell'attante) e farsi «allievo» di qualcuno che sa. Si vedono spesso ragazzi che, molto giovani, si affannano nel lavoro e rifiutano sistematicamente di essere aiutati, anche dopo molti fallimenti, e che, poi, meno giovani (magari dopo una scolarizzazione), diventano consumatori sfrenati di soluzioni «pronte per l'uso» del tipo «Insegnamelo!» e che alla fine rinunciano a compiere qualsiasi sforzo di apprendimento: «Non insegnarmelo: dimmi come si fa!».

d) Attante e Allievo

L’azione effettiva è costosa per chiunque, per il docente che stabilisce la regola aperta, e i mezzi materiali, cognitivi, affettivi, ecc. per giocarla, e per l’allievo, che deve investire un concreto ignoto, complesso, spesso poco attraente, poco fertile in esperienze esaltanti, poco redditizie in comprensione e in apprendimenti, e, alla fin fine, nemmeno adatto ad essere ricordato come paradigma di una conoscenza chiaramente identificabile. L’azione non significativa, l’azione compiuta per pura ideologia pedagogica, è ancora peggiore. In ogni caso, il va e vieni tra il gioco dell’attante e quello dell’allievo è il motore sempre instabile e essenziale della relazione didattica.

e) Il gioco didattico: un gioco fatto di giochi

Il passaggio da un gioco all’altro è indispensabile: trasformare i saperi in conoscenze e in decisioni nell’azione è tanto necessario quanto la trasformazione inversa, dall’azione alla conoscenza, poi alla «comprensione», e al sapere…, che è altrettanto difficile, o, piuttosto, rischiosa: non c’è via sicura, non c’è la via regale.

Riprodurre una decisione in condizioni che sembrano simili comporta un rischio di fallimento quando le circostanze differiscono per variabili insospettate; conservare la memoria di «ogni» circostanza farà sì che non si ritroveranno mai situazioni identiche e che l’esplorazione di una nuova situazione sarà troppo costosa; accontentarsi di una rappresentazione approssimativa o di un modello ardito farà invece sì che il rischio di fallimento «si opporrà» all’economia perseguita… L’esercizio facilita l’azione, ma può rendere difficile un altro adattamento; il capire economizza in termini di esercizi ma non li sostituisce completamente e può pure, in caso di fallimento, complicare l’azione; il farsi insegnare economizza in termini di esperienze, ma può ridurre drasticamente le capacità di adattamento ecc. Così, ogni medaglia ha il suo rovescio e ogni gioco il suo pro e il suo contro, all’interno dei quali gli equilibri sono difficili e instabili.

Immaginiamo che in una data situazione una strategia appaia vantaggiosa e che l’attante la utilizzi: allora l’apprendente deve prendere il testimone dall’attante e «imparare» questa strategia, cioè modificare il proprio repertorio di conoscenze per rendere la strategia più disponibile o più facile in una situazione futura? C’è la tentazione di rispondere «sì». Ma se l’allievo-attante risolve il problema, che gli è stato proposto, con le proprie conoscenze attuali, sembra che non abbia bisogno di imparare la nuova conoscenza, a rischio di sovraccaricare il repertorio di considerazioni superflue o, al limite, false.

Certamente bisogna «imparare» ciò che «si sa», ma fino a che punto?

Le idee esposte in questo paragrafo sono state, se non trattate, almeno esemplificate in buon numero di lavori di didattica della matematica.

5. La struttura delle situazioni didattiche

È giunto il momento di osservare i giochi del docente e del suo ambiente. Un’analisi superficiale potrebbe indurre ad immaginare soltanto due sistemi in interazione: il docente e l’allievo. I metodi usati nell’analisi delle situazioni matematiche portano a considerare l'ambiente come un elemento essenziale dell'azione dei partner in presenza, e a considerare le conoscenze e i saperi dal punto di vista di ogni attante. Infatti l'uso dei giochi come modello conduce a scomporre una relazione complessa in tanti giochi elementari quanti sono gli obiettivi differenti, salvo poi ricombinarli subordinandoli gli uni agli altri.

Per esempio il soggetto, che agisce su un ambiente che egli considera come privo di intenzione didattica (non didattico) in una situazione ben determinata, non ha l'intenzione di imparare. Egli non ha nessuna ragione di supporre che ciò che deve fare per raggiungere un certo obiettivo possieda una qualunque proprietà buona in altre circostanze. Al massimo ricorderà una traccia di certe circostanze e di qualcuna delle risposte, senza con questo modificare in alcun modo i suoi comportamenti futuri, almeno nella stragrande maggioranza dei casi.

Diverse circostanze possono fargli pensare, invece, che questa traccia presenti un interesse primordiale, e dunque che la sua memorizzazione richieda e meriti un'attività specifica. Lo scopo dell'attante è ora del tutto diverso, anche se le circostanze sembrano le stesse. La modellizzazione del gioco di questo soggetto apprendente è completamente diversa da quella dell'attante precedente.

È molto importante anche distinguere le situazioni *autodidattiche* nelle quali l'attante – l'*apprendente* – impara volontariamente ma in modo autonomo una conoscenza più o meno personale, dalle situazioni «*eterodidattiche*» nelle quali l'attante – l'*allievo* – si sottomette all'intenzione del docente di insegnargli un sapere culturale.

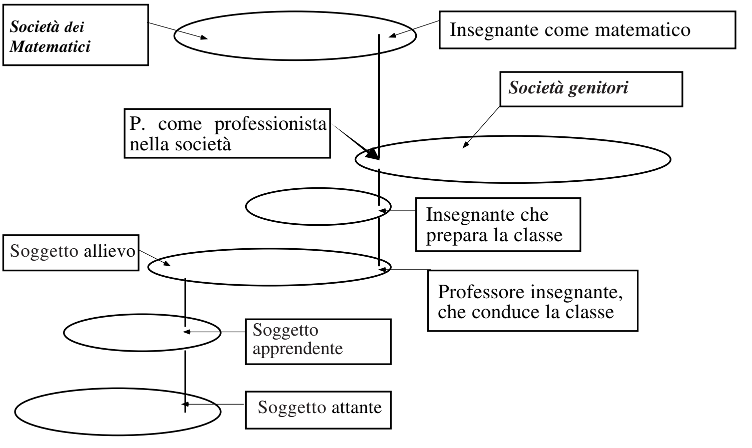
Cosicché ritroviamo i tre tipi di situazioni che il docente deve organizzare e gestire per i suoi allievi: situazioni di azione autonoma, di apprendimento autonomo e di insegnamento propriamente detto.

Ma da parte sua il docente si sottomette lui pure a diverse istituzioni in giochi diversi: l'insegnamento – l'azione di insegnare in un rapporto diretto con uno o più allievi – è un gioco diversissimo dalla preparazione o dalla valutazione di questa azione. Il gioco sociale del docente, per favorire la sua posizione e il suo lavoro, il proprio assumersi come matematico facente parte della comunità matematica… possono dar luogo a modellizzazioni distinte ma non indipendenti.

Lo schema che segue mostra le varie istituzioni alle quali deve assoggettarsi. Esse definiranno altrettanti giochi distinti che strutturano l'ambiente di insegnamento[9].

9. Guy Brousseau «le contrat didactique, le milieu» in RDM, Vol. 9/3 pp 309-336. La pensée Sauvage (idem).

f) Struttura dei modelli: gli assoggettamenti



Adesso basterebbe precisare

— Come questa rete di situazioni concorre all'acquisizione di conoscenze e di pratiche dell'allievo, quali sono le subordinazioni tra le diverse situazioni.
— Quali regole d'azione e quali scopi si danno i diversi attanti in ognuna delle situazioni e come si suddividono le responsabilità e i mezzi d'azione.

Ma prima e dopo essere stato un attante o un apprendente autonomo, il soggetto deve essere un allievo che deve entrare in rapporto didattico con il docente. Lo studio della ripartizione delle responsabilità tecniche (specifiche del contenuto) tra l'insegnante e l'apprendente permette di distinguere tutta una serie di «giochi» didattici. Le situazioni «debolmente didattiche» (corsi magistrali, esercizi) possono svolgersi in maniera regolare, cioè con regole che restano fisse per tutta la durata dell'insegnamento. Ma l'uso di giochi nel quadro di situazioni «fortemente didattiche» (dove il docente assume su di sé l'insegnamento effettivo ad un dato allievo) solleva difficoltà che derivano da modelli diversi dai precedenti. Appena si tratta di articolare l'azione autonoma del soggetto con la dipendenza ineliminabile dell'allievo, nel rapporto che fa ricadere sul docente un certo obbligo di risultati, compaiono le contraddizioni. L'insegnamento si muta in una sorta di negoziazione sulla base di contratti sottintesi, mai esplicitabili, ma sempre necessari e mai onorati. I modelli di gioco sono allora molto differenti, e comprendono una parte di «astuzia», di scommessa, di bluff, e, alla fin fine, di «teatro». Lo studio del «contratto didattico» sarà accennato nel secondo paragrafo: li indichiamo come doppi giochi perché le situazioni paradossali nascono dalla congiunzione di assoggettamenti: l'attante e l'allievo, l'attante e l'apprendente, l'apprendente e l'allievo, di volta in volta, cooperano o sono in concorrenza, il docente è assoggettato al suo rapporto con gli allievi, ma anche con la società e con la comunità dei matematici. Il gioco con ognuno di loro può essere «semplice», ma le combinazioni non sono necessariamente esenti da contraddizioni. Tutto ciò porta a sviluppi dialettici dove le situazioni più semplici non possono più far gioco.

6. I «doppi giochi» del docente La Teoria delle situazioni didattiche in matematica

6.1. La devoluzione

Rappresentarsi l'insegnamento come la devoluzione dal docente all'allievo di una situazione d'apprendimento ha permesso di scoprire certi fenomeni. Il tentativo di modellizzare la devoluzione come la negoziazione di un «contratto» consente di spiegarne la maggior parte e di prevederne altri.

Il risultato di questo modo di procedere farà considerare il maestro come un giocatore di fronte a un sistema formato a sua volta da una coppia di sistemi: l'allievo e, diciamo così per cominciare, un «ambiente» privo di intenzioni didattiche nei confronti dell'allievo (anche se carico di intenzioni didattiche da parte del docente).

Nel «gioco» dell'allievo con l'ambiente le conoscenze sono prima mezzi per assimilare le regole e le strategie di base – quelle necessarie per capire le regole – poi mezzi per eleborare strategie vincenti e per ottenere il risultato cercato.

Nel gioco del maestro con il sistema allievo-ambiente abbiamo descritto sia ciò che deve fare per stabilire le regole e le strategie di base sia gli adattamenti ai cambiamenti previsti dal gioco dell'allievo nel corso del suo apprendimento. Abbiamo visto che ad ogni conoscenza, e forse ad ogni funzione di una conoscenza, devono corrispondere situazioni (problemi) specifici e probabilmente dei contratti didattici. L'evoluzione dei giocatori e del gioco – contrariamente a ciò che avviene nei giochi a regole fisse – conduce a rimettere in causa le conoscenze e il contratto didattico.

L'approccio secondo la teoria delle situazioni mette questo processo alla base stessa della costituzione dei saperi e permette di modellizzare il modo in cui si articolano lo specifico e il generale.

La ricostruzione del sapere in situazioni didattiche porta a svariati paradossi, a contraddizioni apparenti. Non è questo il luogo di sviluppare questa modellizzazione, ben nota agli specialisti, ma è interessante mettere alla prova la sua *coerenza*: essa ha permesso di *precisare* le funzioni o le relazioni che è opportuno rappresentare mediante regole per i diversi giochi e le difficoltà dell'impresa di modellizzazione della suddivisione delle responsabilità tra il docente e l'allievo e, più in generale, tra il «decisore» e l'«esecutore» dei «compiti» educativi.

La devoluzione non è una specie di preparazione psicologica dell'allievo per renderlo più cooperativo. Abbiamo visto che l'allievo deve essere cooperativo, ma che l'apprendente e l'attante devono «opporsi» a certe intrusioni del docente per quanto ne sentono la necessità. Un esempio farà capire i rudimenti dell'ingegneria della devoluzione.

6.2. Il paradosso della devoluzione delle situazioni

a. L'insegnante ha accettato dalla società la missione di far imparare la matematica agli allievi. Ora, nessuno sa come si «fa» la matematica e ancora meno come si fa fare matematica a qualcuno.
   Lucienne Félix mi raccontava che Lebesgue accettava di osare di «fare matematica» davanti ai suoi studenti, cioè di improvvisare le dimostra-

zioni con il rischio di precipitare in calcoli inutilmente complicati, ma si rifiutava di dirigere un dottorando, perché se lo studente faceva domande alle quali lui, Lebesgue, sapeva rispondere, allora lo studente non avrebbe avuto nessun merito e, al contrario sarebbe stato un vero regalo avvelenato quello di fare domande alle quali nemmeno lui, Lebesgue, avrebbe saputo rispondere.

L'insegnante deve ottenere *in fine* che l'allievo risolva i problemi che gli sono proposti per constatare e far constatare che ha compiuto il proprio compito di insegnante.

Ma se l'allievo «copia» la risposta, cioè se la trova senza aver fatto nessuna delle scelte che caratterizzano un vero sapere, e che distinguono il sapere da una conoscenza insufficiente, l'indice di apprendimento è falsato: sembra che l'allievo abbia imparato, ma non ha prodotto conoscenza.

L'allievo deve poter giocare da solo e non semplicemente riprodurre algoritmi o eseguire compiti completamente «dettati»[10]. Il fatto si verifica specialmente quando il docente dice all'allievo *come* risolvere il problema o quale risposta dare, perché l'allievo né effettua scelte né prova metodi ma si limita ad eseguire un ordine. Non prova di essersi appropriato della conoscenza mirata: ne dà solo l'illusione.

L'alternativa è chiara: o il docente non dice qual è la riposta attesa o non può verificare l'apprendimento. È evidente che in fase di valutazione finale l'allievo non deve «copiare», ma è difficile distinguere una riposta diretta acquisita (basso livello tassonomico) da una risposta prodotta dall'applicazione di una conoscenza più generale o più profonda (alto livello tassonomico).

b. Ma il paradosso si estende all'apprendimento stesso. Il docente non può accontentarsi di ricercare la semplice memorizzazione di un testo, né l'apprendimento di una collezione di domande e risposte. Che cosa avviene nel caso di un apprendimento per adattamento?

   Perché l'allievo abbia una possibilità di adattarsi alla situazione, attraverso una modificazione idonea e spontanea delle proprie conoscenze o convinzioni, perché debba produrre la conoscenza attesa, attraverso un proprio fare, il docente non può fornirgli la risposta. Se lo fa, per una ragione qualsiasi, l'occasione di adattamento personale è persa e la conoscenza mirata dovrà essere conseguita con un altro tentativo o con un altro processo. I modi più o meno nascosti di ridurre l'incertezza degli allievi o di fornire loro la risposta sono noti come «effetto Topaze», «effetto Jourdain», «abuso di analogia», ecc.: che, il più delle volte, non sono «errori» didattici ma che pongono fine al tentativo di apprendimento per adattamento.

   Tutte le situazioni di apprendimento effettive, dal condizionamento più vincolante alle «scoperte» più inattese, presuppongono la devoluzione di

10. Miller e Chomski hanno mostrato che l'apprendimento di una lingua naturale non può essere il portato di uno «stimulus response model», ma che necessita almeno di un automa finito. Questo risultato può essere considerato come il primo della T. S. D. M. (Teoria delle situazioni didattiche in matematica).

una situazione più o meno aperta. Le caratteristiche essenziali di queste situazioni sono le stesse dei giochi e si analizzano con gli stessi metodi.
Il docente si trova davanti ad un'alternativa:

– se dice direttamentre all'allievo che cosa vuole che faccia, all'allievo non serve altra conoscenza che il «come fare» e deve dunque averla appresa prima. Non ha alcuna speranza di esercitarsi per cercare che cosa deve fare, né, quindi, per imparare a cercare la benché minima alternativa;
– se non vuole dire direttamente all'allievo la risposta attesa o ciò che si aspetta da lui per risolvere il problema dato, si assume il rischio che l'allievo non risponda niente e che nemmeno faccia qualcosa.

Il docente deve dunque dissimulare le sue intenzioni con un artificio didattico: scegliere domande le cui risposte possono essere costruite dall'allievo, ricorrere ad analogie, suggerire metodi, ecc.
Il docente, contemporaneamente desidera

– che gli allievi diano risposte che ha insegnato perché è il suo mestiere
– ma anche che trovino le risposte da soli, per adeguamento della risposta alla domanda e non perché così è desiderio o conoscenza del maestro.

c. Le cause congiunturali che possono far fallire la devoluzione delle situazioni sono numerose: le difficoltà «eccessive» della situazione; la rappresentazione che gli allievi se ne fanno, ecc. Ma la causa principale è strutturale: il docente deve operare devoluzione di una situazione non troppo chiusa per permettere gli adattamenti necessari all'apprendimento. L'allievo infatti non può accettare la «responsabilità» del successo o del fallimento in una situazione che, per definizione, non sa risolvere a priori. Egli si aspetta di ricevere anticipatamente i mezzi per farlo. Il docente ha l'obbligo sociale di *insegnare* tutto ciò che è necessario al sapere desiderato. L'allievo – soprattutto quando è in un vicolo cieco – glielo chiede.
Così, dunque,

– quanto più il docente risponde alla domande e svela quanto desidera e quanto più dice con precisione all'allievo qual è il suo compito
– tanto più rischia di perdere la speranza di ottenere gli apprendimenti voluti.

È il primo paradosso: non è per niente una contraddizione, ma il sapere e il progetto di insegnare devono mostrarsi mascherati. In società che impongono all'insegnamento l'obbligo di risultati (appoggiandosi soltanto su conoscenze scientifiche insufficienti e su metodi di gestione industriali e commerciali), il docente «deve garantire» alla società e agli allievi che è in grado di ottenere gli apprendimenti desiderati[11].

11. La società sembra voler gestire l'insegnamento come Gengis Khan utilizzava gli astrologi per sapere il tempo che avrebbe fatto! Essa interroga una collezione di «esperti»: o segue la maggioranza o, in caso di risultati insufficienti, segue qualche eccentrico e aspetta innovazioni magiche. Ma mai che prospetti di preparare il futuro con ricerche serie in questo campo, immaginato come una raccolta di ricette.

Questo «contratto» didattico mette dunque il docente davanti a un'ingiunzione paradossale: tutto ciò che intraprende per far produrre dall'allievo ciò che si aspetta tende a privare quest'ultimo delle condizioni necessarie alla comprensione e all'apprendimento della nozione mirata; se il maestro dice ciò che vuole, non può ottenerlo.
Così la didattica consiste nello studiare le astuzie grazie alle quali il docente dissimula le sue intenzioni pur lasciandole indovinare. La «distanza» tra i due modi di fare è il mezzo e la misura dell'attività matematica, possibile o effettiva, dell'allievo. L'insegnante gestisce in continuità questa distanza per ottimizzare lo sfruttamento del tempo scolastico.

d. Ma anche l'allievo si trova in una situazione paradossale: se accetta che, a norma di contratto, il maestro gli insegni i risultati, non li trova lui stesso e dunque non impara la matematica, né se li appropria. Se, invece, rifiuta ogni informazione datagli dal maestro, allora la relazione didattica si rompe. Imparare implica, per lui, che accetti la relazione didattica ma che la consideri provvisoria e che si sforzi di rifiutarla.
La soluzione dei dilemmi passa per processi più complessi, dove le intenzioni dichiarate e gli obiettivi reali sono sdoppiati. Il docente deve occuparsi del gioco del giocatore per farlo entrare in quello dell'attante.
Tecnicamente, i modelli di giochi a-didattici descritti fin qui erano giochi di riflessione, che portano a «sostituire» i modelli stimolo-risposta del behaviourismo con modelli corrispondenti al minimo ad automi finiti. Il fatto di rifiutare che il modello generale di acquisizione di conoscenze sia il modello empirista skinneriano non impedisce per niente di utilizzarlo in qualche circostanza speciale. Il discredito generale di questi metodi è tanto nefasto quanto la loro universalizzazione.
L'obbligo per il docente di ricostruire una lettura «didattica» degli eventi passati accaduti in classe ci ha condotto in seguito a ricorrere a modelli almeno altrettanto complessi degli automi a pila di memoria.
Adesso i modelli del tipo detto «giochi di riflessione» devono essere immersi nei modelli del tipo «giochi di astuzia», dove l'informazione non è più completa.

7. L'istituzionalizzazione e le sue derive

Anche se molti testi studiano le situazioni di questo tipo (cfr. la bibliografia), quasi nessuno l'ha fatto producendo modelli in termini di gioco.

7.1. Il paradosso dell'attore

Il fatto di concepire, di organizzare e persino di mettere in opera una situazione a-didattica trasforma il docente in una specie di autore o di regista; nella situazione didattica, dove assicura personalmente la gestione di questa «opera teatrale», diventa attore lui stesso. E, nella misura in cui i suoi allievi, al contrario, non sono attori professionisti, egli si trasforma, in qualche modo, in un manipolatore, un organizzatore di «loft story»[12]. L'idea secondo la quale il docente sarebbe un manipolatore degli allievi è difficile da mandar giù. Che il proprio mestiere consista nel comportarsi da attore che recita una parte, ha qualcosa di ripugnante per parecchi docenti. Altri accetterebbero l'idea, ma a condizione di essere attori della «commedia dell'arte», dove l'improvvisazione è parte integrante. In ogni caso, l'idea di recitare un testo scritto, per di più scritto da altri, gli provoca sensazioni di repulsione, per non dire di vomito. Un motivo evidente è sicuramente che occorre uno sforzo considerevole, eccessivo, per preparare 6 ore di uno spettacolo diverso ogni giorno, con la formula teatrale in uso oggi. Ma ci sono altri motivi: i docenti cercano un'autenticità nel loro lavoro e nei rapporti con i loro allievi, cosa che esclude lo spettacolo e persino il gioco.

Al contrario, coscienti dell'impossibilità di assumere «sul serio» contratti fortemente didattici, certi docenti di matematica hanno pensato che la miglior cosa da fare fosse fare matematica, possibilmente *con* gli allievi ma almeno *davanti* a loro. Lavorare duramente, cercare, sbagliare, se del caso, e correggersi davanti agli allievi è sembrato loro il messaggio più onesto e più vero, dunque più efficace, che potevano trasmettere (ciò che corrisponde al contratto di famigliarizzazione detto talvolta «di apripista»).

Ma questa decisione non fa uscire la situazione dal modello teatrale. Si tratta in ogni caso di una ri-presentazione (nel testo originale francese c'è un gioco di parole: représentation = rappresentazione -teatrale-, re-présentation = ri-presentazione N.d.T.) della matematica: gli allievi capiscono che si tratta di una simulazione, con o senza la loro partecipazione. Che la rappresentazione sia seria, comica o tragica dipende dalla presa che ha sul pubblico.

Nel suo testo «Il paradosso dell'attore», Didérot ha messo in guardia contro la confusione del teatro con la vita. Più l'attore vuol provare su di sé i sentimenti del personaggio, meno è in grado di esprimerli compiutamente, di perfezionarli, di riprodurli con professionalità in tutte le circostanze. Assassinare davvero i Curiazi tra le quinte, o Orazio sul palcoscenico, non aggiungerebbe niente alla recita. L'impatto del teatro sul pubblico, come quello della matematica sugli allievi, dipende da operazioni culturali e psicologiche più complesse.

La soluzione dei paradossi elencati, così come la spiegazione dei fenomeni osservati, è uno degli scopi della teoria delle situazioni e insieme un mezzo per mettere alla prova la sua consistenza.

7.2. Gli altri doppi giochi

Gli altri doppi giochi sono quelli del «matematico» con l'«insegnante» e della società con l'insegnamento.

Il ruolo delle istituzioni e della comunità matematica, come quello della società in generale, è molto importante. La gestione e gli inconvenienti della trasposizione didattica (della matematizzazione e de- matematizzazione dei testi, delle attività,

12. Questa osservazione mi ha indotto ad interrogarmi sull'insegnamento della matematica utilizzando le analisi del teatro inteso come gioco (la metafora del teatro non è l'unica possibile, e il nostro studio del gioco come modello dell'attività umana può, inversamente, essere utilizzato per analizzare il teatro).

delle situazioni, per esempio) possono essere studiati nell'ottica della teoria delle situazioni. Non discuteremo qui questa possibilità perché la complessità e la vastità dei fenomeni richiederebbe il concorso di altri approcci: storici, epistemologici, sociologici, antropologici. Che un fenomeno come la «matematica moderna» sia stato oggetto, negli ultimi trent'anni, solo di pamphlet e di opere d'opinione (eccettuata la tesi di Evelyne Beaulieu) mostra in tutta evidenza in qual modo si vuole continuare a trattare i problemi dell'insegnamento[13].

8. Conclusioni

In questo testo, troppo corto per l'articolo di fondo che vuol sembrare qua e là, e fin troppo lungo e troppo tecnico per essere quello di una conferenza, abbiamo cercato di mostrare che c'è la possibilità di concepire le situazioni didattiche sul modello di una vasta gamma di giochi.

Questa possibilità non è solo teorica. Fra le principali ricadute della modellizzazione cui fa capo la teoria delle situazioni appaiono in primo piano le situazioni «fondamentali» delle principali conoscenze della scolarità obbligatoria e la loro utilizzazione ripetuta in classe, in presenza di allievi.

Certo, per utilizzarle bisogna saperle riconoscere, praticare con i ragazzi e fare riconoscere pure a loro. Bisogna dunque considerare in modo diverso gli atti di insegnamento. Oggi ogni esercizio e ogni lezione sono visti come atti didattici inattesi, sempre nuovi, inventati spontaneamente dal docente come opere d'arte personali o come giochi giocati per il suo piacere.

Per gli allievi, la situazione deve avere le caratteristiche di un gioco nel senso comune del termine. Il fatto che anche il docente giochi ha importanza solo in proporzione alla gioia o all'efficacia che produce negli allievi.

Non ha senso giudicare troppo localmente il carattere ludico delle situazioni di insegnamento. Nella maggior parte dei veri giochi ci sono fatiche, difficoltà, momenti di concentrazione, di passione, di speranza e di delusione. Si tratta di rendere possibile, per il maggior numero di allievi, un investimento che assomigli sufficientemente alla vita vera, che permetta però di evitare, o di equilibrare, gli eventi troppo pericolosi o traumatici. Lo studio, talvolta, può ben essere un rifugio.

Non ha senso voler richiudere questi giochi in norme uniformi, se le norme sono dedotte da ragionamenti che sprezzano i particolari. Come per tutti gli oggetti tecnici, è la perfezione nei minimi dettagli che garantisce ai migliori giochi le loro principali virtù. Cambiate disordinatamente le regole e scoprirete presto la falla che annienta tutte le virtù del gioco iniziale.

Non ha nemmeno senso voler sconsideratamente sostituire le attività didattiche in classe con «giochi» direttamente presi all'esterno. Troppo spesso la reputazione di didatticità di questi giochi è puramente ipotetica o, almeno, largamente sopravvalutata. È per questo motivo che io credo che non si debbano nemmeno sopravvalutare i transfer di motivazione e di conoscenza – diciamo l'influsso – di attività ludiche periscolastiche sui risultati e sui comportamenti scolastici.

13. È ben vero che avvenimenti importanti come la guerra d'Algeria hanno avuto lo stesso destino.

È opinione comune che il gioco degli scacchi sviluppi le qualità matematiche di chi lo pratica. Ma io non conosco nessun soggetto matematico che sarebbe meglio capito, praticato o amato dopo qualche ora di scacchi che non dopo qualche ora di lavoro matematico specifico. L'interesse in sé stesse delle attività matematiche «periscolastiche» è abbastanza grande perché le si auguri ai nostri giovani. Le loro virtù educative sono evidenti e i loro effetti sulla percezione popolare della matematica o sulle relazioni della scuola con il territorio sono benefiche. Non è utile ammantarle anche di virtù didattiche che probabilmente non hanno e portare così acqua al mulino dei detrattori della scuola.

La reiterata affermazione che «si impara meglio fuori dalla scuola», «nella pratica» o per le virtù di qualche «pozione» tanto mitica quanto misteriosa è il portato di un'abitudine che si diffonde sempre più. Ma è priva di qualsiasi fondamento. È sostenuta dalla sua utilità per una marea d'interessi, nessuno dei quali ha una benché minima relazione con gli allievi e con la cultura matematica. La sua conseguenza è che conduce dritti dritti i docenti ad abbandonare i loro metodi più sicuri a «vantaggio» di pratiche magiche.

Mi disturba molto l'accoglienza compiacente concessa dalla comunità matematica e da quella dei docenti a simili dicerie.

Al contrario, io credo che noi possiamo far beneficiare i ragazzi, a scuola, dei vantaggi che voi cercate e ottenete fuori dalla scuola, alla condizione di prendere molto sul serio, molto professionalmente e molto autenticamente il nostro comune lavoro, e di incoraggiare le ricerche necessarie, utilizzandole, «controllandole» e partecipandovi.

Articles de l'*Encyclopaedia Universalis*

Cazeneuve J. Jeu. Ehrmann J. Jeu et rationalité. Payen J. et Thines G. Le jeu des Animaux. Château J. Le Jeu Chez L'enfant. Cazeneuve J. Le Jeu Dans La Société. Bouzitat J. Théorie Des Jeux, 1995.

Revue *La Recherche*

(N° spécial Juin). Jeux mathématiques. Grenoble: La pensée sauvage, 2000.

Aveline C.

Le code des Jeux. Livre de Poche. Paris: Hachette, 1961.

Berthelot R. et Salin M. H.

L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire. Bordeaux: IREM, 1992.

Brousseau G.

Théorie des Situations Didactique. Grenoble: La pensée sauvage. Opera pubblicata dapprima in inglese presso Kluwer (1997) con il titolo *Theory of didactical situation in mathematics* edita e tradotta da N. Balacheff, Martin Cooper, Rosamnd Sutherland et Virgina Warfield, 1998.

Brousseau G.

The Case of GAEL. In *Journal of mathematical Behavior* 18 (1) (pp. 7-52), 1999.

Château J.

Le Réel et l'imaginaire dans le jeu de l'enfant Paris: Vrin. 5e éd. (1975). (1950) *L'Enfant et le jeu*. Paris: Scarabée, 1946.

Diderot D.

Le paradoxe sur le comédien de Fornel M. et Quere L. (1999) *La logique des situations*. Paris: Editions de l'Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales, 1773.

Huizinga J.

Homo ludens. Essai sur la fonction sociale du jeu. In *Homo ludens* (1951), trad. C.Seresia. Paris: Gallimard, 1938.

Rapoport A.

Combats, débats et jeux. In *Fights, Games and Debates* (1960). (1967) Trad. J. de La Thébeaudière. Paris: Dunod, 1967.

3. Che cosa significa «eccetera»[1]

André Delessert[2]

In order to recall the alphabet, it is enough to say: "a, b, c, d, etc.". Everybody knows that it is possible to get to the end of the list: "…, x, y, z" and get rid of the expression "etc". When the usual numbers are presented: "one, two, three, four, etc.", one can surely go on with the listing. However, one cannot do without adding "etc" or a similar expression. And that is an obscure point. Is it related to language or only to mathematics? Is there something that is peculiar to mathematics? To answer these questions, the author explores the field of the philosophy of mathematics.

Quando si vuole richiamare l'alfabeto è sufficiente dire: «a, b, c, d, ecc.". Tutti sanno che si può arrivare alla fine della lista: «…, x, y, z» e sopprimere l'espressione «ecc.». Quando si presentano i numeri usuali: «uno, due, tre, quattro, ecc.», è possibile continuare la recitazione. Ma non si può fare a meno di aggiungere «ecc.» o una formulazione analoga. Lì c'è un punto oscuro. È legato alla lingua o solamente alla matematica? Esiste qualcosa che è proprio solo della matematica? Per rispondere a questo tipo di domande, occorre posizionarsi al di sopra della matematica. Ciò appartiene alla filosofia della matematica.

Per un momento lasciamo da parte questi interrogativi. Osserviamo che tutti gli allievi di questo mondo sono obbligati a seguire lezioni di matematica, anche se solo una piccola parte di essi ne traggono beneficio. Così il profano, che comunque ha ricevuto un insegnamento della matematica, solitamente fatica molto a immaginarsi quello che fanno i matematici. Una sorta di strano ostacolo gli impedisce di immaginare il mondo della matematica.

Il fatto è che gli oggetti che studiano i matematici non hanno un nome generico. La zoologia studia gli animali. L'astronomia studia i corpi celesti. Non si osa dire che la matematica studia la matematica. È proprio qui che qualcuno fa notare che la matematica è utilizzata, direttamente o no, da quasi tutte le altre discipline: la fisica, l'economia, la tecnica. Non sarebbe quindi che uno strumento per gli altri. Se non esiste un nome per designare l'oggetto proprio della matematica, è semplicemente perché non ce l'ha. Questa è l'opinione dell'uomo della strada e perfino di certi matematici.

Per questi, la Sfera, il Gruppo, la Funzione esponenziale sarebbero concetti astratti, cioè nozioni di carattere discorsivo, generate a partire da osservazioni concrete, lasciando cadere quasi tutti i loro aspetti accidentali. Gli oggetti matematici sarebbero dunque fittizi.Noi potremmo giocare intellettualmente con essi, ma la loro origine sarebbe nelle nostre sensazioni. Questa opinione si iscrive in una concezione materia-

1. Versione italiana dell'articolo pubblicato sugli Atti del Convegno di didattica della matematica 2004.
2. Già Rettore dell'Università di Losanna, Svizzera.

lista della scienza condivisa da parecchi uomini di scienza. L'espressione più chiara di questa dottrina è il *fisicalismo*.

È stato formulato nel 1933 dal filosofo Raymond Ruyer:

Nulla è dispensato dall'esistere fisicamente, di figurare al suo posto e al suo rango nel quadro mediante il quale la fisica rappresenta il continuo spazio-tempo. […] nulla, né valore né significato volteggia al di sopra degli esseri estesi e presenti.

Queste parole sembrano chiare. Eppure enunciano un fatto che non può essere stabilito dalla fisica: essa non può dimostrare che non c'è nulla al di fuori degli oggetti della fisica. Questa affermazione discende dunque da principi che non esistono nel senso della fisica. Nega se stessa. O, se si preferisce, il fisicalismo dà proprio un esempio di un fatto del quale afferma peraltro che non esiste.

