A cura
del Laboratorio di didattica della matematica

Bollettino dei docenti di matematica

50

1980—2005
50 numeri di didattica della matematica

Maggio
2005

Ufficio
dell'insegnamento medio
Centro
didattico cantonale

Bollettino
dei docenti di matematica
50

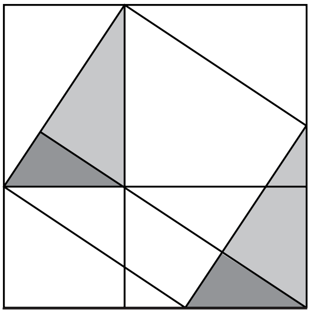
Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport

ISBN 88-86486-52-9

Bollettino dei docenti di matematica 50

Maggio
2005

Ufficio dell'insegnamento medio
Centro didattico cantonale



Indice

Prefazione

Il numero 50 esce in veste speciale: un evento come questo non si poteva non sottolineare. Così, grazie all'entusiasmo di alcuni fedelissimi, siamo riusciti a dare degno risalto ai 25 anni di ininterrotta pubblicazione allestendo un numero speciale con articoli esclusivi firmati da persone che hanno dato lustro al Bollettino.

La pubblicazione, infatti, partita modestamente nella forma di un mazzetto di fogli graffati, ha poi conosciuto notevoli e impensabili sviluppi sia nei contenuti sia nella forma tipografica.

La validità dei contenuti è garantita dalle firme di tutti quelli che hanno dato vita ai 50 numeri, in particolare ai personaggi conosciuti in ambito internazionale. Ma il riconoscimento che ci ha fatto più piacere è stato senza dubbio quello del Zentralblatt für Mathematik, che recensisce anche articoli del nostro Bollettino. Grazie a ciò abbiamo potuto pubblicare articoli di accademici che poi sono stati riconosciuti nell'ambito dei concorsi a cattedre universitarie.

La veste tipografica ha conosciuto pure un continuo sviluppo, passando dall'era delle macchine da scrivere a quella dei personal computer, per poi giungere all'attuale veste tipografica curata da Bruno Monguzzi, che è stata premiata nell'ambito del concorso per i più bei libri svizzeri nel 1997.

Il numero 50 viene eccezionalmente distribuito a partire dal 21 settembre: non per un ritardo dovuto a problemi interni, ma per far coincidere la pubblicazione con i festeggiamenti che si tengono quel giorno nell'Aula Magna della Scuola Arti e Mestieri di Bellinzona. Possiamo ritenerci soddisfatti perché gli articoli giunti alla redazione sono molti: segno che la nostra pubblicazione raccoglie sempre ampi consensi. Abbiamo così fatto uno strappo alla regola e, grazie all'appoggio della Divisione della scuola, usciamo con due sedicesimi in più.

Malgrado ciò, non abbiamo potuto dare spazio a tutti gli scritti che attendono di essere pubblicati. Ci scusiamo in modo particolare con Carlo Malaguerra, Alfio Quarteroni, Gianfranco Domenighetti, Paolo Hägler, Manuel Rigamonti e Edo Montella e assicuriamo che i loro articoli appariranno sul numero 51, che uscirà regolarmente nel prossimo mese di dicembre. A pagina 4 abbiamo riprodotto il logo che il caro amico Antonio Steiner ha ideato per l'occasione. Lo ringraziamo e su questa figura torneremo nel prossimo numero.

I festeggiamenti del numero 50 segneranno inoltre una nuova fase del Bollettino dei docenti di matematica:

- la pubblicazione in formato elettronico di tutti i numeri dal primo al cinquantesimo e successivi in una postazione del sito scuoladecs.ti.ch;
- la pubblicazione di alcuni fascicoli con i contributi più significativi, apparsi sul Bollettino, concernenti un dato tema di interesse generale.

Con questa nuova fase di sviluppo, la direzione della pubblicazione e tutti i collaboratori si augurano di contribuire anche nel futuro alla formazione continua degli insegnanti di matematica.

I. Didattica

1. Storia ed epistemologia della matematica come basi etiche universali[1]

Bruno D'Amore, Martha Isabel Fandiño Pinilla[2]

The arrival of foreign workers, speakers of many different languages, in industrialised countries, leads to the presence in classrooms of increasing numbers of students who come from other cultures, speak other languages and sometimes know and use other Mathematics. Ignore or refuse to accept this reality is not only ethically unjust but also a loss of a great opportunity, both cultural and didactic. This loss is often caused by the mistaken belief that the Mathematics taught in the host countries to native or immigrant students is unique or universal. On the contrary, knowledge of the diverse cultural origins of the different branches of Mathematics could be of great ethical benefit in avoiding useless barriers and divisions.

1. Premessa didattica

Siamo sempre più convinti che alla base di una significativa formazione dei futuri insegnanti di Matematica vi sia un apprendimento molteplice che va in questo ordine (da intendere anche in senso gerarchico):

Una buona preparazione matematica
(che dovrebbe essere *specifica*
per la professione docente)

↓

Un'approfondita preparazione
su questioni storiche ed epistemologiche
della Matematica

↓

Una profonda preparazione in Didattica
della matematica (ivi compresa,
quando possibile, una riflessione critica
anche su questa)

In D'Amore, Fandiño (2004) abbiamo mostrato come questo sia possibile e professionalizzante in Italia nelle Scuole di Specializzazione post laurea per la

1. Lavoro eseguito nell'ambito del Programma di Ricerca: «Aspetti metodologici (teorici ed empirici) della formazione iniziale ed in servizio degli insegnanti di matematica di ogni livello scolastico» finanziato con fondi 60% dall'Università di Bologna (Dipartimento di Matematica).

2. N.R.D., Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia. A.S.P., Locarno, Svizzera.

formazione degli insegnanti di Matematica per la Scuola superiore, in altri Paesi nei corsi analoghi; mentre in D'Amore (2004a) abbiamo approfondito le specifiche motivazioni che ci spingono a ritenere *essenziale* per il futuro docente una formazione epistemologica; non si tratta di sole ragioni culturali (quelle evidenziate per esempio da Speranza, 1997, o da D'Amore, 2001), ma anche altamente professionali. Queste ultime sono principalmente legate alla problematica della valutazione dell'errore e dunque all'ostacolo epistemologico.

2. Una riflessione sulle universalità

Si dice sempre che vi sono (almeno) due linguaggi universali, la Musica e la Matematica. Tale supposta universalità starebbe nel fatto che si tratta di linguaggi che esprimono sentimenti, pensieri, verità indipendenti dal contesto, dalla lingua, dalla società.

Per la Musica ciò è solo relativamente vero. Basta avere la possibilità di ascoltare musiche regionali tradizionali (in genere riconoscibilissime) o anche musiche contemporanee di Paesi a forte valenza tradizionale.

Chi non distinguerebbe, all'interno dello stesso Caribe, un *merengue* della Dominicana, da un *vallenato* di Colombia? Solo un orecchio disattento o disinformato, come quello di un europeo non particolarmente colto in campo musicale, potrebbe confonderle. Ciascuna delle due musiche è espressione di tradizioni antiche, radicate nella cultura locale, e dunque si tratta di musiche altamente specifiche.

Chi non ha avuto modo di ascoltare musiche contemporanee prodotte (insistiamo: *oggi*) nei Paesi Arabi o in Cina? La matrice musicale è assolutamente inconfondibile.

Certo, un Mozart è considerato classico universale, alla portata di tutte le orecchie e di tutti i cervelli; ma questo risultato è dovuto ad una acculturazione imposta, non certo all'evoluzione naturale della sensibilità musicale dei diversi popoli.

C'è poi una musica prodotta dalla globalizzazione e dalla standardizzazione dei gusti, ma allora si tratta della *rinuncia* di un Paese o dei suoi abitanti, non di vera *universalità* spontanea; si tratta di un linguaggio musicale *imposto*.

Anche per la Matematica ciò è solo relativamente vero. Gli studi di D'Ambrosio (2002) hanno mostrato al mondo che il trionfo universale della Matematica consacrata come «quella nata nel bacino del Mediterraneo», è un trionfo imposto, non naturale, mentre esistono matematiche diverse, regionali, locali, il più delle volte soffocate, che rappresenterebbero la tradizione culturale locale. Noi stessi abbiamo dato, insieme ad altri, un contributo ad evidenziare queste realtà matematiche locali (D'Amore, Fandiño, 2001; D'Amore, 2002).

Certo, il concetto di derivata è considerato necessario ed universale, adatto a tutti i bisogni matematici di tutti i Paesi; ma questo risultato è dovuto ad una necessità imposta, non certo all'evoluzione naturale dello sviluppo matematico dei diversi popoli.

3. Babele in aula

Venti anni fa, e per 3 anni, uno degli autori del presente articolo è stato presidente del Girp[3] con sede direttiva a Walferdange, una cittadina del Granducato del Lussemburgo. Per motivi istituzionali era invitato a visitare relativamente spesso quel Paese ed in particolare classi di scuola primaria. Parlando di Didattica della matematica[4], gli insegnanti esprimevano il loro vero problema che era soprattutto di carattere linguistico. La loro lingua autoctona (il neerlandese) non la capivano più neppure i bambini autoctoni; avevano provato con francese e tedesco, ma si era trattato di un periodo temporaneo. Gli scolari stranieri allora presenti erano soprattutto Turchi, Portoghesi, *Italiani*, Marocchini, Tunisini, Albanesi, Macedoni... Vent'anni fa, nessuno avrebbe pensato ad una simile Babele in Italia, mentre in Svizzera era già cominciata da un pezzo. Oggi anche l'Italia ha problemi analoghi, in modo sempre più vasto. Tanto è vero che sono cominciati ad apparire lavori di ricerca in Didattica della matematica che accomunano problematiche matematiche a linguistiche (Breitwieser et al., 2004).

4. Cause ed effetti: le cose non succedono a caso

L'affannarsi di una piccola parte del mondo nell'arraffare dapprima con violenza esplicita e poi in modi violentemente più subdoli le preziose ricchezze di una grande parte del mondo, ha portato questa grande parte del mondo alla povertà. Si tratta di una povertà materiale, ma non di mancanza di risorse, perché questi Paesi hanno ancora risorse potenzialmente enormi che potrebbero sfruttare, se ne avessero i mezzi.

Si tratta peraltro di una povertà indotta: questa nostra piccola e ricca parte del mondo ha imposto modelli di vita a quella grande e povera parte del mondo, modelli che non erano propri di quelle culture, ma che inducono dipendenza e bisogni la cui soddisfazione richiede tutt'altro, rispetto a ciò cui le culture avrebbero portato, se si fossero sviluppate in modo naturale.

Per esempio, non è ìnsito nelle culture Maya o Quechua o Zulu o Inuit o… il piacere di guidare rombanti fuoristrada o di possedere vasta terra per sete di denaro; ma gli Europei tra il XVI ed il XX secolo hanno depredato, ucciso, distrutto e, soprattutto, imposto modelli culturali propri, religioni a-naturali che non lasciano scampo, sete di possesso. Ora, tutto sommato abbastanza tardi, dopo 3-400 anni, quelle popolazioni non vedono alternativa: per poter aspirare alla realizzazione del sogno del modello sociale europeo che ha trionfato, bisogna andare in Europa ed inserirvisi, lavorare, guadagnare, possedere quei simboli di benessere. Una lavatrice, un'auto, un frigorifero sono ancora sogni inarrivabili per la grande maggioranza delle famiglie del mondo. E così Macedoni, Albanesi, nordafricani arrivano.

C'è sempre chi, nei vari governi, cavalcando ignoranze populiste nella ricerca di facile consenso, assume il ruolo di difensore delle radici culturali; ma c'è anche chi, fortunatamente molti più, parla di accoglienza, ricordando gli emigranti della

3. Groupe International de Recherche en Pédagogie des Mathématiques.
4. Ancora oggi è chiamato ad occuparsi della formazione in servizio di quegli insegnanti di Matematica di scuola primaria; per curiosità, è stata scelta la lingua tedesca (D'Amore, 2004b).

propria nazione. Per esempio questo è un sentimento assai popolare in quella Italia (Stella, 2002) che ancora ricorda i propri familiari, un secolo fa, andare in USA, in Australia, in Canada, in Argentina, in Germania, in Svizzera,… in Lussemburgo.

Alcune nazioni, come quelle citate, devono proprio la loro attuale forza economica a livello globale alla mescolanza di idee, di tradizioni, di lingue, al desiderio di affermarsi, lavorando duramente, di quelle popolazioni immigrate.

Viste le vicende sviluppatesi tra il XVI ed il XX secolo, vista la colonizzazione violenta, visto l'eurocentrismo dilagante, le cose non possono ora che andare così. I pronipoti dei violentati, degli sfruttati, degli oppressi arrivano. Non chiedono la restituzione delle immense ricchezze depredate, chiedono di lavorare, di svolgere quei mestieri umili che nessun europeo vuol più fare, esattamente come fecero gli Italiani cent'anni fa negli USA, in Australia ed in Canada.

E così ci ritroviamo oggi, anche in Italia, aule come quelle che venivano descritte in Lussemburgo 20 anni fa… poliglotte ma soprattutto policulturali.

5. Matematica ed eurocentrismo

Siamo così eurocentrici che, a volte, analizziamo le competenze dei bambini stranieri sulla base dei modelli e dei registri nostrani, come se fossimo noi Europei i depositari della cultura e della verità assolute.

Crediamo sia bene, invece, pensare a come stanno le cose per davvero, almeno in Matematica. Ci serviamo dei testi seguenti, anche se non faremo ogni volta le citazioni specifiche per non essere pedanti: Boyer (1968), D'Amore, Matteuzzi (1976), Ifrah (1981), Neugebauer (1957), Picutti (1977).

5.1. Cifre

I segni delle cifre che usiamo oggi sono nati in India, riformulati nel mondo arabo, un po' in Persia ed un po' in Iraq. La stessa parola «cifra» è araba: *zifr* (ved. 5.3.). In Europa sono arrivati dopo il IX secolo, in Italia nel XIII; l'accoglienza non è stata delle più felici: le *cifre delli Indi* furono di fatto a lungo avversate.

5.2. Sistema posizionale

L'idea di usare un sistema posizionale non venne in mente né agli Etruschi, per quanto sofisticati, né ai Romani, per quanto potenti, dei quali tanto ci gloriamo; venne in mente a popolazioni tra il Tigre e l'Eufrate, terra tristemente nota oggi per vicende belliche legate a folli terrorismi inumani ma anche a sete di petrolio selvaggia e senza scrupoli; venne in mente ai Maya; la perfezionarono gli Indiani e gli Arabi, diffondendo la base dieci, quella che ancora usiamo.

5.3. Zero

Lo zero fu introdotto in matematica attraverso immagini mistiche dagli Indù del VI secolo e, mentre ebbe successo tra gli Arabi nei secoli immediatamente successivi, ben poco ne ebbe in Europa, dove fu inviso; né i Greci né tanto meno i Romani lo conobbero e lo usarono; mentre è alla base dell'aritmetica Maya fin dall'antichità (ha la forma di conchiglia e si chiama *ombelico*). In Europa fece fatica ad inserirsi; il suo nome arabo *zifr* venne erroneamente interpretato «cifra» ed assunse successivamente il nome di una stella del firmamento: *zephirus*, da cui zero.

5.4. Tempo ed ampiezze angolari

L'idea di dividere l'angolo giro in 360 parti, per cui misure di ampiezze ed orologio si esprimono in strane basi 90 e 60, miste, venne in mente agli Assiri o forse anche prima, ma la perfezionarono i Babilonesi ed i Sumeri, ed ancora oggi la usiamo tutti. Gli Etruschi ed i Romani non furono capaci di elaborare misure adeguate.

5.5. Algoritmi

Gli algoritmi di calcolo che tutti usiamo oggi sono derivati da idee del mondo arabo, con illustri precedenti indiani; quando, nel XIII-XIV-XV secolo, arrivarono in Europa, dove si usavano lenti ed ingombranti abachi e sassolini (da cui ancora oggi si parla di «fare i calcoli», storpiatura da «usare i calcoli», cioè i sassolini), la resistenza fu enorme, tanto che passarono secoli prima che il mondo accademico europeo accettasse questi «strumenti» di calcolo, rapidi e meno complicati; la stessa parola «algoritmo» è la storpiatura tardolatina del toponimo «(al) Khuwarizmi», città di provenienza del grande matematico arabo del IX secolo Mohammad Ibn Musa.

Mentre i Romani sistemavano sassolini nelle scanalature degli abachi, i Cinesi antichi ruotavano dei bastoncini su una tavoletta; per cui i bambini cinesi che abbiamo a scuola, durante le esercitazioni di aritmetica, potrebbero non dire in modo spontaneo «fare i calcoli» ma «mettere a posto i bastoncini».

5.6. Aree e volumi

Il calcolo delle aree delle figure piane e dei volumi dei solidi era certo coltivato in Egitto, ben prima che Roma fosse neppure concepita: ci sono papiri del 1800 a.C. dove si insegna a fare cose di questo tipo; ma anche nel mondo sumero: ci sono tavolette di creta del III e II millennio a.C. nelle quali si propongono calcoli di aree e volumi, neppure tanto banali.

5.7. Circonferenza e diagonale

Così, il calcolo della misura della circonferenza dato il diametro, il calcolo della misura della diagonale di un quadrato dato il lato ed altre cose belle matematiche, non sono nate in Europa, ma importate parecchio tempo dopo, presso l'unica popolazione «europea» in grado di apprezzarla, i Greci, tra il VI ed il IV secolo a.C. Ci sono tavolette sumere del III millennio a.C. e papiri egizi del II che lo testimoniano in modo sicurissimo.

5.8. Teorema di Pitagora

Il cosiddetto teorema di Pitagora (VI-V sec. a.C.) è rappresentato in bella evidenza nel papiro di Rhind, redatto dallo scriba Ahmes nel 1650 a.C., copia di un papiro scritto qualche secolo prima che si stava deteriorando; chiunque lo può vedere esposto in tutta la sua lunghezza e bellezza nel British Museum a Londra[5].

5.9. Numeri interi

I cosiddetti numeri interi (quelli preceduti da un segno, a scuola detti dunque relativi) sono nati in India nel V secolo e portati dapprima nel mondo arabo e solo nel IX. In Europa, dopo vari inutili tentativi, entrarono nel corso del XIII secolo e si affermarono alla fine del XV. Essi furono peraltro guardati a lungo con sospetto, tanto che venivano chiamati numeri *surdi*, cioè *assurdi*.

5.10. Frazioni

La civiltà che più d'ogni altra ha dedicato studi alle frazioni è quella egizia; su molti papiri e rotoli, già tra il III ed il II millennio a. C., si trovano studiate frazioni, anche in modi non banali. Esistono perfino papiri che narrano leggende e giochi matematici basati sulle frazioni.

5.11. Aritmetica binaria

Tracce di aritmetiche binarie si trovano in numerazioni antiche, soprattutto in centro e sud America. Tutt'oggi esistono popolazioni nell'Amazzonia ecuatoriana (al confine con la parte contesa dal Perù) che usano spontaneamente aritmetiche binarie (D'Amore, 2002).

5.12. Logica aristotelica e no

Si afferma a volte che la logica è universale e che il suo prototipo per antonomasia siano quella aristotelica e quella megarico-stoica; questo è tanto vero che più d'un pensatore europeo ha tentato nei secoli addirittura di usare tale logica per descrivere il funzionamento del pensiero umano (G.W. Leibniz e G. Boole, per esempio).

Esistono invece *altre* logiche, nate in Paesi diversi, anch'esse soffocate dal dominio imposto della logica europea.

Per esempio, la logica indù, conosciuta sotto il nome di *nyaya*, è considerata oggi non più che un ricordo storico, quasi di folklore. Tale logica è assai più ancorata alla realtà sensibile di quanto non lo sia la logica greca e questo la rende da un lato molto diversa da essa e dall'altro vicina all'empirismo.

Recentemente, uno degli autori di questo articolo, esaminando le forme del ragionare di allievi evoluti nel corso di dimostrazioni geometriche ed aritmetiche,

5. A proposito: perché per vedere un esempio di cultura egizia bisogna andare a Londra? Perché per vedere gli stupendi manufatti della cultura amerinda bisogna andare a Madrid? Fa parte della violenza e dei furti che l'Europa ha perpetrato per secoli.

ha incontestabilmente evidenziato che alcuni alunni considerati deboli non riuscivano ad usare spontaneamente la logica megarico-stoica ed aristotelica, ma usavano invece spontaneamente la nyaya, ovviamente senza averne la minima idea (D'Amore, 2005).

6. Come un aggettivo cambia significato per ignoranza

C'è un aggettivo che dilaga nelle nostre scuole italiane, ma anche nelle TV e sui quotidiani: «extracomunitario».

Sarebbe illuminante fare un'indagine tra le persone, anche colte, anche insegnanti, per indagare su quel che pensano che significhi. Ha assunto un connotato semantico negativo, come di «delinquente» o di «poveraccio morto di fame delinquente potenziale». La colpa delle difficoltà didattiche nelle nostre classi, secondo alcuni, sta nella presenza di studenti extracomunitari. Ma quando poi si analizza a fondo la questione, si scopre che non sono le cittadinanze, ma le lingue, a creare i problemi.

Ora, «extracomunitario» significa «persona la cui provenienza avviene da un Paese che non rientra nella Comunità Europea». Gli Svizzeri sono extracomunitari, i Giapponesi, gli Statunitensi[6], i Canadesi, gli Australiani, sono tutti extracomunitari.

Se in aula abbiamo un bambino che parla solo olandese, sarà tanto diverso da avere un bambino che parla solo macedone? Il primo è comunitario, il secondo extracomunitario. E allora?

Noi crediamo davvero, confortati da migliaia e migliaia e migliaia di insegnanti saggi, sensibili e colti, dei quali, per fortuna, l'Italia e la Svizzera abbondano, che la provenienza diversa, le diverse lingue, le diverse origini culturali siano una risorsa da sfruttare, come fecero gli USA, il Canada, l'Australia cent'anni fa, trasformando quelle terre di conquista in Paesi ricchi e potenti. Anche culturalmente.

Smettiamo tutti di usare questo aggettivo, «extracomunitario», se deve essere ambiguo, e diciamo «straniero»; sarà una forma di rispetto per gli esseri umani. E facciamo proselitismo attorno a noi, in qualsiasi modo, perché la parola perda questo significato negativo o, meglio, venga definitivamente abbandonata.

E sfruttiamo invece la ricchezza delle diverse provenienze.

Uno degli autori di questo articolo è extracomunitario.

7. Come sfruttare culturalmente la ricchezza delle diverse provenienze

Invece di verificare se il bambino tunisino o cinese che è entrato in aula sa «fare i calcoli» secondo i nostri parametri ed algoritmi, chiediamogli quali siano i suoi, quali usava in aula, mettiamolo a suo agio, valorizziamone le competenze.

Se usa modi di dire o tecniche diverse, valorizziamole e non puniamo anche questa «diversità», in un mondo che tende a punirle tutte, razzismo perbenistico dilagante e sottile, del quale neppure a volte ci accorgiamo e che non siamo disposti ad ammettere.

6. Che tutti chiamano Americani, in disprezzo degli Americani non degli USA.

I nostri algoritmi di calcolo non sono gli unici, non sono neppure i migliori, non sono gli assoluti; sono solo il prodotto di una cultura che ha eliminato gli altri e che, ora, li crede unici. Se siamo tanto ignoranti da non saperlo, almeno dovremmo essere disponibili ad ascoltare chi ne conosce altri.

Non ammettere in aula altri algoritmi, altri modi di pensare alla Matematica, sarebbe, oltre che un'ingiustizia, anche un'irrimediabile perdita culturale.

8. Scenari futuri

Non c'è niente da fare; il futuro vedrà sempre più, anche in Italia ed in Europa, com'è successo per USA, Australia, Canada[7], Germania, Lussemburgo, Svizzera… delle società multiculturali.

Arroccarsi su pseudo nazionalismi culturali populistici significa essere retrogradi, non accettare l'evidenza ed il futuro, come quegli insegnanti che lottano contro l'uso del PC o, più modestamente, della macchina calcolatrice; sarebbe come lottare contro l'automobile, la TV, i cd di musica; una lotta stupida, inutile, antistorica, sterile, perdente.

È purtroppo possibile trovare nella scuola esempi di tali lotte perdenti che allontanano i nostri giovani dall'amore verso la Cultura, se essa è interpretata da certi modelli umani.

Meno male che si tratta di casi rarissimi e meno male, invece, che la stragrande maggioranza degli insegnanti è disposta a vivere il mondo per quel che è, per come si presenta nel futuro, mostrandolo ai giovani e condividendolo con loro, accettando le diversità di lingua, di cultura, di religione, di fisico, di idee.

Questa si chiama *intelligenza* (in senso etimologico), altra parola talvolta usata a sproposito…

Ne guadagneremmo tutti una visione più concreta di fratellanza universale in un'epoca nella quale il bisogno di amore e di pace supera qualsiasi altro. Che questo messaggio passi anche attraverso la Matematica, potrebbe essere un fatto esemplare e denso, di grande forza culturale ed etica.

7. Basti pensare a come parlano tra loro i bambini canadesi, in un miscuglio di due lingue, ovviamente inglese e francese, accettato socialmente, perfino a scuola, e sempre più diffuso (Radford, 2004).

Boyer C.
Storia della matematica. Milano: Isedi. 1976. I ed. originale USA, 1968.

Breitwieser R., Comploj P., D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Hochwieser E., Gris A., Maier H., Lott T., Santo G.
Matematica, Italiano e Tedesco, per giocare ad imparare lingue e matematica insieme. *Rassegna. Periodico dell'Istituto Pedagogico. Bolzano.* 24, p. 104-109, 2004.

D'Ambrosio U.
Etnomatematica. Bologna: Pitagora. [Si tratta della traduzione italiana in tomo unico di due libri di D'Ambrosio editi in portoghese], 2002.

D'Amore B.
Scritti di epistemologia matematica. 1980-2001. Bologna: Pitagora, 2001.

D'Amore B.
Matematica in alcune culture sudamericane. Un contributo all'etnomatematica. *Bollettino dei docenti di matematica* (Bellinzona, Svizzera). 44, p. 39-46. [Questo articolo ha avuto anche edizioni in portoghese e spagnolo], 2002.

D'Amore B.
Il ruolo dell'epistemologia nella formazione degli insegnanti di Matematica nella scuola secondaria. *La matematica e la sua didattica* (Bologna, Italia). 4, p. 4-30, 2004a.

D'Amore B.
Die Mathematikdidaktische Forschung als Epistemologie des Mathematiklernens. In: AA.VV. (2004). *Didaktik der Mathematik in der Primärschule*. Lussemburgo: Ministère de l'Éducation nationale de la Formation professionelle et des Sports. ISBN 2 – 87995 – 108-9, p. 65-98, 2004b.

D'Amore B.
Young Pupils' Mathematical Argumentation and Indian Logic (*nyaya*). In corso di stampa, 2005.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I.
Matemática de la cotidianidad. *Paradigma* (Maracay, Venezuela), XXII, 1, 2001, p. 59-72.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I.
Cambi di convinzione in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. *La matematica e la sua didattica* (Bologna, Italia). 3, p. 27-50, 2004.

D'Amore B., Matteuzzi M.
Gli interessi matematici. Venezia: Marsilio, 1976.

Ifrah G.
Storia universale dei numeri. Milano: A. Mondadori. 1983. I ed. originale Francia 1981.

Neugebauer O.
Le scienze esatte nell'antichità. Milano: Feltrinelli. 1974. I ed. originale USA 1957.

Picutti E.
Sul numero e la sua storia. Milano: Feltrinelli 1977.

Radford L.
La généralisation mathématique come processus mathématique. In: Arrigo G. (ed.) (2004). *Atti del Convegno di didattica della matematica*. Quaderni Alta Scuola Pedagogica. Bellinzona: Centro didattico cantonale. p. 11-28, 2004.

Speranza F.
Scritti di epistemologia della matematica. Bologna: Pitagora, 1997.

Stella G.A.
L'orda. Quando gli Albanesi eravamo noi. Milano: Rizzoli, 2002.

2. Linguaggio, simboli, immagini, schemi… In quale modo intervengono nella comprensione in matematica e altrove?

Raymond Duval

Learning of mathematics displays difficulties that are rarely observed in other disciplines. In fact, the mathematical objects do not allow a direct access, but only an indirect access through representations. Therefore, representations play a fundamental role in the learning process and are one of the main problems in mathematical teaching. In this paper we investigate three topics: the relation between the representation and the object to be represented, the transition between different modes of representations of the same object and, finally, the role played by the semiotic representations.

L'apprendimento della matematica presenta difficoltà di comprensione che non si incontrano in altre discipline. Tali difficoltà non si manifestano unicamente al momento dell'introduzione di nuovi oggetti come i decimali, le frazioni, le variabili..., ma anche quando si tratta di risolvere problemi relativi a situazioni della vita quotidiana, come i problemi additivi, i problemi di proporzionalità, i problemi di messa in equazione... È in questo contesto che il ruolo delle rappresentazioni nella comprensione si è rivelato come una delle principali domande con le quali si trova confrontato l'insegnamento della matematica. Ma è una domanda che appare difficile da interpretare e che è spesso sorgente di grandi confusioni, perché presenta tre aspetti molto diversi relativi alla complessità dei funzionamenti cognitivi soggiacenti ai fenomeni di rappresentazione.

Innanzi tutto non si può parlare di rappresentazione senza porre l'attenzione su ciò che costituisce la relazione tra una rappresentazione e l'oggetto che rappresenta. È la stessa che si ha tra linguaggio e immagini? O, più precisamente, questa relazione è la stessa per il linguaggio e per i simboli, per le immagini e per gli schemi; perché in matematica queste differenti forme di rappresentazione (e anche altre come le tabelle o i grafici) sono sistematicamente o regolarmente utilizzate? Alcune di queste forme di rappresentazione potrebbero essere «supporti» pedagogicamente migliori degli altri per aiutare gli allievi a capire? Per esempio, è scontato considerare che le immagini e gli schemi, o anche le tabelle, non solo siano indispensabili ma possano addirittura sostituirsi all'uso più costoso e complesso del linguaggio.

C'è un secondo aspetto al quale non si presta praticamente alcuna attenzione. Non concerne la relazione tra una forma di rappresentazione e l'oggetto rappresentato, ma la relazione, e di conseguenza il passaggio, da una forma di rappresentazione all'altra di uno stesso oggetto. Così il passaggio da un enunciato a equazioni numeriche o letterali che ne riprendono i dati, o il passaggio da un enunciato a uno schema o a una immagine che ne visualizza il contenuto sono rappresentazioni diverse di una stessa situazione che costituisce un problema da risolvere. Il riconoscimento di una rappresentazione come rappresentazione di un oggetto implica il riconoscimento di altre forme di rappresentazione di questo oggetto come altre possibili di questo stesso oggetto? Gli insegnanti sanno per esperienza che la maggior parte degli allievi si blocca sistematicamente nei passaggi da una forma di rappresentazione a un'altra, o la effettua per di più in modo errato. Il problema di funzionamento cognitivo che pone la diversificazione delle rappresentazioni è il problema cruciale di comprensione in tutti gli apprendimenti, a cominciare da quelli della matematica.

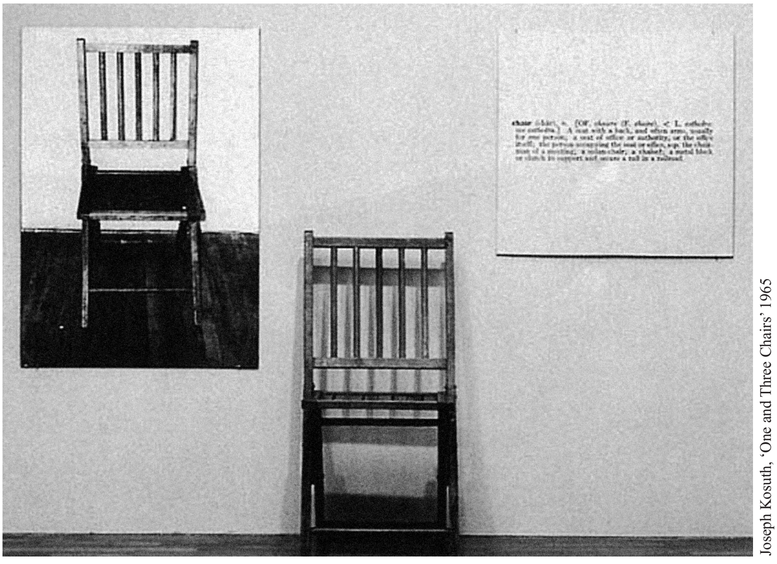
Il terzo aspetto è più teorico. Il linguaggio, i simboli, le immagini e gli schemi sono rappresentazioni semiotiche che vengono spesso considerate come rappresentazioni *esterne* soprattutto necessarie per la comunicazione. Altrimenti detto, la comprensione dipenderebbe da rappresentazioni *mentali* che sarebbero indipendenti da queste rappresentazioni semiotiche e corrisponderebbero alla concettualizzazione. È di queste che l'insegnamento dovrebbe dapprima preoccuparsi, cioè delle immagini e degli schemi che servono solo da «supporto» o da aiuto. Così l'importanza che si dà, o che si rifiuta, alla diversità delle rappresentazioni e alla difficoltà degli allievi di passare da una forma di rappresentazione all'altra dipende dal modello di funzionamento cognitivo al quale ci si riferisce per descrivere il pensiero matematico e i processi di acquisizione delle conoscenze matematiche: le rappresentazioni semiotiche hanno un ruolo centrale o solo secondario nel funzionamento del pensiero e nell'apprendimento?

La mia intenzione è di mostrare perché e come la comprensione in matematica dipende dalla capacità di articolare linguaggio E simboli E schemi E immagini, perché usare ciascuno di questi registri di rappresentazione separatamente non può che condurre gli allievi in un vicolo cieco. Ma presentarli simultaneamente, come le nuove tecnologie permettono di fare così facilmente non è sufficiente. In altre parole, fra i tre aspetti nei quali può essere posto il problema delle rappresentazioni, per l'insegnamento e l'apprendimento, quello essenziale è il secondo.

Comincerò allora col mostrare perché la possibilità di passare da una forma di rappresentazione a un'altra costituisce il punto cruciale della comprensione in matematica, mentre non lo è, o almeno non necessariamente lo è, fuori dalla matematica. Questo ci permetterà di vedere perché alcune forme di rappresentazione – linguaggio, immagine o schema – da sole non permettono di acquisire la comprensione dei contenuti matematici rappresentati. Per mostrarlo, ci serviremo del ben noto esempio dei problemi additivi, che del resto ha già dato luogo a numerosi lavori. Infine affronteremo la domanda più teorica, ma che non è senza conseguenze pedagogiche, della pertinenza del modello di acquisizione delle conoscenze matematiche largamente predominante in molte ricerche didattiche.

1.1. I due problemi cognitivi delle rappresentazioni nel quadro dell'apprendimento della matematica

Per evidenziare la grande complessità di tutto ciò che concerne le rappresentazioni in matematica, partirò da una fotografia di Kosuth scattata nel 1965.



Joseph Kosuth, 'One and Three Chairs' 1965

Presenta un montaggio nel quale sono giustapposte una sedia contro un muro bianco, con a sinistra, affissa al muro, la fotografia di questa sedia, e a destra una pagina con riprodotta la definizione del termine «sedia». Questa fotografia è intitolata «**una e tre** sedie».

Diversità degli elementi riuniti o che si possono riunire in questo montaggio fotografico	**Caratterizzazione cognitiva di questi elementi**
1. Una **sedia materiale** contro un muro.	(1) L'**oggetto stesso**.
2. La **fotografia** di questa sedia contro il muro.	(2) Una **immagine** di questo oggetto, prodotta con l'aiuto di un apparecchio.
3. Una **pagina di dizionario** recante il termine «sedia».	(3) Una rappresentazione ottenuta con **descrizione verbale**.
Si potrebbe completare il montaggio con:	
4. Il **disegno** (o una sequenza di disegni) di una sedia che permetta di costruirla (le istruzioni che accompagnano il kit).	(4) Un **altro tipo di immagine,** prodotto da una procedura «semiotica», accompagnato da una successione di istruzioni.
5. **Alcune frecce sul muro** per indicare **la relazione** (di *somiglianza? di referenza? di equivalenza*?) **fra** queste differenti presentazioni di una sedia.	(5) Un **schema** (*del tipo «rete concettuale»?*).

Figura 1 Analisi spettrale della cognizione di un oggetto.

L'interesse di questa fotografia nella comprensione della complessità dei processi cognitivi in gioco nelle rappresentazioni e il loro ruolo centrale nello sviluppo delle conoscenze sta nel fatto che il montaggio si basa su una DOPPIA GIUSTAPPOSIZIONE. Quest'ultima mette in evidenza le due relazioni costitutive di ogni rappresentazione.

1.2. La coppia (oggetto, una rappresentazione dell'oggetto)

La prima giustapposizione è esplicitamente indicata nel titolo: «una E tre sedie». Essa costituisce la coppia (oggetto, una delle sue rappresentazioni). *Ogni rap-*

presentazione sembrerebbe rappresentare qualche cosa che deve essere accessibile diversamente da questa rappresentazione. Nel montaggio fotografico, fra le tre sedie ce n'è solo una sulla quale ci si può sedere. Questa giustapposizione sembra banale e non solleva alcuna domanda di ordine epistemologico o cognitivo per capire i processi di acquisizione di conoscenze. Almeno fintanto che si tratta di oggetti familiari dell'ambiente! La loro conoscenza è indipendente dalla loro rappresentazione, e questa è riconosciuta mediante riferimento all'esperienza diretta che si ha degli oggetti. Qui, siccome la funzione della rappresentazione è di evocare gli oggetti in loro assenza, come Piaget ha continuamente ripetuto (1968a, p. 305; 1968b, p. 293), le rappresentazioni sarebbero semplici sostituti di ciò che rappresentano.

Non è più così *quando si tratta di oggetti per i quali non si può che avere delle rappresentazioni, perché non esiste alcun accesso diretto agli oggetti rappresentati o studiati*. L'insegnamento delle scienze, nelle quali il terreno di osservazione non è un laboratorio come la geografia o la geologia così come quelle che esigono una mediazione tecnica strumentale, mette molto spesso gli allievi in questa situazione. Ma un accesso diretto è sempre possibile, basterebbe andare sul terreno o procurarsi strumenti adatti. Per contro, un tale accesso diventa impossibile per gli oggetti matematici, numeri, funzioni, vettori... Qui non c'è altro che rappresentazioni e loro giustapposizione, cioè la coppia {**?** , una rappresentazione di **?**} è impossibile. Ne deriva la domanda:

Domanda (1). *Come si può acquisire la conoscenza di un oggetto (o di fenomeni), al quale nessuna «esperienza» più o meno diretta o personale dà accesso, unicamente a partire da rappresentazioni*?

Si può sottolineare il carattere cruciale di questa prima domanda ricordando l'esigenza fondamentale che sta alla base di ogni conoscenza: **mai confondere un oggetto con la sua rappresentazione.** Si può allora riformulare la prima domanda così: come non confondere un oggetto con la sua rappresentazione, quando non si ha alcun accesso all'oggetto rappresentato?

2. La diversificazione delle rappresentazioni di uno stesso oggetto

La seconda giustapposizione è quella delle due rappresentazioni diverse della sedia che Kosuth ha affisso al muro accanto alla sedia. Questa mostra che non c'è mai una sola rappresentazione di un oggetto. Ciò evidenzia soprattutto che i loro contenuti rispettivi non sono in rapporto e quindi non sembra possibile metterli in corrispondenza. Che cosa hanno in comune una fotografia e una definizione tratta da una enciclopedia? Questa diversità di contenuto tra due rappresentazioni di uno stesso oggetto solleva una seconda domanda, cruciale per l'apprendimento e per la comprensione in matematica.

Domanda (2). *Come riconoscere che due rappresentazioni i cui rispettivi contenuti non hanno nulla in comune rappresentano lo stesso oggetto?*

La risposta a questa domanda è evidentemente banale quando si tratta di rappresentazioni di oggetti dei quali si ha un'esperienza diretta. L'esperienza degli oggetti precede le loro rappresentazioni o ne è l'origine. Si può allora confrontare ogni rappresentazione con l'oggetto stesso. Il riconoscimento che due rappresentazioni aventi contenuto diverso sono due rappresentazioni dello stesso oggetto avviene riportando ciascuna di esse all'oggetto stesso (schema della colonna di sinistra della Figura 2). Ma ciò non può più funzionare in questo modo quando gli oggetti, come per esempio quelli della matematica, non sono più accessibili né percettivamente né strumentalmente mediante apparecchi che aumentano la capacità discriminante dei nostri sensi (schema della colonna di destra della Figura 2).

Riconoscimento di ciò che è rappresentato in una situazione di doppia giustapposizione

Riconoscimento di ciò che è rappresentato quando la giustapposizione delle rappresentazioni con l'oggetto è impossibile

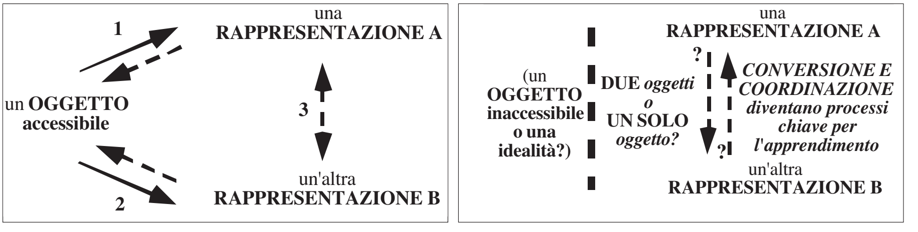
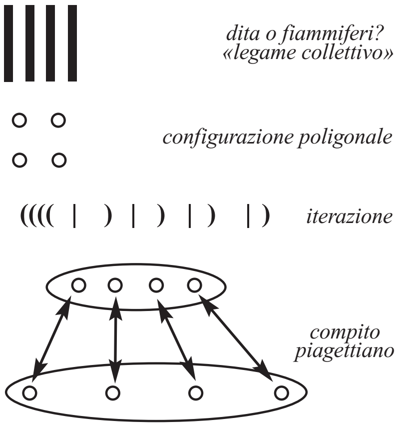


Figura 2 Variazione dei processi cognitivi d'identificazione della rappresentazione secondo la situazione epistemologica degli oggetti di conoscenza.

Nel suo montaggio Kosuth si è limitato all'opposizione classica delle rappresentazioni, quella tra immagine e linguaggio! Avrebbe però potuto variare maggiormente i tipi di rappresentazione, e il titolo sarebbe potuto essere «una e CINQUE sedie» (Figura 1). Perché, e questo è il punto importante e spesso sconosciuto, *noi possiamo avere tante rappresentazioni diverse – cioè rappresentazioni i cui contenuti sono differenti – quanti sono i diversi mezzi di produrre una rappresentazione*. La variazione delle rappresentazioni, e di conseguenza le variazioni di contenuto, dipendono dai sistemi utilizzati per produrre la rappresentazione: nella giustapposizione di Kosuth i due sistemi produttori sono quello ottico dell'apparecchio fotografico per la fotografia affissa al muro e il linguaggio per l'estratto del dizionario. Ciò significa che *le rappresentazioni non dipendono unicamente dagli individui ma dai sistemi produttori di rappresentazioni,* sistemi che sono sia semiotici (linguaggio vernacolo, simboli, disegni) sia fisici (apparecchio fotografico o altri strumenti) sia sensoriali (anche se non oggettivabile da colui che guarda, l'immagine sulla retina è una rappresentazione).

La particolarità cognitiva della matematica è di moltiplicare le rappresentazioni semiotiche di uno stesso oggetto, anche se quest'ultimo non è mai accessibile. Così, per i numeri interi molto piccoli, quelli dei quali, secondo Husserl, noi avremmo una «rappresentazione propria» (cioè intuitiva) e non soltanto una «rappresentazione simbolica» (Husserl 1972 p. 233, 237), possiamo giustapporre molteplici rappresentazioni alla maniera di Kosuth, senza però potervi collocare il numero stesso. Questo montaggio può turbare. Ma ogni pagina di manuale è un montaggio alla maniera di Kosuth.

Rappresentazioni **ICONICHE**? («Rappresentazioni proprie»)	Rappresentazioni **SIMBOLICHE** («Rappresentazioni improprie»)



quattro, quatre, four, vier, cuatro…

IV

4 *(sistema decimale)*

100 *(sistema binario)*

36/9 *(scrittura frazionaria)*
ecc.

Figura 3 Otto rappresentazioni di uno stesso numero raggruppate secondo le categorizzazioni di Peirce e di Husserl.

Anche se tutte queste rappresentazioni rappresentano lo stesso numero, non hanno affatto lo stesso contenuto. Inoltre è facile verificare che, nei diversi livelli scolastici, gli allievi possono riconoscere un numero in due o tre di questi tipi di rappresentazione (fra i quali evidentemente quella verbale) senza riconoscerlo nelle altre. Queste difficoltà appaiono soprattutto con le rappresentazioni simboliche necessarie per le quattro operazioni aritmetiche. Ora, poter riconoscere che due rappresentazioni di contenuti totalmente differenti rappresentano lo stesso oggetto non è solo un fatto di comprensione, è anche la condizione per poter passare dall'una all'altra. **Senza il passaggio da una rappresentazione di un oggetto a un'altra di contenuto diverso, cioè senza una conversione di rappresentazioni possibili di uno stesso oggetto, ogni risoluzione di problema in matematica diventa impossibile.**

Nella colonna delle rappresentazioni che possiamo definire iconiche, perché assomigliano a collezioni di pezzi materiali, si può notare una opposizione tra le due prime – spesso considerate «concrete» – e le due ultime che rappresentano una procedura di iterazione (che non è una seriazione nel senso piagetiano del termine) e una procedura di messa in corrispondenza. Si dirà che le due ultime rappresentano rispettivamente il numero ordinale e quello cardinale? E, se sì, come distinguerle quando si coinvolgono rappresentazioni simboliche e non iconiche? Nella colonna delle rappresentazioni simboliche si noterà che i simboli sono simboli di numeri *in base alle sole regole di funzionamento di un sistema semiotico di base n, e non in quanto marche particolari come lo sono invece i segni liberi utilizzati per le operazioni (+, —, ...) o per le relazioni (<, =, ...).* Le cifre, come le parole, sono segni legati e non segni liberi. Questa è una perfetta illustrazione dell'analisi semiotica strutturale sviluppata da Saussure: una cifra non assume valore di segno se non per opposizione agli altri segni che possono sostituirla nella stessa posizione in seno all'espressione formata. Si può verificarlo per «0» e «1» il cui valore rappresentativo non dipende solo dalla loro posizione ma anche dalle altre cifre che si potrebbero mettere al loro posto nella stessa posizione. Da cui i sistemi binario, decimale, ecc.