Paradossalmente, questo enunciato stabilisce dunque che esistono cose al di là del mondo fisico. Per i matematici, quali voi siete, è d'altronde un'evidenza. Voi conoscete **insiemi infiniti**. Sono misteriosi, come tutti gli oggetti matematici. Eppure nessun dispositivo fisico permette di evidenziare una collezione fisica infinita. I matematici studiano proprio cose che «volteggiano al di sopra degli esseri estesi e presenti». Ci si può allora interrogare sulla natura di questi oggetti matematici. Tentiamo di farlo esaminando appunto il caso dell'**infinito matematico**.

A partire da Aristotele e fino al 19° secolo (Gauss), nonostante qualche eccezione (Descartes, per esempio), i pensatori ritenevano che l'infinito non potesse essere utilizzato se non in teologia. In matematica era proibito vederci una nozione chiara come quella di cerchio o di polinomio. L'infinito era solo una sorta di abbreviazione per parlare dei passaggi al limite. L'apparizione degli insiemi nel 19° secolo ha permesso di far entrare l'infinito nell'ambito degli oggetti matematici. Questo si è rivelato essere una nozione inevitabile, più fondamentale ancora del punto o del numero. A loro insaputa, tutti i matematici ne avevano sempre fatto uso. Cercherò di rendere plausibile questa affermazione.

È facile vedere che la geometria euclidea piana può essere enunciata interamente in termini di insiemi. Il piano è un insieme di punti. Ogni retta è un sottoinsieme del piano. Due rette sono parallele quando la loro intersezione è vuota. Gli assiomi della geometria euclidea piana ammettono quindi un **modello insiemistico**. Questa osservazione è valevole per ogni teoria matematica. Infatti una tale teoria si fonda sempre su un sistema di assiomi. Ora, nel 1930 il matematico Kurt Gödel ha dimostrato un teorema importante: *ogni sistema di assiomi è consistente (cioè non contraddittorio) se e solo se ammette un modello insiemistico.*

Fra le altre cose, da questo teorema di Gödel scaturisce che la teoria degli insiemi è primitiva, nel senso che ogni altra teoria matematica presuppone *a priori* la validità della teoria degli insiemi. Siamo perciò costretti a dire qualcosa di questa teoria. Precisiamo dapprima che essa si distingue da ciò che si chiama talvolta «teoria degli insiemi» nei trattati elementari. Per esempio, nella vera teoria degli insiemi, si considerano unicamente insiemi – o eventualmente classi di insiemi – perché non esiste niente di più elementare della nozione di insieme. In teoria degli insiemi l'unica relazione fondamentale si nota $y \in x$: essa esprime che l'insieme y è un elemento di x. Gli elementi di un insieme sono quindi sempre degli insiemi. L'insieme vuoto non è il nulla: è un insieme che non possiede alcun elemento e che può essere elemento di un altro insieme.

Nel 19° secolo, Cantor e Dedekind hanno introdotto la nozione di insieme per padroneggiare l'infinità dei numeri usuali. Dove i loro predecessori vedevano delle collezioni in espansione illimitata (nel tempo), essi considerarono totalità attuali (fuori dal tempo), che battezzarono *insiemi*. Nella lista di assiomi della teoria degli insiemi è stato necessario quindi introdurne uno che postula l'esistenza di almeno un insieme infinito. È l'*assioma dell'infinito* che si può esprimere così:

1. *esiste un insieme x comprendente l'elemento (insieme)* $\varnothing$ *tale che se (l'insieme)* **y** *è elemento di* **x**, *allora* $\mathbf{y} \cup \{\mathbf{y}\}$ *è anche un elemento di* **x**.

Questo enunciato richiama alcune osservazioni.

L'assioma non definisce la nozione generale di insieme infinito, ma implica l'esistenza di un insieme **x** avente gli elementi:

2. $\varnothing\ \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\quad \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\quad \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\},\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\}\ldots$

   Essi costituiscono un sottoinsieme ordinato di **x** che non possiede un ultimo elemento. È in questo senso molto particolare che può essere considerato *infinito*, cioè senza fine. Questo assioma ha un po' il senso del nostro «ecc.» di prima. Ma nel primo caso significa che occorre continuare la recitazione abbastanza a lungo. Mentre che nel caso presente si afferma l'esistenza attuale di tutti gli elementi di (2). Prima dell'apparizione dell'assioma dell'infinito, era impossibile caratterizzare la finitezza, cioè il fatto che un insieme sia finito. Si possono fare parecchi esempi di insiemi finiti. Ma non esiste un modo per dire, in generale, che cos'è un insieme finito. A maggior ragione non si può caratterizzare un insieme infinito dicendo che non è finito. In un senso ontologico – è il termine tecnico dei filosofi – l'infinito precede il finito. L'insieme (2) è infinito. Sfortunatamente non ci mostra chiaramente che cos'è la nozione generale di insieme infinito. Tuttavia è ben ordinato. Ricordiamo che un insieme **z** è detto *ben ordinato* (o che possiede un *buon ordine*) se è totalmente ordinato e se ogni parte non vuota di **z** ha un elemento più piccolo. È facile confrontare, secondo la grandezza, due insiemi ben ordinati:

   •

   •

   Basta mettere in corrispondenza gli elementi di stesso rango. La nozione di infinito potrebbe essere generalizzata se fosse possibile ben ordinare ogni insieme. Perché ciò sia possibile è necessario introdurre un assioma specifico, l'*assioma del buon ordine*:

3. *Ogni insieme ammette un buon ordine.*

   I nuovi assiomi dell'infinito e del buon ordine permettono di far apparire una collezione notevole di insiemi, che si chiamano *ordinali*:

4. $\varnothing\ \{\varnothing\}\ \{\varnothing,\{\varnothing\}\}\ \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$
   $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}\}\ldots$

Questa collezione assomiglia molto alla (2), ma se ne differenzia sensibilmente perché soddisfa le condizioni seguenti:

a) Ogni ordinale è l'insieme degli ordinali che lo precedono nella catena (4). In particolare, se κ è un ordinale, $\kappa \cup \{\kappa\}$ è un ordinale detto il *successivo* di κ. Lo si nota spesso $\kappa+1$.
b) Reciprocamente, ogni insieme che è una sezione iniziale di (4), preso come elemento, è l'ordinale che segue immediatamente questa sezione.
c) La collezione (4) non è un insieme. Se fosse un insieme u – dunque una catena iniziale di (4) – sarebbe un ordinale. Dovrebbe comportare il suo successore $\mathbf{u} \cup \{\mathbf{u}\}$ e si avrebbe $\mathbf{u} \in \mathbf{u}$, ciò che è escluso. Ciò mostra che la collezione (4) non coincide con l'insieme (2).
d) Gli ordinali sono ben ordinati secondo la relazione $\in$.

Si dimostra che ogni insieme ben ordinato z è isomorfo, rispettando il buon ordine, con una sezione iniziale di (4). È un ordinale che è chiamato *ordinale di z*. (4) è dunque una scala che permette di confrontare tutti gli insiemi ben ordinati. Ogni ordinale ha un successivo. Ma l'osservazione c) mostra che esistono ordinali che non sono successivi. Si chiama *ordinale-limite* ogni ordinale diverso da $\varnothing$ che non è successivo. La stessa osservazione stabilisce che esistono ordinali-limite e che ciascuno di essi è infinito.

Prendiamo un ordinale-limite κ e quelli che lo precedono. Costituiscono un sottoinsieme ben ordinato compreso nella successione (4). Possiede un elemento minimo che si nota generalmente ω. È il più piccolo ordinale-limite. I suoi elementi sono $\varnothing$ e i successivi iterati di $\varnothing$. Sono, per definizione, gli *ordinali finiti*. Se si indica con 0 il numerale di $\varnothing$, con 1 quello di $\{\varnothing\}$, con 2 quello di $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ **eccetera**, si può scrivere la successione degli ordinali fino a ω:

$0, 1, 2, 3, \ldots\ldots, \omega$

Gli *insiemi finiti* sono quelli i cui ordinali sono finiti.

Gli insiemi finiti giustificano l'apparizione dei numeri naturali. Questi esigono l'introduzione preventiva di due assiomi molto forti: l'assioma dell'infinito e quello del buon ordine. Contrariamente alla pratica abituale, lo sviluppo interno della matematica fa apparire l'infinito prima del finito.

Possiamo ora ritornare sul termine «eccetera». Il suo significato è legato alla nozione di buon ordine. Prescrive di progredire in una collezione ben ordinata rispettando le regole del buon ordine. È il senso profondo di questo termine. Quando lo si impiega nel caso di una collezione priva di buon ordine, e che non forma una totalità, come per esempio {il bene, il male, la guerra, il pericolo, … ecc.}, «ecc.» ha un significato molto vago. Il lettore o l'uditore possono interpretarlo arbitrariamente.

Un oggetto matematico esiste non appena gli assiomi della teoria nella quale appare sono non-contraddittori. Perciò è necessario e sufficiente che la teoria considerata ammetta un modello insiemistico. Questo teorema si applica a ogni teoria, ad eccezione della teoria degli insiemi, evidentemente. Bisognerebbe allora dimostrare direttamente che la teoria degli insiemi è consistente, cioè non-contraddittoria. Ora, a questo punto, non possediamo altro che la teoria degli insiemi. È solo per questa teoria che possiamo sperare di dimostrare la sua consistenza. Ed è qui che interviene puntualmente Kurt Gödel con una versione del suo celebre *teorema d'incompletezza*:

Se la teoria degli insiemi è consistente, non permette di provare la sua consistenza.

Questo enunciato appare abbastanza comprensibile. In fondo esprime il fatto che non si può sollevare noi stessi tirandoci per i capelli. Ma è stato spesso interpretato da parte di filosofi incompetenti o malintenzionati come la prova dell'inconsistenza della teoria degli insiemi, dunque dello smacco definitivo della matematica. In realtà, occorre spingere il ragionamento fino alla fine. Se la teoria degli insiemi fosse contraddittoria, si potrebbe dimostrare ogni sua affermazione e la sua negazione. In particolare, abbiamo visto che $\varnothing$ e $\{\varnothing\}$ sono due insiemi diversi, o, se si preferisce, che $0 \neq 1$. Ma si potrebbe anche dimostrare il contrario: $0=1$. Allora sarebbero tutta l'aritmetica ordinaria, tutta la fisica, tutte le scienze che si fondano sulla matematica, a crollare. E anche ogni pensiero diverrebbe incoerente: le riflessioni del mercante di castagne come quelle dell'artista e del filosofo. Nessuno potrebbe immaginare un tale caos.

Il nostro cammino ci conduce a riflettere sulla natura degli oggetti matematici. I più usuali, per esempio i numeri naturali, si radicano nella nozione di infinito, che non ammette alcuna rappresentazione fisica. Questa nozione e tutte quelle che ne derivano non possono quindi essere ottenute per astrazione. Inoltre gli oggetti matematici si situano fuori dal tempo. Non possono essere creati in un determinato momento storico da uno spirito umano. Si fa fatica a credere che le mediane di un triangolo hanno cominciato a passare per un unico punto solo a partire dal quarto secolo avanti Cristo. Kurt Gödel avanza un altro argomento. Quando un matematico dimostra un teorema, mette in evidenza un fatto ineluttabile, un confine inattraversabile. Se gli oggetti matematici fossero creazioni umane, come i personaggi di un romanzo, si sottometterebbero alle nostre fantasie. Vi si potrebbero aggiungere attributi arbitrari. Ora, tutti noi sappiamo che, al contrario, sono terribilmente resistenti.

Questa *resistenza* è il carattere proprio delle cose reali. Giunti a questo punto, ci sembra di poter dire che gli oggetti matematici appartengono a un universo reale, immateriale, ma accessibile al pensiero. Il matematico li scopre, ma non li crea. Il nostro piccolo viaggio mostra che il matematico li può scoprire anche molto tempo dopo averli utilizzati.

Concludiamo. Le nozioni matematiche formano, nella loro totalità, un mondo reale, non fisico. Sono organizzate grazie a principi molto sottili, come per esempio gli assiomi dell'infinito e del buon ordine. La loro consistenza è garantita da un principio ad esse superiore, come è dimostrato dal teorema di incompletezza di Gödel. L'universo matematico appare come una realtà che si eleva verso le regioni più alte del pensiero. Troppa gente crede che la matematica riduce il pensiero al regno della quantità. Al contrario, essa offre allo spirito l'immagine della trascendenza.

Si costata che l'esistenza della matematica non è una questione matematica e nemmeno un fatto scientifico. È al contempo la testimonianza e il garante di ogni vita intellettuale. Ciò implica due conseguenze:

- occorre mantenere l'insegnamento della matematica nella formazione dei giovani
- occorre elaborare questo insegnamento senza perdere di vista la prospettiva filosofica nella quale si iscrive.

4. La generalizzazione matematica come processo semiotico[1]

Luis Radford[2]

Since in any generalization a fact cannot refer to itself, every act of generalization assumes the appeal to something else. This "other thing" is connected with the field of representation. Words, gestures and symbols constitute different semiotic sectors, each of which gives opportunities and limitations of expressing and objectifying what needs to be generalized. The passage to complex symbolic generalizations gets pupils starting to learn algebra into clear difficulties. The author describes the results of various studies on this important issue of the learning of mathematics.

1. Introduzione

Il tema che mi accingo ad affrontare in questa sede concerne la generalizzazione in matematica. È un tema al quale ho cominciato a interessarmi parecchi anni fa, osservando quattro classi di allievi di 13 anni, secondo un programma longitudinale di ricerca centrato sull'algebra. Ovviamente, non ci si può interessare alla matematica senza considerare nello stesso tempo la generalizzazione, perché, come dice Mason (1966), la generalizzazione è il motore della matematica. Prima di svolgere questo programma longitudinale di cinque anni non mi ero mai occupato della generalizzazione come problema specifico di ricerca. È stato nell'osservare le difficoltà degli allievi che mi sono accorto della complessità dei problemi che concernono la generalizzazione. Questi mi sono apparsi all'inizio come problemi cognitivi. Tuttavia, per poterli formulare in quanto problemi di ricerca, avevo bisogno di concettualizzarli in profondità. Questa costatazione mi ha condotto a intraprendere una riflessione sulla generalizzazione nell'ottica dell'ontologia e dell'epistemologia. Come verrà chiarito nel corso della mia relazione, è praticamente impossibile lavorare sulla generalizzazione senza entrare in considerazioni ontologiche ed epistemologiche.

A mano a mano che la riflessione teorica procedeva, mi permetteva di capire meglio i fenomeni cognitivi concreti che osservavo in classe. D'altro canto, la produzione di nuove idee concrete esigeva spesso un'interpretazione più fine dei dati e un approfondimento della riflessione teorica. È all'interno di questo processo dialettico tra riflessione concettuale e analisi di situazioni di apprendimento che ho potuto formulare, a poco a poco, certi principi che servono da fondamento a un approccio teorico che si vuole antropologico, grazie al ruolo che gioca il contesto storico-culturale nella concettualizzazione del pensiero matematico.

1. I risultati presentati qui derivano da un programma di ricerca sovvenzionato dal Conseil de Recherches en Sciences Humaines du Canada / The Social Sciences and Humanities Research Council of Canada (CRSH/SSHRC).

2. École des sciences de l'éducation, Université Laurentienne, Ontario, Canada.

La mia impostazione antropologica si è sviluppata, in parte, come risultato del bisogno di ricontestualizzare l'attività cognitiva. Kant ci ha insegnato che ogni sapere è il prodotto di un'attività cognitiva. Se si vuole capire la natura di questo sapere, occorre studiare l'attività cognitiva che lo ha prodotto. Certamente il compito non era facile. Tuttavia mi sembrava importante andare al di là della concezione cartesiana che concepisce l'attività cognitiva come un processo intellettuale che si svolge unicamente all'interno del soggetto stesso[3].

In un testo pubblicato nel 1997, proponevo di considerare il pensiero matematico come un pensiero di natura intrinsecamente sociale ancorato a modi di significazione culturale (Radford, 1997a). Ma, per andare più in là, dovevo precisare meglio questo ancoraggio. Mi era parso evidente, dai lavori di Lizcano (1993) sulla matematica cinese e da quelli di Høyrup (1990) sulla matematica babilonese, che la generalizzazione non è un processo che si sviluppa in modo naturale. C'è una moltitudine di direzioni possibili a ogni tappa dello sviluppo. Capire la generalizzazione conduce a capire il modo nel quale si effettuano le scelte di sviluppo alla luce del pensiero culturale che le sottendono. Allora potevo formulare la questione solo in grandi linee. Oggi, dunque 8 o 9 anni più tardi, potrei riformularla in maniera più precisa utilizzando metaforicamente uno dei concetti più profondi elaborati da Vygotski. Potrei dire che, a ogni epoca, ogni cultura crea zone prossimali di sviluppo all'interno delle quali si effettuano le scelte che determinano la direzione che seguirà lo sviluppo stesso.

È proprio ispirandomi alla scuola socio-storica di Vygotski che sono stato indotto a esaminare la relazione tra segno e oggetto e ad allontanarmi dalla corrente tradizionale che considera i segni come indici dell'attività mentale e come semplici «aiuti» al pensiero (Radford, 1998, 1999). Certe correnti linguistiche e psicologiche ispirate allo strutturalismo, per esempio, distinguono tra due piani: quello del pensiero propriamente detto – che, secondo queste teorie, è governato da «strutture profonde» nascoste nella testa – e quello delle «strutture di superficie», nelle quali si trovano i segni che, sempre secondo queste teorie, non sono che *vestigia* delle strutture profonde. All'opposto dell'approccio cartesiano dell'attività mentale e delle correnti strutturaliste, mi collocavo dalla parte dei filosofi e degli psicologi culturali (come Wertsch, 1991, Kozoulin, 1990 e Zinchenko, 1985) che insistono sul ruolo cognitivo del segno. Alla fine degli anni 1990, mi è parso di capire che la risposta alla domanda che concerne i processi di generalizzazione poteva essere trovata studiando i meccanismi di oggettivazione mediata del sapere culturale. È in questo ambito che ho agito in questi anni nelle mie ricerche.

Ecco dunque un breve sunto del cammino che mi ha condotto a interessarmi al problema della generalizzazione. In questa sede vorrei presentare due «momenti» particolari di questo cammino.

Da una parte vorrei mostrare alcuni elementi della riflessione concettuale che concernono la generalizzazione nell'ottica ontologica ed epistemologica.

Senza la pretesa di essere esaustivo, esaminerò i rapporti che possono

3. Per essere più precisi, questa idea di attività cognitiva trova ispirazione nella filosofia austera di S. Agostino. Se, per esempio, si vuole rintracciare l'idea contemporanea molto popolare secondo la quale gli oggetti matematici sono *nella* nostra testa, è S. Agostino e non Descartes o Platone che si incontra risalendo la genealogia delle idee (vedere Radford, 2004).

esistere tra il generale e il particolare nella teoria della conoscenza di Kant. Questa è importante nella nostra discussione perché si iscrive in una critica della Ragione che non esita a mettere in questione tutto ciò che il pensiero occidentale aveva considerato acquisito fino al XII secolo, ma che, curiosamente, risparmia la matematica. Si tratta di una critica che, dal punto di vista antropologico, fallisce, ma che fallendo si apre verso un tentativo di «semiotizzazione» dell'oggetto matematico.

D'altra parte vorrei mostrare alcuni risultati concreti della mia ricerca in classe. Non bisognerebbe perdere di vista che, come ho affermato in precedenza, questi due aspetti sono correlati e che la separazione che opero qui per ragioni di esposizione è del tutto artificiale.

2. Alcune considerazioni teoriche sulla generalizzazione

Una delle caratteristiche della matematica è che i suoi oggetti sono oggetti «generali». Quando enunciamo una proprietà sui triangoli o sulle funzioni continue, queste ultime non concernono un triangolo particolare o una determinata funzione continua, ma l'oggetto generale corrispondente. La natura generale degli oggetti matematici pone immediatamente due problemi diversi. Un problema ontologico e uno epistemologico. Il problema ontologico ha a che fare con il modo di essere di questa generalità. Si può, per esempio, considerare che gli oggetti matematici sono realtà trascendentali. Per contro, si può considerare che gli oggetti matematici sono prodotti del pensiero umano. Il problema epistemologico si può sintetizzare nella domanda seguente: come possiamo giungere a conoscenza di questi oggetti generali, dal momento che non abbiamo accesso a questi oggetti se non attraverso rappresentazioni che ci facciamo di essi?

In una celebre lettera scritta il 21 febbraio 1772, Kant mette in dubbio il potere delle nostre rappresentazioni. In questa lettera, inviata a Herz, Kant dice: «su quale fondamento si basa il rapporto tra ciò che chiamiamo rappresentazione e l'oggetto corrispondente?»[4] In questa lettera Kant dibatte la questione della legittimità che avrebbero le nostre rappresentazioni nel presentare o rappresentare gli oggetti. In termini semiotici, Kant si interroga sull'adeguatezza del segno. Ora, quali sono le ragioni di Kant che lo fanno dubitare? La natura del dubbio kantiano è di ordine epistemologico. Dal lato ontologico, Kant non nega la trascendenza stessa degli oggetti. Kant dubita che possiamo riuscire a conoscere la vera realtà degli oggetti perché tutto ciò che captiamo dall'esperienza del mondo è ineluttabilmente filtrato dai nostri sensi. Occorre distinguere tra l'oggetto in sé e l'oggetto come ci appare nel corso dell'esperienza. Il primo è l'oggetto così com'è realmente; il secondo è solo un'apparenza.

Ciò non vuole però dire che ogni conoscenza resta inaccessibile, perché la conoscenza degli oggetti matematici costituisce un'eccezione. Infatti, per Kant, vi sono conoscenze possibili: sono conoscenze *a priori*. E l'esempio paradigmatico è proprio la matematica: «la matematica costituisce l'esempio più appariscente di una ragione pura che riesce a estendersi da sola e senza il concorso dell'esperienza» (A 712/B 740)[5].

4. Kant in (Zweig, 1970); mia traduzione.
5. Come sempre, il riferimento A 712 rinvia alla prima edizione della *Critca della Ragione Pura*, pubblicata nel 1781; B 740 rinvia alla seconda edizione, pubblicata nel 1787.

Ora, che cos'è una conoscenza *a priori*? Kant dice:

> Si dicono *a priori* conoscenze indipendenti dall'esperienza e anche da tutte le impressioni dei sensi, e le si distingue dalle conoscenze empiriche, che hanno la loro sorgente *a posteriori*, cioè nell'esperienza. (B 2)

Non bisogna confondere *a priori* con *innata*. Per Kant, l'*a priori* è una categoria logica; l'*innata* è una categoria psicologica. Come sottolinea Kant nel passaggio precedente, è a priori tutto ciò che non trova le condizioni di costituzione nell'esperienza. Dove può trovare l'*a priori* le proprie condizioni? Le trova nei concetti della comprensione e nella logica implacabile che le governa.

Per Kant, il teorema che afferma che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180° è vero, ma non trova la sua verità nell'esperienza, bensì nel concetto stesso di triangolo. La stessa cosa si può dire del teorema dell'uguaglianza degli angoli alla base di un triangolo isoscele. Nell'introduzione della *Critica della Ragion Pura*, Kant dice:

> Il primo che dimostrò il *triangolo isoscele* (che si chiamasse Talete o altro) ebbe un'illuminazione; perché trovò che non doveva fare riferimento a ciò che vedeva nella figura e neppure al semplice concetto che ne aveva, per apprendere le proprietà, ma doveva produrre questa figura perché ci pensava e la presentava (per costruzione) *a priori* secondo i concetti stessi, e che, per conoscere sicuramente una cosa *a priori*, non doveva attribuire a questa cosa altro che ciò che risultava necessariamente di ciò che lui stesso vi aveva messo, conformemente al suo concetto. (Kant, BXI-BII)

Certamente, visto sotto questa angolazione, Kant appare terribilmente razionalista. Lo è, è sicuro. Ma si oppone al razionalismo su due punti importanti: (1) le verità matematiche non si possono restringere alla non-contraddittorietà degli enunciati. Per Kant ciò non fa altro che provare la loro *possibilità logica* e non la loro *possibilità reale*; (2) l'altro punto concerne il ruolo epistemologico del sensibile. Nella teoria della conoscenza di Kant, il sensibile non gioca semplicemente un ruolo accessorio. Per Kant ogni cognizione comporta un elemento concettuale e un elemento sensuale. L'elemento sensuale è in relazione con ciò che Kant chiama l'*intuizione*. «L'intuizione è una rappresentazione dipendente immediatamente dalla presenza dell'oggetto» (Prolegomena, § 8). Nella terminologia moderna, l'intuizione si riconduce a ciò che chiamiamo solitamente una rappresentazione particolare o ancora un simbolo (Hintikka, 1980, pp. 61-62). Kant sottolinea con forza che «intuizione e concetti costituiscono… gli elementi di ogni nostra conoscenza, in modo che né concetti senza corrispondente intuizione né intuizione senza concetti possono dare origine a conoscenza». (A 50/B 74)

In effetti, il ruolo che Kant attribuisce al sensibile è evidente nel passaggio concernente il triangolo isoscele menzionato in precedenza. Secondo questo passaggio, Talete forma una conoscenza a priori; questa non risulta dalla lettura della figura, perché ciò significherebbe che la conoscenza dipende dall'esperienza. L'*a priori* è ciò che è necessariamente usato nel concetto stesso e che *riappare* nella figura concreta. In un passaggio della *Disciplina della Ragion Pura*, Kant dice:

> Così costruisco un triangolo presentando l'oggetto corrispondente a questo concetto sia con la semplice immaginazione nell'intuizione pura, sia anche, seguendo questa, sulla carta nell'intuizione empirica, ma nei due casi totalmente a priori, senza averne dedotto il modello da alcuna esperienza. La figura singola tracciata qui è empirica e comunque

> serve a esprimere il concetto senza portare pregiudizio alla sua universalità, perché in questa intuizione empirica, non si guarda nient'altro che l'atto della costruzione del concetto… (A 713-4/B 741-42)

Allora, in che modo Kant affronta, nella sua teoria della conoscenza, la relazione che esiste tra generale e particolare? Nell'esempio precedente, Kant parla di una corrispondenza tra concetto e figura, dunque tra generale e particolare. Ma qual è esattamente la natura di questa relazione?

Kant risponde che se la conoscenza filosofica considera il particolare unicamente nel generale, la conoscenza matematica, per contro, considera «il generale nel particolare, anche nel singolare, ma a priori e per mezzo della ragione». (A 714/B 742)

La risposta di Kant si trova già insinuata nell'esempio del triangolo; sarà sviluppata nel corso dell'*Analitica trascendentale*, particolarmente nel denso capitolo consacrato allo schematismo, cioè nel posto stesso dal quale, più tardi, partirà l'epistemologia genetica di Piaget. La relazione tra generale e particolare è assicurata dallo schema, cioè (continuando col nostro esempio) la *regola di costruzione* del triangolo che, durante la sua esecuzione, ci svela il concetto sotto un aspetto particolare senza peraltro mettere in pericolo la sua generalità.

È per questo che lo schema in Kant è sia intellettuale sia sensibile. È intellettuale nel senso che è generale; è sensibile nel senso che si svolge nel tempo e nello spazio. Nel capitolo sullo schematismo, Kant indica che

> i nostri concetti puri [fra i quali quelli matematici] non hanno per fondamento immagini di oggetti, ma schemi. Non esiste immagine di triangolo che sia adeguata al concetto di triangolo in generale. In effetti, essa non raggiungerebbe la generalità del concetto, che lo rende valido per ogni triangolo (rettangolo, scaleno, ecc.), ma sarebbe sempre limitata a una sola parte di questa sfera. Lo schema di triangolo non può mai esistere se non nel pensiero. (A 140-41/B 179-80)

La risposta di Kant alla domanda precedentemente posta è dunque la seguente: è lo schema che assicura la relazione tra generale e particolare. Il concetto «discende» per così dire dal mondo intellettuale e, schematizzandosi, si iscrive nell'esperienza umana: assume una forma particolare che, nonostante le sue particolarità (il triangolo costruito nel mondo concreto può essere piccolo, grande, rosso, ecc.), riveste lo stesso i tratti della sua generalità.

Con il suo concetto di schema, che ha giocato un ruolo centrale nell'elaborazione delle epistemologie del XX secolo[6], Kant respinge l'attacco lanciato da George Berkeley contro l'esistenza delle idee astratte o generali. Secondo Berkeley, l'idea di triangolo generale è impossibile, perché quando si pensa a un triangolo, si pensa sempre a un triangolo particolare. Un triangolo generale dovrebbe essere simultaneamente rettangolo, scaleno, equilatero, isoscele, ecc. Niente di più facile, dice Berkeley alla fine della sezione 13 dell'introduzione al suo *Trattato concernente i principi della conoscenza umana*, di rovistare nei nostri pensieri e di vedere se un tale triangolo può essere veramente pensato. L'errore di Berkeley, direbbe Kant, consiste nel confondere regola e immagine, o schema e prodotto dello schema.

6. Certamente, l'esempio più conosciuto è quello di Piaget, che abbandonerà l'apriorismo kantiano e farà dello schema il motore che costruisce il concetto. Un esempio forse meno conosciuto è quello di Cassirer e della sua teoria della concettualizzazione, tematizzata secondo le linee della scuola kantiana di Marburg (vedere Radford, sous presse-1).

La teoria del concetto matematico in Kant si basa dunque sui seguenti principi:

1. I concetti matematici sono concetti a priori; essi non trovano la condizione di possibilità nell'esperienza umana; la trascendono, ma, a differenza dei concetti empirici che sono sempre filtrati dai sensi, i concetti matematici possono effettivamente essere conosciuti.
2. I concetti matematici sono universali.
3. La loro universalità è nell'ordine dell'esprimibile; si esprime come regola: «Ogni conoscenza esige un concetto e questo concetto, quanto alla sua forma, è sempre qualcosa di generale e che serve da regola» (A 106). Nel caso dei concetti puri, la regola è precisamente quella che ci è data dallo schema.

Si potrebbe ancora porre a Kant la questione dell'adeguatezza tra il concetto matematico – che secondo lui è un'entità universale o generale – e il particolare nel quale finisce lo schema spiegandosi nel mondo sensibile. Si potrebbe chiedergli di precisare da dove la Ragione trae questo potere di adeguarsi quando si china sugli oggetti matematici e che sembra invece mancargli quando si volge al mondo empirico. La risposta non è molto lunga. Se il matematico ha il diritto di vedere il generale nel particolare, è, come osserva Daval (1951, p. 110), «perché è certo della fedeltà del segno. Il segno è la rappresentazione adeguata del significato».

In sintesi, il particolare e il generale si collegano, in Kant, grazie al credo nella fedeltà del segno. Kant non esita a mettere in questione l'adeguatezza del segno in generale. Ma ne fa un'eccezione quando si tratta della matematica. Si può essere sicuri che, nel caso della matematica, si può contemplare il generale nel particolare e che anche se si ragiona su figure concrete, «le proposizioni della geometria sono conosciute sinteticamente a priori e con una certezza apodittica». (A 46/B 64)

Riassumiamo le idee precedenti. Kant si iscrive in una lunga tradizione secondo la quale il concetto generale dev'essere allo stesso tempo universale. Generale e universale significano, al di là dell'esperienza, dunque al di là dello spazio e del tempo, ciò che conduce Kant a sposare la teoria classica di verità della tradizione *essenzialista*:

> Il concetto di verità in Kant – e questo è profondamente legato al pensiero borghese – è quello di verità al di là del tempo (timeless truth)… Il concetto di verità al di là del tempo, cioè il concetto secondo il quale solo ciò che è al di là del tempo può essere realmente vero… è una delle forze direttrici più profonde della filosofia kantiana (Adorno, 2001, p. 10).

Si deve diffidare della relazione tra generale e particolare, salvo in matematica dove il particolare e il generale si incontrano in questo luogo di sicurezza costituito dal segno. Il generale e il particolare sono tematizzati da Kant secondo i canoni di una tradizione essenzialista che vede il generale e la sua verità come ciò che resta, una volta che si è tolto tutto ciò che cambia, tutto ciò che è effimero. Si tratta di una tradizione essenzialista le cui origini risalgono all'ontologia di Platone, un'ontologia che veicola i valori agonizzanti di un'aristocrazia ateniese che, confrontata con la disfatta nella guerra del Peloponneso e con l'emergenza concomitante di un potere popolare che essa teme, si oppone a tutto ciò che porta cambiamento.

3. La generalizzazione del punto di vista antropologico

Dal punto di vista antropologico, il fallimento di Kant non consiste nel potere che conferisce al segno di rappresentare il generale. Uno dei maggiori contributi di Kant è in effetti di aver insistito sul ruolo epistemologico del segno. L'errore di Kant si trova nella sua concezione dell'idealità del concetto matematico: nel postulare l'*a priori* del concetto matematico, Kant colloca quest'ultimo al di là dell'esperienza umana. Nell'approccio semiotico antropologico (ASA) del quale stiamo parlando, l'idealità del concetto dell'oggetto concettuale è direttamente collegata al contesto storico-culturale. L'idealità degli oggetti matematici – cioè ciò che li rende generali – è del tutto tributaria dell'attività umana. Come indica il filosofo E. V. Ilyenkov:

> L'idealità è come un timbro impresso sulla sostanza della natura dall'attività sociale, una forma di funzionamento della cosa fisica nel processo di questa attività. Così, tutte le cose che fanno parte del processo sociale acquistano nuove «forme di esistenza» che non sono incluse nella natura fisica della cosa e che si distanziano da essa in modo completo. Questa nuova forma è la loro forma ideale. (Ilyenkov, 1977°, p. 86)

In termini più precisi, nell'ASA, il sapere matematico è visto come il prodotto di una *prassi* riflessiva, cognitiva, mediata.

Il sapere in quanto prassi cognitiva (*praxis cogitans*) sottolinea il fatto che ciò che conosciamo e il modo col quale giungiamo a conoscerlo sono sottesi da posizioni ontologiche e da processi culturali di produzione del senso che danno forma a un certo tipo di razionalità all'interno del quale sono posti certi tipi di domande e di problemi.