1.3. L'organizzazione delle attività di apprendimento in matematica e la diversificazione delle rappresentazioni

La complessità dell'apprendimento della matematica, e di conseguenza le difficoltà che nascono nell'insegnamento, hanno radici nel loro carattere epistemologico particolare: la doppia giustapposizione illustrata da Kosuth qui è impossibile, ma la possibilità di ricorrere a diverse rappresentazioni diventa più fondamentale che in altre discipline. Così per quanto attiene ai numeri (tanto per limitarci a questi oggetti matematici), siccome non sono oggetti come le sedie, le biglie, o le dita della mano, le loro rappresentazioni semiotiche diventano doppiamente necessarie. Necessarie per poterli «manipolare», cioè per poter effettuare le quattro operazioni aritmetiche, e non soltanto per tenere il posto di questi oggetti che non si possono evocare altrimenti. Necessarie ugualmente nella loro varietà, per non confonderli con gli oggetti rappresentati e potere così applicarli in situazioni molto differenti. Altrimenti detto, è la varietà delle rappresentazioni che tiene il posto degli oggetti, quando questi sono percettivamente e strumentalmente inaccessibili.

Si capisce allora perché la domanda (2), posta nel quadro della domanda (1), è la domanda cruciale dell'apprendimento della matematica: come riconoscere che è lo stesso oggetto rappresentato in due rappresentazioni diverse, se non si dispone di altro accesso a questo oggetto se non quello delle rappresentazioni? **La conversione delle rappresentazioni è nel cuore dei processi di comprensione nell'apprendimento della matematica**.

La complessità cognitiva del passaggio da una rappresentazione di un oggetto a un'altra rappresentazione completamente diversa non attira praticamente mai l'attenzione per molte ragioni. Vi sono prima di tutto ragioni teoriche. Si tratterebbe sia di un semplice processo del tipo codificazione o decodificazione, sia di un fenomeno superficiale risultante da una concettualizzazione asemiotica anteriore. C'è anche la convinzione che, in modo indiretto, anche nella matematica elementare, ci si possa ricondurre alla situazione di doppia giustapposizione illustrata da Kosuth. Infatti, non tutte le rappresentazioni sono della stessa natura nella misura in cui la loro relazione con l'oggetto che rappresentano non è la stessa. Alcune sembrano vicine, come la similitudine esistente tra le forme rappresentate e quelle reali, per esempio le rappresentazioni dette «iconiche»; altre sono più distanti come gli schemi, e altre infine sono senza alcun rapporto percettivamente identificabile come i simboli e le spiegazioni verbali. Da cui la domanda che si ritrova al cuore di molte preoccupazioni pedagogiche e di innovazioni didattiche:

Domanda (3). *Fra tutte le rappresentazioni possibili di un oggetto, ce n'è UNA pedagogicamente migliore delle altre per facilitare la comprensione e l'apprendimento degli allievi?*

Se si guarda la storia dell'insegnamento concernente l'ambito numerico, dagli anni 1960, si potrà notare, attraverso le riforme successive e gli approcci didattici dominanti, che certe rappresentazioni sono state a turno privilegiate, cioè messe in opposizione alle altre, come se ce ne fosse una più vicina al «concetto» di numero. In generale si può dire che le immagini, in quanto rivolte a situazioni reali, o le descrizioni verbali evocanti tali situazioni, o ancora le rappresentazioni che servono da supporto alla simulazione di manipolazioni sono privilegiate per poter «dar senso» alle rappresentazioni simboliche o alle descrizioni verbali puramente matematiche.

La ricerca di *una* «buona rappresentazione», fra la varietà di rappresentazioni possibili, conduce a svalutare l'importanza e la complessità cognitiva della conversione delle rappresentazioni. Poiché, qualunque sia il tipo di rappresentazione considerato per ragioni pedagogiche o matematiche come il migliore, si dimentica che in ogni situazione nella quale non è possibile la doppia giustapposizione, **la comprensione comincia quando diventa necessario articolare fra loro due rappresentazioni diverse di uno stesso oggetto**.

L'analisi della risoluzione dei problemi matematici più semplici che possono essere proposti a giovani allievi – i problemi additivi a una operazione che utilizzano solo i primi numeri interi – ne forniscono una illustrazione perfetta.

2. La risoluzione dei problemi additivi e i relativi blocchi

L'interesse dei problemi additivi è doppio. Si riferiscono a una grande varietà di situazioni familiari e permettono dunque di ricorrere a una grande varietà di rappresentazioni, del tipo immagine o materiale per manipolazioni concrete. Possono anche permettere schematizzazioni che accompagnano la descrizione verbale degli enunciati. Da questo punto di vista, *i problemi additivi permettono di percorrere l'intera gamma delle rappresentazioni possibili* ***per una stessa situazione «reale»*****.** Ma nello stesso tempo, certi enunciati di problemi, quelli «privi» di dati iniziali, provocano non soltanto un fallimento sistematico alla maggior parte degli allievi all'inizio della scuola media, ma anche a gran parte degli studenti dei corsi abilitanti all'insegnamento. Questi ultimi rifiutano persino la soluzione, convinti che l'assenza di un dato preciso come punto di partenza di una procedura aritmetica renda impossibile qualsiasi soluzione. Questo fenomeno non si è affatto evoluto dal primo lavoro di G. Vergnaud del 1976 (Figura 4), malgrado la moltitudine di ricerche e di innovazioni mirate a un apprendimento della risoluzione di tali problemi.

Per capire la chiave dei problemi additivi, non bisogna prendere i problemi separatamente, ma prenderne almeno due insieme e considerarli come variazioni possibili di uno stesso tipo di procedimento cognitivo. È d'altra parte la condizione metodologica necessaria per poter analizzare, in maniera più generale, i processi di risoluzione dei problemi. Non si possono interpretare le strategie di risoluzione dei problemi degli allievi se ci si limita all'osservazione di un solo problema. Farlo sarebbe come escludere il principio fondamentale di ogni *analisi controllabile* delle produzioni degli allievi: il confronto delle variazioni delle produzioni risultanti dalle variazioni introdotte da un enunciato all'altro. È solo mediante l'applicazione di questo principio che è possibile identificare le diverse variabili che intervengono nella produzione delle risposte degli allievi a un dato tipo di problema. Faremo ora l'analisi comparata dei due problemi seguenti anche per mostrare che la conversione delle rappresentazioni gioca un ruolo centrale nei processi di comprensione e di risoluzione dei problemi additivi.

Christian gioca due partite alle biglie. Nella prima, **GUADAGNA 6** biglie. Gioca una seconda partita e **GUADAGNA 3** biglie. Quante biglie ha guadagnato in tutto?	Bruno gioca due partite alle biglie. Gioca una prima partita. Nella seconda partita **PERDE 3** biglie. Dopo queste due partite ha **GUADAGNATO** in tutto **6** biglie. Che cos'è successo nella prima partita?

8-9 anni	**75%**	8-9 anni	**25%**
9-10 anni	**96%**	9-10 anni	**28%**
10-11 anni	**100%**	10-11 anni	**47%**

Figura 4 Da Vergnaud (1976 p. 34)

Il confronto di questi due enunciati permette di fare subito due osservazioni. La prima, quella messa sempre davanti, concerne il fatto che dal problema di Christian al problema di Bruno si passerebbe da un'operazione (+ o –) sui numeri naturali a un'operazione sui numeri relativi. La seconda, per contro, attira poco l'attenzione: *i due enunciati sono strettamente simili sia dal punto di vista del vocabolario usato sia da quello sintattico.* È la stessa procedura linguistica di descrizione e la situazione reale descritta è la stessa: due partite alle biglie. Come si possono allora distinguere due problemi additivi diversi a partire da enunciati simili? È qui che le numerose ricerche sottolineano la necessità di ricorrere ad altre rappresentazioni oltre alle sole descrizioni verbali.

Due tipi di rappresentazioni sono largamente diffusi e utilizzati in classe e nelle attività didattiche: le immagini di collezioni concrete di oggetti che permettono dei conteggi, o quelle che mostrano visivamente la situazione descritta nell'enunciato, e gli schemi rappresentanti trasformazioni da uno stato a un altro o da una trasformazione a un'altra. Non sono perciò le sole. Vi sono altri tipi possibili come i grafici qualitativi che rappresentano l'evoluzione di una situazione. Analizzeremo i tre tipi di rappresentazioni per i due problemi di Christian e di Bruno cercando di rispondere alla domanda seguente: *permettono di discriminare procedure di risoluzione diverse per enunciati di problemi completamente simili?* È soltanto a questa sola condizione che le rappresentazioni possono assumere la funzione di comprensione che è loro assegnata.

2.1. Le immagini di collezioni concrete che permettono conteggi

Prendiamo un'immagine «concreta» nella quale il numero di biglie è rappresentato per ciascuno dei momenti descritti nei due enunciati. Si potrebbe d'altra parte sovrapporre le foto di Christian e di Bruno in ogni fase dello svolgimento del gioco.

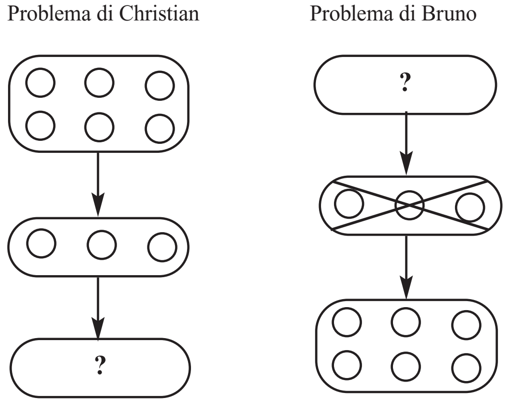


Figura 5 Due sequenze di immagini per rappresentare due enunciati.

Possiamo fare tre osservazioni.

- È una sequenza di tre immagini, e non un'immagine sola, che può rappresentare un enunciato di problema additivo, se si considera che si possa sostituire la presentazione verbale con la situazione concreta descritta.
- Questo tipo di rappresentazione non funziona per tutti gli enunciati. Se risulta soddisfacente per il problema di Christian perché permette di vedere come si trova la risposta, non lo è più per il problema di Bruno. Infatti nel problema di Bruno, nasce una domanda più generale**. Come rappresentare con un'immagine o su un'immagine le informazioni «negative» o le mancanze?** Non c'è altra soluzione che quella di **codificare** l'immagine con l'aiuto di marche, di logo, o di simboli. In altre parole si reintroducono nell'immagine espressioni verbali, in forma abbreviata! Si potrebbe anche dire che, nel problema di Bruno, la prima immagine assume la stessa funzione del simbolo «0» nella scrittura dei numeri. Non si può quindi avere alcuna sequenza di immagini concrete per il problema di Bruno.
- Questo tipo di rappresentazione può ugualmente rinforzare un'idea errata nella ricerca della soluzione (togliere 3 da 6!) perché suggerisce, in virtù della sua organizzazione, di usare per il problema di Bruno la stessa procedura che ha funzionato per il problema di Christian.

Questo esempio ci mostra quanto le immagini possono ridurre il campo della rappresentazione delle possibili e diverse situazioni concrete. Un problema come quello di Bruno diventa inconcepibile senza ricorrere a una determinazione verbale.

2.2. Schemi che rappresentano trasformazioni

Consideriamo ora uno schema ternario molto conosciuto (Vergnaud 1976, 1990). Rappresenta una trasformazione consistente nel passaggio da una fase iniziale a una fase finale: ciascuna corrisponde sia a uno stato («a 3...») sia a una trasformazione («vince 3...» o «perde 3…»).

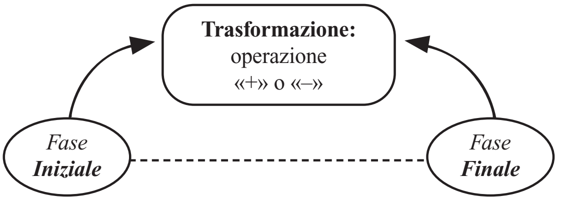


Figura 6 Schema ternario utilizzato per i problemi additivi a una operazione.

Si può affermare che questo tipo di schema centrato sulle trasformazioni rende conto della difficoltà di comprensione dei problemi additivi e aiuta gli allievi a superarle (Descaves 1992, 72-73)? Proponiamo due osservazioni su questo schema ternario.

Prima di tutto **fonde due schemi ternari diversi** perché rappresentano *due tipi di trasformazioni di natura diversa:* un'operazione aritmetica e un'azione (o una relazione) proveniente da una situazione reale e il cui enunciato descrive sommariamente lo scenario. Lo schema ternario dell'operazione aritmetica (Figura 7 a sinistra) non è invertibile, a meno che lo si proietti su spostamenti lungo una retta graduata! Consideriamo ora gli enunciati di problemi additivi a una operazione. Possiamo costatare che *la trasformazione corrisponde a uno solo dei due verbi di azione portatori dei dati numerici* (Figura 7, colonna di destra). Se a ciò si aggiunge il fatto che lo schema ternario di un'operazione aritmetica non è invertibile, si vede la forte ambiguità della rappresentazione ternaria per i problemi additivi.

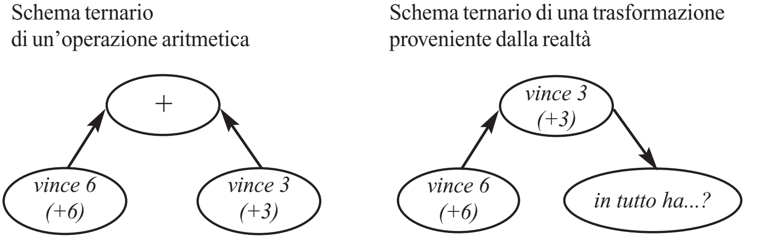


Figura 7 Due schemi ternari semanticamente eterogenei.

Infatti se si vuole applicare questo tipo di rappresentazione ai problemi additivi occorre combinare questi due schemi e non fonderli. La rappresentazione dei problemi additivi non può essere realizzata se non in uno schema quaternario.

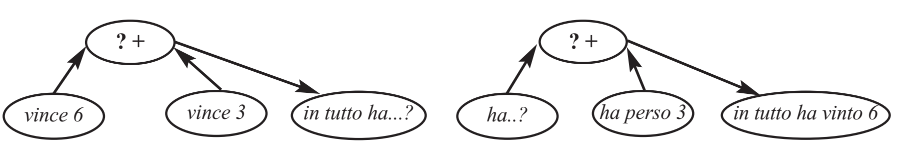


Figura 8 Schema quaternario invertibile per rappresentare i problemi additivi a una operazione.

Due fattori cognitivi appaiono grazie a questi schemi quaternari: la scelta dell'operazione aritmetica e l'inversione dell'ordine nello svolgimento della trasformazione non aritmetica.

La scelta dell'operazione aritmetica (+ o –) ***dipende dai due verbi portatori dell'informazione numerica***. Così nel problema di Christian, è un'addizione se i due verbi sono della stessa polarità semantica («vince 6, vince 3» o «perde 6, perde 3») ma è una sottrazione se questi due verbi sono di polarità opposte («vince 6, perde 3»). Per il problema di Bruno, è l'addizione anche se questi due verbi sono di polarità opposte. Quando i due verbi sono della stessa polarità semantica, occorre effettuare una sottrazione. *La considerazione della grandezza dei numeri non interviene nella scelta dell'operazione aritmetica*, ma solo per la determinazione del verbo della fase finale. Questo tipo di schema, ternario o quaternario, non può dunque aiutare a capire la scelta dell'operazione aritmetica nel problema di Bruno.

Analogamente non permette di far capire l'inversione dei dati che dev'essere effettuata in relazione al loro ordine nello scenario dell'enunciato e lascia gli allievi bloccati sull'indeterminazione molto perturbante della fase iniziale.

Si potrebbero riassumere i limiti e le inadeguatezze di questo tipo di schema in relazione ai problemi additivi dicendo che non permettono di distinguere una trasformazione positiva da una negativa, così come un ordine diretto e la sua inversione.

2.3. Alcuni grafici che rappresentano l'evoluzione di una situazione

Esistono altri tipi di rappresentazione che tengono conto della complessità introdotta dall'immersione di operazioni aritmetiche in scenari della vita reale. Così un sistema di rappresentazione bi-dimensionale (Damm 1992) permette di selezionare e di situare le informazioni al momento stesso della lettura di ogni frase dell'enunciato.

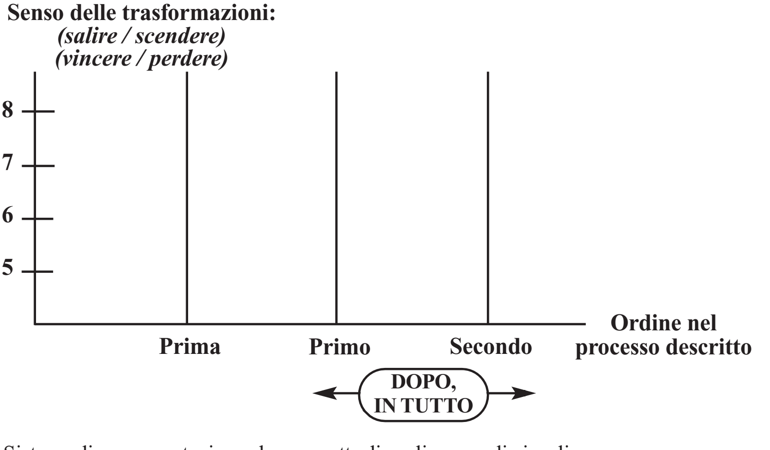


Figura 9 Sistema di rappresentazione che permette di analizzare e di visualizzare qualsiasi enunciato di un problema additivo.

Questo sistema di rappresentazione dissocia le due dimensioni semantiche costituenti i «dati» dei problemi additivi; poiché *ogni unità d'informazione perti-*

nente alla risoluzione del problema è determinata da due coordinate qualitative («nella prima», «vince 3»). Questo sistema costituisce un vero schema organizzatore della comprensione di ogni enunciato di problema additivo. Infatti permette di convertire l'enunciato, durante lo svolgimento lineare della lettura e non dopo, in un grafico-circuito che visualizza il trattamento e la risoluzione. Il suo funzionamento si riduce a due regole semplici. Ogni volta che nell'enunciato si incontra una coppia di coordinate qualitative si mette un rettangolo nero e se si incontra solo il valore descrittivo d'ordine («gioca *una seconda* partita»), si mette un rettangolo bianco. Naturalmente, in classe, questo sistema è introdotto in modo ludico e dinamico: si mette una pedina invece di segnare con un rettangolo nero e ogni rettangolo bianco corrisponde a un salto sull'asse seguente. Inoltre la sua introduzione deve tener conto dei parametri che rendono l'enunciato congruente o no con la scelta delle operazioni aritmetiche (Damm 1992, 61-68). Infine si presta anche bene sia per essere costruito dagli allievi (che si trovano allora in posizione di risoluzione) sia per essere descritto verbalmente da questi ultimi (che si trovano allora in posizione di messa a punto di enunciati).

Tutti gli enunciati di problemi additivi non sono che la descrizione di tre situazioni possibili, caratterizzate dal posto dell'informazione mancante: fase finale (enunciato di Christian), fase iniziale (enunciato di Bruno), fase intermedia (enunciato di Didier[1]).

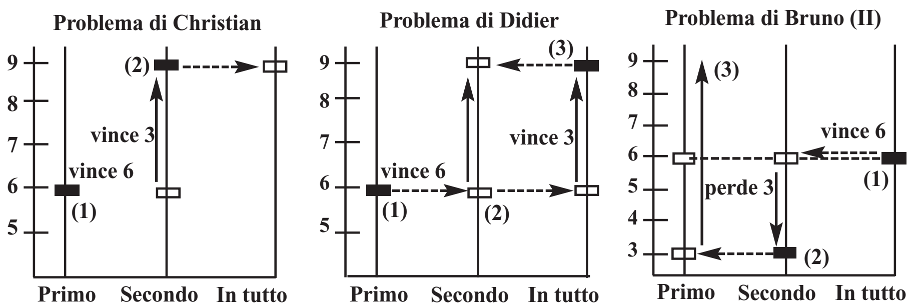


Figura 10 I tre grafici di circuiti corrispondenti al campo degli enunciati dei problemi additivi.

Nella costruzione di questi circuiti, le frecce ascendenti e discendenti sono associate al valore numerico della trasformazione e alla sua polarità semantica. Sono dunque diverse dalle frecce orizzontali che indicano l'apporto di una nuova informazione (indicate in questo circuito con numeri tra parentesi) di una proposizione (grammaticale) dell'enunciato alla seguente.

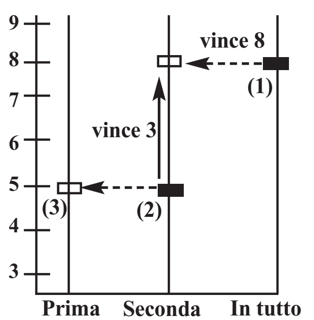
Comprendere un enunciato di un problema additivo è dunque visualizzare in qualche modo il circuito descritto dall'enunciato. Si vede così la distanza cognitiva esistente tra il problema di Christian e il problema di Bruno, anche se i loro enunciati sono linguisticamente simili. Ci si può tuttavia chiedere se il passaggio dal problema di Didier al problema di Bruno non rappresenti un salto troppo importante che il far ricorso a un certo tipo di rappresentazione permetterebbe di superare. In realtà il problema di Bruno combina due parametri totalmente indipendenti l'uno dall'altro: l'inver-

1. Didier gioca due partite alle biglie. Nella prima vince 3 biglie. Gioca una seconda partita. Dopo le due partite ha vinto in totale 6 biglie. Che cos'è successo nella seconda partita?

sione, rispetto al senso di lettura, risultante dal posto dell'informazione mancante e l'antonimia delle espressioni designanti il senso delle trasformazioni («vincere/perdere»). Si possono avere così due problemi di Bruno totalmente diversi: l'uno che è strettamente l'inverso del problema di Christian e l'altro (Bruno I) qui appare come stadio intermedio tra il problema di Didier e il problema di Bruno II.

Bruno I gioca due partite alle biglie.
Gioca una prima partita.
Alla seconda partita **vince 3** biglie.
Dopo le due partite **ha vinto in totale** **8** biglie.
Che cos'è successo nella prima partita?

Bruno II gioca due partite alle biglie.
Gioca una prima partita.
Alla seconda partita **perde 3** biglie.
Dopo le due partite **ha vinto in totale** **6** biglie.
Che cos'è successo nella prima partita?



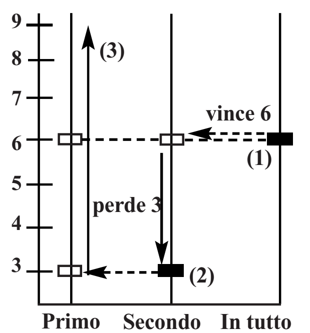


Figura 11 Dissociazione del fattore «assenza di un dato preciso di ancoraggio iniziale» e del fattore «combinazione di trasformazioni semanticamente opposte».

Per la comprensione dei problemi additivi la dissociazione di questi due fattori è il punto stategico decisivo e una rappresentazione deve permettere agli allievi di prendere coscienza della loro indipendenza.

Analisi funzionale della varietà delle rappresentazioni possibili nella risoluzione di problemi

Abbiamo appena analizzato molto brevemente quattro proposte di problemi additivi, che appaiono come altrettante rappresentazioni possibili di situazioni reali familiari (basta sostituire il gioco delle biglie con quello degli spostamenti in un immobile o con quello relativo a un acquisto): la descrizione verbale, l'immagine «concreta», uno schema, un diagramma. Possiamo ora tentare di rispondere alla domanda (3) posta in precedenza: quale potrebbe essere pedagogicamente la migliore rappresentazione? La risposta che risulta dalle analisi è evidentemente: nessuna!

Prima di tutto, contrariamente alla qualifica piuttosto restrittiva e negativa secondo la quale i problemi additivi sono «*word problems*», l'enunciato è costitutivo del problema. Non c'è problema matematico senza un enunciato che fornisca le ipotesi, o condizioni da prendere in conto, oltre all'obiettivo della ricerca. Qui la descrizione verbale che dà le informazioni utili permette di creare una situazione del tutto diversa da quella reale e supposta familiare. Nessuna rappresentazione concreta che riproduca fedelmente la situazione reale come uno specchio non può fare a meno di un'enunciazione verbale. È solo la descrizione verbale che permette di porre il problema di Bruno.

La necessità di un enunciato non esclude la mobilitazione di rappresentazioni non verbali. Abbiamo esaminato tre tipi diversi, senza la pretesa che non ce ne possano essere altri. Qualunque sia il tipo scelto o privilegiato, una rappresentazione non verbale non si sostituisce all'enunciato, per rimpiazzarlo o per farlo dimenticare, ma, al contrario, per articolarsi con quest'ultimo. In altre parole, con il ricorso a una rappresentazione non verbale, non si passa a un secondo registro, ma si lavora su due registri contemporaneamente. Ecco che ritroviamo la problematica della domanda (2) posta in precedenza: come riconoscere che due rappresentazioni i cui contenuti non hanno nulla in comune rappresentano la stessa situazione? *Il ricorrere a una rappresentazione non verbale implica il vedere come si passa dall'enunciato all'immagine, allo schema, al diagramma, ecc.* Poiché non tutti i sistemi di rappresentazione permettono di rappresentare uno stesso oggetto in modi equivalenti, non ci si può aspettare che ciascuno dei tre tipi di rappresentazione appena analizzati possa rappresentare gli stessi aspetti del problema. Ciò deve attirare l'attenzione su di un punto essenziale che non è mai considerato in modo sufficiente: *i tre tipi di rappresentazione che abbiamo analizzato ricoprono funzioni molto diverse nella risoluzione dei problemi additivi.*

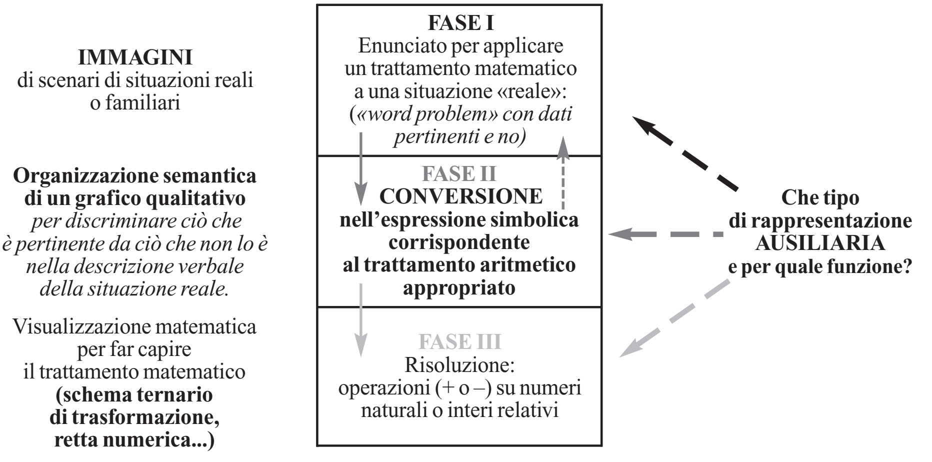


Figura 12 Le tre funzioni possibili delle rappresentazioni nella risoluzione dei problemi additivi.

Per ciò che concerne tutti i problemi di applicazione della matematica a situazioni dette «reali», le diverse rappresentazioni che possono essere mobilitate dagli allievi o proposte dall'insegnante ricoprono una di queste tre funzioni: evocazione dell'esperienza che si può avere della situazione, conversione da un tipo di rappresentazione dei dati in un altro tipo di rappresentazione, visualizzazione del trattamento matematico appropriato. Abbiamo preso qui l'esempio dei problemi additivi ma la stessa analisi può essere fatta per i problemi concernenti il quarto proporzionale o per quelli di messa in equazione o di messa in un sistema di equazioni, ecc. **Tutte le rappresentazioni che possono essere didatticamente utilizzate nella risoluzione dei problemi di applicazione della matematica ricoprono una di queste tre funzioni E SOLO una.** Questa restrizione è essenziale e ignorarla conduce spesso a un contro-impiego e a *impasses* didattiche nelle rappresentazioni proposte. Ogni volta che si sceglie di privilegiare un tipo di rappresentazione, occorre prima chiedersi: quale funzione permette di ricoprire?

Si vede, per esempio, la differenza funzionale tra lo schema ternario delle trasformazioni e l'organizzazione semantica di un grafico qualitativo. Lo schema ternario non si articola con l'enunciato ma con la scrittura delle operazioni aritmetiche sugli interi relativi: in questo caso è funzionalmente equivalente alla retta numerica. *Ma non permette di vedere come si passa dall'enunciato del problema alla scrittura con lacune dell'operazione che permette di risolvere il problema*.

6 +3 =....   ...– 3 = 6   6 + ...= 9

La conversione dei dati dell'enunciato nell'operazione aritmetica appropriata **implica che si sia capaci di discriminare tre enunciati simili**: quelli di Christian, di Bruno I e di Bruno II. Ora è proprio il fattore «assenza di un dato di ancoraggio», indipendente dal fattore «opposizione del senso delle trasformazioni», che costituisce il punto di bloccaggio nella comprensione dei problemi additivi. L'intero problema consistente nel diagnosticare nelle difficoltà che gli allievi incontrano risolvendo problemi di applicazione a situazioni reali sta nel capire se queste difficoltà sono fondamentalmente difficoltà di trattamento o di conversione. Le discussioni con studenti in formazione per diventare insegnanti di scuola primaria sui problemi «di Bruno» mostrano che si tratta manifestamente di problemi di conversione, che gli schemi ternari non permettono di chiarire.

Più in generale, il percorso di questa gamma di rappresentazioni, per una stessa situazione «reale», permette di suggerire intuitivamente le caratteristiche seguenti concernenti il funzionamento cognitivo e gli apprendimenti (senza che qui sia presentato il modello, gli aspetti tecnici e sperimentali).

1) È necessario *disporre di più rappresentazioni di uno stesso oggetto* per averne una conoscenza.
2) La peculiarità dei sistemi semiotici è di permettere *operazioni e attività più ricche e più complete delle attività materiali* perché permettono d'inventare nuove situazioni, di esplorare situazioni possibili o di esplicitare aspetti non visualizzabili iconicamente nelle situazioni reali.
3) La *comprensione in matematica comincia quando si diventa capaci di passare da un tipo di rappresentazione a un altro*, cioè di convertire le rappresentazioni fra loro, senza avere l'appoggio di un'esperienza diretta dell'oggetto stesso. Ogni attività matematica si basa sulla sinergia cognitiva di molti registri di rappresentazione.
4) È questa attività di conversione che si rivela essere la più complessa e la più difficile, come si è potuto verificare con i problemi additivi perché *le corrispondenze fra i contenuti di due rappresentazioni diverse sono raramente visibili o distinguibili*.
5) Nell'apprendimento, il ricorso a rappresentazioni intermedie, transizionali, può dunque rivelarsi necessario per aggiornare i processi cognitivi di conversione, che non rilevano trattamenti matematici propriamente detti, per fare in modo che gli allievi se ne approprino. Perché è essenziale che ogni allievo *impari a coordinare i diversi sistemi* di rappresentazione che sono utilizzati, non soltanto per comunicare le conoscenze, ma soprattutto per produrne di nuove.

Per meglio capire l'importanza delle caratteristiche del funzionamento cognitivo richiesto da ogni attività matematica, occorre situarle in rapporto ai modelli di sviluppo e di acquisizione di conoscenze stabilite per l'organizzazione didattica degli apprendimenti. Esse costituiscono i dati a partire dai quali si può veramente porre il problema delle relazioni fra le rappresentazioni semiotiche e le rappresentazioni dette «mentali».

3. Quale modello per l'acquisizione delle conoscenze in matematica?

Due convinzioni pedagogiche molto forti sembrano quasi unanimemente distinte nell'organizzazione degli apprendimenti a livello dell'insegnamento primario e dei due primi anni del secondario. La prima concerne l'importanza dell'attività nell'acquisizione delle conoscenze. Per poter apprendere, gli allievi devono dapprima essere posti nella situazione *di tentare di fare da soli* qualcuno dei compiti che chiamano in causa già una parte delle conoscenze da apprendere, e non cercare di seguire o di riprodurre le spiegazioni dell'insegnante o dell'esperto. La seconda concerne l'importanza data all*'azione come gesto del corpo*, come manipolazione di oggetti concreti, o come utilizzazione di strumenti, nell'attività. Il linguaggio e le rappresentazioni semiotiche non avrebbero allora che un ruolo marginale nello sviluppo dell'attività e non interverrebbero che alla fine, essenzialmente per bisogni di comunicazione.

Queste convinzioni hanno trovato una giustificazione molto forte nella descrizione psico-epistemologica dello sviluppo dell'intelligenza del bambino fatta da Piaget (1967, 1968a, 1968b). Essa stabilisce un ordine di filiazione genetica fra l'azione, la formazione dei concetti, il linguaggio e i diversi sistemi semiotici. In questa filiazione genetica, la formazione dei concetti appare indipendente dal linguaggio.

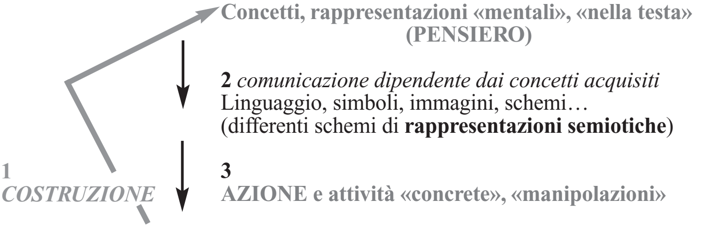


Figura 13 Modello piagetiano dello sviluppo dell'intelligenza e della formazione dei concetti organizzatori della rappresentazione del mondo.

Questa descrizione piagetiana ha assunto un grande ruolo nelle problematiche didattiche miranti a organizzare l'acquisizione delle conoscenze degli allievi (1974). Ha servito da quadro teorico per spiegare il funzionamento cognitivo del pensiero. Ma un tale quadro è pertinente anche per spiegare le condizioni di acquisizione delle conoscenze matematiche*, che esigono altri domini del sapere*, come abbiamo visto in precedenza?

Ricordiamo dapprima il carattere molto parziale della descrizione piagetiana e l'errore di prospettiva che ha indotto. Il linguaggio non viene dopo l'azione, come sua interiorizzazione, ma si sviluppa nello stesso tempo fin dalla nascita. (Boysson-

Bardies, 1996). L'interesse tardivo riservato ai lavori di Vytgoski (1985) ha finito per correggere, o compensare, questo errore di prospettiva. Così **il linguaggio è stato reintegrato fra le attività** favoreggianti l'acquisizione delle conoscenze, **ma unicamente nella misura in cui le interazioni sociali** (e dunque gli scambi e le discussioni stimolate dal lavoro in gruppo) costituiscono anche un fattore importante di motivazione e di svolgimento. Ora questa restrizione è problematica perché conduce a conservare per la formazione dei «concetti matematici» il modello descrittivo stabilito da Piaget per la formazione dei grandi concetti organizzatori della rappresentazione del mondo: numero, tempo, velocità, movimento, spazio, caso... Ciò significa dimenticare, o misconoscere, che i concetti studiati da Piaget, sono più vicini alle categorie delle quali Kant faceva il quadro organizzatore delle impressioni sensibili che non ai concetti matematici propriamente detti.

La situazione epistemologica della matematica non è affatto uguale a quella di altri domini del sapere. In matematica non c'è accesso agli oggetti studiati (numeri, funzioni…), all'infuori delle rappresentazioni semiotiche (linguaggi, immagini prodotte per costruzione grafica, schemi…). E ciò solleva il primo dei due problemi cognitivi che abbiamo evocato analizzando il montaggio realizzato da Kosuth: come non confondere un oggetto e la sua rappresentazione, quando non si ha alcun accesso all'oggetto rappresentato? Non si rischia di credere che rappresentazioni diverse rimandino a oggetti totalmente differenti? E che si parli qui di «concetto» o di «concettualizzazione» non cambia nulla a questa situazione epistemologica peculiare della matematica. Infine, c'è il fatto che l'insegnamento della matematica si urta a difficoltà specifiche e ricorrenti che finiscono con lo scoraggiare la maggior parte degli allievi. I problemi di applicazione della matematica a situazioni della vita reale non sono che la parte più visibile di queste difficoltà.

Questa situazione epistemologica eccezionale della matematica, così come le difficoltà specifiche contro le quali il loro insegnamento urta, conducono a mettere in dubbio la pertinenza dei modelli, piagetiani o neo-piagetiani, sul posto assegnato alle rappresentazioni semiotiche nell'insieme del funzionamento del pensiero. Queste ultime, infatti, sono centrali e non periferiche o secondarie.

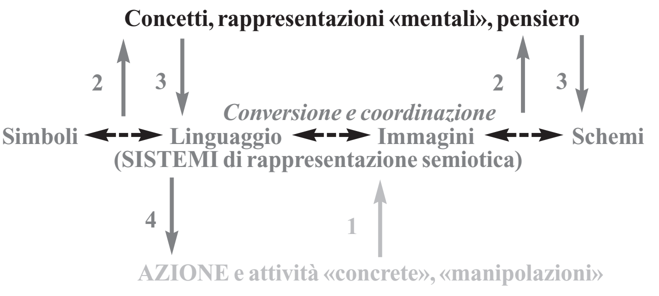


Figura 14 Modello di funzionamento cognitivo implicato dallo sviluppo delle conoscenze in matematica.

In questo schema si possono riconoscere le caratteristiche fondamentali del funzionamento cognitivo del pensiero matematico che l'analisi precedente dei problemi additivi ci ha permesso di illustrare: necessità di avere più rappresentazioni di uno stesso oggetto (doppie frecce orizzontali tratteggiate), necessità di coordinazione che permetta la loro conversione per consentire un reale apprendimento (frecce verticali 2 partenti da una delle doppie frecce), diversità dei sistemi semiotici ciascuno dei quali permetta un tipo differente di operazione del pensiero e dunque di attività semiotica (frecce verticali 3 sfocianti nel nome di un tipo di sistema di rappresentazione). La risoluzione di problemi di applicazione della matematica alla vita reale (freccia 4) presuppone dunque una prima coordinazione fra registri diversi di rappresentazione, ma non può in nessun modo provocarla.

Si vede dunque qual è la domanda fondamentale che l'insegnamento della matematica deve affrontare: non trovare quale sarebbe la buona o la migliore rappresentazione per un dato tipo di problema matematico – perché renderebbe gli oggetti matematici e le operazioni relative più direttamente accessibili – ma apprendere ad articolare rappresentazioni i cui contenuti non hanno nulla in comune, pur rappresentando lo stesso oggetto.

Conclusione

Il montaggio realizzato da Kosuth, un oggetto collocato al centro delle sue rappresentazioni possibili che non hanno nulla di simile nei loro contenuti rispettivi, mette in evidenza i due problemi di riconoscimento posti dalle rappresentazioni, di qualunque natura esse siano (enunciato, foto, immagine o schema): da una parte la loro relazione con l'oggetto rappresentato e, dall'altra, la loro relazione con le altre rappresentazioni. I processi cognitivi di riconoscimento delle rappresentazioni non sono affatto gli stessi, quando l'oggetto rappresentato è accessibile indipendentemente dalle sue rappresentazioni o, al contrario, quando non è accessibile al di fuori delle rappresentazioni, cioè quando si può mettere l'oggetto stesso in un montaggio alla Kosuth o quando ciò è impossibile. Nel primo caso, il passaggio da una rappresentazione a un'altra può farsi per associazione di ciascuna con l'oggetto del quale si ha un'esperienza diretta. Questo non solleva dunque difficoltà maggiori. Nel secondo caso, come riconoscere ciò che è invariante in due contenuti apparentemente senza corrispondenza, e dunque come passare da una rappresentazione all'altra? Questa è la situazione epistemologica della matematica e del suo apprendimento.

Si è dato ampio risalto all'analisi comparata di due problemi additivi, dei quali uno è sempre fonte di difficoltà, anche per futuri insegnanti. L'interesse di questa scelta per illustrare l'analisi del ruolo delle rappresentazioni nel funzionamento del pensiero è doppio.

I problemi additivi lasciano credere che si trattano realtà concrete. Non si potrebbe giocare realmente la situazione descritta con una collezione di oggetti materiali che si scambiano, che si riuniscono o che se ne tolgano e, dunque, la rappresentazione immaginata non permetterebbe di evitare la trappola verbale degli enunciati? L'analisi comparata di due problemi mostra che la loro rappresentazione per immagini implica una codificazione verbale di queste immagini e, più radicalmente, che certi problemi additivi non sono possibili, se non a partire dal linguaggio. In realtà, non si può porre un problema additivo senza mobilitare almeno due registri di rappresentazione, anche se uno solo parrebbe occupare da solo tutta la scena. Le operazioni concrete alle quali si rifarebbero i problemi additivi nascondono operazioni semiotiche allo stesso tempo verbali, simboliche e schematiche.

I problemi additivi, godendo di un'estrema semplicità delle conoscenze numeriche messe in atto, mobilitano rappresentazioni considerate come i «supporti» più comuni e più familiari della comunicazione. Perciò permettono osservazioni al di là della comprensione e della risoluzione dei problemi additivi. Li si ritrovano nella comprensione e nella risoluzione di tutti gli altri problemi di applicazione di conoscenze numeriche più complesse. E arriviamo poi ai processi più globali della formazione dello spirito: articolare sistemi di rappresentazione molto diversi per diventare capaci di cambiare il registro di rappresentazione e, così, poter risolvere problemi. Ora, come può svilupparsi, negli allievi, una tale articolazione?

Occorre riconoscere che la complessità dei funzionamenti cognitivi sottogiacenti ai fenomeni di rappresentazione, e più particolarmente alla conversione delle rappresentazioni, è largamente sconosciuta nell'insegnamento, tanto in matematica quanto al di fuori di essa. Si agisce come se la coordinazione dei registri di rappresentazione avvenisse da sola, come conseguenza di una comprensione, concettuale e asemiotica, dei contenuti matematici. Ciò significa dimenticare che è proprio in matematica che si utilizza la gamma più larga di rappresentazioni semiotiche e in maniera sistematica! Ci si comporta anche come se la presentazione simultanea – basta guardare qualunque pagina di manuale di matematica o di altre discipline – consentisse agli allievi di passare da un registro a un altro e di sapere come fare. Ciò equivale a dimenticare che in questa giustapposizione alla Kosuth manca l'essenziale, l'oggetto stesso che permetterebbe di collegare tutte le rappresentazioni. Uno degli obiettivi primordiali dell'insegnamento dev'essere, al contrario, di far costruire questa articolazione di sistemi di rappresentazione molto diversi, *condizione, e non conseguenza, della comprensione*.

Non si può né opporre il pensiero al linguaggio, né identificare il pensiero con il linguaggio o con un altro sistema di rappresentazione, immagine, schema o simboli. Perché il pensiero si sviluppa con la diversificazione dei sistemi semiotici di rappresentazione e con la loro coordinazione. È la sinergia dei loro funzionamenti congiunti e autonomi.

Boysson-Bardies B.
Comment la parole vient aux enfants. Paris: Odile Jacob, 1992 Beaux Arts Magazine n°101, 1996.

Damm R.
Apprentissage des problèmes additifs et compréhension de texte. Thèse U.L.P. Strasbourg: IREM, 1992.

Descaves A.
Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes. Paris: Hachette, 1992.

Husserl E.,
Philosophie de l'arithmétique (tr. J. English). Paris: P.U.F, 1972 (1891).

Piaget J.
La genèse du nombre chez l'enfant. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé, 1967 (1941).

Piaget J.
La naissance de l'intelligence chez l'enfant. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé, 1968a (1936).

Piaget J.
La formation du symbole chez l'enfant. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé, 1968b (1946).

Piaget J.
Réussir et comprendre. Paris: P.U.F., 1974.

Vergnaud G., Durand C.
Structures additives et complessité psychogénétique. *Revue française de pédagogie*, 36, p. 28-43, 1976.

Vergnaud G.
La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques.* Vol. 10/2.3 p. 133-170, 1990.

Vytgoski L.S.
Pensée et langage. Paris: Editions Sociales, 1985 (1934).

3. Il concetto di funzione e le sue rappresentazioni nell'educazione secondaria

Athanasios Gagatsis, Iliada Elia[1]

In this paper the findings of two recent studies are combined and discussed to investigate students' conceptions of function and their relationship with students' abilities in dealing with tasks of functions involving different modes of representations and function problem solving. The samples of the two studies consisted of secondary school students in Greece and Cyprus, respectively. Findings indicated students' inconsistent behavior when dealing with various modes of representation of function and tasks involving different uses of the concept. It was asserted that the understanding of function by secondary school students can be analyzed and described across at least three different features: definitions given by the students, different representations of functions that students can deal with and function problem solving involving conversions from one mode of representation to another. These three factors contribute in their own unique way to students' acquisition of the complex concept of function.

Introduzione

La funzione è un concetto centrale in matematica e nelle sue applicazioni. Essa deriva dall'inclinazione umana a connettere due differenti quantità, inclinazione questa sicuramente vecchia quanto la matematica. La metafora didattica del concetto di funzione appare difficile poiché coinvolge tre differenti aspetti: la dimensione epistemologica come espressa nei testi storici; il punto di vista e le convinzioni dei docenti sulle funzioni; e la dimensione didattica che concerne il sapere degli studenti e le restrizioni dovute al sistema educativo (Evangelidou, Spyrou, Elia & Gagatsis, 2004). Partendo da questi presupposti, sembra naturale che, in ogni paese, si riscontrino difficoltà nella concettualizzazione della nozione di funzione. La complessità della metafora didattica e la comprensione del concetto di funzione sono stati al centro dell'attenzione della comunità scientifica di ricerca in didattica della matematica (Dubinsky & Harel, 1992; Sierpinska, 1992). Un ulteriore fattore che influenza l'apprendimento del concetto di funzione è la varietà di rappresentazioni possibili (Hitt, 1998). Un cospicuo numero di studi ha esaminato il ruolo delle differenti rappresentazioni per la comprensione e l'interpretazione delle funzioni (Hitt, 1998; Markovitz, Eylon, & Bruckheimer, 1986).

In questo articolo sono combinati e discussi due studi recenti volti a investigare come gli studenti di scuola secondaria concepiscono e usano le funzioni. La novità di questo lavoro consiste nel considerare la comprensione del concetto di funzione degli studenti da due punti di vista: il primo concerne l'abilità degli studenti di usare e articolare una definizione adeguata di funzione, il secondo concerne l'abilità degli studenti di manipolare diverse possibili rappresentazioni di una funzione e di passare con flessibilità da una rappresentazione a un'altra. Entrambi i punti di vista considerati sono fondamentali e forniscono informazioni differenti sull'apprendimento del concetto di funzione.

1. Department of Education, University of Cyprus.

Rappresentazione e comprensione delle funzioni

Il termine *rappresentazione* è vago e si presta a numerose interpretazioni (Seeger, 1998). Seguendo la definizione di Kaput (1987) la nozione di rappresentazione coinvolge cinque entità:

a. l'entità che è rappresentata,
b. l'entità da rappresentare,
c. le caratteristiche concrete dell'entità da rappresentare che sono rappresentate,
d. le caratteristiche concrete dell'entità da rappresentare,
e. la relazione tra le due entità.

Questa definizione evidenzia la difficoltà che sorge nel tentativo di definire una nozione di rappresentazione; si noti che i termini *rappresentare* e *rappresentata* sono necessari per la definizione e la rendono in un certo senso circolare. In questo articolo le rappresentazioni in senso stretto sono interpretate come strumenti per rappresentare idee matematiche tramite tabelle, grafici, equazioni (Gagatsis, Elia & Mougi, 2002).

Al giorno d'oggi la centralità dei differenti tipi di rappresentazione nell'insegnamento, apprendimento e attività matematica sembra essere riconosciuta su larga scala (D'Amore, 1998). I sistemi di rappresentazione sono fondamentali per l'apprendimento dei concetti e determinano, in misura importante, ciò che viene effettivamente appreso (Cheng, 2000). In certi casi, le rappresentazioni sono talmente connesse con un concetto matematico che è difficile capire e apprendere il concetto senza farne uso: si pensi ad esempio alle funzioni reali e ai loro grafici. D'altronde, una rappresentazione non può descrivere in profondità un concetto matematico, poiché rappresenta solo alcuni aspetti. Differenti rappresentazioni dello stesso concetto tendono ad essere complementari e possono quindi contribuire a una sua comprensione globale. Ne consegue che l'abilità di identificare e rappresentare lo stesso concetto con diverse rappresentazioni e la flessibilità di passare da un registro di rappresentazione a un altro sono cruciali per l'apprendimento in matematica, poiché permettono allo studente di intravedere importanti connessioni e di conseguenza di sviluppare una comprensione profonda dei concetti (Even, 1998). Con i termini *traslazione* o *conversione* intendiamo il passaggio da un registro di rappresentazione a un altro (Janvier, 1987). Sierpinska (1992) sostiene che gli studenti hanno difficoltà a trovare connessioni tra le differenti rappresentazioni delle funzioni (formule, grafici, diagrammi e descrizioni a parole), a interpretare i grafici e a manipolare simboli che hanno a che vedere con le funzioni. Una ragione delle difficoltà riscontrate negli studenti nel passare da un registro di rappresentazione a un altro (Hitt, 1998; Sfard, 1992) e in generale nel costruire il concetto di funzione potrebbe consistere nell'utilizzo, durante l'insegnamento, di solo alcuni registri di rappresentazione. Tradizionalmente i docenti di matematica e i libri di testo, a livello secondario, descrivono le funzioni attraverso espressioni algebriche e grafici (Eisenberg & Dreyfus, 1991). Inoltre, in molti casi, la rappresentazione delle funzioni viene limitata alla trasposizione da forma algebrica a grafico (Gagatsis & Shiakalli, 2004). Le rappresentazioni standard e le trasposizioni tra loro non sono sufficienti agli studenti per costruire il significato completo delle funzioni e per concepire in modo completo il loro raggio di applicazione. Immagine concettuale e concezione sono due termini ampiamente discussi nella letteratura concernente il concetto di funzione presente negli studenti (Vinner & Dreyfus, 1989, Tall & Vinner, 1981). Anche se nelle scuole superiori vengono introdotte definizioni formali di concetti matematici, gli studenti non le usano nel momento in cui gli viene richiesto di identificare o costruire un oggetto matematico che li concerne. Fanno piuttosto riferimento a un'immagine concettuale che a sua volta si riferisce *all'insieme delle immagini mentali che lo studente associa al nome del concetto, insieme alle proprietà che lo caratterizzano* (Vinner & Dreyfus, 1989, p. 356). Tall e Vinner (1981) sostengono che le differenti parti dell'immagine concettuale vengono attivate in contesti differenti. L'immagine concettuale degli studenti viene formata attraverso la loro esperienza con esempi propri e non con esempi del concetto. Di conseguenza, ciò che gli studenti considerano come esempi del concetto non corrisponde necessariamente alla definizione formale. Per questo motivo spesso le loro risposte a domande o compiti concernenti il concetto in questione sono diverse dalle aspettative del docente (Vinner & Dreyfus, 1989). Nel tentativo di studiare la relazione tra la capacità degli studenti di manipolare diverse rappresentazioni delle funzioni e l'abilità nell'utilizzare la definizione stessa del concetto, Elia e Spyrou hanno condotto una ricerca tra studenti universitari del dipartimento di scienze dell'educazione dell'Università di Cipro (futuri docenti di scuola elementare). Le definizioni di funzione fornite dagli studenti erano correlate in maniera importante alle rappresentazioni che erano in grado di usare. Le definizioni e gli esempi forniti dagli studenti non permettevano di prevedere la loro abilità nell'applicare il concetto con altre forme di rappresentazione. In particolare è stato evidenziato che una corretta definizione del concetto di funzione da parte di uno studente non implicava necessariamente un'abilità nel ragionare o applicare la definizione in modo coerente con altre forme di rappresentazione. Viceversa definizioni scorrette o esempi inadeguati non implicavano necessariamente un fallimento in esercizi con altri modi di rappresentazione. In altre parole, definizioni, esempi e rappresentazioni sembrano avere ognuna un ruolo esclusivo nell'acquisizione del complesso concetto di funzione da parte dello studente. In effetti, l'incompetenza degli studenti in uno di questi aspetti implicava una parziale e insufficiente comprensione del concetto di funzione. Lo studio quindi suggerisce di affrontare il concetto di funzione da tutti e tre i punti di vista. Una congettura del presente studio è che l'apprendimento del concetto di funzione concerne tre abilità:

1. la capacità di articolare e utilizzare una corretta definizione di funzione,
2. la capacità di utilizzare diverse forme di rappresentazione,
3. la capacità di risolvere problemi concernenti le funzioni.

Crediamo che ciascuno degli aspetti menzionati dia una differente informazione sull'apprendimento del concetto di funzione da parte degli studenti. Il primo studio menzionato in questo articolo si concentra sull'abilità degli studenti di passare da un modo di rappresentazione di una funzione a un altro, mentre il secondo studio concerne la relazione tra l'abilità degli studenti di fornire una definizione corretta di funzione e la loro capacità di riconoscere funzioni in diversi contesti di rappresentazione da una parte e la loro abilità nel risolvere problemi dall'altra. Un fenomeno che viene evidenziato in entrambi gli studi e che può avere effetti negativi nell'insegnamento della matematica è la divisione in compartimenti. Vinner e Dreyfus (1989) suggeriscono che la divisione in compartimenti avviene quando un individuo possiede due visioni divergenti dello stesso concetto che lo portano ad assumere comportamenti inconsistenti. Se ci limitiamo ai diversi modi di rappresentazione, questo fenomeno rivela una difficoltà concettuale nel compiere, in maniera flessibile e competente, il passaggio da un modo di rappresentazione di un concetto matematico a un altro (Duval 2002). Studi empirici precedenti non hanno chiarito il fenomeno della divisione in compartimenti in maniera completa e sistematica. In effetti è molto difficile investigare in maniera profonda questo fenomeno a partire da scritti degli studenti. Crediamo che le relazioni di implicazione tra le risposte degli studenti in esercizi appositamente concepiti, così come le relazioni di similarità (Lerman 1981) possano essere utili per identificare l'esistenza della divisione in compartimenti nella mente degli studenti. A questo scopo abbiamo utilizzato per i nostri studi un software chiamato C.H.I.C (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive) (Bodin, Coutourier e Gras, 2000). Supponiamo che il fenomeno della divisione in compartimenti sia presente nell'apprendimento del concetto di funzione se si osserva almeno uno dei seguenti fenomeni: primo, se gli studenti trattano in maniera inconsistente i diversi modi di rappresentare funzioni (grafico, simbolico, verbale) e il passaggio da un modo di rappresentazione a un altro; secondo, se l'abilità nell'utilizzare un modo di rappresentazione di una funzione non coincida con l'abilità nel rappresentare la stessa funzione in un altro modo. In generale supponiamo che questo fenomeno appaia quando gli studenti si comportano in maniera inconsistente in esercizi riguardanti differenti usi del concetto di funzione.

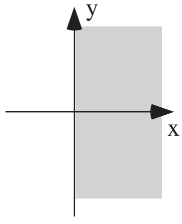
Il primo studio: passaggio da un modo di rappresentazione a un altro

Per determinare se gli studenti compiono effettivamente passaggi da un modo di rappresentazione a un altro, Gagatsis, Elia e Gras hanno condotto una ricerca esaminando una possibile classificazione dei modi di rappresentazione di una funzione (grafico, simbolico, verbale). Il campione di studio era composto di 183 studenti quattordicenni (nono anno di scolarità). Sono stati costruiti due test da sottoporre ai partecipanti: il primo (test A) consisteva in sei esercizi in cui veniva chiesto di tradurre in forma simbolica e verbale alcune rappresentazioni grafiche di una relazione algebrica. Il secondo (test B) consisteva nel tradurre in forma grafica e simbolica le stesse relazioni algebriche del test A espresse questa volta in forma verbale. Le sei relazioni algebriche proposte, basate su uno studio di Duval (1993), erano le seguenti:

$$y<0 \quad ; \quad x\cdot y>0 \quad ; \quad y>x \quad ; \quad y=-x \quad ; \quad y=\frac{3}{2} \quad ; \quad y=x-2$$

Le prime tre relazioni corrispondono a regioni di punti mentre le seconde tre corrispondono a vere e proprie funzioni. Ogni test conteneva un esempio di relazione algebrica rappresentata in forma grafica, verbale e simbolica, per aiutare gli studenti a capire la consegna dell'esercizio. Ad esempio:

Tavola 1. Un esempio di esercizio risolto, incluso nel testo

Rappresentazione grafica	Rappresentazione verbale	Rappresentazione simbolica
	Rappresenta la regione dei punti con ascissa positiva	x>0

Nella tavola 2 sono rappresentate, per ogni esercizio dei due test osservati sul campione di studio, le medie e le occorrenze riguardanti la capacità degli studenti di traslare relazioni algebriche da una forma di rappresentazione a un'altra.

Tavola 2. Occorrenze e medie degli studenti del grado 9 nei Test A e B

Grado 9	*Test A*				*Test B*			
N=183	grafica-verbale		grafica-simbolica		verbale grafica		verbale simbolica	
	occorrenza	media	occorrenza	media	occorrenza	media	occorrenza	media
V1:y<0	139	0.76	102	0.56	132	0.72	109	0.60
V2:xy>0	93	0.51	72	0.39	116	0.63	72	0.39
V3:y>x	67	0.37	46	0.25	83	0.45	91	0.50
V4:y=–x	75	0.41	36	0.20	58	0.32	47	0.26
V5:y=3/2	65	0.36	70	0.38	68	0.37	80	0.44
V6:y=x–2	28	0.15	13	0.07	53	0.29	44	0.24

Gli studenti hanno ottenuto migliori risultati partendo da rappresentazioni verbali piuttosto che da rappresentazioni grafiche. Inoltre tutte le conversioni da forma grafica a forma simbolica sono apparse più difficoltose delle conversioni da forma grafica a forma verbale. Gli studenti concepiscono l'ultimo tipo di conversione più facilmente su un piano espressivo meta-matematico piuttosto che su un livello puramente matematico. In effetti viene loro chiesto di descrivere in maniera testuale le proprietà riscontrate in un grafico e a questo scopo possono far uso del loro linguaggio naturale. Per passare invece da forma grafica a forma simbolica è necessario padroneggiare concetti come l'uguaglianza e le relazioni di ordine; inoltre è richiesto un uso efficiente della notazione algebrica. La figura 1 rappresenta il diagramma di somiglianza degli esercizi dei test A e B ottenuti a partire dal campione di studenti. Il diagramma permette di raggruppare gli esercizi in base all'omogeneità di trattamento ricevuta dagli studenti. Due gruppi distinti possono essere facilmente identificati. Il primo gruppo concerne relazioni di somiglianza tra esercizi proposti nel test A, mentre il secondo gruppo concerne situazioni proposte nel test B. Questi risultati mostrano che diversi tipi di conversioni tra rappresentazioni degli stessi concetti matematici sono trattati in maniera completamente differente. Il punto di partenza di una conversione, nel nostro caso la rappresentazione grafica o verbale, sembra influenzare in modo importante la prestazione degli studenti anche se le situazioni proposte fanno capo alle medesime relazioni algebriche.

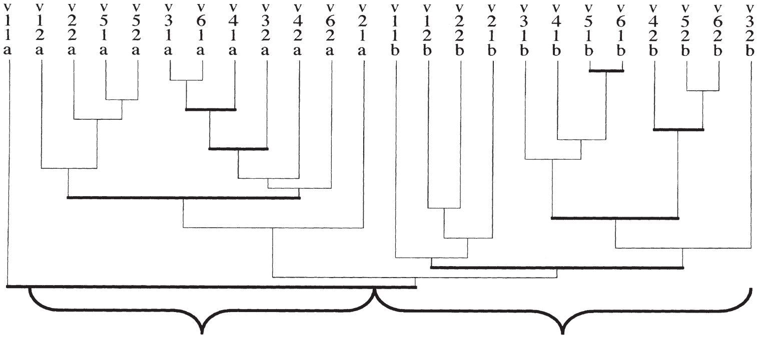


Figura 1 Diagramma di somiglianza relativo agli esercizi dei test A e B[2] delle risposte date dagli studenti del grado 9[3].

Il corrispondente diagramma di implicazione della figura 2, che contiene le relazioni di implicazione tra le risposte, indica se il successo in un particolare esercizio implica il successo in un altro esercizio. I risultati sono in linea con quelli evidenziati nella figura precedente. In particolare si può osservare la formazione di due gruppi distinti. Il primo gruppo concerne relazioni di implicazione tra esercizi del test B, mentre il secondo gruppo concerne relazioni di implicazione tra esercizi del test A. Si può affermare che la capacità di convertire una relazione algebrica da una forma di rappresentazione a un'altra con una certa rappresentazione di partenza non implica necessariamente la capacità di effettuare una conversione della stessa relazione algebrica con una diversa rappresentazione di partenza. Ad esempio, studenti in grado di tradurre una relazione algebrica da forma grafica a forma verbale non sono stati in grado di tradurre la medesima relazione algebrica da forma verbale a forma grafica.

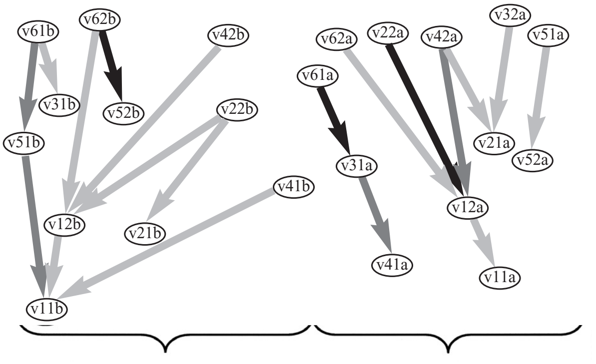


Figura 2 Diagramma di implicazione degli esercizi dei test A e B delle risposte date dagli studenti del grado 9.

2. La notazione utilizzata nel diagramma è la seguente:
   1. «a» sta per test A, «b» sta per test B.
   2. Il primo numero dopo «v» sta per il numero di esercizio, in particolare 1:$y<0$, 2:$xy>0$, 3:$y>x$, 4: $y=-x$, 5: $y=3/2$, 6: $y=x-2$.
   3. Il secondo numero sta per il tipo di conversione richiesta. Per il test A 1:grafica-verbale, 2: grafica-simbolica; per il test B 1:verbale-grafica, 2:verbale-simbolica.
3. Si intende del nono anno di scolarizzazione.

In generale, partendo dai due diagrammi ottenuti, si può dedurre che gli studenti si sono comportati in maniera differente nei due test, nonostante le relazioni algebriche proposte fossero le stesse. Evidentemente le diverse rappresentazioni di partenza portano gli studenti a comportarsi in maniera inconsistente.

Il secondo studio: la definizione di funzione degli studenti e la loro abilità nel trattare diversi modi di rappresentazione di una funzione.

Lo scopo dello studio, condotto da Eracleous e Gagatsis (2005) è stato duplice: il primo di esplorare i diversi concetti di funzione presenti negli studenti e la capacità di questi ultimi di identificare una funzione partendo da diverse forme di rappresentazione, e di muoversi da una forma di rappresentazione a un'altra. Il secondo scopo è stato quello di studiare la relazione tra le diverse concezioni di funzione presenti negli studenti e di valutare la loro prestazione nel considerare diverse forme di rappresentazione nella risoluzione di problemi. Il campione di studio consisteva in 179 studenti sedicenni (undicesimo anno di scolarità). È stato sviluppato un test da sottoporre agli studenti. Esso consisteva in sette esercizi (vedi appendice) che includevano il riconoscimento di funzioni tra altre strutture rappresentate in varie forme (grafici, diagrammi a frecce, espressioni simboliche) applicando la definizione di funzione. Gli studenti dovevano rispondere in ogni punto con «sì» o «no» e motivare la loro risposta. Inoltre veniva loro chiesto di fornire una definizione di funzione e di risolvere problemi concernenti il passaggio da una forma di rappresentazione a un'altra. Descriviamo ora brevemente i diversi esercizi del test e la notazione corrispondente utilizzata nell'analisi dei risultati.

Esercizio 1 Si chiedeva di definire una funzione. Abbiamo indicato con D1 una risposta corretta, con DA una risposta ambigua e con DW una risposta sbagliata.

Esercizio 2 Proponeva quattro diagrammi a frecce in cui bisognava riconoscere quelli che rappresentavano funzioni (V1,V2,V3,V4). Per ogni risposta veniva richiesta una giustificazione (VExp 1, VExp 2, VExp 3, VExp 4).

Esercizio 3 Proponeva quattro grafici rappresentati in un sistema di assi ortogonali in cui bisognava riconoscere le funzioni (G1, G2, G3, G4) motivando ogni risposta (GExp 1, GExp 2, GExp 3, GExp 4).

Esercizio 4 Proponeva quattro espressioni algebriche tra cui bisognava riconoscere le funzioni (ALG 1, ALG 2, ALG 3, ALG 4).

Esercizio 5 Veniva richiesto di mettere in relazione le rappresentazioni grafiche e verbali di alcune relazioni algebriche.

Esercizio 6 Concerneva la conversione da forma grafica a espressione simbolica di una funzione lineare.

Esercizio 7 Era composto di tre punti:
- convertire una relazione algebrica da forma verbale a forma simbolica;
- riconoscere se la relazione data definisce una funzione;
- disegnare il grafico relativo alla relazione proposta.

I risultati mostrano un alto tasso di successo nell'esercizio relativo al riconoscimento dei grafici di funzioni (esercizio 3) e bassi tassi di successo nell'esercizio 7. Gli studenti si sono rivelati più abili nel riconoscere funzioni a partire dai grafici piuttosto che dalla rappresentazione simbolica. Inoltre è interessante notare che solo il 35% degli studenti interpellati ha fornito una definizione corretta di funzione. Nella figura 3 è illustrato il diagramma di somiglianza per le domande del test.

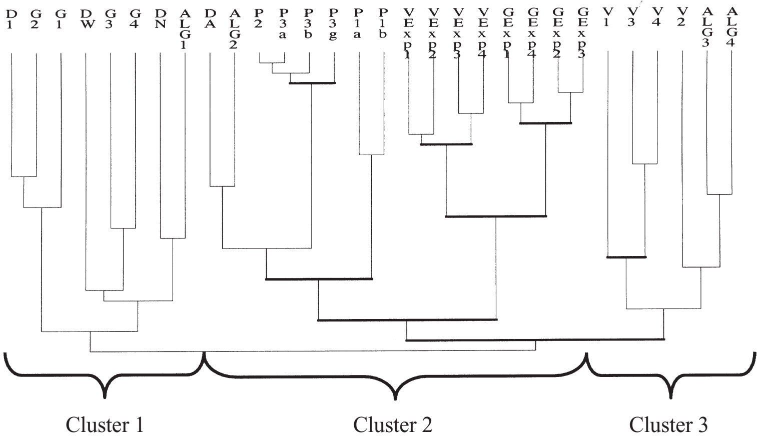


Figura 3 Diagramma di somiglianza degli esercizi del test basato sulle risposte degli studenti di grado 11.

È facile identificare tre gruppi nel diagramma della figura 3. Il primo gruppo concerne la definizione di funzione con gli esercizi relativi al riconoscimento grafico. In particolare la definizione corretta (D1) e i primi due grafici (G2 e G1) formano un gruppo di somiglianza, così come formano un gruppo anche la definizione scorretta (DW) con gli altri due grafici (G3 e G4). Inoltre, non aver fornito nessuna definizione (DN) è correlato direttamente al riconoscimento di una funzione in forma simbolica (ALG1). Vicino a questo gruppo di somiglianza troviamo un altro gruppo formato dalla definizione ambigua (DA) e un altro esercizio concernente la rappresentazione di una funzione in forma simbolica (ALG2). Questi gruppi di somiglianza suggeriscono che la definizione di funzione fornita dagli studenti è associata direttamente alla forma grafica di rappresentazione e solo parzialmente alla forma simbolica. La stretta connessione tra la definizione corretta e il riconoscimento dei primi due grafici rivela che questi studenti sono in grado di riconoscere che questi particolari grafici rappresentano funzioni. Questo comportamento consistente può essere dovuto anche al carattere convenzionale dei grafici che possono essere ritrovati anche nei testi utilizzati nella scuola cipriota.

Il secondo gruppo nel diagramma della figura 3 consiste in due gruppi separati di variabili. Il primo gruppo è formato dai problemi concernenti i diversi tipi di conversione da un modo di rappresentazione a un altro (P2, P3a, P3b, P3g, P1a, P1b). La formazione di questo gruppo suggerisce che gli studenti trattano in maniera consistente i problemi riguardanti le funzioni ma in maniera differente da quanto fanno in esercizi riguardanti la definizione di funzione e il riconoscimento di funzioni rappresentate in diverse forme. Il secondo gruppo concerne due distinti sottogruppi di spiegazioni fornite dagli studenti per motivare le risposte negli esercizi due e tre (GExp1,2,3,4, VExp 1,2,3,4) . Si può quindi dedurre che gli studenti motivano in maniera consistente le loro risposte relative al medesimo modo di rappresentazione. Inoltre, si può dedurre che le giustificazioni fornite erano diverse a dipendenza del modo di rappresentazione.

Il terzo gruppo di somiglianza consiste nel riconoscimento delle funzioni nei diagrammi a frecce (V1,2,3,4) e una parte degli esercizi concernenti il riconoscimento delle funzioni in forma simbolica (ALG3, 4). Si può dedurre che gli studenti trattano in maniera consistente il riconoscimento di funzioni nei diagrammi a frecce e una parte del riconoscimento delle funzioni nelle espressioni simboliche.

In generale possiamo dedurre dal diagramma di somiglianza che i differenti modi di rappresentazione sono trattati in maniera diversa e inconsistente. La formazione di tre gruppi chiaramente distinti sostiene l'ipotesi di un effetto di divisione in compartimenti del concetto di funzione da parte degli studenti.

Discussione

Lo scopo principale di questo articolo era di investigare l'apprendimento del concetto di funzione da due punti di vista. Il primo faceva riferimento all'abilità degli studenti di gestire diversi modi di rappresentazione, mentre il secondo concerneva l'abilità degli studenti nel definire in maniera corretta il concetto di funzione e nell'utilizzarlo nella risoluzione di problemi.

Il primo studio riportato in questo articolo ha esaminato le prestazioni degli studenti nel passaggio da un modo di rappresentazione di una relazione algebrica a un altro. I risultati hanno evidenziato importanti differenze nel modo di trattare i diversi tipi di conversione delle stesse relazioni algebriche, mettendo in luce un comportamento inconsistente, sintomo di una divisione in compartimenti del concetto di funzione.

Il secondo studio analizzato in questo articolo ha investigato l'abilità degli studenti nel definire le funzioni, nell'identificarle a partire da diverse forme di rappresentazione e nel passare da un modo di rappresentazione a un altro. I risultati hanno evidenziato le difficoltà che gli studenti riscontrano nel definire correttamente il concetto di funzione e nel risolvere problemi concernenti funzioni rappresentate in varie forme. La mancata somiglianza tra le varie risposte fornite dagli studenti è sintomo della mancata flessibilità nel trattare diversi modi di rappresentazione dello stesso concetto: un'ulteriore conferma della tesi della divisione in compartimenti del concetto di funzione.

Si può affermare che in entrambi gli studi gli studenti non possedevano una comprensione completa e flessibile del concetto di funzione e delle sue applicazioni. Come evidenziato da Even (1998), la capacità di identificare e rappresentare lo stesso concetto con differenti rappresentazioni e la flessibilità nel passare da un modo di rappresentazione a un altro permettono agli studenti di vedere diverse relazioni e di sviluppare una profonda comprensione del concetto. Il comportamento inconsistente da questo punto di vista suggerisce che gli studenti non hanno differenti maniere di esprimere lo stesso concetto, ma piuttosto hanno diverse rappresentazioni dello stesso concetto che a loro appaiono come oggetti matematici distinti e autonomi. In altre parole, gli studenti confondono l'oggetto matematico funzione o relazione algebrica con la corrispondente rappresentazione semiotica (Duval, 1993, 2000). Seguendo Sierpinska (1992), possiamo quindi affermare che è importante fornire agli studenti diverse forme di rappresentazione delle funzioni per evitare che essi identifichino il concetto di funzione con un particolare tipo di rappresentazione.

I risultati del secondo studio hanno evidenziato che gli studenti trattano in maniera coerente lo stesso tipo di esercizi, ad esempio gli esercizi riguardanti l'identificazione di funzioni, oppure la definizione di funzioni o ancora la risoluzione di problemi. Ma, d'altro canto, hanno evidenziato una mancanza di connessione tra esercizi di diverso tipo, sintomo questo di un comportamento inconsistente nei confronti di diverse competenze cognitive facenti riferimento allo stesso concetto. In altre parole, gli studenti potevano essere in grado di definire correttamente il concetto di funzione senza essere in grado di riconoscerne una a partire da un certo modo di rappresentazione, oppure senza essere in grado di risolvere problemi riguardanti il passaggio da un modo di rappresentazione a un altro. Così, il fenomeno di divisione in compartimenti non è venuto a galla solo in senso ristretto nel caso di diversi modi di rappresentazione, ma anche in senso più generale, come differenza tra esercizi concernenti diversi tipi di ragionamento matematico e diversi usi dello stesso concetto. Il senso generale di divisione in compartimenti è in linea con il punto di vista di Vinner e Dreyfus (1989) quando affermano che la divisione in compartimenti avviene nel momento in cui un individuo possiede schemi mentali divergenti e potenzialmente contraddittori.

L'emergere di questo fenomeno può anche essere interpretato come un'evidenza del fatto che gli studenti fanno capo alle proprie immagini mentali di funzione, piuttosto che alla definizione formale del concetto appresa a scuola, per costruire e identificare oggetti riguardanti le funzioni.

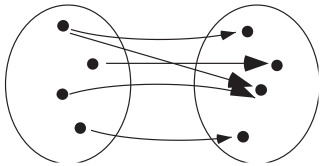
I tre aspetti dell'apprendimento del concetto di funzione citati precedentemente sembrano avere ciascuno un ruolo fondamentale. Inoltre essi forniscono diverse informazioni riguardo all'acquisizione del concetto da parte dello studente.

Queste considerazioni hanno delle implicazioni dirette per quanto riguarda l'insegnamento. Bisogna ricordare che, per insegnare le funzioni agli studenti di scuola secondaria, è importante considerare tutti e tre gli aspetti citati: la definizione formale, l'utilizzo del concetto con diverse forme di rappresentazione e l'utilizzo del concetto in problemi concernenti il passaggio da un modo di rappresentazione a un altro. Per concludere, suggeriamo che un adeguato apprendimento del concetto di funzione possa essere identificato con l'abilità dello studente di trattare tutti e tre i punti descritti e che la mancanza anche di una sola di queste abilità possa essere vista come sintomo di comprensione limitata e ambigua del concetto.

Appendice: il test della seconda ricerca

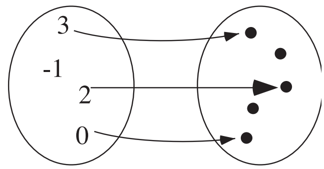
1) Cosa è una funzione?
2) Quali delle seguenti corrispondenze sono funzioni?

a)



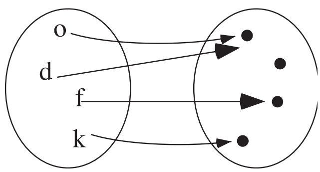
sì - no

b)



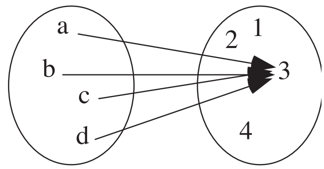
sì - no

c)



sì - no

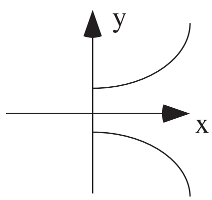
d)



sì - no

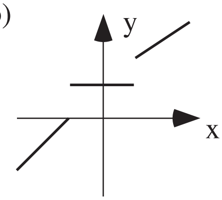
3) Quali dei seguenti grafici rappresentano funzioni? Giustifica la tua risposta?

a)



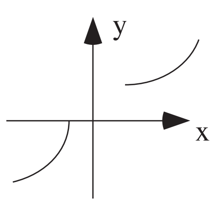
sì - no

b)



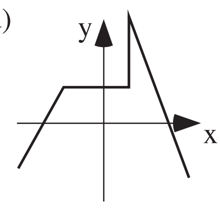
sì - no

c)



sì - no

d)



sì - no

4) Quali delle seguenti espressioni simboliche definiscono delle funzioni?

a) $2x + 5y = 0 \quad , \quad x \in \mathbf{R}$ sì - no

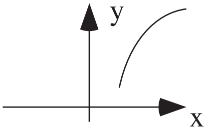
b) $7x + 3 = 0 \quad , \quad x \in \mathbf{R}$ sì - no

c) $x^2 + y^2 = 2 \quad , \quad x \in \mathbf{R}$ sì - no

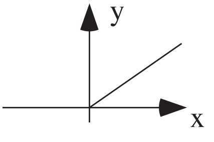
d) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{per} \quad x \geq 4 \\ x \quad \text{per} & x < 0 \end{cases}$ sì - no

5) Ognuna delle seguenti relazioni è accompagnata da un grafico. Verifica se queste relazioni possono essere rappresentate da uno dei grafici dati, se no disegna tu il grafico corretto. Giustifica in ogni caso la tua risposta.

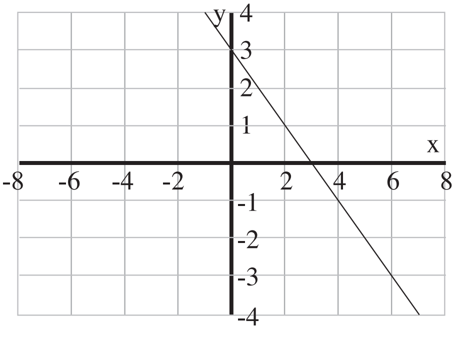
a) L'altezza di una candela che sta bruciando in funzione del tempo.



b) La circonferenza di un cerchio in funzione del suo raggio.



6) Scrivi in forma analitica la funzione rappresentata nel grafico.



7) Mary disegna dei rettangoli con perimetro di 20 cm

a) Esprimi l'area del rettangolo in funzione di uno dei suoi lati.

b) Spiega se la relazione trovata definisce una funzione.

c) Rappresenta il grafico di questa relazione.

Bodin, A., Coutourier, R., & Gras, R.
CHIC: Classification Hiérarchique Implicative et Cohésive-Version sous Windows – CHIC 1.2. Rennes: Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques, 2000.

Cheng, P.C.H.
Unlocking conceptual learning in mathematics and science with effective representational systems. *Computers and Education, 33*, 109-130, 2000.

D'Amore B.
Relational objects and different representative registers: cognitive difficulties and obstacles. *L'educazione matematica*. 1, 7-28, 1998.

Dubinsky, E., & Harel, G.
The nature of the process conception of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 85-106). United States: The Mathematical Association of America, 1992.

Duval, R.
Registres de Représentation Sémiotique et Fonctionnement Cognitif de la Pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*, 37-65, 1993.

Duval, R.
The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 1* (2), 1- 16, 2002.

Eisenberg, T., & Dreyfus, T.
On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 9-24). United States: Mathematical Association of America, 1991.

Elia, I., & Spyrou, P.
How students conceive function: a semiotic index for the understanding of a complex concept (submitted).

Elia, I., Gagatsis, A., & Gras, R.
Can we «trace» the phenomenon of compartmentalization by using the implicative statistical method of analysis? An application for the concept of function. *Troisièmes Rencontres Internationales L'Analyse Statistique Implicative (A.S.I.)* (submitted).

Eracleous, A., & Gagatsis, A.
Representations of functions and their conversion by students of Grade 11. In Gr. Makrides, A. Gagatsis, P. Damianou, K. Christou, P. Petrou, A. Philippou (Eds.), *Proceedings of the 7th Cyprus Conference in Mathematics Education and Science and 4th Symposium of Astronautics and Space* (pp. 63-74). Nicosia, Cyprus: Cyprus Mathematical Society, 2005.

Evangelidou, A., Spyrou, P., Elia, I., & Gagatsis, A.
University students' conceptions of function. In M. Johnsen Høines & A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 351-358). Bergen, Norway: Bergen University College, 2004.

Even, R.
Factors involved in linking representations of functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 105-121, 1998.

Gagatsis, A., & Shiakalli, M.
Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology, 24* (5), 645-657, 2004.

Gagatsis, A., Elia, I., & Mougi, A.
The nature of multiple representations in developing mathematical relations. *Scientia Paedagogica Experimentalis, 39* (1), 9-24, 2002.

Hitt, F.
Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 123-134, 1998.

Janvier, C.
Representation and understanding: The notion of function as an example. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 67-71). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1987.

Kaput, J. J.
Representation Systems and Mathematics. In C.Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1987.

Lerman I.C.
Classification et analyse ordinale des données. Paris: Dunod, 1981.

Markovitz, Z., Eylon, B., & Bruckheimer, M.
Functions today and yesterday. *For the Learning of Mathematics, 6* (2) 18-28, 1986.

Seeger, F.
Representations in the Mathematical Classroom: Reflections and Constructions. In F. Seeger, J. Voigt, & U. Waschescio (Eds.), *The culture of the mathematics classroom* (pp. 308-343). Cambridge: Cambridge UP, 1998.

Sfard, A.
Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification -The case of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 59-84). United States: The Mathematical Association of America, 1992.

Sierpinska, A.
On understanding the notion of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 25-28). United States: The Mathematical Association of America, 1992.

Tall, D., & Vinner, S.
Concept images and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics, 12,* 151-169, 1981.

Vinner, S., & Dreyfus, T.
Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20* (4), 356-266, 1989.

4. Il senso della probabilità è impreciso

Alberto Piatti, Gianfranco Arrigo

This is the third paper about imprecise probability theory that appears in this journal. In this paper we propose several teaching activities involving, in different ways, imprecision and vagueness which are the principal features of imprecise probability. In particular, we explain a geometrical representation of probability that can be helpful to analyze simple real situations characterized by three possible outcomes using imprecise probability assessments. We argue, that the use of imprecise probability assessments, and in particular of verbal probability judgements, is nearest to the personal experience of students and can motivate them to approach probability theory with a more realistic point of view.

1. Giudizi probabilistici qualitativi

Consideriamo le seguenti situazioni:

1) La squadra di calcio di Anacreon domani giocherà una partita contro la squadra Terminus. Un tuo amico ti chiede che cosa ne pensi della probabilità che vinca Anacreon. Che cosa gli risponderesti?
2) Devi organizzare una gara di sci alpino, ma non sei sicuro se in quella data vi saranno condizioni meteorologiche adatte. Chiedi un giudizio a un esperto di meteorologia sulla probabilità che in quel giorno vi sia neve a sufficienza: che tipo di giudizio esprimerà costui?

Nella prima situazione solitamente si tende a esprimere giudizi del tipo «è probabile che Anacreon vinca», oppure «è più probabile che Anacreon vinca, piuttosto che perda», oppure ancora «la probabilità che Anacreon vinca è almeno doppia rispetto a quella che perda». Al contrario, è impossibile che qualcuno, ragionevolmente, esprima un giudizio del tipo «la probabilità che Anacreon vinca è 0,75».

Quanto affermato accade praticamente in tutte le situazioni reali: si tende a esprimere giudizi probabilistici di tipo **qualitativo** e non **quantitativo**.

È importante quindi sviluppare una metodologia per combinare e analizzare i giudizi probabilistici qualitativi. Possiamo esprimere tre tipi fondamentali di giudizi qualitativi: **classificatori**, **comparativi**, **di rapporto**.

- Un giudizio di tipo classificatorio è espresso su un unico evento A, ad esempio «A è probabile».
- Un giudizio di tipo comparativo è espresso confrontando direttamente le probabilità di due eventi, ad esempio «A è più probabile di B».
- Un giudizio di rapporto è espresso per due eventi A e B e considera il rapporto tra le loro probabilità, ad esempio «A è almeno il doppio più probabile di B».

  Un giudizio di rapporto può essere visto come un giudizio comparativo generalizzato.

Un primo punto fondamentale è riuscire a quantificare in qualche maniera i giudizi espressi a parole. Dato un certo evento A, il nostro obiettivo è stimare la sua probabilità P(A).

I giudizi probabilistici qualitativi sono in generale piuttosto vaghi, di conseguenza sarà molto difficile ottenere un numero preciso per P(A); il caso più frequente sarà che P(A) appartiene a un intervallo:

$$P(A) \in \left[\underline{P}(A); \overline{P}(A)\right]$$

dove $\underline{P}(A), \overline{P}(A)$ sono in ordine le probabilità minore e maggiore (inferiore e superiore se non comprese) possibili per l'evento A, tenuto conto dei giudizi espressi.

Esempi di quantificazione

«A è probabile»: una persona che esprime un simile giudizio pensa che sia più probabile che succeda A piuttosto che ¬A (non A), ma poiché

$P(A) + P(\neg A) = 1$,

questo giudizio può essere quantificato come:

$$P(A) > \frac{1}{2}$$

Analogamente, «A è improbabile» viene ad essere espresso con

$$P(A) < \frac{1}{2}$$

«A è più probabile di B» con

$P(A) > P(B)$

«A è almeno il triplo più probabile di B» con

$P(A) \geq 3 \cdot P(B)$

Ogni giudizio qualitativo espresso a parole viene riassunto con una o più disuguaglianze, perciò tendiamo a trovare intervalli che contengono P(A) piuttosto che valori precisi di P(A).

Consideriamo il primo esempio: una squadra di calcio che gioca contro un'altra può ottenere tre risultati possibili:

- può vincere con probabilità P(V);
- può perdere con probabilità P(S);
- può pareggiare con probabilità P(P).

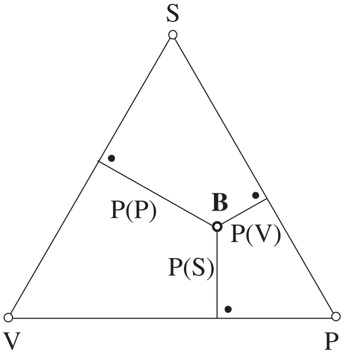
Sappiamo che deve valere:

P(V) + P(P) + P(S) = 1

Il nostro obiettivo è costruire l'insieme di punti (P(V);P(P);P(S)) compatibili con i giudizi espressi. Trattandosi di soli tre esiti, possiamo rappresentare la situazione con le cosiddette coordinate baricentriche[1]. Dato un triangolo equilatero di lato

1. Vedere in particolare la Situazione 1.

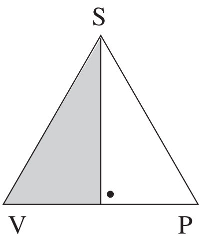
unitario, possiamo rappresentare le triple (P(V);P(P);P(S)) come un punto B del triangolo VPS indicato nella figura seguente:



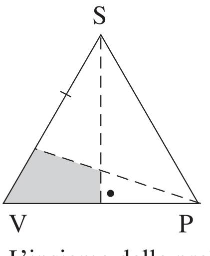
Questo tipo di rappresentazione può risultare molto utile per evidenziare le probabilità compatibili con le nostre convinzioni. Ad esempio, supponiamo di esprimere i seguenti giudizi (che devono valere simultaneamente):

G1: «È più probabile vincere che pareggiare».
G2: «Vincere è almeno il doppio più probabile che perdere».
G3: «È più probabile che si vinca».

Per ogni giudizio possiamo rappresentare le probabilità possibili in un triangolo equilatero[2]. G1: P(V) > P(P)



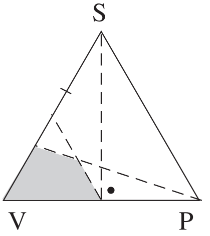
Tutti i punti nella parte grigia corrispondono a triple di probabilità compatibili con il giudizio G1. Di questi punti dobbiamo trovare quelli che soddisfano anche il secondo giudizio. G2: P(V) ≥ 2 P(S)



L'insieme delle probabilità diventa più piccolo.
Incorporiamo anche il terzo giudizio. G3: P(V) > 0,5

2. Vedere la Situazione 1, attività B, C, D, E.

Otteniamo l'insieme di tutte le triple di probabilità compatibili con i tre giudizi: è la parte grigia della figura seguente:



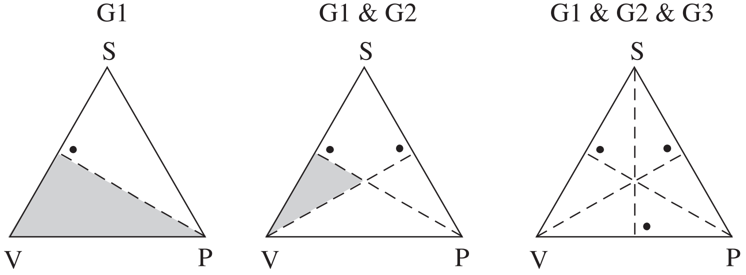
Ricaviamo: $\underline{P}(V)=0{,}5\,;\,\overline{P}(V)=1$

È interessante notare che i giudizi G2 e G3 rendono ininfluente il giudizio G1. Questo caso capita spesso in situazioni reali: si possono avere informazioni **ridondanti**.

Può anche succedere di trovarsi di fronte a una situazione del tipo:

G1: «Vincere è più probabile di perdere».
G2: «Perdere è più probabile di pareggiare».
G3: «Pareggiare è più probabile di vincere».

Rappresentiamo graficamente:



Non esiste alcun punto che soddisfi tutte e tre i giudizi. Si dice che la situazione è **incoerente**. Solitamente, quanto più giudizi vengono espressi tanto più precisa è la stima della probabilità ottenuta. Occorre pero fare attenzione, perché questa non è una regola applicabile in generale: parte dei giudizi possono risultare ridondanti. D'altra parte, gli stessi possono essere incoerenti. Si capisce anche come, disponendo di soli giudizi qualitativi, sia praticamente impossibile ottenere valori unici di probabilità[3].

È interessante notare che queste tecniche possono essere usate anche per verificare la coerenza di giudizi espressi da più persone[4] o da una persona a diversi intervalli di tempo.

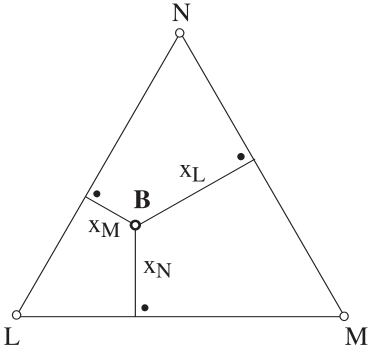
Ricordiamo che due giudizi sono **coerenti** se esiste almeno un punto in comune ai loro insiemi di probabilità.

3. La Situazione 2 propone diversi esempi di applicazione della metodologia illustrata.
4. Vedere Situazione 2, D.

2. Proposte didattiche

Situazione 1: geometria del triangolo equilatero

Costruisci con Cabri[5] un triangolo equilatero LMN e un suo punto B qualsiasi. Disegna i segmenti distanza di B da ciascuno dei suoi lati ed evidenzia le loro misure.



Attività A

Domande possibili

Tascinando B[6], che cosa succede? Esiste una posizione di B per la quale la somma $x_L+x_M+x_N$ assume un valore massimo?

Risposte possibili

Dopo qualche sperimentazione[7], si può intuire che la somma $x_L+x_M+x_N$ rimane costante al variare della posizione di B.

Domanda

Dimostra che, per qualsiasi punto B appartenente al triangolo LMN, la somma $x_L+x_M+x_N$ è uguale alla misura dell'altezza del triangolo.

Risposta

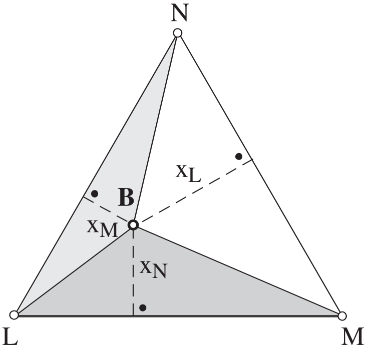
Indichiamo con a la misura del lato del triangolo LMN e con h la sua altezza.

L'area del triangolo LMN si può esprimere così

$$\text{Area (LMN)} = \frac{1}{2}\,a\,h$$

Suddividiamo ora il triangolo LMN nei triangoli LBM, MBN e NBL. L'area di LMN dev'essere uguale alla somma delle aree di questi ultimi triangoli (vedi la figura seguente).

5. Programma di geometria dinamica in uso anche nelle scuole della Svizzera italiana.
6. L'operazione può essere realizzata con CABRI-Géomètre.
7. L'esperienza risulta più suggestiva se realizzata con CABRI.



Si ha allora

$$\frac{1}{2}\,a\,h = \frac{1}{2}\,a\,x_N + \frac{1}{2}\,a x_L + \frac{1}{2}\,a\,x_M$$

$$\frac{1}{2}\,a\,h = \frac{1}{2}\,a\,(x_N + x_L + x_M)$$

e finalmente:

$$h = x_N + x_L + x_M$$

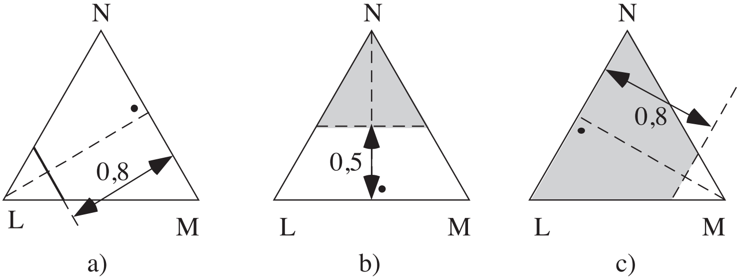
Poniamo ora $h = 1$. Allora vale la relazione: $x_L + x_M + x_N = 1$

Attività B

Domande possibili

a) Quali punti B sono tali che $x_L = 0{,}8$?
b) Quali punti B sono tali che $x_N > 0{,}5$?
c) Quali punti B sono tali che $x_M \leq 0{,}8$?
d) Quali punti B sono tali che $x_M > 1{,}1$?
e) Quali punti B sono tali che $x_L \leq 1$

Risposte possibili



a) b) c)

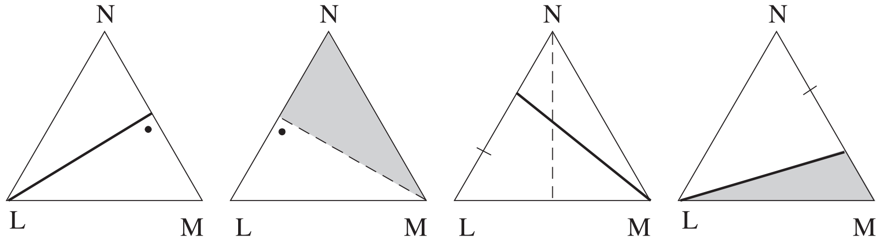
d) Nessun punto.
e) Tutti i punti del triangolo.