La natura riflessiva del sapere dev'essere capita nel senso di Ilyenkov, cioè in quanto componente distintiva che rende la cognizione una riflessione intellettuale del mondo esterno secondo le forme dell'attività degli individui (Ilyenkov, 1977b p. 252). La natura mediata del sapere fa riferimento al ruolo che giocano gli strumenti e i segni in quanto mezzi di oggettivazione del sapere e in quanto strumenti che permettono di portare a termine la *prassi* cognitiva.

Come già in Kant, generalizzare significa qui «vedere» il generale nel particolare, salvo che, nell'ASA, il generale non è concepito nel senso di un'entità trascendentale, ma di un'entità generale che deriva dalla riflessione degli individui sul mondo che li circonda. Inoltre, «vedere» il generale non deriva dal tentativo di un sensualismo che riempirebbe di contenuto i recipienti del concetto. Si tratta innanzi tutto di un generale (un *ens* o essere) che si costruisce nello stesso tempo dei particolari che contiene secondo le forme della razionalità culturale[7].

Ora è tempo di occuparci di ciò che succede in classe.

---

7. Durante le mie ricerche epistemologiche precedenti, ho potuto fornire parecchi esempi storici a questo proposito. In (Radford, 1997b) si troverà un'analisi dell'apparizione della seconda incognita in algebra nel XIV secolo. La seconda incognita appare all'interno dello spazio che apre il movimento economico, culturale e intellettuale dell'alto Medioevo e che conduce a una rottura al livello della rappresentazione fino allora puramente iconica della tradizione bizantina.

4. La generalizzazione in classe

Secondo l'ASA, occorre fare un'importante distinzione tra apprendimento e produzione di sapere[8]. Mentre la produzione di nuovi saperi risulta da attività in comune, riflessive, mediate che sfociano nella creazione di concetti culturali (oggetti matematici, scientifici, artistici, estetici o altro), l'apprendimento scolastico è il processo di trasformazione attiva degli oggetti culturali in oggetti di coscienza.

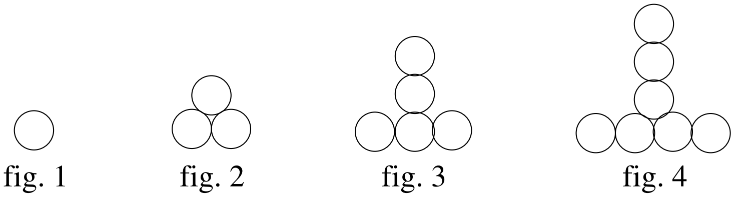
La trasformazione attiva degli oggetti culturali in oggetti di coscienza è tematizzata nell'ASA in quanto processo di *oggettivazione*. L'oggettivazione dell'oggetto significa riflessione sull'oggetto secondo le forme dell'attività matematica: l'oggetto appare come ri-flessione nella coscienza individuale di ciò che è *già* iscritto nella cultura.

Ci chiediamo: come si riflette l'oggetto? È qui che entra in scena il concetto di *mezzo semiotico di oggettivazione* del sapere.

4.1. Mezzi semiotici di oggettivazione

Come ho detto nell'introduzione, la teorizzazione precedente è stata il risultato di uno sforzo volto a capire le difficoltà incontrate dagli allievi di fronte a compiti di generalizzazione legati all'introduzione dell'algebra.

Una delle prime domande che abbiamo posto agli allievi è stata la seguente: dopo aver mostrato agli allievi una sequenza di tipo molto classico (si veda la figura seguente) e dopo aver fatto loro calcolare il numero di cerchietti in figure particolari come la 25ª e la 100ª, abbiamo chiesto di trovare il numero di cerchietti nella figura n-esima.



Gli studenti apparivano sorpresi da questa domanda: spesso rispondevano con altre domande, come: «Come? Che cos'è la figura n-esima?», «Ma insomma, non c'è alcuna figura n-esima!», «n uguale a…?».

Certo, la domanda iniziale era stata posta con una terminologia che fa ricorso a simboli e concetti algebrici che gli studenti non conoscevano ancora. D'altra parte, i cambiamenti effettuati nella formulazione non hanno aiutato molto. Quando abbiamo chiesto di trovare il numero di cerchietti in una figura *qualsiasi*, gli allievi ci

8. Questa distinzione è stata sottolineata da altri approcci antropologici, fra i quali quello di Chevallard (1985) (vedere anche Bosch et Chevallard, 1999), che parla in particolare di trasposizione del sapere; ma capita sovente che ci si dimentichi e che si finisca per far coincidere i meccanismi di appropriazione o di acquisizione del sapere con quelli della sua costruzione.

chiedevano che cosa intendevamo dire: «figura qualsiasi… che significa qualsiasi?» «Che roba è?». Un allievo ha persino interpretato il termine qualsiasi nel senso di figura arbitrariamente composta, dicendo: «Magari è un quadrato!».

Il problema consiste nel fatto che non è possibile mostrare concretamente la figura generale. Occorre vederla diversamente. Gli allievi sono stati messi di fronte a una situazione nella quale l'insegnante vedeva l'oggetto culturale in questione; ma loro non potevano ancora vederlo. Per poterlo vedere, occorreva lanciare gli allievi in un processo di *oggettivazione*.

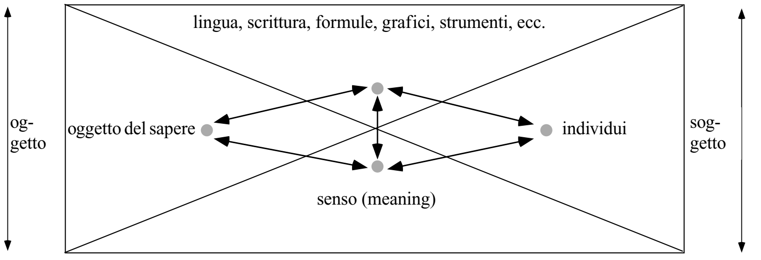
Il termine oggettivazione è composto di due parole*: ogget+tivazione*. La prima viene da *obietare*, che significa «mettere qualche cosa davanti a qualcuno». *Facere* significa «fare», di modo che, etimologicamente, oggettivazione significa «far mettere qualche cosa davanti a qualcuno in modo che lo possa percepire». Nel nostro contesto, oggettivazione indica un processo che ha per scopo di mostrare qualche cosa (un oggetto) a qualcuno. Quali sono i mezzi per mostrare l'oggetto? Sono quelli che chiamo *mezzi semiotici di oggettivazione*. Sono oggetti, artefatti, termini linguistici, in generale segni che si utilizzano per rendere visibile un'intenzione e per condurre a termine un'azione.

Devo qui insistere sul senso fenomenologico che dò ai termini «vedere», «mostrare», «far apparire», ecc. Questi termini non si riferiscono all'attitudine passiva di chi solamente «vede». Come dice Davidov, «*gli oggetti e la realtà sono dati all'uomo sociale, non attraverso la contemplazione passiva, ma unicamente nella forma della sua attività pratica sensoriale-oggettuale*»[9]. Ogni atto percettivo è attivo ed estremamente complesso. Riposa su azioni, su un'interpretazione-reinterpretazione continua e un'attribuzione di senso a ciò che è percepito da parte di chi lo percepisce secondo categorie culturali di cui dispone per afferrare ciò che c'è da percepire. Nel caso degli oggetti concettuali, il percepito è di fatto non percepibile, nel senso che è accessibile solo indirettamente, attraverso mezzi semiotici di oggettivazione. Tornerò su questo punto più avanti.

Da quanto abbiamo detto, la generalizzazione matematica appare legata all'attività semiotica che spinge l'allievo verso l'atto di «prendere coscienza» di una «oggettività» concettuale (Husserl) che fino ad allora sfuggiva alla sua intenzione. Ora, i mezzi semiotici di oggettivazione offrono possibilità diverse per svolgere un compito per designare oggetti ed esprimere intenzioni. È per questo che l'attività semiotica si produce in un luogo di incontro tra una soggettività che cerca di esprimersi e un sistema sociale di significazioni già presente (Merleau-Ponty). L'attività semiotica si trova così all'intersezione di ciò che Aristotele chiama *technè* cioè come lavoro riflesso su oggetti e segni concreti e una *poiesis*, intesa come promozione del senso.

9. «Objects and reality are given to social man, not through passive contemplation, but only in the forms of his practical, *sensory-object* activity». (Davydov, 1990, p. 244)

La figura seguente rende conto dell'oggettivazione del sapere come è concepita nell'ASA.



Questa figura mette in evidenza il fatto che l'oggetto del sapere non è filtrato solamente dai nostri sensi, come è il caso per Kant, ma soprattutto da modi culturali di significazione[10]. La figura mette ugualmente in evidenza che l'oggetto del sapere è filtrato dalla tecnologia dell'attività semiotica. L'assenza della freccia che collega direttamente gli individui e l'oggetto del sapere esprime chiaramente l'idea vygotskiana secondo la quale il sapere è culturalmente mediato.

4.2. Generalizzazioni fattuali

L'estratto seguente proviene da una delle prime osservazioni fatte durante il nostro programma longitudinale di ricerca. Nell'estratto vediamo uno dei gruppi di tre allievi che abbiamo seguito durante cinque anni. Gli allievi dovevano trovare il numero di stuzzicadenti necessari per costruire la figura 25ª in una successione molto classica di triangoli fatti con stuzzicadenti, come mostra la figura seguente.

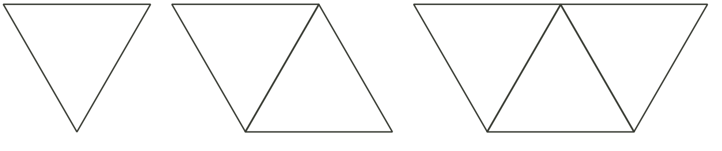


fig. 1 fig. 2 fig. 3

1. Judith: La prossima figura ne ha due di più.che… guarda! [La figura] 6 è 13, 13 più 2. Devi continuare. Momento (*prende una calcolatrice*) OK. OK. è più…
2. Anik: Beh, non puoi fare sempre più 2, più 2, più 2,…
3. Judith: Beh, sì. Questa è figura 7, più 2 uguale figura 8.

10. Due esempi di modi culturali di significazione sono: l'opposizione simmetrica yin/yang nella Cina antica (che rende possibile la concettualizzazione di numeri negativi) e l'opposizione non simmetrica dell'essere e del non-essere del pensiero greco classico (che esclude i numeri negativi dal mondo dell'esistenza). Vedere Radford 1997a, 2003a.

4. Josh: Va troppo per le lunghe! […] È sempre il prossimo. Guarda! (*Con la sua matita, indica le figure parlando; vedere foto 1*) 1 più 2, 2 più 3, […].
5. Anik: Allora 25 più 26…
6. Josh: Aspetta un momento. Sì, 3 più 4, fa 7; 4 più 5… dunque, è 27 più 26.
7. Anik: Beh, perché fai sempre… come… guarda (indica la figura 3 direttamente con l'indice; vedi foto 2 [figura] 3 più […] è 25 più 26.


Foto 1 (a sinistra). Con la sua matita, Josh indica le figure (riga 4 del dialogo).
Foto 2 (a destra) Anik indica la figura 3 con l'indice (riga 7 del dialogo).

Gli allievi hanno trovato la risposta per ciascuna figura senza contare il numero di stuzzicadenti: hanno effettuato una generalizzazione. Ora, di che tipo di generalizzazione si tratta? Alla riga 1, Judith imposta una relazione di ricorrenza, che in simboli scriveremmo in questo modo: $u_{n+1} = u_n + 2$. Josh, dando seguito a un'idea di Anik, alla riga 2 mette in evidenza il carattere poco pratico della relazione e propone una nuova strategia che è subito capita da Anik. Ma, alla riga 6, Josh non sa se è 27+26 oppure 25+26. La questione è risolta da Anik alla riga 7. In questo momento gli allievi hanno impostato uno *schema* (nel senso kantiano del termine) che permette loro di trovare il numero di stuzzicadenti corrispondente a ogni figura. Sono riusciti a oggettivare ciò che chiamiamo una generalizzazione fattuale, cioè una generalizzazione di azioni sottoforma di uno schema operazionale che rimane confinato a livello numerico.

A dire il vero non c'è un gran mistero dietro la generalizzazione fattuale. La si può ritrovare frequentemente anche negli allievi più giovani. Interessante è vedere come queste generalizzazioni vengono oggettivate, cioè determinare i mezzi semiotici di oggettivazione utilizzati dagli allievi per rendere queste generalizzazioni «oggetti di coscienza».

Il termine «prossimo»

Tornando all'estratto precedente, si vede che il termine linguistico «prossimo» gioca un ruolo centrale. Questo termine appartiene a ciò che in semiotica è detto deittica spaziale. Suggerisce un modo di apprendere le figure e apre una possibilità di far emergere una struttura matematica dietro la successione. Per mezzo di termini come «prossimo», «qui», «là», «questo qui», «quello là», la lingua assume una funzione centrale nel processo di oggettivazione, una funzione che abbiamo chiamato *funzione deittica* (Radford, 2000).

L'avverbio «sempre»

Un altro termine linguistico importante è l'avverbio «sempre». Permette di veicolare il senso di generalità e di esprimere questa idea centrale della generalizzazione di qualche cosa che continua in modo indefinito. Fa parte di un'altra funzione centrale della lingua che rende possibile descrivere procedure e azioni che possono essere condotte potenzialmente, in modo immaginato. Abbiamo chiamato questa funzione la *funzione generativa della lingua* (Radford, 2000)[11].

I gesti

Un altro mezzo semiotico di oggettivazione è costituito dai gesti che fanno gli allievi. Le foto precedenti mostrano come i gesti permettono di indicare, con una matita o con la mano, certi oggetti del discorso allo scopo di attirare l'attenzione e di guidare la percezione nell'atto di dare senso.

Sicuramente, i mezzi semiotici di oggettivazione che abbiamo appena messo in evidenza non hanno ragione d'essere negli approcci classici cognitivisti, perché, in questi approcci, si suppone che l'attività cognitiva abbia luogo *nella* testa. Tuttavia è bene ricordare che, precisamente, all'origine dell'ASA, si trova questa volontà espressa di andare al di là del punto di vista cartesiano della cognizione che inquina l'attività cognitiva del cervello. Dunque, se si allarga lo spettro dell'attività cognitiva e si analizzano attentamente tutte le risorse mobilitate dagli allievi per rendere visibili le loro tappe delle generalizzazioni apparenti, ci si accorge che i gesti e il linguaggio si articolano attorno a un'attività percettiva in un modo molto complesso. Ma c'è di più. Oltre al linguaggio e ai gesti, c'è anche il ritmo e i movimenti.

Ritmo e movimento

In un altro gruppo, uno degli allievi ha detto:

OK, in ogni caso, la figura 1 è più 2. La figura 2 è più 3. La figura 3 è più 4. La figura 4 è più 5. (*e pronunciando queste parole l'allieva indica le figure*).

In un altro gruppo, un allievo ha detto:

si va da 2… a 3, 5, 7, 9, 11 (*e contando l'allieva indica le figure*).

In questi due episodi, non c'è deittica spaziale come nel «prossimo»; non c'è alcun avverbio «sempre». Qui gli allievi fanno ricorso a espressioni non linguistiche di questi termini per esprimere il senso di generalità. Infatti lo schema di astrazione non raggiunge alcun livello verbale. Il suo tessuto semiotico è fatto di ritmo e movimento. Anche se si trova già questa combinazione di ritmo e movimento alla riga 4 nell'intervento di Josh, nei due ultimi esempi, il ritmo e il movimento creano una cadenza che dispensa gli allievi dal far ricorso ad altri metodi di oggettivazione.

11. Osserviamo che altri sistemi semiotici come quelli della pittura possiedono, fino a un certo punto, mezzi per riempire le funzioni deittica e generatrice. Un compito, o un grande segno può giocare il ruolo del termine «qui» e indicare qualche cosa sullo spazio semiotico della pittura; un effetto di prospettiva può anche comunicare l'idea di un'azione che si continua. Ma queste funzioni centrali, la deittica e la generativa, restano molto più topiche qui che nella lingua. Vi sono sistemi semiotici che non hanno deittica, come il linguaggio algebrico.

4.3. Generalizzazioni contestuali

Per aiutare gli allievi a oggettivare più profondamente lo schema di generalizzazione, abbiamo chiesto loro di scrivere un testo con lo scopo di spiegare, a un allievo di un'altra classe, come fare per calcolare il numero di stuzzicadenti in una qualsiasi figura della successione.

Ecco un breve passaggio dello scritto di un allievo:

Anik: Si fa come… sarebbe come… guarda qui, qui quando… ops. OK. Guarda… Qui la figura … OK, questo qui è il numero della figura, giusto? […] Si può dire che… è il numero della figura, giusto? Come… mettiamo quella è 1 (*si riferisce alla figura 1*). Se… se… OK, tu addizioni… come dici tu? Nell'ordine… addizioni per se stesso… Fai 2+2, poi, dopo di ciò, più 1. Fai sempre così, d'accordo? Farai 3 più 3 più 1; 4 più 4 più 1; 5 più 5 più 1. Capisci ciò che voglio dire?

Questo breve passaggio mette in evidenza la difficoltà che incontrano gli allievi a raggiungere un livello più alto di generalizzazione. L'intenzione è chiara, ma non viene espressa in modo soddisfacente senza far ricorso ad esempi concreti, propri del livello concettuale della generalizzazione fattuale. La scrittura del messaggio si avvale di mezzi di oggettivazione situati in un compartimento della tecnologia dell'attività semiotica che esclude l'utilizzazione di esempi concreti e che esige l'abbandono del ritmo, del movimento e dei gesti. Siccome il messaggio è indirizzato a un allievo assente, non si può contare sulla sua attività percettiva. Come sarebbe stato facile spiegargli lo schema di generalizzazione, se fosse stato lì davanti al piccolo gruppo di Anik!

Gli allievi non sono riusciti a oggettivare lo schema cercato. Sono allora tornati sull'idea iniziale alla base della generalizzazione fattuale vista nel punto 4.2.

1. Anik: Addizioni la prima figura…
2. Josh: (*interrompe*) (e) la seconda figura.
3. Anik: […] Non è la seconda figura… Non è la prossima figura?
4. Josh: Sì, la prossima.
5. Anik: (*riassumendo*) Tu addizioni la figura e la prossima figura.

Senza utilizzare lettere o esempi concreti, gli allievi giungono a oggettivare uno schema operazionale i cui «argomenti» o «variabili» non sono più numeri (come 10, 25, 100, ecc.). Sono oggetti generali. Sono designati con termini generici come «la figura», « la prossima figura». Questi termini costituiscono i mezzi semiotici di oggettivazione. Con l'ausilio di questi mezzi, l'obiettivo generale, che resta sempre inaccessibile direttamente, comincia a prendere forma: comincia a diventare un «oggetto di coscienza» per gli allievi. Anche se generali, questi oggetti restano tuttavia *contestuali*. Sono contestuali nel senso che il modo di designazione dipende ancora da proprietà spaziali che rimangono molto pregnanti, quelle di *prossimità*. Presuppongono ciò che Bühler (1979) ha chiamato *origo*, cioè un punto spazio-temporale (un centro, un punto di osservazione) che permette di parlare di «prossimo», di «alto», di «basso», «prima», «dopo», «destra», «sinistra», ecc.

In Radford (2003b), queste generalizzazioni sono state chiamate *generalizzazioni contestuali*. Più precisamente, una generalizzazione contestuale è una generalizzazione che assume la forma di schema i cui argomenti sono oggetti generali, ma che portano in sé le caratteristiche concettuali della situazione spazio-temporale dalla quale sono usciti.

Lo studio di queste generalizzazioni non simboliche fa luce sulla *natura* delle difficoltà che incontrano gli allievi debuttanti nel trovare formule algebriche in un contesto di generalizzazione. Infatti la generalizzazione algebrica esige una rottura molto profonda con i modi di significazione degli oggetti delle generalizzazioni fattuali e contestuali. Il linguaggio algebrico non possiede avverbi (per esempio «sempre») e non è abbastanza ricco da poter tradurre gesti e termini deittici importanti per l'azione di oggettivazione (dei termini come «ciò», «il prossimo», «qui», ecc.). Non può includere il ritmo e il movimento. Il linguaggio algebrico impone una sobrietà a chi pensa e si esprime, una sobrietà nei modi di significazione che è stata impensabile prima del Rinascimento. Impone ciò che abbiamo chiamato altrove (Radford, 2002) una *contrazione semiotica*. Presuppone anche la perdita dell'*origo*. Così, anche se certi allievi sono riusciti a esprimere il numero di stuzzicadenti nella figura n con la formula «n+(n+1)», dove «n» designa il numero della figura n e «n+1» quello della figura seguente (o «la prossima figura»), non erano ancora pronti a sopprimere le parentesi e ad addizionare le lettere perché ciò porterebbe alla distruzione del senso della designazione. A che cosa avrebbero potuto riferirsi un'espressione come «2n+1»? (vedere Radford 2000, 2002, 2003b).

5. Conclusione

Nell'introduzione, dicevamo che una delle motivazioni alla base dell'approccio semiotico antropologico (ASA) era di andare al di là della concezione di attività cognitiva offerta dalla tradizione classica cartesiana. Ispirandoci ai lavori della scuola socio-storica di Vygotski, alla fenomenologia di Husserl e all'epistemologia kantiana, siamo stati condotti a porre il problema dell'apprendimento come un problema di trasformazione degli oggetti concettuali culturali in oggetti di coscienza. Apprendere è prendere coscienza di un obiettivo generale secondo i modi della razionalità e della cultura. Le domande poste agli allievi, nell'attività di generalizzazione viste in questa sede, ci permettono di illustrare queste affermazioni. Queste domande non sono «naturali». A esse non si risponde con l'introduzione di *concetti quotidiani* (nel senso di Vygotski, 1985). Queste domande fanno parte di una tradizione matematica sofisticata, formatasi nel corso dei secoli. La presa di coscienza da parte dell'allievo avviene nel quadro di questa tradizione e della sua razionalità.

L'ASA teorizza il problema della trasformazione di oggetti culturali in oggetti di coscienza in relazione all'attività degli individui (Leontiev) e ai mezzi semiotici di oggettivazione. Mantiene il valore concettuale del concetto di schema kantiano, ma ne sottolinea la natura semiotica. Lo schema non è solo la sistemazione logica dell'azione del soggetto (Piaget). è anche, e soprattutto, l'azione mediata (Vygotski) dalla tecnologia dell'attività semiotica che offre possibilità e limiti per esprimere ciò che è esprimibile (l'*intentio* nella terminologia di Husserl). Se, come suggeriva Kant, lo schema si esprime come «regola», non lo fa né con i soli mezzi della teoria predicativa aristotelica né con le sole risorse della tradizione scritta. Il materiale semiotico dello schema è più ricco e variato: è fatto di movimento, di ritmo, di gesti, di segni scritti, di parole.

Lo schema è portatore di un'intenzione soggettiva che si materializza nei mezzi semiotici di oggettivazione, portatori silenziosi di un'attività cognitiva di generazioni passate e di tradizioni intellettuali che orientano i nostri modi di vedere il mondo. Questo oggetto generale che lo schema introduce non è un oggetto trascendente, ma il prodotto della riflessione degli individui del mondo che riflettono all'interno di una *praxis cogitans* storicamente costituita.

Dal punto di vista dell'insegnamento, vedere la generalizzazione matematica come processo semiotico significa, tra l'altro, prestare attenzione ai mezzi semiotici di oggettivazione, ai loro diversi livelli concettuali e ai problemi posti agli allievi nel passare da un livello all'altro.

Adorno, T. W.
Kant's Critique of Pure Reason. Stanford CA: Stanford University Press, 2001.

Bosch, M. et Chevallard, Y.
La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Vol 19 (1) (pp. 77-124.). Grenoble: La Pensée Sauvage, 1999.

Bühler. K.
Teoría del lenguaje. Traduit par Julián Marías. Madrid: Alianza Editorial, 1979.

Chevallard, Y.
La transposition didactique. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1985. Deuxième édition (1991).

Daval, R.
La métaphysique de Kant. Paris: Presses Universitaires de France, 1957.

Davydov, V. V.
Types of Generalization in Instruction: Logical and psychological Problems in the Structuring of School Curricula. Virginia: National Council of Teachers of Mathematics, 1990.

Hintikka, J.
La philosophie des mathématiques chez Kant. Paris: Presses Universitaires de France, 1980.

Ilyenkov, E.
The Concept of the Ideal. Dans: *Philosophy in the USSR: Problems of Dialectical Materialism*. Moscow: Progress Publishers, 1977a.

Ilyenkov, E. V.
Dialectical Logic. Moscow: Progress Publishers, 1977b.

Høyrup, J.
Algebra and Naive Geometry. An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought. *Altorientalische Forschungen*, **17** (pp. 27-69, 262-354), 1990.

Kozulin, A.
Vygotsky's psychology. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1990.

Lizcano, E.
Imaginario colectivo y creación matemática. Barcelona: Editorial Gedisa, 1993.

Mason, J.
Expressing generality and roots of algebra. Dans: N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dirs.) *Approaches to Algebra* (pp. 65-86). Dordrecht/Boston/London: Kluwer, 1996.

Radford, L.
On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, Vol. 17 (1), (pp. 26-33), 1997a.

Radford, L.
L'invention d'une idée mathématique: la deuxième inconnue en algèbre. *Repères* (Revue des instituts de Recherche sur l'enseignement des Mathématiques), juillet, No. 28 (pp. 81-96). (http://www.laurentian.ca/educ/lradford/), 1997b.

Radford, L.
On Signs and Representations. A Cultural Account. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, Vol. 35 (1), (pp. 277-302). (http://www.laurentian.ca/educ/lradford/), 1998.

Radford, L.:
El aprendizaje del uso de signos: una perspectiva post-vigotskiana. *Educación Matemática*, **11**(3), (pp. 25-53), 1999.

Radford, L.:
Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics,* **42** (3), (pp. 237-268), 2000.

Radford, L.
The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, **22**(2), (pp. 14-23). (http://www.laurentian.ca/educ/lradford/), 2002.

Radford, L.
On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought. Dans: M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger et V.

Cifarelli (dirs.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing* (pp. 49-79). Ottawa: Legas Publishing. (http://www.laurentian.ca/educ/lradford/), 2003a.

Radford, L.
Gestures, speech and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning*. **5**(1), (pp. 37-70). (http://www.laurentian.ca/educ/lradford/), 2003b.

Radford, L. (2004
Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità. *La Matematica e la sua didattica,* no. 1 (pp. 4-23).

Radford, L.
Del símbolo y de su objeto. Reflexiones en torno a la teoría de la conceptualización de Cassirer. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa,* sous presse-1.

Radford, L.
Kant, Piaget, and the Calculator. Rethinking the Schema from a Semiotic-Cultural Perspective. Dans: Michael Hoffmann, Johannes Lenhard, Falk Seeger (dirs.), *Activity and Sign – Grounding Mathematics Education*. Festschrift for Michael Otte. Dordrecht: Kluwer. (http://www.laurentian.ca/educ/lradford/), sous presse-2.

Vygotski, L. S.
Pensée et langage. Paris: Éditions sociales, 1985.

Wertsch, J. V.
Voices of the Mind. A Sociocultural Approach to Mediate Action. Cambridge, Ma.: Harvard University Press, 1991.

Zinchenko, V. P.
Vygotsky's ideas about units for the analysis of mind. Dans: *Culture, communication and cognition: Vygotskian perspectives*, J. V. Wertsch (dir.), Cambridge: University Press, (pp. 94-118), 1985.

Zweig, A.
Kant Philosophical correspondence 1759-99. Chicago: The University of Chicago Press, 1967.

5. Sguardo sulle Mostre Didattiche

Gianfranco Arrigo, Silvia Sbaragli

1. Mostre sulla geometria

Introduzione[1]

Le mostre sulla geometria sono il frutto di esperienze realizzate da gruppi di insegnanti che per diversi anni hanno seguito corsi gestiti da Silvia Sbaragli. L'obiettivo generale di queste proposte didattiche è essenzialmente centrato sul principio che occorre iniziare la formazione geometrica partendo da modelli di figure tridimensionali, per poi passare al piano e procedere con continui passaggi dallo spazio al piano e viceversa. Queste proposte didattiche sono presentate in modo approfondito nel testo di recente pubblicazione realizzato da Arrigo e Sbaragli (2004a). Di seguito diamo una sintesi teorica tratta da questo riferimento bibliografico.

[…] Se iniziamo dall'osservazione delle attività geometriche che tradizionalmente vengono proposte nella scuola dell'infanzia, si evidenzia la presenza diffusa di un'impostazione centrata principalmente su attività riguardanti il piano. Di solito, cioè, gli insegnanti richiedono ai bambini prestazioni 2D[2] e, solo successivamente, e non sempre, propongono esperienze 3D; lo stesso atteggiamento si riscontra tra gli insegnanti di tutti gli altri livelli scolastici.

Le attività vengono inizialmente affrontate nel reale, facendo vivere l'esperienza al bambino con il proprio corpo, successivamente viene chiesto agli allievi di riprodurre l'attività sul piano, sottovalutando così le notevoli difficoltà di rappresentazione (grafiche, manipolative, prospettiche, ...) che una richiesta di questo tipo comporta. Ancora, capita spesso di imbattersi in insegnanti che tentano di far riconoscere ai bambini, fin dai 4 anni, le diverse figure geometriche piane: triangoli, quadrati, rettangoli, circonferenze, … sottovalutando ancora una volta le difficoltà che possono incontrare i bambini ad astrarre, nell'immaginare, ad esempio, un oggetto reale (neces-

1. L'introduzione riporta alcuni stralci dell'articolo di Arrigo e Sbaragli (2004b).
2. Abbiamo scelto di sintetizzare la dicitura «bidimensionale» con 2D e «tridimensionale» con 3D.

sariamente 3D) senza spessore[3]*. Viene spontaneo domandarsi: da dove deriva quest'ansia di voler far apprendere prima possibile il nome delle figure piane, come se in esse fosse raccolta l'intera essenza della geometria? Sicuramente da uno sviluppo più o meno consapevole di una «logica euclidea» che parte dal 2D per poi passare al 3D, dato che il 2D richiede meno assiomi per essere trattato rispetto al 3D. Ma una cosa è l'impostazione dei matematici e un'altra è quella didattica. […]*

A nostro parere, risultano più «naturali», per i bambini di scuola dell'infanzia e primaria, modelli ed attività che rientrano nella geometria 3D (Cottino, Sbaragli, 2005), piuttosto che in quella 2D, anche se siamo consapevoli che ciascun oggetto o rappresentazione mostrata per far intuire un concetto matematico, non può che esserne solo un modello, e in quanto tale non potrà mai possedere le caratteristiche di idealità, perfezione, astrazione, generalità tipiche di un oggetto matematico.

[…] Acquista così un forte significato didattico coinvolgere i bambini, sin dall'infanzia, in attività che partono da figure solide per poi passare al piano, tutte le volte che lo si reputa necessario.

*[…] In effetti, pur partendo da figure solide, i bambini faranno già spontaneamente numerose considerazioni sul piano. Da questo punto di vista, il nostro «slogan» sembra essere diventato: «**Proponendo attività nello spazio, si tratterà anche il piano; proponendo attività nel piano, si rimarrà esclusivamente nel piano!**».*

[…] La nostra idea di fondo è anche quella di collegare i vari ordini di scuola per evitare l'insorgere di fratture o di fastidiose sovrapposizioni nell'itinerario di apprendimento della geometria.

[…] Da questo punto di vista, nella scuola media riteniamo che si possa prendere seriamente in considerazione un'impostazione legata all'insegnamento congiunto della geometria piana e di quella solida, presentando motivanti situazioni nelle quali l'insegnante cercherà di giustificare e di collegare tra loro gli apprendimenti avvenuti, fino ad arrivare ad una vera e propria interpretazione algebrica dei fatti geometrici, e viceversa, così da creare reti di sapere sempre più vaste che verranno poi organizzate in un sistema più strutturato nella scuola superiore.

[…] A supporto delle precedenti considerazioni, sono scaturite diverse proposte di attività che possono essere interpretate all'interno di un percorso verticale che può iniziare nella scuola dell'infanzia e continuare fino alla scuola superiore. Tali sollecitazioni sono state ampiamente sperimentate e valutate dagli insegnanti come «vincenti» da diversi punti di vista: coinvolgenti, motivanti e di forte valenza formativa.

Le mostre realizzate in continuità dalla scuola dell'infanzia alla scuola media a Marghera, Corinaldo, Morro d'Alba e Rescaldina, animate e coordinate da Silvia Sbaragli, sono un esempio concreto della messa in pratica di questi principi.

3. A tale proposito, viene spontaneo ricordare un'attività ancora presente sia nella scuola dell'infanzia che nella scuola primaria che consiste in un uso acritico dei famosi «blocchi logici» (varie forme di diverso colore, estensione, spessore) con i quali si insegna ai bambini ad osservare e a confrontare figure piane, per le quali si fa notare persino il diverso «spessore», quando poi, dopo qualche anno, si dovrà rompere l'immagine proposta, affermando che le figure piane possiedono solo due dimensioni.

Un mondo elastico a 3 anni

Annalisa Donadel, Edi Fabbian, Scuola dell'Infanzia «Giovanni Paolo I», Marghera (Venezia)

Già da diversi anni la nostra scuola dell'infanzia è impegnata in un progetto di educazione matematica nato dalla partecipazione ai Convegni di Castel San Pietro Terme: «Incontri con la matematica» ormai giunti alla diciottesima edizione.

In fase di programmazione è sempre presente in noi insegnanti il desiderio di sperimentare ambiti nuovi da proporre ai bambini, oltre all'interesse di coinvolgere i genitori che in questi anni, con grande curiosità, ci hanno aiutato nei vari percorsi prestandoci un'effettiva collaborazione.

Nell'anno scolastico 2001/2002, si è pensato di predisporre un coinvolgente progetto per i bambini di tre anni che fosse basato sull'uso di diversi materiali elastici tridimensionali con lo scopo di raggiungere obiettivi nuovi per bambini così piccoli.

È nato così il progetto: «*Un mondo elastico a 3 anni*» realizzato da gennaio a maggio dopo che i bambini avevano completato l'inserimento nella nostra scuola.