Attività C

Domande possibili

f) Quali punti B sono tali che $x_M = x_N$?
g) Quali punti B sono tali che $x_L \leq x_N$?
h) Quali punti B sono tali che $x_N = 2\,x_L$?
i) Quali punti B sono tali che $x_M \geq 2\,x_N$

Risposte possibili

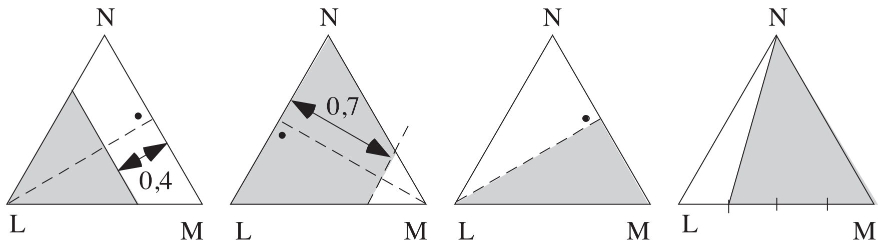


f) g) h) i)

Attività D

Domande possibili

Quali condizioni si devono porre affinché le posizioni di B siano quelle indicate da ciascuna delle figure seguenti?



j) k) l) m)

Risposte possibili

j) $x_L \geq 0{,}4$
k) $x_M < 0{,}7$
l) $x_M > x_N$
m) $x_L \leq 3\,x_M$

Attività E

Domande possibili

n) Determina quali punti B sono tali che siano simultaneamente verificate le condizioni

$$\begin{cases} x_L > x_M \\ x_M > x_N \\ x_N > 0{,}1 \end{cases}$$

o) Determina quali punti B sono tali che siano simultaneamente verificate le condizioni

$$\begin{cases} x_L > x_M \\ x_M > x_N \\ x_N > 0{,}4 \end{cases}$$

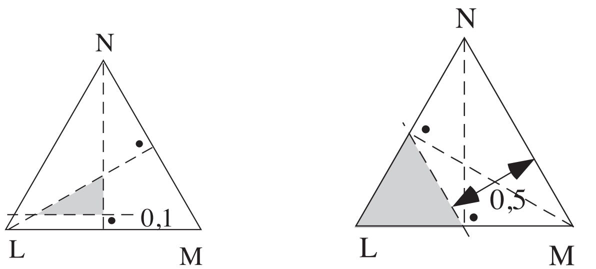
p) Come interpreti la situazione precedente? In particolare: come appaiono le condizioni date?

q) Determina quali punti B sono tali che siano simultaneamente verificate le condizioni

$$\begin{cases} x_L > x_M \\ x_L > x_N \\ x_L > 0{,}5 \end{cases}$$

r) Come interpreti la situazione precedente? In particolare: come appare la seconda condizione?

Risposte possibili



n) q)

o) e p) Non esiste alcun punto B che soddisfa simultaneamente le condizioni date. Esse sono fra di loro incompatibili.

r) La terza condizione è più forte delle prime due messe insieme, le quali risultano essere ininfluenti.

Situazione 2: prove aleatorie a tre risultati possibili

La situazione precedente può essere interpretata come modello geometrico di una prova aleatoria a tre risultati possibili. Lo vediamo con l'aiuto di qualche esempio.

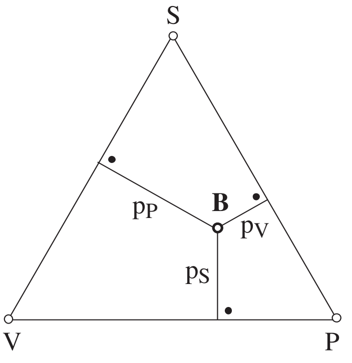
Una squadra sportiva (di calcio, di disco su ghiaccio, di basket, ecc.) quando disputa una partita ottiene, normalmente, uno dei tre risultati possibili:

- vittoria (V)
- pareggio (P)
- sconfitta (S)

Siano p_V , p_P , p_S le probabilità associate a ciascun esito V, P, S nell'ordine, concernente una ipotetica squadra.

Ovviamente deve valere: $p_V + p_P + p_S = 1$.

Possiamo rappresentare la situazione probabilistica mediante il modello geometrico del triangolo equilatero. Il modello ci aiuta a dedurre informazioni sulle diverse probabilità in gioco, altrimenti tutt'altro che facili da ottenere.



Attività A

Prime domande possibili

a) Sia $p_V = 0{,}6$. Quanto vale $\max(p_S)$?

b) Sia $p_S < 0{,}7$. Quanto vale $\min(p_P)$?

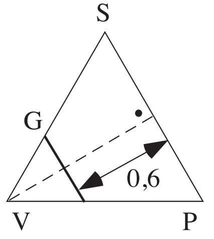
c) Sia $p_P \geq p_S$. Quanto vale $\max(p_S)$?

d) Sia $\begin{cases} p_S \geq p_P \\ p_V \leq 0{,}6 \end{cases}$ Quanto vale $\min(p_S)$?

e) Sia $\begin{cases} p_V \geq 3\,p_S \\ p_P > p_S \\ p_V \geq 0{,}4 \end{cases}$ Quanto valgono $\max(p_V)$, $\min(p_V)$ e $\max(p_P)$?

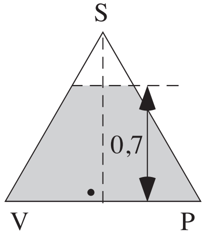
Risposte possibili

a)



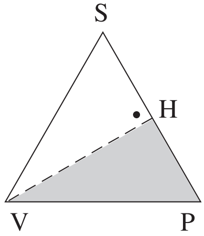
$\max(p_S) = 0{,}4$ (in G)

b)



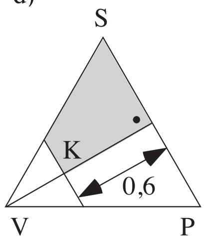
$\min(p_P) = 0$ (in V)

c)



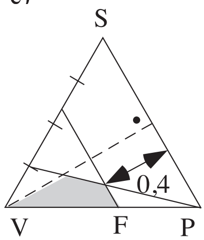
$\max(p_S) = 0{,}5$ (in H)

d)



$\min(p_S) = 0{,}2$ (in K)

e)



$\max(p_V)=1$ (in V), $\min(p_V)=0{,}4$ e $\max(p_P)=0{,}6$ (in F).

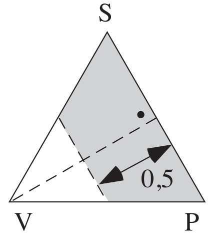
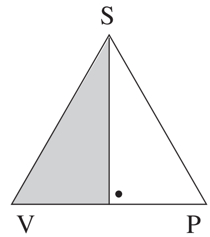
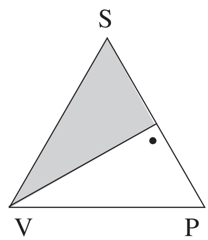
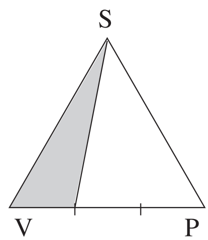
Attività B

Giudizi probabilistici qualitativi

Di seguito sono proposte quattro affermazioni espresse testualmente:

a) vincere è improbabile;
b) vincere è almeno probabile quanto pareggiare;
c) pareggiare è al massimo probabile quanto perdere;
d) la probabilità di vincere, pur essendo bassa, è almeno il doppio di quella di perdere.

È possibile esprimere tali affermazioni nel linguaggio matematico simbolico e darne una rappresentazione grafica, grazie al modello del triangolo equilatero.

Espressione simbolica	Rappresentazione grafica
$p_V < 0{,}5$	
$p_V \geq p_P$	
$p_P \leq p_S$	
$p_V \geq 2\ p_P$	

Attività C

Il gioco: «Tra i due litiganti il terzo vince»

Vi prendono parte 3 giocatori G_1, G_2, G_3. Siano p_1, p_2, p_3, nell'ordine, le loro probabilità di vincere. A turno, ogni giocatore esprime un giudizio sulla probabilità di vincere degli altri due. Ogni giudizio dev'essere espresso in una delle forme seguenti:

$p_i \mathrel{\overset{<\ >}{\underset{\leq\ \geq}{}}} h$ oppure $p_i \mathrel{\overset{<\ >}{\underset{\leq\ \geq}{}}} p_j \cdot k$ e dev'essere coerente con la situazione.

Vince chi ottiene la maggiore probabilità di vincere.

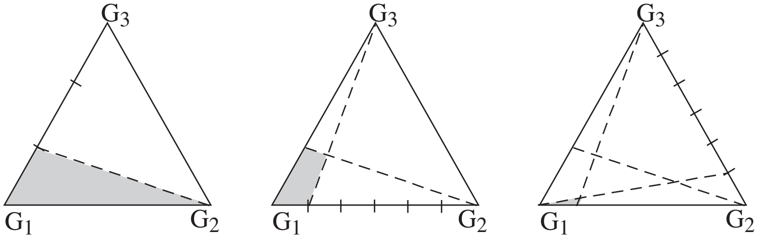
Esempio di giocata

G_2: $p_1 \geq 2\, p_3$

G_3: $p_1 > 5\, p_2$

G_1: $p_2 > 5\, p_3$

Rappresentazione grafica



giudizio di G_2 giudizio di G_3 giudizio di G_1

La giocata è vinta da G_1, il quale aveva la vittoria in tasca prima ancora di esprimere la sua condizione. Ogni gara si compone di 3 giocate, in ciascuna delle quali inizia uno dei giocatori, a turno. Giocate voi e scoprite perché il gioco è chiamato «Tra i due litiganti il terzo vince».

Attività D

Olimpiadi invernali: una seria preoccupazione degli organizzatori

L'organizzazione dei Giochi olimpici invernali deve assumersi rischi derivanti dalla presenza della materia prima – la neve –, il che costituisce sempre un motivo di grande preoccupazione.

Si possono verificare tre situazioni:

- M: non c'è abbastanza neve [le gare devono essere posticipate]
- S: c'è neve a sufficienza [le gare possono svolgersi regolarmente]
- T: c'è troppa neve [le gare devono essere posticipate]

Nell'imminenza della manifestazione, gli organizzatori chiedono a due esperti di meteorologia di stimare le condizioni di innevamento durante i giorni delle gare.

Ecco i responsi:

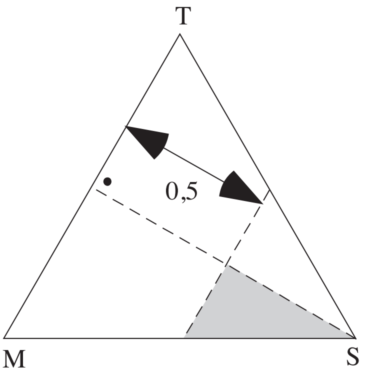
Esperto 1	Esperto 2
È probabile che ci sia neve a sufficienza. È più probabile che ci sia mancanza di neve che troppa neve.	È meno probabile che ci sia mancanza di neve che neve a sufficienza. È meno probabile che ci sia troppa neve che neve a sufficienza. È più probabile che ci sia troppa neve che mancanza di neve. Stimo la probabilità che ci sia mancanza di neve maggiore o uguale a 0,3.

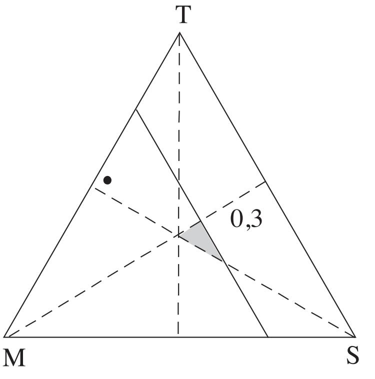
Domande possibili

a) Dalle affermazioni dei due esperti, che cosa c'è da aspettarsi, circa l'effettuabilità regolare delle gare?
b) I due esperti hanno dato pareri coerenti?

Risposte possibili

a) Esperto 1 Esperto 2





Il primo esperto ritiene che è maggiore la probabilità che la gara si possa svolgere secondo programma; infatti $p_S > p_M + p_T$.

Con i responsi del secondo esperto non è possibile formulare una previsione perché ci sono punti in cui

$p_S > p_M + p_T$
punti in cui
$p_S < p_M + p_T$

b) Se si sovrappongono le due rappresentazioni grafiche si potrà notare che i pareri dei due esperti sono incompatibili. È pure interessante notare come, a volte, un responso più dettagliato non sia necessariamente più significativo.

3. Considerazioni didattiche

Come abbiamo già avuto modo di dire[8], per esprimere l'incertezza presente nel ragionamento e nell'inferenza probabilistici è necessario utilizzare una probabilità di tipo epistemico. Questa interpretazione preferisce la valutazione (il giudizio) piuttosto che la determinazione di valori singoli di probabilità e si esprime quindi mediante intervalli di probabilità.

Finora nella scuola si è insegnato per lo più la probabilità in senso aleatorio. In questo ambito ai vari eventi elementari si assegnano valori precisi di probabilità

8. Vedere l'articolo: Piatti A. Le diverse interpretazioni del concetto di probabilità e le loro implicazioni didattiche. *Bollettino dei docenti di matematica*, nr. 49/dicembre 2004, pagg. 105-116. UIM: Bellinzona.

costruiti mediante ragionamenti teorici (basati sull'equiprobabilità) oppure mediante inferenza da calcoli statistici riferiti a prove ripetute (interpretazione frequentista). Inutile ripetere che ambedue le interpretazioni, mostrano aspetti problematici non indifferenti che si riflettono sulla qualità dell'apprendimento del neofita. Infatti proprio chi ha meno esperienza nel calcolo delle probabilità incontra maggiore difficoltà nell'interpretare risultati del tipo P(A)=0,25. Che senso dare a questa uguaglianza? Si sarebbe indotti a dire che «teoricamente» su cento prove aleatorie, in 25 si realizzi l'evento A. Ma in realtà lo studente stesso sa per esperienza che ciò non si avvera, se non in casi rari.

Dal punto di vista didattico, questo fatto è di fondamentale importanza perché influenza direttamente la capacità dello studente di dare senso al processo matematico che sta apprendendo. Per rendersene conto, basta riflettere sul senso che gli studenti danno spontaneamente al concetto di probabilità nella vita di tutti i giorni. Essi lo usano molto spesso – più di quanto si sia portati a pensare – ogni volta che sono chiamati a prendere decisioni in un contesto di insicurezza. «Vado a giocare a calcio o faccio un giro in bicicletta?» «Studio questa sera dopo cena o mi alzo presto domani mattina?» «Scendo lungo via San Gottardo o prendo via Guisan?»: sono interrogativi in un quadro di incertezza che giornalmente può porsi un giovane studente. È sicuro che a queste domande il giovane dà risposta ed è pure sicuro che le risposte non sono determinate da un calcolo preciso di probabilità, ma piuttosto da un ragionamento simile al seguente: «viste le condizioni attuali del traffico, è meglio che prenda per via Guisan». In questo caso il giovane opera una stima del tipo «è più probabile che…».

Siamo giunti alla nostra tesi di fondo: la concezione imprecisa della probabilità è più vicina all'esperienza pregressa dell'allievo, dunque un insegnamento aggiornato della probabilità deve tenere conto di questo concetto e deve fare in modo che l'allievo, sin dai primi passi, venga messo di fronte a situazioni di incertezza.

In questo articolo abbiamo proposto situazioni di incertezza che concernono tre eventi, situazioni che ci sembrano proponibili in parte nel secondo biennio della scuola media e sicuramente nelle classi della scuola media superiore. Il caso di tre eventi è importante perché presenta un grado di complessità maggiore del caso più usato dei due eventi, ma che si lascia ancora padroneggiare con relativa facilità grazie all'impiego delle coordinate baricentriche, quindi in un modello geometrico.

Ricordiamo che nel prossimo anno scolastico partirà una ricerca riguardante il senso[9] del concetto di probabilità. Esiste già un gruppetto di interessati, soprattutto composto di insegnanti italiani. Chi avesse interesse ad agganciarsi, si rivolga liberamente a uno degli autori del presente scritto.

9. La ricerca si ispira a quella condotta da NRD Bologna, ASP Locarno e MESCUD Bogotà. Si veda a proposito l'articolo Il "senso dell'infinito" apparso sulla rivista *La Matematica e la sua Didattica* 4/2004, pagg. 46-83.

5. L'importanza delle diverse rappresentazioni semiotiche Il caso degli enti primitivi della geometria

Silvia Sbaragli[1]

In this article we highlight the importance of different semiotic representations (Duval, 1993) taking as mathematical «objects» the geometrical primitive entities. We highlight wrong ideas related to these entities found in students and teachers and their probable causes.

1. L'importanza delle diverse rappresentazioni semiotiche

In questo articolo faremo riferimento al pensiero di Duval che ha mostrato come in Matematica l'acquisizione concettuale di un oggetto passa necessariamente attraverso l'acquisizione di una o più rappresentazioni semiotiche. Tale riflessione è stata presentata nei celebri articoli del 1988 (a, b, c) e nel successivo lavoro del 1993 dove l'Autore sostiene come non ci sia **noetica** (acquisizione concettuale di un oggetto) senza **semiotica** (rappresentazione realizzata per mezzo di segni), mettendo così in evidenza l'importanza delle diverse rappresentazioni semiotiche[2].

A sostegno di questa affermazione, D'Amore (2003) afferma:

- *ogni concetto matematico ha rinvii a «non-oggetti»; dunque la concettualizzazione non è e non può essere basata su significati che poggiano sulla realtà concreta; in altre parole in Matematica non sono possibili rinvii estensivi;*
- *ogni concetto matematico è costretto a servirsi di rappresentazioni, dato che non vi sono «oggetti» da esibire in loro vece o a loro evocazione; dunque la concettualizzazione deve necessariamente passare attraverso registri rappresentativi che, per vari motivi, soprattutto se sono a carattere linguistico, non possono essere univoci;*
- *si parla più spesso in Matematica di «oggetti matematici» che non di «concetti matematici» in quanto in Matematica si studiano preferibilmente oggetti piuttosto che concetti; «la nozione di oggetto è una nozione che non si può non utilizzare dal momento in cui ci si interroga sulla natura, sulle condizioni di validità o sul valore della conoscenza» (Duval, 1998).*

Come continua a sostenere D'Amore (2003), «*per Duval la nozione di concetto diventa secondaria, mentre ciò che assume carattere di priorità per l'Autore*

1. N.R.D., Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia. A.S.P., Locarno, Svizzera.
2. Si veda anche R. Duval, Linguaggio, simboli, immagini, schemi... su questo numero.

è la coppia (segno, oggetto)». Dell'importanza del segno parla anche Vygotskij in un passo del 1962, citato in Duval (1996), nel quale si dichiara che non c'è concetto senza segno. Assumendo tutto questo come vero, ne consegue che occorre didatticamente fare molta attenzione alla scelta del sistema di segni, che rappresentano l'oggetto matematico che si vuole far apprendere ai propri allievi; un'attenzione che è spesso sottovalutata o data per scontata. Sempre in D'Amore (2003) si riporta il pensiero di Duval che sostiene come presso alcuni studiosi di didattica si scorge una riduzione del **segno** ai **simboli convenzionali** che connotano direttamente e isolatamente degli oggetti, ma che possono portare a misconcezioni dato che diventano rappresentanti unici di un dato registro, e questo a nostro parere è ciò che avviene per gli enti primitivi della geometria.

In effetti, sono ormai diversi anni che le nostre ricerche si sono indirizzate nel rilevare modelli erronei in allievi e in insegnanti costruiti su immagini-misconcezioni riguardanti gli enti primitivi della geometria (Sbaragli, 2004). Le diverse misconcezioni evidenziate sono spesso da ritenere «evitabili» (D'Amore, Sbaragli, 2005; Sbaragli, 2005), essendo imputabili direttamente alle scelte della trasposizione didattica effettuate dall'insegnante e dalla noosfera (libri di testo, programmi, riviste, …).

Tra queste scelte didattiche che possono generare misconcezioni «evitabili», vi è quella di fornire sempre e solo univoche rappresentazioni convenzionali, che portano l'allievo, e a volte l'insegnante stesso, ad attribuire agli enti primitivi della geometria proprietà che risultano erronee nel contesto della matematica.

Ad esempio, per quanto riguarda il punto matematico, alla domanda posta dal ricercatore: *Che cos'è per te un punto in matematica?*, alcuni allievi ed insegnanti rispondono attribuendo a questo ente matematico una forma «tondeggiante», che corrisponde con quella di un cerchio o di una sfera a seconda se si sta parlando del piano o dello spazio.

– «*È un punto rotondo che forma le linee»* (terza media).

– *A.: «Il punto è sferico»* (insegnante di scuola elementare).

[L'ultima affermazione è di un insegnante che stava facendo costruire ai propri allievi poliedri «scheletrati» con pongo e stuzzicadenti e che pretendeva che i vertici dei solidi fossero realizzati esclusivamente di forma sferica, essendo a suo parere una proprietà caratteristica del punto matematico].

Come si rileva dai casi seguenti, alcuni allievi ed insegnanti associano all'idea erronea legata alla forma univoca dei punti matematici anche una certa dimensione variabile:

– *«Per me il punto può essere una cosa grandissima o microscopica perché è come un cerchio di diverse misure»* (quarta elementare).

– *«Per me il punto è un cerchio di diametro variabile»* (insegnante di scuola elementare).

È, in effetti, la dimensione variabile del punto matematico, l'erronea caratteristica sulla quale si concentra maggiormente l'attenzione degli intervistati, sostenendo come questa possa variare a seconda della rappresentazione scelta. Di questo sono testimonianza le seguenti affermazioni che mettono in evidenza la presunta coincidenza tra rappresentazione e concetto:

– *«Non si sa ancora bene che cos'è un punto però per me è solo un punto su un foglio che può essere di diverse dimensioni»* (quarta elementare).

– *«Il punto è una parte di piano indeterminato, perché può avere varie dimensioni, che costituisce l'inizio, la fine o entrambi di un segmento, una retta etc»* (terza media).

Anche tra gli insegnanti si riscontra in alcuni casi la stessa idea erronea; nel parlare dei punti matematici un insegnante di scuola elementare afferma: *N.: «…Anche se si fanno piccoli piccoli i punti, più di tanti non ce ne stanno in una retta».*

Le distorte idee intuitive sopra evidenziate, concernenti la forma e la dimensione del punto matematico, vincolano l'apprendimento matematico successivo, continuando a scontrarsi durante l'intera carriera scolastica, e non solo, con gli altri saperi (si pensi alle proprietà topologiche di densità e continuità) (Arrigo, D'Amore, 1999, 2002).

Il punto è quindi percepito e riferito all'unica rappresentazione che viene comunemente fornita dalla noosfera: un «tondino» lasciato su un foglio, di diametro variabile, avente una certa dimensione. La stessa cosa avviene per la retta matematica alla quale viene associata una linea continua, di spessore variabile, diritta, rappresentata con tre puntini iniziali e tre finali. Anche quest'ultima scelta univoca può comportare conseguenze di questo tipo: alla domanda posta dal ricercatore: «*Immagina di spiegare ad un tuo compagno che cos'è la retta in matematica. Tu che cosa gli diresti?»,* uno studente di quinta liceo scientifico risponde associando la rappresentazione al concetto: «*Gli direi che è tre puntini, un segmento, tre puntini».*

Capita quindi spesso che, a complicare l'apprendimento degli oggetti matematici, incidano le decisioni prese dall'insegnante, derivanti dalle proposte della noosfera, di fornire all'allievo giorno dopo giorno, sempre e solo univoche rappresentazioni convenzionali che vengono così accettate ciecamente dall'allievo a causa del contratto didattico instaurato in classe (Brousseau, 1980a, 1980b, 1986) e del fenomeno di «scolarizzazione» (D'Amore, 1999b).

Di conseguenza, nessuno ha il coraggio di «osare» uscendo da queste rappresentazioni che vengono percepite dagli insegnanti, e indirettamente dagli allievi, come le uniche plausibili e possibili.

A questo proposito risulta interessante la seguente conversazione avuta con un insegnante di scuola elementare, il quale ritiene univoca e necessaria la scelta di individuare un punto matematico con i soliti modelli di forma «tondeggiante» proposti dalla noosfera:

A.: «Non credo che ci siano altri modi per rappresentare un punto se non quello di toccare leggermente un foglio con una penna»

R.: «Non ti viene in mente nient'altro? Con i tuoi allievi come fai?»

A.: «Se mi chiedi come lo rappresento, per forza per farlo faccio un piccolo segnetto sulla lavagna, ma se intendi anche che cosa dico quando ne parlo, di solito dico di considerare un granello di sabbia o un granello di sale».

Dalle idee distorte degli insegnanti sopra evidenziate, emerge come spesso la scelta di lasciare gli enti primitivi solamente all'aspetto «personale» senza passare al loro aspetto «istituzionale» (Chevallard, 1992; D'Amore 2001, 2003; Godino, Batanero, 1994) non è una scelta didattica consapevole, mirata ad aggirare questioni assai delicate legate al tentativo di «definire» tali oggetti, ma deriva dall'accettazione passiva di misconcezioni consolidate che si sono trasformate in modelli erronei posseduti dagli insegnanti stessi.

G.: «*Sono trent'anni che dico ai miei bambini che il punto è quello che si disegna con la matita, non potrò cambiare adesso. E poi ritengo che sia proprio questo il vero significato di punto. Perché, non è più così?»* (insegnante di scuola elementare). Curiosa è la domanda posta dall'insegnante G.: «*Perché, non è più così?»,* che mette in evidenza non solo false convinzioni legate all'idea di punto, ma anche personali credenze relative all'idea di matematica [sulla visione personale degli insegnanti e sulle loro «filosofie implicite» si veda Speranza (1992), sui credo ideologici invece rimandiamo a Porlán et al. (1996), sull'importanza dell'epistemologia nella formazione degli insegnanti si veda D'Amore (2004)]. Dalla domanda posta da questo insegnante non emerge un sapere concettuale, ma un sapere legato alla trasposizione didattica che solitamente viene proposto dalla noosfera tramite libri di testo per studenti. Non vi è quindi distinzione per l'insegnante G. tra un concetto matematico e la sua trasposizione, scaturita da una particolare scelta didattica: i due aspetti rappresentano per lui un tutt'uno.

Eppure, per non creare forti fraintendimenti come quelli rilevati, occorre innanzitutto che l'insegnante sia a conoscenza del significato «istituzionale» dell'oggetto matematico che intende far apprendere, in secondo luogo deve indirizzare l'uso «personale» di questi oggetti in modo consapevole e critico per far sì che questo uso rimanga coerente rispetto alla disciplina di riferimento. D'altra parte, come afferma Zan (1998): «Si può riconoscere che nella formazione delle convinzioni ha una notevole responsabilità il tipo di insegnamento ricevuto».

2. Un caso particolare del paradosso di Duval: gli enti primitivi della geometria

Sempre a sostegno dell'importanza delle diverse rappresentazioni semiotiche analizziamo il famoso paradosso di Duval (1993) (citato in D'Amore 1999a e 2003): «(…) da una parte, l'apprendimento degli oggetti matematici non può che essere un apprendimento concettuale e, d'altra parte, è solo per mezzo di rappresentazioni semiotiche che è possibile un'attività su degli oggetti matematici. Questo paradosso può costituire un vero circolo vizioso per l'apprendimento. Come dei soggetti in fase di apprendimento potrebbero non confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche se essi non possono che avere relazione con le sole rappresentazioni semiotiche? L'impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici, al di fuori di ogni rappresentazione semiotica, rende la confusione quasi inevitabile».

Questa confusione si amplifica per gli enti primitivi della geometria, dato che vengono spesso definiti in modo improprio dagli insegnanti stessi o lasciati ad altri contesti d'uso (Sbaragli, 2003).

Inoltre, a complicare l'apprendimento di questi oggetti matematici, si aggiunge la scelta di fornire all'allievo solo sterili e univoche rappresentazioni convenzionali che, come abbiamo rilevato, vengono così accettate ciecamente dall'allievo.

Il paradosso prosegue così: «E, al contrario, come possono essi (i soggetti) acquisire la padronanza dei trattamenti matematici, necessariamente legati alle rappresentazioni semiotiche, se non hanno già un apprendimento concettuale degli oggetti rappresentati? Questo paradosso è ancora più forte se si identifica attività matematica ed attività concettuale e se si considera le rappresentazioni semiotiche come secondarie o estrinseche» (Duval, 1993; D'Amore, 2003).

Rileggiamo il paradosso nel caso del punto matematico: noi auspichiamo come insegnanti che lo studente concepisca il punto matematico in modo concettuale, pensandolo come oggetto privo di dimensione, ma è solo per mezzo di rappresentazioni semiotiche che è possibile un'attività su degli oggetti matematici. Sicuramente i soggetti in fase di apprendimento tenderanno a confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche, ma questo avviene a maggior ragione quando le rappresentazioni fornite risultano quasi esclusivamente univoche e convenzionali, come nel caso del punto e della retta, e quando non avviene da parte dell'insegnante un lavoro di mediazione tra l'«oggetto personale» e l'«oggetto istituzionale». Le difficoltà sono infatti legate al fatto che gli studenti non possono avere inizialmente un apprendimento concettuale degli oggetti matematici, ma sono amplificate dalla rivelazione che spesso questo apprendimento concettuale non è posseduto neanche dagli insegnanti che tendono a confondere la rappresentazione con l'oggetto matematico che intendono spiegare ai propri allievi.

Il paradosso di Duval risulta quindi ancora più accentuato se l'insegnante fa coincidere il concetto con la sua rappresentazione e se non ha mai riflettuto e strutturato la trasposizione didattica tenendo conto del senso e dell'importanza delle rappresentazioni semiotiche.

Le considerazioni fin qui riportate, sono intimamente collegate con la problematica dei concetti figurali presentata da Fischbein (1993): «Un quadrato non è un'immagine disegnata su un foglio di carta; è una forma controllata dalle sue definizioni (anche se può essere ispirata da un oggetto reale). (…) Tutte le figure geometriche rappresentano costruzioni mentali che possiedono, simultaneamente, proprietà concettuali e figurali. (…) Idealmente, è il sistema concettuale che dovrebbe controllare completamente i significati, le relazioni e le proprietà delle figure. (…) L'evoluzione di un concetto figurale generalmente non è un processo naturale. Di conseguenza, uno dei compiti principali della didattica della matematica (nel campo della geometria) è di creare situazioni didattiche che richiedano sistematicamente una stretta cooperazione tra i due aspetti, fino alla loro fusione in oggetti mentali unitari».

È sulla base di queste premesse che sosteniamo l'importanza della strutturazione di attività che puntano a valorizzare e a mettere in evidenza per gli enti primitivi della geometria, varie rappresentazioni semiotiche in registri diversi, lasciando sbizzarrire la fantasia degli allievi al fine di farli allontanare da falsi stereotipi ormai assunti come convenzionali.

La varietà di rappresentazioni permetterà agli allievi di «purificare» l'oggetto dalle proprietà che non gli sono proprie come: la forma, la pesantezza, il colore, la dimensione per poi indirizzarli verso i saperi «istituzionali».

Didatticamente è sufficiente stabilire una posizione nello spazio per caratterizzare un punto, mentre alla rappresentazione di questa posizione ci penseranno gli allievi con la loro fantasia, la loro volontà, il loro gusto, rappresentando il punto matematico come l'estremo di una freccia, o l'incrocio di due segmenti, o il centro di una stellina…

Lo scopo è di far sì che l'allievo sia in grado di «osare» inventando rappresentazioni diverse per lo stesso concetto; questo consentirà allo studente di effettuare *trattamenti,* ossia di passare da una rappresentazione ad un'altra all'interno dello stesso registro semiotico per lo stesso oggetto matematico, e di effettuare *conversioni* tra una rappresentazione ed un'altra in registri semiotici diversi: «Si può dire di più: che la conoscenza "è" l'intervento e l'uso dei segni. Dunque, il meccanismo di produzione e d'uso, soggettivo e intersoggettivo, di questi segni e di rappresentazione degli "oggetti" dell'acquisizione concettuale, è cruciale per la conoscenza» (D'Amore, 2003).

Se è vero, come sostiene Duval (1993), che la creazione e lo sviluppo di sistemi semiotici nuovi è simbolo (storico) di progresso della conoscenza, con queste attività noi vogliamo attivare questo progresso all'interno della classe, facendo rientrare in queste attività il «rischio personale» da parte dell'allievo, il suo impegno, la sua *implicazione* diretta nell'apprendimento, che si manifesta con la rottura del contratto didattico: «*La necessità di questa rottura potrebbe essere riassunta dal seguente aforisma: Credimi, dice il maestro all'allievo, osa utilizzare il tuo proprio sapere e imparerai*» (Sarrazy, 1995).

Arrigo G., D'Amore B.
«Lo vedo ma non ci credo...». Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 22B, 5, p. 465-494, 1999.

Arrigo G., D'Amore B.
«Lo vedo ma non ci credo...», seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La matematica e la sua didattica.* 1, p. 4-57, 2002.

Brousseau G.
Les échecs électifs dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. *Revue de laryngologie, otologie, rhinologie*. 101. 3-4, p. 107-131, 1980a.

Brousseau G.
L'échec et le contrat. *Recherches en didactique des mathématiques.* 41, p. 177-182, 1980b.

Brousseau G.
Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques.* 7, 2, p. 33-115, 1986.

Chevallard Y.
Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques.* 12, 1, p. 73-112, 1992.

D'Amore B.
Elementi di Didattica della Matematica. Bologna: Pitagora, 1999a. III ed. 2001.

D'Amore B.
Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 22A, 3, p. 247-276, 1999b.

D'Amore B.
Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione «ingenua» in una teoria «realista» vs il modello «antropologico» in una teoria «pragmatica». *La Matematica e la sua didattica*. 1, p. 4-30, 2001.

D'Amore B.
Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica. Pitagora: Bologna, 2003.

D'Amore B.
Il ruolo dell'Epistemologia nella formazione degli insegnanti di Matematica nella scuola secondaria. *La matematica e la sua didattica.* 4, p. 4-30, 2004.

D'Amore B., Sbaragli S.
Analisi semantica e didattica dell'idea di «misconcezione». *La matematica e la sua didattica*. 2. In corso di stampa, 2005.

Duval R.
Ecarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives.* 1. p. 7-25, 1988a.

Duval R.
Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives.* 1. p. 57-74, 1988b.

Duval R.
Graphiques et équations. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives.* 1. p. 235-253, 1988c.

Duval R.
Registres de Représentations sémiotiques et Fonctionnement cognitif de la Pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives.* 5. p. 37-65, 1993.

Duval R.
Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherche en Didactique des Mathématiques.* 16, 3, p. 349-382. [Trad. it. *La matematica e la sua didattica.* 3, 250-269], 1996.

Duval R.
Signe et object (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives.* 6. p. 139-163, 1998.

Fischbein E.
Intuizione e pensiero analitico nell'educazione matematica. In: Chini Artusi L. (ed.). *Numeri e operazioni nella scuola di base.* Bologna: Zanichelli-UMI. p. 8-19, 1985a.

Fischbein E.
Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. In: Chini Artusi L. (ed.) (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base.* Bologna: Zanichelli-UMI, p. 122-132, 1985b.

Fischbein E.
Modelli taciti e ragionamento matematico. In: Fischbein E., Vergnaud G. *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*. A cura di B. D'Amore. Bologna: Pitagora, p. 25-38, 1992.

Fischbein E.
The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics.* 24, p. 139-162, 1993.

Godino J.D.
La metáfora ecológica en el estudio de la noosfera matemática. *Quadrante.* 2, 1, p. 9-22, 1993.

Godino J., Batanero C.
Significado institucional y personal de los objectos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 14, 3, p. 325-355. [Traduz. italiana Bologna: Pitagora, 1999, come libro nella collana: Bologna-Querétaro], 1994.

Porlán Atiza R., Martin del Pozo R., Martin Toscano J., Rivero Garcia A.
Conocimiento profesional deseable y profesores innovadores. *Investigación en la Escuela*. 29, p. 23-37, 1996.

Sarrazy B.
Le contrat didactique. *Revue française de pédagogie*. 112, p. 85-118. [Trad. it.: *La matematica e la sua didattica.* (1998). 2, p. 132-175], 1995.

Sbaragli S.
La scoperta dell'importanza del contesto: il punto nei diversi ambiti. *Bollettino dei Docenti di Matematica.* Bellinzona (Svizzera). 47, p. 49-58, 2003.

Sbaragli S.
Le convinzioni degli insegnanti sull'infinito matematico. *Tesi di Dottorato di ricerca.* Versione in italiano e in inglese nel sito: http://math.unipa.it/~grim/tesi_it.htm. 2004.

Sbaragli S.
Misconcezioni «inevitabili» e misconcezioni «evitabili». *La matematica e la sua didattica.* 1, p. 57-71, 2005.

Speranza F.
Tendenze empiriste nella Matematica. *Quaderni di Epistemologia della Matematica*. CNR, Progetto TID-FAIM. 10, p. 77-88. [Ristampato in: Speranza F. (1997). *Scritti di Epistemologia della Matematica*. Bologna: Pitagora, p. 57-64], 1992.

Zan R.
Problemi e convinzioni. Bologna: Pitagora, 1998.

6. La preparazione all'insegnamento della matematica e l'attività formativa[1]

Claudio Beretta

This paper highlights the importance and the complexity of the activity of the teachers. The author defend the idea of including a great part of the education of the teachers in the academic curricula, criticizing the actual structure of the pedagogical high schools in Switzerland.

I giovani che durante il curricolo universitario decidono di intraprendere la carriera di insegnante devono rendersi conto dell'importanza dell'aspetto formativo connesso a questa professione.

L'insegnamento, oggi, non può più limitarsi alla trasmissione del sapere (con relativa trasposizione didattica), ma deve investire l'intera strutturazione del pensiero, compresi gli aspetti etici e comportamentali.

Questo allargamento del compito formativo delle attuali e future generazioni implica l'assunzione di nuove responsabilità, che lo Stato delega alla scuola.

È doveroso riconoscere che molti docenti operanti nelle nostre scuole si impegnano in questo contesto, anche se non sempre sorretti dalla stima e dalla riconoscenza dell'opinione pubblica, troppo spesso incline a generalizzare casi di comportamento scorretto, tali, ad esempio, le irregolarità negli esami: casi rari ma che nuociono all'immagine del docente.

Inoltre si assiste vieppiù alle crescenti difficoltà d'inserimento dei giovani nel mondo del lavoro. I requisiti continuano a lievitare ed è dunque di primaria importanza che la scuola miri al massimo del raggiungimento di livelli di competenza anche e soprattutto legati alla nostra disciplina e alla lingua materna.

Per il futuro insegnante, la preparazione seria nell'ambito delle discipline da insegnare e della loro didattica costituisce non solo la premessa ma il punto cardine, oltre alla «vocazione», per riuscire a vivere bene la non sempre facile professione. Come già detto, si tratta di veicolare non solo le competenze disciplinari ma anche le capacità organizzative dei saperi e la sensibilità culturale.

Dal profilo delle competenze disciplinari del docente, la preparazione a mio modo di vedere deve essere quella del *bachelor* universitario specifico per l'insegnante di scuola media e del master per il docente liceale.

Anche la preparazione teorica – pedagogica e psicologica – va fatta, a mio parere, dalle università e dai politecnici, poiché questi alti istituti dispongono in

1. In questo breve intervento, mi limiterò ai settori scolastici medio e medio-superiore.

questi ambiti di professori di profilo internazionale e d'alto livello di competenza. La preparazione deve anche essere propedeutica alla ricerca didattica.

Un altro aspetto nuovo delle richieste della società nei confronti dei neomaturati è il carattere vieppiù selettivo degli studi universitari – opzione scelta dagli atenei svizzeri –, che non si farà solo sentire nell'ambito delle nuove assunzioni di docenti accademici, ma anche nell'esigenza di qualità nei confronti degli studenti.

Questo approccio competitivo è stato recentemente ribadito dal presidente delle scuole politecniche federali, Prof. Zehnder, alla riunione dell'Accademia svizzera delle scienze tecniche, svoltasi recentemente a Berna, sul tema «il futuro dei politecnici».

Le alte scuole pedagogiche sono preposte alla formazione professionale, della durata di un anno, in particolare alla riflessione didattica disciplinare.

Infatti, in questo contesto le competenze acquisite all'università, se non esercitate, si perdono a causa del noto effetto dell'analfabetismo di ritorno: perciò non appare giustificato procrastinare eccessivamente l'entrata nella professione. Ritengo che un anno di preparazione professionale possa bastare, per chi è predisposto e animato positivamente verso l'insegnamento e possiede doti di carattere e di comunicatività.

Le alte scuole pedagogiche potrebbero poi assumersi il compito importante della formazione continua degli insegnanti, oltre che offrire il master didattico.

La situazione attuale di queste scuole appare problematica: diversi candidati all'insegnamento che frequentano come d'obbligo queste scuole si lamentano del loro basso profilo. A mio modo di vedere queste nuove scuole sono state messe in funzione in modo troppo improvvisato, non tenendo sufficientemente conto degli standard universitari.

Bisogna allora correre ai ripari, il che significa che solo i docenti che pubblicano articoli aggiornati su riviste specializzate[2] nell'ambito delle proprie materie d'insegnamento siano mantenuti in carica alla scadenza del periodo di nomina. Tale punto di vista è anche suffragato dal carattere post liceale e addirittura post universitario di queste scuole professionali.

In questo contesto, per il Canton Ticino, si tratterebbe di assegnare cattedre al rinnovo delle nomine solo a chi abbia i requisiti di idoneità (e ce ne sono, senza dubbio…) riconoscendo però anche condizioni quadro adeguate per questi insegnanti (condizioni che oggi non ci sono…).

Questo aspetto della problematica dovrebbe essere pure adottato per la designazione gli esperti delle scuole medie: meglio lasciare vacante un posto, piuttosto che assegnarlo a qualcuno privo di formazione (oggi può addirittura accadere che un esperto abbia titoli di studio inferiori di quelli di un docente affidatogli…).

Nello statuto lavorativo di questa importante fascia di quadri scolastici (docenti delle alte scuole pedagogiche ed esperti) deve essere incluso anche il dovere (e riconosciuto l'onere) di seguire una seria formazione continua (conferenze, seminari, corsi…): lo fanno i medici, gli ingegneri…

Non sto qui a redigere un «*cahier des charges*» ma sarebbe opportuno che il bando di concorso per questi quadri sia redatto rafforzando esplicitamente le esigenze.

2. Intendo riviste internazionalmente riconosciute, con tanto di comitato scientifico che delega a tre esperti la valutazione degli articoli da pubblicare.

Ritorniamo alla formazione universitaria del secondo ciclo ossia al cosiddetto master.

Due sono a mio avviso i versanti formativi che le alte scuole (università e politecnici) dovrebbero prevedere per il futuro insegnante:

1. formazione disciplinare mirata, includente aspetti storici ed epistemologici;
2. formazione didattica teorica ed applicata.

Questa seconda componente (didattica teorica) va assegnata a docenti universitari che fanno realmente ricerca didattica, mentre la parte applicativa dovrebbe essere assegnata a docenti con una buona esperienza d’insegnamento nelle scuole e che abbiano dimostrato la propria competenza mediante pubblicazioni importanti.

La preparazione professionale va fatta, a mio parere, senza perdere di vista i tre aspetti seguenti:

1. La risistemazione delle competenze teoriche disciplinari nel contesto del futuro insegnamento e la ricerca dei lati applicativi della propria disciplina, che possano maggiormente motivare lo studente.
2. La fondazione teorica della didattica disciplinare e di tutto ciò che sta a monte del «fare lezione».
3. L’acquisizione di strumenti e metodi d’insegnamento variati che permettano di veicolare non solo competenze disciplinari, ma anche modi di imparare, di affrontare situazioni mai viste, di riflettere su strategie risolutive, e inoltre abitudine a dubitare dei propri risultati e di quelli che vengono proposti, assunzione di un approccio critico razionale e costruttivo, apertura agli aspetti pluri- e interdisciplinari e applicativi. In tutto ciò è compresa la pratica del lavoro in gruppo e dunque lo scambio di opinioni e la difesa del proprio punto di vista, nonché la valorizzazione delle proprie competenze, l’acquisizione di uno spirito di sintesi (saper cogliere l’essenziale) e la capacità di illustrare ad altri il proprio pensiero.

Come si noterà questi aspetti non sono caratteristici dell’insegnamento universitario attuale, troppo incline a percorrere la strada dell’efficientismo e dell’utilitarismo; ne è la prova la chiusura di settori universitari di ricerca fondamentale. A titolo d’esempio, disgraziatamente non unico, cito la scomparsa della facoltà di scienze all’Università di Losanna – fagocitata dal Politecnico – e la tendenza centralizzatrice del Dipartimento federale degli interni nel costituire dei poli di ricerca per settore che male traducono quell’attività accademica che era il fondamento culturale del nostro paese.

Infine, osservando la ricchezza delle esigenze relative alla formazione dell’insegnante e all’ampiezza del ventaglio di competenze necessarie per svolgere dignitosamente la professione di insegnante – qui sommariamente descritte – appare fuori posto chiedere che un docente di matematica (e ciò può valere anche per la lingua materna) sia chiamato ad insegnare almeno una seconda materia. Anche su questo punto invito l’Autorità politica a riflettere.

1. Storie di concetti matematici: contesti socio-culturali e riorganizzazioni del sapere

Giorgio T. Bagni[1]

In this paper we consider some epistemological issues related with the historical presentation of a mathematical concept, with particular reference to infinitesimal methods. According to theoretical framework of the socio-cultural approach (Radford, 1997 and 2003), we underline the importance of non-mathematical elements; in particular, we propose a comparison between the European Calculus and some ancient non-European experiences and conclude that the educational introduction of infinitesimal methods by historical references requires a correct socio-cultural and geographical contextualisation.

Dal giorno in cui una statua è terminata, comincia, in un certo senso, la sua vita. È superata la prima fase, che, per opera dello scultore, l'ha condotta dal blocco alla forma umana; ora una seconda fase, nel corso dei secoli, attraverso un alternarsi di adorazione, di ammirazione, di amore, di spregio o di indifferenza, per gradi successivi di erosione e di usura, la condurrà a poco a poco allo stato di minerale informe a cui l'aveva sottratta lo scultore. Marguerite Yourcenar (*Il Tempo, grande scultore*, 1985, p. 51)

1. La storia della matematica, una sfida culturale

Una crescente attenzione dedicata all'evoluzione storica caratterizza ampi settori della cultura contemporanea ed ha rilevanti conseguenze nel campo didattico: la considerazione di un concetto matematico attraverso la sua storia è una scelta metodologica diffusa, anche nella trasmissione del sapere matematico (Fauvel & van Maanen, 2000; alcune implicazioni sono esaminate in: Pepe, 1990 e Pizzamiglio, 2002) e richiede l'assunzione di posizioni epistemologiche impegnative (un'interessante selezione di lavori di F. Speranza, che si riconduce a F. Enriques, è in: Speranza, 1997; importanti riferimenti sono in: D'Amore, 2001).

Spesso, dunque, si parla della storia di un particolare oggetto matematico, della storia di un intero settore della disciplina per giungere alla storia della matematica o addirittura alla storia della scienza. Ma la complessità delle relazioni tra le componenti che determinano l'evoluzione storica è enorme e talvolta viene elusa con l'introduzione di semplificazioni nette e pesanti. L. Radford nota che il collegamento tra lo sviluppo concettuale nella storia e quello moderno richiede l'assunzione di posizioni epistemologiche (Radford, 1997, p. 26): per realizzare un tale collegamento sarà necessario affrontare diversi aspetti: i problemi più pesanti sono quelli connessi all'interpretazione dei dati storici, spesso influenzata dai nostri attuali paradigmi culturali (Gadamer, 1975).

Le questioni ora presentate hanno radici filosofiche importanti: ad esempio, il noto dilemma tra *scoperta* e *invenzione* ha fatto discutere a lungo matematici, filosofi e storici della matematica (una sua sintetica presentazione è in: Casari, 1973, p. 14; un'ampia rassegna delle più significative posizioni filosofiche del secolo scorso è ad esempio in: Lolli, 2002). Già l'alternativa posta nei termini ricordati può essere considerata una semplificazione di un problema ben più ampio ed articolato; dal punto di vista storiografico, il dilemma è talvolta impostato (Giusti, 1999, p. 74; Grugnetti & Rogers,

1. Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine, via delle Scienze 206, I-33100 Udine, bagni@dimi.uniud.it.

2000) secondo una concezione che elude la rigorosa alternativa tra le due posizioni: infatti un nuovo concetto verrebbe inizialmente «incontrato» da un matematico in una fase operativa (Sfard, 1991), ad esempio nel corso della risoluzione di un problema o all'interno di una dimostrazione, per essere, più tardi, rielaborato e inquadrato teoricamente (Slavit, 1997), alla luce di nuove esigenze e dei mutati standard di rigore (Bagni, 2004-b).

Spesso è stata segnalata qualche possibile analogia tra evoluzione storica e sviluppo cognitivo (Frajese, 1950, p. 338; ben nota è la tesi espressa in: Piaget & Garcia, 1983; sulla questione si veda: Furinghetti & Radford, 2002). Notiamo però che l'accettazione di una simile struttura evolutiva può portare ad affrontare alcune questioni epistemologiche tutt'altro che banali: è infatti corretto concepire la storia della matematica come un percorso che, attraverso tentativi e rivisitazioni critiche, conduca finalmente alla sistemazione concettuale moderna? Un ruolo decisivo deve essere attribuito ai fattori culturali e sociali che hanno influenzato i singoli periodi storici (Radford, 1997 e 2003); come vedremo, tale punto di vista richiede la considerazione di elementi di importanza decisiva anche dal punto di vista geografico (Joseph, 2000).

2. Data (o date) di nascita ed evoluzione (o evoluzioni)

Pur facendo nostre tutte le precauzioni espresse a proposito dell'alternativa tra *scoperta* e *invenzione* ci sentiamo più vicini alla seconda scelta, e non solo dal punto di vista terminologico. Ma ciò non significa che una teoria matematica venga creata e progressivamente costruita secondo un percorso chiaro e lineare. In effetti, è sempre possibile individuare il momento preciso in cui un ente matematico viene «creato»? Probabilmente no. La «data di nascita» di un contenuto matematico (visto in termini di oggetto generale, dunque di definizione, di teorema, ovvero di procedimento standardizzato e riconosciuto dalla comunità scientifica) è forse intuibile a posteriori, quando gli utilizzatori giungono a identificare le sue caratteristiche in grado di far funzionare quel particolare contenuto in un complesso di interrelazioni con altri contenuti matematici, di fargli cioè assumere un ruolo chiaro all'interno dell'organizzazione generale della disciplina.

Questa fase di «creazione» di un contenuto matematico non può dunque limitarsi al superamento di un ostacolo epistemologico (il riferimento è alle ormai tradizionali classificazioni proposte in: Brousseau, 1983 e 1989, delle quali ovviamente ribadiamo l'importanza) e in molti casi risulta decisamente lunga e complicata: spesso, infatti, coinvolge una dimensione operativa (e come abbiamo sopra anticipato proprio questo aspetto porta alcuni Autori ad affermare che l'opposizione tra creazione e scoperta può considerarsi superata: Giusti, 1999); non possiamo inoltre dimenticare che la stessa organizzazione di contenuti alla quale il nuovo componente viene a fare riferimento subisce in generale un cambiamento rilevante causato dalla presenza del nuovo elemento; infine uno stesso contenuto può essere inserito in settori diversi della matematica, ciascuno di essi caratterizzato da una relativamente autonoma struttura di concetti e di procedimenti.

Ipotizzata comunque una «data di nascita», almeno rispetto ad una struttura, ad un'organizzazione di contenuti, il contenuto matematico in esame inizia una propria vita. Che non è comunque unica: altre vite potrebbero essere riferibili ad altre «date di nascita», ad altri settori della disciplina: e il contenuto, ad esempio la teoria (o le teorie) si evolve (si evolvono) grazie all'azione di matematici, di storici, di utilizzatori, di insegnanti, di studenti. La comunità matematica (intesa nel senso più ampio) lavora all'evoluzione della teoria e dunque *riorganizza* il sapere; ad esempio:

- il matematico aggiorna: dunque riorganizza per progredire teoricamente;
- lo storico ricostruisce l'originale: dunque riorganizza per contemplare;
- l'insegnante traspone: dunque riorganizza per far capire;
- lo studente apprende: dunque riorganizza per capire;

(ma l'elenco potrebbe essere notevolmente allungato: si pensi ad esempio ai ruoli del filosofo, del tecnico, dell'economista…).

Il termine *riorganizzazione* non deve trarre in inganno il lettore: si tratta di una fase spesso molto complessa, che non si esaurisce in una rilettura di precedenti conoscenze. Ognuno dei protagonisti citati reinterpreta creativamente, dunque «ricrea» il contenuto matematico con scopi diversi e con risultati, a volte, apparentemente in reciproco contrasto; spesso posizioni in precedenza accettate vengono superate e nuovi elementi (definizioni, teoremi) vengono introdotti. Ciascun operatore esprime la matematica con riferimento alle proprie esigenze e ai propri registri rappresentativi (Duval, 1995) e tutto ciò avviene in relazione ad una collocazione sociale (Radford, 2003), in stretta dipendenza dai contesti culturali, storici e geografici.

3. Le radici storiche dell'analisi matematica: le riorganizzazioni dell'infinitamente piccolo

Introdurremo ora un esempio che ci consentirà di evidenziare il ruolo primario delle ricordate riorganizzazioni nell'evoluzione di un importante settore del pensiero matematico: l'analisi matematica (per l'aspetto storico segnaliamo: Edwards, 1994; Hairer & Wanner, 1995; a proposito del concetto di infinito e delle ricadute didattiche: Arrigo & D'Amore, 1992; D'Amore, 1996).

Non proporremo una completa rassegna delle radici storiche dell'analisi; è inoltre necessario tener conto che ogni selezione dei dati storici da considerare significativi non è epistemologicamente neutra (Radford, 1997, p. 28). Spesso l'approccio ai dati originali è mediato da edizioni successive e da commenti, e ciò può rendere necessario valutare anche le concezioni dei curatori delle edizioni considerate: dunque anche tutte queste concezioni devono essere considerate nei rispettivi contesti storici (Barbin, 1994, p. 157).

Ci limiteremo, in questa prima fase, alla tradizione matematica occidentale (dal mondo greco alla tradizione moderna europea) e individueremo sei momenti successivi (Bagni, 2004-a e 2004-b), da una prima sensibilità al problema dell'infinitamente piccolo (Castelnuovo, 1938, p. 29) ai contributi della topologia e dell'analisi non-standard.

3.1. L'antica attenzione per l'infinitamente piccolo: Anassagora

- La riflessione sull'infinitamente piccolo può essere fatta risalire ad Anassagora di Clazomene (500?-428 a.C.; anche i paradossi di Zenone d'Elea, V secolo a.C., sono spesso citati nella preistoria del Calcolo infinitesimale: Enriques & de Santillana, 1936, p. 54; Enriques, 1938); il suo celebre frammento:

> «Rispetto al piccolo non vi è un ultimo grado di piccolezza, ma vi è sempre un più piccolo, essendo impossibile che ciò che è, cessi di essere per divisione» (riportato in: Geymonat, 1970, p. 96).

è riferibile ad una successione (potenzialmente) infinitesima: viene infatti descritta una quantità che può essere indefinitamente ridotta senza mai annullarsi.

- Questa prima sensibilità non è però sufficiente per fissare una significativa «data di nascita», nel senso indicato nel paragrafo precedente: l'infinitamente piccolo non ha ancora assunto alcun ruolo all'interno della matematica o, più in generale, della cultura. Inoltre il frammento di Anassagora non può essere interpretato, alla luce di un'impostazione moderna, in analogia ai concetti dell'analisi matematica, ad esempio alla nozione di limite: l'infinitamente piccolo sarà ripreso molte volte prima di raggiungere l'organizzazione concettuale a noi nota (e anche questa nostra attuale sistemazione potrà essere, in futuro, rivista nuovamente).

3.2. Un procedimento geometrico: il metodo di esaustione

- Le dimostrazioni per esaustione sono spesso considerate importanti procedimenti infinitesimali e a volte presentate nella pratica didattica (si basano sulla proposizione I-10 degli *Elementi* euclidei; il metodo è tuttavia attribuito a Eudosso di Cnido, 405-355 a.C.; la denominazione fu introdotta nel XVII secolo da Gregorio di Saint-Vincent). Sarebbe ancora una volta forzato supporre la presenza di un limite (modernamente inteso) nel metodo di esaustione (Kline, 1972, p. 83): l'ideale distanza tra il metodo di esaustione e il limite non è solo da intendersi in senso formale; nel primo possiamo oggi individuare analogie con i procedimenti infinitesimali, ma tale lettura è nostra, basata sulle concezioni moderne (Bourbaki, 1963, p. 171): le istituzioni culturali del mondo greco ebbero un ruolo rilevante e la stessa argomentazione greca risentì del contesto sociale e politico (come dettagliatamente discusso in: Radford, 1997).
- Un'ulteriore occasione di riflessione storica e storiografica riguardante il metodo di esaustione e l'impostazione euclidea si collega alle proposizioni XII-1 e XII-2 degli *Elementi*, secondo le quali due poligoni simili inscritti in circoli stanno l'uno all'altro come i quadrati dei rispettivi diametri (XII-1) e due circoli stanno l'uno all'altro come i quadrati dei rispettivi diametri (XII-2). Venti secoli dopo la redazione degli *Elementi*, G. Saccheri (1667-1733), in *Euclides ab omni naevo vindicatus*, osservò che la XII-2 avrebbe potuto essere ricavata dalla XX-1 come corollario («considerando i cerchi come poligoni infinitilateri»: Saccheri, 1904, p. 104). Ma l'appunto di Saccheri deve essere collocato nel contesto culturale del XVII secolo, dopo che una radicale riorganizzazione ha profon-

damente inciso sullo status dei procedimenti infinitesimali. Mai i matematici greci utilizzarono l'infinito secondo l'idea di Saccheri: la dimostrazione euclidea della proposizione XII-2 è del tutto diversa (Frajese & Maccioni, 1970, p. 930).

- Il metodo di esaustione non può essere considerato alla stregua di uno strumento di ricerca in quanto i risultati da dimostrare con la *reductio ad absurdum* devono essere intuiti o ricavati euristicamente (si ricordino alcuni notissimi procedimenti archimedei), con tecniche che i Greci non accettavano come dimostrazioni. Nella mentalità eleatico-platonica la vera conoscenza di una proposizione non poteva essere ottenuta mediante i sensi: dunque il metodo di esaustione aveva il ruolo di conferire rigore alle dimostrazioni (Radford, 2003): da questo punto di vista l'organizzazione dell'infinitamente piccolo che emerge da Eudosso e da Euclide è legata a questioni matematico-filosofiche. Osservazioni come questa hanno indotto a considerare il metodo di esaustione pertinente all'«invenzione geometrica» (Bourbaki, 1963, p. 171) piuttosto che alle radici storiche del Calcolo infinitesimale.

3.3. Cavalieri e gli indivisibili

- Molti secoli più tardi, B. Cavalieri (1598?-1647), pur non conoscendo nel dettaglio alcuni metodi archimedei, propose un nuovo procedimento (spesso oggi impiegato in ambito didattico: Carruccio, 1972, p. 179) introdotto da una significativa denominazione (*indivisibili*), ma non diede un'esplicita definizione di indivisibile (Lombardo Radice, 1989): la sensibilità per l'infinitamente piccolo subì una radicale revisione che non fu condotta in una prospettiva filosofica, bensì con intenti che appaiono spesso direttamente legati alla pratica matematica. Cavalieri non nutriva alcuna simpatia per i metodi indiretti (Lombardo Radice, 1989, p. 256) e sosteneva che il suo procedimento era «una tecnica pragmatica per evitare il ricorso al metodo di esaustione» (Kline, 1972, p. 350).
- Esaminando l'ambiente matematico del tempo si nota che anche B. Pascal (1623-1662) e I. Barrow (1630-1677) espressero dubbi sull'utilità dell'antico metodo di esaustione (Bourbaki, 1963, p. 180; le posizioni critiche di P. de Fermat, 1601-1665, sono espresse in: Fermat, 1891-1922, I, p. 257). I matematici del XVII secolo, in una fase intensa e stimolante della storia della ricerca scientifica, esigevano il supporto di tecniche efficaci, più che formalmente eleganti o rigorose. Forse il metodo di Cavalieri non appariva del tutto «rigoroso» (Kline, 1972, p. 350); certamente, però, il rigore deve essere esaminato nell'originale contesto storico e concettuale, evitando di imporre a tale contesto i nostri moderni standard (Grugnetti & Rogers, 2000, p. 50): sarebbe impensabile, da parte di studiosi del Seicento, il rifiuto di un procedimento sulla base di una debolezza fondazionale riconoscibile mediante un approccio moderno.

3.4. La nascita del Calcolo e le «quantità evanescenti» da Wallis a Lagrange

- La fase che portò, tra il XVII ed il XVIII secolo, alla nascita del Calcolo infinitesimale e al suo sviluppo fu preceduta da alcuni interessanti tentativi (ad esempio J. Wallis, 1616-1703, suggerì un significativo concetto «aritmetico» di limite: Kline, 1972, p. 388). Le ricerche di I. Newton (1642-1727) e di G.W. Leibniz (1646-1716) dovrebbero essere ricondotte alle rispettive motivazioni primarie, che nel caso di Newton erano fisiche e nel caso di Leibniz algebriche e filosofiche. Comunque la posizione di Leibniz a proposito dell'infinitamente piccolo fu sempre piuttosto articolata: nel 1695 egli parlava di uno stato di «evanescenza» nel quale una quantità può essere considerata minore di ogni quantità considerata (Kline, 1972, p. 386); tuttavia tale intuizione, il cui sviluppo potrebbe portare alla concezione dell'infinitesimo attuale, non fu approfondita e sia Newton che Leibniz «si affidarono alla coerenza dei risultati del proprio metodo per spingersi avanti senza preoccuparsi del rigore» (Kline, 1972, p. 387). Anche C.B. Boyer segnala «incertezza a proposito dei concetti» (Boyer, 1985, p. 442) nell'impostazione di Leibniz: tali giudizi, tuttavia, dovrebbero essere riferiti più alla nostra moderna lettura delle posizioni leibniziane che alla loro complessa posizione storica (Enriques, 1938, p. 60).
- Nel XVII secolo L. Euler (1707-1783) nelle *Institutiones calculi differentialis* si occupò di quantità «evanescenti» (Euler, 1787, I, p. 62; Kline, 1972, p. 429), ma nella pratica matematica preferì non approfondire i problemi collegati all'infinitesimo attuale (Euler, 1796, pp. 84-91). Naturalmente le connessioni tra la matematica e il contesto socio-culturale possono essere decisive per comprendere la posizione euleriana (Crombie, 1995).
- Anche le concezioni di J.B. d'Alembert (1717-1783), sviluppate in periodo illuminista, meritano attenzione: egli rifiutava le affermazioni leibniziane ed euleriane sui differenziali e nel 1767 affermò che una quantità «è qualcosa o non lo è» e «supporre l'esistenza di uno stato intermedio è una chimera» (riportato in: Boyer, 1985, p. 493).
- G.L. Lagrange (1736-1813) nel 1797 (*Théorie des fonctions analytiques*: Lagrange, 1813) cercò di ricondurre i procedimenti infinitesimali all'algebra; il suo tentativo, liquidato da M. Kline (1972, p. 430) come una «follia», deve essere però correttamente considerato e rivalutato: il grande matematico, nella speranza di superare la debolezza fondazionale del Calcolo, si basò su assunzioni non corrette; ma tale valutazione, ancora una volta, richiede le attuali concezioni epistemologiche e le nostre conoscenze matematiche.

3.5. Cauchy e Weierstrass

- I tempi sono maturi per giungere ad una precisazione dei concetti del Calcolo infinitesimale: A.L. Cauchy (1789-1857), nel *Cours d'Analyse algébrique* (1821), diede le definizioni di limite e di infinitesimo. Il limite secondo Cauchy è ancora collegato ad un procedimento dinamico, ma egli introdusse una prima distinzione tra *costanti* e *quantità variabili*, sebbene non disponesse di un'introduzione assiomatica dei numeri reali (la formulazione verbale proposta da Cauchy era espressa nel registro disponibile all'inizio del XIX secolo: la sua considerazione, oggi, potrebbe essere diversa e portare all'uso di altri registri rappresentativi: Tall, 1982).

- K.T.W. Weierstrass (1815-1897) diede la moderna definizione di limite e di funzione continua: egli affermò che la funzione $x \to f(x)$ è continua in $x = c$ se per ogni reale $\varepsilon > 0$ si può trovare un $\delta > 0$ in modo che per ogni x tale che $|x - c| > \delta$ si abbia $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. I riferimenti ad un processo dinamico sembrano essere superati e Weierstrass contribuì, anche dal punto di vista formale, all'evoluzione dell'infinitesimo potenziale verso l'infinitesimo attuale. Per quanto riguarda i registri rappresentativi, la definizione di Weierstrass permette l'uso efficace del registro simbolico (ricordiamo tuttavia che sarebbe fuorviante fare riferimento ad *un singolo* registro simbolico, in quanto esistono registri diversi nei diversi ambienti socio-culturali).

3.6. Gli sviluppi recenti: il contributo della topologia e l'infinitesimo attuale

- Neppure le definizioni di Cauchy e di Weierstrass esauriscono la storia dell'infinitamente piccolo. La matematica contemporanea ha risistemato i fondamenti dell'analisi inquadrando il concetto di limite in una visione topologica; inoltre l'analisi non-standard di A. Robinson ha completato il passaggio ad una concezione attuale dell'infinitesimo (Robinson, 1966).

Riassumiamo nella seguente figura le tappe ricordate di questa lunga evoluzione (riprendiamo parzialmente lo schema da: Bagni, in via di pubblicazione), non senza ricordare che anche tale schema deve essere considerato con prudenza (una concezione «dinamica» dell'infinitesimo potenziale negli indivisibili di Cavalieri, ad esempio, non è storicamente evidente, soprattutto se si considera la segnalata mancanza di una definizione di indivisibile).

Ad ogni freccia, dunque, corrisponde una riorganizzazione concettuale:

i.	da una prima sensibilità per l'infinitamente piccolo al procedimento di esaustione	→	*scelta (anche) metodologica che rende rigorosi i risultati ottenuti euristicamente*
ii.	dall'esaustione al metodo degli indivisibili	→	*rifiuto della dimostrazione indiretta*
iii.	dagli indivisibili al Calcolo infinitesimale di Leibniz e di Euler	→	*coerenza e possibilità applicative dei risultati ottenuti mediante il Calcolo*
iv.	dal Calcolo alle concezioni di limite di Cauchy e Weierstrass	→	*passaggio dall'idea dinamica all'idea statica di limite*
v.	dall'analisi ottocentesca all'analisi non-standard di Robinson, con riferimento all'infinitesimo attuale	→	*nuova concezione della retta numerica con riferimento ad un campo ordinato (assioma di completezza)*

Come osservato, tale scansione di fasi non è certamente l'unica mediante la quale presentare la storia dei concetti e dei procedimenti infinitesimali: essa corrisponde ad una nostra interpretazione. Inoltre, anche accettando di limitare lo studio alla tradizione matematica occidentale, gli esempi presentati non costituiscono una rassegna completa di riferimenti storici collegati alle varie organizzazioni concettuali che, nel tempo, sono state date all'infinitamente piccolo (ammesso che la pretesa di fornire una tale rassegna «completa» abbia qualche significato): molti autori potrebbero essere ancora esaminati (ad esempio Luca Valerio, 1552-1618). Appare comunque chiaro che il passaggio dal discreto al continuo è un complesso problema culturale (Bagni, 2004-a e 2004-b): il riferimento alla storia della matematica può essere importante per comprendere caratteristiche e difficoltà di tale delicata fase.

Completiamo la presente sezione con un'osservazione legata alla pratica didattica: è impossibile presentare alcuni episodi tratti dalla storia della matematica in termini assoluti e L. Radford (1997, p. 30) sottolinea che l'influenza delle nostre moderne concezioni del passato è inevitabile. Il ruolo dell'insegnante è essenziale (potremmo citare molti riferimenti; ci limitiamo a: Lladò & Boero, 1997; D'Amore, 2004; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2004): ma non per impersonare un mediatore che porti l'allievo a comprendere un sapere astratto ed univocamente storicizzato, bensì una guida dotata di solida consapevolezza storica ed epistemologica, in grado di ripercorrere e di motivare le continue riorganizzazioni del pensiero matematico, con riferimento ai diversi contesti culturali.

4. Le radici geografiche dell'analisi matematica: alcune esperienze orientali

Come premesso, la rassegna di esempi riportata riguarda esclusivamente la tradizione matematica europea: il percorso che vede coinvolta la cultura scientifica occidentale che, fondata sull'eredità del mondo ellenico, trova la piena realizzazione in Europa a partire dal XVII secolo.

Tuttavia alcuni contributi delle culture extraeuropee non dovrebbero essere trascurati: ad esempio, per quanto riguarda l'infinito alcune intuizioni indiane sono, come vedremo, assai interessanti (e potrebbero essere criticamente riprese anche nelle nostre aule scolastiche). Un'altra storia del Calcolo infinitesimale, forse, una tradizione trascurata o ritenuta per alcuni versi minore merita dunque l'attenzione dei ricercatori: e le possibilità di un'adeguata applicazione didattica appaiono meritevoli di considerazione.

Un primo esempio è significativo: è noto che, come cifra, lo zero era inizialmente associato al sistema di numerazione posizionale indiano (con ciò non dimentichiamo i contributi della matematica della Mesoamerica; si noti che anche in Cina il sistema numerico era posizionale, ma un simbolo per lo zero comparve solo nel XII secolo). I matematici indiani non si limitarono a considerare lo zero alla stregua di un semplice segnaposto per indicare posizioni vuote nella scrittura di un numero in notazione posizionale. Infatti in Brahmagupta (VII-VIII secolo), in Mahavira (IX secolo) ed in Bhaskara (1114-1185) troviamo alcune regole di calcolo con lo zero:

$$a + 0 = a$$
$$a - 0 = a$$
$$a \cdot 0 = 0$$

Per quanto riguarda un'eventuale divisione per 0, Bhaskara (secondo alcuni studiosi riprendendo Brahmagupta) notò che se esistesse una «frazione» come 1/0, essa avrebbe una stranissima peculiarità, che descriviamo con le parole dello storico G. Loria:

> «[Una tale frazione avrebbe la] proprietà di non mutare per l'aggiunta o la diminuzione di un numero qualsivoglia [...] ond'è lecito asserire che con Brahmagupta facciano il loro ingresso nell'Aritmetica razionale i numeri 0 e ∞» (Loria, 1929-1933, p. 176).

Ancora una volta il contesto culturale appare significativo: l'argomentazione di Bhaskara è condotta con esplicito riferimento a questioni religiose. M. Kline nota infatti:

> «Bhaskara, parlando di una frazione il cui denominatore è uguale a 0, dice che questa frazione rimane la stessa qualunque cosa le si aggiunga o le si sottragga, proprio come nessun mutamento ha luogo nella Divinità immutabile quando vengono creati o distrutti dei mondi. Un numero diviso per zero, aggiunge, viene chiamato una quantità infinita» (Kline, 1991, I, p. 216).

Possiamo concludere che una chiara sensibilità per l'infinito è presente presso i matematici indiani, seppure in un contesto particolare (e l'esempio citato può essere utilmente considerato anche in ambito didattico: si veda il capitolo X di: Bagni, 2000).

Di sicura importanza è inoltre il contributo dell'astronomia indiana che ha portato a elaborare alcuni procedimenti riconducibili all'analisi matematica (per un confronto con l'astronomia cinese si veda: Needam, 1959): ad esempio, la considerazione del moto reale istantaneo della Luna per determinare i momenti esatti in cui si verificano le eclissi indusse Aryabhata (nato nel 476), Brahmagupta e più ancora Manjula (operante intorno al 930 d.C.) a considerare alcune quantità dal punto di vista differenziale.

Circa un secolo dopo Manjula, Bhaskara utilizzò la formula che scriveremmo modernamente:

$$d(\sin x) = \cos x \, dx$$

e nel proprio *Siddhanta Siromani* egli si mostrò consapevole che quando una variabile raggiunge il valore massimo il suo differenziale si annulla. Alcune annotazioni del matematico indiano possono dunque essere interpretate in chiara analogia con il celebre risultato analitico che sarà denominato teorema di Rolle (risalente al 1691) nella tradizione matematica europea (Joseph, 2000, pp. 294-295). Oltre tre secoli dopo Bhaskara, Nilakantha (XV-XVI secolo) e Acyuta Pisarati (1550-1621) ricavarono espressioni per differenziare le funzioni arcoseno e il rapporto di due coseni.

Restando nell'ambito delle culture orientali, a parte la matematica indiana, troviamo esperienze riconducibili all'analisi nella matematica giapponese: nel XVII secolo, Seki Kowa sviluppò il calcolo che venne chiamato *yenri* e che fu applicato a questioni di ciclometria (Mikami, 1974). Una menzione meritano infine gli sviluppi in serie infinite presenti in opere matematiche cinesi tra il XVII e il XVIII secolo, ad esempio di Mei Wending e di suo nipote Mei Juecheng (1681-1763) (Martzloff, 1997, p. 353).

5. Analisi matematica europea ed esperienze orientali: un confronto di contenuti e di contesti culturali

Le precedenti considerazioni ci consentono di concludere che nell'ambito della matematica orientale si è sviluppato un calcolo infinitesimale propriamente detto, paragonabile all'analoga esperienza occidentale? Una tale affermazione, almeno sulla base delle conoscenze attualmente disponibili, non sarebbe del tutto sostenibile (Bagni, 2004-c). Gli elementi decisivi che inducono a tale valutazione possono essere così riassunti:

- il concetto di differenziazione, presente in India, come abbiamo potuto constatare, sin dai tempi di Manjula (X secolo), realizzò collegamenti significativi soltanto con settori limitati della scienza, quali l'astronomia e la misurazione (Joseph, 2000, p. 296);
- nella tradizione europea, invece, la differenziazione trovò applicazioni importanti e feconde in molti campi della matematica, della fisica e delle scienze, nonché connessioni profonde e significative con la speculazione filosofica. Concetti e procedimenti del Calcolo infinitesimale riuscirono dunque a radicarsi efficacemente in un ampio contesto culturale.

Un elemento degno di nota riguarda inoltre la simbologia: nella tradizione orientale non troviamo un sistema di simboli specifici utilizzato diffusamente per esprimere i concetti ed i procedimenti analitici; nelle traduzioni di opere occidentali riguardanti il calcolo differenziale e integrale (a partire dalla metà del XIX secolo), i matematici cinesi crearono degli ideogrammi speciali per abbreviare le espressioni linguistiche che sarebbero state utilizzate per descrivere l'integrazione e la differenziazione: riferendoci alla classica scansione di Nesselmann (1842) per la notazione algebrica, potremmo dunque pensare ad una tarda forma di sincopazione che consentì il superamento di una fase retorica. Ad esempio (Martzloff, 1997, p. 119), la scrittura:

$$\int 3\,x^2 dx = x^3$$

sarebbe stata espressa nella forma:

禾 三天^{二} 彳天 =天^{三}

dove il primo ed il quinto ideogramma sono semplificazioni degli ideogrammi che indicano rispettivamente «somma» e «piccolo».

Nella tradizione europea, invece, già nel XVII secolo vennero sviluppati due sistemi simbolici specifici per il Calcolo infinitesimale: quello di Leibniz e quello di Newton (l'uso di tali sistemi identificò a lungo l'appartenenza a due diverse scuole matematiche); dopo oltre tre secoli entrambi i sistemi simbolici, pure con le modifiche resesi necessarie, sono ancora utilizzati dai matematici e dai fisici. Si osservi che il simbolismo occidentale è stato adottato dai matematici cinesi a partire dal 1920 (unitamente con la convenzione di disporre i simboli orizzontalmente e non verticalmente).

Proprio le numerose riorganizzazioni del sapere che hanno caratterizzato la storia dell'analisi matematica europea sono sintomi di vivacità e di fecondità: da questo punto di vista, chiaramente, la storia occidentale dell'analisi matematica deve essere considerata più vitale ed incisiva rispetto alle esperienze extra-europee: un'analisi dei ben diversi contesti socio-culturali, soprattutto con riferimento alle tradizioni cinese e occidentale, porta J. Needham ad affermare che l'elemento che portò alla nascita della scienza moderna in Europa fu la presenza di una cultura mercantile, contrapposta alla civiltà agrario-burocratica orientale (si veda la discussione presente in: Needham, 1959, pp. 150-168).

Non pretendiamo di esaurire in poche battute l'argomento (lo stesso Needham, 1959, p. 167, ricorda che «il problema dei rapporti esatti fra scienza e tecnologia moderne da un lato e circostanze socioeconomiche che ne condizionarono la nascita dall'altro costituisce forse il grande dibattito della storia della scienza»). Sarebbe tuttavia errato e storicamente discutibile ignorare i molti contributi orientali (segnatamente indiani) ad uno dei settori più importanti della matematica mondiale.

Quanto sopra proposto ci consente quindi di formulare una riflessione generale (Grugnetti & Rogers, 2000, p. 50; Bagni, 2004-c): l'evoluzione storica non deve essere considerata, e proposta didatticamente, mirando alla proclamazione di una pretesa universalità della matematica. Al contrario, la storia ci presenta delle significative diversità: un nuovo concetto o un nuovo approccio teorico si sono sviluppati (in alcuni casi rapidamente, in altre situazioni in termini meno vivaci) in particolari momenti storici e in particolari aree geografiche, sulla base di esigenze e di standard di rigore ben diversi. J.-L. Chabert (1999, p. 7, la trad. è nostra) nota che «un metodo algoritmico riscuote un buon successo quando le tecniche impiegate corrispondono alle necessità del tempo», dunque sottolinea la necessità di collegare la diversa matematica sviluppata e trasmessa ai diversi contesti socio-culturali.

Tutto ciò porta ad una chiara rivalutazione dell'aspetto multiculturale della matematica e della sua storia, e può avere ripercussioni didattiche molto importanti: gli approcci alla matematica caratteristici delle diverse culture potrebbero infatti non limitarsi ad una (pur fondamentale) coesistenza di impostazioni diverse e a volte complementari, ma potrebbero portare ad un'efficace interazione, in una prospettiva interculturale particolarmente utile e feconda (si veda ad esempio: Ascher, 1991; Zaslavsky, 1996; Cipollari & Portera, 2004).

6. Ancora uno spunto per una riflessione…

Abbiamo evidenziato che la storia di un concetto matematico non può essere concepita (e presentata ai nostri allievi) in termini di rigorosa sequenzialità, né facendo riferimento ad una sola tradizione culturale. Più che della storia di un concetto matematico dovremmo quindi parlare di una sua vita ricca e complessa, in cui si fondono molte storie. Non possiamo dunque non chiudere la nostra riflessione con un interrogativo: questa vita di un contenuto matematico (di un concetto, di un procedimento, di una teoria) termina?

In omaggio all'antica massima fisica secondo la quale nulla si crea e nulla si distrugge, dovremmo rispondere negativamente: se scegliessimo di intendere la matematica in termini di espressione dell'umana intelligenza, la sua presenza sarebbe legata alla stessa presenza dell'uomo, dunque di un essere pensante, dotato di capacità creative e razionali. Da ciò seguirebbe che un particolare contenuto matematico non muore perché, forse, non è propriamente mai nato: un concetto potrebbe essere interpretato come una proiezione della mente umana (collettivamente intesa), in una particolare situazione culturale costituita da esigenze, da vincoli, da relazioni sociali, da affetti.

Non cercheremo, tuttavia, di analizzare ulteriormente la questione. Ad altri pensatori lasciamo il compito di immaginare, ad esempio, la sorte della matematica in un universo in assenza dell'uomo, in un sistema che esprimerebbe probabilmente altre forme di razionalità.

E, forse, un'altra affascinante matematica.

Ringraziamenti

L'Autore desidera ringraziare vivamente la Prof. Evi Azzali dell'Università di Udine per i preziosi stimoli e per le utilissime osservazioni su di una prima versione di questo articolo. Un sincero ringraziamento va anche ai membri del Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica dell'Università di Udine, diretto dal Prof. Maurizio Trombetta, da tempo impegnati in una ricerca didattica sperimentale che riflette assai efficacemente alcune posizioni teoriche espresse nel presente lavoro.

Arrigo, G. & D'Amore, B.
Infiniti, Angeli, Milano, 1992.
Ascher, M.
Ethnomathematics. A Multicultural View of Mathematical Ideas, Brooks/Cole Publishing Company. Pacific Grove, California, 1991.
Bagni, G.T.
Matematici, Antilia, Treviso, 2000.
Bagni, G.T.
Exhaustion argument and limit concept in the History of Mathematics: educational reflections, Furinghetti, F. Kaiser, S. & Vretblad, A. (Eds.), *Proceedings of HPM-2004, History and Pedagogy of Mathematics, Uppsala July 12-17, 2004*, p. 94-103, 2004-a.
Bagni G.T.
Storia della matematica in classe: scelte epistemologiche e didattiche, *La matematica e la sua didattica*, 3, p. 51-70, 2004-b.
Bagni, G.T.
«…ma la perdita sarebbe stata maggiore del guadagno», *Bollettino dei Docenti di Matematica*, 48, p. 29-40, 2004-c.
Bagni, G.T.
Historical roots of limit notion. Development of its representative registers and cognitive development, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education* (in via di pubblicazione).
Barbin, E.
Sur la conception des savoirs géométriques dans les Éléments de géométrie, Gagatsis, A. (Ed.), Histoire et enseignement des mathématiques, *Cahiers de didactique des Mathématiques*, 14-15, p. 135-158, 1994.
Bourbaki, N.
Elementi di storia della matematica, Feltrinelli, Milano (*Eléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris, 1960), 1963.
Boyer, C.B.
A History of Mathematics, University Press, Princeton (1968), 1985.
Brousseau, G.
Les obstacles épistémologiques et les problèmes in mathématiques, *Reserches en Didactique des Mathématiques*, 4, 2, p. 165-198, 1983.
Brousseau, G.
Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques, Bednarz, N. & Garnier, C. (Eds.), *Constructions des savoirs, obstacles et conflits*, Agence d'Arc, Montreal, p. 41-64, 1989.
Carruccio, E.
Matematiche elementari, Pitagora, Bologna, 1972.
Castelnuovo, G.
Le origini del calcolo infinitesimale, Zanichelli, Bologna, 1938.
Chabert, J.-L. (a cura di)
A History of Algorithms. From the Pebble to the Microchip, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg (*Histoire d'algorithmes. Du caillou à la puce*, Éditions Belin, Paris 1994), 1998.
Cipollari, G. & Portera, A.
Cultura, culture, intercultura, IRRE Marche, Ancona.
Crombie, A.C.
Commitments and styles of European scientific thinking, *History of Sciences* 33, p. 225-238, 2004, 1995.
D'Amore, B.
L'infinito: storia di conflitti, di sorprese, di dubbi, *La matematica e la sua didattica*, 3, p. 322-335, 1996.
D'Amore B.
Scritti di Epistemologia Matematica. 1980–2001, Bologna, Pitagora.
D'Amore B.
Il ruolo dell'Epistemologia nella formazione degli insegnanti di Matematica nella scuola secondaria. *La matematica e la sua didattica*, 4, p. 4-30, 2001, 2004.

D'Amore B. & Fandiño Pinilla M.I.
Cambi di convinzioni in insegnanti di matematica di scuola Duval, R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, Lang, Paris, 2004.
Edwards, C.H. Jr.
The Historical Development of the Calculus, Springer, Berlin, 1994.
Enriques, F.
Le matematiche nella storia e nella cultura, Zanichelli, Bologna, 1938.
Enriques F. & de Santillana, G.
Compendio di storia del pensiero scientifico, Zanichelli, Bologna (ristampa anastatica: Zanichelli, Bologna 1973), 1936.
Euler, L.
Institutiones calculi differentialis cum eius usu in Analysi Finitorum ac Doctrina Serierum, Galeati, Pavia, 1755-1787.
Euler, L.
Introduction a l'analyse infinitésimale, Barrois, Paris (prima edizione francese), 1796.
Fauvel, J. & van Maanen, J. (Eds.)
History in mathematics education, Dordrecht, Kluwer, 2000.
Fermat, P. de
Œuvres, I-V, Gauthier-Villars, Paris, 1891-1922.
Frajese, A.
Storia della matematica ed insegnamento medio*,* *Bollettino UMI*, III, p. 337-342, 1950.
Frajese, A. & Maccioni L. (Eds.)
Gli Elementi di Euclide, UTET, Torino, 1970.
Furinghetti, F. & Radford, L.
Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: from philogenesis and ontogenesis theory to classroom practice, English, L. (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, p. 631-654, Erlbaum, New Jersey, 2002.
Gadamer, H.-G.
Truth and method, Crossroad, New York, 1975 (II ed.: 1989).
Geymonat, L.
Storia del pensiero filosofico e scientifico, Garzanti, Milano, 1970.
Giusti, E.
Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici, Bollati Boringhieri, Torino, 1999.
Grugnetti, L. & Rogers, L.
Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues, Fauvel, J. & van Maanen, J. (Eds.) (2000), p. 39-62.
Hairer, E. & Wanner, G.
Analysis by its history, Springer-Verlag, New York, 1996.
Joseph, G.G.
C'era una volta un numero. La vera storia della Matematica, Il Saggiatore, Milano (*The crest of the peacock. Non-European roots of mathematics*, 1991), 2000.
Kline, M.
Mathematical thought from ancient to modern times, Oxford University Press, New York, 1972.
Lagrange, J.L.
Théorie des fonctions analytiques, Courcier, Paris. 1813.
Lladò, C. & Boero, P.
Les interactions sociales dans la classe et le role mediateur de l'einseignant, *Actes de la CIEAEM-49*, Setubal p. 171-179, 1997.
Lolli, G.
Filosofia della matematica. Eredità del Novecento, Il Mulino, Bologna, 2002.
Lombardo Radice, L.
Geometria degli indivisibili di Cavalieri, UTET, Torino, 1989.
Loria, G.
Storia delle matematiche dall'alba delle civiltà al tramonto del secolo XIX, Sten, Torino, 1929-1933.
Mikami, Y.
The Development of Mathematics in China and Japan, 2nd edition, Chelsea Publ., New York (original ed.: Leipzig, 1913), 1974.

Needham, J.
Science and civilisation in China, Cambridge University Press (Einaudi, Torino, 1985, volume 3*), 1959.
Nesselmann, G.H.F.
Versuch einer kritischen Geschichte den Algebra, Nach den Quellen bearbeitet, Reimer, Berlin, 1842.
Pepe, L.
Storia e didattica della matematica, *L'educazione matematica*, III, I-2, p. 23-33, 1990.
Piaget, J. & Garcia, R.
Psychogenèse et histoire des sciences, Flammarion, Paris, 1983.
Pizzamiglio, P.
Matematica e storia. Per una didattica interdisciplinare, La Scuola, Brescia, 2002.
Radford, L.
On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: towards a socio-cultural history of mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 17(1), p. 26-33, 1997.
Radford, L.
On culture and mind, Anderson, M. & Al. (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing*, p. 49-79, Legas, Ottawa, 2003.
Radford, L., Boero, P. & Vasco, C.
Epistemological assumptions framing interpretations of students understanding of mathematics, Fauvel, J. & van Maanen, J. (Eds.) (2000), p. 162-167, 2000.
Robinson, A.
Non-standard analysis, North-Holland, London, 1966.
Saccheri G.
Euclides ab omni naevo vindicatus, Boccardini (Ed.), Hoepli, Milano, 1904.
Sfard, A.
On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coins, *Educational Studies in Mathematics*, 22, p. 1-36, 1991.
Slavit, D.
An alternate route to reification of function, *Educational Studies in Mathematics* 33, p. 259-281, 1997.
Speranza, F.
Scritti di epistemologia della matematica, Pitagora, Bologna, 1997.
Tall, D.
Elementary axioms and pictures for infinitesimal Calculus, *Bulletin of the IMA*, 14, p. 43-48, 1982.
Yourcenar, M.
Il Tempo, grande scultore, Einaudi, Torino (*Le Temps, ce grand sculpteur*, Gallimard, Paris 1983), 1985.
Zaslavsky, C.
The multicultural math classroom: bringing in the world, Heinemann Portsmouth, NH, 1996.

2. Imparare e capire

André Delessert

Among the words that a children ears in the first years of his life, the verb "to learn" is surely one of the most frequents. But "learning" can be interpreted in several ways. In this paper we present our point of view and we suggest different instruments in order to verify the effectiveness of learning.

Se si dovesse fare l'inventario delle parole che ogni ragazzo sente nei suoi primi quindici o vent'anni di vita, il verbo «imparare» sarebbe probabilmente quello che appare più spesso. Deve imparare a camminare, a dominare qualche funzione naturale, a mangiare, a parlare. I meno giovani si ricordano ancora d'aver imparato a dire «Buongiorno signore» o «Grazie signora» e a non tagliare la parola agli adulti. I ragazzi devono imparare ad attraversare la strada. Quando vanno a scuola devono imparare la lettura, la scrittura, il calcolo, la storia, la geografia e molte altre cose. Più tardi seguiranno forse un tirocinio o proseguiranno negli studi. Impareranno un mestiere, a riconoscere materiali, a rispettare la legge. Nel frattempo le scuole rimangono le istituzioni nelle quali i giovani sono portati a scoprire in alcuni anni il sapere che le migliori menti hanno seminato e raccolto, talvolta, in secoli e secoli. Esse sono dunque, per eccellenza, i luoghi dove si impara.

Bisogna qui usare il termine «imparare» nella sua accezione prima, che è «acquisire conoscenze». Ciò significa consacrare tempo, sforzi e applicazione per appropriarsi di certi saperi e di certe attitudini. Come tutte le imprese umane, anche questa può riuscire, ma può anche fallire in tutto o in parte. Una cosa imparata non è necessariamente conosciuta: so di poveri ragazzi che hanno dedicato anni allo studio del tedesco e che sono rimasti incapaci di produrre anche il minimo discorso, il minimo testo in quella lingua. Per ogni apprendimento bisogna trovare mezzi d'osservazione atti a verificare quanto sia riuscito. I criteri di riuscita sono diversi a seconda dell'obiettivo da raggiungere. Per il bambino che impara a camminare, il successo si esprime dal fatto che davvero cammina. Lo stesso per chi impara a suonare uno strumento musicale o, in generale, per chi vuole acquisire un'attitudine concreta. L'efficacia di un apprendimento diventa più difficile da giudicare se si riferisce a saper-fare intellettuali. È il caso di molte attività scolastiche, in particolare, soprattutto, dello studio della matematica. È di questo apprendimento che mi occuperò nel seguito, anche se certe osservazioni valgono pure per quello di altre discipline.

Per giustificare il ruolo della scuola, gli insegnanti e le autorità scolastiche devono valutare l'apprendimento di ogni allievo in ogni branca disciplinare separatamente. A questo scopo dispongono di molte procedure, dalle osservazioni del maestro in classe fino a prove ed esami di ogni tipo. Gli obiettivi degli allievi sono molto più egoistici. La loro principale preoccupazione consiste nel superare, in un modo o nell'altro, le prove d'apprendimento di cui i responsabili hanno disseminato la strada che conduce al diploma anelato. Tuttavia, per restare nel caso della matematica, ci sono allievi che provano per tutta la vita una viva soddisfazione interiore nel risolvere problemi difficili. Questo successo diventa presto l'obiettivo dei loro studi. Molti loro condiscepoli, per contro, si accontentano di fare lo sforzo minimo necessario per superare, bene o male, gli esami.

L'allievo dispone di molti mezzi per superare gli ostacoli che le autorità scolastiche erigono sul suo cammino. Il più primitivo consiste nell'acquisire dei riflessi condizionati. Dopo innumerevoli ripetizioni e per obbedire alle ingiunzioni ostinate del docente, lo studente diventa capace di rispettare certe consegne senza doverci più riflettere. Non dimentica più i riporti nelle addizioni, sa disegnare il punto di coordinate (1; 0) in un sistema di assi ed evita di semplificare i due membri di un'equazione dividendo per zero. Tutto appare come se egli avesse a disposizione una memoria nascosta. Un mezzo un tantino più evoluto consiste nel mettere in gioco la propria memoria cosciente. L'allievo vi deposita enunciati di teoremi, formule o passi da seguire per risolvere un sistema di tre equazioni lineari a tre incognite. Il pasticcio è che la memoria è uno strumento efficace tanto nel dimenticare quanto nel conservare. Così, in un'addizione di numeri decimali, bisogna saper dimenticare i riporti quando non servono più. La maggior parte degli allievi che fanno capo a questi due mezzi di apprendimento preparano i loro esami fino all'ultimo minuto. E siccome molti li passano, si conclude che hanno imparato bene la loro matematica. In realtà, una buona parte dimentica il giorno dopo tutto ciò che essi stessi hanno creduto di sapere.