I materiali proposti sono stati:

gommapiuma, spugna, lattice, palloncini, plastica per raggiungere i seguenti obiettivi:

- riconoscere i diversi materiali e le loro proprietà
- fare confronti
- saper osservare
- scoprire proprietà invarianti per stiramenti elastici (il numero di elementi, l'appartenenza, …) e proprietà varianti (l'altezza, la lunghezza, la forma, …).
- saper valutare trasformazioni elastiche.

Fondamentale è stato l'uso specifico dei materiali elastici tridimensionali che hanno permesso ai bambini di scoprire oggetti attraverso il gioco, la manipolazione, la trasformazione degli stessi, le loro proprietà varianti e invarianti.

Ad esempio le sedute motorie con i materassi e i cubi di gommapiuma, hanno permesso ai bambini di scoprire, partendo dal vissuto, le proprietà dei materiali esprimendole in modo spontaneo: «*...Ho giocato con la gommapiuma è morbida, è grande e va giù...*» (Mattia, 3 anni).

Figura 1: Panoramica della mostra di Marghera

Figura 2: Plastico della scuola

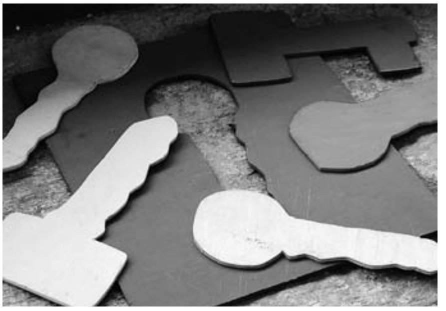


Figura 3: Qual è la forma giusta?

Tipi rotondi e tipi spigolosi. Esperienze in 3D
Scuola dell'infanzia, primaria e media dell'Istituto Comprensivo di Corinaldo in rete con le scuole di Jesi, Ostra, Ripe e Senigallia

Le attività che presentiamo sono state sviluppate da insegnanti di scuola dell'infanzia, primaria e media, che ormai da diversi anni si riuniscono periodicamente per discutere e confrontare pratiche didattiche per l'insegnamento della matematica. Il percorso progettato a seguito di un'attività di formazione propone una serie di esperienze per lo studio della geometria a partire dallo spazio anziché dal piano. Poiché l'esperienza concreta dei bambini avviene nello spazio 3D, abbiamo condiviso l'idea di fondo di trattare per prime le figure solide. Per questo motivo, senza perdere di vista il fatto che comunque le figure geometriche sia 3D che 2D sono astrazioni, abbiamo proposto inizialmente attività con i solidi e poi siamo passati a considerare le figure piane, stravolgendo un po' la comune prassi didattica che dal 2D passa alle figure 3D.

Nella mostra sono evidenziate le quattro fasi del percorso didattico, con proposte per i diversi livelli scolastici:

- Giochiamo nello spazio
- Passiamo dallo spazio al piano
- Torniamo dal piano allo spazio
- Sbizzarriamoci nello spazio

Giochiamo nello spazio

Giochiamo con i solidi; ricerchiamo le proprietà; raccontiamo e inventiamo storie fantastiche; costruiamo solidi «scheletrati».

Le scatole e altri solidi di uso comune si sono rivelati materiali utili, a tutti i livelli scolastici, sia per il gioco libero sia per fare le prime osservazioni sulle caratteristiche dei «tipi spigolosi» e dei «tipi rotondi».

La ricerca di contesti significativi, spesso anche fantastici, ha favorito il coinvolgimento e la partecipazione, facilitando anche l'acquisizione e l'uso di termini specifici.

Con i modelli di solidi «scheletrati», costruiti dai bambini più piccoli con palle di polistirolo e tubi di plastica per riuscire anche ad entrarci dentro e dai ragazzi della scuola media con palline di pongo e stuzzicadenti o altri materiali, è stato possibile scoprire la relazione di Eulero per i poliedri.

I progetti di alcuni alunni del primo ciclo di scuola primaria evidenziano che per costruire alcuni solidi come la sfera, il cono e il cilindro non è stato possibile utilizzare gli stuzzicadenti, ma esclusivamente il pongo.

I ragazzi della scuola media hanno scoperto che certe strutture esistevano già in natura milioni di anni fa…

Passiamo dallo spazio al piano

Apriamo e distendiamo sul piano le nostre scatole; tiriamo e schiacciamo i solidi a molle; costruiamo i cinque poliedri regolari e le possibili tassellazioni uniformi.

Tagliando ed aprendo le scatole siamo passati dal 3D al 2D e abbiamo potuto osservare le caratteristiche delle figure piane e degli sviluppi di alcuni poliedri.

Con lo schiacciamento dei solidi «scheletrati» costruiti con molle, abbiamo verificato la validità della relazione di Eulero per le mappe nel piano. «Giocando» con gli angoli è stato possibile scoprire quanti sono i poliedri regolari, quando e come è possibile tassellare un piano in modo uniforme con lo stesso tipo di poligono regolare.

Ritorniamo dal piano allo spazio

Siamo tutti cappellai… un po' matti; giochiamo con gli origami; scopriamo la geometria nell'arte; costruiamo i possibili sviluppi del cubo.

Queste attività, da quelle proposte in forma più intuitiva ai bambini più piccoli, a quelle via via più consapevoli e rigorose, hanno favorito l'osservazione e la scoperta delle caratteristiche delle figure piane e solide, la costruzione di immagini mentali e lo sviluppo di un linguaggio sempre più specifico.

Sbizzarriamoci nello spazio

Il gioco, utilizzato come pratica didattica, è una formidabile strategia per suscitare l'interesse e la motivazione a tutti i livelli scolastici ed è un ottimo mediatore e produttore di conoscenze.

In questa sezione sono presenti giochi da proporre, con le modalità ritenute più opportune, a bambini e ragazzi di diverse età, considerando che uno degli obiettivi che dovremmo raggiungere è che i nostri alunni si divertano nel fare matematica e amino questa disciplina.

Conclusioni

La pratica laboratoriale ci è sembrata la più idonea al nostro scopo, perché in laboratorio bambini e ragazzi sono protagonisti nella costruzione sia degli oggetti sia delle conoscenze.

A mano a mano che i bambini «lavoravano» li abbiamo invitati a ragionare ad alta voce, a descrivere verbalmente quello che osservavano, a ripercorrere i procedimenti seguiti e a rivederli criticamente usando l'errore come risorsa.

Il linguaggio si è arricchito di termini specifici, che in modo naturale sono entrati a far parte del bagaglio linguistico di ciascun alunno.

Le conoscenze, progressivamente, sono diventate sempre più rigorose dal punto di vista scientifico.

I lavori presentati non hanno certo la pretesa di esaurire un intero curricolo di geometria: sono esperienze che invitano a riflettere su come sia possibile affrontare la geometria solida in modo diverso, già a partire dalla scuola dell'infanzia, come gioco, scoperta, discussione, disegno, coinvolgendo gli alunni in attività concrete, stimolanti e interessanti.

Vogliamo sottolineare l'importanza che le proposte didattiche siano il più possibile diversificate, per non incorrere nella creazione di stereotipi e misconcetti; dobbiamo infatti essere consapevoli che ogni *modello* che proponiamo ha i suoi limiti, poiché rappresenta una semplificazione della realtà; tuttavia, proprio per questo, offre la possibilità di concentrare l'attenzione sull'aspetto che in quel momento vogliamo considerare.

Ci auguriamo che le esperienze e i protocolli in mostra siano materiale di riflessione e stimolo per intendere la geometria in un modo nuovo, più vivo e affascinante, così come è stato per noi.

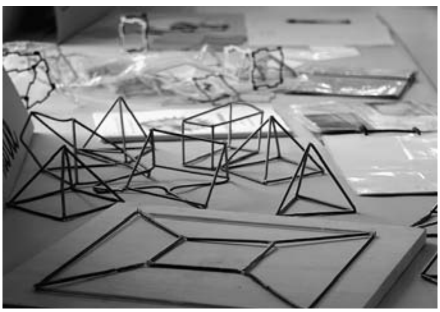


Figura 4: «Scheletrati» di molle distesi sul piano

Figura 5: Il gioco «schiena contro schiena»

Figura 6: Il «cubettone» dipinto di rosso

Figura 7: Storie fantastiche… con i solidi

Figura 8: Tipi rotondi e tipi spigolosi

Figura 9: Solidi… in maschera

Figura 10: Animali… di solidi

Strada facendo…
Scuola dell'infanzia «M. Pieralisi» Morro D'Alba (Ancona); Istituto Comprensivo Statale «A. Colocci» San Marcello (Ancona)

Strada facendo… è il titolo che abbiamo voluto dare alla mostra, non solo perché questo è il titolo del progetto che nell'anno scolastico 2001-2002 ha coinvolto tutto il nostro Istituto Comprensivo (scuola dell'infanzia, primaria e media) alle prese con l'educazione stradale e comportamentale in genere, ma anche perché vogliamo ripercorrere, attraverso un lavoro di sintesi, tutto il tragitto di sperimentazione vissuto fin dal 1997-1998.

La mostra si compone di 5 sezioni che hanno come filo conduttore il ruolo di «tutor» svolto dai bambini di 5 anni, che in funzione di «maestri», hanno guidato i più piccoli nell'esplorazione dello spazio interno ed esterno alla scuola:

1. Allestisco il mio spazio
2. Oggi il maestro sono io
3. Esploriamo il giardino e il bosco
4. Il percorso degli alberi spogli
5. Arianna e il plastico della scuola

Allestisco il mio spazio

Quando nel lontano '97 siamo partiti con la sperimentazione ministeriale *«Abitare lo spazio»* avevamo come obiettivo quello di rendere «abitato» lo spazio del nostro plesso, fino a quel momento privo di storia, di punti di riferimento, di significatività, essendo di recente costruzione.

La prima tappa è stata quella di rendere protagonisti i bambini nell'allestimento del loro spazio, perché lo sentissero come proprio, lo padroneggiassero e lo associassero ai loro sentimenti, ai loro bisogni di protezione e di sicurezza. La nostra attenzione era volta a leggere le caratteristiche, i comportamenti, i bisogni di ogni bambino per valorizzarne l'identità in modo che ognuno si sentisse accolto in un luogo *che parlasse proprio di lui.* Nella sezione *«Allestisco il mio spazio»* abbiamo raccontato, con foto e disegni dei bambini, il percorso vissuto.

Oggi il maestro sono io

Abbiamo creato l'ambiente di vita personalizzato dove ognuno poteva ritrovare i segni di sé, le tracce del suo fare, gli oggetti della propria affettività, costruendo così lo «sfondo istituzionale».

La partecipazione attiva all'organizzazione del contesto educativo, la co-costruzione di regole (stabilire ciò che si fa e ciò che non si fa in un certo luogo, in un certo momento, come ci si accede, in quanti ci si accede...), di funzioni, di ruoli (*«il maestro»*), di riti, ha permesso e permette ai bambini di controllare consapevolmente il proprio comportamento e di conseguenza il proprio apprendimento.

Nella sezione *«Oggi il maestro sono io»* abbiamo voluto ripercorrere le piste messe in atto per valorizzare l'autonomia personale e il senso di responsabilità dei bambini di 5 anni che diventano «maestri»: guidano i più piccoli, comunicano loro le regole di ogni ambiente, li aiutano, gestiscono le attività di routine: ingresso, servizi, pranzo, uscita, gioco.

Ampio è il ventaglio delle competenze matematiche che la quotidianità chiede ai bambini di mettere in gioco. Osservandoli mentre mettono in fila o in riga gli amici, mentre li aiutano a vestirsi o a svestirsi, mentre fanno la conta per…, possiamo cogliere quanto sanno dei vari aspetti della matematica.

Esploriamo il giardino e il bosco

Esperienze motivanti, in spazi esterni significativi, hanno permesso ai bambini di costruire e rafforzare il *sapere spaziale*, sviluppando la capacità di collocarsi e muoversi in un ampio spazio.

I diversi *percorsi* proposti li hanno aiutati nell'esplorazione dello spazio vicino e lontano per collocarvisi e muoversi consapevolmente. È risultato molto significativo aiutarli a individuare il punto di partenza, il punto di arrivo, i punti di riferimento (le case, il giardino, il marciapiede, il palo della luce, il cassonetto dell'immondizia…).

Questa fase ha stimolato l'individuazione di forme e proprietà degli oggetti e degli elementi incontrati nell'ambiente (cortecce, erbe aromatiche…), inoltre ha promosso l'abilità di orientamento e direzionalità, l'uso appropriato e consapevole di termini che esprimono la direzione, il verso, le relazioni spaziali *(davanti, dietro; a destra di…, a sinistra di…; in alto, in basso…).*

Il percorso degli alberi spogli

I bambini hanno realizzato il plastico che riproduce *«Il percorso degli alberi spogli»*, che ha richiesto una notevole dose di riflessione per collocare nella giusta posizione gli elementi dell'ambiente osservati lungo la strada e per riuscire a ricostruire tridimensionalmente un percorso circolare in cui il punto di partenza e di arrivo coincidevano. Abbiamo potuto notare infatti quanto ampia sia la difficoltà che incontrano i bambini nel ricostruire un percorso circolare, a differenza di quello lineare in cui si parte, si giunge alla meta e poi... si ritorna per la stessa strada.

Arianna e... il plastico della scuola

Questa fase è stata per i bambini la più entusiasmante, perché, in una cornice fantastica, li ha costretti a riflettere su spazi che sono ormai abituali per loro e che presentano particolarità che, a volte, proprio per la quotidianità del vissuto, rischiano di rimanere inosservati. I bambini sono stati costretti a «tradurre» il mondo reale in proporzioni ridotte: *«…nel plastico mica devi fa' a grandezza naturale...»* (Andres)*; «…mica devi fa' la grandezza uguale, uguale, uguale»* (Giorgia), a compiere manipolazioni, osservazioni sulle posizioni, sulle relazioni…

È stato in pratica richiesto loro di concettualizzare lo spazio.

Il gioco del risparmio nello spazio

L'idea di **«giocare a risparmiare colore»** nasce dall'esigenza di effettuare percorsi dallo spazio al piano. Ci siamo avventurate a far giocare i bambini nello spazio tramite scatole di forme e dimensioni diverse. Le finalità da raggiungere erano:

1. far riconoscere ai bambini le caratteristiche dei poliedri e individuare i loro elementi costituenti (spigoli, vertici e facce);
2. far intuire il concetto di facce confinanti: (facce con uno spigolo in comune);
3. far colorare i poliedri chiedendo che due facce confinanti abbiano un colore diverso;
4. far colorare i solidi con la condizione che due facce confinanti abbiano colori diversi e chiedendo di utilizzare il minor numero possibile di colori.

In questa esperienza è stato coinvolto tutto il gruppo dei 5 anni d'età composto di 10 bambini. Le attività sono state strutturate secondo le seguenti fasi:

Prima fase. Gioco libero esplorativo: si è iniziato con la ricerca, negli ambienti scolastico ed extrascolastico, di scatole di forma e grandezza diversa. Successivamente si è realizzato un gioco libero di costruzione a piccoli gruppi e di prime intuizioni.

Seconda fase. Individuazione di spigoli, vertici e facce: con l'aiuto delle insegnanti, i bambini sono passati dall'uso di parole spontanee a quello di termini convenzionali, per esempio: «spigolo» al posto di «vertice», «vertice» per « punta»; «faccia» per «parete». Successivamente abbiamo giocato a ricercare nell'ambiente vissuto gli spigoli, i vertici e le facce, con attività del tipo: «strega comanda …vertice! …spigolo! …faccia!» per rafforzare l'acquisizione della terminologia. Per familiarizzare i bambini con i nuovi termini siamo passati al conteggio dei vari elementi usando strategie per riuscire a riconoscerli (colorazione, ricoprimento con pongo, …). I bambini hanno notato che un'importante differenza tra i solidi sta nella forma delle facce. Si sono poi sbizzarriti nel disegnare su ogni faccia un'espressione diversa. *«Le facce in gioco»* è stato lo sfondo per il Laboratorio teatrale nel quale i bambini hanno inventato e drammatizzato storie per animare le scatole.

Terza fase. La colorazione delle scatole: inizialmente i bambini hanno colorato liberamente le facce delle scatole usando molti colori; successivamente, dopo aver spiegato che cosa si intendeva per facce confinanti, si è chiesto di colorarle in modo che facce confinanti avessero colori diversi.

Quarta fase. Il gioco del risparmio: dopo il confronto si è ripetuta l'esperienza con l'intento di risparmiare i colori. Colorando scatole di diversa forma i bambini si sono accorti che non sempre è valida la congettura che avevano individuato per il cubo e il parallelepipedo: *«la teoria delle facce opposte»*, che non vale più ad esempio per una scatola *«a forma di bomba»* (prisma esagonale).

Il gioco è continuato nella classe prima della scuola primaria, con consegne più impegnative, come il gioco del risparmio negli sviluppi dei solidi. A rendere più piacevole il gioco hanno contribuito anche i ragazzi di prima media che, con le loro «magie», hanno permesso ai bambini di passare dallo spazio al piano. Inoltre gli allievi delle medie hanno mostrato ai più piccoli attività piegando fogli, permettendo loro di formulare previsioni, di usare la fantasia e l'immaginazione di saper vedere con «gli occhi della mente», di fare matematica divertendosi.

Giocando con la matematica in continuità

Alessia Galli, Susy Bellagamba, Istituto Comprensivo «A. Collocci» di San Marcello (An)

I solidi e il colore alla scuola primaria

Queste esperienze proposte alla scuola primaria ricalcano e approfondiscono le attività realizzate nella scuola dell'infanzia di Morro d'Alba.

Riportiamo di seguito l'elenco degli obiettivi e delle attività proposte.

— Gli obiettivi sono stati così pensati:
- Conoscere e riconoscere gli elementi costitutivi dei poliedri: spigoli, vertici e facce.
- Intuire e interiorizzare i vari concetti geometrici quali: volume, estensione superficiale,…
- Usare correttamente il linguaggio matematico.
- Osservare, descrivere, costruire e colorare i solidi di diverse forme.
- Passare dal tridimensionale al bidimensionale e viceversa.
- Sviluppare immagini mentali.

— Le attività svolte sono state le seguenti:
- Gioco libero con scatole di diverse forme e dimensioni per scoprire caratteristiche, affinità, differenze, elementi costitutivi.
- Costruzione degli «scheletrati», con progressivo aumento della difficoltà, facendo previsioni sul numero di spigoli e di vertici occorrenti.

- Costruzione del cubo con vari materiali: plastilina, cartoncino, cannucce, pongo.
- Costruzione di solidi vari con il cartoncino.
- Giochi di immagine mentale: da un determinato sviluppo piano, quale solido si formerà? Da un certo solido, quale sviluppo si otterrà?
- Gioco della colorazione: ogni faccia con un colore diverso, in modo da analizzare il numero e la forma delle facce dei vari solidi.
- Gioco del risparmio del colore: colorazione di solidi costruiti in modo da usare il minor numero di colori possibili facendo sì che le facce confinanti (con uno spigolo in comune) abbiano colore diverso.
- Formulazione di ipotesi: quanti colori serviranno? Perché?
- Gioco libero con i cubetti di legno.
- Costruzione libera di «condomini» con cubi di legno.
- Gioco «schiena contro schiena».
- Costruzione di «condomini» formati da cubetti nel rispetto di parametri fissati dall'insegnante e/o dai compagni, riguardanti: volume, forma della base, estensione della base…
- Costruzione del quartiere di «cubilandia».
- Lavoro di gruppo finalizzato alla ricerca e all'individuazione di tutti i solidi platonici.
- Costruzione dei solidi platonici attraverso materiali strutturati e no.
- Colorazione dei solidi platonici seguendo le regole del gioco del risparmio.

I solidi e il colore alla scuola media
Stefania Battisti, Scuola media statale «C. Colocci» di San Marcello (AN).

Il progetto nasce dall'esigenza di far acquisire le nozioni di geometria solida già dalla prima classe della scuola media in continuità con le attività svolte nella scuola dell'infanzia e primaria. Questo obiettivo è stato perseguito dando particolare rilevanza all'aspetto manipolativo.

Di seguito riportiamo schematicamente alcune attività proposte.

Figure solide

In questa fase abbiamo costruito «scheletrati» di varie forme prendendo come modelli scatole comuni di prodotti che si trovano in commercio. Siamo dunque passati all'osservazione delle loro forme; all'analisi dei loro elementi costitutivi: facce, spigoli, e vertici; all'esplorazione dello spazio occupato dallo «scheletrato» e dalla relativa scatola, permettendo così di rilevare, tramite il confronto, le differenze e le analogie e le caratteristiche specifiche di questi due tipi di solidi. Successivamente abbiamo riprodotto sul piano tramite disegni i solidi «pieni» e quelli «scheletrati».

Cubo e i suoi diversi sviluppi piani

In questa attività abbiamo «aperto» scatole cubiche tagliando il minor numero possibile di spigoli necessari, per poi distendere lo sviluppo ottenuto sul piano. Siamo poi passati ad osservare le varie figure piane ottenute formate dai sei quadrati che rappresentavano le facce del cubo. Si sono poi forniti agli alunni alcuni sviluppi «veri» e altri «falsi» del cubo e si è chiesto di individuare con gli «occhi della mente» quali consentivano di ottenere cubi. Finalmente, siamo poi passati alla ricerca degli 11 sviluppi piani del cubo.

Infine abbiamo chiesto agli alunni di progettare sviluppi di solidi diversi dal cubo.

Piani di simmetria: mediane, diagonali e traversi

Sulle facce opposte di un cubo di polistirolo abbiamo individuato le mediane parallele di due facce opposte aventi la stessa direzione e abbiamo poi tagliato il cubo lungo un piano che passa per queste mediane. Il cubo resta così diviso in due parti congruenti, simmetriche rispetto al piano del taglio, le cui sezioni piane ottenute hanno forma di quadrati. Gli alunni hanno poi notato che lo stesso risultato si può ottenere anche in modi diversi.

Abbiamo individuato su di un cubo di polistirolo le diagonali di due facce opposte aventi la stessa direzione e abbiamo tagliato il cubo secondo un piano che passa per queste diagonali. Il cubo resta così diviso in due parti congruenti, simmetriche rispetto al piano del taglio e abbiamo osservato che le sezioni piane così ottenute hanno forma di rettangolo. Gli alunni hanno poi notato che tale risultato si può ottenere anche con tagli diversi.

Su diversi cubi di polistirolo abbiamo individuato in posizioni particolari 3, 4, 5 o 6 punti e abbiamo tagliato lungo piani che passano per questi punti.

Abbiamo così ottenuto sezioni piane rispettivamente a forma di triangoli, quadrilateri di diversi tipi, pentagoni, esagoni.

Istruiti per istruire. Il nostro obiettivo: insegnare

Gli alunni di scuola media hanno preparato alcune lezioni per gli alunni di quinta primaria, relative a assi e a piani di simmetria. Gli allievi, a gruppi di quattro, hanno programmato e simulato le lezioni sfruttando diversi materiali: fogli rettangolari, pennarelli, cannucce, fogli di compensato, scatole da scarpe, ...

Per quanto riguarda gli assi di simmetria, gli allievi hanno impostato attività basate su piegature di sagome a forma di rettangolo, quadrato, rombo, triangolo isoscele ed equilatero. Inoltre, sono stati usati vari materiali per individuare i diversi piani di simmetria del cubo e le sezioni così ottenute.

Gli alunni di scuola primaria si sono poi espressi sulla qualità dell'insegnamento ricevuto dai compagni della scuola media, compilando pagelle con valutazioni sui contenuti proposti e sull'uso della terminologia utilizzata.

Dalla matematica… all'urbanistica

Prof. Alberto Marchetti, Scuola media «Colocci», Istituto Comprensivo San Marcello (AN).

Questo progetto si è ben inserito anche nell'ambito del programma curriculare di Educazione Tecnica delle classi seconde (il territorio, la città, il piano regolatore generale, le assonometrie).

All'interno di due classi è stato chiesto a ogni alunno di scegliere sei compagni che potessero fungere da capogruppo; è nata così una graduatoria, che, con semplici regole, ha permesso di costituire sei gruppi di tre-quattro persone per ogni classe; in questo modo i ragazzi sono stati coinvolti quasi in prima persona nelle diverse esperienze.

Si sono così formati dodici gruppi di lavoro (sei per ognuna delle due classi) a cui sono state fornite in maniera del tutto casuale le zone urbanistiche su cui operare (centro, periferia, quartiere isolato) e la tipologia della zona d'intervento (pianura o collina). L'obiettivo era di realizzare costruzioni formate da cubetti di legno tutti uguali tra loro di spigolo 5 cm, rispettando però particolari indici urbanistici.

Come nei piani regolatori, i ragazzi si sono dotati di opportuni parametri per la realizzazione delle costruzioni come: altezza massima, estensione di base opportuna, distanze tra i confini, …in modo da avere un maggior numero di possibilità di combinazione dei cubi.

Lo studio dei parametri a cui attenersi è stato eseguito dai singoli gruppi con suggerimenti, se necessario, dell'insegnante. I ragazzi hanno così ideato e realizzato solidi complessi, che rappresentano edifici, unendo tra loro un certo numero di cubetti.

Ognuno dei dodici gruppi, una volta realizzate le proprie costruzioni, le ha disposte, secondo il progetto cartaceo, all'interno del quartiere da realizzare.

Il plastico, una volta disposti i modelli, è stato completato con le strade e quant'altro si chiedeva nella bozza di PRG (diversa per ogni gruppo) di cui si è dotato ogni gruppo di lavoro.

Oltre al plastico ogni gruppo ha eseguito una relazione di presentazione del lavoro svolto, evidenziando gli studi effettuati: il calcolo delle volumetrie, delle superfici coperte… per dimostrare così di aver rispettato le regole imposte e per evidenziare lati positivi e negativi del progetto realizzato.

Successivamente, abbiamo fatto ruotare i gruppi sui vari plastici per permettere ai ragazzi di scoprire sia le proprietà già trovate dai loro compagni, sia nuove proprietà che per gli altri erano risultate poco evidenti. Tutto ciò ha reso poi possibile un confronto finale, che ha permesso di rafforzare le conoscenze acquisite e di vedere con occhi altrui, per riuscire ad intuire anche aspetti che in precedenza non erano stati afferrati.

Figura 12: Mago Cubetto: giochi coi cubi


Figura 13: Cubolandia e Piano regolatore

Figura 14: Cubolandia e Piano regolatore

Figura 16: Colorare le facce… al risparmio

Camminando insieme nello spazio siamo giunti a…
matematica e lingua: una storia dentro l'altra
Istituto Comprensivo «A. Manzoni» (Rescaldina, Milano)

Camminando insieme abbiamo costruito una storia comune nell'organizzazione delle situazioni scolastiche, nello strutturare e proporre attività, nell'affrontare le difficoltà di apprendimento degli allievi, sfruttando come chiave di lettura la didattica della matematica. Abbiamo così realizzato un percorso ricco e motivante che ha tenuto conto delle potenzialità di tutte le figure che entrano nel processo di insegnamento/apprendimento: gli insegnanti, gli alunni dell'Istituto Comprensivo «A. Manzoni» di Rescaldina e il sapere in gioco.

I tre ordini di scuola: infanzia, primaria e media si sono confrontati tenendo conto della verticalità dell'apprendimento, tenendo sempre ben presenti le specificità proprie di ogni età degli alunni. Si sono così strutturate motivanti situazioni a-didattiche, pensate insieme ad un esperto di didattica della matematica, che hanno aiutato i docenti a effettuare un produttivo cambiamento nel loro modo di insegnare.

Questa modalità di lavoro ha caratterizzato l'intero Istituto e si è concretizzata nel progetto di Laboratorio Geometrico relativo allo Spazio e nelle interessanti esperienze interdisciplinari di Matematica e Lingua.

Il *laboratorio* ha rappresentato un ambiente in cui gli alunni e gli insegnanti si sono mossi più liberamente rispetto all'ambiente classe, in un'atmosfera serena e costruttiva. Questo ha fatto sì che nei bambini si favorisse maggiormente la creatività, l'intuizione, il piacere di scoprire, ricercare, relazionarsi, interagire, argomentare…

Il laboratorio *geometrico* è stato pensato cercando di svincolare il bambino dal mondo concreto per consentirgli di raggiungere un buon livello di astrazione, favorendo così la concettualizzazione di oggetti rientranti in àmbito matematico.

Insieme nello spazio perché gli alunni, appartenenti a diversi ordini di scuola, hanno realizzato nello «spazio» svariate situazioni di gioco che sono state la base di un'affascinante avventura conoscitiva nel mondo della geometria.

Hanno partecipato a questa esperienza:

- alcune sezioni di scuola materna di età eterogenea (3-4-5 anni).
- tutti gli alunni della scuola primaria suddivisi in gruppi di lavoro formati da bambini appartenenti al 1° e al 2° ciclo.
- alcune sezioni di scuola media.

Questo primo anno di laboratorio geometrico è stato dedicato prevalentemente a come/cosa sapere, come fare, come organizzare le scoperte. A questo progetto si sono dedicate mediamente due ore settimanali per l'intero anno scolastico.

Camminando insieme nello spazio, siamo arrivati al progetto: «Matematica e lingua: una storia dentro l'altra». Questo progetto ha coinvolto per la scuola primaria anche le insegnanti di lingua, dato che l'organizzazione interna dell'Istituto ha previsto per la scuola primaria tanti gruppi di lavoro quanti i docenti presenti nel plesso. Tutto ciò ha significato la necessità per le insegnanti di lingua di avventurarsi nel laboratorio geometrico, individuando insieme agli insegnanti di matematica una ricca «produzione interdisciplinare» che ha coinvolto anche le insegnanti di scuola dell'infanzia e gli insegnanti di matematica ed educazione tecnica della scuola media.

La presenza di una persona esperta ci ha dato la possibilità di realizzare questo progetto come narrazione del nostro modo di essere, riuscendo così a creare la condizione adatta a rendere interessante, comprensibile, significativo, divertente il nostro lavoro.

Nei diversi gruppi sono nate produzioni linguistiche, seguendo le tipologie testuali che si stavano affrontando in classe:

- Scuola dell'infanzia e 1° ciclo di scuola primaria: storie e fiabe
- 2° ciclo di scuola primaria: lettere e poesie
- Scuola media: testo regolativo e informativo; creazione del «gioco del Tabù Matematico».

Visitando la mostra si possono leggere le diverse produzioni linguistiche aventi tutte come sfondo il mondo della geometria.

Questo lavoro continuerà il prossimo anno perché dallo spazio tridimensionale passeremo al piano, continuando questa affascinante avventura conoscitiva che ha rappresentato per noi docenti e per gli allievi un nuovo e stimolante modo di apprendere.

Figura 17: Solidi ovunque

Figura 18: Acrostici: tra lingua e matematica

Figura 19: Matematica e lingua

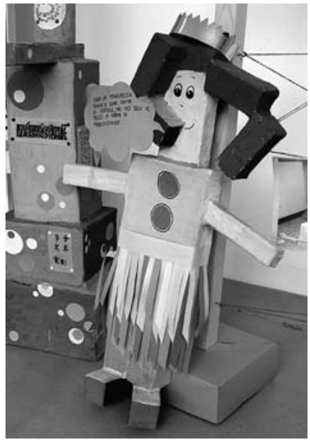


Figura 20: La storia della bambola di solidi

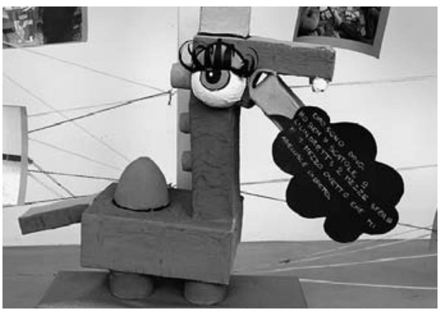


Figura 21: Draghetto di solidi

Figura 23: Cassetta delle lettere di solidi «stravaganti»

2. *Chessquito*: avvio al gioco degli scacchi[4]

Rosemarie Udriot, Scuola dell'infanzia, Sonvico (TI) – Bernardo Mutti, Scuola elementare, Lugano/Besso

Chessquito è un gioco d'iniziazione al gioco tradizionale degli scacchi, ideato per bambini e adulti debuttanti. S'impara a concentrarsi, a conoscere e a spostare le pedine e soprattutto a elaborare strategie varie.

La mostra è stata presentata con quaranta pannelli esplicativi e materiale preparato dagli allievi e dai docenti dei due ordini di scuola: scuola dell'infanzia (docente Rosemarie Udriot-Sonvico) e scuola elementare (docente Bernardo Mutti-Lugano/Besso).

Il percorso proposto nella scuola dell'infanzia era sviluppato in particolare con i bambini del terzo livello (5-6 anni) anche se, naturalmente in minore misura,

4. Tutto il lavoro è stato raccolto in un fascicolo acquistabile presso l'associazione ticinese scuola attiva (ATSA 076 570 57 95).

le altre fasce di età hanno trovato lo spazio adeguato: vi partecipavano nelle proposte che comprendevano non solo verbalizzazioni e rappresentazioni ma anche esperienze concrete di tipo psicomotorio. Il vissuto fisico è particolarmente importante per sviluppare la valenza formativa geometrica e logica.

Sui pannelli si leggevano fasi di lavoro corporeo-manipolative e rappresentative e una rete concettuale, l'orientamento spaziale (spostamenti e localizzazioni) e come usare termini e nomi che permettono la comunicazione univoca.

L'attività esposta ha dimostrato che già con i bambini della scuola dell'infanzia si può giocare a scacchi con interesse e passione.

Il percorso proposto nella scuola elementare, 1° e 2° ciclo, ha suggerito che si può organizzare un programma di continuità educativa e cognitiva di tipo verticale.

Vola sulle scacchiere e sulle griglie ha presentato diversi giochi in successione, che partono dalla costruzione e dall'uso della retta dei numeri relativi fino alla costruzione e all'uso di griglie e scacchiere, mobili o fisse, di diverso tipo e dimensione, e del piano cartesiano.