C'è almeno un altro mezzo per appropriarsi di conoscenze in matematica: si può capirla. Chi capisce una questione matematica, vi vede disposizioni, organizzazioni intelliggibili che preesistono nella sua mente. Si mette al posto dell'oggetto matematico da conoscere. Serviamoci di una analogia: il cubo è definito dai suoi vertici, spigoli, facce e dalle loro incidenze. Resta una nozione fittizia, una specie di gioco di parole, per colui i cui occhi non vedono mai più che al massimo tre facce. Ma, se si rende conto di essere in un'aula, con il pavimento, il soffitto e le sue quattro pareti, allora si sente presente nel cubo, e l'idea di cubo è presente a lui. Gli risulta facile vedervi due rette sghembe (cioè che non appartengono allo stesso piano), impresa che agli allievi attaccati alle sole caratterizzazioni libresche riesce raramente. Questa storiella ci orienta verso ciò che è proprio della comprensione. La comprensione riconosce negli oggetti matematici relazioni che intervengono anche nell'attività intellettuale ordinaria. La situazione di due dischi in un piano o quella di due palle nello spazio hanno qualcosa in comune, che il pensiero utilizza quando confronta le immagini di uno stesso paesaggio osservato da due punti di vista diversi. L'idea di un piano tangente ad una superficie entra in risonanza con la tendenza a immaginare ciò che non si conosce come un prolungamento lineare: l'aumento attuale della violenza continuerà. Quando qualcuno comprende una situazione matematica, constata che i fatti che essa comporta non sono disposti a caso. Per lui, essi non derivano più da una decisione arbitraria dell'insegnante o dei redattori del programma: sono organizzati secondo principi che vanno infinitamente al di là dell'organizzazione scolastica. Spesso ne resta meravigliato, ma, dopo riflessione, si rende conto che sono articolati proprio come gli sarebbe piaciuto che lo fossero. Gli oggetti matematici che capisce sono da lui considerati come viventi, e il suo pensiero partecipa della loro vita. La conoscenza che ne ha non è quella di un'immagine separata dal suo oggetto: essa procede per partecipazione, non per rappresentazione.

Si vede allora in che cosa questo modo di apprendimento differisce dai primi due. Il primo mezzo si basa sull'attitudine a fornire reazioni corrette ma non pensate a certe sollecitazioni date. Tutto avviene come se una consegna si iscrivesse in qualche angolo dell'inconscio. Quando certe condizioni sono riunite, la consegna fa scattare un riflesso dove la riflessione matematica non interviene. Il secondo mezzo fa intervenire procedure più complesse della memoria cosciente. Dapprima certi enunciati, figure, aggregati di simboli sono schematizzati, e poi ordinati in caselle mentali in maniera adatta a chi impara. Più tardi, una domanda di ricerca provoca un'ispezione delle caselle per trovarvi la traccia dell'oggetto studiato. Per esempio, la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado è registrata sotto forma di una costellazione di segni, senza rapporto con il metodo di soluzione dell'equazione. Al momento di risolvere un'equazione di secondo grado, l'allievo va alla ricerca di un aggregato dove compaiono una riga di frazione, un segno √ e il bizzarro ±. Durante queste due fasi, la conoscenza di un oggetto matematico si riduce all'archiviazione di un'immagine del tutto avulsa dall'oggetto considerato. Ci sarebbe molto da dire sulla conoscenza per comprensione. Essa mette in gioco, oltre al pensiero razionale, meccanismi inconsci di pensiero e lampi di lucidità dell'intuizione. Se appare in modo particolarmente chiaro in matematica, essa si manifesta senza dubbio sotto diverse forme in tutti i rami del sapere, perché rappresenta la forma compiuta del capire. Bisogna aggiungere che, nello stesso campo, possono esistere molti livelli di comprensione. Le situazioni – euclidee, a due o tre dimensioni – che gli antichi studiosi di geometria capivano sono solo una piccola parte di quelle che possono capire i matematici contemporanei. Il meccanismo di comprensione è tuttavia il medesimo: solo gli oggetti, sui quali la comprensione si esercita, sono diversi. Non c'è cambiamento di natura tra la comprensione di un liceale e quella di un matematico coi fiocchi.

Restiamo nel campo dell'insegnamento elementare della matematica. Le procedure didattiche molto raffinate che la scuola usa sono adatte a far imparare la matematica attraverso la memoria e i riflessi condizionati. Per contro, non si conosce alcun metodo che provochi la comprensione. Il docente constata che certi allievi hanno facilità ad orientarsi in situazioni delicate, disseminate di difficoltà sconosciute. Ad alcuni allievi questo agio sembra provenire da una certa chiarezza interiore; altri sembrano folgorati da una improvvisa illuminazione. Ma nessun discorso, nessun esempio, nessuna astuzia pedagogica sembra capace di trasmettere questo talento. Le spiegazioni dell'insegnante, le figure, i dialoghi, le rappresentazioni teatrali, tutte queste procedure ottengono il risultato di far nascere nella mente degli allievi immagini più o meno adeguate degli oggetti matematici. Ma nessuna è specificamente atta a provocare la partecipazione intima del pensiero all'esistenza degli oggetti. E tuttavia si constata che un'osservazione banale, un piccolo incidente imprevisto, un nonnulla fanno sorgere sul volto dell'allievo un'espressione di felicità, come se avesse una visione. Ciò che, fino a quel momento, trattava per obbedienza, per conformismo, gli si presenta di colpo come un sistema coerente e naturale.

Arriviamo al punto che rappresenta, per la scuola, la superiorità dell'iniziazione per comprensione sugli altri modi di apprendimento. La comprensione mette il pensiero in stretto contatto con l'oggetto studiato. Quest'ultimo appare come un tutto, anche se se ne percepisce solo un aspetto parziale, un po' come si presenta una scultura a tutto tondo. La mente può impossessarsene liberamente come di qualsiasi altro oggetto di pensiero e rigirarselo in tutti i sensi per scoprirne proprietà sempre nuove. Non è più legato al discorso particolare con il quale è stato introdotto. Mentre, al contrario, le conoscenze fornite dalle prime due maniere di apprendere, che ho menzionato prima, dipendono strettamente dalle presentazioni che ne sono state date. Esse si iscrivono in una memoria simile a quella di un calcolatore. Sono sì immagini della realtà – matematica nel nostro caso – ma sono immagini fisse, perché non possiedono il potere di evoluzione e di critica. In più sono fortemente marchiate dalle dottrine didattiche del momento. L'esperienza della «mate moderna» ne fornisce un bell'esempio. Queste teorie hanno tutte la pretesa di tracciare un cammino diretto verso la conoscenza. Ora, non esiste una «via regia» in matematica, né, probabilmente, in nessun'altra disciplina. Le diverse concezioni dei numeri complessi e degli infinitamente piccoli, tanto divergenti all'apparenza, sono tutte corrette e tutte rivelatrici dell'oggetto che trattano.

La comprensione fa scoprire al pensiero dei poteri latenti costantemente disponibili. La si può paragonare a ciò che avviene a un nuotatore che constata, una volta per tutte, che può andare sott'acqua senza annegare. Chi capisce una questione matematica non ha più bisogno di intasare la sua memoria di una marea di formule e procedure. Egli sa che esistono e che può ritrovarle quando gli serviranno; possiede della questione un'intelligenza insieme più larga, più intuitiva e più viva. La sua mente vi si libra con facilità e con piacere.

Quanto precede è confermato dal fatto che la scoperta per comprensione non si dimentica mai. La conoscenza ottenuta con questo mezzo non si iscrive nella memoria: essa è la rivelazione di un potere del pensiero, di uno strumento intellettuale che, altrimenti, sarebbe rimasto embrionale. Ogni comprensione di una questione matematica si accompagna sempre a una migliore conoscenza di se stessi. Per l'allievo, essa costituisce uno sviluppo della sua personalità.

Sembra evidente che il vero successo di un insegnamento matematico è rilevato dalla proporzione di allievi e studenti che arrivano al livello della comprensione. Ma i procedimenti didattici, per quanto raffinati, non sono efficaci che per impiantare riflessi condizionati e schemi di memorizzazione. Se falliscono con certi allievi poco motivati, non impediscono, d'altro canto, ad altri di raggiungere la comprensione. Tuttavia questa riuscita non può in alcun caso essere programmata: in effetti dipende senza dubbio da qualche disposizione interiore dell'allievo e da qualche istante di fascino concessi all'insegnante, senza che se ne renda conto. Si aggiunga che i controlli delle conoscenze non tengono conto che di quelle fornite dall'insegnamento. Le valutazioni più ambiziose si centrano sul «lavoro» dell'allievo, e ammettono dunque tacitamente che le conoscenze si accumulano una a una a seguito di un'attività continua. Ora, la comprensione non si ottiene in questo modo: essa procede a salti e fornisce d'un sol colpo una percezione d'insieme di un paesaggio matematico. Gli esami ufficiali organizzati dalla scuola non consentono di discernere l'allievo che ha ben imparato da quello che capisce. Quest'ultimo partecipa della vita degli oggetti matematici studiati, è capace d'immaginare soluzioni di problemi inattesi, di situazioni mai trattate in classe, alle quali arriva più o meno velocemente. Ma l'equità degli esami esige che si rinunci a domande del genere, enigmi che richiedono immaginazione, intuizione e soprattutto la fortuna di avere subito una geniale trovata. Solamente molto più tardi, in vista della prosecuzione degli studi, si potrà forse accertare che il candidato aveva raggiunto lo stadio della comprensione. Di conseguenza, la determinazione dell'efficacia reale (bisogna insistere su questa parola) di un insegnamento matematico resta un problema aperto.

Non si può provocare deliberatamente la comprensione, ma ci si può sforzare di trovare le condizioni che la favoriscono. Prima di tutto, è augurabile che l'insegnante abbia, lui, raggiunto la comprensione della sua materia: allora è capace e libero di presentare lo stesso soggetto matematico in molti modi, di girargli in giro come si gira intorno ad una scultura; può riproporre una questione da un'altra angolazione se dovesse accorgersi che un primo tentativo di avvicinamento è stato mal recepito dall'insieme degli allievi. Il maestro deve avere questa libertà d'azione, che è, d'altronde, una caratteristica dell'atto pedagogico. È poi importante che il numero di allievi non sia eccessivo. Il passaggio dal semplice apprendimento alla comprensione è un fenomeno strettamente personale di ogni allievo: talvolta è preceduto da un periodo di instabilità che si traduce in atteggiamenti o osservazioni inabituali. Con un intempestivo richiamo all'ordine, il maestro rischia di far andare a rotoli questa misteriosa operazione. Non si deve dimenticare che, se l'insegnante ha il compito di formare i giovani per la vita in società, ha anche la missione di aiutare individualmente ogni allievo a scoprire le potenzialità della sua mente, ivi compreso il suo potere di comprensione.

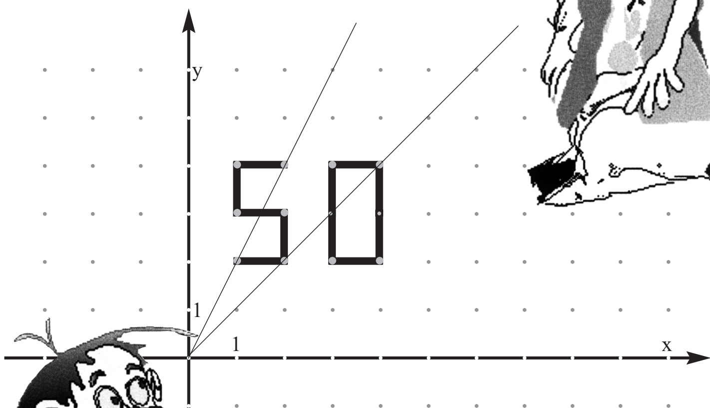
Queste brevi osservazioni non forniscono alcuna formula magica per condurre gli allievi alla comprensione. Tuttavia danno indirettamente i mezzi per facilitarne l'accesso. Si può temere, per esempio, che le incessanti riforme che si fanno subire alla scuola abbiano come conseguenza di minimizzare le competenze necessarie dei docenti e di aumentare l'effettivo delle classi. Questo timore, ahimè, non concerne solo la matematica.

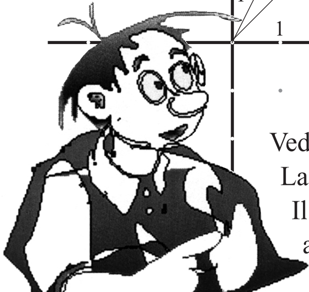
Quiz numero 33

Caro Archie,

immagina di essere un abitante di Puntilandia, ‘mondo’ formato da tutti i punti del piano cartesiano con coordinate intere.
Dall’origine, punto O(0,0), guardando in tutte le ‘direzioni’, alcuni punti si possono vedere mentre altri sono nascosti da punti allineati, più vicini a O.

Sto cercando una posizione in cui possa essere piazzato il numero **50** in modo che ognuno dei suoi dieci ‘vertici’ sia osservabile da O.
Pensi che esista?





Vediamo.
La posizione proposta nell’esempio non funziona!
Il punto(1,2) è visibile mentre (2,4) non lo è;
anche i punti (2,2) e (4,4) non lo sono, siccome sono nascosti da (1,1), ...

Lasciami riflettere.

Voi che ne pensate?

Si può posizionare il 50 in modo che un abitante di Puntilandia lo possa vedere completamente dall’origine O? Quante soluzioni ci sono? Perché?

Attendiamo le vostre risposte motivate. Come sempre il miglior contributo sarà premiato con un bel libro.
Buon divertimento!

Soluzione del Quiz numero 32

*Sul cubo scheletrato sono possibili **111** itinerari diversi*: è la risposta corretta al Quiz 32 che era di natura squisitamente combinatoria.

Il premio in palio – libro di David Wells, *Personaggi e paradossi della matematica*, Edizioni Mondadori – è stato assegnato a Samanta Musatti, studentessa presso la Scuola cantonale di commercio di Bellinzona, per la sua soluzione ritenuta semplice, chiara e completa allo stesso tempo.

Molte le soluzioni ricevute, tutte molto interessanti per le strategie adottate che potremmo classificare in tre tipi: «per elencazione», «sintetiche» e «analitiche». Motivi di spazio ci impediscono di proporne almeno una per ognuno di essi, ma ci proponiamo di ritornarci in una prossima occasione.

In questa sede ci limitiamo a presentare quella premiata. Eccola.

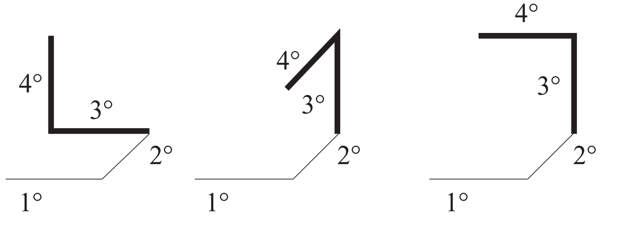
Soluzione del Quiz «Passeggiate sul cubo»

Itinerari con uno spigolo:	*3*
Itinerari con due spigoli:	*3.2 = 6*
Itinerari con tre spigoli:	*3.2.2 = 12*
Itinerari con quattro spigoli:	*3.2.3 = 18*
Itinerari con cinque spigoli:	*3.2.5 = 30*
Itinerari con sei spigoli:	*3.2.4 = 24*
Itinerari con sette spigoli:	*3.2.3 = 18*
Totale degli itinerari:	*3+6+12+18+30+24+18 =**111***

Motivazione del «3 . 2», presente in quasi ogni calcolo:

Dal punto P ci sono 3 possibilità, scelta una di queste ci sono di nuovo 2 possibilità, e quindi è la base per tutti i calcoli. Il terzo fattore del prodotto l'ho calcolato contando le possibilità una per una.

Ad esempio per il caso di 4 spigoli:



⇒ *ci sono 3 possibilità*

2. Giochi con le carte e teoria dei grafi

Vania Mascioni[1]

In this note we analyze a classical card trick from a combinatorial point of view and provide exact conditions for when similar generalized tricks can or cannot be performed.

In questo articolo studieremo un «trucco» tradizionale che si può eseguire con un semplice mazzo di carte con l'aiuto di un assistente e davanti a un pubblico. La sua popolarità è sicuramente dovuta a Martin Gardner che lo ha incluso in diversi suoi libri di giochi matematici (vedi [4, 5]), e il suo creatore sembra essere stato William Fitch Cheney, Jr. (la prima apparizione in stampa pare sia datata 1950). C'è stata una considerevole quantità di ricerca dedicata a problemi simili e qui ci concentreremo su un nuovo tipo di generalizzazione.

Chiameremo il mago Anna, e il suo assistente Carlo:

Anna chiede al pubblico di scegliere cinque carte a caso da un mazzo tradizionale di 52 carte. Scelte le cinque carte, Anna le riprende in mano, le guarda, e ne sceglie quattro che poi passa a Carlo (tutte e quattro insieme o una a una, non importa). Carlo vede dunque solo queste quattro carte, eppure sarà sempre in grado di «prevedere» quale sia la quinta carta che Anna ha ancora in mano.

Visto dal suo lato misterioso, questo trucco appare come un problema matematico perché nulla è lasciato al caso e Carlo non tira a indovinare: darà sempre la predizione corretta sulla quinta carta: allora, per quale motivo il trucco funziona? Siccome non sono per nulla un esperto di giochi matematici, sono venuto a conoscenza del problema grazie a Hanspeter Fischer, un mio collega alla Ball State University. Lo aveva proposto a una sua classe di studenti e ne ha derivato discussioni interessanti e costruttive. Dopo tutto, Carlo riceve quattro carte, e la quinta appare come una delle rimanenti 48: sembra proprio che Carlo non ce la possa fare, che non abbia informazioni sufficienti. Quindi, cosa pensereste se io dovessi dire che, sempre cominciando con il pubblico che sceglie cinque carte, anche se il mazzo iniziale dovesse essere un mazzo «inventato» e molto più grande (diciamo, di 124 carte) il trucco funzionerebbe ancora, con Carlo che ne riceve quattro da Anna, e pur sempre indovina correttamente quale carta sia la quinta? Tratteniamo un po' il respiro su questa domanda: la ri-

1. Department of Mathematical Sciences, Ball State University, Muncie, IN 47306-0490 (USA).

sposta arriverà verso la fine dell'articolo (e non è una novità, essendo già stata considerata in [1]).

Torniamo al problema iniziale. La difficoltà appare legata alle informazioni che colleghiamo a un mazzo di carte: i quattro semi, i tredici valori per ogni seme. Le soluzioni più brevi del trucco sembra che si basino tutte su queste informazioni e quindi sulle caratteristiche specifiche di un mazzo di 52 carte. Pertanto, se cominciamo a pensare a mazzi con carte in numero superiore a 52, sembra che il cervello ci vada in confusione perché la nostra idea naturale di un mazzo di carte va persa.

Consideriamo in dettaglio una soluzione del problema a 52 carte (parafraserò la soluzione data da un altro mio collega, Kerry Jones: se a questo punto volete provare a trovarla da soli, smettete di leggere e fate qualche tentativo!).

Cominciamo con l'osservazione che Anna (che ha ricevuto cinque carte scelte a caso dal pubblico) ha in mano almeno due carte dello stesso seme (può averne anche di più, ma a noi ne bastano due, per cui la procedura di Anna si baserà su due carte dello stesso seme, inizialmente lasciando perdere le altre tre). Il suo piano è di tenere in mano una di quelle due carte e di passare a Carlo l'altra, come una sorta di segnale. Quale carta scegliere? Pensiamo alle carte di un seme (cuori, per esempio) ordinate ciclicamente dall'asso al re, e poi di nuovo asso, eccetera: è più facile pensare a queste carte come ai numeri da 1 a 13 ordinati ciclicamente (ovvero, dopo il 13 ricomincia l'1, eccetera). Ebbene, dato che Anna ha in mano almeno due carte dello stesso seme, la differenza minima di valore fra queste due carte non è mai più di 6. Per esempio, se ha in mano il 2 e l'8, la differenza è chiaramente 6. Ma anche se avesse in mano il 2 e il 9 la differenza sarebbe ancora 6 perché procedendo ciclicamente dal 9 in su ci vorrebbero solo sei gradini per ritornare al 2 (10, 11, 12, 13, 1, e infine 2). Basandosi su questo ragionamento Anna darà a Carlo una delle due carte in modo tale che Carlo dovrà aggiungere al suo valore non più di 6 per ottenere la carta di Anna. Per esempio, se Anna avesse in mano il 2 e il 9 di cuori, allora terrebbe in mano il 2 e darebbe a Carlo il 9, per via del ragionamento fatto poco sopra. Inoltre, Anna darà questo segnale a Carlo lasciando questa carta speciale in testa alle quattro (in cima al mazzetto, o dandogliela per prima). A prima vista, dunque, Carlo sa già di che seme è la carta che Anna ha in mano. Il problema per Carlo adesso è di stabilire che cifra (fra 1 e 6) aggiungere alla carta «segnale» per ottenere il valore della carta di Anna. La scelta essendo fra i sei valori fra 1 e 6, il segnale successivo sarà contenuto nelle tre altre carte. Ma questo non è un problema difficile: possiamo pensare al mazzo originale di 52 carte ordinato alfabeticamente, per esempio prima tutti i cuori, poi i quadri, poi i fiori e poi i picche. Ebbene, tenendo conto di questo ordine di riferimento, le tre altre carte che Anna darà a Carlo si possono permutare in sei modi diversi, e quindi Anna e Carlo si possono accordare su come associare a ciascuna permutazione (123, 132, 213, eccetera) una corrispondente cifra fra l'1 e il 6: a questo punto Carlo saprà cosa fare. Il tutto suona forse complicato la prima volta, ma se ci si pensa un po' sono sicuro che presto ci si abitua all'idea e il trucco richiederà solo un minimo di allenamento.

Nel resto di questo articolo descriverò un metodo ancora più semplice, anche se astratto, che ci permetterà di apprezzare meglio la struttura matematica dietro questi giochi, e questa astrazione ci farà estendere la validità di trucchi simili anche a varianti che includono mazzi di carte di dimensioni maggiori e un numero diverso di carte richieste dal pubblico, e poi passate a Carlo.

Chiameremo un mazzo contenente N carte differenti un N-mazzo, e penseremo a queste carte come se fossero numerate individualmente dall'1 all'N. Se poi fissiamo due interi positivi k e n tali che $1 \leq n + k \leq N$, studieremo il seguente «trucco» generalizzato:

Il trucco (N; n + k; n)

Anna chiede al pubblico di scegliere n+k carte a caso da un N-mazzo. Raccoglie quindi queste n+k carte, e ne sceglie n da passare (una a una o in un singolo mazzetto, non importa) al suo assistente Carlo. Osservando bene queste n carte, Carlo sarà in grado di indovinare esattamente quali sone le k carte che Anna si è tenuta in mano.

Diremo che il trucco (N; n+k; n) funziona se Anna e Carlo si possono accordare su un sistema che permetterebbe a Carlo di indovinare sempre, per ogni possibile scelta di carte fatta dal pubblico (dovrebbe essere chiaro che per varie scelte di N, k e n il trucco risulta impossibile, e quindi i nostri sforzi si concentreranno sulla determinazione dei valori di N, k, e n che renderebbero il trucco funzionale. Formulando il problema in questo contesto più astratto la nostra attenzione si sposta sui rapporti numerici fra la dimensione del mazzo N e le carte scelte. Inutile dire che il trucco tradizionale descritto all'inizio ora lo chiameremo il trucco (52; 4; 1). Ho deciso di studiare i trucchi generalizzati perché la dimostrazione del teorema che segue sarebbe altrettanto complicata (o altrettanto semplice, dipende dai punti di vista!) che nel caso speciale N = 52; n = 4; k = 1.

Teorema. Siano k, n, N interi positivi tali che $1 \leq n + k \leq N$. Allora il trucco (N; n + k; n) funziona se la condizione

$$\frac{(N-n)!}{(N-n-k)!} \leq (n+k)!$$

risulta soddisfatta. Se invece la dimensione del mazzo N è troppo grande per soddisfare questa condizione (tenendo n e k costanti) allora il trucco (N; n + k; n) non funzionerà più.

Per esempio, il teorema comprende il caso triviale di un mazzo piccolissimo con solo tre carte (il trucco (3; 2; 1)). Il pubblico ne sceglie due, Anna sceglie quale delle due dare a Carlo, e quindi Carlo indovina: siccome Anna riceve le carte f1; 2g, oppure f2; 3g, o altrimenti f3; 1g, si accorderà con Carlo che la sola cosa che lui deve fare è di aggiungere 1 alla sua carta (dove di nuovo si pensa all'ordine ciclico, e 3 + 1 sarebbe interpretato come 1). Per esempio, se Anna avesse in mano le carte f1; 2g, allora darebbe l'1 a Carlo, il quale quindi indovinerebbe che Anna ha in mano il 2. Facendo un po' di esperimenti, d'altro canto, dovrebbe essere facile convicervi che se invece si partisse da un mazzo di quattro carte (invece di tre) allora non ci sarebbe speranza che il trucco (4; 2; 1) funzioni.

È venuto il momento di dimostrare il teorema.

Dimostrazione

L'idea essenziale è che quello che Carlo riceve da Anna non è semplicemente un insieme di n carte, ma in effetti un segnale parte di un codice che va stabilito fra i due in anticipo. I mazzetti di carte che Carlo riceve sono infatti **ordinati** (ovvero, Anna gli passa le carte in un ordine che è significativo). Se prendiamo le n carte che Anna ha scelto di dare a Carlo, Carlo in effetti riceve una delle possibili P(N; n) **permutazioni** di n carte prese dal mazzo completo di N carte: quindi, Carlo deve essere in grado di decifrare fino a P(N; n) segnali se vuole capire ogni intenzione di Anna. Quanto ad Anna, l'informazione che lei ha in mano (dopo la scelta del pubblico) è semplicemente una delle C(N; n+k) **combinazioni** possibili di 5n+k carte prese dal mazzo di N carte (ricordiamoci che quando si contano le combinazioni l'ordine non è importante). Mettiamoci dunque d'accordo sulla notazione: C(N; n+k) sta per l'insieme di tutte le combinazioni possibili di n+k elementi presi da un insieme di N elementi. Il loro numero è dato dal coefficiente binomiale

$$C(N, n+k) = \binom{N}{n+k}$$

Dall'altra parte, P(N; n) denoterà l'insieme di tutte le permutazioni di n elementi presi da un insieme di N elementi, e il loro numero è dato da

$$P(N, n) = \frac{N!}{(N-n)!}$$

Adottando finalmente un linguaggio matematico (e non più magico), abbiamo stabilito che una condizione sufficiente perché il trucco funzioni è che Anna e Carlo si possano mettere d'accordo su una particolare «funzione codice» iniettiva

$$f : C(N, n+k) \longrightarrow P(N, n)$$

che abbia la seguente proprietà: se σ è una qualunque (n+k)-combinazione in C(N; n+k), allora f(σ) deve essere una permutazione di n delle n+ k carte comprese in σ.

Il trucco quindi funzionerebbe in questo modo: Anna riceve la combinazione σ dal pubblico. Quindi passa la permutazione f(σ) a Carlo (come un codice), e Carlo infine decodifica il segnale (usando la funzione inversa f^{-1}) per ottenere σ in tutta sicurezza: in questo modo saprà esattamente quali sono le k carte che Anna ha in mano.

Questo è il momento di chiedere aiuto a una sorgente forse inattesa, la Teoria dei Grafi. Avremo bisogno solo di nozioni assolutamente basilari, quali si possono trovare nelle prime pagine della maggioranza dei test introduttivi (vedi per esempio [2, 6]). Ricordiamoci innanzitutto che un grafo (semplice e non orientato) è un oggetto matematico molto schietto: consiste di un insieme V di **vertici** (punti) e un insieme E di **spigoli** che collegano certe paia di vertici, e fra due vertici ci può essere al massimo uno spigolo.

Un grafo **bipartito** è un tipo particolare di grafo G = G(V1;V2;E) nel quale si possono identificare due gruppi disgiunti di vertici V1 e V2 (tali che V1$\cup$ V2 = V) con la proprietà che ogni spigolo in E collega un vertice in V1 a un vertice in V2:

in altre parole, le uniche connessioni nel grafo bipartito sono come «ponti» fra V_1 e V_2, ma mai internamente a V_1 e a V_2. Dato un grafo bipartito (come sopra), un matching completo per V_1 («matching» vuol dire «accoppiamento» in inglese, ma fra i matematici italiani molti preferiscono usare il termine inglese) è un sottoinsieme degli spigoli E che consiste in esattamente uno spigolo che parte da ogni vertice di V_1 e tale che due di questi spigoli terminano sempre in vertici diversi di V_2: ovviamente dipende dal grafo in questione se un tale matching esiste o no. Un teorema fondamentale a proposito di questi matchings fu dimostrato da P. Hall nel 1935 e per ragioni intuitivamente chiare il risultato è diventato famoso anche sotto il nome di «teorema dei matrimoni» («marriage theorem», in inglese). Ecco la formulazione del Teorema di Hall in tutta la sua gloria (vedi [2, Th. 2.1.2],[6, Th. 25A] per varie dimostrazioni):

In un grafo semplice e bi- partito $G(V_1; V_2;E)$, un matching completo per V_1 esiste se e solo se per ogni sottoinsieme $S \subseteq V_1$ abbiamo che

$$|S| \leq |N(S)| \qquad (2)$$

dove |S| è la cardinalità di S, e |N(S)| è la cardinalità dell'insieme N(S) di tutti i vertici adiacenti ai vertici in S (siccome $S \subseteq V_1$, segue che $N(S) \subseteq V_2$). È ovvio che la parte più interessante del Teorema di Hall è il «se», e questa è proprio la parte di cui avremo bisogno. In vista dell'applicazione del Teorema di Hall al nostro gioco di carte, definiamo un grafo bipartito $G=G(V_1;V_2;E)$ predendo $V_1=C(N;n+k)$, $V_2=P(N;n)$, e stabilendo che $\sigma \in C(N;n+k)$ è collegato con uno spigolo a $\tau \in P(N; n)$ esattamente se τ è una permutazione di n delle carte che appaiono nella combinazione σ. Con queste definizioni possiamo allora stabilire delle cifre esatte per il cosiddetto grado di ogni vertice del grafo G (il grado di un vertice è semplicemente il numero di spigoli che finiscono in quel vertice). In effetti, è un esercizio facile di conteggio verificare che ogni vertice in V_1 è di grado C(n+k, k) n!, mentre ogni vertice in V_2 è di grado C(N–n, k).

Ora, scegliamo un sottoinsieme qualunque $S \subseteq V_1$. Il calcolo fatto pocanzi mostra che il numero totale degli spigoli che partono da S è uguale a |S| C(n+k, k) n!

Se invece pensiamo a N(S) (= tutti i vertici adiacenti a un qualche vertice in S), un calcolo simile mostra che ci sono |N(S)| C(N–n, k) spigoli diversi che finiscono in N(S). A questo punto, siccome per definizione di N(S) ogni spigolo che parte da S deve finire in N(S), ne segue che |S| C(n+k, k) n! ≤ |N(S)| C(N–n, k) ovvero,

$$|S| \leq |N(S)| \frac{(N-n)!}{(N-n-k)!(n+k)!} \qquad (3)$$

Se ora ci ricordiamo della condizione (1), possiamo verificare che ci assicura che (3) in ogni caso implica (2), e grazie al teorema di Hall abbiamo dunque la garanzia dell'esistenza di un matching completo per V1. Inoltre, la funzione f di cui abbiamo bisogno per il trucco (N;n+k; n) può essere completamente definita da questo matching completo. Nella direzione opposta, se assumiamo che il trucco (N; n+k; n) funziona, allora P(N; n) non può essere strettamente inferiore a C(N;n+k), altrimenti Carlo non potrebbe ricevere da Anna un numero di segnali (ovvero, di permutazioni) sufficiente per corrispondere a tutte le possibili combinazioni che Anna può avere in mano: esisterebbero quindi almeno due combinazioni differenti dalle quali Anna finirebbe con l'estrarre le stesse carte da dare a Carlo, e Carlo non avrebbe gli estremi per decidere e dovrebbe davvero tirare a indovinare. È un calcolo elementare verificare che la disuguaglianza C(N, n+k) ≤ P(N, n) è equivalente alla condizione (1), e quindi il nostro teorema è dimostrato. Q.E.D.

Considerando il caso particolare k = 1 otteniamo il seguente corrollario (già considerato da altri, per esempio in [1]).

Corollario

Siano n, N interi positivi tali che 1≤ n+1≤N. Allora il trucco (N; n+1; n) funziona se la condizione

$$N \leq (n+1)! + n =: M_n$$

è *soddisfatta. Se invece* $N > M_n$, *allora il trucco* (*N; n*+1*; n*) *non funziona.*

È a questo punto che possiamo osservare che $M_4 = 124$: se vi ricordate, all'inizio vi era stato promesso che Anna potrebbe eseguire lo stesso trucco classico (il pubblico sceglie cinque carte, e lei ne passa quattro a Carlo) partendo da un «supermazzo» di 124 carte. Il fatto è che Anna potrebbe *in teoria* stupire il pubblico ancora di più: per esempio, facendo scegliere a caso 10 carte da un mazzo di **un milione** di carte diverse. Anna ne passerebbe nove a Carlo, e Carlo indovinerebbe sempre la decima carta che Anna ha in mano, a dispetto dell'apparente impossibilità di indovinare una carta fra quasi un milione di possibilità. Dico *in teoria*, perché certamente vi siete accorti del fatto che perché questo ultimo trucco funzioni Anna e Carlo dovrebbero accordarsi su un codice specifico che assegni a ogni combinazione di dieci carte fra un milione una permutazione di nove carte, e un tale codice avrebbe dimensioni smisurate, tali da richiedere probabilmente che i due «maghi» si portino un computer in testa. Ci sono margini per scelte ingegnose, però: stando a quanto visto sopra il trucco (124*;* 5*;* 4) richiede un codice fatto di 124 · 123 · 122 · 121 accoppiamenti (il che significa più di 225 milioni!): eppure in questo caso sono stati trovati 9 degli algoritmi che permettono un'esecuzione ragionevole del trucco (vedi [1]). Per concludere, vediamo infine che cosa il nostro teorema prevede per trucchi con valori di k≥2 nel caso classico di un mazzo standard di N = 52 carte. Lavorando con la condizione (1) e facendo un po' di calcoli, per esempio scopriremmo che il trucco (52*;* 7*;* 5) funziona. In parole povere, il seguente trucco è perfettamente possibile:

Anna chiede al pubblico di scegliere sette carte a caso da un mazzo standard di 52 carte. Lei raccoglie quindi le sette carte, e fra queste ne sceglie cinque da passare a Carlo (una a una o in un mazzetto, non importa). Guardando queste cinque carte, Carlo sarà sempre in grado di prevedere quali siano le due carte che Anna si è tenuta in mano.

Può apparire sorprendente che ricevendo solo una carta in più Carlo sia in grado di indovinare due carte invece di una, vero? Similmente, la condizione (1) mostra che il trucco (52*;* 9*;* 6) pure funziona: ovvero, scegliendo saggiamente sei carte fra nove ricevute dal pubblico, Anna può permettere a Carlo di indovinare quali siano le tre carte che lei ha conservato in mano. È di fronte a esempi di questo tipo che ci rendiamo conto dell'utilità di teoremi «astratti» quali il Teorema di Hall anche se a prima vista appaiono remoti, poco intuitivi e con chi sa quali applicazioni.

Nota per chi ama i calcoli

La condizione (1) nel caso $k = 2$ si semplifica in una disuguaglianza quadratica per N:

$$N^2 - (2\,n + 1)\,N + (n + 1)\,n - (n + 2)! \leq 0$$

la quale è a sua volta equivalente a

$$N \leq n + \frac{1}{2} + \sqrt{(n + 2)! + \frac{1}{4}}$$

Nel caso $n = 5$ ciò significa che $N \leq 76$, il che implica che il trucco (76; 7; 5) funziona (ossia, con 24 carte in più rispetto a un mazzo tradizionale).

Biografia

[1] Berlekamp E., Buhler J. (2001). Problem Corner, *Emissary*, Mathematical Sciences Research Institute (Berkeley, California), Gennaio 2001.
[2] Diestel R. (1997). *Graph Theory*, Springer-Verlag.
[3] Fischer H. and Jones K. (2002). Comunicazione privata.
[4] Gardner M. (1956). *Mathematics, Magic and Mystery*, Dover.
[5] Gardner M. (1991), *The Unxpected Hanging and Other Mathematical Diversions*, University of Chicago Press (edizione originale presso Simon & Schuster, 1969).
[6] Wilson R. J. (1985), *Introduction to Graph Theory*, 3rd edition, Longman.

3. Magie al quadrato

Ennio Peres

Come è noto, un *quadrato magico* è costituito da un particolare insieme numerico, disposto nelle caselle di uno schema quadrato, in maniera tale che la somma dei numeri appartenenti a una stessa riga, colonna o diagonale sia sempre uguale a un determinato valore (detto *costante magica*).

L'arte di confezionare questo genere di alchimie matematiche affonda, sicuramente, le proprie radici in tempi assai remoti. Nelle celebri *Ricreazioni* dell'Ozanam (pubblicate nel 1741), si può leggere che già gli egizi conoscevano i quadrati magici e li veneravano come oggetti sacri. Non esiste, però, alcuna prova a supporto di tale affermazione; è invece molto più probabile che essi abbiano avuto origine nei paesi dell'Estremo Oriente, in Cina in particolare. Una popolare leggenda cinese, infatti, narra che, mentre era in meditazione sul Fiume Giallo, l'imperatore e filosofo Yu (vissuto intorno al 2200 a.C.) vide materializzarsi d'improvviso una tartaruga sul cui dorso erano incisi i numeri dall'1 al 9, disposti a forma di quadrato magico, di dimensioni 3x3 e di costante 15 (figura 1).

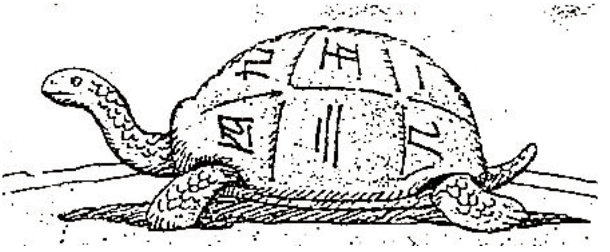


Figura 1

Tali numeri erano scritti, ovviamente, in base a un'arcaica notazione cinese; qui di seguito è riportata la loro trasposizione in cifre arabe.

4	**9**	**2**
3	**5**	**7**
8	**1**	**6**

Figura 2

Come si può verificare:
4 + 9 + 2 = 15;
3 + 5 + 7 = 15;
8 + 1 + 6 = 15;
4 + 3 + 8 = 15;
9 + 5 + 1 = 15;
2 + 7 + 6 = 15;
4 + 5 + 6 = 15;
2 + 5 + 8 = 15.

Secondo un'antica credenza cinese, questa figura, detta *Lu Shu*, riunisce in sé i principi che sono alla base della vita e del cosmo. I numeri pari corrispondono alla natura femminile dello Yin, mentre i dispari a quella maschile dello Yang. Il numero 5, al centro, rappresenta la Terra, mentre gli altri otto numeri, a coppie di due, simboleggiano i quattro elementi principali: il 4 ed il 9 i metalli, il 2 ed il 7 il fuoco, l'1 e il 6 l'acqua, il 3 e l'8 il legno. Il *Lu Shu* fu a lungo usato come amuleto, e sembra che tale tradizione sopravviva ancora oggi in alcune regioni dell'India. I Magi di Persia sostenevano di poter curare delle malattie applicandolo sulla parte malata, d'altra parte ancora nel XVI secolo d.C. si pensava che potesse proteggere dalla peste, se inciso su una lastrina d'argento.

La costruzione di quadrati magici di grandi dimensioni ha costituito nei secoli il passatempo preferito di molti scienziati e artisti. Una menzione di grande riguardo spetta all'artista italiano Adriano Graziotti che, nel 1981, senza servirsi di strumenti elettronici, ha realizzato un'opera pittorica, raffigurante un quadrato magico di dimensioni 64x64 (e di costante 131.104). Se le credenze sulle proprietà taumaturgiche dei quadrati magici avessero un minimo di verità, quello di Graziotti dovrebbe rendere praticamente immortali...

La scienza dei quadrati magici si è sensibilmente evoluta, nel corso del tempo. Già all'inizio del XVI secolo, il medico e filosofo tedesco Heinrich Cornelius Agrippa di Nettesheim, riuscì a spingere l'elaborazione di queste particolari strutture, fino alle dimensioni di 9x9 numeri.

Siccome non è possibile costruire, in alcun modo, un quadrato magico di tipo 2x2 (provare per credere...), questo genere di figura imperfetta, venne adottato come simbolo del peccato originale.

È curioso notare che, considerando tale conformazione come un frutto del Male, per coerenza si sarebbe dovuto attribuire a proprietà celestiali la facoltà di comporne altre, dalle caratteristiche particolarmente sorprendenti. Invece, ad esempio, sono stati denominati *diabolici* (e non *divini*...) quei quadrati magici che consentono di ottenere lo stesso valore, non solo per righe colonne e diagonali, ma anche sommando altri gruppi di 4 numeri, disposti in configurazioni rilevanti.

Nell'esempio riportato nella figura 3, in particolare, la costante 34 può ottenersi, oltre che nei consueti modi, anche in altri 76, di cui 70 suddivisibili a coppie simmetriche.

15	**10**	**3**	**6**
4	**5**	**16**	**9**
14	**11**	**2**	**7**
1	**8**	**13**	**12**

Figura 3

Gli schemini riportati in figura 3 (tratti da *Matematica dilettevole e curiosa* di Italo Ghersi e rielaborati da Susanna Serafini) evidenziano tutte queste possibilità. Ogni insieme di quattro numeri, la cui somma è uguale a 34, è indicato dalla posizione dei vertici di ciascuno dei piccoli quadrilateri raffigurati. Nel primo schemino in alto a sinistra, ad esempio, sono riportati i quattro quadrilateri corrispondenti alle somme: 15+10+4+5=34; 3+6+16+9=34; 14+11+1+8=34; 2+7+13+12=34; in quelli successivi sono riportati altri 66 quadrilateri, raggruppati a due a due, e 6 non accoppiabili (4+66+6 = 76). Configurazioni con tali caratteristiche non sono molto rare, come si potrebbe pensare. Sono stati individuati, infatti, ben 48 quadrati magici diabolici di ordine 4 e se ne possono costruire molti altri di ordine maggiore.

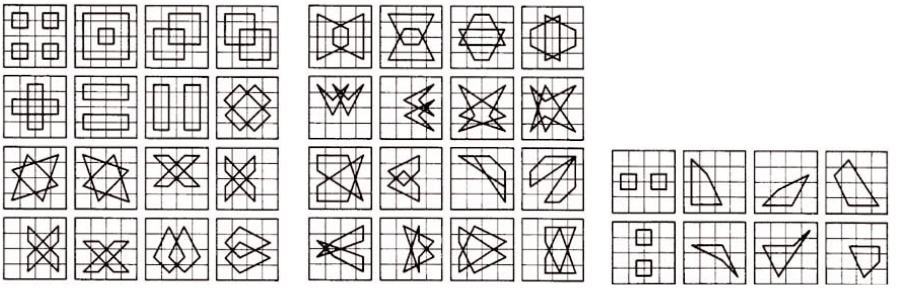


Figura 3

N.B.: I triangoli isosceli raffigurati nel 9° e nel 10° quadrato del primo gruppo a sinistra (procedendo da sinistra verso destra e dall'alto verso il basso) devono essere considerati dei quadrilateri degeneri, il cui quarto vertice coincide con il centro del lato più corto.

Tra i vari tipi di quadrati magici esistenti, sono molto interessanti quelli che riescono a generare, a loro volta, altri quadrati magici (che, per brevità, chiameremo *generatori*). In particolare, da quello riportato nella figura 4 (di costante 260) se ne può ottenere un altro (di costante 11.180), sostituendo ognuno dei suoi 64 numeri con il proprio quadrato (figura 5). Sembra incredibile, ma una tale *quadratura* del quadrato... quadra! Quadrati magici di questo tipo vengono detti, più specificamente, *satanici*. Esistono anche degli esemplari che sono al tempo stesso *satanici* e *diabolici* e che vengono denominati, chissà perché, *cabalistici*.

30	12	1	50	23	40	45	59
8	18	27	44	13	62	55	33
34	56	61	14	43	28	17	7
57	47	52	3	38	21	10	32
60	46	39	24	49	2	11	29
35	53	42	25	64	15	20	6
31	9	22	37	4	51	48	58
5	19	16	63	26	41	54	36

Figura 4

900	144	1	2500	529	1600	2025	3481
64	324	729	1936	169	3844	3025	1089
1156	3136	3721	196	1849	784	289	49
3249	2209	2704	9	1444	441	100	1024
3600	2116	1521	576	2401	4	121	841
1225	2809	1764	625	4096	225	400	36
961	81	484	1369	16	2601	2304	3364
25	361	256	3969	676	1681	2916	1296

Figura 5

N.B.: Diversamente dai quadrati magici esaminati in precedenza, quello di figura 5, non è composto da N numeri interi, costituenti una progressione continua da 1 a N. Non è necessario, però, che i quadrati magici rispettino un vincolo di questo genere; è importante solo che siano composti da un insieme di numeri interi, tutti diversi tra loro.

Si possono ideare dei quadrati magici generatori, anche ricorrendo a dei meccanismi non direttamente matematici. Ad esempio, si può sfruttare la caratteristica posseduta da alcuni numeri scritti in caratteri digitali (quelli utilizzati nei display a cristalli liquidi) di mutarsi in altri numeri, se vengono ribaltati. Questa proprietà è dovuta al fatto che le cifre digitali «0», «1», «2», «5» e «8», rimangono invariate, se vengono capovolte, mentre le cifre «6» e «9» (come avviene con quelle tradizionali) si trasformano, una nell'altra. Si può pensare, quindi, di costruire un quadrato magico, composto da numeri scritti in caratteri digitali, che rimane tale anche se viene ribaltato, come quello riportato qui di seguito

15	52	81	26	68
86	28	65	12	51
62	11	56	88	25
58	85	22	61	16
21	66	18	55	82

Figura 6

28	55	81	99	12
91	19	22	58	85
52	88	95	11	29
15	21	59	82	98
89	92	18	25	51

Figura 7

Come si può facilmente verificare, la costante magica del quadrato di figura 6 è uguale a 242, mentre quella relativa al quadrato di figura 7 (ottenuto ribaltando il precedente) è uguale a 275.

Qui di seguito è riportato un altro esempio notevole di quadrato magico generatore.

Apparentemente, tranne il fatto che la somma dei numeri disposti in ciascuna, riga, colonna e diagonale, fornisce sempre lo stesso valore (381), non sembra molto interessante.

87	**165**	**129**
169	**127**	**85**
125	**89**	**167**

Figura 8

Si provi, però, a sostituire ognuno dei nove numeri con il proprio nome italiano, come qui di seguito indicato.

Qttanta sette	**Cento sessanta cinque**	**Cento venti nove**
Cento sessanta nove	**Cento venti sette**	**Qttanta cinque**
Cento venti cinque	**Qttanta nove**	**Cento sessanta sette**

Figura 9

Si sostituisca ora, ciascuno di questi nomi con il numero di lettere da esso contenuto.

12	**19**	**14**
17	**15**	**13**
16	**11**	**18**

Figura 10

Ebbene, è magico anche il quadrato così ricavato (infatti: 12 + 19 + 14 = 45; 12 + 17 + 16 = 45; 12+ 15+ 18 = 45; e così via).

Questa particolare configurazione è stata ideata dall'esperto olandese di matematica ricreativa, Lee C.F. Sallow, che l'ha denominata *alphamagic square* (quadrato alfamagico). In uno studio, pubblicato nel 1986, Sallow presenta molti esempi di questo tipo, composti in varie lingue (moderne, antiche e arcaiche...), tutti realizzati grazie a un programma per computer, di sua ideazione, scritto in GW Basic.