Figura 24: Piccola scacchiera per piccoli scacchisti

Figura 25: Allenamenti per scacchisti in erba

Numeri grandi in prima primaria
Ines Marazzani, NRD Bologna, Italia

Nel 1999, presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna, si è formato un gruppo di studio diretto da Bruno D'Amore e da Martha Isabel Fandiño Pinilla. Il gruppo era composto, inoltre, da 17 insegnanti di scuola primaria: Lucia Baldazzi (Porto Fuori, Ra), Luigia Cottino (Milano), Erminia Dal Corso (Lugo, Vr), Bruno D'Amore (Bologna), Martha Isabel Fandiño Pinilla (Bologna), Margherita Francini (Arezzo), Rita Fusinato (Verona), Claudia Gualandi (Milano), Giuliana Liverani (Classe, Ra), Farida Magalotti (Cervia, Ra), Anna Maria Maraldi (Cesena, Fc), Ines Marazzani (Colfiorito, Pg), Anna Rita Monaco (Roma), Gabriella Pacciani (Arezzo), Adriana Ponti (Milano), Laura Prosdocimi (Rimini), Chiara Stella (Vr), Anna Traverso (Momperone, Al), Nadia Vecchi (Tollegno, Bi).

Il gruppo dei 19 (17+2) sperimentatori-ricercatori si è occupato di uno dei temi della Matematica che, senza ombra di dubbio, occupa un posto centrale nelle attività dei docenti e in quelle degli allievi a scuola: del numero e, precisamente, competenze numeriche possedute dai bambini in ingresso alla scuola primaria.

Gli studi portati avanti dai membri del gruppo partivano dalla consapevolezza che tutti gli insegnanti della scuola primaria, nei primi giorni di frequenza dei bambini di classe prima, si preoccupano di compiere una ricognizione per stabilire quali siano le competenze che i bimbi possiedono sui numeri.

Sembra però che gli insegnanti non si preoccupino davvero di cercare le competenze possedute dai bambini perché (sembra) sappiano già quale strada percorrere a iniziare dalla classe prima. Una strada di certezze, per l'insegnante, perché lastricata di convinzioni dettate dalla prassi didattica che li ha visti per anni lavorare in un certo senso.

Quindi, in realtà, iniziano il cammino scolastico pensando di dover costruire competenze supponendo che il bambino di questa età non ne possieda affatto o che ne possieda in modo talmente epidermico da non poter essere prese in considerazione.

Quali competenze, dunque, può registrare un insegnante nei primi giorni di scuola della prima primaria a proposito dei numeri?

Abbiamo tentato di rispondere a questa domanda studiando e mettendo a punto alcune prove preliminari attraverso le quali verificare, appunto, le competenze numeriche possedute dai bambini (AA.VV, 2004).

La prima prova consisteva nel presentare ai bambini un foglio A4 sul quale erano stati scritti, in modo sparso, i numerali 3, 15, 327, 32, 51.

Ai bambini intervistati venivano poste due domande:

- Qual è il numero più grande?
- Qual è il numero più piccolo?

La prova è stata sottoposta a 134 bambini nel mese di settembre, cioè nei primissimi giorni di frequenza della prima primaria. Le classi coinvolte erano distribuite su buona parte del territorio nazionale. Si andava da Biella ad Alessandria, a Roma passando per Perugia, Arezzo, Ravenna, Bologna, Verona…

Dei 134 bambini intervistati ben 127 hanno saputo riconoscere ed indicare il più grande fra i numerali presentati e 116 hanno saputo riconoscere e indicare anche il più piccolo.

Dai dati raccolti si rileva, quindi, con evidenza che la stragrande maggioranza dei bambini intervistati all'inizio della prima primaria sa riconoscere ed indicare, in una raccolta di 5 numerali, il più grande ed il più piccolo, con qualche leggero deficit per quest'ultima richiesta. Si deve anche osservare che circa il 79% dei bambini è in grado di riconoscere entrambi.

Si tratta di una strategia vincente che però lascia dubbi sull'efficacia: che cosa succederebbe se vi fossero solo numerali con lo stesso numero di cifre? E, ancora peggio, se vi fossero numerali con le stesse due cifre, scritte nell'ordine scambiato? Ha senso sottoporre alla prova i bambini che hanno dato risposta positiva al test 1.

Queste domande sono all'origine del test 2.

La seconda prova è nata dall'esigenza di chiarire possibili dubbi lasciati dalle risposte al primo quesito: se nella domanda vi fossero solo numerali con lo stesso numero di cifre, le risposte positive sarebbero state le stesse? E se vi fossero numerali con le stesse due cifre, scritte nell'ordine scambiato?

A 102 bambini è stato presentato un foglio A4 con scritti nel seguente ordine in orizzontale, ben staccati tra loro, i seguenti numerali: 32, 51, 15.

Le domande sono identiche alle precedenti:

- Qual è il numero più grande?
- Qual è il numero più piccolo?

Dei 102 bambini intervistati 70 rispondono positivamente alla prima domanda e 52 rispondono positivamente alla seconda.

Certo, la percentuale si abbassa, ma resta comunque alta anche in condizioni così complesse; e la positività della situazione è confermata dal fatto che il 46% dei bambini dice esattamente entrambi i numerali, il più alto ed il più piccolo.

Ed è generalmente ottima la motivazione della risposta, quando viene chiesta, perché mette bene in evidenza che la scelta non è solo dovuta al numero delle cifre in gioco, ma al fatto che «il 5 del 51 è più grande». Si esprime dunque buona se non totale consapevolezza del fatto che, tra le 2 cifre di un numerale a 2 cifre, quella che dà l'ordine di grandezza più rilevante è la prima.

I bambini intervistati ci hanno dimostrato che le competenze possedute a questo proposito sono molto diverse da quelle supposte. Diverse da quelle che gli insegnanti prendono come base fondamentale per costruire le successive competenze e che portano a progettare un percorso che parta da esercizi del tipo:

- disegna un insieme con due pulcini
- scrivi il numero di pulcini che hai disegnato
- …

Le prove che sono state sottoposte ai bambini nei primissimi giorni di frequenza in classe prima avevano come base la consapevolezza che sia in famiglia, sia a scuola il bambino apprende e i suoi apprendimenti non si fermano se i bambini possano «giocare» all'interno della spirale che evidenzia il fenomeno apprenditivo, proposta da Bruno D'Amore (2000).

Le risposte date dai bambini ci mettevano di fronte alla necessità di preparare per loro un percorso che, partendo dalle competenze acquisite, procedesse nell'azione didattica basandosi proprio su tali competenze già acquisite (le avevamo verificate), senza costringerli a dover seguire la strada che la prassi didattica, in Italia, prevede per questo segmento curricolare.

Possiamo rintracciare questo forte invito all'inizio del tema Aritmetica nei Programmi ministeriali italiani per la scuola elementare del 1985, dove si esortano gli educatori a non considerare i bambini in ingresso come se fossero del tutto privi di competenze numeriche.

Come procedere?

Per poter iniziare avevamo bisogno di ripensare tutto un percorso didattico, perché ogni certezza metodologica era stata frantumata dalle stesse risposte dei bambini.

Invece di cercare un «punto d'appoggio per sollevare il mondo» carico di banalità da propinare ai bambini, dovevamo prevedere un percorso che portasse a costruire competenze, non a chiamare con un nome scolastico ciò che già è competenza posseduta.

Abbiamo fatto riferimento alla consapevolezza che i bambini fanno viaggi in macchina con i genitori e leggono i cartelli dei chilometri percorsi. Se il viaggio è lungo cercano di sapere sia quanti ne sono stati percorsi, sia quanti ne mancano per arrivare. Commentano, fanno domande, si aspettano risposte…

Quindi alla consapevolezza che i bambini leggono e scrivono numeri anche di più cifre, li sanno confrontare anche mettendo in campo strategie complesse (Aglì, Martini, 1995; Lucangeli, 2001; Teruggi, 2001) che i bambini sanno risolvere semplici problemi di addizione e di sottrazione, mettendo in campo strategie aritmetiche, grafiche ed altre (Baldisserri, D'Amore, Fascinelli, Fiori, Gastaldelli, Golinelli, 1993).

Abbiamo proposto quello che è ormai conosciuto in tutta Italia come «percorso dei numeri grandi».

Figura 26: Troviamo il numero più grande

Contaminazioni matematiche di immagini

Maura Brambilla, Liceo classico «V. Emanuele II», Jesi (AN)

Mi sono chiesta spesso che cosa insegnare di matematica in un liceo classico e quale possa essere oggi il ruolo di una disciplina scientifica in un corso di studi umanistici.

Pochi tra i miei alunni riconoscono Dante o Galileo come uomini di una cultura tale da non impedire al poeta di essere geometra o al fisico di essere filosofo; d'altra parte la maggior parte dei nuovi allievi, nei primi giorni del quarto ginnasio, afferma candidamente, quasi con un certo vanto, di essersi iscritto al liceo classico perché «non ama» la matematica!

Il mio «contratto formativo» prevede di «svolgere il programma» della sperimentazione P.N.I. che arriva in terza liceo all'analisi, allo studio di funzione, agli integrali. Che fare?

Mi sono proposta di aprire una breccia in queste menti così maldisposte; dunque un tentativo: uscire dal solco, divertire e contaminare, collaborare. A cosa?

A perseguire, in me prima che nei miei alunni, la capacità di percepire il sapere come un tutt'uno, un sistema complesso per decodificare il quale occorrono tante conoscenze ma una sola abilità: pensare.

Per diverso tempo ho lavorato con molti colleghi di discipline diverse, di istituti e di ordini di scuola diversi, ci siamo confrontati su temi e metodi specifici della disciplina insegnata per trovare argomenti e strumenti trasversali che potessero essere accattivanti per la fascia di età dei nostri alunni adolescenti.

Abbiamo trovato nelle trasformazioni geometriche, in particolare nelle isometrie, un «pretesto» utile, un ponte tra molte discipline, uno strumento con il quale decodificare immagini reali o mentali, metafore pubblicitarie o brani musicali o ancora ritmi e poesie.

Un dato in ingresso come sollecitazione della curiosità: le immagini della pubblicità. Perché ci seducono? Contengono un enigma che all'inizio non appare, lo «sentiamo» appena e questo ci trattiene ancora un istante a guardare, per capire. Ancora altre immagini, quelle che ci circondano nelle case antiche, nei loro soffitti decorati. A Jesi come in altre città d'Italia (ne ho viste di bellissime sulle facciate dei palazzi del corso di Pordenone) ci sono molte decorazioni che hanno una struttura complessa, appena percepita ad un'occhiata veloce, che affascina e trattiene per un istante ancora.

Figura 27: Soffitto di Palazzo Merighi in corso Matteotti a Jesi.

Ed ancora immagini questa volta fatte di parole, quelle create da una figura retorica della letteratura, il chiasmo.

Nelle antologie di letteratura latina o greca o italiana sono segnalate nelle note: Dante, Petrarca, Ariosto, Leopardi, Montale.

E la musica? Il canone, le composizioni dell'«Arte della fuga» di Bach, sono immagini geometriche prima che armonie gradevoli che incantano da sempre.

Ciò che ci appare «bello» è sempre il frutto di un atto geniale, la sua realizzazione è opera artigianale di un *mago* che conosce molto bene le regole del gioco. Queste regole sono spesso matematiche!

Un giorno, dopo aver affrontato lo studio delle isometrie nel piano in quarta ginnasio, ho assegnato un compito strano, arduo: cercare i chiasmi sui libri di scuola, guardarli, pensarli come specchi semantici, ritrovare nelle immagini della pubblicità, efficacissime guide dei nostri consumi, messaggi con lo stesso contenuto della citazione letteraria. E i miei alunni sono tornati con soluzioni che mi hanno molto sorpreso: in particolare mi ha stupito l'accostamento illustrato qui di seguito, perciò ho chiesto loro di organizzare immagini e chiasmi in alcuni pannelli.

Figura 28: Accostamenti… insoliti

Di quale materia parliamo? È un sapere di confine, sintesi di conoscenze matematiche e letterarie, di regole che, decodificate, ci avvertono e di metafore che si svelano nella nostra fantasia e ci seducono.

Con altri colleghi e le loro classi (scuola media inferiore e ginnasio) ho organizzato un lavoro curricolare che ha impegnato per un anno alunni e docenti di cinque scuole del distretto di Jesi (il Liceo Classico, le scuole medie iesine «Savoia», «Leopardi», «Manzoni» e «Colocci» di Chiaravalle e di San Marcello) per indagare le regolarità nelle forme d'arte più disparate: dalla poesia latina e greca, alla pubblicità della Onyx, dal soffitto del teatro di Chiaravalle alle decorazioni murali di una sperduta tribù del Mozambico, dall'«Arte della fuga» di Bach alle ballate di Bob Dylan.

Una selezione dei lavori prodotti è servita per allestire una mostra, di circa settanta pannelli, nel maggio del 1999 nelle sale del Palazzo dei Convegni di Jesi; nel giugno 1999, il progetto didattico è stato presentato alla selezione «100 Prodotti multimediali per la scuola» della Biblioteca di Documentazione Pedagogica di Firenze ed è stato scelto per diventare un CD rom.

La realizzazione del CD, in collaborazione con la Studio Capolinea di Jesi che ne ha curato l'elaborazione software, ha comportato un impegno di circa sei mesi per un gruppo di docenti (11) delle scuole già coinvolte nella realizzazione della mostra. Si è trattato di selezionare e riorganizzare completamente i materiali prodotti dagli alunni in modo da produrre una sorta di percorso di autoistruzione agile, accattivante, imprevedibile e fantasioso, che parlasse ai ragazzi come un videogioco impegnandoli nello studio della matematica e dell'arte, dell'inglese, del latino e del greco!

Il cd è organizzato in due sezioni:

1. *Percorso didattico* rivolto esclusivamente ai colleghi docenti
2. *Vedo parlo ascolto capisco* rivolto agli alunni.

In quest'ultima sezione ci sono argomenti specifici della disciplina cui si riferiscono, ma sono frequenti anche «contaminazioni» con altre discipline (frasi, immagini, riferimenti, giochi) che invitano a pensare alle isometrie in modo trasversale.

I contenuti del CD sono schematicamente:

Percorso didattico: le tappe, le esperienze, i momenti di aggiornamento, le modalità didattiche di realizzazione della mostra «Ritmi e simmetrie: la matematica dell'arte» che ha preceduto il progetto del prodotto multimediale.

1. Il pretesto
2. Il percorso
3. I risultati
4. Il successo

Vedo: le decorazioni dei soffitti dei palazzi storici di Jesi, Chiaravalle e San Marcello, le immagini antiche e moderne della pubblicità sono analizzate per cercarne i moduli elementari e le loro isometrie.

1. Decorazioni pittoriche
2. Comunicazione pubblicitaria

Parlo: una poesia composta da alunni e docenti della scuola media Savoia introduce la prospettiva di analisi metrica (Omero), semantica (Dante), di struttura (Bob Dylan) del componimento poetico, per mostrare che nella tecnica poetica sono presenti regole e regolarità che richiamano le isometrie.

1. Omero
2. Dante
2. Bob Dylan

Ascolto: a partire dalle pubblicazioni di M. Gilardi citate in bibliografia si esaminano brani di diversi tipi di canone, per mostrare che nella composizione musicale sono riproposte traslazioni e simmetrie.

1. La geometria della musica
2. Il canone

Capisco: in questo capitolo si illustra in modo operativo il concetto geometrico di isometria, di prodotto di isometrie e le proprietà del prodotto di isometrie, fino ad arrivare al concetto della struttura algebrica di gruppo abeliano (il segreto del Mago) possedendo il quale è possibile realizzare decorazioni complesse trasformando isometricamente un modulo elementare (crea).

1. Le isometrie
2. Le loro composizioni
3. Il segreto del mago (la struttura di gruppo)

Ora utilizzo questo CD per presentare le isometrie in quarto ginnasio, continuo a far cercare le immagini pubblicitarie e a decifrare le trasformazioni in esse contenute, poi, dopo qualche anno, disegniamo e studiamo la funzione coseno, che è pari. Pensiamo al nostro «lato Piaggio»!

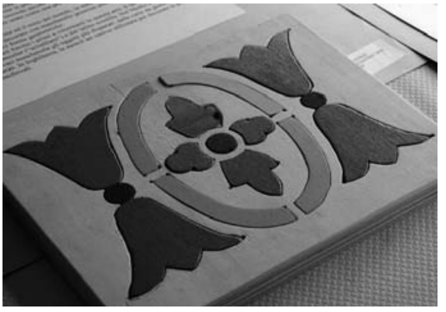


Figura 29: La geometria del fregio

Bibliografia

Arrigo G., Sbaragli S.
I solidi. Riscopriamo la geometria. Roma: Carocci, 2004a.

Arrigo G., Sbaragli S.
Salviamo la geometria solida! Riflessioni sulla geometria dall'infanzia alle superiori. In: D'Amore B., Sbaragli S. (2004). *Il grande gioco della Matematica 2*. Atti del convegno di Lucca. 10-11 settembre 2004.

Cottino L., Sbaragli S.
Le diverse «facce» del cubo. Roma: Carocci, 2005.

D'Amore B.
Geometria. Progetto Ma.S.E. Vol 5. Milano: Franco Angeli, 1985.

D'Amore B. (a cura di)
Una mostra di matematica. Come rendere operativi i nuovi programmi della scuola elementare. Giunti e Lisciani: Teramo, 1987.

D'Amore B.
La matematica in continuità tra la scuola dell'Infanzia e la Scuola Elementare. Bologna: Pitagora, 1991.

D'Amore B.
Geometria: mezzo pedagogico per l'educazione matematica. *La matematica e la sua didattica*. 4, 1993.

D'Amore B.
*Elementi di didattica della matematic*a. Bologna: Pitagora, 1999.

D'Amore B.
Nel segno della creatività. La vita scolastica, 1. Firenze: Giunti, 2001.

Fandiño M.I., Sbaragli S.
Matematica di base per insegnanti in formazione. Pitagora: Bologna, 2001.

Rinaldi Carini R.
Matematica. Bologna: Zanichelli, 1992.

Sbaragli S.
Nel mondo quotidiano dei poliedri. La vita scolastica, 15. Firenze: Giunti, 2002.

AA.VV.
Le competenze dei bambini di prima elementare: un approccio all'aritmetica. La matematica e la sua didattica. 1, 47-95, 2004.

Aglì F., Martini A.
Rappresentazione e notazione della quantità in età prescolare. *Età evolutiva.* 51, 30-44, 1995.

Baldisserri F., D'Amore B., Fascinelli E., Fiori M., Gastaldelli B. e Golinelli P.
I palloncini di Greta. *Infanzia*. 1, 31-34. [Questo articolo è stato ristampato su: *La matematica e la sua didattica*. 4, 1993, 444-449D'Amore B. (2000). La complessità dell'educazione e della costruzione dei saperi. *Riforma e didattica*. 4, 35-40, 1993.

Lucangeli D.

Lo sviluppo della conoscenza numerica: le abilità cognitive. In: D'Amore B. (ed.) (2001). *Didattica della matematica e rinnovamento curricolare*. Atti del XV Convegno Nazionale «Incontri con la Matematica», Castel San Pietro, 9-11 novembre 2001. Bologna: Pitagora. 97-106, 2001.

Teruggi L.A.

Scritture numeriche nella scuola dell'infanzia. In: D'Amore B. (ed.) (2001). *Didattica della matematica e rinnovamento curricolare*. Atti del XV Convegno Nazionale «Incontri con la Matematica», Castel San Pietro, 9-11 novembre 2001. Bologna: Pitagora. 119-130, 2001.

II. Didattica

1. Cantiere *Atolli matematici*

Gianfranco Arrigo

The first volume of the new series of textbooks "Atolli matematici 1,2,3,4" will be available. This new publishing production is meant to be a powerful didactic tool in relation to the new training programmes of the Scuola Media of Canton Ticino. The term "atollo" (atoll) means "family of situations", i.e. a set of didactic situations which helps achieving a specific level of competence in a definite core of the subject matter.

Introduzione

Dallo scorso settembre è in dotazione nel Cantone Ticino il primo volume della nuova collana di testi di matematica per la scuola media *Atolli matematici*, diretta da Gianfranco Arrigo e pubblicata dall'editore Giampiero Casagrande. Collana che si è prefissata le seguenti scadenze:

- luglio 2004: *Atolli matematici 3*, per le terze medie
- luglio 2005: *Atolli matematici 4*, per le quarte medie
- luglio 2006: *Atolli matematici 1*, per le prime medie
- luglio 2007: *Atolli matematici 2*, per le seconde medie

A giudicare dal numero confortante di adozioni e dalle molte richieste di saggi del volume per la terza media – che, come tradizione vuole, funge da apripista –, si può già dire che l'opera non ha lasciato indifferenti gli insegnanti di matematica ticinesi. A questi segnali si aggiungono gli apprezzamenti lusinghieri di specialisti nella didattica della matematica. Onestamente, nel contesto, occorre anche considerare qualche perplessità avanzata nella cerchia degli addetti ai lavori. Fondamentalmente le critiche di segno negativo si concentrano sulla pretesa difficoltà che l'insegnante, in generale, incontrerebbe nell'usare il testo in classe.

Premesso che qualunque libro di testo – anche il «manuale perfetto», ammesso che esista – può essere usato male, come può diventare il miglior sussidio didattico di questo mondo, sentiamo di poter dire che *Atolli matematici*, soprattutto nell'attuale periodo di transizione che vive il passaggio da una didattica legata alla filosofia degli obiettivi a quella, che tutti propugnano, improntata al concetto di competenza, possa creare qualche preoccupazione e un certo disorientamento.

Questo aspetto è stato preso in considerazione sin dall'inizio dagli autori del volume dedicato alle terze medie[1]. È stata proprio questa la ragione principale che

1. Gli autori di Atolli matematici 3 sono: Gianfranco Arrigo, Claudio Beretta, Giorgio Mainini e Remigio Tartini.

ha convinto l'editore, un anno fa, a distribuire uno *specimen*, limitatamente alla parte dedicata al nucleo fondante dei numeri razionali. D'altra parte, agli autori, non era parso giusto lasciarsi influenzare troppo da simili timori e, grazie anche all'importante contributo dato dai docenti sperimentatori, si è cercato di ridurre il rischio entro limiti ragionevoli, senza togliere ossigeno al carattere innovativo che ogni nuova serie di testi scolastici deve avere, ma che in modo particolare *Atolli matematici* assume come sua peculiarità.

Ma veniamo, appunto, agli aspetti innovativi. Ciò che caratterizza il nuovo manuale è la concezione didattica soggiacente. Potremmo limitarci a descriverla in termini pedagogici come improntata ai principi del socio-costruttivismo, ma preferiamo dire che si centra sulle acquisizioni raggiunte nell'ultimo decennio dalla didattica disciplinare. E allora, tanto per intenderci, concezione produttiva dell'apprendimento, precedenza all'attività euristica e all'apprendimento in situazione, concettualizzazione fondata sull'affinamento successivo di immagini mentali (D'Amore, 1999). L'aspetto più tangibile di questa impostazione consiste nell'aver rinunciato con piena convinzione a «spiegare la teoria», ben sapendo che la concettualizzazione deve svolgersi in classe, dopo un primo apprendimento di carattere attivo formatosi in momenti a-didattici, nei quali l'allievo è libero di agire e di interagire con i propri pari in piccoli gruppi, all'interno di una situazione didattica preventivamente e opportunamente predisposta. Concettualizzazione che attraversa le fasi di *formulazione* – nella quale gli allievi danno al loro apprendimento una forma comunicabile –, di *validazione* – nella quale si mettono in comune le diverse idee nate all'interno della classe – e di *istituzionalizzazione* – nella quale l'insegnante dà forma ufficiale all'apprendimento. A questi principi si aggiunge la volontà di evitare il più possibile la nascita di formalizzazioni precoci, di non cadere nella trappola delle ricette preconfezionate, di non accettare acriticamente contenuti e modi di fare del passato.

Per *evitare formalizzazioni precoci*: in «Atolli matematici 4», gli allievi impareranno a eseguire calcoli algebrici con lettere (sfruttando il principio della generalizzazione numero-lettera), prima di affrontare la tecnica vera e propria del calcolo letterale e impareranno a trovare le soluzioni comuni di un insieme di equazioni o di disequazioni, prima di formalizzare questa attività nella risoluzione di sistemi. Non solo: incontreranno subito insiemi di più di due equazioni o disequazioni, perché riteniamo falsa la credenza che un sistema di tre equazioni a tre incognite (ci si permetta il linguaggio formale) sia necessariamente più difficile di uno a due equazioni a due incognite: sempre che si entri nella problematica in modo euristico, evitando di dare ricette del tipo «metodo di sostituzione, metodo di addizione-sottrazione, metodo di confronto» e via dicendo.

Non accettare acriticamente contenuti e modi di fare del passato: già nel testo per le terze medie, troviamo ogni tanto problemi impossibili, problemi con dati insufficienti, così come problemi con dati sovrabbondanti, qualche volta addirittura fra loro contraddittori. Qualcuno ci ha detto che se si vogliono inserire tali problemi, occorre dichiararlo all'inizio: è la classica obiezione che fanno gli alunni di fronte al problema (impossibile) dell'«età del pastore»[2], dopo che l'insegnante ha disapprovato la loro soluzione evidentemente errata. Sotto il potente influsso del contratto didattico gli al-

2. Si allude al problema seguente: «Un pastore ha 12 pecore e 6 capre. Quanti anni ha il pastore?», (D'Amore, 1999, pag. 102).

lievi pensano che se l'insegnante (o il libro di testo) propone un problema, questo debba essere certamente risolvibile. D'altra parte occorre aggiungere che se lo si dice prima, anche in forma dubitativa (per esempio: «Risolvi i seguenti problemi, quando è possibile») si toglie almeno la metà del valore educativo. Pensiamo che la precisazione «quando è possibile» sia da includere esplicitamente nel contratto didattico stesso. A scuola, come nella vita, s'incontrano numerosi problemi, non sempre risolvibili, non sempre determinati, talvolta con dati insufficienti o sovrabbondanti.

Ancora, quando si studiano i poliedri, non ci si limita alle superfici e al volume ma si promuove allo stesso livello la lunghezza degli spigoli, i percorsi lungo questi ultimi e sulle superfici dei solidi.

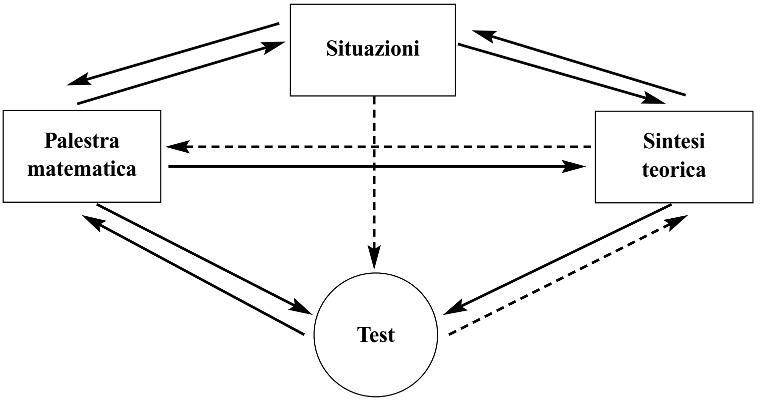
Atolli matematici e apprendimento concettuale

Fatte queste premesse, si capisce meglio la struttura dei nuovi testi e si può più facilmente organizzarne l'impiego in classe. I grandi nuclei fondanti – Numeri e Geometria per Atolli matematici 3 – presentano, all'inizio, una parte, detta appunto *Situazioni*, che deve permettere agli allievi, agendo individualmente o in piccoli gruppi, di costruirsi un primo apprendimento grezzo. Le situazioni proposte sono numerose e varie, proprio per evitare che le immagini mentali dei concetti si cristallizzino precocemente su una particolare situazione. I diversi registri semiotici (D'Amore, 2001) usati nella rappresentazione dei concetti permettono sia operazioni di *trattamento* (cioè trasformazioni di rappresentazione all'interno dello stesso registro) sia operazioni di *conversione* quando si passa da una rappresentazione a un'altra di registro diverso. Così, ad esempio, nell'*Atollo 1: Numeri* del libro di terza, si stimolano frequentemente gli allievi a passare dalla forma frazionaria di un numero razionale a quella decimale, a quella percentuale, con tutti i passaggi possibili fra queste forme. Sono tipiche operazioni di trattamento all'interno del registro semiotico della rappresentazione aritmetica del numero razionale. Il testo però non si ferma qui e propone agli studenti altri registri oltre a quello aritmetico. Così, scorrendo la prima parte di *Atolli matematici 3*, si può vedere come il numero razionale sia fatto uscire presto dall'ambito aritmetico e collocato in altri registri semiotici quali ad esempio la pendenza di una retta o la misura di probabilità. Siamo qui di fronte a operazioni di conversione da un registro all'altro, la cui importanza per l'apprendimento è fondamentale.

Ovviamente non è necessario percorrere tutte le situazioni offerte dal testo, ma, se se ne prendono in considerazione alcune, il pericolo della cristallizzazione del concetto su un'unica immagine viene scongiurato. Durante questo lavoro, l'insegnante inserirà momenti di messa in comune, nei quali gli allievi vengono stimolati a esprimere in forma comprensibile dai compagni i loro raggiungimenti e le loro idee in via di formazione, in modo che possano essere confrontate, accettate o confutate razionalmente, sotto la sua discreta sorveglianza. A questo punto si può passare al consolidamento dell'apprendimento, affrontando in modo individualizzato e differenziato le attività della *Palestra matematica*. È a questo punto che l'insegnante potrà aiutare gli allievi a istituzionalizzare le loro conoscenze, ora meglio formate, attraverso la redazione di specchietti riassuntivi, con l'aiuto eventuale della parte *Sintesi teorica*. Alla fine, ciascuno può mettersi alla prova affrontando singolarmente il *Test di autovalutazione.*

Sono d'obbligo due osservazioni.

La prima concerne la cronologia dell'attività di apprendimento con l'ausilio di *Atolli Matematici*. Essa non si svolge mai in senso lineare, come qualcuno sarebbe forse indotto a credere (per esempio: *Situazioni - Palestra matematica - Sintesi teorica - Test di autovalutazione*), ma con continui passaggi da un'attività all'altra, passaggi che potrebbero anche variare da allievo ad allievo, nel rispetto delle caratteristiche del singolo. Lo schema seguente illustra questo modo di fare. Le frecce tratteggiate indicano i passaggi meno probabili.



La seconda osservazione concerne il fatto che Atolli Matematici 3, come del resto qualunque libro di testo ragionevole, non può contenere tutti i materiali di apprendimento necessari per ogni singola classe. Sta all'insegnante predisporre quei complementi che si rivelano necessari. Per contro, l'ampio ventaglio di possibilità offerte dal testo permette di operare un'importante differenziazione dell'apprendimento, al punto che si potrebbe usarlo – come è stato detto e come ci piace ribadire in questa sede – anche nei corsi base. Ciò significa che, con lo stesso manuale, si possono intraprendere numerose vie di apprendimento variando sia le accentuazioni contenutistiche, sia il grado di astrazione e di approfondimento, sia lo stile (che può essere maggiormente inclinato verso la teorizzazione oppure verso l'uso applicativo della matematica).

Per venire incontro agli insegnanti che dovessero considerare insufficiente la quantità di esercizi di apprendimento e di altri materiali proposti dal testo, si sta pensando di preparare un CD con proposte aggiuntive.

Atolli matematici e strumento informatico

L'apprendimento scolastico si verifica in un ambito predisposto dall'insegnante e si avvale di determinati strumenti e materiali didattici. Gli strumenti hanno un duplice scopo: da un lato di facilitare l'apprendimento, dall'altro di proporsi come mezzi di lavoro quando il giovane sarà inserito nell'attività professionale o nel ruolo di cittadino attivo. Fra questi, oggi, c'è inevitabilmente il computer e tutto ciò a esso collegato (con o senza cavi). La scuola deve perciò insegnare a usare questa nuova tecnologia per apprendere, per progredire, per tuffarsi nella complessità della nostra società con spirito positivo. Ciò significa che, a scuola, i nostri giovani devono poter imparare l'altra faccia del computer, cioè scoprire il potente strumento di lavoro racchiuso in questa «scatola magica» e riuscire a servirsene per apprendere meglio. Ecco una bella sfida della scuola di oggi. Una sfida tutt'altro che facile da cogliere. Molti sono infatti gli ostacoli che vi si frappongono. Contrariamente a ciò che si pensava negli anni settanta, quando vennero introdotti nella nostra scuola i primi computer, la difficoltà maggiore non consiste nel riuscire a dotare i molti istituti scolastici di apparecchiature convenienti: ciò è stato fatto in modo soddisfacente. I problemi nascono dal momento in cui la macchina è presente e funzionante. «Che fare?», s'interrogano gli insegnanti. La scelta operata all'inizio degli anni novanta nella scuola ticinese è stata quella di consigliare agli insegnanti di usare il mezzo informatico in fase di apprendimento disciplinare, se e quando ne valesse la pena. Questo ha significato la rinuncia alle ore d'insegnamento specifico dell'informatica a favore di un'informatica integrata nelle diverse discipline. La storia è recente, perciò non mi dilungo. Diciamo soltanto che, malgrado gli ottimi intenti e la buona lena che ha sempre caratterizzato i pionieri in questo campo, oggi non pochi insegnanti si sentono impreparati a usare il computer come strumento di apprendimento.

La serie di manuali *Atolli matematici* propone, sia nell'ambito delle ***Situazioni*** sia soprattutto nel *Laboratorio matematico*, diverse attività che occorre eseguire con l'ausilio del mezzo informatico, altre che con questo mezzo possono essere portate a termine meglio e più velocemente. Fedeli alle scelte di fondo operate nel Cantone, tutte le attività proposte possono essere eseguite con l'usilio di due programmi applicativi, ormai entrati nell'uso generalizzato in tutte le nostre scuole: un foglio elettronico[3] e un programma di geometria dinamica[4]. I due programmi hanno caratteristiche didattiche comuni, nel senso che offrono due ambienti informatici – l'uno di carattere numerico, l'altro di carattere geometrico[5] – molto intuitivi e sufficientemente grezzi (a un primo livello d'impiego) da poter essere utilizzati dagli allievi senza eccessive necessità di apprendimento tecnico specifico. Occorre anche tener presente che, in generale, i giovani di oggi si muovono a meraviglia nei meandri della pura manipolazione del mezzo tecnologico. Ciò per tranquillizzare i docenti: non è necessario impiegare molto tempo per istruire gli allievi all'uso di questi software. *Atolli matematici* sfrutta questa situazione favorevole e propone una vasta scelta di attività parecchio interessanti e gratificanti, che permettono all'allievo – in una certa misura divertendosi – di aprire la mente e di fare esperienze su questioni matematiche non incluse nei programmi, ma che permettono loro di vedere al di là di ciò che si fa normalmente in classe e li aiutano a capire da soli l'importanza degli apprendimenti basilari, forse meno accattivanti ma essenziali per progredire. Siamo di fronte a un'altra situazione paradossale: è attraverso l'uso del mezzo sofisticato che il soggetto avverte l'importanza delle acquisizioni di base. Costatazione di segno opposto a quella che solitamente si avanza quando si vuole contrastare l'uso dell'informatica, sostenendo che la macchina impigrisce i cervelli!

3. Tutte le scuole hanno ricevuto il pacchetto *Microsoft Office* che contiene il foglio elettronico Excel.
4. Tutte le scuole hanno ricevuto il programma *Cabri-Géomètre*.
5. Per ora disponiamo della versione 2D di *Cabri-Géomètre*, ma è già in commercio una stimolante 3D.

Atolli matematici e attività formativa del pensiero

Imparare i concetti matematici è senz'altro cosa importante, soprattutto se ci si vuole inserire attivamente – e muniti di strumenti adatti – in una società complessa e altamente tecnologica come la nostra. Ma non è tutto. C'è un secondo versante, ancor più importante del primo, che sarebbe grave ignorare: quello relativo alla formazione del pensiero razionale, all'acquisizione di capacità intuitive e creative, agli aspetti culturali di carattere umanistico e culturale che ogni corretta attività di apprendimento deve promuovere in misura preponderante. Un importante aiuto in questa direzione è fornito dall'atollo *Laboratorio matematico*. Di per sé non costituisce una novità assoluta, perché il laboratorio lo troviamo già nella serie di manuali *Dimensione matematica*, ma occorre riconoscere che con *Atolli matematici* questa parte ha raggiunto piena maturità. Le proposte sono molto diversificate sia per la natura dell'attività che stimolano sia per l'ambito contenutistico in cui si situano. Come abbiamo già detto più volte, l'obiettivo generale di queste attività di apprendimento consiste essenzialmente nel permettere all'allievo di intraprendere avventure matematiche stimolanti, interessanti e soprattutto formative del modo di pensare e di agire in ambito matematico. È qui che l'allievo deve poter scoprire il piacere di giungere alla soluzione di un problema mai incontrato, impegnativo, spogliato il più possibile dagli abiti scolastici. È soprattutto qui che può sviluppare la propria intuizione e creatività dando libero sfogo al pensiero in un contesto, però, che ha determinate esigenze (la matematica soggiacente) che occorre rispettare. Siamo giunti al punto focale della creatività matematica, che ha carattere di paradosso poiché viene esaltata e acquista maggior valore proprio perché costretta a rispettare determinate regole (più o meno strette, ma assolutamente perentorie). È proprio l'ignoranza di questo aspetto che crea la falsa immagine della matematica vista come disciplina arida, precostituita, che non permette alcun atto creativo. Solo la scuola può correggere questo stato di cose e di conseguenza l'opera dell'insegnante di matematica diventa fondamentale. Come già detto a più riprese e in diversi contesti, è necessario che tutti gli insegnanti si rendano conto che il loro ruolo, più che di insegnare ad addizionare frazioni, è di *far vivere* la matematica ai loro allievi, di far provare loro il *piacere dell'atto intellettuale*, che non è solo leggere una bella poesia o ascoltare un brano di buona musica, ma che può anche essere vivere una stimolante avventura matematica. Verrà un giorno in cui tra i poster delle «rockstar», dei «divi» dello spettacolo e dello sport di competizione appesi nelle aule delle scuole apparirà anche l'effige di Leonhard Euler? In caso affermativo, potremo dire di essere riusciti a correggere una mentalità deprecabile e molto diffusa, ma soprattutto di aver riconsegnato ai nostri giovani un valore, che in altre civiltà e in altri periodi storici è sempre stato ai vertici delle aspirazioni culturali.

Conclusione e auspicio

Assicuriamo che con *Atolli matematici* è stato fatto di tutto – e così sarà anche nell'allestimento dei rimanenti volumi – per realizzare un'opera in perfetta sintonia con le nuove tendenze della didattica e in conformità al Piano di formazione per la scuola media ticinese. Abbandonato il principio secondo il quale il libro di testo scolastico debba essere la «brutta copia» – o la riduzione, se si preferisce – di un libro di matematica per matematici, la nuova serie si ispira alla metafora dell'arcipelago di atolli, nel quale gli allievi, a bordo della nave del Capitano Maths, intraprendono un viaggio, toccando un atollo dopo l'altro e compiendo un numero importante di nuovi incontri e di esperienze che permettono loro di acquisire conoscenza. Quest'ultima, come detto, andrà poi messa in comune e istituzionalizzata con l'aiuto dell'insegnante.

Ciò non deve apparire nel modo più assoluto come un deprezzamento della serie precedente *Dimensione Matematica*, che consideriamo una tappa importante nell'editoria scolastica ticinese. Anzi, in tutta sincerità possiamo affermare che senza *Dimensione Matematica* non sarebbe stato possibile giungere ad *Atolli matematici*. Il tempo però passa velocemente e dopo dieci anni di grande diffusione, un manuale scolastico non tiene più il passo. È veramente necessario cambiare e cambiare in modo tangibile. Perché sono cambiati gli allievi, perché è cambiata la didattica, perché i risultati conseguiti dalla ricerca non vanno ignorati, perché la scuola deve progredire, perché il nostro Cantone deve continuare a tenere alta la qualità dell'insegnamento scolastico. Come ha sempre fatto e come, lo speriamo vivamente, farà anche in futuro.

Bibliografia

Arrigo G., Beretta C., Mainini G., Tartini R.
Atolli matematici 3, Lugano: Giampiero Casagrande, 2004.

D'Amore B.
Elementi di Didattica della Matematica, pagg. 145-154, Bologna: Pitagora, 1999.

D'Amore B.
Scritti di Epistemologia Matematica, Bologna: Pitagora, pagg. 337-340, 2001.

2. La modellizzazione come terreno d'incontro tra fisica e matematica: esperienza didattica nell'opzione specifica liceale FAM

Gianfranco Arrigo, Michele D'Anna[1]

This article presents the objectives of the FAM optional course (physics and applications of mathematics), a distinguishing discipline of the Swiss scientific high school certificate. This discipline views mathematics not only as a "calculation technique" but rather as an instrument for "thinking physics". The example of the modelling of physical situations is here used to illustrate such activities. It is followed by an article presenting a concrete example: that of the magnetic sledge (magnetic levitation).

Nel nuovo ordinamento liceale *Fisica e applicazioni della matematica* (FAM) è una delle sette *opzioni specifiche* attualmente offerte agli studenti.

Si tratta di un ampio spazio didattico (sei ore-lezione settimanali per due anni) nel quale la fisica ha l'occasione di completare la formazione di base (data nei primi due anni del liceo), non tanto in un'ottica di completezza di contenuti, quanto piuttosto dal punto di vista metodologico, considerando in particolare il significato di modello e di modellizzazione. Questo infatti è parso, sin dalle prime riflessioni nella fase di progettazione, il terreno d'incontro ideale tra fisica e matematica. Ci si prefigge in particolare di presentare la matematica non tanto come tecnica per «far di conto», quanto piuttosto come strumento per «pensare la fisica». Per maggior chiarezza, di seguito riportiamo uno stralcio dal testo ufficiale *Piano degli studi liceali*[2]*:*

7.1. Finalità formative e obiettivi dell'insegnamento

La finalità principale dell'opzione consiste nell'educare l'allievo a costruirsi modelli matematici di situazioni fisiche. Parallelamente si offre all'allievo la possibilità di completare la sua conoscenza delle leggi fondamentali della fisica, essenziale per poter intraprendere curricoli di studio di tipo scientifico. Per quanto riguarda la matematica, l'allievo che frequenta questa opzione ha l'opportunità di approfondire e rafforzare le conoscenze del corso di base come pure di svilupparne delle nuove. L'attività didattica deve essere organizzata in modo che, oltre alla conoscenza disciplinare, venga sviluppata la dimensione culturale e formativa della scienza.

Gli obiettivi sono espressi indipendentemente dai contenuti: andranno coniugati con questi ultimi a seconda del percorso scelto in ogni istituto.

- *Elaborare un modello matematico che permetta di descrivere e indagare situazioni fisiche.*

1. Docente di fisica al Liceo di Locarno e di didattica della fisica all'Alta Scuola Pedagogica di Locarno.
2. Testo approvato dal Consiglio di Stato della Repubblica e Cantone Ticino il 6 novembre 2001; il passaggio riportato si trova a pagina 156.

- *Dedurre dal modello matematico le proprietà e i comportamenti dei sistemi, interpretandoli dal punto di vista fisico; prevedere il comportamento del modello al variare di determinati parametri.*
- *Trasferire in un altro ambito l'impiego di un modello visto in una situazione particolare, cogliendo il ruolo unificante del linguaggio matematico.*
- *Prendere coscienza dei limiti dei vari modelli (sia tecnici sia epistemologici); saper scegliere tra vari modelli quello più adatto alla descrizione del fenomeno in esame.*
- *Mettere in evidenza il legame tra strutture matematiche e proprietà fisiche (grandezze conservate); riconoscere le proprietà geometriche dello spazio in alcuni aspetti delle leggi fisiche.*
- *Saper utilizzare le equazioni differenziali quale strumento per concettualizzare e descrivere l'evoluzione temporale di sistemi o di distribuzioni non omogenee di grandezze fisiche,*
- *Illustrare il ruolo di determinati modelli statistici all'interno di attività e teorie fisiche; conoscere l'interpretazione di alcune grandezze macroscopiche sulla base di modelli statistici elaborati a livello microscopico.*
- *Essere consapevole che la conoscenza scientifica è soggetta ad un continuo lavorio di affinamento: conoscere in qualche situazione specifica l'evoluzione dei concetti e dei modelli impiegati per la descrizione del fenomeno e alcuni esempi concreti dove la conoscenza attuale non può essere che provvisoria.*
- *Produrre qualche esempio di ricaduta tecnologica del progresso della conoscenza scientifica e spiegare l'interdipendenza che viene così a crearsi.*

In particolare, lo studio dei sistemi dinamici apre nuove possibilità – tanto sul piano metodologico quanto su quello dei contenuti – sia per l'apprendimento sia per l'insegnamento della fisica nelle scuole medio-superiori. I nuovi strumenti disponibili per la modellizzazione (e per la simulazione) di sistemi dinamici sono facili da utilizzare e permettono di introdurre lo studente a questo mondo molto prima che egli sia in grado di padroneggiare formalmente lo strumento matematico. Molti processi fisici possono infatti venir interpretati come il risultato del fluire, dell'immagazzinamento e della produzione di determinate grandezze, quali la carica elettrica, l'entropia, la quantità di moto o la quantità di materia. L'uso combinato dell'acquisizione dati in tempo reale e della modellizzazione dei processi fisici osservati – favorito da un contesto di apprendimento attivo – consente poi di colmare almeno in parte il divario tra la trattazione dei fenomeni fisici reali e l'insegnamento tradizionale.

Questo tipo di approccio offre inoltre la possibilità di utilizzare le analogie tra i vari campi di studio per mettere in evidenza la struttura generale, sia matematica sia fisica, soggiacente alle diverse leggi particolari e facilita in tal modo lo studente nella costruzione di quell'unità concettuale che può trasformarsi a poco a poco in organizzatore cognitivo.

Per quanto riguarda la fisica si tratta in primo luogo di differenziare e strutturare le singole relazioni, distinguendo tra leggi generali (come ad esempio le leggi di conservazione, le relazioni che esprimono dei bilanci per le variazioni di grandezze estensive) e leggi particolari specifiche per diverse classi di fenomeni (come ad esempio le varie leggi capacitive, conduttive, induttive) o leggi costitutive che caratterizzano i singoli sistemi (come ad esempio la legge di Hooke per la molla, la legge del gas ideale, la relazione tra quantità di moto e velocità per un corpo dotato di massa).

Per quanto riguarda la matematica, si tratta in un primo momento di introdurre gli studenti a concetti e metodi tipici dell'approccio numerico approssimato, come ad esempio alle procedure iterative e più in particolare al metodo di Eulero per la risoluzione numerica delle equazioni differenziali del primo ordine (eseguito all'inizio in modo esplicito manualmente, in seguito automatizzato per esempio con l'aiuto di un foglio elettronico); in una seconda fase di familiarizzarli con ambienti di modellizzazione dinamica più efficienti: tra questi, particolarmente interessanti sono quelli che offrono una superficie di lavoro grafica, che consente di «leggere» visivamente la struttura logica dell'insieme del modello e le interdipendenze tra le varie parti[3]; infine, quando nel corso di matematica parallelo sono stati elaborati i necessari concetti del calcolo differenziale e integrale, di introdurre gli studenti alle equazioni differenziali attraverso una rilettura dei formalismi utilizzati e la soluzione esplicita di alcuni casi significativi.

Dal punto di vista didattico questo approccio è interessante poiché:

- i tempi di apprendimento delle procedure di base sono contenuti (dopo quattro ore di istruzione gli studenti hanno una sufficiente autonomia per usufruire almeno ad un livello elementare di questo strumento);
- richiede agli studenti una partecipazione attiva;
- permette una differenziazione e individualizzazione dell'insegnamento.

Dal punto di vista metodologico, le possibilità d'impiego sono piuttosto diversificate; tra queste:

- l'utilizzo come supporto per l'indagine sperimentale;
- l'impiego come strumento per estendere il campo delle situazioni che possono essere affrontate e studiate;
- l'utilizzo quale strumento per esplicitare le analogie strutturali e formali.

Ben inteso questo tipo di attività può essere proposta agli studenti anche usando altri applicativi formali, oppure limitandosi al solo foglio elettronico; in quest'ultimo caso verrebbe tuttavia a mancare un aspetto caratterizzante: quello della rappresentazione grafica mediante reti semantiche strutturali, offerta in modo esplicito dagli applicativi simili a Stella. Si potrebbe sopperire invitando gli studenti a disegnare manualmente le reti semantiche: ciò è senz'altro possibile, ma nulla toglie al fascino e alla comodità dell'applicativo specifico. Non si dimentichi, infatti, che questi applicativi eseguono anche i calcoli, integrazioni numeriche comprese. In ciò sta appunto la grande utilità di questi software: da una parte stimolano l'allievo a costruire la rete strutturale relativa alla risoluzione di un dato problema (sappiamo quanto questo sia impor-

3. Nell'ambito della nostra sperimentazione abbiamo scelto come ambiente di lavoro il programma Stella, prodotto dalla Isee Systems, Hanover NH, www.iseesystems.com.

tante per l'apprendimento!) e dall'altra offrono una incomparabile capacità di calcolo che solleva lo studente dal fardello (a volte insopportabile) delle *ruotine* di calcolo.

Un esempio: dal moto uniformemente accelerato all'esperienza di Rutherford

Se da una parte il moto uniformemente accelerato è uno degli argomenti che vengono generalmente presentati nel corso di fisica, dall'altra l'esperienza di Rutherford (che consiste nel bombardamento di una sottile lamina d'oro con un fascio di particelle alfa e nell'osservazione della ripartizione angolare delle particelle deflesse) è considerata troppo difficile per essere affrontata nei suoi aspetti quantitativi, anche se essa viene regolarmente citata come fondamentale nel corso di chimica, in relazione alla sua importanza nella nascita del modello atomico con nucleo centrale. L'obiettivo specifico consiste quindi nel rendere concettualmente accessibile a studenti liceali questa esperienza, fornendo loro una chiave di lettura per l'interpretazione dei risultati sperimentali formulata da Rutherford.

La sequenza didattica proposta si articola sulle seguenti situazioni: moto uniformemente accelerato; moto armonico; lancio verticale verso l'alto nelle vicinanze della superficie terrestre in 1 e 2 dimensioni; lancio verticale verso l'alto in generale; repulsione coulombiana; l'esperienza di Rutherford.

Accanto all'obiettivo specifico, la sequenza permette di mettere in luce tutta una serie di altre caratteristiche, come il ruolo delle leggi di conservazione e delle relazioni di bilancio, la struttura invariante nella dinamica newtoniana, le caratteristiche specifiche delle varie interazioni, la molteplicità delle informazioni che possono essere lette dalle diverse rappresentazioni grafiche, il collegamento tra fenomeni che avvengono in una o due dimensioni, l'integrazione matematica come strumento per esprimere le variazioni di grandezze fisiche in intervalli di tempo finiti.

Bibliografia e riferimenti informatici

Ufficio dell'insegnamento medio superiore
Piano degli studi liceali. DECS Divisione della scuola: Bellinzona, 2001.
Richmond B.
An introduction to system thinking. Isee Systems: Hanover NH, 2001.
Fuchs H.U.
Modeling of uniform dynamical systems. Orell-Füssli: Zürich, 2002.

3. Un approccio dinamico alla modellizzazione dei processi fisici: l’esempio della slitta magnetica

Michele D’Anna – Liceo cantonale di Locarno

Presentazione

Vogliamo prendere come esempio il ben noto esperimento della caduta di un magnete all’interno di un tubo metallico: si tratta di una situazione che desta sicuramente sorpresa e meraviglia in chi non l’ha mai vista, ma che è di difficile accesso dal punto di vista sperimentale. Solitamente ci si deve limitare a mostrare la variazione della forza necessaria per sostenere il tubo con e senza il magnete in movimento: dato che si riesce ad ottenere una buona evidenza sperimentale del fatto che la variazione della forza è esattamente uguale al peso del magnete che sta scendendo, si può ragionevolmente formulare l’ipotesi che il magnete raggiunga (rapidamente) un regime di moto a velocità costante. Un’indagine diretta del moto del magnete all’interno del tubo risulta tuttavia problematica. L’esperimento che vogliamo considerare in questa sede concerne una situazione analoga, in cui tuttavia risulta particolarmente facile indagare l’andamento della posizione in funzione del tempo; inoltre esso offre la possibilità di variare alcuni parametri significativi e di vagliare alcune ipotesi delle relazioni esistenti fra le varie grandezze coinvolte. Vi è poi un ulteriore vantaggio, perché la durata del transiente consente l’effettuazione di misure accurate. La realizzazione sperimentale è particolarmente semplice: è sufficiente aggiungere lateralmente due magneti ad una slitta lasciata libera di muoversi lungo un binario a cuscino d’aria leggermente inclinato.

Osserviamo per cominciare che cosa capita quando la slitta viene lasciata libera a un dato istante sul binario: si osserva che il moto della slitta si discosta qualitativamente in modo chiaro dal «solito» moto uniformemente accelerato. Basta una semplice occhiata per far nascere l’idea che la slitta raggiunga un regime a velocità costante e quindi per rendersi conto della presenza di una forza frenante che, all’aumentare della velocità, va a compensare la forza ad essa parallela.

Come indagare quantitativamente la situazione?

Prima di procedere è bene esplicitare il contesto didattico e in particolare i prerequisiti che dovrebbero avere gli studenti per poter intraprendere questa esperienza. Per quanto riguarda gli strumenti matematici, non è necessario che gli allievi conoscano il calcolo differenziale e nemmeno quello integrale, ma occorre che abbiano una certa familiarità con i metodi del calcolo numerico approssimato e in particolare con gli algoritmi iterativi; per quanto attiene alla fisica, è sufficiente che gli allievi conoscano i fondamenti della meccanica, mentre possono anche essere totalmente a digiuno di elettromagnetismo.

Nella situazione sperimentale proposta, ciò significa in particolare che non disponiamo di nessuna ipotesi fisica circa la forza frenante; può risultare allora di grande utilità far provare a ogni studente a spingere la slitta: tutti ricavano così direttamente la percezione che per muovere la slitta lungo il binario a velocità diverse è necessario esercitare forze diverse.

Primo esame e descrizione qualitativa

Il primo passo consiste quindi nel determinare la dipendenza dalla velocità della forza (magnetica) frenante. Scelta una data situazione (ossia la massa della slitta e l'inclinazione del binario), con due fotocellule si possono misurare i tempi di passaggio di una banderuola (di lunghezza conosciuta e solidale con la slitta) in due diversi punti del binario: variando la posizione delle due fotocellule lungo il binario, si possono ricavare informazioni circa l'andamento della velocità; in particolare si osserva che verso la fine del binario la slitta ha raggiunto una velocità pressoché costante, ossia che si muove con la velocità detta «di regime» (v. Fig. 1a e 1b).

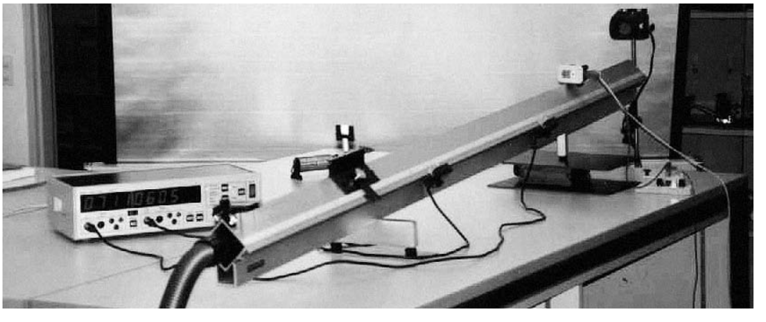


Fig. 1a Le fotocellule sono poste all'inizio e nella parte centrale del binario; la slitta sta accelerando, come testimoniato dal diminuire dei tempi di passaggio indicati dal cronometro.

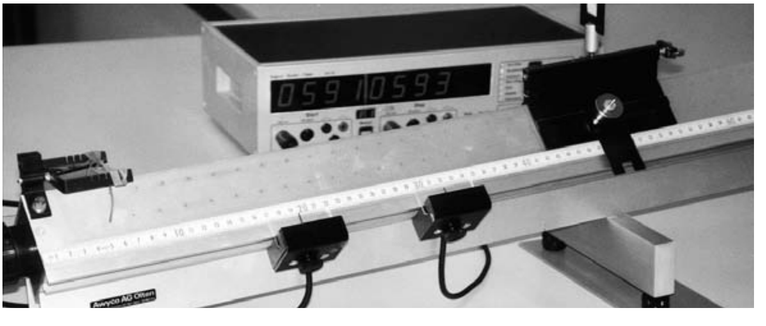


Fig. 1b Le fotocellule sono poste verso la fine del binario; la slitta ha raggiunto la velocità limite, come è possibile dedurre dai tempi di passaggio praticamente identici.

È così possibile rispondere al quesito posto: per diversi valori della massa della slitta o dell'inclinazione – ciò che fissa il valore della forza parallela agente – si determina la velocità limite raggiunta dalla slitta. La retta che si ottiene rappresentando su carta bi-logaritmica la velocità limite in funzione della massa della slitta permette non solo di «scoprire» un andamento «tipo potenza» della forza frenante in funzione della velocità (v. Fig. 2), ma anche di convincersi facilmente che esiste una relazione di proporzionalità diretta tra la forza magnetica frenante e la velocità della slitta: infatti la pendenza della retta nel grafico è praticamente 1. Dall'analisi quantitativa è inoltre facile determinare il valore della costante di proporzionalità tra velocità e forza agente.

$\sin(\alpha) = 0.0504$		$\Delta x = 2{,}00$ cm
tempo di transito	massa slitta	velocità limite
(msec)	(kg)	(m/sec)
78.3	0.257	0.255
72	0.277	0.278
67.5	0.297	0.296
65.1	0.307	0.307
61.2	0.327	0.327
57.4	0.347	0.348
55.8	0.357	0.358
52.7	0.377	0.380
49.9	0.397	0.401
48.9	0.407	0.409
45.7	0.437	0.438
43.6	0.457	0.459
41.7	0.477	0.480
39.8	0.507	0.503

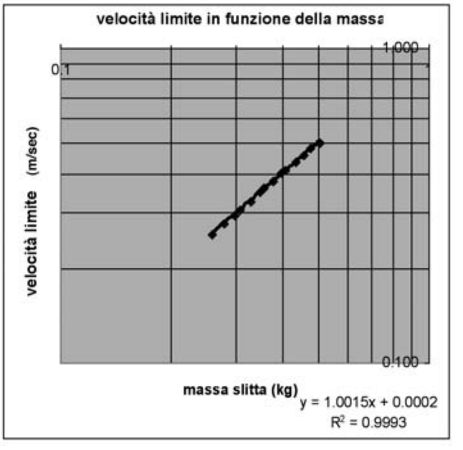


Fig.2 Dipendenza della velocità limite dalla massa.

Osserviamo anche che un'analoga analisi può essere condotta mantenendo costante la massa della slitta e variando opportunamente l'angolo d'inclinazione della rotaia.

La raccolta dei dati *on-line*

Capito questo, sorge spontanea la domanda sull'andamento del moto in funzione del tempo: come si comporta la slitta per raggiungere la velocità di regime? Dal punto di vista sperimentale è qui di primaria utilità l'acquisizione di dati *on-line*: un sensore di posizione permette di rilevare facilmente l'andamento in funzione del tempo; se desiderato, è possibile avere anche l'andamento della velocità in funzione del tempo.

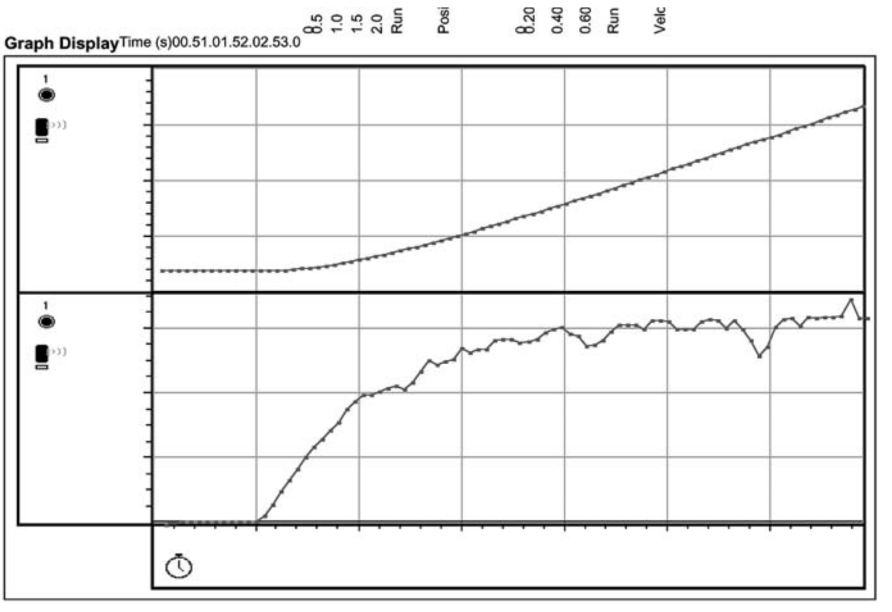


Fig.3 Grafici della posizione (sopra) e velocità (sotto) in funzione del tempo ricavati con un sistema di acquisizione dati on-line.

La modellizzazione

Si tratta ora di integrare questi risultati sperimentali all'interno di un contesto interpretativo fisico.

Una prima possibilità è offerta dall'integrazione numerica delle leggi del moto di Newton: partendo dall'analisi delle forze, si ricavano l'accelerazione, la velocità e la posizione in funzione del tempo.

Dato che non si tratta di un caso a forze costanti, lo studente (almeno quello che abbiamo scelto come riferimento) ha come unica possibilità l'applicazione di metodi numerici e di algoritmi iterativi: supponendo che abbia già incontrato in precedenza situazioni simili (gestite in un primo momento eseguendo manualmente i calcoli necessari, e servendosi poi in un secondo momento di un foglio di calcolo come Excel), per modellizzare il presente problema gli si propone l'utilizzo del programma Stella. Come già accennato in precedenza[1], si tratta di un software che, oltre a offrire una superficie grafica sulla quale può essere impostato il modello, mette anche a disposizione una finestra nella quale è esplicitato il formalismo numerico. Lo studente «disegna» il modello che intende impiegare per modellizzare la situazione sperimentale considerata, indicando i diversi elementi e le relazioni funzionali che li legano (v. Fig. 4a).

1. Vedi l'articolo di G. Arrigo e M. D'Anna «La modellizzazione come terreno d'incontro tra fisica e matematica: esperienza didattica nell'opzione specifica liceale FAM».

```
v(t) = v(t - dt) + (dv/dt) * dt
INIT v = vo
INFLOWS:
dvdt = a
y(t) = y(t - dt) + (dy/dt) * dt
INIT y = yo
INFLOWS:
dydt = v
a = (Fparallela+Fmagn)/M
alfa = 0.06{rad}
Fmagn = -k*v
Fparallela = M*g*SIN(alfa)
g = 9.81{m/sec^2}
k = 0.357*9.81*0.06/(0.496){ N.sec/m}
M = 0.357{kg}
vo = 0{m/sec}
yo = 0.531{m}

posiz_misurata = GRAPH(TIME)
(0.00, 0.531), (0.0405, 0.532), (0.0809, 0.533), (0.121, 0.536), (0.162, 0.539), (0.202, 0.544), (0.243, 0. 1.39), (2.59, 1.41), (2.63, 1.43), (2.67, 1.45)

vel_misurata = GRAPH(TIME)
(0.00, 0.001), (0.0405, 0.019), (0.0809, 0.039), (0.121, 0.063), (0.162, 0.084), (0.202, 0.104), ....
```

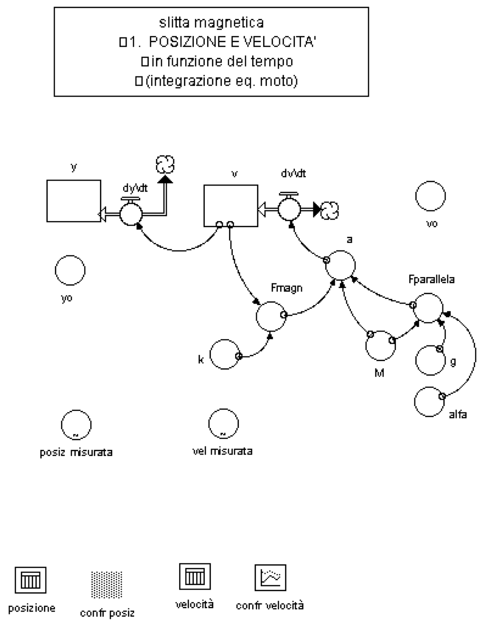


Fig.4a Posizione e velocità in funzione del tempo: integrazione dell'equazione del moto

Attraverso la rappresentazione grafica delle previsioni fornite dal modello (disponibili anche in forma di tabella numerica), lo studente ha la possibilità di fare un confronto con i dati sperimentali (che possono essere importati sotto forma di funzione numerica dai dati acquisiti *on-line*) (vedi Fig. 4b e 4c):

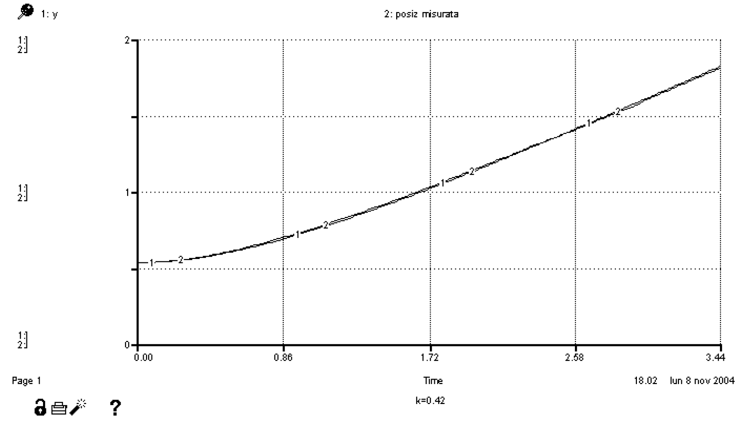


Fig. 4b. Confronto tra dati sperimentali e previsioni del modello: l'andamento della posizione in funzione del tempo fornita dal modello (curva 1) si accorda molto bene con i dati sperimentali misurati (curva 2).

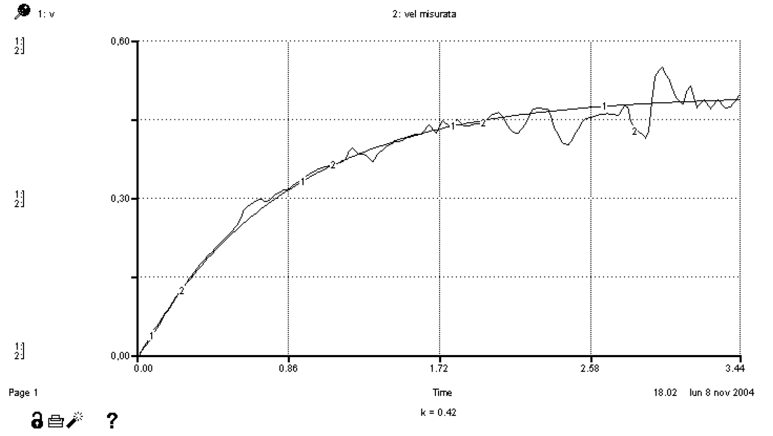


Fig. 4c. Confronto tra dati sperimentali e previsioni del modello: la velocità in funzione del tempo.