Mentre, però, alcune lingue offrono un gran numero di possibilità diverse, quello sopra riportato è l'unico esempio ottenibile in italiano, a meno di banali derivazioni. Bisogna tener presente, infatti, che se si aggiunge un generico multiplo di mille, Nx1000, a ciascun numero della prima configurazione, si ricava un nuovo quadrato magico, con costante: 3N·1000+381; siccome i nomi dei numeri così generati, subiscono tutti, rispetto ai precedenti, lo stesso incremento di lettere (pari alla quantità di quelle componenti il nome di N·1000), anche la configurazione ottenibile con tali valori corrisponde a un quadrato magico. In definitiva, potendo N essere scelto a piacere, esistono infiniti quadrati alfamagici banalmente derivabili da quello di partenza.

A titolo di curiosità, qui di seguito è riportato un quadrato alfamagico di Sallow, composto in lingua latina (con in numeri rappresentati, per coerenza, in caratteri romani). Per agevolare una più comoda lettura, le figure 14 e 15 riportano la traduzione in cifre arabe dei numeri presenti, rispettivamente, nelle figure 11 e 13.

XCVII	CLXXV	CXXXIX
CLXXIX	CXXXVII	XCV
CXXXV	XCIX	CLXXVII

Figura 11

SEPTEM ET NONAGINTA	CENTUM SEPTUAGINTA QUINQUE	CENTUM TRIGINTA NOVEM
CENTUM SEPTUAGINTA NOVEM	CENTUM TRIGINTA SEPTEM	QUINQUE ET NONAGINTA
CENTUM TRIGUNTA QUINQUE	NOVEM ET NONAGINTA	CENTUM SEPTUAGINTA SEPTEM

Figura 12

XVII	XXIV	XIX
XXII	XX	XVIII
XXI	XVI	XXIII

Figura 13

97	175	139
179	137	95
135	99	177

Figura 14

17	24	19
22	20	18
21	16	23

Figura 15

Bibliografia

Agostini F.
Giochi logici e matematici, Arnoldo Mondadori: Milano, 1982.

Gardner M.
Enigmi e giochi matematici, vol II. Sansoni: Firenze, 1968.

Ghersi I.
Matematica dilettevole e curiosa. Hoepli: Milano (ristampa), 1967.

Peres E.
La quadratura dei quadrati, dalla rivista «*Linus»,* n. 450, settembre 2002. Baldini & Castoldi: Milano, 2002.

Peres E.
Magie al quadrato, dalla rivista «*Linus»,* n. 447, giugno 2002. Ibidem, 2002.

Peres E.
Quadrati divini, anzi diabolici, dalla rivista «*Linus»,* n. 449, agosto 2002. Ibidem, 2002.

Sallow L.C.F.
Alphamagic Squares*,* dalla rivista *«Abacus»,* vol. 4, n. 1, 1986. Springer-Verlag: New York, 1986.

IV. Matematica

1. Associazioni simbiotiche

Antonio Steiner, Martin J. Gander

Starting with the classical Darwinian systems introduced by Eigen, we present a new model with additional linear terms representing mutual benefits due to a symbiotic relationship between populations. We show that our new model permits the coexistence of multiple species for the case of two and three populations. We finally relate our model with a thought experiment to the creation of mankind.

Introduzione

Partiamo dai cosiddetti sistemi Darwiniani

$$\dot{x}_i = a_i\, x_i - \omega(x)\, x_i; \quad x_i^0 > 0, \quad \sum_{k=1}^{N} x_k = 1, \quad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

introdotti da Manfred Eigen [1] per descrivere la selezione che avviene fra N «popolazioni» x_i di acidi nucleici. Ognuna di esse è dotata di una crescita autonoma di tasso $a_i > 0$ ($a_i \neq a_j$ per $i \neq j$) e il sistema è controllato mediante una diluizione non specifica di tasso $\omega(x)$ da effettuarsi in ogni istante. La condizione ambientale indicata lo determina come

$$\omega(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k\, x_k$$

A lungo termine sopravvive soltanto la popolazione col maggior valore selettivo a_i. Anni or sono fu l'affascinante articolo [2] che segnò il nostro primo incontro con questa teoria.

Il passaggio da sistemi Darwiniani con $a_i > 0$ a sistemi simbiotici, dei quali tratta questo lavoro, avviene con l'introduzione di un «aiuto» fra talune popolazioni. Se, ad esempio le popolazioni x_k e x_l apportano aiuto a x_i (k, l, i distinti), avremo

$x_i = a_{ik}\, x_k + a_{il}\, x_l$

come schematizzato in figura 1. Raggruppiamo i coefficienti $a_{ik} \geq 0$ nella matrice degli intrecci $A = (a_{ik})$, ponendo $a_{ii} = a_i$; questo ci permette, con la notazione $x = (x_i)$, di scrivere un sistema simbiotico in forma vettoriale come

$$\dot{x}_i = A\,x - \omega(x)\,x; \quad x^0, \quad \sum_{k=1}^{N} x_k = 1$$

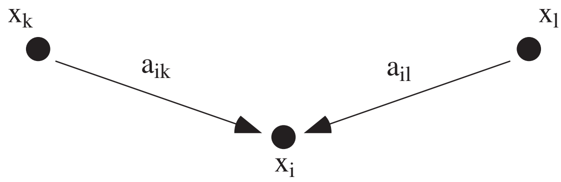


Figura 1 x_k e x_l danno aiuto a x_i con tassi a_{ik} e a_{il}

Ora può essere di vero interesse anche il caso in cui certe popolazioni non godano più di crescita autonoma: basta pensare a un virus che per riprodursi deve attaccare una cellula intromettendovi il proprio DNA.

La natura altresì, già a livello cellulare è ricca di associazioni simbiotiche, come ben descritto da Lewis Thomas nel suo libro [3].

I sistemi simbiotici descritti furono considerati per la prima volta in [4]. Essi meritano speciale attenzione perché, pur restando completamente nel campo delle equazioni differenziali lineari, presentano gi a qualità di solito attribuite unicamente a sistemi muniti di catalisi più raffinata, come i cicli di Eigen: ad esempio, sono capaci, in casi propizi, di respingere un parassita che li attacca, cioè una popolazione che prende ma non dà aiuto alcuno alle altre. Ciò sembra suggerire che il comportamento di un sistema a reticolo dipende non solo dalla speciale forma di aiuto o catalisi effettuata fra le sue diverse popolazioni, ma in gran parte anche dalla struttura degli intrecci, ossia dalla loro presenza e dalle loro forme.

Come applicazione presentiamo per concludere un modello matematico dell'evoluzione delle specie che, seppur molto rudimentale, conserva una traccia di realtà; ad ogni modo non contraddice quanto esposto dall'eminente biologo Ernst Mayr nel suo recente libro [5] (pagg. 285-322: *Wie sind die Menschen entstanden?*).

1. Sistemi Darwiniani con due popolazioni

Consideriamo il sistema

$$1)\quad \begin{array}{ll} \dot{x}_1 = a_1\, x_1 - \omega(x)\, x_1; & x_1^0 > 0 \\ \dot{x}_2 = a_2\, x_2 - \omega(x)\, x_2; & x_2^0 > 0 \end{array} \quad , \quad a_i > 0, \quad x_1 + x_2 = 1$$

Ecco come lo si risolve in modo del tutto naturale:

$$\omega = -\frac{\dot{x}_1}{x_1} + a_1 = -\frac{\dot{x}_2}{x_2} + a_2, \qquad \dot{\left(\ln\frac{x_2}{x_1}\right)} = a_2 - a_1$$

e dopo integrazione

$$2)\quad x_2 = \frac{x_2^0}{x_1^0}\, e^{(a_2 - a_1)\, t}\, x_1$$

Quindi da

$$x_1 + x_2 = x_1 \left(1 + \frac{x_2^0}{x_1^0} e^{(a_2 - a_1)\,t} \right) = 1$$

si ottengono le soluzioni

$$3)\quad x_1 = \frac{x_1^0\, e^{a_1 t}}{x_1^0\, e^{a_1 t} + x_2^0\, e^{a_2 t}}, \qquad x_2 = \frac{x_2^0\, e^{a_2 t}}{x_1^0\, e^{a_1 t} + x_2^0\, e^{a_2 t}}$$

e da esse il comportamento selettivo del nostro sistema Darwiniano (1).

2. Deduzione della trasformazione di B.L. Jones

Dalle (3) conseguono

$$4)\quad x_i = \xi_i f \quad \text{con} \quad \xi_i = x_i^0\, e^{a_i t}, \qquad f = \frac{1}{\sum_{k=1}^{2} \xi_k}$$

nonché

$$\sum_{k=1}^{2} x_k = 1$$

Quindi da

$$\dot{x}_i = \dot{\xi}_i\, f + \xi_i\, \dot{f} = a_i\, \xi_i\, f + \xi_i\, \dot{f} = a_i\, \xi_i\, f + \omega\, \xi_i\, f$$

risulta

$$\dot{f} = -f\,\omega$$

e combinato con

$$f(0) = \frac{1}{\sum_{k=1}^{2} x_k^0} = 1$$

$$f = e^{-\int_o^t \omega\, dr},$$

ed ecco dedotta l'utile trasformazione (4,4') dovuta a B.L. Jones [6], in genere usata per trovare le (3).

3. Sistemi simbiotici con due popolazioni

Per risolvere il sistema

$$5)\quad \begin{array}{l} \dot{x}_1 = a_1\, x_1 + a_{12}\, x_2 - \omega(x)\, x_1; \quad x_1^0 > 0 \\ \dot{x}_2 = a_{21}\, x_1 + a_2\, x_2 - \omega(x)\, x_2; \quad x_2^0 > 0 \end{array} \quad , \quad a_i > 0, \quad x_1 + x_2 = 1$$

si applichi la trasformazione di B.L. Jones

$$x_i = \xi_i\, f, \quad f = e^{-\int_0^t \omega\, dr} = \frac{1}{\xi_1 + \xi_2}$$

e si perviene alle equazioni differenziali lineari

$$\begin{array}{l} \dot{\xi}_1 = a_1\, \xi_1 + a_{12}\, \xi_2\, ; \quad x_1^0 \\ \dot{\xi}_2 = a_{21}\, \xi_1 + a_2\, \xi_2\, ; \quad x_2^0 \end{array}$$

Assumiamo ad esempio che
$a_1 \geq a_2 > 0, \quad a_{21}, \quad a_{12} > 0$

In questo caso di cooperazione fra le popolazioni x_1, x_2 con gli autovalori

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left[a_1 + a_2 + \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4\, a_{21}\, a_{12}} \right] > \omega_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[a_1 + a_2 - \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4\, a_{21}\, a_{12}} \right]$$

si trova

$$\xi_1 = C_1\, e^{\omega_1 t} + C_2\, e^{\omega_2 t}, \quad \xi_2 = \frac{\omega_1 - a_1}{a_{12}}\, C_1\, e^{\omega_1 t} + \frac{\omega_2 - a_1}{a_{12}}\, C_2\, e^{\omega_2 t}$$

e le soluzioni

$$6)\quad x_1 = \frac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_2} \xrightarrow[t \to \infty]{} \bar{x}_1 = \frac{1}{1 + \frac{\omega_1 - a_1}{a_{12}}} > 0,$$

$$x_2 = \frac{\xi_2}{\xi_1 + \xi_2} \xrightarrow[t \to \infty]{} \bar{x}_2 = \frac{\frac{\omega_1 - a_1}{a_{12}}}{1 + \frac{\omega_1 - a_1}{a_{12}}} > 0$$

Anche a lungo termine si avrà convivenza fra le due popolazioni x_1 e x_2 e in questo equilibrio stabile valgono

$$\bar{x}_1\left(a_1-\bar{\omega}\right)+a_{12}\,\bar{x}_2=0,\quad a_{21}\,\bar{x}_1+\bar{x}_2\left(a_2-\bar{\omega}\right)=0,$$

$$\bar{x}_2=\frac{\bar{\omega}-a_1}{a_{12}}\,\bar{x}_1=\frac{a_{21}}{\bar{\omega}-a_2}\,\bar{x}_1$$

dove $\bar{\omega}=\omega\,(\bar{x})$.

Il tasso di diluizione ω del sistema tende quindi verso uno degli autovalori, che non può essere ω_2, poiché ω_2-a_1 è negativo (il valore d'equilibrio $\bar{x}_2$ sarebbe di conseguenza negativo!). Abbiamo dunque (teorema del maggior autovalore)

7) $\bar{\omega}=\omega_1$

Il punto di equilibrio $G=(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ si ottiene facilmente come nella figura 2.

4. Un sistema simbiotico con tre popolazioni

Quale preparativo per un abbozzo dell'evoluzione delle specie annunciato nell'introduzione di questo lavoro, consideriamo il sistema raffigurato nella figura 3. Vi corrispondono le equazioni

$$8)\quad \begin{aligned}\dot{x}_1&=x_1+3\,x_3-\omega(x)\,x_1; & x_1^0>0\\ \dot{x}_2&=a_{21}\,x_1+2\,x_2-\omega(x)\,x_2; & x_2^0>0\\ \dot{x}_3&=3\,x_1+x_3-\omega(x)\,x_3; & x_3^0>0\end{aligned}\qquad \sum_{k=1}^{3}x_k=1$$

che si riducono mediante la trasformazione di B.L. Jones

$$x_i=\xi_i\,f,\quad f=e^{-\int_0^t\omega\,dr}=\frac{1}{\sum_{k=1}^{3}\xi_k}$$

al sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1&=\xi_1+3\,\xi_3 &;\quad x_1^0\\ \dot{\xi}_2&=a_{21}\,\xi_1+2\,\xi_2 &;\quad x_2^0\\ \dot{\xi}_3&=3\,\xi_1+\xi_3 &;\quad x_3^0\end{aligned}$$

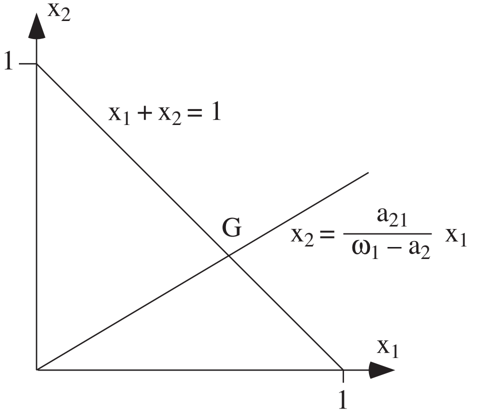
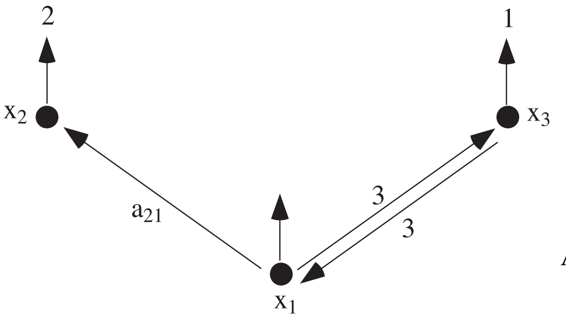


Figura 2 Equilibrio G di (5).



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ a_{21} & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 3 Il sistema cooperativo (x_1, x_3) è attaccato dal parassita (x_2).

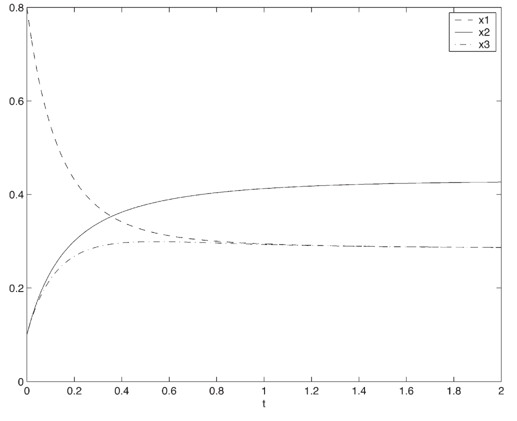


Figura 4 Il caso $a_{21} = 3$, $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (0.8, 0.1, 0.1)$ i cui autovalori $\omega_1 = -2$, $\omega_2 = 2$, $\omega_3 = 4$ indipendenti da a_{21}, ci forniscono le funzioni

$$\begin{aligned}
&\xi_1 = C_1\, e^{-2t} + C_3\, e^{4t}\\
9)\quad &\xi_2 = -\frac{a_{21}}{4} C_1\, e^{-2t} + C_2\, e^{2t} + \frac{a_{21}}{2} C_3\, e^{4t}\\
&\xi_3 = -C_1\, e^{-2t} + C_3\, e^{4t}
\end{aligned}$$

$$C_1 = \frac{1}{2}\left(x_1^0 - x_3^0\right), \quad C_2 = -\frac{a_{21}}{8}\left(x_1^0 + 3\,x_3^0\right), \quad C_3 = \frac{1}{2}\left(x_1^0 + x_3^0\right)$$

e con esse le soluzioni

$$10)\quad x_i = \frac{\xi_i}{\sum_{k=1}^{3} \xi_k}$$

del nostro sistema (8). Consideriamo due casi $a_{21}=3$ e $a_{21}=0$.
Nel primo il sistema porta a convivenza

$$\left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}\right)$$

mentre nel secondo caso il parassita viene eliminato

$$\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

Nelle figure 4 e 5 è tracciata l'evoluzione del sistema ad esempio per i valori iniziali $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (0.8, 0.1, 0.1)$ nei due casi $a_{21}=3$ e $a_{21}=0$.

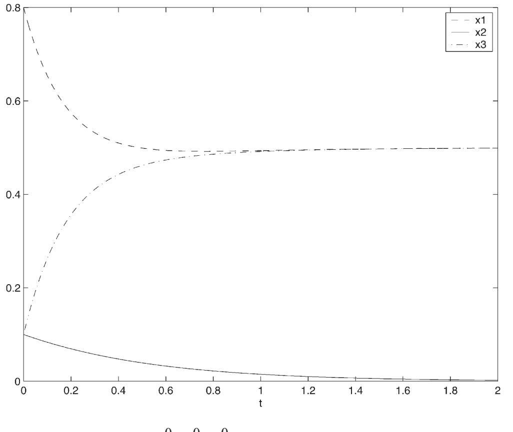


Figura 5 Il caso $a_{21}=0$, $(x_1^0, x_2^0, x_3^0)=(0.8, 0.1, 0.1)$.

5. L'uomo deriva dalla scimmia

La seguente metafora ci aiuta a capire quanto è accaduto tre milioni di anni fa quando dalla specie delle scimmie si è diramata la specie che ha portato a noi: Un «individuo» consiste di tre attributi

x_1: gioia di vivere
x_2: destrezza sugli alberi
x_3: intelligenza

più o meno pronunciati, ma tali che, misurati in una scala comune valga $x_1+x_2+x_3=1$.

Essi formano un sistema simbiotico, ad esempio quello trattato a fondo nella sezione 4 e raffigurato in figura 6. I tre tassi di aiuto a_{21}, a_{31}, a_{13}, i tre «geni» della specie considerata (in verità sui 30'000!), insieme ai tassi di crescita autonoma degli x_i, determinano il loro sviluppo in un individuo della specie dal momento della sua nascita, quando i valori iniziali (x_1^0, x_2^0, x_3^0) sono ancora sparsi intorno a grandi valori di x_1. Inizialmente vi era una specie (scimmie) con $a_{21}=a_{31}=a_{13}=3$; $a_1=1$; $a_2=2$; $a_3=1$ che si sviluppa secondo le equazioni (8). All'apparire di una «mutazione» che ha sostituito il gene $a_{21}=3$ con $a_{21}=0$, ha avuto inizio una nuova specie (uomo). Gli individui meno abili sugli alberi (x_2 piccolo), ma in compenso provvisti di maggiore intelligenza (x_3 grande) spinti dalla fame scesero nella savana avventurandosi verso nuove conquiste.

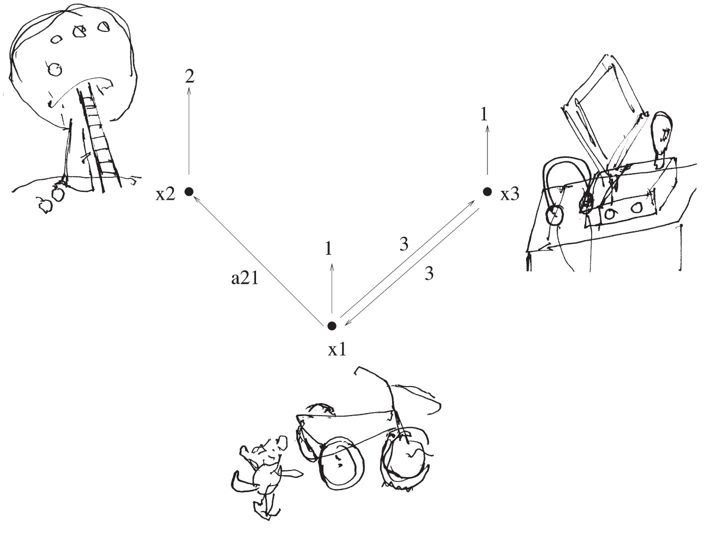


Figura 6 Scimmia o uomo: $a_{21}=3$ o $a_{21}=0$.

Bibliografia

[1] Eigen M., Schuster P. (1979). *The Hypercycle - A Principle of Natural Self Organization*, Springer Verlag: Berlin Heidelberg New York.

[2] Schuster P. (1977). Selbstorganisationsprozesse in der Biologie und ihre Beziehung zum Ursprung des Lebens. *MNU 30*, p. 324-335.

[3] Lewis T. (1976). *Das Leben überlebt, Geheimnis der Zellen*, Kiepenheuer & Witsch: Köln.

[4] Steiner A., Pini F., Gander M. J. (1999) Selezione e Convivenza in sistemi Darwiniani, *Il Volterriano Nr. 7*, Mendrisio.

[5] Mayr E. (2003). *Das ist Evolution*, C. Bertelsmann: München.

[6] Jones B.L. et al. (1976). On the Theory of Selection of Coupled Macromolecular Systems. *Bull. Math. Biol.*

2. Parenti di numeri figurati e una curiosa descrizione dei numeri primi

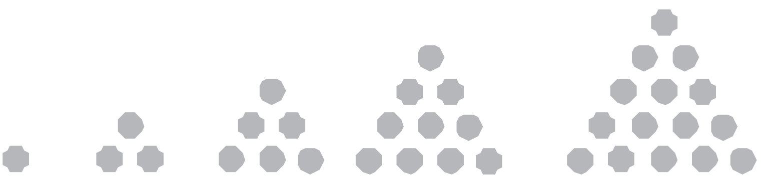
Remo Moresi

This is a brief essay about polygonal numbers from a theoretical point of view. This paper contains considerations, in part unpublished, about this particular kinds of numbers. Dedicated to the readers interested in number theory.

Introduzione

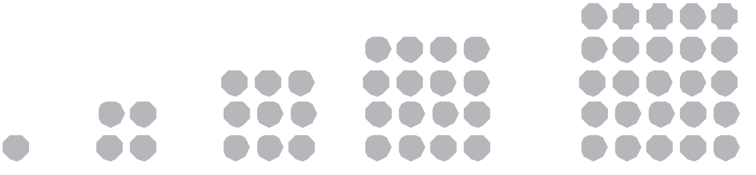
Come si sa, i numeri figurati[1] sono quei numeri naturali che si lasciano rappresentare in varie forme geometriche, fra cui la più conosciuta è quella poligonale, illustrata di seguito, a mo' di esempio:

$k = 1, \; (a_n) = 1 + n$



s_1 s_2 s_3 s_4 s_5

$k = 2, \; (a_n) = 1 + 2n$



s_1 s_2 s_3 s_4 s_5

1. Questi numeri hanno una storia lunghissima, che risale fino a Pitagora (circa –500). Fra le opere sopravvissute che vi dedicano spazio si possono citare quelle di Nicomaco di Gerasa (c. +100), *Introduzione all'aritmetica*; Teone di Smirne (c. +130), *Conoscenze matematiche utili alla lettura di Platone*; Diofanto di Alessandria (c. +250), *Sui numeri poligonali*, Iamblico, (c. 250-325), *In Nichomachi Arithmeticam Introductionem*. Si possono trovare estratti e commenti per esempio in Heat, *A History of Greek Mathematics*, *Vol. 2, pp. 213, 514-517*; Dickson, *History of the Theory of Numbers, Vol. 2, ch. 1*; Cohen & Drabkin, *A Source Book in Greek Science, pp. 7-9*.

Tali numeri, detti anche numeri poligonali, dal punto di vista aritmetico e algebrico sono precisamente le somme parziali di tutte le progressioni aritmetiche di primo termine 1 e ragione k. La relazione fra la ragione k e il numero *l* dei lati del poligono corrispondente è data da

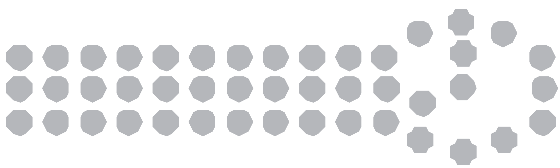
$k + 2 = l$

In particolare vediamo che nel caso della successione dei numeri naturali senza lo zero, vista come progressione aritmetica (k=1), la successione delle sue somme parziali si raffigura tramite triangoli. Similmente la successione dei numeri dispari (k=2) si raffigura tramite quadrati. Si hanno così le nozioni di numeri triangolari e numeri quadrati, rappresentati nella figura precedente.

Per k = 3,4…, si trovano analogamente le nozioni di numeri pentagonali, esagonali, ecc., la cui raffigurazione non è difficile da immaginare.

Possiamo ora pensare a una piccola variazione di queste nozioni, considerando, dal punto di vista aritmetico, le successioni delle somme parziali di progressioni aritmetiche qualsiasi. Ciò corrisponde, dal punto di vista geometrico, a configurazioni che si possono immaginare come «cinture», in cui la fibbia è data da una delle configurazioni precedenti. L'idea è illustrata nel seguente esempio, in cui è rappresentata la terza somma parziale della progressione aritmetica di primo termine 11 e ragione 4, cioè:

$$(c_n) = 11 + 4n$$



$$s_3 = 11 + 15 + 19 = 45$$

Una domanda naturale potrebbe essere la seguente:

Fissato k, quali numeri si ottengono con tali configurazioni?

Un po' di pratica con i numeri in questione suggerisce però una domanda più semplice:

Fissato k, quali numeri maggiori di 1 *non* si ottengono con queste configurazioni?

Consideriamo quindi l'insieme di tutte le somme parziali proprie (cioè aventi almeno due addendi) dei termini di una qualsiasi progressione aritmetica di ragione k e primo termine non nullo. Chiamando C(k) il complemento di tale insieme rispetto a N_2 (vedi notazioni più avanti), si scopre per esempio che

$C(1) = P_2 :=$ l'insieme di tutte le potenze proprie di due,

risultato questo tutt'altro che evidente e argomento del quiz numero 29 di Aldo Frapolli[2], che ha stimolato la presente generalizzazione. Nel prossimo passo si scopre che

$C(2) = \mathbf{P} :=$ l'insieme dei numeri primi,

2. Vedi BDM 46, pag. 87.

anche questo è un risultato simpatico e non evidente, seppur facile da ottenere una volta scelto il cammino di ricerca e forse meno nascosto del precedente. In ogni caso però questa uguaglianza fornisce una sorprendente caratterizzazione algebrica e geometrica dei numeri primi.

Quale sarà la risposta generale? È esattamente il corpo di questa piccola nota, la quale vuole descrivere C(k) per k qualsiasi.

Alcune notazioni e convenzioni

N_1:= insieme dei numeri naturali senza lo zero;
N_2:= insieme dei numeri naturali senza lo zero e l'uno;
D:= insieme dei numeri dispari;
$\mathbf{P}\, P_2 := \{uv \mid u\in \mathbf{P}\ \&\ v\in P_2\}$.

Rappresenteremo un numero naturale n nella forma $n=m\,2^r$, con m dispari. Siccome tale rappresentazione è unica, m e r si possono vedere come funzioni di n; per questo a volte scriveremo m(n) o r(n), secondo necessità. Nel caso in cui m(n) > 1, porremo inoltre

q(n): = il più piccolo divisore primo di m(n). Finalmente, per ogni divisore d di n,

d': = n/d (il divisore duale di d).

Il risultato principale

Se k è pari, diciamo k = 2 s, allora

$$C(k)=C(2\,s)=\{2\,i \mid i=1,\dots,s\}\cup\left\{n\in D \mid s\left[q(n)-1\right]\geq q(n)'\right\}$$

Altrimenti

$$C(k)=P_2\cup\left\{n\in N_1\setminus P_2 \mid m(n)\leq k\left(2^{r+1}-1\right)\ \&\ k\left[q(n)-1\right]\geq 2\,q(n)'\right\}$$

Dimostrazione

1) k pari:

Notiamo innanzi tutto che un numero n rappresentato da una delle configurazioni in questione è della forma (x+1)(y+xs) , dove x+1 è il numero di termini della somma parziale considerata, mentre y è il primo termine della progressione. Per ipotesi sappiamo che $x,y\in N_1$. Ponendo x=1 si vede che ciò include tutti i numeri pari maggiori di k. Possiamo quindi limitarci a considerare numeri dispari. Sia d:=x+1. Abbiamo $n\in N_1\setminus C(k)$ se e solo se esistono y e d in N_1, d divisore di n, tali che y=n/d–s(d–1). Ciò equivale a dire che $n\in(k)$ se e solo se per tutti i divisori d di n, l'equazione y=n/d–s(d–1) non è risolvibile in N_1.

Ciò significa che s(d-1)≥ d'per ogni divisore d di n, e dunque in particolare vale s[q(n)–1]≥q(n)'.

Siccome
$s[d-1] \geq s[q(n)-1] \geq q(n)' \geq d'$, anche il reciproco è vero.

2) k dispari:
In modo analogo al caso precedente si vede che i numeri rappresentati dalle configurazioni in questione sono della forma

$$(x+1)(y+k\,t) \quad (\text{risp.}\, t\,(2\,y+k\,x)) \quad \text{se } x=2\,t \;(\text{risp.}\, x=2\,t-1)$$

È dunque chiaro che tali numeri possiedono sempre un fattore proprio dispari. Ciò significa $P_2 \subset C(k)$. Considerando gli elementi in $C(k)/P_2$ e le equazioni risultanti per x e y si scopre che quest'ultime non sono risolvibili se e solo se ogni divisore d di m(n) soddisfa le seguenti disuguaglianze: $2\,n/(k\,d) + 1 \leq k\,(2\,n/d-1)$. Ciò è equivalente alla condizione enunciata.

Osservazioni

1) Dal risultato generale è facile dedurre come casi particolari le uguaglianze già segnalate su C(1) e C(2). È interessante notare che la condizione su $C(2) \cap D$ caratterizza alternativamente i numeri primi dispari. L'idea si può estendere a tutti i primi definendo per ogni n>1: p(n):= il più piccolo primo divisore di n.
Allora è chiaro che:
$n \text{ primo} \Leftrightarrow p(n) > n/p(n)$

2) Più in generale si vede che $C(k) \subset C(k+2)$ per ogni k. Inoltre gli elementi non primi di C(2 s) sono in gran parte prodotti di due primi.

3) Indagando un po' più a fondo si scopre che $C(5)/P_2 \subset PP_2$.
Per valori superiori di k (dispari) è interessante notare che non solo $C(k)/PP_2$ risulta finito, ma anche piuttosto sparuto. Se $n \in C(k)$ e m(n) non è primo, si deduce infatti che $r(n) \leq [\log_2 (k)] - 1$, da cui è facile trovare tutti gli elementi cercati. Per esempio in C(7) l'unica voce fuori dal coro è 18.

3. Sulla visualizzazione dei numeri razionali

Giulio Cesare Barozzi[1]

This paper focuses on the graphical representation of rational numbers. Both the set of all rational numbers and single rational numbers are considered. In particular we give a representation of the process which gives the decimal representation of a rational number as an alignment of recurring decimal digits.

In questa nota vogliano occuparci della rappresentazione geometrica dei numeri razionali. Ci occuperemo innanzitutto dei numeri razionali nel loro insieme e successivamente studieremo una possibile tecnica di visualizzazione dei singoli numeri razionali. I numeri razionali, cioè quelli dati come rapporti tra interi (dal latino *ratio* = rapporto) possono essere rappresentati come punti del piano cartesiano a coordinate entrambe intere.

Se $x = p/q$ è un numero razionale, dove possiamo supporre q intero positivo e p intero, esso può essere visualizzato mediante il punto di coordinate (q, p).

In definitiva l'insieme delle frazioni con denominatore positivo viene rappresentato mediante il prodotto cartesiano $\mathbf{N}^*$ x $\mathbf{Z}$. Questo insieme non è in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\mathbf{Q}$ dei razionali, in quanto ogni razionale è rappresentato da infinite frazioni a due a due equivalenti. I punti corrispondenti a tali frazioni giacciono su un semiretta uscente dall'origine. Il coefficiente angolare di tale retta è il numero razionale rappresentanto da tutte le frazioni che stiamo considerando. Per avere un insieme che è in corrispondenza biunivoca con $\mathbf{Q}$ dovremo dunque limitarci a considerare frazioni in cui il numeratore e il denominatore siano primi tra loro, cioè MCD$(p, q) = 1$.

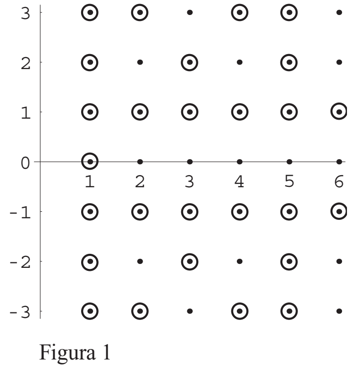


Figura 1

1. Università di Bologna.

Con riferimento alla Figura 1, si tratta delle frazioni che abbiamo evidenziato con un piccolo cerchio. Questi punti vengono «visti» da un osservatore collocato nell'origine del piano, nel senso che il segmento che congiunge l'origine con ciascuno di tali punti non contiene al proprio interno altri punti a coordinate entrambe intere.

Vediamo di esprimere, con riferimento alla rappresentazione che stiamo considerando, il fatto che **Q** è denso e non è completo. Il primo fatto equivale a dire che ogni angolo con vertice nell'origine e contenuto nel semipiano delle ascisse positive contiene infiniti punti a coordinate entrambe intere. La non completezza di **Q** si traduce nel fatto che esistono semirette uscenti dall'origine che non contengono alcun punto a coordinate entrambe intere. La Figura 2 (a sinistra) mostra la più semplice costruzione di una di tali semirette. Essa equivale al fatto che la radice di 2 non è razionale.

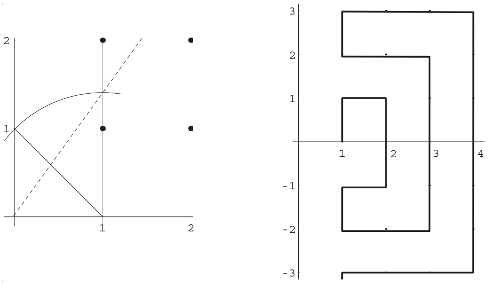


Figura 2

Un'ulteriore proprietà è la numerabilità dell'insieme **Q**. È evidente che l'insieme di tutte le frazioni (siano esse ridotte ai minimi termini oppure no) può essere organizzato in successione: possiamo immaginare (e in infiniti modi) un cammino che, partendo dal punto di coordinate (1, 0), tocchi una ed una sola volta tutti i punti a coordinate entrambe intere. La figura 2 (a destra) mostra una scelta possibile. Se eliminiamo i punti corrispondenti a frazioni non ridotte ai minimi termini, abbiamo ottenuto un'organizzazione in forma di successione di tutti i razionali.

Veniamo alla rappresentazione dei singoli numeri razionali. Sappiamo che ogni numero razionale può essere rappresentato, rispetto a una base prefissata, da un allineamento periodico di cifre. Fissiamo la nostra attenzione sulla base dieci e consideriamo, per semplicità, numeri razionali rappresentati da frazioni positive *proprie*, cioè p/q con $p < q$. Sappiamo d'altra parte che ogni frazione può scriversi come somma di un intero e di una frazione propria. Per indicare il quoziente intero e il resto della divisione tra due numeri naturali, siano a e b, utilizziamo i simboli a div b, a mod b ispirati al linguaggio Pascal.

Il nostro numero avrà una rappresentazione decimale del tipo

$p/q = 0.\ c_1\ c_2\ c_3 \ldots$

dove le singole cifre decimali sono determinate dai resti generati dalla divisione di p per q. Più precisamente, posto $r_0 = p$, avremo il processo iterativo

$r_k = 10\ r_{k\text{-}1} \bmod q$, $\qquad c_k = 10\ r_{k\text{-}1} \operatorname{div} q$, $\qquad$ (*) per $k = 1, 2, \ldots$

Come si vede l'intero processo è governato, per così dire, dal calcolo dei resti.

Ora, i resti che si possono produrre nelle successive divisioni per q sono tutti e soltanto i naturali minori di q. A questo proposito si possono presentare due eventualità.

1. Ad un certo passo si presenta il resto 0; allora tutti i successivi resti e le corrispondenti cifre decimali sono nulle. Il nostro numero ammette una rappresentazione decimale limitata. Ciò accade se e solo se p/q è (o è equivalente a) una frazionale decimale, cioè una frazione avente a denominatore una potenza di 10. In termini ancora equivalenti: ciò accade se il denominatore q non ammette fattori primi diversi da 2 e da 5.
2. Il denominatore q contiene fattori primi diversi da 2 o da 5 e dunque il resto 0 non si presenta. I resti ammissibili sono dunque i numeri 1, 2, …, q–1. Ciò implica che, dopo al più q-1 passi dello schema iterativo (*), un resto si ripresenta, dunque c'è un blocco di resti (ed un corrispondente blocco di cifre decimali) che si ripete ciclicamente. Il nostro numero ammette una rappresentazione decimale illimitata e periodica.

Possiamo dire che ogni numero razionale ammette una rappresentazione decimale periodica se conveniamo di considerare gli allineamenti decimali limitati come allineamenti periodici in cui si ripete la singola cifra 0.

Tornando al processo iterativo (*), è chiaro che si tratta di applicare la funzione

$f(x) = 10\,x \bmod q$,

ripetutamente a partire dal valore di innesco $r_0 = p$. Si osservi che la funzione f è discontinua per i valori di x che sono multipli di $q/10$; i valori che essa assume sono contenuti nell'intervallo $[0, q[$ e il suo grafico è costituito da segmenti di pendenza 10.

Possiamo dunque visualizzare il procedimento per il calcolo della rappresentazione decimale di p/q mediante un diagramma «a tela di ragno» come abitualmente si fa quando si vuole rappresentare uno schema iterativo del tipo (*). Per costruire un tale grafico è opportuno sapere in quale posizione si troverà il resto che per primo si ripete, cioè dobbiamo sapere quante cifre costituiscono il cosiddetto «antiperiodo» della rappresentazione decimale. Dovremo poi sapere quanto è lungo il « periodo» cioè il blocco di resti (e di corrispondenti cifre decimali) che si ripete ciclicamente.

Valgono in proposito due classici risultati.

1. Se $q = 2^a\, 3^b\, 5^c$ … è la scomposizione in fattori primi del denominatore q, allora la lunghezza dell'antiperiodo è uguale a $\max\{a, b\}$. Dunque se q non contiene i fattori 2 e 5 avremo una rappresentazione «periodica pura», altrimenti una rappresentazione «periodica mista».
2. Posto $q = 2^a\, 3^b\, q^*$, con MCD(q^*, 10) = 1, la lunghezza del periodo è uguale al più piccolo numero naturale n per cui $q^{*n} \bmod 10 = 1$.

Già sappiamo che la lunghezza del periodo non può superare q –1. Tuttavia essa non può assumere valori ad arbitrio. Un risultato forse meno noto, ma ugualmente importante, stabilisce che la lunghezza del periodo è necessariamente un divisore di j(q), dove j è la funzione di Eulero, che conta il numero dei numeri minori di q e primi rispetto ad esso.

A proposito di tale funzione, ricordiamone le principali proprietà.

1. Se q è primo, allora j(q) = q – 1.
2. Se q è primo, per ogni k naturale positivo si ha j(q^k) = $q(q^{k-1}$– 1).

3. La funzione j è moltiplicativa, cioè se *s* e *t* sono primi tra loro, allora j(*st*) = j(*s*) · j(*t*).
   Ad esempio j(7) = 6, j(9) = 6, j(15) = j(3) j(5) = 2 · 4 = 8.

Mostriamo mediante alcune figure i diagrammi a tela di ragno che illustrano la sequenza dei resti che si generano durante il calcolo dalle rappresentazione decimale di un numero razionale.

Cominciamo da frazioni che ammettono rappresentazioni periodiche pure: 1/7 e 3/7.

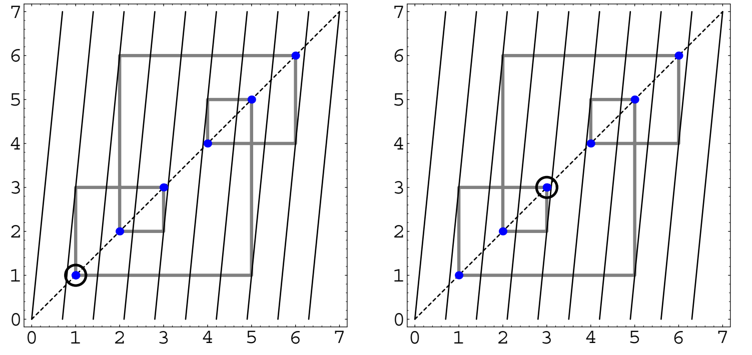


Figura 3

Abbiamo la sequenza di resti {1, 3, 2, 6, 4, 5} nel primo caso, la sequenza analoga {3, 2, 6, 4, 5, 1} nel secondo. Tale sequenza è ottenuta dalla precedente mediante una permutazione ciclica. Mediante un piccolo cerchio abbiamo evidenziato il primo resto che viene calcolato.

Altri due esempi: 1/13 e 2/13.

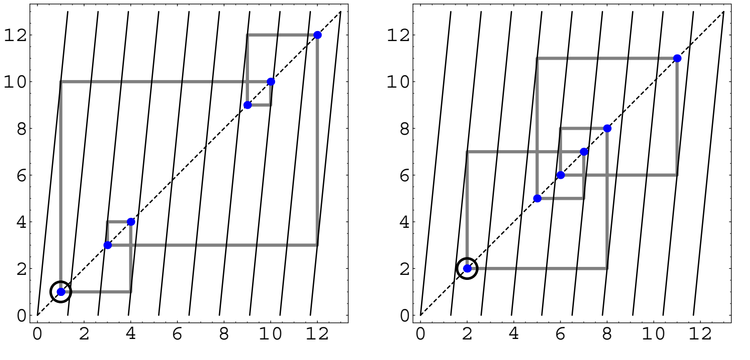


Figura 4

Questa volta abbiamo due allineamenti decimali con periodi di lunghezza 6, dove 6 è divisore di j(13) = 12. Osserviamo che, nel primo caso, la sequenza dei resti è {1, 10, 9, 12, 3, 4}, nel secondo è {2, 7, 5, 11, 6, 8}; nel loro complesso esse costituiscono una partizione dell'insieme del resti possibili, che sono i numeri da 1 a 12.

Passiamo a frazioni il cui denominatore contiene i fattori 2 oppure 5: 1/14 e 5/14.

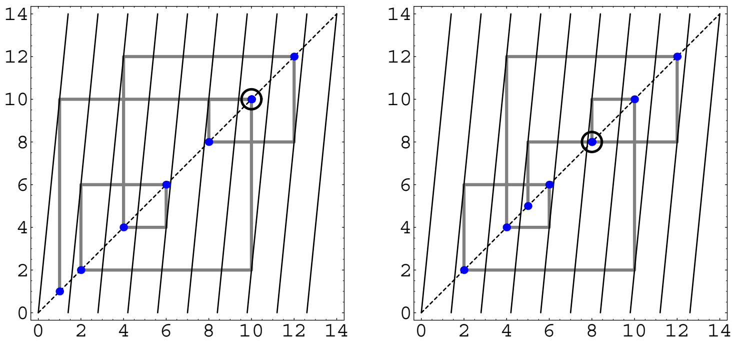


Figura 5

Questa volta il piccolo cerchio evidenzia il primo resto che si ripete; esso viene calcolato dopo aver calcolato le cifre dell'antiperiodo. La sequenza dei resti è nel primo caso {1; 10, 2, 6, 4, 12, 8}, nel secondo caso {5; 8 10, 2, 6, 4, 12}. Abbiamo separato con un punto e virgola i resti iniziali, corrispondenti alle cifre dell'antiperiodo, dagli altri resti che costituiscono il blocco che si ripete ciclicamente. Si osservi che l'antiperiodo ha lunghezza 1, il periodo lunghezza 6 dove j(14) = 6.

Per finire, due frazioni che danno luogo a rappresentazioni decimali limitate: la poligonale rappresentativa termina in corrispondenza del resto 0. Si tratta delle frazioni 3/20 e 1/8 a cui corrispondono le sequenze di resti {3, 10; 0} e {1, 2, 4; 0}.

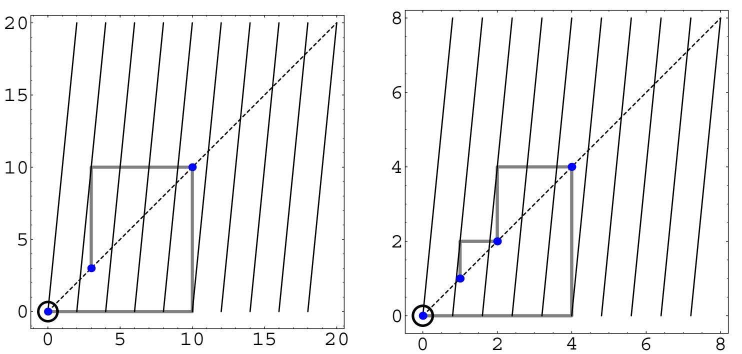


Figura 6

Quanto abbiamo detto a proposito della rappresentazione decimale si estende, con modifiche ovvie, alla rappresentazione rispetto ad una qualsivoglia base $b \geq 2$. In ogni caso la lunghezza del periodo della rappresentazione di p/q è un divisore di j(q). Suggeriamo al lettore di sperimentare con la base due. A titolo di esempio, il numero 1/5, che ammette la rappresentazione decimale limitata 0.2, genera la sequenza di resti 1, 2, 4, 3, a cui corrisponde la sequenza di cifre binarie 0, 0, 1,1 che si ripetono ciclicamente. Dunque la lunghezza del periodo è 4 = j(5).

Bibliografia

Barozzi G.C.
Primo Corso di Analisi Matematica. Zanichelli: Bologna, 1998.

Barozzi G.C.
Aritmetica. Un approccio computazionale. Zanichelli: Bologna, 1987.

Hardy G.H., Wright E.M.
An Introduction to the Theory of Numbers. Clarendon Press: Oxford, 1979.