È importante osservare come nell'approccio proposto lo studente debba scegliere in modo attivo ed esplicito le relazioni che legano le diverse grandezze; in ultima analisi a Stella è demandata unicamente la soluzione delle equazioni che sono state impostate. Così, ad esempio, il confronto con i dati sperimentali assume un significato che va ben al di là di un semplice aggiustamento numerico di un parametro in una soluzione preconfezionata. Il modello costituisce inoltre uno strumento che permette di visualizzare rapidamente l'effetto fisico delle variazioni di determinati parametri: nel caso in esame, per esempio, si può facilmente indagare come si modifica l'andamento del moto della slitta assumendo dipendenze funzionali diverse tra forza magnetica frenante e velocità. Come detto in precedenza, è possibile impostare il modello scegliendo altri contesti interpretativi; a titolo di esempio è riportato qui di seguito un modello basato sul bilancio di quantità di moto/impulso che permette di ottenere l'andamento della posizione e della velocità in funzione del tempo.

```
p(t) = p(t - dt) + (Fparallela + Fmagn) * dt
INIT p = vo
INFLOWS:
Fparallela = M*g*SIN(alfa)
Fmagn = -k*v
y(t) = y(t - dt) + (dy/dt) * dt
INIT y = yo
INFLOWS:
dydt= v
alfa = 0.06{rad}
g = 9.81{m/sec^2}
k = 0.42{N*sec/m}
M = 0.357{kg}
v = p/M
vo = 0{m/sec}
yo = 0.531{m}
```

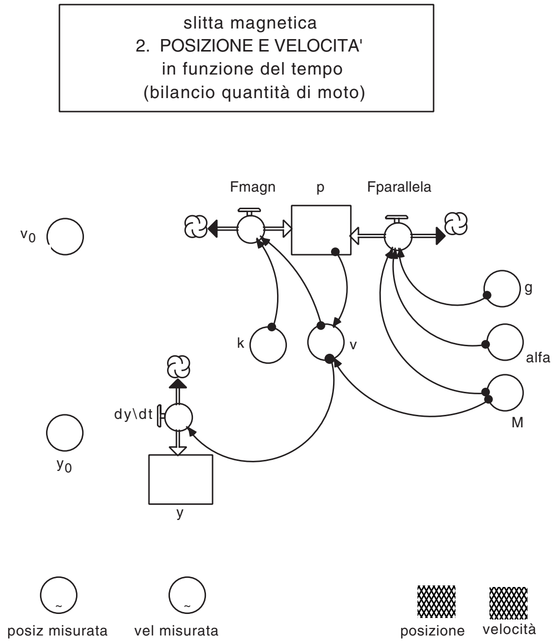


Fig. 5 Posizione e velocità in funzione del tempo: bilancio quantità di moto.

Un ulteriore esempio che bene illustra le potenzialità di questo approccio consiste nell'aggiunta degli aspetti energetici al modello dell'analisi: a questo scopo si modellizzano e si rappresentano i trasferimenti di energia (per unità di tempo, cioè le potenze) legati alla forza parallela ed alla forza frenante. La loro integrazione dà l'informazione sulle quantità di energia scambiate, mentre la conoscenza dell'andamento della velocità in funzione del tempo permette di calcolare in modo indipendente anche la crescita dell'energia cinetica (vedi Fig. 6a).

```
Lgrav(t) = Lgrav(t - dt) + (Pgrav) * dt
INIT Lgrav = 0{J}
INFLOWS:
Pgrav = Fparallela*v
Lmagn(t) = Lmagn(t - dt) + (Pmagn) * dt
INIT Lmagn = 0{J}
INFLOWS:
Pmagn = Fmagn*v
v(t) = v(t - dt) + (dv/dt) * dt
INIT v = vo
INFLOWS:
dvdt = a
a = (Fparallela+Fmagn)/M
alfa = 0.06{rad}
BILANCIO = scambiENERGIAslitta-Ecin
Ecin = M*v*v/2
Fmagn = -k*v
Fparallela = M*g*SIN(alfa)
g = 9.81{m/sec^2}
k = 0.357*9.81*0.06/(0.496){ N.sec/m}
M = 0.357{kg}
scambiENERGIAslitta = Lgrav+Lmagn
vo = 0{m/sec}

vel_misurata = GRAPH(TIME)
(0.00, 0.001), (0.0405, 0.019), (0.0809, 0.039), (0.121, 0.063), ….
```

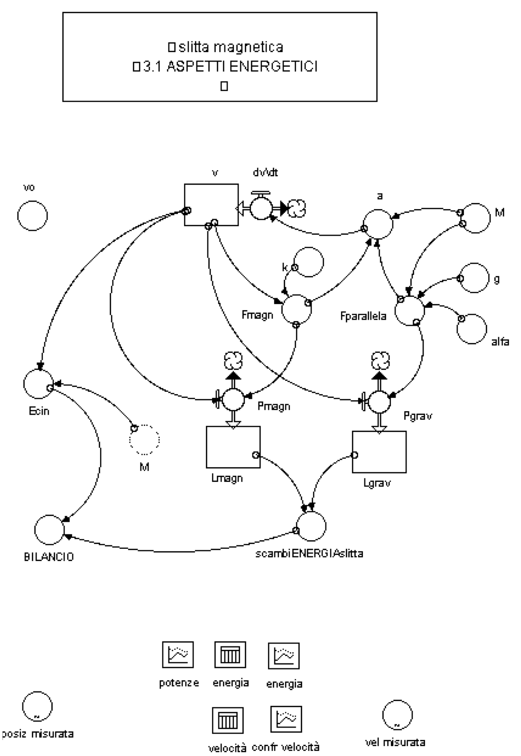


Fig. 6a La modellizzazione degli aspetti energetici.

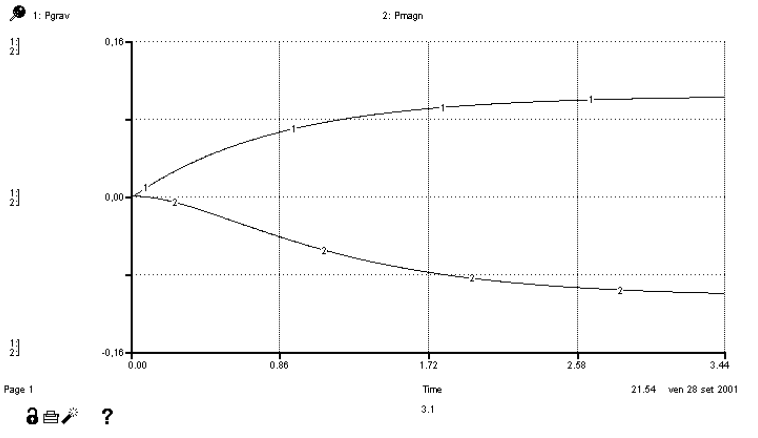


Fig. 6b Dinamica degli scambi energetici: potenza.

Una semplice osservazione del grafico (v. Fig. 6b) ci permette di convincerci che:

a. per tempi lunghi gli scambi energetici si bilanciano: considerando la slitta come sistema, la potenza in entrata e quella in uscita assumono valori opposti; ciò è facilmente ricollegabile al fatto che la velocità resta costante;
b. per tempi piccoli invece, si osserva molto chiaramente come vi sia un predominio della potenza meccanica in entrata rispetto alla potenza in uscita: la differenza – integrata – resta nel sistema sotto forma di energia cinetica.

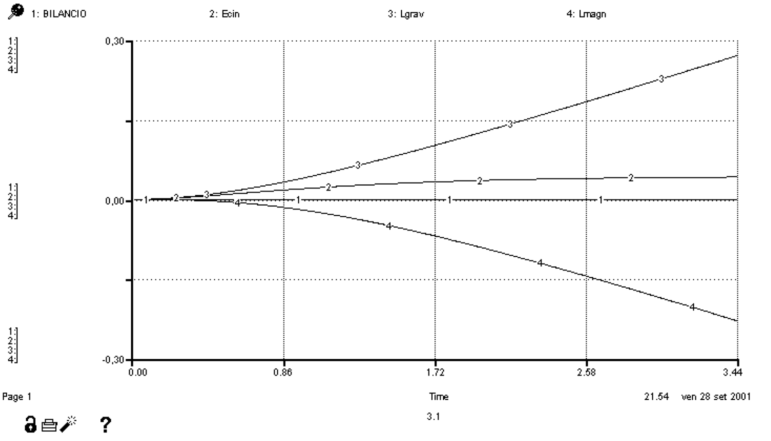


Fig. 6c Energia scambiata, energia accumulata; bilancio.

Per quanto riguarda il «solito» bilancio energetico, si può osservare (v. Fig. 6c) che tra l'energia scambiata e quella immagazzinata in forma cinetica nel «sistema slitta» vale la relazione di bilancio che solitamente leggiamo come espressione della conservazione dell'energia; ciò offre l'occasione per far riflettere gli studenti sull'origine fisica di questo «risultato», considerato il fatto che esso non è stato postulato né utilizzato in modo esplicito nel modello.

Attività in classe e conclusioni

L'esempio presentato è stato utilizzato a più riprese nell'ambito di un corso liceale biennale di *Fisica e applicazioni della matematica* in cui sin dall'inizio è stata data particolare importanza al lavoro sperimentale in laboratorio e alla modellizzazione: queste attività sono state quasi sempre realizzate con la compresenza di un docente di fisica e di uno di matematica. L'investimento iniziale per far acquisire agli studenti le competenze minime per un lavoro autonomo sono piuttosto ridotte: dopo un paio di lezioni introduttive in cui sono stati illustrati alcuni semplici algoritmi iterativi e i primi rudimenti per l'utilizzo del programma di modellizzazione, gli studenti sono stati in grado di elaborare modelli dinamici via via più complessi, molto prima quindi di saper padroneggiare formalmente lo strumento matematico; d'altra parte, la pratica della modellizzazione li prepara a meglio cogliere il significato profondo dello strumento matematico. Rispetto alla tradizionale lezione frontale, questo approccio richiede allo studente una partecipazione attiva: ciò ha ingenerato un più marcato e genuino interesse per la materia trattata; per alcuni di loro la valutazione scolastica complessiva ne ha tratto beneficio, sia per gli aspetti legati all'atteggiamento generale sia per i risultati specifici conseguiti nelle prove scritte, in cui sono stati sistematicamente inseriti esercizi relativi alla modellizzazione. La speranza è, quindi, che in questo modo possa delinearsi una prospettiva concreta per l'auspicato rinnovamento didattico, in particolare in rapporto al superamento delle barriere tra le discipline.

4. Le diverse interpretazioni del concetto di probabilità e le loro implicazioni didattiche

Alberto Piatti[1]

In this paper we review some of the possible interpretations of the concept of probability following a section written by Peter Walley in his book *Statistical Reasoning* with Imprecise Probabilities. We argue that the interpretation of probability is one of the most important concepts in probability and that it is very difficult to teach how to reason in a probabilistic way without referring to them. The absence of this topic in the classical teaching of probability could be the source of several teaching problems observed mainly in universitary students. All our conclusions will be verified empirically in a research which is starting in these weeks in the Canton Ticino in collaboration with Gianfranco Arrigo.

1. Introduzione

La capacità di ragionare in maniera probabilistica è una delle competenze indispensabili che un allievo deve sviluppare durante il suo cammino scolastico.

Il ragionamento probabilistico è quel tipo di ragionamento che permette di analizzare e fare inferenza in situazioni caratterizzate da incertezza e aleatorietà.

Esso può essere utilizzato sia per trarre conclusioni su parametri statistici sia, caso molto più frequente nella vita di tutti i giorni, per prendere decisioni considerando anche i vantaggi derivanti dalle possibili azioni. Da anni oramai si parla di inserire, a livello di scuola obbligatoria e superiore, un adeguato insegnamento della probabilità e della statistica che permetta agli allievi di sviluppare le loro capacità di riflessione e di giudizio probabilistico (vedi ad esempio la mappa formativa della scuola media del Cantone Ticino). Questo intento però si scontra con la dura realtà dei fatti: la maggior parte degli studenti che hanno studiato la probabilità la considerano troppo complessa, troppo teorica e di conseguenza inapplicabile nella realtà, se non da parte di individui particolarmente dotati in matematica. Inoltre molte persone adulte non sembrano in grado di ragionare in maniera probabilistica con razionalità e coerenza. Rischiando la banalità, basta ricordare il successo che stanno ottenendo negli ultimi tempi le case da gioco in Ticino, oppure il successo di cui godono, ad esempio, i sistemi basati su dati storici per giocare al lotto. Evidentemente qualcosa nell'approccio didattico tradizionale all'insegnamento della probabilità produce delle misconcezioni negli allievi che impediscono il formarsi di un efficace pensiero probabilistico. Ho pensato molto a questo problema senza trovare una convincente via d'uscita fino a quando non ho letto una sezione del libro di Peter Walley, *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities*, (letteralmente: Ragionamento statistico con le probabilità imprecise) che parla, in una sezione preliminare, delle diverse interpretazioni della probabilità. Questo testo ha completamente cambiato il mio modo di percepire le probabilità e mi ha

1. Docente di matematica alla SUPSI di Lugano-Manno e all'USI di Lugano.

aperto orizzonti didattici in questo campo, che prima non contemplavo. Questo articolo è organizzato come segue: nella seconda sezione ho tradotto la parte citata del libro di Walley, nella terza propongo alcune riflessioni didattiche con l'aiuto di esempi di laboratorio matematico, nella quarta sezione traggo alcune conclusioni e propongo alcuni spunti di ricerca. Tutto l'articolo è elaborato, ad eccezione della sezione tradotta da Walley, su mie considerazioni personali. Le ipotesi sono il frutto di ragionamenti teorici e quindi devono ancora essere testate e verificate tutte empiricamente in classe. Prima di poter avere idee meno personali bisognerà attendere i risultati della ricerca didattica vera e propria che sto iniziando, in collaborazione con Gianfranco Arrigo, su questo argomento.

2. Le interpretazioni della probabilità[2]

Le premesse e le conclusioni di molti ragionamenti probabilistici sono incerte. Per misurare l'incertezza abbiamo bisogno di qualcosa che somigli a un qualche tipo di probabilità. Il nostro scopo in questa sezione è quello di evidenziare la nostra interpretazione del concetto di probabilità, distinguendolo dalle altre possibili interpretazioni. Prima di tutto dobbiamo distinguere la questione dell'interpretazione della probabilità da quella della rappresentazione matematica della probabilità. Ci sono diversi modelli matematici per l'incertezza, ad esempio le misure additive di probabilità (le probabilità classiche, NdT), le probabilità inferiori e superiori, gli ordini probabilistici comparativi, le funzioni di credenza (*belief functions*). Ognuno di questi modelli ha diverse possibili interpretazioni. Nello stesso modo per ogni interpretazione del concetto di probabilità esistono diverse rappresentazioni matematiche adeguate. Nella nostra discussione sulle diverse interpretazioni non presupporremo nessun particolare modello matematico. Le probabilità utilizzate per esprimere incertezza nel ragionamento potrebbero essere le consuete probabilità numeriche del tipo «la probabilità dell'evento A è 0,3547», ma potrebbero essere anche di altri tipi, ad esempio «A è probabile», oppure «A è più probabile di B».

2.1. L'importanza dell'interpretazione

Alfine di sviluppare una teoria del ragionamento probabilistico plausibile, sembra essenziale fornire una chiara, non ambigua, interpretazione del concetto di probabilità. Anche se abbiamo distinto la questione dell'interpretazione da quella della rappresentazione, le due cose sono chiaramente in relazione. La struttura matematica utilizzata per rappresentare l'incertezza e gli assiomi che questa deve soddisfare devono essere giustificati da una specifica interpretazione. In questa sezione mostreremo che, per far sì che la conclusione di un pensiero probabilistico sia utilizzabile, è necessaria una particolare interpretazione comportamentale della probabilità. In seguito utilizzeremo questa interpretazione per giustificare principi di razionalità e coerenza e per derivare quindi una particolare struttura matematica per le *probabilità imprecise*. E veramente difficile pensare come il nostro o un qualsiasi altro modello probabilistico po-

2. Walley P., 1991.

trebbe essere sensato, senza una chiara interpretazione delle probabilità usate. Richiami alla tradizione o al consenso, oppure a criteri puramente matematici come la semplicità, l'eleganza o la trattabilità, si rivelano inadeguati per mostrare che gli assiomi standard della probabilità (vedi assiomi di Kolmogorov, NdT) sono appropriati per una teoria probabilistica del ragionamento e della decisione. Una chiara interpretazione è pure necessaria affinché la teoria sia applicabile a situazioni concrete. Alfine di valutare le probabilità necessarie per compiere un ragionamento probabilistico, e per dare un senso alle conclusioni dello stesso, bisogna essere in grado di capire il significato delle probabilità. Altrimenti le valutazioni e le conclusioni non possono che essere arbitrarie e apparentemente inutilizzabili. Benché molti matematici e probabilisti sembrino abbastanza insensibili alla questione dell'interpretazione, riteniamo che questo punto sia veramente essenziale, sia come punto di partenza, sia come guida per i successivi sviluppi e le applicazioni della nostra teoria.

2.2. Distinzioni fondamentali

Esaminiamo ora le differenze fondamentali tra le diverse interpretazioni del concetto di probabilità, in modo da poter classificare la nostra interpretazione. Una prima distinzione, fondamentale, è quella tra interpretazione aleatoria della probabilità e interpretazione epistemica[3]. Le probabilità aleatorie modellano la casualità di fenomeni empirici. Le probabilità epistemiche modellano la convinzione parziale, logica o psicologica, di un individuo o di un sistema intenzionale.

«Questa puntina ha probabilità 0,4 di cadere con la punta rivolta verso l'alto» è un'affermazione di probabilità aleatoria, poiché la probabilità indica una proprietà fisica dell'oggetto che si sta considerando. «Lui crede che la puntina cadrà con la punta rivolta verso l'alto» è un'affermazione di probabilità epistemica poiché fa riferimento alle convinzioni di uno specifico osservatore. Le probabilità epistemiche (al contrario di quelle aleatorie) dipendono dall'evidenza a disposizione dell'osservatore. Possiamo distinguere le seguenti interpretazioni:

- Interpretazioni logiche («logical»), nelle quali la probabilità epistemica di un'ipotesi è determinata in maniera unica a partire dall'evidenza a disposizione (senza nessun intervento «soggettivo», NdT).
- Interpretazioni personaliste («personalist»), nelle quali le probabilità sono vincolate solo da criteri di coerenza ma non dall'evidenza.
- Interpretazioni razionaliste («rationalistic»), ovvero interpretazioni a metà strada tra le due definizioni precedenti. In questo caso le probabilità costruite devono essere almeno in parte consistenti con l'evidenza.

Tra i concetti epistemici possiamo distinguere le interpretazioni comportamentali («behavioral»), per le quali le probabilità sono intese principalmente in termini di comportamento (facendo riferimento ad esempio all'atteggiamento di un individuo nei confronti di diverse scommesse o altre possibili azioni), e le interpretazioni legate all'evidenza o evidenziali («evidential»), per le quali la probabilità di un'ipotesi misura una dipendenza logica o verbale tra l'ipotesi e l'evidenza a disposizione. Nor-

3. Interessante notare che in inglese si distingue tra il termine chance, utilizzato per indicare le probabilità aleatorie, e probability, utilizzato in particolare per indicare le probabilità epistemiche, NdT.

malmente le interpretazioni personaliste tendono ad essere comportamentali, mentre le interpretazioni logiche tendono ad essere evidenziali. Possiamo misurare (oppure apprendere qualcosa su) le probabilità sia attraverso l'osservazione di quantità che sono da esse influenzate, sia attraverso la costruzione delle probabilità a partire dalla conoscenza dei fattori che le influenzano.

Possiamo così misurare le probabilità epistemiche osservando le scelte e le asserzioni di un individuo, un processo detto di deduzione («elicitation» in inglese), oppure costruendole a partire dall'evidenza disponibile, un processo detto di valutazione («assessment» in inglese). E naturale per le teorie personaliste e comportamentali di accentuare la deduzione come fonte delle probabilità mentre è naturale per le teorie logiche di appoggiarsi maggiormente sulla valutazione. Questa distinzione va considerata come indicativa ma non come vincolante. Similmente possiamo misurare probabilità aleatorie sia osservando le frequenze relative generate da un certo esperimento (dati statistici) sia costruendole a partire dalla misurazione di altre proprietà fisiche alle quali esse sono collegate attraverso leggi conosciute.

Infine possiamo distinguere i concetti operazionali di probabilità dai concetti teorici.

- Nelle interpretazioni operazionaliste («operational») le probabilità vengono identificate tramite l'osservazione di determinate procedure (il significato e la misurazione coincidono). Le probabilità epistemiche possono essere identificate con una scelta, ad esempio tramite i premi pagati per una serie di scommesse. In questo caso le probabilità aleatorie possono essere identificate tramite l'osservazione delle frequenze relative.
- Nelle interpretazioni teoriche, le probabilità modellano quantità teoriche (convinzioni o inclinazioni) che non sono direttamente osservabili. I concetti teorici di probabilità sono usualmente comportamentali: la probabilità rappresenta la disponibilità di un individuo a comportarsi in un certo modo (nel caso epistemico), oppure la tendenza di un esperimento a produrre determinati risultati (nel caso aletorio).

Di nuovo: è facile confondere i concetti operazionali con quelli comportamentali, ma è importante distinguerli. Un'interpretazione comportamentale non richiede necessariamente né personalismo né operazionalismo.

2.3. Probabilità epistemica

Per esprimere l'incertezza presente nel ragionamento e nell'inferenza è necessario utilizzare una probabilità di tipo epistemico. Queste probabilità devono essere epistemiche poiché dipendono dall'evidenza disponibile: il ragionamento probabilistico è prettamente epistemico. Che interpretazione epistemica è necessaria? L'interpretazione di cui facciamo uso in questo libro è comportamentale, teorica, razionalistica e costruttiva. Un'interpretazione teorica è necessaria affinché i modelli probabilistici costruiti attraverso un processo di deduzione in un particolare contesto sia poi utilizzabile in altri contesti. Un'interpretazione razionalistica e logica è necessaria affinché le conclusioni del ragionamento probabilistico non siano completamente soggettive e quindi, in un certo senso, arbitrarie. Le probabilità devono essere vincolate dall'evidenza disponibile, ma algoritmi in grado di costruire in maniera unica probabilità logiche a partire dall'evidenza non sono ancora disponibili. Sviluppando un'interpretazione razionalistica possiamo staccarci da un'interpretazione personalista per indirizzarci verso un'interpretazione logica. Per fare questo dobbiamo sviluppare strategie di valutazione per costruire probabilità a partire dall'evidenza. Una teoria della probabilità epistemica deve quindi preferire la valutazione piuttosto che la deduzione, anche se la deduzione, svolta attraverso l'osservazione delle scelte di un individuo, è più semplice da integrare in una teoria comportamentale. La nostra interpretazione può essere paragonata alla teoria bayesiana soggettiva di De Finetti, Savage e Lindley, che è epistemica e comportamentale, ma anche personalista e operazionalista, e sottolinea la deduzione piuttosto che la valutazione come fonte delle probabilità. Può essere paragonata anche con le teorie bayesiane oggettive di Jeffreys e Carnap, la cui interpretazione delle probabilità è epistemica, evidenziale, teorica, logica e costruttiva.

2.4. Probabilità aleatoria

Le probabilità coinvolte in modelli di campionamento, e teorie scientifiche che sono costruite per modellare la casualità del mondo reale, devono essere interpretate in maniera aleatoria. Le probabilità aleatorie non appaiono solo in teorie fisiche, come la meccanica quantistica e la meccanica statistica, ma anche in teorie biologiche, economiche, sociologiche, psicologiche e linguistiche. Queste teorie fanno riferimento a fenomeni empirici, non alle convinzioni di una persona o di un insieme di persone. Esistono due tipi fondamentali di interpretazione aletoria, ciascuno dei quali espresso in diverse versioni.

- L'interpretazione frequentista identifica le probabilità con le frequenze relative in insiemi finiti, e con il limite delle frequenze relative misurate su campioni per insiemi infiniti.
- L'interpretazione tendenziale (propensity interpretation) considera le probabilità come indicatori della tendenza di un evento a succedere in un determinato esperimento; le probabilità vengono considerate come dipendenti dalle condizioni dell'esperimento e non da proprietà di campioni o classi.

Le interpretazioni frequentiste sono quasi-operazionali e vengono misurate tramite l'osservazione di dati statistici. Le interpretazioni tendenziali sono teoriche e permettono idealmente di costruire le probabilità attraverso la conoscenza di altre proprietà fisiche dell'esperimento e l'utilizzo di leggi che legano le une alle altre. Solitamente però le leggi non sono perfettamente conosciute e quindi bisogna far capo anche in questo caso all'inferenza statistica. Preferiamo le interpretazioni tendenziali a quelle frequentiste in virtù della loro applicabilità a esperimenti singoli o difficilmente ripetibili e per la possibilità di metterle in relazione con altre grandezze fisiche. Ciononostante ogni interpretazione tendenziale solleva difficili interrogativi:

- Le tendenze sono proprietà intrinseche di un esperimento o dipendono da come lo abbiamo specificato?
- Le tendenze sono compatibili con il determinismo?
- Che relazione esiste tra tendenze e altre proprietà fisiche?
- Le tendenze devono soddisfare gli assiomi standard della probabilità?

- Che relazione esiste tra tendenze e probabilità epistemiche da una parte e il comporamento razionale dall'altra?

Le probabilità aleatorie e quelle epistemiche sono legate da un principio fondamentale di razionalità – il cosiddetto principio dell'inferenza diretta – per cui se si conoscono le probabilità aleatorie di un esperimento, esse devono essere considerate alla stregua delle probabilità epistemiche in un ragionamento probabilistico. Ad esempio se si sa che una puntina ha probabilità aleatoria uguale a 0.4 di cadere con la punta rivolta verso l'alto, allora si deve essere pronto a scommettere 2 a 3, che la puntina cadrà con la punta in alto. Adottando questo principio tutte le probabilità aleatorie possono essere viste come probabilità epistemiche e di conseguenza tutti i modelli probabilistici possono essere interpretati in maniera epistemica e comportamentale. Questo principio ci permette di discutere l'inferenza statistica, il cui scopo è quello di imparare qualcosa su probabilità aleatorie sconosciute, interamente in termini di probabilità epistemiche.

3. Considerazioni didattiche

Leggendo il precedente paragrafo, scritto da Peter Walley, mi sono reso conto che nel normale insegnamento della probabilità non si parla praticamente mai di interpretazione del concetto di probabilità, o perlomeno non si parla mai di interpretazioni diverse. Proviamo a pensare agli esempi classici che vengono usati di solito a scuola per illustrare il concetto di probabilità: il lancio di un dado, il lancio di una moneta, l'estrazione di una biglia da un sacchetto, ecc. Perché si usano così spesso questi esempi? Che caratteristiche hanno in comune? Semplice: tutti contemplano esclusivamente probabilità aleatorie e degli oggetti proposti conosciamo praticamente tutto, ad esempio il numero di facce del dado oppure il contenuto del sacchetto. Quindi queste probabilità possono essere costruite direttamente a partire dalla conoscenza che tutti hanno a disposizione. Nessuno avrà nulla da obiettare se si assegna il valore 1/6 alla probabilità che, lanciando un dado a sei facce numerate dall'uno al sei, esca, ad esempio, il numero uno. Tutti questi esempi, utilizzati spesso in didattica, sono esperimenti in cui lo spazio campionario è perfettamente conosciuto, così come le caratteristiche fisiche dell'oggetto; di conseguenza possiamo costruire delle probabilità aletorie uniche, che rispondano agli assiomi standard di Kolmogorov, tramite valutazione.

Solitamente per tentare di rendere più realistica ed utilizzabile in pratica la teoria della probabilità si propongono situazioni ispirate a problemi reali ma in cui la trasposizione didattica necessaria per arrivare ad avere un valore preciso delle probabilità risulta eccessiva. Spesso, ad esempio, la maggior parte delle probabilità devono essere fornite direttamente dal docente. A questo punto sorgono spontanee alcune domande:

- Perché è così difficile trovare delle situazioni reali in cui vengano applicate, senza eccessive trasposizioni didattiche, le probabilità degli esempi classici?
- Perché è così importante che il valore della probabilità sia unico?
- Che interpretazione possiamo dare ai risultati ottenuti in un problema nel quale le probabilità iniziali sono state fornite senza interpretazione/motivazione?

Sono dell'opinione che il problema fondamentale dell'insegnamento classico della probabilità risieda proprio nell'interpretazione del concetto di probabilità. I concetti di base vengono spiegati facendo capo a probabilità aleatorie, mentre in un secondo tempo gli allievi dovrebbero essere in grado di utilizzare gli stessi concetti per ragionare in maniera probabilistica su problemi reali. Ma anche qui sorgono domande:

- Quante volte nei ragionamenti probabilistici che compiamo tutti i giorni utilizziamo probabilità aleatorie o valori numerici per le probabilità?
- Quando ci capita di considerare probabilità aleatorie, quante volte conosciamo perfettamente le proprietà fisiche dell'oggetto o dell'esperimento che consideriamo?

Sono dell'opinione che gli ostacoli che impediscono agli allievi di avere un'immagine mentale corretta del concetto di probabilità – utilizzabile all'interno di un pensiero probabilistico ben formato – sia la seguente:

- l'unica interpretazione del concetto di probabilità che gli allievi arrivano di solito a concepire è quella aleatoria, riferita a insiemi finiti.

Questo per via degli esempi standard che vengono usati solitamente in didattica. In pratica, però, il ragionamento probabilistico fa capo quasi esclusivamente a probabilità epistemiche, concetto per lo più ignorato da buona parte degli allievi. Walley infatti dice che *reasoning is inherently epistemic*, ossia: il ragionamento è prettamente epistemico. Quando una persona pensa, fa capo alle sue convinzioni, non esclusivamente a caratteristiche fisiche degli esperimenti che considera. Inoltre una persona non pensa solitamente con valori numerici, ma esprime idee del tipo A è più probabile di B, oppure A è molto probabile.

L'allievo tenta di adattare la sua idea aleatoria alle situazioni (epistemiche) reali, ma non ci riesce: si tratta infatti di un compito impossibile. Questo stato di cose non può che portare l'allievo a considerare la probabilità come troppo complicata e quindi accessibile solo a pochi individui particolarmente dotati in matematica.

Naturalmente tutte queste ipotesi devono ancora essere verificate tramite un'opportuna sperimentazione in classe e necessitano di studi supplementari. Credo che sia ragionevole ritenere che quella evidenziata sia una debolezza strutturale molto importante dell'approccio classico allo studio della probabilità.

Potremmo anche domandarci perché il concetto di probabilità epistemica non sia praticamente mai citato in classe. Se guardiamo tutte le interpretazioni fornite da Walley del concetto di probabilità ci rendiamo conto che le interpretazioni epistemiche sono in assoluto le più naturali (proprio perché le usiamo ogni giorno per ragionare) e le meno difficili da concepire. Per contro le interpretazioni aleatorie, in particolare l'interpretazione frequentista, sono molto complesse da concepire. Il vantaggio nell'utilizzo delle probabilità aleatorie deve risiedere altrove: probabilmente il punto chiave è il seguente, citato da Walley: *we do not have algorithms for determining unique (logical) probabilities from evidence* (non esiste una procedura standard per ricavare valori di probabilità dall'evidenza).

Quindi l'utilizzo delle probabilità epistemiche in classe può portare a diversi problemi per l'insegnante; vediamone alcuni:

- Le probabilità non sono solitamente determinabili come un unico numero.
- Talvolta le probabilità cambiano da individuo a individuo.

- Le probabilità non sono costruite in maniera «elegante», ad esempio tramite una formula.
- Le probabilità possono essere personaliste, e come tali, in un certo senso, arbitrarie e ingiustificabili.
- …

Questi problemi possono creare una situazione particolarmente destabilizzante per il docente, di conseguenza si preferisce far capo all'unica interpretazione della probabilità che non crea simili problemi, quella aleatoria, su insiemi finiti, con conoscenza completa degli esperimenti. Ma è veramente così destabilizzante parlare di probabilità epistemica in classe? Le difficoltà evidenziate sopra non possono diventare vantaggi formativi, se presentati nella giusta veste? Consideriamo ad esempio la seguente situazione pensata per il laboratorio matematico del primo biennio della scuola media superiore.

Laboratorio 3.1

È venerdì sera. Dopo una settimana di sole, il tempo sta volgendo al brutto. I due fratelli Andrea e Francesco (detto Ceghi) si stanno domandando che cosa convenga fare l'indomani. Avendo appena studiato la probabilità, decidono di utilizzarla per scegliere l'attività da svolgere il giorno successivo.

Andrea: Che tempo potrebbe fare domani? Magari piove tutto il giorno…

Ceghi: Magari non piove tutto il giorno, potrebbe darsi che piova di meno, magari solo mezza giornata. Forse inizia solo il pomeriggio.

Andrea: Oppure potrebbe piovere solo la mattina, se non piovesse del tutto mi sembrerebbe strano… se dovessi dirlo con una probabilità direi che la probabilità che non piova del tutto è al massimo il 20%.

Ceghi: Come sei pessimista… secondo me potrebbe arrivare al 30%.

Andrea: Mah, sicuramente la probabilità che piova mezza giornata è più alta di quella che non piova del tutto, almeno il 40%.

Ceghi: Hai ragione, secondo me però è più probabile che piova il pomeriggio che il mattino.

Andrea: Anche secondo me, guardando fuori dalla finestra non si vedono ancora molte nuvole e sono già le otto di sera. Io direi che la probabilità che piova solo mezza giornata è almeno il doppio di quella che piova tutto il giorno.

Ceghi: Sono d'accordo con te, anzi, secondo me è ancora di più, almeno il triplo. Allora, che cosa facciamo domani?

Andrea: Potremmo andare in montagna tutto il giorno, oppure solo il pomeriggio, così se piove la mattina non è un problema.

Ceghi: Secondo me è meglio se andiamo solo alla mattina, nel pomeriggio possiamo stare in casa e giocare a un gioco di società.

Andrea: E se stessimo in casa tutto il giorno?

Che cosa dovrebbero fare, secondo voi, i ragazzi, sapendo che preferiscono di gran lunga uscire che restare in casa, per essere d'accordo e rischiare – almeno secondo loro – di prendere meno acqua possibile?

Soluzione e discussione

Chiaramente i due fratelli stanno considerando le quattro possibilità:

P piove durante tutto il corso della giornata.
NP non piove mai.
PM piove solo durante la mattina.
PP piove solo durante il pomeriggio.

Indichiamo con P_A le proprietà stabilite da Andrea e con P_F le probabilità stabilite da Francesco. Ripassiamo in rassegna il testo della discussione indicando di volta in volta i giudizi probabilistici espressi:

Andrea: Che tempo potrebbe fare domani? Magari piove tutto il giorno. . .

Ceghi: Magari non piove tutto il giorno, potrebbe darsi che piova di meno, magari solo mezza giornata. Forse inizia solo il pomeriggio.

Andrea: Oppure potrebbe piovere solo la mattina, se non piovesse del tutto mi sembrerebbe strano… se dovessi dirlo con una probabilità direi che la probabilità che non piova del tutto è al massimo il 20%.
$\Rightarrow P_A\,(NP) \in [0;0{,}2]$

Ceghi: Come sei pessimista. . ., secondo me potrebbe arrivare al 30%.
$\Rightarrow P_F\,(NP) \in [0;0{,}3]$

Andrea: Mah, sicuramente la proprietà che piova mezza giornata è più alta di quella che non piova del tutto, almeno il 40%.
$\Rightarrow P_A\,(PP, PM) = P_A\,(PP) + P_A\,(PM) \in [0{,}4;1]$

Ceghi: Hai ragione, secondo me però è più probabile che piova il pomeriggio che il mattino.
$\Rightarrow P_F\,(PP, PM) = P_F\,(PP) + P_F\,(PM) \in [0{,}4;1] \quad P_F\,(PP) > P_F\,(PM)$

Andrea: Anche secondo me, guardando fuori dalla finestra non si vedono ancora molte nuvole e sono già le otto di sera. Io direi che la proprietà che piova solo mezza giornata è almeno il doppio di quella che piova tutto il giorno.
$\Rightarrow P_A\,(PP, PM) = P_A\,(PP) + P_A\,(PM) > 2 \cdot P_A\,(PP)\ P_A\,(PP) > P_A\,(PM)$

Ceghi: Sono d’accordo con te, anzi, secondo me è ancora di più, almeno il triplo. Allora, che cosa facciamo domani?
$\Rightarrow P_F\,(PP, PM) = P_F\,(PP) + P_F\,(PM) > 3 \cdot P_F\,(P)$

Andrea: Potremmo andare in montagna tutto il giorno, oppure solo il pomeriggio, così se piove alla mattina non è un problema.

Ceghi: Secondo me è meglio se andiamo solo alla mattina; il pomeriggio possiamo stare in casa e giocare a un gioco di società.

Andrea: E se stessimo in casa tutto il giorno?

Riassumendo abbiamo per Francesco:
$P_F\,(NP) \in [0;0{,}3]$
$P_F\,(PP) + P_F\,(PM) \in [0{,}4;1]$
$P_F\,(PP) > P_F\,(PM)$
$P_A\,(PP) + P_A\,(PM) > 2 \cdot P_A\,(P)$
da cui segue immediatamente che
$P_F\,(PP) > P_F\,(P)$
$P_F\,(PP) > P_F\,(PM)$

Sappiamo quindi che per Francesco bisogna preferire delle attività che prevedano di stare in casa il pomeriggio piuttosto che quelle che prevedono di stare in casa il mattino; stando in casa tutto il giorno rischiamo di perdere l'eventuale tempo asciutto del mattino. Della proprietà che non piova non sappiamo dire molto; supponiamo che sia massima, ossia P_F (NP) = 0,3, allora

P_F (PP) + P_F (PM) + P_F (P) = 0,7

sappiamo che delle tre è la più grande, quindi

$$P_F(\mathrm{PP}) > \frac{0,7}{3} = 0,2\bar{3} < 0,3 = P_F(\mathrm{NP})$$

Non possiamo sapere di più, quindi non sappiamo se l'evento con la probabilità più alta sia che piove solo il pomeriggio oppure che non piove del tutto.

Non possiamo quindi dire se sia meglio la scelta di stare fuori tutto il giorno oppure quella di stare fuori solo al mattino. Per Andrea troviamo all'incirca gli stessi risultati ad eccezione del fatto che

$$P_A(\mathrm{PP}) > \frac{1-0,2}{3} = 0,2\bar{6} > 0,2 = P_A(\mathrm{NP})$$

E quindi per Andrea la proprietà che piova il pomeriggio è sempre dominante sulle altre. Per Andrea stare in casa solo il pomeriggio è quindi la scelta migliore. Francesco invece non può decidersi.

Queste conclusioni sono tipiche del ragionamento probabilistico normale. Nella maggior parte dei casi non riusciamo a prendere una decisione unica sulla base della nostra conoscenza o dell'evidenza a nostra disposizione. È facile che alcune possibilità siano incomparabili; un'incomparabilità molto frequente nel ragionamento probabilistico reale, ma impossibile da trovare in un modello aletorio con conoscenza completa.

Questo laboratorio presenta una situazione che si avvicina molto di più degli esempi classici a una situazione reale di decisione in condizione di incertezza. Gli allievi confrontati con questo problema devono ragionare in maniera probabilistica, ma non applicare semplicemente le regole del calcolo della probabilità (che rimangono comunque importanti) ma anche cercando nuovi modelli probabilistici.

Essi sono costretti infatti a lavorare, almeno intuitivamente, con intervalli di probabilità e con espressioni verbali comparative (è almeno il doppio più probabile di…). Inoltre i due fratelli del problema non la pensano sempre nello stesso modo, per cui bisogna capire come combinare le convinzioni di due persone diverse. Le probabilità utilizzate in questo problema sono chiaramente di tipo epistemico. Non possiamo sapere se di tipo personalista, razionalista o logico; sicuramente non si tratta di probabilità aleatorie. Le importanti novità introdotte a livello di probabilità sono le seguenti:

- Le probabilità non sono uniche.
- Le probabilità aiutano a prendere una decisione ma non la forniscono direttamente.
- Le probabilità possono portare anche a situazioni di indecisione.
- La probabilità dipende dalla persona che sta pensando.

Ritengo che questo laboratorio sarebbe proponibile, con un'accurata preparazione preliminare sulle regole classiche della probabilità, anche con metodi aleatori, durante il primo biennio di scuola media superiore. Naturalmente anche questa ipotesi andrebbe verificata empiricamente. Bisogna anche fare bene attenzione di non cadere nell'eccesso opposto, ossia di proporre solo situazioni vaghe e di indecisione, oppure esclusivamente epistemiche. È giusto presentare situazioni di proprietà aleatoria; in questo caso però conviene proporre situazioni più realistiche, ossia situazioni in cui magari ci manca qualche informazione sull'esperimento che stiamo considerando.

Vediamo per esempio la situazione seguente:

Laboratorio 3.2 (Paradosso di Ellsberg)

Andrea propone a Francesco il seguente gioco.

Andrea: In questo sacchetto ci sono trenta biglie rosse e sessanta biglie gialle o blu.

Scegli un colore, io pesco una biglia a caso e se la biglia è del colore che hai scelto vinci un franco, altrimenti mi dai un franco. Che cosa ne pensi?

1. Provate a rispondere ai seguenti quesiti:
   Che colore sceglieresti se fossi obbligato a giocare?
2. I premi e le rispettive perdite sono adeguate al gioco? Prova a costruire la risposta che Francesco potrebbe dare ad Andrea su questo punto.
3. Secondo te si tratta di un gioco leale?

Soluzione e discussione

Chiaramente in questo caso si tratta di considerare probabilità aleatorie; infatti queste dipendono esclusivamente dal numero di biglie presenti nel sacchetto. La differenza rispetto ai problemi classici sta nel fatto che le caratteristiche necessarie per costruire le probabilità non sono conosciute completamente. Le uniche cose che si possono dire sulle probabilità sono le seguenti. Indichiamo con P(R), P(G), P(B) le probabilità che pescando una biglia a caso dal sacchetto questa sia rispettivamente rossa, gialla, o blu. I dati a nostra disposizione ci forniscono le seguenti condizioni sulle probabilità:

$$P(R)=\frac{1}{3}$$

$$0=\frac{0}{90}\le P(G)\le\frac{60}{90}=\frac{2}{3}$$

$$0=\frac{0}{90}\le P(B)\le\frac{60}{90}=\frac{2}{3}$$

$$P(G)+P(B)=\frac{2}{3}$$

Da queste condizioni si deduce che in realtà è impossibile scegliere con sicurezza un colore con una probabilità più alta degli altri di vincere. Ogni colore potrebbe avere una probabilità più alta o uguale degli altri di vincere. Interessante il caso del rosso; esso ha la probabilità più alta (1/3) solo se gli altri colori sono presenti in uguale misura, ossia trenta biglie gialle e trenta biglie rosse; in questo caso tutti i colori sono equiprobabili e quindi il rosso non è mai dominante.

Questa situazione è stata descritta da Ellsberg nel 1961 ed è nota con il nome di Paradosso di Ellsberg. Dove sta il paradosso? Semplice: proponendo a una classe (o a un qualsiasi insieme di persone) questo gioco, la maggior parte degli interpellati sceglierà come colore il rosso; ma il rosso è l'unico colore che ha probabilità massima solo quando gli altri colori sono presenti in uguale misura, mentre in tutti gli altri casi un altro colore sarà meglio. Questo effetto è detto avversione all'ambiguità ed è un effetto psicologico che spinge gran parte delle persone, in una situazione di decisione, a scegliere le opzioni di cui sanno di più, indipendentemente dalla possibile utilità. L'indeterminatezza, ossia la parziale conoscenza delle condizioni di un certo esperimento aleatorio, è uno dei problemi più frequenti in pratica, se bisogna lavorare con probabilità aletorie. È illusorio pensare di poter formare negli allievi un pensiero probabilistico adeguato alla realtà, presentando solo situazioni aletorie con conoscenza completa. Anche questa attività di laboratorio, come la precedente, potrebbe essere sperimentata in una quarta media o in una prima liceo.

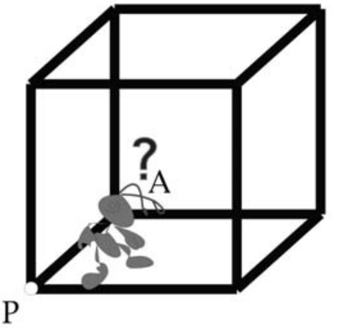
4 Conclusioni

L'interpretazione del concetto di probabilità ha un'importanza fondamentale nel pensiero probabilistico. Senza un'adeguata interpretazione infatti le premesse e le conclusioni di un pensiero probabilistico non possono che essere arbitrarie e inutilizzabili. Spesso, in realtà, sono le convinzioni di un certo individuo che lo spingono a compiere un ragionamento; queste convinzioni possono essere generate da un certo stato di evidenza oppure da semplici considerazioni personali.

In questo caso si parla di probabilità epistemiche, in contrasto con l'altra grande famiglia di probabilità, quella delle probabilità aleatorie. Le probabilità aleatorie sono molto usate in teorie scientifiche ma raramente utilizzate per compiere ragionamenti probabilistici. Nell'insegnamento della probabilità finora l'interpretazione è stata considerata una componente marginale, oppure si è fatto leva solo sul concetto aletorio della probabilità. Sono dell'opinione che in realtà la mancata interpretazione sia una delle fonti maggiori di diffidenza nei confronti di tutta la teoria della probabilità. Sono altresì convinto che un'adeguata distinzione tra i diversi tipi di probabiltà, così come proporre situazioni problema basate su probabilità epistemiche o situazioni aletorie di conoscenza incompleta, possa aiutare a formare nei ragazzi un pensiero probabilistico più sano, efficace e realistico, e, soprattutto, possa aiutare a far sì che i ragazzi non si allontanino dalla probabilità considerandola un mero esercizio scolastico. Tutte le ipotesi proposte in questo articolo sono personali e devono ancora essere verificate empiricamente nella ricerca che sta partendo in questi giorni in Ticino, condotta dall'autore insieme con Gianfranco Arrigo. Invito tutti coloro che fossero interessati a collaborare a questa ricerca in qualche forma, anche colleghi che lavorano in altri paesi, a prendere contatto con noi.

Quiz 32
Passeggiate sul cubo

Caro Joe, stavolta ci occupiamo di «passeggiate» sul cubo scheletrato.
Immagina di essere la formica situata in P che deve scegliere un qualsiasi altro vertice A del cubo come meta di una sua possibile passeggiata.
Una volta scelto s'incammina verso A muovendosi sugli spigoli rispettando la condizione **di mai ripassare da un vertice già toccato.**



Caro Archie, ho provato a immaginare alcuni dei possibili tragitti per la nostra amica.
Mi sembrano tanti, di diversa lunghezza e se provo a disegnarli si aggrovigliano uno sull'altro...
Così mi sono subito perso.

Avete capito!? Vorremmo che aiutaste i nostri amici a «contare» tutti i percorsi possibili, da quelli più lunghi a quelli più brevi,
… e magari anche a descriverli.

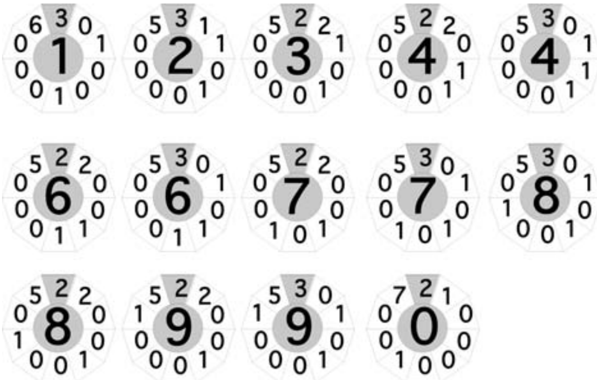
Quanti diversi itinerari esistono? Come sono? E di quale lunghezza?

Soluzione del Quiz numero 31

Questa volta purtroppo ci sono pervenute soltanto soluzioni parziali e incomplete. Fra queste anche un interessante tentativo di risoluzione con l'aiuto di Excel, facente capo alla particolare funzionalità di poter lavorare con formule autoreferenziali.

La redazione propone allora una soluzione che, grazie alla sua analiticità, permette di entrare nel dettaglio della struttura soggiacente.

Ecco intanto tutti i possibili fiori autoreferenziali proposti da Archie: sono 14. Due di centro 4, 6, 7, 8, 9 uno di centro 0, 1, 2, 3 e, strano ma vero, nessuno di centro 5.



Come si possono ottenere?

Dopo un primo approccio costituito da una serie di tentativi concreti di completare un fiore, per poter continuare con un minimo di ordine appare evidente la necessità di fissare alcune notazioni.

Eccole:

p_i l'i-esimo petalo, con $1 \le i \le 10$,

c il numero situato al centro del fiore, con $0 \le c \le 9$,

n_i il numero situato sul petalo p_i, con $1 \le i \le 10$,

f_k la frequenza del numero k nella successione degli undici numeri presenti sul fiore.

Evidentemente vale che $f_i = n_i$ per $i \le 9$, mentre $f_o = n_{10}$.

Dopo un minimo lavoro di analisi è possibile individuare e formulare delle condizioni-proprietà molto utili per continuare. Ecco le più importanti:

(C1) $0 \le f_k \le 9$; il contrario, cioè $f_k = a$, con $a \ge 10$, implicherebbe la necessità di poter scrivere da qualche parte la frequenza di a, dunque dovremmo avere più di 10 petali, in contraddizione con l'ipotesi di lavoro;

(C2) $$\sum_0^9 n_i = \sum_0^9 f_i = 11;$$

vera siccome n_i è il numero di volte che il numero i appare negli 11 posti disponibili;

(C3) $f_k = 1$ per $k \geq 4$, altrimenti si entrerebbe in contraddizione con C2;

(C4) $f_0 > 4$, altrimenti la somma dei numeri sui vari petali sarebbe maggiore di 11, come si può verificare facilmente caso per caso.

Restano quindi da analizzare i cinque casi seguenti: $f_0 = 5$, $f_0 = 6$, $f_0 = 7$, $f_0 = 8$, $f_0 = 9$

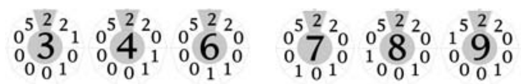
Caso $\mathbf{f_0 = 5}$:

Se $f_0 = 5$ ci sono 4 o 5 petali che portano numeri diversi da 0 la cui somma dev'essere 6, a seconda che $c \neq 0$ oppure $c=0$.

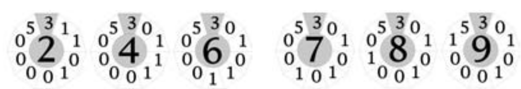
Le possibilità di ottenere tale somma sono del tipo:

a. 2+1+1+1+1
Non accettabile siccome avremmo $f_1=z$ con $z \geq 4$, in contraddizione con il fatto che z non figura come addendo.

b. 2+2+1+1
Caso accettabile che comporta: $f_0 = 5$, $f_5 = 1$, $f_2=2$, $f_1=2$; un «1» è riservato a p_5, l'altro «1» può occupare invece qualsiasi petalo p_i, con $i \in \{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$, a indicare la frequenza di c.
Si ottengono così i sei fiori seguenti:



c. 3+1+1+1
Caso accettabile che comporta: $f_0=5$, $f_5=1$, $f_1=3$, $f_3=1$;
due degli «1» sono riservati a p_5 e p_3, il terzo «1» può essere invece sistemato su uno qualsiasi dei rimanenti petali p_i, dunque con $i \in \{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$, a misura della frequenza di c.
Si ottengono così i sei fiori seguenti:



Caso $\mathbf{f_0 = 6}$:

In questo caso i petali «liberi» sono 3 o 4 e la somma dei numeri mostrati dev'essere 5, a seconda che $c \neq 0$ oppure $c=0$.

Le possibili somme sono:

a. 2+1+1+1
Non accettabile siccome si avrebbe $f_1=3$ con il «3» che non figura come addendo.

b. 2+2+1
Siccome $f_1=1$ e $f_2=2$, dovremmo avere due numeri diversi da «1» e diversi tra loro che compaiono due volte. Ciò comporterebbe però una contraddizione con C2.
Dunque questo caso non ha soluzioni.

c. 3+1+1
Caso accettabile che comporterebbe: $f_0=6$, $f_6=1$, $f_3=1$

La presenza del «3» implica l'esistenza di un addendo $i \neq 0$ che compare tre volte, dunque con $f_i=3$.
Per C2 quest'ultimo non può essere che «1»; ciò che implica $c=1$.
Si ottiene così il seguente fiore:

Caso $\mathbf{f_0 = 7}$:
In questo caso i petali «liberi» sono 2 o 3 e la somma dei numeri mostrati dev'essere 4.
Le possibili somme sono:

a. 2+2
Ciò comporta $f_0=7$, $f_7 \geqq 1$, $f_2=2$; siccome non può esserci un secondo «7» (vedi C3) dovrebbe esistere un numero i diverso da «7» e da «2» che compare due volte. Per qualsiasi valore possibile di i si ottiene però una contraddizione a C2.

b. 3+1
Ciò comporta $f_0=7$, $f_7=1$, $f_3=1$. Inoltre dovrebbe esistere un numero i diverso da «7» e da «1» tale che $f_i=3$. Anche qui, per qualsiasi valore ancora possibile di i si ottiene però una contraddizione a C2.

c. 2+1+1
Ciò comporta $n_0=7$, $n_1=2$, $n_2=1$, $n_7=1$, $c=0$
Si ottiene così il seguente fiore:

Caso $\mathbf{f_0 = 8}$:
In questo caso i petali «liberi» sono 1 o 2 e la somma dei numeri mostrati dev'essere 3, a seconda che $c \neq 0$ oppure $c=0$.
Le possibili somme sono:

a. 3
Caso impossibile siccome la presenza del 3 assieme a $c=0$ implicherebbe l'esistenza di tre addendi uguali (tutti diversi da 0), in contraddizione con l'ipotesi.

b. 2+1
Caso impossibile siccome la presenza del 2 implicherebbe l'esistenza di due addendi uguali (entrambi diversi da 0), in contraddizione con l'ipotesi.

Caso $\mathbf{f_0 = 9}$:
Se $c \neq 0$ non esiste soluzione siccome la somma delle frequenze sarebbe 9, in contraddizione con C2.
Il caso $c=0$ implica l'esistenza un addendo uguale a 2; di conseguenza dovrebbero esserci due addendi uguali (entrambi diversi da 0), in contraddizione con l'ipotesi.

1. VII Simposio de Educación Matemática (VII SEM)[1]

Chivilcoy (Provincia de Buenos Aires, República Argentina)
Boletín Nro. 3 (Agosto '04)

Entre los días 3 y 6 de Mayo del Año 2005, en la ciudad de Chivilcoy (Provincia de Buenos Aires, República Argentina) tendrá lugar el VII Simposio de Educación matemática, que respetando los fundamentos pautados en las ediciones previas (1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004), presentará como eje temático, no excluyente, un aspecto esencial para el mejoramiento de la enseñanza en Matemática, «Investigación en Didáctica de la Matemática».

Es importante considerar que ya han confirmado su presencia en carácter de Disertantes invitados, investigadores-docentes reconocidos mundialmente, quienes habiendo sido invitados han comprometido su participación en actividades que se han establecido en general, y que se irán definiendo en el curso de los próximos meses, a saber:

- Gianfranco Arrigo (Alta Scuola Pedagógica de Locarno, Suiza)
- Bruno D'Amore (Universidad de Bologna, Italia)
- Salvador Llinares (Universidad de Alicante, España)

El VII SEM está dirigido, supervisado y organizado por un núcleo de investigadores, docentes y graduados, contando con la valiosa colaboración de alumnos del Centro Regional Chivilcoy de la Universidad Nacional de Luján, y está auspiciado por EDUMAT (Personería Jurídica Nº 979 de la Provincia de Buenos Aires, República Argentina) y el Departamento Ciencias Básicas de la Universidad Nacional de Luján, persiguiendo el objetivo de propender a la formación educativa en Matemática, tanto en el ámbito docente, como en investigación y en transferencia integral de conocimientos.

1. La redazione del BDM ha deciso di non tradurre in italiano questo annuncio, perché, come hanno potuto costatare coloro che hanno seguito la conferenza di Salvador Llinares al recente convegno di Didattica della Matematica di Locarno, quando l'espressione spagnola è semplice e viene presentata chiaramente, l'italofono capisce.

Convocatoria a Presentación de Propuestas Académicas

Se informa a docentes e investigadores de todos los niveles educativos la apertura de la convocatoria de Proyectos de actividades académicas (seminarios y talleres) y la presentación de Artículos regulares en las siguientes disciplinas:

- Aprendizaje Cooperativo
- Aprendizaje y Matemática
- Aulas virtuales en enseñanza de Matemática
- Cognición y Matemática
- Construcción de juegos didácticos matemáticos
- Desarrollo de software educativo para matemática
- Didáctica matemática
- Didáctica matemática computacional
- Diseño curricular en matemática
- Estadística educativa
- Educación matemática en la formación de profesores
- Etnomatemática
- Formulación de problemas
- Historia de la matemática
- Investigación en didáctica matemática
- Investigación en educación matemática
- Investigación en modelos matemáticos de aprendizaje
- Metodologías de educación a distancia en ciencias matemáticas
- Metodologías educativas en ciencias matemáticas
- Metodologías interactivas: Aprendizaje cooperativo
- Modelado y resolución de problemas
- Modelado lógico de cognición e inteligencia
- Modelado matemático de inteligencia
- Modelos estadísticos de aprendizaje
- Modelos matemáticos cognitivos
- Procesos de enseñanza-aprendizaje en ciencias matemáticas
- Tecnología en educación matemática
- Transferencia de modelos matemático-lógicos a inteligencia artificial
- Valuación y evaluación en matemática

Las propuestas de actividades académicas serán sometidas a arbitraje, procedimiento que estará a cargo del Comité de Programa (o Académico); en consecuencia, sólo se desarrollarán aquellas actividades que, a juicio de los árbitros, satisfagan los criterios y las condiciones mínimas establecidos para el Simposio.

Los artículos serán sometidos a arbitraje, procedimiento que estará a cargo del Comité Académico (o Comité de Programa); razón por la cual, sólo se expondrán en el Simposio aquellos artículos (regulares o póster) que hayan satisfecho las condiciones mínimas establecidas por tal comité, que inicialmente se encuentra integrado por:

- Arno Bayer (ULBRA, Brasil)
- Walter Beyer (UNA, Venezuela)
- María Salett Biemengut (Universidade Regional de Blumenau, Brasil)

- Guy Brousseau (Universidad de Bordeaux, Francia)
- Rodolfo Chaves (Universidade Federal de Viçosa, Brasil)
- Sandra Crespo (Michigan State University, Estados Unidos)
- Ubiratan D'Ambrosio (Universidade de Sao Paulo, Brasil)
- Bruno D'Amore (Universitá de Bologna, Italia)
- Juan Diaz Godino (Universidad de Granada, España)
- Marta Isabel Fandiño Pinilla (NRD, Universitá de Bologna, Italia)
- Fredy E. Gonzalez (ASOVEMAT, Venezuela)
- Carina González González (Universidad La Laguna, Is. Canarias, España)
- Guillermo Hansen (UBA/Universidad Nacional de Luján, Argentina)
- Ulrich Hoppe (Växjö University, Sweden)
- Carmen Kaiber da Silva (ULBRA, Brasil)
- Eduardo Luna (Barry University, Estados Unidos)
- Eduardo Mancera (UPN, México)
- Lorenzo Moreno Ruiz (Universidad de La Laguna, Is. Canarias, España)
- Castor David Mora (Universidad Mayor de San Andrés, Bolivia)
- Magdalena A. Moujan Otaño (UNLu, Argentina)
- Claudia Oliveira Groenwald (ULBRA, Brasil)
- Myriam Ortiz Hurtado (Fundación APRENDeS, Colombia)
- Fidel Oteiza (Universidad de Santiago de Chile, Chile)
- Fausto Toranzos (Universidad de Buenos Aires, Argentina)
- Nelson Hein [Coordinador en América] (Universidade Regional de Blumenau, Brasil)
- Marcelo F. Milrad [Coordinador en Europa] (Växjö University, Sweden)
- José María Turull Torres [Coordinador en Oceanía] (Massey University, New Zealand)
- Jorge Enrique Sagula [Chairman, Academic Committee] (UNLu, Argentina)

Instrucciones

Las Normas de Presentación para las diferentes categorías de Proyectos de actividades académicas enviadas a Evaluación se consignan seguidamente, destacando que exclusivamente deben enviarse por correo electrónico:

academic@edumat.com.ar

I. Actividades academicas

I.a. Seminarios, Talleres

- Primera página: Título, Modalidad propuesta, Disertante, Institución, Dirección Postal, Correo Electrónico, Palabras Claves (seis como máximo), Destinatarios y Resumen (entre 200 y 250 palabras).
- Desde la segunda página hasta la quinta página se describirá el contexto de la propuesta con su debida fundamentación, en la modalidad de resumen extendido (4 páginas), incluyendo las referencias bibliográficas que

especifican el contenido. La estructura debe satisfacer el formato de artículo regular.

- El documento deberá ajustarse a estos lineamientos:
  - Texto: En WORD for WINDOWS, Versión 6.0 o superior.
  - Títulos: Fuentes de 12 puntos, en negrita, subrayadas (Times New Roman).
  - Subtítulos: Fuentes de 11 puntos, en negrita, subrayadas (Times New Roman).
  - Cuerpo de la propuesta: -Fuentes: 10 puntos (Times New Roman).
    - · Márgenes: superior, 3 cm; inferior, 2,5 cm; izquierdo, 3 cm y derecho, 2,5 cm. Justificado; sin sangría.
    - · Interlineado: sencillo
    - · Hojas: sin numerar
  - Bibliografía: Las referencias bibliográficas se especificarán alfabéticamente en cuanto al apellido de los autores, consignando seguidamente: año, título completo del artículo o texto, nombre de la publicación, volumen, número de las páginas inicial y final, editorial.
- Es imprescindible dirigir una nota al Presidente del Comité Académico asumiendo el compromiso de asistir al Simposio si el proyecto propuesto es aceptado, planteando las necesidades para desarrollar la actividad.
- Ninguna propuesta podrá contener más de tres (3) disertantes.
- Fechas importantes e información de interés
  Fecha límite (para recepción): 16 de Octubre de 2004
  Envío a: academic@edumat.com.ar
  (Jorge E. SAGULA; Presidente de Comité Académico)
  Nota: Sólo se analizarán las propuestas que se enmarquen en las especificaciones previas y sobre las cuales se hayan respondido los mensajes de envío.
  Notificación sobre evaluación: 23 al 27 de Noviembre de 2004
- Se deja constancia que en función de la evaluación efectuada, el proyecto original se podrá aceptar, redireccionar a otra modalidad o bien, rechazar; si es aceptado o en su defecto redireccionado, es imprescindible inscribir (no sólo registrar sus datos), antes del día 21 de Diciembre de 2004, la actividad a realizar (esta inscripción oficiará como inscripción personal al Simposio de uno de los disertantes); para ello, se deberá recabar la información correspondiente en la página web: www.edumat.com.ar

Notas

Los talleres durarán cuatro y media horas distribuidas en tres días.

2. Recensioni

Bruno D'Amore, Martha Isabel Fandiño Pinilla, Giorgio Mainini

Gianfranco Arrigo, Silvia Sbaragli – I solidi. Riscopriamo la geometria – Scuola facendo, Carocci Faber, Roma, 2004, 107 pag., 10,00 €

Prefazione di Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla.

Da vari anni questi due Autori lavorano nel campo della didattica della Geometria, ma solo da poco hanno scoperto la stretta affinità del loro lavoro. Hanno da sempre sostenuto il principio (che fu pronunciato e difeso anche dal grande matematico italiano Federigo Enriques) che ha senso studiare la Geometria in senso inverso a come si fa di solito, cioè passando dallo spazio tridimensionale al piano bidimensionale e non viceversa. L'atteggiamento anti spontaneo di considerare dapprima le sofisticate (perché prive di modello) figure piane ha certo illustri origini antiche, basate sulle scelte matematiche di Euclide, ma non rappresenta il modo che segue l'essere umano nel suo apprendere; il bambino vede, tocca e soppesa le cose (oggetti) tridimensionali prima di farsi l'idea dell'esistenza di astratte figure bidimensionali. Mentre per un matematico ha senso passare dal semplice (a due dimensioni) al più complesso (a tre), questo passaggio è molto più naturale se viene invertito, in didattica. Inoltre, lo studio della geometria si rivela fallimentare nella scuola (tanto è vero che molti insegnanti smettono di insegnarla al primo biennio delle scuole superiori) perché non c'è una concertazione didattica curricolare intelligente e si tende a far costruire conoscenza geometrica troppo presto, senza saper gestire questioni di natura cognitiva molto diversa. È così che questi due Autori hanno avuto il coraggio di ribaltare tutta la didattica tradizionale, ma creando anche un percorso curricolare completo verticale che possa far capire il senso che ha una didattica critica costruttiva, intelligente della geometria, che tenga conto sì della disciplina, ma soprattutto della figura del discente. Ciò è loro reso possibile dalla grande competenza che entrambi hanno in Didattica della Matematica, sia perché sono entrambi docenti di questa disciplina, sia perché entrambi sono ben noti ricercatori nella stessa. Il risultato è eccellente sotto ogni profilo.

Ubiratan D'Ambrosio – Etnomatematica – Pitagora, Bologna, 2002, 187 pag., 15,00 €

Dalla prefazione di Bruno D'Amore: «Questo libro intende presentare al lettore italiano l'*Etnomatematica*, una disciplina che s'è inserita nel panorama della ricerca da pochi decenni e che copre un vuoto a metà strada tra la Matematica e l'Antropologia culturale. In realtà presentiamo qui due libri distinti, dello stesso Autore, l'uno pubblicato nel 1998 e l'altro nel 2001, entrambi in Brasile. Nel primo libro, l'Autore propone soprattutto riflessioni a carattere specifico sulla sua disciplina … Nel secondo libro, invece, l'orizzonte si amplia e D'Ambrosio *cattura* con rigore e discorsi affascinanti altre discipline ed altri obiettivi…».

Il libro, anzi *i due libri*, merita di essere letto, per l'apertura che offre verso una visione della Didattica della Matematica, alle nostre latitudini, del tutto nuova. Per ingolosire il potenziale lettore citerò alcuni passaggi. Dal *primo libro*: «Perché si insegna matematica nelle scuole con tale universalità ed intensità? … Elencheremo alcune [risposte] di quelle che più tradizionalmente si danno, ma in forma di interrogativi. … 1. Per la sua bellezza intrinseca come costruzione logica, formale ecc.? [segue critica] 2. Per la sua universalità? [segue critica] 3. Perché aiuta a pensare con chiarezza e a ragionare meglio? [segue critica] 4. Perché è parte integrante delle nostre stesse radici culturali? [segue critica] 5. Perché è utile? [segue critica]». Le, corte, analisi qui nascoste dai «[segue critica]» danno seriamente da riflettere. Altra citazione «Tentando di portare queste considerazioni nella pratica della didattica della matematica nelle scuole, dobbiamo rivolgerci alle situazioni 'veramente reali'. Progetti di natura globale, come la costruzione di una capanna o la redazione della mappa di una città o la valutazione del consumo di acqua, forniscono informazioni che implicano la gestione di problemi e modelli. La risoluzione di problemi viene di conseguenza …». Chi, anni fa, tentò di lanciare l'idea di «insegnamento per progetti», incontrando la fiera resistenza dei pensatori istituzionali, leggerà questo passaggio con una certa soddisfazione. Ancora: «Quello che si deve necessariamente evitare è la valorizzazione, nel sistema scolastico, di un tipo di matematica a detrimento di altri. Qui entra in gioco l'*etnomatematica*. In questo contesto, quello che sarebbe un problema del sistema educativo, cioè quello di voler sapere se un bambino sta ricevendo esposizioni di contenuti differenti da un altro come conseguenza di razza, classe sociale o sesso, è un falso problema. Il vero problema consiste nel valorizzare più una specie di matematica che un'altra.». Vista l'eterogeneità delle popolazioni scolastiche con le quali si è confrontati da un paio di decenni in qua, l'indicazione può ben essere meditata. Ma l'etnomatematica ha ben più vasta portata. Del *secondo libro* citerò solo i titoli di qualche paragrafo: «Arrivare oltre la sopravvivenza», «Dall'individuale al collettivo», «La transizione dal ventesimo al ventunesimo secolo», «Verso una civiltà planetaria», «L'incontro delle culture», «Le diverse dimensioni della PACE». Invito, infine, a studiare a fondo le implicazioni dello schema a pagina 131, in particolare il «corto circuito» comprendente le due caselle «che genera conoscenza» e «per spiegare, capire, interagire con». (G. M.)

Progetto grafico
Bruno Monguzzi
Fotocomposizione
Taiana
Stampa
Veladini

Redazione
Laboratorio di didattica della matematica
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera

Telefono
091 814 34 28/57/58
Fax
091 814 44 92

Amministrazione
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera
Fax
091 814 44 92

Esce due volte all'anno
a maggio e a dicembre

Abbonamento annuo
Sfr. 30.–
€ 16