4. Introduzione alla matematica discreta di Gian Carlo Rota

Mauro Cerasoli[1]

The 27 september 1999 a day to the memory of Gian Carlo Rota as taken place in Milan. Some of the contributions of this day have been published in the number 39 of this journal. In my paper "Il fascino discreto di Gian Carlo Rota" I described the human figure of the great mathematician and philosopher remembering some episodes. The aim of this paper is to explain some of the fundamental ideas of Gian Carlo Rota about discrete mathematics.

When the going gets rough,
we have recourse to a way of salvation
that is not available to ordinary mortals:
we have that Mighty Fortress that is our Mathematics.
This is what makes us mathematicians into very special people.
The danger is envy from the rest of the world. (Gian Carlo Rota)

Il 27 settembre 1999 si è tenuta a Milano una giornata in ricordo di Gian Carlo Rota. Alcuni degli interventi sono stati pubblicati sul numero 39 di questa rivista. Nel mio articolo *Il fascino discreto di Gian Carlo Rota*, illustravo la figura umana del grande matematico e filosofo ricordando alcuni degli episodi vissuti con lui nell'attività di ricerca, di studio e di insegnamento a partire dal lontano 1975, l'anno in cui lo conobbi. In questo lavoro invece vorrei esporre, per brevi linee, una panoramica a volo d'uccello del contributo di Rota alla matematica discreta, anche con lo scopo di diffondere alcune sue idee fondamentali che ancora oggi sono poco note al di fuori dell'ambiente degli addetti ai lavori.

1. La funzione di Mobius astratta

Dopo vari lavori di ricerca in Analisi Funzionale, agli inizi degli anni '60 Rota pubblicò il saggio [R1] dove pose le prime basi della moderna Analisi Combinatoria. Partendo da alcuni fatti noti egli arriva a creare la teoria delle funzioni di Mobius astratte. Due di tali «fatti», come egli soleva dire, sono riportati di seguito.

Il principio di inclusione-esclusione

Il problema del calcolo delle cardinalità di insiemi finiti conduce alla formula nota come principio di inclusione-esclusione. Fissati n insiemi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ la cardinalità della loro unione è data dalla somma alternata delle cardinalità dei singoli insiemi, delle loro intersezioni a due a due, a tre a tre, ecc. Ad esempio, per n = 3 si ha la formula

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cup B| - |A \cup C| - |B \cup C| + |A \cap B \cap C|.$$

1. mceraso@tin.it.

Teoria dei numeri

Siano f e g due funzioni aritmetiche tali che $g(m) = S_{n|m}f(n)$;
allora $f(m) = \Sigma_{n|m}\, g(n)m(m/n)$ e viceversa,
dove $\mu(n)$ è la classica funzione di Mobius che vale $(-1)^k$ se n è il prodotto di k primi distinti, zero altrimenti.

Rota ricollegando lavori di Whitney, Weisner ed altri, notando la presenza di strutture d'ordine nei due esempi precedenti (inclusione nel primo, divisibilità nel secondo) e in altri, pubblicava un teorema che generalizzava questi fatti e che diventava un pilastro per i fondamenti dell'Analisi Combinatoria. Egli dapprima introduce la funzione di Mobius astratta nel modo seguente. Sia P un insieme finito, parzialmente ordinato con $\leq$; la funzione di Mobius μ da P^2 nei reali è così definita:

$$\mu(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x > y \\ 1, & \text{se } x = y \\ -\sum_{x \leq z < y} \mu(x,z), & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ad esempio, se P è l'insieme delle parti di un insieme finito dove l'ordine è l'**inclusione**, allora

$$\mu(x,y) = (-1)^{|y-x|}$$

Se invece P è l'insieme dei naturali ordinato per **divisibilità**, allora

$$\mu(x,y) = \mu(y/x),$$

dove la seconda μ è la funzione di Mobius classica su ricordata.
Ciò detto, si può dimostrare il

Teorema di inversione

Siano f, g funzioni reali definite su P tali che $g(x) = \Sigma_{y\leq x}\, f(y)$,
allora $f(x) = \Sigma_{y\leq x}\, g(y)\mu(x,y)$ e viceversa.

Questo teorema fa luce su numerose formule di conteggio e le inquadra in una teoria generale (come può essere visto in [CEP]).

2. Il calcolo simbolico di Faulhaber

Sul volume *100 Great Problems of Elementary Mathematics, Their History and Solution*, edito dalla Dover nel 1965, Heinrich Dorrie riporta il problema 11 dal titolo: *Bernoulli's Power Sum Problem*. Vi si legge che il problema è apparso per la prima volta sul trattato *Ars Conjectandi* di Jacob Bernoulli (1654-1705) uscito postumo nel 1713. Però, nel recente bellissimo *Il libro dei numeri* di quei due maghi della matematica combinatoria che sono John H. Conway e Richard K. Guy, edito dalla Springer nel 1996 e poi dalla Hoepli nel 1999, si legge a pag. 92 che l'idea e la formula sono dovute a Johann Faulhaber, noto ai suoi tempi come «il grande aritmetico di Ulm», e apparse nel suo *Academiae Algebrae* del 1631. Mi è sembrato il primo esempio di **calcolo umbrale**.

Vediamo in dettaglio di che cosa si tratta.

Fissati due numeri naturali n ed s, consideriamo la somma

$S_{n,s} = 1^n + 2^n + \dots + s^n$

delle potenze n-esime dei primi s numeri naturali. Il grande aritmetico di Ulm per calcolare velocemente questa somma ideò il seguente trucco. Introdusse due numeri naturali j e B e considerò le potenze

$$(j+B)^n = j^n + n\, j^{n-1}\, B + \sum_{2\le k\le n} \binom{n}{k} j^{n-k}\, B^k$$

$$(j+B-1)^n = j^n + n\, j^{n-1} + \sum_{2\le k\le n} \binom{n}{k} j^{n-k}\, (B-1)^k$$

La loro differenza vale

$$(j+B)^n - (j+B-1)^n = n\, j^{n-1} + \sum_{2\le k\le n} \binom{n}{k} j^{n-k} \left[B^k - (B-1)^k\right]$$

Per eliminare la sommatoria, bisogna determinare dei numeri B che annullino l'espressione tra parentesi quadre, cioè tali che risulti

$B^k = (B - 1)^k$ (2.1)

per ogni k = 2, 3, … A tale scopo Faulhaber inventò il trucco di scrivere la potenza B^k come una successione B_k (in simboli: $B^k \equiv B_k$) facendo scendere l'esponente k a pedice e viceversa come un *jolly*.

Ad esempio, per k = 2 si ha

$B^2 - 2\, B^1 + 1 = B^2$ ovvero $B^1 \equiv B_1 = 1/2$

Per k = 3 si ha

$B^3 - 3\, B^2 + 3\, B^1 - 1 = B^3$ ovvero $B^2 \equiv B_2 = 1/6$

e così via,

$B_3 = 0,\ B_4 = -1/30, \quad B_5 = 0,\ B_6 = 1/42, \quad B_7 = 0,\ B_8 = -1/30, \dots$

I coefficienti B_k che così vengono creati, sono chiamati numeri di Bernoulli (tutti quelli a indice dispari sono nulli) e hanno molte applicazioni all'interno della matematica. Per esempio, appaiono nella famosa formula d'integrazione di Eulero per polinomi f(x) di grado n≤p dove n è un naturale:

$$\int_{[0,n]} f(x)\, dx = \sum_{0\le k\le n-1} f(k) - \sum_{1\le k\le p} B_k \left[f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(0)\right] \Big/ k!$$

Pertanto, introdotti tali coefficienti, si può scrivere l'identità

$(j + B)^n - (j + B - 1)^n = n\, j^{n-1}$ con $B^k \equiv (B - 1)^k$

Sommando ambo i membri per j che va da 1 a s otteniamo

$$(s+B)^n - B^n = \sum_{1\le j\le s} n\, j^{n-1} = n\, S_{n-1,s}$$

Si ricava infine la formula di Bernoulli-Faulhaber per le potenze (n–1)-esime dei primi s numeri naturali:

$$S_{n\text{-}1,s} = [(s{+}B)^n - B^n]/n \quad \text{con} \quad B^k \int (B\text{-}1)^k$$

Ad esempio, si hanno così le seguenti formule particolari per n = 1 e 2:

$$S_{2,s} = \left[(s+B)^2 - B^2\right]/2$$

$$= \left(s^2 + 2\,s\,B^1 + B^2 - B^2\right)/2 = \left[s^2 + 2\,s\,(1/2)\right]/2 = s\,(s+1)/2$$

$$S_{2,s} = [(s{+}B)^3 - B^3]/3$$

$$= \left(s^3 + 3\,s^2\,B^1 + 3\,s\,B^2 + B^3 - B^3\right)/3 = \left[s^3 + 3\,s^2/2 + 3\,s/6\right]/3 = s^3/3 + s^2/2 + s/6$$

Il trucco di Faulhaber, che consiste nel far saltare l'indice k a esponente e viceversa, venne chiamato **calcolo umbrale** dai matematici dell'Ottocento e del primo Novecento come Battaglini, Bell, Blissard, Lucas, Sylvester, per fare dei nomi. In effetti il k era come un'*ombra* che saltava da su a giù e viceversa. Esempi notevoli di tale calcolo simbolico sono presenti nel libro *Introduction to Combinatorial Analysis* di John Riordan del 1958.

Un altro clamoroso esempio di tale tecnica si ha nella manipolazione dei numeri F_n di Fibonacci quando la loro relazione di ricorrenza che li genera:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

si scrive sotto forma di potenze simboliche

$$F^n = F^{n-1} + F^{n-2}$$

Essa caratterizza l'**ombra di Fibonacci** così come la (2.1) caratterizza **l'ombra di Bernoulli**. Nonostante gli sforzi di numerosi matematici del Novecento per rendere rigoroso questo tipo di calcolo (vedi ad esempio lo stesso [RR]), soltanto con il lavoro [RT] di Rota e Taylor sembra che si sia arrivati a una soluzione definitiva.

3. Il calcolo umbrale di Gian Carlo Rota e Brian D. Taylor

Il numero di partizioni (o di relazioni di equivalenza) di un insieme finito di n elementi, viene indicato con B_n (non si confonda con il numero di Bernoulli) e chiamato numero di Bell. Per inciso, esso è anche il momento di ordine n della distribuzione di Poisson di parametro unitario. Nel 1964, in [R2], Rota ha dimostrato il seguente

Teorema

Sia V[u] lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali nella variabile formale u. Si consideri la successione dei polinomi fattoriali decrescenti.

Siano

$(u)_k := u\,(u-1)\,(u-2)\ldots(u-k+1)$,

$(u)_0 = 1$ per k = 0, 1, 2,…

Sia poi L il funzionale lineare reale su V[u] tale che

$L(1) = L((u)_k) = 1$ per ogni k.

Allora $B_n = L(u^n)$.

Da ciò Rota riprovava, in maniera molto semplice ed elegante oltre che originale, le seguenti formule valide per i numeri di Bell:

a) $B_{n+1} = \sum_k \binom{n}{k} B_k \qquad B_0 = 1$

b) $\sum_{n\geq 0} B_n \, x^n / n! = \exp\left(e^x - 1\right)$

c) e $B_n = \sum_{k\geq 0} k^n / k!$

Tali tipi di dimostrazione oggi vengono chiamati «alla Rota» dai combinatorici. Il funzionale L che trasforma l'esponente di u^n nell'indice di B_n fa sì che n sia un'altra ombra, come nel calcolo di Faulhaber. Il calcolo umbrale, sviluppato in seguito e ripreso recentemente in [DCR] ed [RT], è stato uno degli interessi dominanti nella matematica di Rota.

In generale si considera una quaterna (A, D, E, ε) dove

1) $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \upsilon, \ldots\}$ è un insieme o **alfabeto** i cui elementi sono chiamati **ombre**;
2) D è un anello commutativo senza divisori dello zero il cui campo di quozienti è di caratteristica nulla;
3) se *D*[*A*] è l'anello dei polinomi di *A* a coefficienti in *D*, allora
   $E : D[A] \to D$
   è un funzionale lineare, chiamato **valutazione** (in inglese *evaluation*), tale che
   a) E(1) = 1 (1 è l'identità di D);
   b) se $\alpha, \beta, ..., \gamma$ sono ombre distinte e i, j, …, k sono numeri naturali, allora
   $E(\alpha^i \cdot \beta^j \cdot \ldots \cdot \gamma^k) = E(\alpha^i)\, E(\beta^j) \ldots E(\gamma^k)$.
4) Infine, ε è un'ombra speciale tale che $E(\varepsilon^n) = \delta_{n,0}$ (il simbolo di Kronecker) e u un'altra ombra speciale tale che $E(u^n) = 1$ per ogni naturale n.

Una successione a_n di elementi di D è detta **rappresentata umbralmente** dall'ombra α se $E(\alpha^n) = a_n$ per ogni naturale n. Due polinomi umbrali p e q sono detti **umbralmente equivalenti***,* e si scrive $p \approx q$, se E(p) = E(q).

Ad esempio, l'ombra β tale che:

$p(\beta+1) - p(\beta) \approx p'(\varepsilon)$

per ogni polinomio p (dove p' è il polinomio derivata di p), rappresenta la successione B_n dei numeri di Bernoulli definiti dalla relazione

$$\sum_k \binom{n}{k} B_k = B_n, \qquad B_0 = 1$$

Analogamente:

- l'ombra θ tale che $\binom{\theta}{n} \approx 1/n!$, per ogni naturale n, rappresenta i numeri di Bell;
- l'ombra α tale che $\alpha^{n+2} \approx \alpha^{n+1} + \alpha^n$, per ogni naturale n, rappresenta i numeri di Fibonacci;

- l'ombra δ tale che $\delta^n \approx n\,\delta^{n-1} + (-1)^n$, per ogni naturale n, rappresenta i numeri di Montmort che appaiono nel classico problema delle concordanze

$$D_n = n!\left[-1/3! + 1/4! - \ldots + (-1)^n/n!\right]$$

Molte delle note proprietà delle successioni su menzionate possono essere dimostrate elegantemente, senza calcoli lunghi e noiosi, manipolando opportunamente le proprietà delle ombre. Si rimanda per le dimostrazioni a [C1].

4. L'enumerazione binomiale

Nel 1970 Mullin e Rota hanno pubblicato in [MR] la prima versione della **teoria dei polinomi binomiali**, di cui vedremo alcune idee. Sia K un campo di caratteristica 0; una successione di polinomi $p_n(x)$ di grado n, nella variabile x di K, è detta binomiale se

$$p_n(x+y) = \sum_{0\le k\le n} \binom{n}{k} p_k(x)\, p_{n-k}(y) \qquad (4.1)$$

Gli esempi più noti di polinomi binomiali sono:

a) x^n (**successione geometrica o combinatoria**)
da cui viene il termine polinomio binomiale in virtù del teorema del binomio.
b) $x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$ (**fattoriale decrescente**)
c) $x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)$ (**fattoriale crescente**)
d) $x(x-n\,a)^{n-1}$ (**polinomi di Abel**)

Nello spazio vettoriale dei polinomi vengono definiti:

- **l'operatore lineare** I, identità, tale che $Ip(x) = p(x)$;
- la **traslazione** E^a, tale che $E^a p(x) = p(x+a)$, per ogni a di K, con $E^0 = I$ e $E^1 = E$, per ogni polinomio p(x).

Un operatore Q è chiamato **delta** (o di Hildebrandt) se $Qx \neq 0$ e $QE^a = E^aQ$, cioè se *Q* commuta con l'operatore di traslazione.

Esempi di operatori delta sono:

a) la derivata D tale che $Dx^n = n\,x^{n-1}$ esteso per linearità ai polinomi;
b) la differenza in avanti $\Delta = E - I$;
c) la differenza all'indietro $\nabla = I - E^{-1}$;
d) l'operatore di Abel DE^a.

Sia *Q* un operatore delta; la successione di polinomi $p_n(x)$ è detta **basica** per Q se

$$p_0(x) = 1, \quad p_n(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad Q\,p_n(x) = n\,p_{n-1}(x)$$

Ad esempio, i precedenti polinomi a)-d) sono basici per i corrispondenti operatori a)-d). Al riguardo Mullin e Rota hanno dimostrato il seguente

Teorema

Se $p_n(x)$ è basica per qualche operatore delta Q, allora essa è di tipo binomiale, cioè soddisfa la (4.1). Se invece $p_n(x)$ è di tipo binomiale, allora esiste un operatore delta Q per cui è basica.

Per i polinomi b) la proprietà di binomialità si riduce alla formula di Van der Monde

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{0 \le k \le n} \binom{x}{k} \binom{y}{n-k}$$

mentre per i polinomi di Abel essa dà luogo alla strana identità

$$(x+y)(x+y-n\,a)^{n-1} = \sum_k \binom{n}{k} x\,(x-k\,a)^{k-1}\, y\,(y-n\,a+k\,a)^{n-k-1}$$

Di altra notevole importanza è il teorema dello sviluppo seguente.

Teorema

Sia T un operatore che commuta con l'operatore di traslazione, inoltre sia Q un operatore delta con successione basica $p_n(x)$, allora vale la formula dello sviluppo

$$T = \sum_{k \ge 0} a_k\, Q^k / k! \quad \text{dove} \quad a_k = T p_k(x)\big|_{x=0}$$

Si noti che quando $T = E^a$ e $Q = D$, per cui $p_k(x) = x^k$, si ottiene la classica formula dello sviluppo di Taylor. Ancora, scegliendo opportunamente Q e T è possibile ricavare la formula di Simpson per l'integrazione numerica

$$\int_{[x,x+h]} p(t)\,dt = 2\,h\left(1 + \Delta + \Delta^2/6 + \Delta^4/180 + \dots\right) p(x)$$

ed altre formule utili come questa di Eulero:

$$\sum_{k \ge 0} (-1)^k f(k) = \sum_{k \ge 0} 2^{1-k} (-\Delta)^k f(0)$$

Nella breve panoramica sulla matematica discreta di Gian Carlo Rota non sono stati illustrati i settori relativi alle geometrie combinatorie o **teoria delle matroidi**, alla **teoria degli invarianti**, alla **probabilità geometrica** o alla teoria del **q-analogo** sui quali il grande matematico di Vigevano ha dato notevoli contributi. L'importanza della sua opera è illustrata dal numero elevato di lavori pubblicati continuamente dai suoi allievi in queste discipline in tutto il mondo e da tutto il materiale reperibile sulla rete alla voce Gian Carlo Rota.

[CEP] Cerasoli M., Eugeni F., Protasi M.
Elementi di Matematica Discreta. Zanichelli: Bologna, 1988.

[C1] Cerasoli M.
Integer sequences and umbral calculus. *Rend. Acc. Naz. delle Scienze dei XL, Memorie di Matematica e Applicazioni*, XIX-1, p. 101-110, 1995.

[C2] Cerasoli M.
Numeri di Fibonacci e calcolo umbrale al liceo. *Bollettino dei Docenti di Matematica 45(2002)*, p. 39-44. UIM: Bellinzona, 2002.

[DCR] Di Crescenzo A., Rota G.C.
Sul calcolo umbrale. *Ricerche di Matematica* XLIII-1, p. 129-162, 1994.

[MR] Mullin R., Rota G.C.
On the foundations of combinatorial theory. III. Theory of binomial enumeration, in *B. Harris (ed), Graph Theory and its Applications*. Academic Press, p. 167-213, 1970.

[R1] Rota G.C.
On the foundations of combinatorial theory I: the theory of Mobius functions, in *Z. Wahrschein. U. verw. Geb. 2*, p. 340-368, 1964.

[R2] Rota G.C.
The number of partitions of a set. *Amer. Math. Monthly 71*, p. 498-504, 1964.

[RR] Roman S.M., Rota G.C.
The Umbral Calculus. *Adv. In Math. 27 (1978)*, p. 95-188, 1978.

[RT] Rota G.C., Taylor B.D.
The classical umbral calculus. *SIAM J. Math. Anal. 25 (1994)*, p. 694-711, 1994.

V. Laboratorio matematico

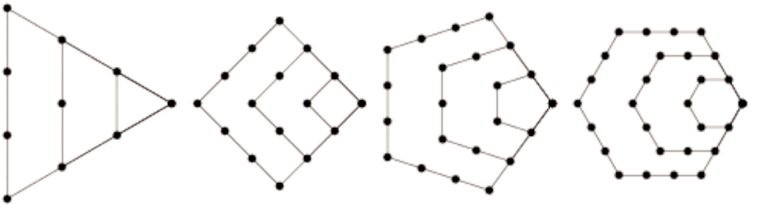
1. Numeri figurati

Giorgio Mainini

Polygonal numbers are a particular kind of figurate numbers, they can be represented arranging pebbles in a particular way. The idea of representing numbers in this way, “calculi” in latin, is very old and, at the same time, it is still interesting today.

I *numeri figurati* sono quelli rappresentabili con figure che si possono immaginare costruite con sassolini. Se le figure sono poligoni, i numeri rappresentati, di due tipi, si chiamano *numeri poligonali*, o *numeri poligonali centrati*. L'idea di rappresentare numeri con sassolini, in latino calculi, è molto antica e, contemporaneamente, attuale. Si pensi, ad esempio, ai «disegnini» che fanno nei loro piatti i golosi di ciliegie…

1. Numeri poligonali



1.1. Numeri triangolari

L'n-esimo numero triangolare, T(n), è dato dalla formula

$$T(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

1.2. Numeri quadrati

L'n-esimo numero quadrato, Q(n), è dato (banalmente) dalla formula

$$Q(n) = n^2$$

1.3. Numeri pentagonali

L'n-esimo numero pentagonale, P(n), è dato dalla formula

$$P(n) = \frac{n(3n-1)}{2}$$

1.4. Numeri esagonali

L'n-esimo numero esagonale, E(n), è dato dalla formula

$$E(n) = n(2n-1)$$

1.5. Generalizzazione

In generale, ci si può chiedere quale sia la formula che permette di trovare l'n-esimo numero k-gonale, K(n).

Per prima cosa, si conviene di porre
K (1) = 1 , per ogni k

Se poi si guardano con attenzione le figure precedenti, si osserva che

1. al primo passaggio (da n = 1 a n = 2) si aggiungono (k–1) sassolini ai vertici, quindi
   K (2) = 1 + (k–1) = k

2. al secondo passaggio (da n = 2 a n = 3) si aggiungono (k–1) sassolini ai vertici e poi (k–1) volte un sassolino sui lati rimanenti, quindi
   K (3) = 1 + (k–1) + (k–1) + (k–2) = 1 + 2 (k–1) + 1 (k–)

3. al terzo passaggio (da n = 3 a n = 4) si aggiungono (k–1) sassolini ai vertici e poi (k–2) volte due sassolini sui lati rimanenti, quindi
   K (4) = 1 + 2 (k–1) + 1 (k–2) + (k–1) + (k–2) =
   = 1 + 3 (k–1) + (1 + 2) (k –2)

4. al quarto passaggio (da n = 4 a n = 5) si aggiungono (k–1) sassolini ai vertici e poi (k–2) volte tre sassolini sui lati rimanenti, quindi
   K (5) = 1 + 3 (k–1) + (1 + 2) (k–2) + (k–1) + 3 (k–2) =
   = 1 + 4 (k–1) + (1 + 2 + 3) (k–2)

5. …

6. …

È facile convincersi che

$$
\begin{aligned}
K(n) &= 1+(n-1)(k-1)+\left[1+2+3+\ldots+(n-2)\right](k-2) = \\
&= 1+(n-1)(k-1)+\frac{(n-2)(n-1)}{2}(k-2) = \\
&= \frac{k\,n^2-k\,n-2\,n^2+4\,n}{2} = \\
&= \frac{n\left[(k-2)\,n-(k-4)\right]}{2}
\end{aligned}
$$

$$
K(n) = \frac{n\left[(k-2)\,n-(k-4)\right]}{2} \qquad \text{(F)}
$$

Sostituendo a k in (F), successivamente, i valori 3, 4, 5, 6 si ritrovano (ci mancherebbe altro!) le formule particolari per i numeri triangolari, quadrati, pentagonali ed esagonali.

Osservazione 1.6.

Non esistono, ovviamente, poligoni con meno di tre lati, quindi non dovrebbe aver senso domandarsi quali sono i numeri 2-gonali. Se, però, si sostituisce a k il valore 2 si ha una sorpresa: mi pare interessante domandarsi (e rispondersi…) quale possa essere l'interpretazione geometrica di tale sostituzione.

Osservazione 1.7.

È noto che

$$P(n) = T(n-1) + Q(n) \quad \text{per ogni n}$$

difatti, come è facile verificare,

$$\frac{n(3n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} + n^2$$

Peccato per l'(n−1)…

Continuando a indicare con K(n) l'n-esimo numero k-gonale, ci si può domandare:

esiste almeno una terna (A, B, C) tale che

A(n) + B(n) = C(n) per ogni n?

Attenzione: il «*per ogni*» è fondamentale.

(chiamiamo questa domanda, per analogia e *si parva licet componere magnis*, «Piccolissimo teorema di Fermat»…)

Supponendo A < B < C, si può scrivere

A(n) + (A + x)(n)= C(n)

Definiamo una funzione d nel seguente modo

d(M,s,n) = (M+s)(n) – M(n)

La (F) ci viene in aiuto:

$$d(M,s,n) = (M+s)(n) - M(n) =$$

$$= \frac{n\left[\left((m+s)-2\right)n - \left((m+s)-4\right)\right]}{2} - \frac{n\left[(m-2)n-(m-4)\right]}{2} =$$

$$= \ldots = \frac{n\,s\,(n-1)}{2}$$

dove si vede che M è scomparso.

In parole, e per esempio, la differenza fra il 50-esimo numero 56-gonale e il 50-esimo numero 51-gonale è uguale alla differenza fra il 50-esimo numero 79-gonale e il 50-esimo numero 74-gonale: ciò che conta è che 56 – 51 = 79 – 74 (= 5 = s). Tanto per gradire, la differenza in questione è 6125.

Dunque la soluzione del problema, se esiste, dipende da s: ciò implica che se una soluzione esiste, allora ne esistono *infinite*, una per ogni M.

È dunque necessario e sufficiente trovare un solo M per il quale

$$M(n)=\frac{n\,s\,(n-1)}{2}$$

cioè, successivamente

$$M(n)=\frac{n\left[(m-2)\,n-(m-4)\right]}{2}=\frac{n\,s\,(n-1)}{2}$$

$$(m-2)\,n-(m-4)=s\,(n-1)$$

da cui

$$s=m-\frac{2\,(n-2)}{n-1}$$

Poiché m è intero, $\frac{2\,(n-2)}{n-1}$ dovrebbe essere intero *per ogni* n.

Per n = 2 si ha s = 0 e per n = 3 si ha s = 1: poiché

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\,(n-2)}{n-1}=2$$

non ci sono speranze che assuma anche *un solo* altro valore intero, tanto meno che assuma *soltanto* valori interi. Dunque, s intero non esiste. Fine delle nostre pene: la ricerca delle terne desiderate è destinata al fallimento. La dimostrazione ci sta, nel margine di questo libricino…

Osservazione 1.8.
Riprendiamo l'osservazione precedente:

$$P(n)=T(n-1)+Q(n)\ \text{ per ogni n}$$

e domandiamoci: la relazione vale solo per P(n) e Q(n) o vale anche per altri R e S tali che R–S=1?
Ci viene in aiuto la funzione d sopra definita, ponendo s=1:

$$d(M,1,n)=(M+1)(n)-M(n)=\frac{n\,(n-1)}{2}$$

ora T(n–1) è proprio dato da $\frac{n\,(n-1)}{2}$

La risposta è dunque affermativa:

$$(M+1)(n)=T(n-1)+M(n)$$

per ogni M e per ogni n

Osservazione 1.9.
… per i duri.
Si consideri la famiglia di funzioni

$$G_k(x)=\frac{x\left[(k-3)\,x+1\right]}{(1-x)^3}$$

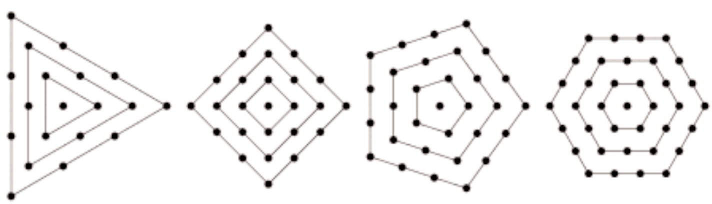
ognuna delle quali è detta *generatrice*.

Gli *sviluppi in serie di Maclaurin* (o *di Taylor con punto di espansione x = 0*), uno per ogni k, danno, come coefficienti delle potenze di x crescenti, i rispettivi numeri k-gonali.

Ad esempio, lo sviluppo di Maclaurin per k = 3, espanso fino a x^{10}, è il seguente

$$55\,x^{10}+45\,x^9+36\,x^6+28\,x^7+21\,x^6+15\,x^5+10\,x^4+6\,x^3+3\,x^2+x$$

2. Numeri poligonali centrati



2.1. Numeri triangolari centrati

L'n-esimo numero triangolare centrato, $T_c(n)$, è dato dalla formula

$$T_c(n)=\frac{3\,n^2-3\,n+2}{2}$$

2.2. Numeri quadrati centrati

L'n-esimo numero quadrato centrato, $Q_c(n)$, è dato dalla formula

$$Q_c(n)=2\,n^2-2\,n+1$$

2.3. Numeri pentagonali centrati

L'n-esimo numero pentagonale centrato, $P_c(n)$, è dato dalla formula

$$P_c(n)=\frac{5\,n^2-5\,n+2}{2}$$

2.4. Numeri esagonali centrati

L'n-esimo numero esagonale centrato, $E_c(n)$, è dato dalla formula

$$E_c(n) = 3n^2 - 3n + 1$$

2.5. Generalizzazione

In generale, ci si può chiedere quale sia la formula che permette di trovare l'n-esimo numero k-gonale centrato, $K_c(n)$.

Per prima cosa, si conviene di porre

$K_c(1) = 1$, per ogni k

Se poi si guardano con attenzione le figure precedenti, si osserva che

1. al primo passaggio (da n = 1 a n = 2) si aggiungono k sassolini ai vertici, quindi
   $K_c(2) = 1 + k$

2. al secondo passaggio (da n = 2 a n = 3) si aggiungono k sassolini ai vertici e poi k volte un sassolino sui lati, quindi
   $K_c(3) = 1 + k + k + 1k = 1 + 2k + 1k$

3. al terzo passaggio (da n = 3 a n = 4) si aggiungono k sassolini ai vertici e poi k volte due sassolini sui lati, quindi
   $K_c(4) = 1 + 2k + 1k + k + 2k = 1 + 3k + (1 + 2)k$

4. al quarto passaggio (da n = 4 a n = 5) si aggiungono k sassolini ai vertici e poi k volte tre sassolini sui lati, quindi
   $K_c(5) = 1 + 3k + (1 + 2)k + k + 3k = 1 + 4k + (1 + 2 + 3)k$

5. …

È facile convincersi che

$$K_c(n) = 1 + (n-1)k + [1 + 2 + ... + (n-2)]k =$$
$$= 1 + (n-1)k + \frac{(n-2)(n-1)}{2}k = \frac{kn^2 - kn + 2}{2}$$

$$K_c(n) = \frac{kn^2 - kn + 2}{2} \qquad (G)$$

Sostituendo a k in (G), successivamente, i valori 3, 4, 5, 6 si ritrovano (ci mancherebbe altro!) le formule particolari per i numeri triangolari centrati, quadrati centrati, pentagonali centrati ed esagonali centrati.

Osservazione 2.6.
Come in Osservazione 1.8. valeva

$$P(n) = T(n-1) + Q(n) \qquad \text{per ogni n}$$

e, più in generale,

$$(M+1)(n) = T(n-1) + M(n) \qquad \text{per ogni M e per ogni n}$$

così vale anche

$$(M+1)_c(n) = T(n-1) + M_c(n) \qquad \text{per ogni M e per ogni n}$$

come si può facilmente dimostrare

Osservazione 2.7.
Altrettanto facile da dimostrare è l'uguaglianza
$(M+s)(n) - M(n) = (M+s)_c(n) - M_c(n)$
per ogni M, per ogni n e per ogni s

3. Una definizione non geometrica dei numeri poligonali

La (F) può essere scritta in altro modo

$$K(n) = \sum_{p=0}^{n-1} \left[1 + (k-2)\,p\right]$$

dalla quale si ricava che i numeri poligonali sono le somme parziali delle progressioni aritmetiche di primo termine 1 e di ragione (k–2), dove k continua a essere il numero dei lati. (Si veda ancora l'Osservazione 1.6)

Anche la (G) può pure essere scritta in altro modo

$$K_c(n) = 1 + \sum_{p=0}^{n-1} p \cdot k = 1 + k \sum_{p=0}^{n-1} p$$

4. Osservazioni didattiche

4.1. Le costruzioni dei numeri figurati dovrebbero consentire agli allievi di confrontarsi con successioni di cui è ragionevolmente semplice immaginare il «ritmo di crescita».

4.2. Le due «Generalizzazioni» potrebbero essere una buona introduzione all'idea di dimostrazione. Non sono difficili e permettono di mostrare come si possa in alcuni casi percorrere la via dal particolare al generale e in altri la via inversa. Si può approfittare dell'occasione per sottolineare come, forse troppo spesso, i libri di matematica percorrano solo la seconda via, lasciando un (invincibile) senso di frustrazione («Ma come avrà fatto a trovare un risultato così potente? Io non ce la farò mai: quindi mi conviene lasciar perdere…»).

4.3. Le due formule (F) e (G) permettono di ricavare qualche corollario non del tutto prevedibile. Ciò può diventare uno stimolo per mostrare lo schema assiomi – teoremi – lemmi/corollari.

4.4. Nell'Osservazione 1.9. qualcuno potrebbe trovare un esempio «eccentrico» di un teorema di Analisi: ma non voglio andare al di là dei miei calzari…

1. XIX Convegno Nazionale: Incontri con la Matematica Didattica della Matematica e processi di apprendimento

Castel San Pietro Terme (Bologna)
4-5-6 novembre 2005

Conferenze

Venerdì 4 novembre, Centro Congressi (Hotel Castello)

Tutti gli ordini scolastici

14.30-15.30 **Inaugurazione** alla presenza delle Autorità.
Saluto del Sindaco di Castel San Pietro Terme

15.30-16.15 **Maria Polo** (Università di Cagliari):
Per vincere la paura e il rifiuto della matematica: cosa fare?

16.45-17.30 **Silvia Sbaragli** (NRD, Bologna):
Analisi semantica e didattica dell'idea di «misconcezione»

17.30-18.15 **Michele Pertichino** (Università di Bari):
Una matematica per l'età adulta

Sabato 5 novembre, Salone delle Terme (Albergo delle Terme)

Scuola dell'Infanzia

15.00-15.45 **Irene Foresti** (RSDDM, Bologna):
Ti racconto il problema della maestra

15.45-16.30 **Lilia Andrea Teruggi** (Università di Milano-Bicocca):
I problemi matematici nella scuola dell'infanzia: motore, luogo e strumento di apprendimento

17.00-17.45 **Giorgio Gabellini e Franca Masi** (RSDDM, Bologna):
Costruire, progettare e rappresentare, dal tridimensionale al bidimensionale

17.45-18.30 **Laura Prosdocimi** (RSDDM, Bologna):
Biancaneve e un po' di nani

Sabato 5 novembre, Centro Congressi (Hotel Castello)

Scuola Primaria, Secondaria di primo e di secondo grado

15.00-15.45 **Domingo Paola** (GREMG, Genova):
Un approccio ecologico agli strumenti di calcolo automatico nell'insegnamento-apprendimento della matematica

15.45-16.30 **Martha Isabel Fandiño Pinilla** (NRD, Bologna):
Le frazioni. Aspetti concettuali e didattici

17.00-17.45 **Mario Ferrari** (Università di Pavia):
L'infinito: croce e delizia

17.45-18.30 **Roberto Tortora** (Università di Napoli):
La pragmatica delle rappresentazioni nell'insegnamento della matematica

Seminari

Sabato 5 novembre, Istituto Alberghiero

Seminari per la Scuola dell'Infanzia

8.30-9.15 **F. Magalotti** (LS Psicopedagogico, Ravenna):
Una partita a carte per giocare a contare

9.15-10.00 **L. Brisotto, L. Furlanetto e C. Varacalli, neolaureate in SFP coordinate da G. Gabellini e F. Masi** (R.S.D.D.M., Bologna):
Esperienze sulla matematica nella scuola dell'infanzia tra formazione, ricerca e professione.

10.30-11.15 **I. Marazzani** (NRD, Bologna):
Scrivere numeri a tre, quattro, cinque anni

11.15-14.00 **Visita alle mostre**

Sabato 5 novembre, Centro Congressi (Hotel Castello)

Seminari per la Scuola Primaria e Secondaria di primo grado

8.30-9.15 **M. Baldi** (Centro Intermedia, Cava de' Tirreni):
Simulare esperimenti scientifici, costruire robot ed esplorare concetti geometrici con un linguaggio di programmazione semplice e potente (*Micromondi EX*)

9.15-10.00 **A. Ferretti** (IC Pray Biellese) **e L. Lancini** (SP, Cossato Masseria) **coordinati da L. Facciotto** (ITIS, Biella):
La misura: problemi, ostacoli e concetti. Un itinerario di ricerca dalla primaria alla media

10.30-11.15 **B. D'Amore e M.I. Fandiño Pinilla** (NRD, Bologna):
Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti

11.15-12.00 **G. Pezzi** (LC «Torricelli», Faenza):
Nuove strade nell'insegnamento delle discipline scientifiche:
l'esperienza dei progetti didattici di Mirabilandia

11.15-14.00 **Visita alle mostre**

Sabato 5 novembre, Centro Congressi (Hotel Castello)
(Per tutti)

14.00-14.45 **Classe II di SP di Rocca S. Casciano (FC) con la collaborazione di M. Ghetti, M. Marchesini, C. Pretolani, P. Ricci, E. Toledo**:
«Punti di vista». S*pettacolo teatrale di Matemarte (matematica e arte)*.

Sabato 5 novembre, Salone delle Terme (Albergo delle Terme)

Seminari per la Scuola Secondaria di secondo grado

8.30-9.15 **A. Balderas** (Università di Querétaro, Messico):
L'uso di *Autograph* per la visualizzazione di concetti matematici

9.15-10.00 **R.L. Ancona e A. Montone** (Università di Bari):
Come gli adulti imparano la matematica: i casi degli insegnanti
di sostegno e dei centri territoriali permanenti

10:30-11:15 **C. Rojko** (Istituto Nazionale di Educazione, Slovenia)
e **Á.H. Flores Samaniego** (UNAM, Messico):
L'uso delle Geometria Dinamica nell'insegnamento della geometria:
alcune attività per il livello superiore

11.15-14.00 **Visita alle mostre**

Domenica 6 novembre, Istituto Alberghiero

Seminari per la Scuola dell'Infanzia

8.30-9.15 **M. Baldi** (Centro Intermedia, Cava de' Tirreni):
Micromondi Jr per creare storie animate, giochi ed esplorare
i primi concetti matematici con un linguaggio iconico

9.15-10.00 **B. Martini** (Università di Urbino):
All'«ombra» delle Indicazioni Nazionali per la scuola dell'infanzia

10.30-11.15 **A. Angeli e M. Di Nunzio** (SdI «G. Marconi», Montecarlo
e Piano di Conca, Lucca):
Tasselliamo un tappeto magico per giocare a mille e un gioco

10.30-12:30 **Visita alle mostre**

Domenica 6 novembre, Centro Congressi (Hotel Castello)

Seminari per la Scuola Primaria

8.30-9.15 **S. Carlotti, M. Masotti e S. Tronconi neolaureate in SFP coordinate da G. Gabellini e F. Masi** (RSDDM, Bologna):
Maestri laureati tra formazione, ricerca e professione: il caso della matematica nella scuola primaria

9.15-10.00 **L. Campolucci e D. Maori** (RSDDM, Bologna):
I cambi di convinzioni sul concetto di frazione

10.30-11.15 **L. Cottino** (RSDDM, Bologna):
L'importanza dell'analogia nella pratica didattica

11.15-12.30 **Visita alle mostre**

Domenica 6 novembre, Salone delle Terme (Albergo delle Terme)

Seminari per la Scuola Secondaria di primo e di secondo grado

8.30-9.15 **Specializzati SSIS coordinati da G. Santi** (SSIS, Bologna):
La didattica della matematica dalla formazione alla professione: la nostra esperienza alla SSIS di Bologna

9.15-10.00 **C. Pellegrino e A.B. Borrelli** (NREM, Modena):
La lezione di Martin ovvero enigmi e giochi matematici possono ancora fare scuola? e che scuola?

10.30-11.15 **L. Facciotto** (ITIS, Biella), **A. Ferretti** (IC, Pray Biellese):
La misura: problemi, ostacoli e concetti. Un itinerario di ricerca dalle medie alle superiori

11.15-12.30 **Visita alle mostre**

Mostre e Laboratori
Istituto Alberghiero
(Per tutti)

V. Simonetti
«Fantasie matematiche». Sono previsti anche seminari inerenti la mostra: «Idee, principi, tecniche, suggerimenti per stimolare la curiosità, la scoperta e l'inventiva»
(sabato dalle 11.30 alle 12.30 e domenica dalle 11.00 alle 12.00)

Scuola dell'infanzia
A. Angeli e M. Di Nunzio (SdI «G. Marconi», Lucca):
Un tappeto «tassellato» per mille e un gioco

Scuola dell'infanzia e primaria

SdI «Collodi» e SP «Kennedy» di Domodossola, Trontano e Cosasca: Le linee raccontano… Storie di percorsi nel mondo della geometria
M. Baldi (Centro Intermedia, Cava de' Tirreni):
Workshop «Micromondi jr» (domenica dalle 11.00 alle 12.00)

Scuola primaria
f@d Giunti
Didattica della Matematica. Interpretare la vita matematica in aula (concluse con successo le prime tre edizioni)
P. Ricci e E. Toledo con la collaboraz. di S. Sbaragli (IC Rocca S. Casciano, Forlì):
Matemarte, l'occhio intelligente
L. Baldazzi e G. Liverani (IC «Montanari», Ravenna):
Esperienze matematiche in prima
E. Dal Corso, R. Fusinato e C. Stella (RSDDM, Bologna):
La matematica nella realtà
M.T. Leone e A. Conti (IC «Massarosa II», Lucca):
Geni «toscani» per rileggere la matematica

Scuola primaria e secondaria di primo grado

M. Baldi (Centro Intermedia, Cava de' Tirreni):
Workshop «*Micromondi ex*»
(sabato dalle 12,30 alle 13,30 e domenica dalle 10.00 alle 11.00)
LEGO Educational Division:
Workshop «L'uso dei robot LEGO in classe»
(sabato dalle 10.30 alle 11.30 e domenica dalle 11.30 alle 12.30)
P. Nazzaro e M. Mellone (NRD, Napoli):
Reinventare la matematica osservando e toccando con mano
(sabato dalle 10,30 alle 12,30 e dalle 12.00 alle 13.30 e domenica dalle 9.30 alle 11.30).

Scuola primaria, secondaria di primo e di secondo grado

SP di Cossato Masseria, IC di Pray Biellese, ITIS «Q. Sella» di Biella, con la collaboraz. di I. Foresti:
Spazio e piano tra realtà e astrazione
G. Haeusermann (ASP, Locarno) **e O. Foà Haeusermann** (LS «Galilei», Trieste): *La scatola di Einstein.*

Scuola secondaria di primo e di secondo grado

«Formatori di ADT» coordinati da P. Accomazzo:
«Minicorso di introduzione a *Cabri Junior*» (sabato dalle 8.30 alle 10.30 e dalle 12 alle 14, domenica dalle 10.30 alle 12.30).
È necessaria la prenotazione presso l'Istituto Alberghiero
A. Frapolli e G. Mainini (ASP, Locarno):
La Bottega dei Quiz (con l'Angolo delle Scommesse)
P. Pasi (RSDDM, Bologna):
Mathemímesis: il fascino della Matematica

Scuola secondaria di secondo grado

«Formatori di ADT» coordinati da S. Cappuccio:
«Minicorso sull'uso delle tabelle» (sabato dalle 8.30 alle 10.30 e dalle 12 alle 14, domenica dalle 10.30 alle 12.30).
È necessaria la prenotazione presso l'Istituto Alberghiero
A. Balderas (Università di Querétaro, Messico):
Workshop di «*Autograph*» (sabato dalle 10.30 alle 11.30 e dalle 11.30 alle 12.30 e domenica dalle 10.00 alle 11.00 e dalle 11.00 alle 12.00)

Informazioni
Rivolgersi a:
Maria Rita Baroncini
Ufficio Cultura Turismo
Comune di Castel San Pietro Terme
Piazza XX Settembre 3
40024 Castel San Pietro Terme BO
Tel. 051 6954198 – Fax 051 6954180 – Feriali ore 9-13.30
e-mail: ufficioturismo@cspietro.provincia.bo.it
cultura@cspietro.provincia.bo.it
http://www.dm.unibo.it
http://www.comune.castelsanpietroterme.bo.it

L'**iscrizione** avviene direttamente durante il Convegno. Non si accettano pre-iscrizioni. Saranno attivate varie sedi di segreteria, per rendere agevoli e rapide le pratiche di iscrizione.

La **segreteria organizzativa centrale** avrà sede presso l'Albergo delle Terme, viale delle Terme 1113. Al momento dell'iscrizione viene consegnata al Convegnista una cartella contenente vario materiale. A ciascun partecipante viene richiesto un contributo alle spese di organizzazione di 50 Euro (studenti e specializzandi con libretto 25 Euro). Si consigliano i Convegnisti di effettuare se possibile le iscrizioni venerdì 4 novembre tra le ore 11 e le 13, per evitare code. **Prima delle 11 non verranno accettate iscrizioni**.

Progetto grafico
Bruno Monguzzi
Fotocomposizione
Taiana
Stampa
Veladini

Redazione
Laboratorio di didattica della matematica
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera

Telefono
091 814 34 28/57/58
Fax
091 814 44 92

Amministrazione
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera
Fax
091 814 44 92

Esce due volte all'anno
a maggio e a dicembre

Abbonamento annuo
Sfr. 30.–
€ 16

Bollettino dei docenti di matematica
50

In questo numero: contributi di didattica di B. D'Amore e M.I. Fandiño, R. Duval, A. Gagatsis e Iliada Elia, A. Piatti e G. Arrigo, S. Sbaragli, C. Beretta; riflessioni epistemologiche di G.T. Bagni, A. Delessert; giochi matematici presentati da A. Frapolli, V. Mascioni, E. Peres; saggi di matematica di A. Steiner e M.J. Gander, R. Moresi, G.C. Barozzi, M. Cerasoli; laboratorio matematico di G. Mainini; una importante segnalazione.
Il numero 50 viene eccezionalmente distribuito a partire dal 21 settembre: non per un ritardo dovuto a problemi interni, ma per far coincidere la pubblicazione con i festeggiamenti che si tengono quel giorno nell'Aula Magna della Scuola Arti e Mestieri di Bellinzona.

ISBN 88-86486-52-9
Fr. 18.–

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport