A cura
del Laboratorio di didattica della matematica

Bollettino dei docenti di matematica

51

Dicembre
2005

Ufficio
dell’insegnamento medio
Centro
didattico cantonale

Bollettino
dei docenti di matematica
51

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport

ISBN 88-86486-67-7

Bollettino dei docenti di matematica 51

Dicembre
2005

Ufficio dell'insegnamento medio
Centro didattico cantonale

Indice

Prefazione

Dopo la simpatica festa dedicata all'uscita del numero 50 del *Bollettino dei docenti di matematica*, per la quale è doveroso ringraziare pubblicamente l'autorità politica – in particolare il Direttore del DECS avv. Gabriele Gendotti –, la Divisione della scuola – in particolare il prof. Diego Erba – e il comitato organizzatore, si ritorna al lavoro sicuramente ricaricati. Ecco quindi puntuale l'uscita del numero 51.

Troviamo prima di tutto le tre relazioni degli interventi scientifici relativi al pomeriggio di studio del 21 settembre, opera dei cari amici André Delessert, Bruno D'Amore e S.D. Chatterji, ciascuno ben delineato, dalla riflessione filosofica a quella didattica teorica fino all'impegnativo saggio storico-matematico.

Nella sezione Varia troviamo inoltre i notevoli contributi di Alfio Quarteroni (fra l'altro mente matematica del progetto Alinghi), e degli statistici Gianfranco Domenighetti e Carlo Malaguerra, per finire con la simpatica *new entry* di Manuel Rigamonti, docente di educazione musicale, che propone una riflessione tra musica e matematica, nell'ottica di un musicista.

La didattica lascia spazio a un nuovo intervento di carattere generale di Gianfranco Arrigo dedicato alla scuola media (che si accosta a quello pubblicato sul numero 48 e dedicato alla scuola elementare), a un significativo *amarcord* di Giorgio Mainini e alle sintesi dei lavori di ricerca effettuati da alcuni studenti della prima «covata» uscita dal corso triennale di formazione per insegnanti della scuola di base dell'ASP di Locarno, per le quali ringrazio sentitamente Silvia Sbaragli.

Vi si trova poi un contributo squisitamente matematico di Francesco Cavalli e la presentazione di un'attività didattica da parte del giovane esordiente Paolo Hägler, docente all'ICEC di Bellinzona.

Ovviamente non si è tralasciato il quiz di Aldo Frapolli e, in chiusura, si trovano nuove recensioni di testi interessanti per i docenti di matematica – questa volta preparate da Gianfranco Arrigo e da Giorgio T. Bagni – e le segnalazioni di convegni.

1. Modelli matematici per la simulazione del sistema cardiovascolare

Alfio Quarteroni[1]

Among other things the author, expert in mathematical modelling, contributed to the design of the hull of the Swiss sailing boat “Alinghi”, which surprisingly reached the highest levels in sailing competition. The secret lies in the making of mathematical models that are as close as possible to reality. These studies have, however, much more important applications than that of a sport achievement: the mathematical model reproducing the behaviour of a fluid in the pipes allows, for instance, unhoped developments for cardiovascular medecine, the main topic of this article.

Modelli per progettare e simulare

La modellistica matematica si è ormai proposta come strumento ausiliare (allorquando non esclusivo) di indagine, sia qualitativa sia quantitativa, in svariati campi delle scienze applicate.

Da diversi decenni i modelli matematici vengono usati nell’industria aeronautica, automobilistica, elettronica, chimica o manifatturiera come supporto per la progettazione di nuovi prodotti.

Si adottano inoltre modelli matematici per prevedere e simulare processi naturali. È noto a tutti il ruolo che i modelli matematici hanno assunto nel campo delle previsioni meteorologiche su scala planetaria, regionale o locale; ma si applicano anche per l’analisi del rischio sismico, la valutazione d’impatto di inondazioni o esondazioni, la simulazione di processi di inquinamento atmosferico o idrico.

In effetti, l’uso dei modelli si è alquanto diversificato, e oggi si usano per descrivere processi economici e finanziari (ad esempio per l’analisi di rischio dei derivati finanziari), per identificare strutture matematiche in una certa area territoriale e aiutare a pianificare interventi architetturali, così come per aiutare a migliorare le prestazioni nello sport da competizione.

Modelli per le scienze della vita

Dopo l’industria, l’ambiente, l’economia e lo sport, i modelli si sviluppano ora in numerosi ambiti delle scienze della vita, realizzando un’ideale migrazione fra settori a forte componente tecnico-scientifica ad altri in cui l’elemento umano assume il ruolo preponderante.

1. CMCS (Chair of Modeling and Scientific Computing), EPFL, CH-1015 Lausanne e MOX, Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano, Via Bonardi 9, 20133 Milano.

La modellistica matematica a livello cellulare e sistemico (ovvero di organi, quale il cuore, e sistemi, quali quello circolatorio, respiratorio, nervoso, scheletrico…) è destinata a giocare un ruolo primario nello svelare il modo in cui l'informazione contenuta nel genoma è stata predisposta al fine di creare sistemi viventi. Essa richiederà lo sviluppo di modelli integrati, ovvero basati sull'accoppiamento di differenti processi fisici o biologici alla stessa scala. La comprensione della natura accoppiata di questi processi richiede la messa a punto di diversi modelli matematici in grado di trattare i singoli processi.

Inoltre, i modelli matematici debbono essere in grado di trattare diverse scale spaziali, dal livello molecolare (inferiori al milionesimo di millimetro) a quello cellulare e tissutale (dal decimillesimo di millimetro sino al millimetro) sino alla scala dei vari organi e dell'intero corpo (fra il millimetro e il decimetro).

Nel fornire una comprensione quantitativa del comportamento di un intero organo in termini di funzioni sub-cellulari, i modelli potrebbero stabilire un legame fra struttura molecolare e comportamenti clinicamente osservabili, aiutando in questo modo nell'interpretazione di immagini cliniche, oggi ottenibili con grande facilità e accuratezza grazie alla risonanza magnetica o nucleare, alla tomografia, a ultrasuoni o mappe di potenziali elettrici.

Modelli per il sistema circolatorio

La fisiologia del sistema cardiovascolare è stata analizzata da alcuni fra i personaggi centrali della storia del genere umano.

Aristotele (384-322 a.C.), per esempio, identificò il ruolo dei vasi sanguigni nella trasmissione del "calore animale" dal cuore alla periferia del corpo (sebbene ignorasse la circolazione sanguigna). Nel terzo secolo a.C., Prassagora ebbe l'intuizione che arterie e vene svolgessero ruoli diversi: congetturò che le arterie trasportassero aria mentre le vene trasportassero sangue. Galeno (ca. 130-200 d.C.) fu, in seguito, il primo a riscontrare la presenza di sangue nelle arterie.

Molto più tardi, nel XVII sec., Sir William Harvey inaugurò la ricerca cardiovascolare moderna con il suo *«Exercitatio anatomica de motu cardis et sanguinis in animalibus»*. Dedicandosi alla vivisezione, Harvey osservò che la morfologia delle valvole cardiache nelle vene era tale che esse erano attive soltanto se il sangue fluiva *verso* il cuore. La sua conclusione fu che… «il sangue ha un movimento, ed esso è circolare».

Più tardi, i grandi matematici Leonard Euler e Daniel Bernoulli contribuirono in modo determinante alla comprensione della fluidodinamica sanguigna. Nel 1730 Bernoulli, professore di matematica e anatomia all'università di Basilea, mentre studiava la pressione del sangue formulò la sua celebre legge (*equazione della vis viva*):

$$p + \frac{1}{2} d \left| v^2 \right| = \text{cost}$$

che stabilisce in quale relazione stiano pressione, densità e velocità, mentre nel 1775 Eulero in un celebre lavoro intitolato «*Principia pro motu sanguinis per arterias determinando*» propose le sue famose equazioni differenziali (tuttora fondamentali per descrivere la dinamica dei gas) per rappresentare l'evoluzione della portata e della pressione in un ipotetico vaso sanguigno diritto e monodimensionale. Queste equazioni sono oggi generalizzate per permettere la simulazione del flusso sanguigno in una rete composta da diverse decine di arterie, quelle più significative dell'intero sistema circolatorio.

Nel 19° secolo, J.P. Poiseuille, medico chirurgo e fisico al tempo stesso, stava studiando il flusso del sangue nelle arterie quando derivò il primo modello matematico semplificato del flusso in un tubo cilindrico, un modello che ancora oggi porta il suo nome.

Più tardi, T. Young in una comunicazione alla Royal Society di Londra nel 1809 portò un contributo fondamentale alla ricerca sulle proprietà elastiche dei tessuti arteriosi e sulla propagazione di onde elastiche nella parete arteriosa. All'inizio del 20° secolo, O. Frank propose un modello del sistema circolatorio sfruttando l'analogia con i circuiti elettrici. Nel 1955, J. Womersley, studiando il flusso sanguigno, trovò la controparte analitica del flusso di Poiseuille permettendo una variazione ciclica nel tempo dei gradienti della pressione, una situazione che descrive più accuratamente le effettive variazioni di pressione durante il ciclo cardiaco. Ma bisognerà attendere gli ultimi tre decenni per vedere uno sviluppo impetuoso di modelli matematici del sistema cardiocircolatorio, modelli che hanno posto le basi per la simulazione sempre più complessa ed accurata di cui oggi possiamo disporre.

Durante gli anni Settanta, gli esperimenti *in vitro* o quelli su animali rappresentavano la modalità principale degli studi cardiovascolari. Recentemente, il progredire della fluidodinamica computazionale (ovvero la risoluzione al computer delle complesse equazioni che governano la dinamica dei fluidi), così come l'aumento impressionante della potenza dei calcolatori elettronici e degli algoritmi, hanno prodotto significativi passi in avanti che promettono di rivoluzionare la ricerca vascolare.

Grandezze fisiche come lo *shear stress* (ovvero lo sforzo tangente) sulla membrana endoteliale, assai problematiche da misurarsi in vitro, possono essere calcolate su geometrie reali ottenute con algoritmi di ricostruzione tridimensionale grazie al supporto delle moderne e non invasive tecnologie di acquisizione dei dati (ad esempio, la risonanza magnetica nucleare, l'angiografia digitale, la tomografia computerizzata, l'anemometria doppler).

Un esempio di simulazione dello shear stress a parete nell'arteria polmonare di un bimbo affetto da tetralogia di Fallot è riportato in Figura 1.

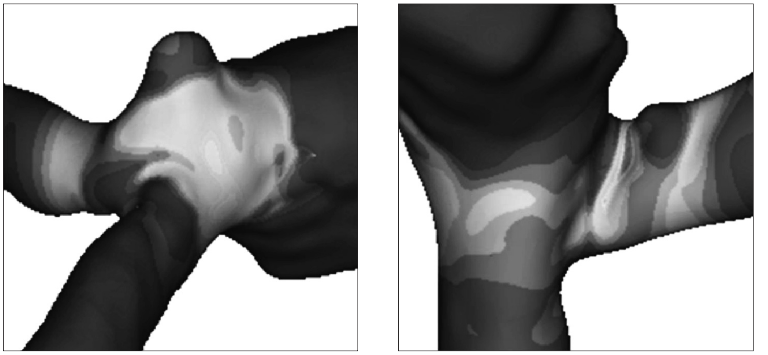


Figura 1 Simulazione dello shear stress sulla superficie dell'arteria polmonare di un bimbo affetto da una malattia cardiaca congenita.

Scorrendo, il sangue interagisce meccanicamente con le pareti dei vasi, dando origine a complessi problemi di interazione fluido-strutturale. In effetti, il fronte dell'onda pressoria trasferisce energia meccanica alle pareti che si dilatano; tale energia viene restituita al flusso sanguigno nella fase di compressione dei vasi stessi.

La simulazione matematica dell'interazione fra fluido e parete arteriosa richiede algoritmi che descrivano sia il trasferimento di energia a livello macroscopico tra il fluido (modellato tipicamente dalle equazioni di Navier-Stokes) e la struttura (modellata con le equazioni della meccanica dei solidi), sia l'influenza a livello microscopico dello shear stress sull'orientamento, la deformazione e il danneggiamento delle cellule endoteliali. Nel contempo, le equazioni del flusso devono essere abbinate a modelli appropriati per descrivere il trasporto, la diffusione e l'assorbimento delle componenti chimiche in gioco (ad esempio ossigeno, lipidi, farmaci) nei diversi strati che compongono la parete delle arterie (intima, media e avventizia). Simulazioni numeriche di questo tipo possono aiutare a chiarire modificazioni biochimiche prodotte da alterazioni nel campo di flusso, dovute ad esempio alla presenza di una stenosi.

Nel sistema cardiovascolare, si riscontrano condizioni di flusso separato e/o generazione di moti circolatori secondari a valle di biforcazioni (per esempio quella carotidea nei suoi rami interno ed esterno, si veda la Figura 2), in presenza di vasi a grande curvatura (come ad esempio l'arco aortico o le coronarie), a valle di regioni con restrizioni (ad esempio dovute alla presenza di stenosi); zone con inversione del flusso (da regioni distali a prossimali); aree a shear stress basso o temporalmente oscillante.

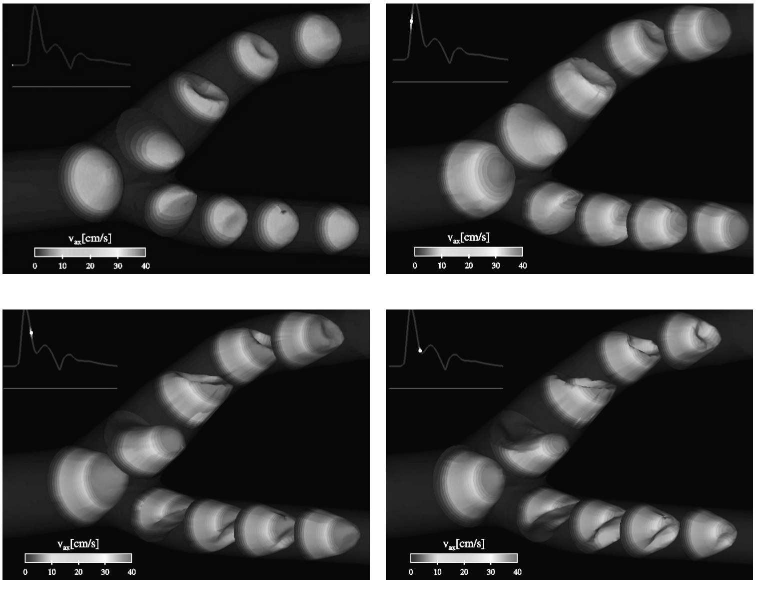


Figura 2 Simulazione del campo di velocità a valle della biforcazione carotidea per quattro diversi istanti della fase sistolica-diastolica.

Queste circostanze sono oggi riconosciute quali potenziali fattori nello sviluppo di patologie arteriose. Una comprensione dettagliata del cambiamento emodinamico locale, degli effetti della modificazione delle pareti vascolari sullo schema del flusso, del graduale adattamento nel medio-lungo periodo del sistema globale a seguito di interventi chirurgici, è oggi non più impossibile grazie all'uso di raffinate simulazioni al computer e potrebbe rivelarsi estremamente utile nella fase preliminare alla realizzazione di un trattamento terapeutico e/o chirurgico.

Verso una modellistica per la chirurgia vascolare

Simulare il flusso in un bypass coronarico, in particolare la ricircolazione che si determina a valle del re-innesto nella coronaria, può contribuire alla comprensione degli effetti della morfologia delle arterie sul flusso e quindi all'evoluzione post-chirurgica.

Ogni anno circa l'8% dei pazienti che si sottopongono all'intervento per l'impianto di un bypass rischiano la ri-occlusione (dopo 10 anni l'80% dei bypass impiantati vengono in genere sostituiti). La ripetizione di procedure di intervento chirurgico comporta un alto rischio di complicazioni: per questo molti aspetti devono essere compresi e controllati per evitare complicazioni e fallimenti post-operatori causati da ricircolazioni, flussi anomali e perturbati, ristenosi, iperplasia, ecc.

Attualmente sono disponibili varie procedure di innesto e varie tipologie di bypass; la simulazione numerica applicata a strumenti matematici di ottimizzazione (individuare opportune grandezze da osservare e ottimizzare) favorisce la comprensione di fenomeni molto complessi all'interno del bypass e quindi suggerire configurazioni ottimizzate a vari livelli: dalla geometria locale (soprattutto nelle zone di innesto) alle grandezze che concorrono a costituire tutta la struttura del bypass (angolo di innesto, rapporto tra il diametro del bypass e dell'arteria nella zona di innesto, distanza tra il nuovo innesto e la stenosi, ecc.).

In Figura 3 si mostra come la teoria del controllo ottimale di forma può aiutare a «progettare» un bypass che minimizzi la vorticità prodotta a valle del re-innesto nella coronaria. Analogamente, lo studio degli effetti delle protesi vascolari e degli impianti di valvole artificiali sull'emodinamica locale e globale può avanzare grazie a simulazioni sufficientemente accurate del campo di flusso del sangue.

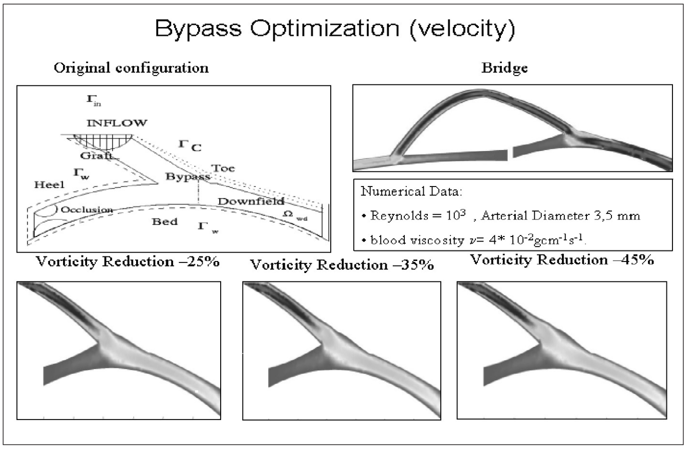


Figura 3 Processo di ottimizzazione matematica della forma di un bypass coronarico.

Il trattamento degli stadi avanzati delle patologie coronariche richiede nella maggior parte dei casi un intervento chirurgico del tipo bypass, angioplastica o l'impianto di uno stent. Lo stent è una micro-struttura costituita da filamenti metallici intrecciati e opportunamente sagomati. Esso viene collocato ed espanso in corrispondenza delle placche arteriosclerotiche fino al diametro originale dell'arteria, al fine di ripristinare una sufficiente sezione del lume dell'arteria e permettere il regolare flusso del sangue. Generalmente questi dispositivi medici vengono lasciati permanentemente nel sito dove sono stati impiantati, tipicamente le arterie coronarie. L'impianto di uno stent e l'angioplastica sono operazioni molto meno invasive e gravose dell'operazione chirurgica di bypass di una coronaria ostruita, oltre ad essere più convenienti anche dal punto di vista economico.

Gli stent cardiovascolari devono soddisfare numerosi requisiti talvolta contrastanti. Ad esempio devono essere estremamente flessibili lungo il loro asse longitudinale per poter essere spinti attraverso arterie di diametro ridotto e di forma tortuosa; devono essere sufficientemente visibili con tecniche radiologiche per essere guidati dall'esterno e posizionati, devono essere facilmente espandibili fino al diametro originale dell'arteria che devono mantenere dilatata; resistere alle sollecitazioni meccaniche imposte da questa; infine devono risultare poco invasivi rispetto al flusso sanguigno e minimizzare i fenomeni trombogenici. Lo studio dell'impatto di uno stent sul flusso sanguigno e sulla pressione arteriosa nella regione dell'impianto e sull'intero sistema cardiovascolare è un problema estremamante complesso in cui la modellistica matematica può venire in aiuto. L'impianto di uno stent in un'arteria modifica infatti le proprietà elastiche e di rigidezza della parete vascolare. Per questa ragione il tratto di arteria in considerazione reagirà, dopo l'impianto, in modo completamente diverso rispetto alla propagazione delle onde di pressione generate dal battito cardiaco. In particolare, l'aumento di rigidezza fa sì che parte dell'energia che si propaga come onda di pressione venga riflessa nella zona prossimale e accelerata in quella distale, generando in alcuni casi una significativa perturbazione sui carichi pressori (si veda in figura 4 la perturbazione indotta da uno stent addominale aortico in prossimità della biforcazione carotidea).

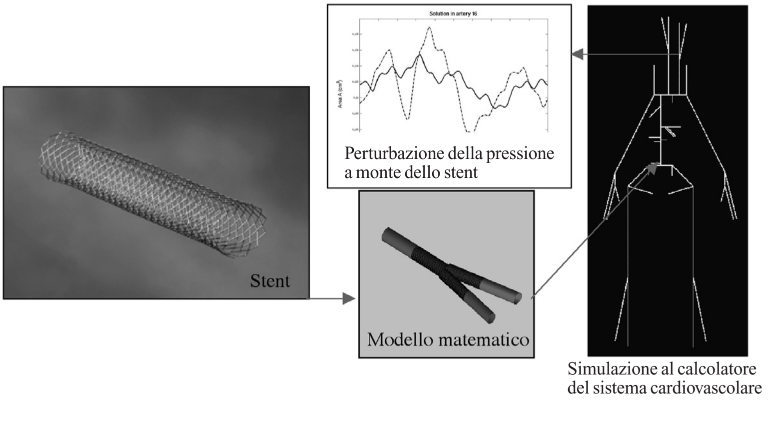


Figura 4 Simulazione numerica della perturbazione della pressione arteriosa in prossimità della biforcazione carotidea dovuta all'impianto di uno stent nella biforcazione iliaca.

La seconda fonte di perturbazione introdotta dagli stent è dovuta alla loro interazione con le cellule della parete vascolare con cui sono a contatto. Metalli come ferro, nichel ecc., di cui sono composti alcune famiglie di stent, possono interagire con le cellule dell'intima e della media (gli strati che costituiscono la parete vascolare) causando una reazione infiammatoria che può portare ad una proliferazione incontrollata delle cellule muscolari lisce contenute nella media, riducendo il lume vascolare. Per contrastare questo fenomeno la ricerca è molto attiva nello sviluppo degli stent a rilascio di farmaco, rivestiti da un microstrato di materiale capace di immagazzinare e rilasciare lentamente un farmaco. I principali elementi di interesse sono la scelta del farmaco e il design di una opportuna matrice capace di immagazzinare e rilasciare il farmaco scelto per lo stent. Inoltre, lo sviluppo di nuove microtecnologie consente di forare opportunamente i filamenti dello stent e di riempire i fori con strati di materiali o sostanze diverse. Questo apre la strada a innumerevoli possibilità per progettare uno stent con un profilo di rilascio predeterminato nel tempo di uno o più farmaci che possono interagire con la parete vascolare o con la superficie di contatto tra lo stent e il sangue. A tal fine, la modellistica matematica e la simulazione al calcolatore permettono di valutare il comportamento di diverse configurazioni, rapidamente e con costi estremamente ridotti rispetto all'indagine sperimentale, mettendo in evidenza quali siano le soluzioni tecnologiche più efficaci. Un ulteriore sviluppo in questa direzione è dato dall'applicazione delle tecniche di controllo ottimale. In questa cornice, un obiettivo non ancora raggiunto ma alla portata delle tecnologie progettuali e produttive è quello di concepire una famiglia di stent a partire da un comune design geometrico diversificati per tipo di farmaco e profilo di rilascio, al fine di adattarsi in modo ottimale alle diverse patologie delle coronarie.

Modelli per simulare condizioni critiche

Una volta sviluppati, i modelli per la simulazione del sistema cardiovascolare possono essere usati per studiare condizioni di flusso in contesti non convenzionali.

Fra i tanti esempi che si possono citare, mi soffermerò su un paio che mi sembrano assai significativi a illustrare il potenziale offerto dalla modellistica matematica in questo ambito. Da un anno la NASA ha lanciato un programma scientifico ambizioso, detto «*Digital Astronaut*», che mira a costruire un modello biomeccanico per valutare la risposta del sistema cardiocircolatorio dell'astronauta in regime prolungato di gravità ridotta. L'obiettivo è quello di trovare contromisure durante la missione e rimedi per favorire il ritorno a condizioni di normalità a missione finita. Dal punto di vista del modello è necessario:

- sviluppare un sistema integrato capace di ricostruire un modello geometrico accurato delle principali componenti del sistema circolatorio, partendo da sosfisticati sistemi di risonanza magnetica per l'acquisizione di immagini;
- simulare la fluidodinamica nel sangue nei grandi vasi (attraverso modelli newtoniani e non newtoniani) nonché nei piccoli vasi e nei capillari;
- tenere conto della dinamica dell'interazione fra sangue e parete dei vasi nonché della cinetica chimica di sostanze che vengono assorbite dalle pareti.

Diventa particolarmente importante la capacità del modello di simulare l'auto-regolazione e il controllo che l'organismo umano sa attivare per contrastare l'alterazione delle condizioni esterne: ad esempio le caratteristiche elastiche dei vasi sanguigni in assenza di gravità cambiano rispetto a quelle standard, in quanto la muscolatura liscia che li circonda è costantemente sotto controllo di stimoli nervosi che reagiscono a qualsiasi variazione biochimica o meccanica.

Fenomeni di adattamento e regolazione sono una caratteristica peculiare di qualsiasi sistema biologico: spesso sono centinaia i meccanismi di *feed-back* che agiscono sullo stato di cellule e tessuti. Tali processi sono codificati tramite complesse reazioni enzimatiche e, soprattutto nel caso di organismi complessi come l'uomo, risultano particolarmente difficili da descrivere in maniera puramente fenomenologica e sperimentale. Per questo motivo, recentemente si assiste allo sviluppo della cosiddetta biologia computazionale: i processi biochimici a livello cellulare vengono sempre più spesso studiati, oltre che in laboratorio, al calcolatore, consentendo una indagine rapida e precisa. Numerosi sono i fenomeni che si riescono a simulare senza bisogno di apparecchiature dedicate: in particolare, citiamo la diffusione e il trasporto di specie chimiche nei tessuti e l'insieme di reazioni accoppiate che caratterizzano l'attività metabolica cellulare. In queso campo, per avere risultati affidabili e validare i calcoli effettuati, il confronto con i dati sperimentali è comunque una tappa obbligata: soprattutto se si tiene conto che non esistono per la biochimica degli assiomi di validità «assoluta», come sono le leggi di Newton per la fluidodinamica. Le equazioni che vengono trattate dal calcolatore sono in tal caso a parametri stimati: tramite ad esempio algoritmi genetici, il modello che meglio rappresenta la realtà viene selezionato agendo opportunamente sui parametri incerti, consentendo di adattare le simulazioni a situazioni diversificate e intrinsecamente variabili, e di valutare l'errore commesso. Questo approccio può essere esteso allo studio del sistema cardiovascolare e dei tessuti alimentati da quest'ultimo in condizioni non-standard, come ad esempio sotto sforzo, o in caso di patologie, oppure ancora dopo l'introduzione di sostanze chimiche nella circolazione.

Ringraziamenti

Le simulazioni numeriche presentate in questa nota sono state realizzate da J. Wynne (Fig. 1), M. Prosi (Fig. 2), G. Rozza (Fig. 3), P. Zunino (Fig. 4).

Bibliografia

Laganà K., Dubini G., Migliavacca F., Pietrabissa R., Pennati G., Veneziani A, Quarteroni A.
Multiscale modelling as a tool to prescribe realistic boundary conditions for the study of surgical procedures. *Biorheology 2002*; 39 (3-4), pp. 359-364, 2002.

Prosi M., Zunino P., Perktold K., Quarteroni A.
Mathematical and numerical models for transfer of low density lipoproteins through the arterial walls: a new methodology for the model set up with applications to the study of disturbed lumenal flow, to appear in *Journal of Biomechanics, 2004.*

Quarteroni A.
Modeling the Cardiovascular System. A Mathematical Adventure, in *SIAM News 34 (5), 2001 (Part I)* and *SIAM News 34 (6),2001 (Part II).*

Quarteroni A., Formaggia L.
Mathematical Modelling and Numerical Simulation of the Cardiovascular System, Chapter 1 in *Modelling of Living Systems, Handbook of Numerical Analysis Series,* pp. 1-101, P.G. Ciarlet et J.L. Lions Eds., Elsevier, Amsterdam, 2004.

Quarteroni A., Rozza G.
Optimal Control and Shape Optimization in Aorto-Coronaric Bypass Anastomoses. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences,* Vol. 13 (12), pp. 1801-1823, 2003.

Quarteroni A., Saleri F.
Scientific Computing with MATLAB, Springer-Verlag: Heidelberg, (257 p.), 2003.

Quarteroni A., Veneziani A., Zunino P.
Mathematical and numerical modelling of solute dynamics in blood flow and arterial walls, *SIAM J. Numer. Anal.* Vol. 39, No 5, (2001), pp. 1488-1511.

2. Screening e consenso informato

Gianfranco Domenighetti[1]

Informed choice in screening is discussed in this paper. Two evidences are shown:

1. The quality and the extent of the information provided to eligible subjects (about explicit and implicit benefits and adverse events of a screening) may dramatically change the willingness of people to participate in testing.
2. Regarding mammography screening the public perception of benefits exceed any raisonable evidence.

Those findings raise serious doubts about informed consent procedures within cancer screening programmes.

Su questa rivista[2] è apparso un contributo dal titolo «Trascrizione del 'Rapporto intermedio su uno screening della valnite'».

Credo di interpretare correttamente il suo senso se penso che mirasse a mostrare, da un lato l'importanza di confrontare gli allievi con la statistica – sanitaria in particolare – e, dall'altro, a quali pericoli di cattiva lettura dei dati si può andare incontro se non si sta debitamente attenti.

I suoi scopi erano, dunque, fondamentalmente didattici: ciò giustifica il suo taglio qualche po' «fantascientifico» e qualche (eccessiva?) semplificazione (ad esempio si dà per scontato che un test abbia la stessa «affidabilità» nel riconoscere sia i veri malati sia i veri sani, il che, purtroppo, non corrisponde alla realtà).

Il problema degli screening è però reale: a che cosa servono? che cosa prevengono? diminuiscono la mortalità (e, se sì, in quale misura)? quali effetti secondari presentano?

Desidero qui esprimere qualche considerazione che consenta ai docenti di approfondire la questione e di sensibilizzarvi se stessi e i propri allievi.

Premesso che

- lo scopo di uno screening di diagnosi precoce è la ricerca di una malattia in assenza dei suoi sintomi;
- si ha un programma di screening quando un importante numero di persone, che si sente in buona salute, è incoraggiato a sottoporsi ad una particolare procedura diagnostica con lo scopo di individuare una malattia nel suo stadio presintomatico;

1. Professore alle università di Losanna e di Lugano, Direttore della Sezione sanitaria, Dipartimento della Salute e della Socialità (Centro collaboratore dell'Organizzazione Mondiale della Salute - OMS) del Cantone Ticino.
2. Giorgio Mainini, «Trascrizione del 'Rapporto intermedio su uno screening della valnite'», BDM 46.

- l'ipotesi soggiacente è che quanto prima una malattia viene diagnosticata, tanto più efficace sarà il suo trattamento e/o tanto migliore il suo esito (in termini di mortalità, disabilità, morbidità, ecc.),

comincerò con la descrizione di due situazioni reali, sottoposte a due collettivi di 450 persone ciascuno.

Prima situazione

Nel corso di una visita di routine il medico vi chiede se siete disposti a sottoporvi a un test diagnostico (consistente in un semplice esame del sangue) per l'identificazione precoce del cancro al pancreas (cioè: per diagnosticare la malattia prima che ne avvertiate i sintomi). Siete disposti a sottoporvi al test? (Risposte possibili: Sì – No – Prima di decidere voglio chiedere un secondo parere).

Seconda situazione

Come sopra, ma con le seguenti informazioni aggiuntive:

a) il test non è molto affidabile: solo il 30% dei positivi ha davvero il cancro al pancreas;
b) di conseguenza tutti i «positivi» dovranno sottoporsi ad ulteriori esami, ivi compresa una risonanza magnetica, con breve degenza in ospedale, per confermare o no la diagnosi;
c) ogni anno in Svizzera circa 11 persone su 100'000 si vedono confermata la diagnosi di cancro al pancreas;
d) il cancro al pancreas è praticamente incurabile (ogni 100 malati solo 3 sono ancora vivi dopo cinque anni).

Siete disposti a sottoporvi al test?
(Risposte possibili: Sì – No – Prima di decidere voglio chiedere un secondo parere).

Queste due situazioni (sottoposte mediante questionari nel 1998 a un campione rappresentativo di 1000 svizzeri di età superiore ai 20 anni, suddivisi a caso in due gruppi di 500 persone ciascuno) ha dato i seguenti risultati (Domenighetti et al., 2000):

	Gruppo con solo informazione «base» tasso di risposta = 80% N = 401	Gruppo con informazioni aggiuntive tasso di risposta = 93% N = 466
Accetta	60%	13,5%
Non accetta	32%	72%
Vuole una seconda opinione	8%	14,5%

Questo risultato mostra inequivocabilmente che la quantità e la qualità delle informazioni date *ex-ante* alle persone eleggibili allo screening **modifica la disponibilità dei soggetti ad accettare o meno la prestazione**.

Passiamo ora ad uno screening ben più promosso e praticato: quello della **diagnosi precoce del cancro al seno tramite esame mammografico**.

Su questa tematica di grande rilevanza sociale esistono due «opinioni» circa l'efficacia dello screening mammografico. Opinioni, poiché l'evidenza scientifica non può essere che una sola. In effetti due meta-analisi, che hanno praticamente incluso i medesimi studi, giungono a conclusioni diametralmente opposte.

A) Visione ottimista

La prima meta-analisi, pubblicata nel 1995 sul Journal of the American Medical Association, concludeva che lo screening riduceva significativamente la mortalità per tumore al seno nella misura del 23% dopo 7,5 anni di «follow-up» nelle donne di età compresa tra i 50 e i 74 anni. (Kerlikowske et al., 1995)

B) Visione pessimista

La seconda meta-analisi, che includeva praticamente i medesimi studi, effettuata dai danesi Gøtzsche e Olsen e pubblicata nel 2000 sulla rivista inglese Lancet, concludeva al contrario che lo screening mammografico non riduceva la mortalità per tumore al seno. Gøtzsche e Olsen avevano analizzato nel dettaglio gli studi precedenti e, al contrario di Kerlikowske, ne avevano eliminati dalla meta-analisi un certo numero poiché la randomizzazione non era stata effettuata in modo corretto, il che aveva provocato una sovrastima dei benefici dello screening che non ci sarebbero invece stati se i due gruppi (d'intervento e di controllo degli studi eliminati) fossero stati esattamente confrontabili per tutta una serie di fattori socio-demografici.

Le seguenti tabelle riassumono le due «visioni»: quella «ottimista» di Kerlikowske et al. (riduzione del 23% della mortalità per tumore al seno), e quella «pessimista» di Gøtzsche e Olsen (nessuna riduzione dei decessi).

Visione «ottimista»

(1000 donne di 50 e più anni di età «mammografate» ogni 2 anni per 10 anni)

	Screening	
	Sì	No
Numero di donne che svilupperanno un tumore al seno (CH/registro dei tumori GE)	45	45
Casi identificati dalla mammografia (= 88%)	40	0
In vita dopo 10 anni	28	24
Decedute dopo 10 anni	12	16
Decessi evitati (= beneficio dello screening)	4	0
Falsi positivi (mammogrammi)	100-250	0
Biopsie chirurgiche «inutili»	50	0
Falsi negativi (N donne)	5	0
Numero di donne a cui è stata anticipata la diagnosi di 3 o 4 anni senza riduzione della mortalità concomitante	36	0

Visione «pessimista»
(1000 donne di 50 e più anni di età «mammografate» ogni 2 anni per 10 anni)

	Screening	
	Sì	No
Numero di donne che svilupperanno un tumore al seno (CH/registro dei tumori GE)	45	45
Casi identificati dalla mammografia (= 88%)	40	0
In vita dopo 10 anni	24	24
Decedute dopo 10 anni	16	16
Decessi evitati (= beneficio dello screening)	0	0
Falsi positivi (mammogrammi)	100 – 250	0
Biopsie chirurgiche «inutili»	50	0
Falsi negativi (N donne)	5	0
Numero di donne a cui è stata anticipata la diagnosi di 3 o 4 anni senza riduzione della mortalità concomitante	40	0

Riassumendo:

su 1000 donne di 50 e più anni di età «mammografate» ogni 2 anni per 10 anni ne abbiamo

- forse «salvate» poche evitando loro il decesso prematuro (da 0 a 4);
- «danneggiate» di più (da 36 a 40) anticipando loro di 3 o 4 anni la consapevolezza di avere un cancro al seno senza che questo fatto abbia comportato una riduzione della mortalità concomitante;
- sottoposto centinaia ad ansia, falsi allarmi, false riassicurazioni e biopsie chirurgiche inutili, nonché probabilmente ad eccessi diagnostici e terapeutici.

Operativamente quale conclusione ricavare dallo screening mammografico? L'unica indicazione è probabilmente quella che la scelta finale debba essere lasciata alla donna e non indotta da slogan che non rendono giustizia all'evidenza (anche se duplice) epidemiologica. Per fare ciò è indispensabile che la decisione di sottoporsi o no allo screening sia preceduta da un'informazione esaustiva e comprensibile che, come ci si è potuti render conto, non è evidente poter dare. I promotori dello screening di regola utilizzano due soli argomenti per indurre il consenso ed il consumo di questa prestazione. Essi diffondono verso la società civile il messaggio che:

- una donna su 9 o 10 sarà colpita da cancro al seno nel corso della vita;
- sottoporsi allo screening mammografico è il modo più semplice, efficace e conveniente per ottenere la guarigione ed evitare il decesso (enfatizzando cioè i benefici e sottacendo sistematicamente i rischi e gli eventi indesiderati e non menzionando le incertezze e le controversie di tipo scientifico).

In conclusione

L'evidenza sperimentale mostra che la qualità e l'estensione dell'informazione può modificare la disponibilità a sottoporsi a screening. Un nostro recente studio (Domenighetti et al., 2003) condotto in quattro nazioni ha mostrato come tra il 60% e l'80% delle donne crede (sic!) che sottoporsi regolarmente alla mammografia **eviterà**

di ammalarsi un giorno di tumore al seno e che solo il 3%-5% delle donne stima correttamente il numero di decessi per cancro al seno che, secondo la visione «ottimista», è possibile evitare grazie alla mammografia. Essa dimostra pure che l'aspettativa riposta nello screening mammografico supera ogni ragionevole evidenza.

Di conseguenza, è un imperativo etico quello di permettere sin dal principio ad ogni soggetto eleggibile una scelta individuale pienamente informata sulla decisione di sottoporsi o no ad uno screening.

La popolazione deve essere pienamente e onestamente informata *ex-ante* sui benefici, i rischi, gli effetti secondari e le incertezze allo scopo di permettere l'integrazione delle aspettative personali e dei propri valori di vita nella decisione di sottoporsi o no a un programma di screening.

Urge oggi particolarmente adattare il contenuto del materiale informativo d'invito allo screening (dépliants, brochures e altro) alle evidenze disponibili e metterlo in una forma comprensibile ed effettivamente utilizzabile.

Per facilitare la comprensione e fornire stime più realistiche dei benefici e degli effetti indesiderati essi devono essere presentati in termini assoluti e non come percentuali senza una base di riferimento.

Senza mai dimenticare che
trovare una cura è più importante
che diagnosticare una malattia.

Bibliografia

Domenighetti G, Grill R., Maggi J.
Does provision of an evidence-based information change public willingness to accept screening tests? *Health Expectations 2000*; 3, p. 145-150, 2000.

Kerlikowske K., Grady D,. Rubin S., Sandrock C., Ernster V.L.
Efficacy of screening mammagraphy: a meta-analysis. *JAMA 1995*, p. 149-154, 1995.

Gøtzsche e Olsen
Is screening for breast cancer with mammography justifiable. *Lancet 2000*, Vol 355, p. 129-134, 2000.

Domenighetti G., D'Avanzo B., Egger M., Berrino F., Perneger T., Mosconi P., Zwahlen M.
Women's perception of the benefits of mammography screening: population-based survey in four countries. *International Journal of Epidemiology 2003*, 32, p. 816-821, 2003.

3. Statistica, democrazia e coscienza pubblica

Carlo Malaguerra[1]

Since its theoretical and mathematical origines as well as its practical applications in the 17th century, statistics has developed as an autonomous science. Statistical science applied to the observation of society played an important role in the nation building process and in the implementation of modern democracies. Official statistics – defined as the objective and independent observation of the state and the evolution of society – has become one of the most important infrastructural activities of democratic regimes. Statistics in this sense is a precondition for objective knowledge of social facts – an evidence which is directly linked to human development and good government.

1. Introduzione

«Dio non gioca ai dadi». Così Albert Einstein espresse il suo scetticismo per la teoria quantistica della fisica moderna, in una lettera del 7 settembre 1944 al suo collega e amico Max Born[2]. Einstein fu un determinista puro. Non si potè mai conciliare con l'idea di concepire una teoria basata sull'approssimazione probabilistica di una realtà difficilmente osservabile.

Certo che, creando l'universo, per restare all'immagine di Einstein, Dio non giocò ai dadi – se non per divertimento fra l'una e l'altra delle sue creazioni. Ed è pure chiaro che l'universo è retto da un rigoroso determinismo. Ma l'uomo non ha (ancora) le facoltà sufficienti per capire e spiegare l'universo e dimostrare in modo coerente il suo funzionamento – e dunque le leggi fisiche che lo governano – in modo assoluto. La conoscenza attuale dell'universo – micro o macro che sia – è in buona parte frutto dell'approccio probabilistico. I metodi statistici sono dunque strumenti essenziali per l'approssimazione successiva alla conoscenza di una realtà soltanto indirettamente o parzialmente osservabile[3].

Se il regno della fisica è confrontato con problemi fondamentali di misura dei fenomeni universali, ci si può facilmente immaginare quali e quanti possano essere le questioni riguardanti la conoscenza del reale nel campo delle scienze sociali. In fisica, i fenomeni sono ripetibili, teoricamente ad libitum. Nelle scienze sociali abbiamo a che fare con fenomeni unici irripetibili: il laboratorio è la realtà legata al tempo. Ma gli strumenti di misura nella fisica e nelle scienze sociali sono fondamentalmente identici: gli strumenti della scienza statistica.

---

1. Già direttore dell'Ufficio federale di statistica.
2. [10] p. 93.
3. Pierre-Simon Laplace, uno dei primi e più importanti rappresentanti della teoria della probabilità e che influenzò tutte le generazioni di studiosi successivi, espose chiaramente nella sua «Théorie analytique des probabilités» (1812) che è l'ignoranza delle relazioni fra fenomeni diversi (nell'universo) a farci pensare che la natura è retta dal caso.

2. Matematica e statistica

La statistica è una scienza relativamente moderna. È soltanto nel corso del 20° secolo che alla statistica viene conferita la qualità di scienza autonoma. Le sue origini sono essenzialmente duplici: le origini teoriche, legate in parte alla teoria delle probabilità, e le origini legate all'osservazione di fenomeni del reale.

Le origini teoriche hanno le loro radici nella matematica; d'altronde, numerosi e famosi matematici sono annoverati anche come statistici o come studiosi che hanno dato impulsi essenziali allo sviluppo della statistica. C'è chi afferma che la statistica, nell'accezione moderna, nasce con la codificazione della teoria delle probabilità. Anzi, per lungo tempo, ma in modo scorretto, si soleva chiamare la statistica la scienza delle probabilità. Si ritiene che la teoria del calcolo delle probabilità sia da attribuire a Blaise Pascal[4] e a Pierre de Fermat[5] nella loro corrispondenza del 1654[6]. Come sempre, le grandi scoperte sono precedute da lavori di studiosi che ne preparano per così dire il terreno[7]. Il Medioevo non è infatti privo di opere che trattano della fortuna nel gioco e del problema dei punti nello spazio. Ma a nessuno di questi precursori riesce la formulazione matematica generale del problema. C'è invece chi afferma[8] che la statistica come si definisce oggi trae le sue origini dalla scoperta del metodo dei minimi quadrati da parte di Adrien-Marie Legendre. Legendre, allievo di Laplace, grande matematico, conosciuto per i suoi lavori sulla teoria dei numeri e sulla geometria, studioso di astronomia, pubblicò un lavoro dedicato alle «Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes», nel 1805. Scopo del metodo proposto era di determinare i risultati più accurati possibili da una serie di osservazioni di un fenomeno dato (in questo caso la traiettoria delle comete). Sebbene il metodo dei minimi quadrati proposto non facesse uso di concetti probabilistici, presentava per la prima volta un metodo d'interpretazione e di analisi per una serie di osservazioni su una realtà data. L'osservazione è sempre soggetta a errori, anche in fisica o in astronomia. Il metodo di Legendre permetteva di minimizzare, con un metodo scientifico, gli errori di misura e di presentare il risultato più vicino al vero valore.

Che la statistica sia nata con Pascal o con Legendre, non è cosa essenziale. L'importante è di ritenere che sia la teoria delle probabilità, sia l'analisi delle serie di dati o di misure di un fenomeno determinato sono gli ingredienti maggiori della

4. [4], p 17-22. Nelle sue «Pensées», Blaise Pascal sviluppa il senso della teoria delle probabilità con un esempio assai delicato. Una persona dovrebbe scommettere sull'esistenza di Dio perché, anche se la probabilità della sua esistenza fosse minima, il valore della salute eterna è infinita nel caso in cui Lui esistesse: così, il valore della probabilità dell'ipotesi secondo cui il Signore esiste è di molto maggiore di quello dell'ipotesi secondo cui Lui non esistesse.
5. [4], p. 11-13.
6. Si apre un nuovo e ampio settore della ricerca matematica, legato al nome di eminentissimi studiosi: Christiaan Huygens, Jakob Bernouilli, Abraham de Moivre, Daniel Bernoulli, Thomas Bayes, Rogerius Josephus Boscovich, Marquis de Condorcet, Pierre-Simon Marquis de Laplace, Adrien-Marie Legendre, Karl Freidrich Gauss, Siméon-Denis Poisson, Adolphe Quetelet, George Boole, Pafnutil Tschebichef, Wilhelm Lexis, Vilfredo Pareto, Andrei Markov, Karl Pearson, Irving Fisher, Corrado Gini, Prasanta Mahalanobis, Ragnar Frish – per non citare che alcune personalità fra molte altre.
7. [4], p. 3-7.
8. [12].

nuova disciplina che si sviluppa sempre più in modo autonomo e acquisisce, coi decenni, lo statuto di scienza indipendente.

Ma perché il nome di statistica?

3. Statistica: la scienza dello stato e la coscienza nazionale

Per quanto concerne le origini della statistica legate all'osservazione del reale si potrebbe farle risalire all'epoca babilonese o egizia o fenicia o ancora, più vicina a noi, all'epoca romana. È vero che gli egizi già procedevano all'enumerazione della popolazione, del bestiame o delle terre coltivabili. Dire però che queste operazioni erano statistiche è come affermare che l'invenzione delle cifre coincide con l'origine della matematica. Contare non è necessariamente né un'operazione matematica né una statistica.

I primi lavori nel campo dell'osservazione di fenomeni legati alla vita sociale nascono in Inghilterra, con John Graunt e William Petty (17° secolo). È appunto attorno a questi studiosi che viene fondata la scuola dell'aritmetica politica, definita da Charles Davenant come «l'arte di ragionare, in base a osservazioni numeriche, sulle cose che concernono lo Stato». Graunt è il primo studioso ad occuparsi delle tavole di mortalità (sviluppate in seguito dall'astronomo Halley): scopre la sovranatalità maschile, prevede che, a Londra, nella metà del 17° secolo, su 100 bambini nati vivi, 36 moriranno prima di aver raggiunto l'età di 6 anni e 7 persone raggiungeranno l'età di 70 anni. Cifre mai viste prima nella loro crudezza scientifica.

La nozione di aritmetica politica come metodologia che serve anzitutto alla raccolta, all'ordinamento, alla classificazione e all'analisi di serie di dati numerici sullo stato e l'evoluzione della società nei suoi differenti aspetti, non ha però successo. Viene abbandonata a favore di un altro termine: la statistica. Sembra che questa nozione sia stata introdotta da una professore tedesco, Gottfried Achenwall, in uno dei suoi corsi all'università di Göttingen nel 1749, per indicare quegli studi che hanno a che fare con la descrizione delle cose dello Stato. Il termine di statistica nasce dunque in un contesto ben definito e come metodo analitico-descrittivo. Nel 1838 viene fondata la Royal Statistical Society che ufficializza per così dire il termine di «statistics», definito come «la descrizione delle condizioni e delle prospettive della società». La statistica è nata dunque come disciplina che doveva servire a descrivere, studiare, analizzare i fatti sociali sulla base di dati numerici. Questo termine viene poi adottato dal mondo scientifico – un fatto curioso – per designare l'insieme dei metodi matematici che permettono di trovare le leggi che caratterizzano una grande quantità di dati. Anche per questo, talvolta, e in senso volgarizzatore, si definisce la statistica come la legge dei grandi numeri.

Non si deve dimenticare il contesto generale entro cui si muove la statistica. A partire del 17° secolo si osserva uno sviluppo senza precedenti delle scienze. Abbiamo accennato, qui sopra, alla matematica. Ma tutte le scienze naturali conoscono in quel periodo una rapida e profonda evoluzione. È il periodo dell'illuminismo e del razionalismo, della ricerca della verità oggettiva, della fede nell'approccio scientifico, della sete della conoscenza dell'universo, dell'applicazione delle scoperte scientifiche nel mondo del lavoro. Fioriscono le Società e le Accademie scientifiche nei diversi paesi[9]. La rivoluzione industriale, l'avvento della borghesia, la massificazione della società e i profondi rivolgimenti sociali stanno per travolgere un sistema politico ormai incapace di dirigere una società in pieno rivolgimento. Anche nel campo sociale, economico e politico, i lavori per la conoscenza oggettiva della realtà si fanno sempre più numerosi e portano alla luce situazioni tutt'altro che incoraggianti. Sono per lo più studiosi di scienze naturali e mediche a occuparsi per primi della realtà sociale. Per rapporto alle scienze naturali, i progressi nelle scienze sociali sono comunque esigui. Questo in larga misura perché le informazioni contenute negli studi su fenomeni diversi della vita sociale disturbano il quieto vivere e mettono a repentaglio un potere politico già indebolito. Ne fa una tragica esperienza Johann Heinrich Waser, pastore, ricercatore scientifico e patrizio della città di Zurigo, che accusato di tradimento, fu decapitato il 27 marzo 1780[10]. Sebbene le circostanze di questa condanna non siano del tutto chiare, sta il fatto che il tribunale della città di Zurigo era fortemente influenzato dall'avversione della classe politica dirigente verso la famosa «aritmetica politica», una disciplina cara al pastore Waser. Infatti egli procedette a uno studio approfondito sugli edifici, sui loro prezzi (e dunque anche sul fenomeno dell'inflazione) e sul valore degli affitti a Zurigo. Le conclusioni di questa analisi mettevano in evidenza una situazione socio-economica estremamente precaria per una buona parte della popolazione della città e, indirettamente, potevano essere interpretate come un'accusa alla cattiva gestione del governo cittadino. Anche se unico nella storia europea e nella sua portata, questo esempio illustra quanto difficile sia rispettare la verità dei fatti per rapporto all'ideologia o agli interessi vigenti. Bisognerà aspettare il regime stalinista per ritrovare l'orrore della dittatura ideologica.

4. Statistica pubblica

Il 18° secolo vede quindi fiorire numerose iniziative di studiosi, di accademici, di società scientifiche, volte ad analizzare un certo numero di fenomeni sociali per poter capire e interpretare l'evoluzione della realtà in cui vivono gli abitanti di un paese. Sono studi sulla demografia, sulla sanità e sull'igiene, sulla povertà, sui prezzi, sui redditi, ecc. Così si accumulano conoscenze importanti sul funzionamento di una società: ma si distillano pure informazioni che mettono il dito sulle debolezze del regime di una nobiltà decadente. C'è chi parla di «statistica militante»[11].

Ma è il 19° secolo che segna lo sviluppo più importante della statistica. Anzi, è nel corso di quel secolo che la statistica diventa una funzione dello Stato moderno, uno strumento essenziale per l'esercizio dei diritti democratici e la partecipazione dei cittadini alla cosa pubblica. Un'evoluzione che coincide con il processo di creazione degli stati nazionali, ispirati al regime democratico, garanti dei diritti dei cittadini. L'informazione statistica diventa bene pubblico, è accessibile a tutti, diventa strumento di gestione della società e conoscenza per il cittadino. È d'obbligo citare in questo contesto – e in qualità di svizzero-italiani – Stefano Franscini e Carlo Cattaneo, come rappresentanti di quella cerchia di persone «éclairées» del 19° secolo, che hanno lottato

9. [5], p. 49-62.
10. [6], p. 37.
11. [3], p. 20.

con tutte le loro forze per la democrazia, la libertà, la trasparenza e l'oggettività. Soltanto il cittadino affrancato è capace di esercitare i diritti democratici e, viceversa, la democrazia, per poter prosperare, ha bisogno della partecipazione intelligente del cittadino. Così, tutte le forze vive della nazione sono chiamate a costruire insieme l'edificio della nuova democrazia. Democrazia e statistica diventano un binomio inseparabile.

Lo sviluppo della statistica, come scienza dell'osservazione dello stato e dell'evoluzione della società, nel corso del 19° secolo, non può essere capita senza tener conto della genesi e del contenuto del concetto di «nazione». Infatti è appunto durante quel secolo che nasce la coscienza di appartenenza non soltanto a un certo spazio geografico ma anche – e forse soprattutto – a uno spazio culturale. È il passaggio da una società agraria – dotata di una struttura politico-sociale ben specifica – a una società industriale, massificata, globalizzata (già!), in un certo modo unificata che segna il cammino verso lo stato-nazione. La società industriale è ormai complessa, ha le sue leggi e i suoi interessi economici: richiede da un lato la formazione di un mercato del lavoro e della libertà (forse meglio della disponibilità) della società civile per le nuove attività e d'altro lato richiede la creazione di un governo capace di rappresentare e di gestire, all'interno come all'esterno, gli interessi di tutti gli attori della società. Come affermano Sofia e Garonna[12] «economia politica e opinione pubblica sono quindi elementi necessari, anche se non sufficienti, alla costruzione delle moderne identità nazionali». E questa identità, nello spirito della visione liberale, dell'oggettività e dell'ispirazione ai criteri scientifici, deve corrispondere a una realtà concreta, tangibile e differenziata sia nella struttura, sia nello spazio e sia nel tempo. In questo senso, non c'è identità se non legata all'osservazione dei fatti sociali dello stato-nazione. Il concetto di identità si vuole forzatamente dinamico, cioè in sintonia con la realtà mutevole. È appunto questo il compito della statistica, uno strumento dello Stato per il cittadino ormai libero, partecipe, emancipato. Una visione ideale dello stato nazionale: e come tutte le visioni, una meta irta di ostacoli e di insidie. Forse l'insidia più perfida sarà la sostituzione del concetto vero di identità che possiamo chiamare «reale» a quello pernicioso di identità «mitica»[13].

Con la creazione degli stati-nazioni nell'800, con il sorgere delle identità nazionali, con lo sviluppo dell'economia e dunque degli scambi di merci ma anche di persone, con la presa di coscienza degli «interessi» nazionali in un contesto internazionale, sorge il bisogno di poter disporre di dati statistici comparabili fra paesi. Nasce così l'idea di fare della statistica un linguaggio comune dei popoli: altra visione essenziale dello spirito liberale e democratico di quel secolo. Lo sviluppo della statistica internazionale è legata al nome di Adolphe Quetelet[14], contemporaneo di Franscini, di origine belga, matematico, fisico, astronomo, sociologo e statistico. Spirito universale, autore di più di 400 comunicazioni scientifiche e grande volgarizzatore[15], Quetelet

12. [3], p. 17.
13. Cf. Eric J. Hobsbawm « Nationen und Nationalismus – Mythos und Realität», Campus Verlag, Frankfurt, 2004.
14. [4], p. 127-131. Su Quetelet esiste una bibliografia assai importante. Vale la pena la lettura dell'articolo di Naúm Reichesberg «Der berühmte Statistiker Adolf Quetelet, sein Leben und sein Wirken», apparso nella «Zeitschrift für Schweizerische Statistik», Jg. 32, 1896, p. 418-460.
15. Interessante in questo contesto è la pubblicazione, nel 1827, di un libretto che Quetelet intitola «Instruction populaire sur le calcul des probabilités», la cui lettura resta tuttora da consigliare.

fonda nel 1853 quello che diventerà l'Istituto Internazionale di Statistica, una conferenza internazionale che si fissa come scopo l'armonizzazione delle statistiche nazionali. L'Istituto esiste tuttora, ma con scopi e contenuti diversi. L'armonizzazione delle statistiche nazionali diventa una delle prerogative della Società delle Nazioni e, poi, dell'Organizzazione delle Nazioni Unite e delle sue organizzazioni specializzate. Oggi, in modo più o meno affidabile, tutte le statistiche nazionali sono prodotte sulla base di definizioni, classificazioni e nomenclature standardizzate a livello mondiale e regionale (per esempio europeo).

5. Scienza statistica e applicazioni

L'Istituto Internazionale di Statistica (IIS) sopraccitato raggruppa grossomodo tre categorie di statistici attivi in altrettanti settori: l'accademia, l'economia privata e l'amministrazione pubblica. In teoria, l'università dovrebbe fornire quell'insegnamento e dovrebbe intraprendere quella ricerca che alimenta il processo della trasmissione delle conoscenze a tutti gli esperti statistici attivi nel settore privato e in quello pubblico. In realtà, però, le cose non funzionano così bene, e questo per molte ragioni che hanno origini sia nella storia sia nella specializzazione e sub-specializzazione della materia. Anzi, c'è chi afferma che vi sia un abisso fra gli statistici teorici e quelli che si dedicano alle applicazioni: si denuncia l'esistenza di una sorta di «statistica nobilis» (i «cols blancs» dei francesi) e di una «statistica vulgaris» (i «cols bleu»). Siamo lontani da un approccio integrato, da una visione comprensiva della scienza statistica, anche se certi progressi in questo senso sono stati effettuati negli ultimi due decenni. È ormai una delle grandi costanti del sapere moderno: lo sviluppo enorme delle conoscenze scientifiche ha reso la specializzazione obbligatoria. Chi si specializza, se non ha il dono dello spirito universale, si chiude per così dire nella limitata realtà della sua materia. Troviamo sia in campo universitario sia al di fuori eminenti esperti il cui «raggio di azione» è, in molti casi, limitatissimo. La soluzione di problemi, anche di debole complessità, necessita quindi il lavoro di più esperti, ciò che non facilita il compito. Occorre anche aggiungere che, se i metodi statistici hanno validità universale, la loro applicazione a realtà diverse domanda un adeguamento del metodo. Per esempio: il metodo di campionamento di una popolazione botanica (bosco, fiori, polline, ecc.) avrà particolarità differenti di un metodo applicato a una popolazione umana (inchiesta rappresentativa sul mercato del lavoro, sulla salute, ecc.) e ancora differente da quello applicato a sostanze fisiche (molecole di gas, di liquidi, di solidi). Tutto questo per dire che la scienza statistica, forse più di altre scienze, è particolarmente soggetta all'approccio per compartimenti[16]. Infatti la statistica, oltre ad essere una scienza autonoma, assume il ruolo di scienza ausiliaria per tutte le altre scienze (naturali, umane, sociali o mediche che siano). Si può affermare che oggi non c'è più una scienza che non abbia la necessità dell'analisi quantitativa, non c'è applicazione tecnologica seria che non faccia appello ai metodi statistici, non c'è produzione di beni e servizi affidabile che non abbia introdotto nel suo processo gli strumenti della statistica, non c'è informazione oggettiva sullo stato e l'evoluzione della società

16. Su questo problema esiste una bibliografia assai importante. Si può consultare, come esempio, l'articolo di Zoltan Kenessey «The partnership of Official Statistics and Academia: the International Context», in [5], p. 33-48.

che non usi la scienza statistica. Il più delle volte nessuno di noi lo sa e, quindi, non sa apprezzare gli insegnamenti della scienza statistica. Anzi, chi parla di statistica o non è visto di buon occhio oppure viene schernito con una delle cento facilonerie più o meno spassose che circolano in questo campo. Una tragica manifestazione dell'ignoranza collettiva.

6. Statistica pubblica e non-democrazia

Come detto prima, statistica pubblica e democrazia sono un binomio inseparabile, statistica pubblica considerata come servizio dell'amministrazione pubblica che ha come scopo l'osservazione oggettiva e autonoma dello stato e dell'evoluzione della società. Infatti, solo la piena indipendenza nel lavoro scientifico e nella diffusione delle informazioni da parte degli Istituti di statistica è garante del libero dibattito democratico in un paese. Se viene indebolita l'istituzione della statistica pubblica o, molto più grave, se il potere politico censura e manipola le informazioni prodotte, è segno che il sistema democratico è in crisi o è addirittura sparito.

Il 20° secolo ci ha purtroppo confermato questo sacrosanto principio. I regimi comunisti, dapprima, i regimi fascisti, poi, hanno infranto la regola assoluta dell'indipendenza della statistica pubblica in rapporto al potere politico. Dopo la presa di potere di Stalin negli anni '30 nell'allora Unione Sovietica, le statistiche ufficiali sono diventate strumenti a disposizione del potere e informazioni di propaganda ideologica. Si sa che i risultati dei censimenti della popolazione, per esempio, rispecchiavano la visione politica e i miti dei dirigenti e non la realtà del paese. Si sa pure che gli statistici che non si prestavano alle manipolazioni finivano come il povero Waser a Zurigo, ma senza processo. La statistica ufficiale aveva una posizione strategica nel governo: il capo dell'Istituto di statistica aveva il rango di ministro, così come ministro era il responsabile del piano. E naturalmente gli obiettivi fissati nel piano coincidevano con le statistiche... La situazione non fu molto differente nei cosiddetti paesi satelliti. È stato provato[17] che nell'ex Repubblica Democratica Tedesca si falsificavano, ad esempio, i conti economici, e non di poco. Pratiche che hanno contribuito a portare queste economie pianificate al collasso. Non era più possibile, infatti, anche per i dirigenti, conoscere lo stato reale del paese e, quindi, prendere decisioni coerenti. Il fatto grave, comunque, è che nei nostri paesi occidentali non ci si è accorti di quanto stava succedendo in quei paesi. La sorpresa fu totale dopo la caduta del muro di Berlino. Ma era molto tardi.

Gli studi effettuati sulla relazione fra istituti nazionali di statistica e potere politico durante gli anni del fascismo lasciano trasparire un quadro non così desolante come nei paesi comunisti ma, comunque, assai allarmante. L'istituto di statistica, in quei regimi, era a disposizione del potere. Nella Germania nazista, per esempio, due fatti meritano di essere evocati. Il primo concerne il censimento delle aziende (o della produzione) eseguito nel 1936. Nell'introduzione al fascicolo dedicato alla pubblicazione dei risultati, nel 1939, vi si dice esplicitamente che uno degli scopi del censimento era la miglior preparazione della guerra da parte della Germania. Inoltre, nella pubblicazione non si trovano informazioni sulle industrie cosiddette strategiche,

17. Vedi [15].

censurate. Il secondo fatto concerne il censimento della popolazione del 1939. Agli statistici fu imposta la distribuzione, con i formulari ordinari per il censimento, di un questionario supplementare destinato ai cittadini «di razza ebrea». Le informazioni raccolte dovevano servire all'organizzazione della soluzione finale. Uno studio recente[18] ha mostrato che i servizi dell'amministrazione nazista non utilizzarono mai queste informazioni a scopi personali, perché gli statistici ebbero dei ritardi nell'elaborazione dei risultati. Ciò non toglie che una simile operazione già di per sé altera completamente il senso della statistica pubblica.

7. Statistica pubblica in transizione

La caduta del muro di Berlino e lo sfacelo dei regimi a economia pianificata negli anni '90 hanno trovato impreparata la comunità internazionale sia per quanto concerne la dimensione del fenomeno sia – e questo è più grave – dal punto di vista intellettuale. La separazione del mondo in due grandi regioni d'influenza costituiva una situazione d'equilibrio ed era accettata da dirigenti e società civile e sembrava che dovesse durare ancora a lungo[19]. La reazione dell'occidente a questa grande sorpresa fu all'inizio assai spontanea, salvo nel caso della Germania. La situazione nei diversi paesi era infatti assai caotica, a causa, fra l'altro, come detto sopra, della mancanza di informazioni sulla reale situazione economica, sociale e ambientale. Poi, col passare del tempo, i paesi occidentali e le varie organizzazioni internazionali fornirono a tutti questi paesi un aiuto massiccio. Lo scopo essenziale di questo slancio di solidarietà era di permettere ai paesi in transizione da un'economia pianificata a un'economia di mercato di dotarsi di istituzioni democratiche. Una fra le prime misure prese nei confronti dei paesi ex-comunisti fu la creazione di istituti di statistica degni del loro nome e milioni di dollari furono investiti in questi progetti. La statistica era uno dei presupposti per l'istituzione di regimi democratici. La democrazia, comunque, non è un regime che cade dal cielo e non può venir imposto con un atto di volontà o di violenza. È un regime che deve essere sentito e vissuto dall'intera società civile. In occidente, nei primi anni, si commise l'errore di pensare che bastava introdurre i principi e i meccanismi dell'economia di mercato per ottenere un regime democratico. Ci si accorse, un po' più tardi, che il principio che identifica l'economia di mercato con la democrazia era assurdo. La presa di coscienza da parte degli statistici di quanto era accaduto nel passato alla statistica pubblica nei regimi autoritari, si concretizzò nella formulazione di una carta sui principi fondamentali della statistica pubblica, una sorta di codice etico per gli istituti di statistica di tutto il mondo. Questa carta, adottata da tutti i paesi membri delle Nazioni Unite, contempla dieci principi che tutti i paesi devono rispettare nei confronti della statistica pubblica[20]. Mai prima di allora una presa di coscienza così globale e così profonda è stata registrata in seno alla comunità internazionale per quanto concerne l'importanza dell'informazione statistica in un mondo che ha scelto di adottare, con difficoltà invero, la democrazia come sistema di governo e di vita.

18. Consulta [16].
19. La pubblicazione [9] è un contributo interessante alla storia della statistica del dopoguerra fra paesi orientali e occidentali.
20. Si può consultare nelle lingue ufficiali delle Nazioni Unite sotto: http://unstats.un.org.

8. Nuove sfide

La caduta del muro di Berlino segna dunque un cambiamento di paradigma della funzione, della missione e dell'importanza della statistica pubblica. Anche perché fenomeni come la globalizzazione dei mercati, la rivoluzione delle tecnologie dell'informazione, la mobilità delle persone, i problemi ambientali, la questione sociale, i mutamenti delle strutture demografiche, le nuove pandemie, ecc. sono altrettante sfide per la statistica pubblica[21]. Temi come il buon governo e lo sradicamento della corruzione, i diritti umani e la condizione di vita delle popolazioni, l'educazione e il benessere, la salute e la dignità di vita, la libertà individuale e il rispetto del bene comune, ecc. domandano nuove informazioni e una nuova strategia di diffusione dei dati. Si parla sempre più di indicatori, cioè un concentrato di numerose informazioni statistiche parziali per caratterizzare in modo sintetico e immediato l'evoluzione di una realtà data. L'informazione statistica diventa multimodale: non soltanto cifre, ma analisi, commenti, grafici, carte. Le metodologie statistiche più moderne sono introdotte, sia per la raccolta dei dati, sia per la loro analisi e la loro diffusione. Gli istituti di statistica sono diventati organizzazioni indispensabili alla gestione dello stato moderno, forniscono i dati oggettivi necessari al dibattito democratico, sono garanti dell'affidabilità delle informazioni grazie al loro statuto di indipendenza scientifica in rapporto al potere politico, sono al servizio del cittadino «éclairé». Tuttavia sarebbe imprudente credere che tutto vada per il meglio e che la statistica pubblica abbia ormai raggiunto il famoso punto di non ritorno nelle nostre società.

9. Statistica e democrazia - domani

Infatti, il punto di non ritorno nelle nostre società, forse, non esiste. Non c'è cosa più fragile del destino dell'uomo e della comunità[22]. Specialmente quando l'uomo ha scelto di vivere in un regime democratico. La democrazia è un sistema nel quale occorre costantemente investire: non funziona se il cittadino non si sente responsabile; non soltanto di se stesso ma anche della comunità in cui vive. Le leggi fisiche ci insegnano che se non si investono energie per mantenere un dato sistema, si raggiunge inevitabilmente uno stato di entropia, cioè una situazione caotica. Ebbene, oggi, nelle nostre vecchie democrazie, si possono scorgere segni preoccupanti di indebolimento delle strutture democratiche. La filosofia vigente – una sorta di pensiero unico – ci ha abituati a considerare l'economia liberale e le sue leggi come principio di vita. I valori si materializzano, gli interessi individuali vengono anteposti al bene comune, lo stato viene a poco privato di quelle risorse che garantiscono il servizio pubblico e la difesa del cittadino. Un cittadino che è confrontato con un mondo in profondo mutamento, con una successione di nuovi paradigmi, con un'industria dei media che lo assale e lo assilla[23]. Un cittadino che sta perdendo, coscientemente o no, la sua identità, oppure che si rifugia in un'identità mitica, magari virtuale ma sicuramente irrazionale. Siamo

21. Vedi [13].
22. Sull'apporto delle Nazioni Unite sul destino dell'umanità si può leggere con profitto [1].
23. Per una lettura critica della « storia « del 20° secolo si veda: Eric J. Hobsbawn «Il secolo breve», Collana Storica Rizzoli, 1995.

di fronte ad una delle grandi contraddizioni del nostro tempo. Da un lato, l'accumulazione enorme del sapere, le nuove scoperte scientifiche, le meraviglie tecnologiche, l'educazione generalizzata sono elementi che potrebbero indurci a pensare che il livello di razionalità nelle decisioni e nel comportamento dell'uomo sia elevato. D'altro lato, costatiamo l'impossibilità (voluta o no) di una grande massa di persone di accedere a questo capitale di conoscenze e di investirlo a favore della società. E la statistica pubblica in tutto questo? In una sana concezione del regime democratico, la statistica ha la funzione di bussola o di faro sia per il cittadino sia per i governi. Ha la funzione, in altre parole, di confrontare ognuno di noi con i fatti reali e permettere quindi di prendere coscienza di quanto sta cambiando e, se è il caso, di decidere le misure atte a favorire o a impedire certe evoluzioni. La statistica pubblica è uno strumento essenziale per accedere alla maturità del cittadino e per lottare contro l'oscurantismo, il populismo, la demagogia e la propagazione di miti e leggende. È uno strumento, in sintesi, per il buon governo. Nell'attuale periodo di crisi della democrazia e dello stato è logico che la statistica pubblica risenta direttamente gli effetti di questo stato di cose. Anzitutto dal punto di vista delle funzioni dello stato, che devono essere ridotte talvolta drasticamente, la statistica pubblica sta pagando il suo contributo. Ma sembra esistere un altro motivo che aiuta a infierire contro la statistica. Vi è una parte di cittadini e di politici che preferiscono vivere e muoversi in uno stato di visibilità ridotta. Se mancano informazioni essenziali sul reale è molto più facile argomentare e vincere il gioco. Sono pessimi presupposti per mantenere e consolidare le istituzioni democratiche. Il regime democratico, per parafrasare Einstein, non ammette il gioco dei dadi come sistema di governo. Ne va della dignità dell'umanità.

[1] Emmerij L., Jolly R. and Weiss T. G. (2001). *Ahead of the Curve? UN Ideas and Global Challenges.* Indiana University Press: Bloomington.

[2] Fremdling R. R. *The German Industrial Census of 1936. Statistics as Preparation for the War.* Mimeo: Berlin.

[3] Garonna P., Sofia F. (2003). Statistica e nazione nella storia europea, in *Statistica, storia e nazione: la statistica ufficiale tra passato e futuro (1997).* Istituto Nazionale di Statistica: Roma, p. 15-32.

[4] Heyde, C.C. and Seneta, E. (Ed.) (2001). *Statisticians of the Centuries*. Springer-Verlag: New York.

[5] Malaguerra C., Morgenthaler S. and Ronchetti E. (1997). Conference on Statistical Science Honouring the Bicentennial of Stefano Franscini's Birth. *Proceedings of the Centro Stefano Franscini*. Monte Verità, Ascona. Birkhäuser Verlag: Basel.

[6] Malaguerra C. (1997). Statistica cantonale e statistica federale: il processo di integrazione del sistema statistico svizzero. *Statistica, storia e nazione: la statistica ufficiale tra passato e futuro*. Istituto Nazionale di Statistica: Roma, p. 33- 46.

[7] Malaguerra C. (2001). La statistique publique, langage universel. *Revue suisse d'économie et de statistique*, Vol. 137 (3), septembre 2001, p. 209-218.

[8] Malaguerra C. (2002), Statistik und politisches Monitoring in Europa. *Wirtschaft und Statistik*, Nr. 2, 2002, Statistisches Bundesamt, Wiesbaden, p. 89-95.

[9] Malaguerra C. (Ed.) (2003). *50 Years of the Conference of European Statisticians.* United Nations, Geneva.

[10] Rosenkranz Z. (2004). Albert Einstein privat und ganz persönlich. *Jüdische National- und Universitätsbibliothek Jerusalem, Historisches Museum Bern*.Verlag Neue Zürcher Zeitung: Zürich.

[11] Stigler S. M. (2000). *Statistics on the table*. Harvard University Press: Cambridge, Mass.

[12] Stigler S. M. (2000). *The History of Statistics*. Harvard University Press: Cambridge Mass.

[13] Teekens R. (Ed.) (1999). *Four lectures on the Role of Statistics in a Democracy.* TES Institute: Luxembourg.

[14] Tooze J. A. (2003). *Statistics and the German State, 1900-1945: the Making of Modern Economic Knwoledge*. Cambridge.

[15] Von der Lippe P. (1996). Die politische Rolle der amtlichen Statistik in der ehemaligen DDR. *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*, Vol. 215/6, p. 641-674

[16] Wietog J. (2001). Volkszählungen unter dem Nationalsozialismus. Eine Dokumentation zur Bevölkerungsstatistik im Dritten Reich. *Schriften zur Wirtschafts- und Sozialgeschichte, Band 66*. Duncker & Humblot: Berlin.

4. A suon di numeri: una passeggiata tra musica e matematica

Manuel Rigamonti[1]

We often hear of the close relation existing between music and mathematics, of how the art of sounds and the science of numbers, at first sight seeming so distant, can be very near.

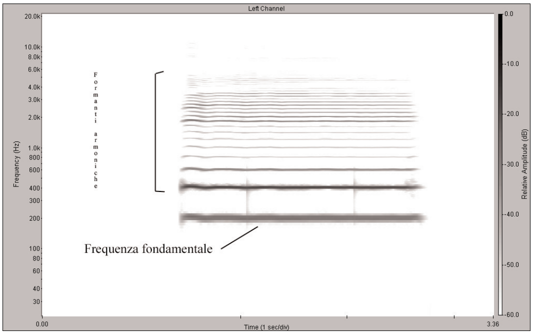
In this short text the reader can find an informative «journey» through the use of numbers in music.

Le frequenze[2] e la complessità del suono

Sappiamo che l'orecchio umano è in grado di percepire suoni che hanno una frequenza compresa tra i 20 e i 20.000 Hz, dati riguardanti un «orecchio medio» perfettamente funzionante. Bisogna però tenere conto del fatto che la scala delle frequenze non è lineare ma logaritmica. Se ci dovesse capitare di andare dal medico per un esame audiometrico, e sentirci dire che abbiamo perso, a causa dell'età le frequenze dai 16.000 Hz in su, non dobbiamo assolutamente preoccuparci perché avremmo perso una piccolissima fetta del nostro udire.

Per intenderci, se il do centrale del pianoforte ha una *f* di circa 265 Hz, il do un'ottava sopra, sarà il doppio (ca. 530 Hz), quello sopra ancora il doppio ecc. Si pensi che l'ultima nota del pianoforte ha la frequenza di «soli» 4186 Hz. Risulta quindi che le frequenze dai 15-16.000 Hz in su sono riservate ai suoni armonici presenti negli spettri degli strumenti musicali e della voce umana. Per un approfondimento di questo argomento sarebbe auspicabile l'utilizzo di un software per la realizzazione di un sonogramma[3]. Vediamo l'esempio di uno spettro armonico della lettera *a* cantata alla frequenza di circa 200 Hz, con tutte le formanti armoniche.

1. Compositore e docente di educazione musicale alla Scuola Media di Canobbio.
2. La frequenza è misurata in Hertz (Hz). 1 Hz è un ciclo vibratorio al secondo di un corpo elastico.
3. Il software usato per produrre questo sonogramma è SpectraLab 4.1.



Si possono notare la frequenza fondamentale (200 Hz) e tutte le formanti armoniche[4] che danno corpo e colore al suono. In pratica quando si canta una nota non si produce solamente la frequenza fondamentale ma, nel caso della lettera *a* (la più ricca), addirittura una ventina di formanti che arrivano, nel caso specifico dell'esempio, fino ai 6.000 Hz.

Sistemi intonativi

Si parla di rapporti matematico-musicali fin dai tempi di Pitagora, creatore di quella che oggi conosciamo come scala pitagorica. Questo sistema intonativo ha alla base l'intervallo di quinta giusta (ad esempio do-sol) che ha un rapporto frequenziale di 3/2. Se poniamo il Do a 261 Hz, il sol (una quinta sopra) sarà misurato a 392 Hz. La storia è poi continuata con Gioseffo Zarlino (nel Cinquecento), che ha calcolato le frequenze secondo i rapporti dei suoni armonici (le frequenze superiori di cui abbiamo parlato prima). Egli aveva calcolato che nella sequenza dei suoni armonici ognuno ha frequenza doppia del precedente.

Questa è la serie di suoni armonici (approssimata al semitono) partendo dalla fondamentale Do (ca. 65 Hz)[5].

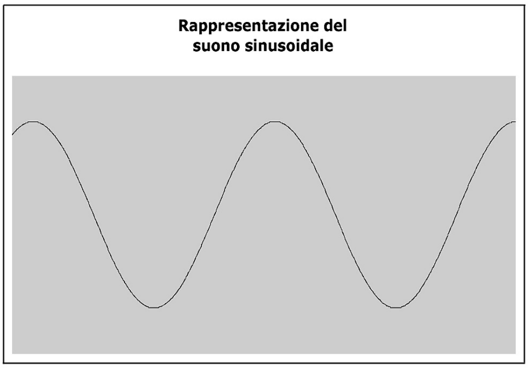
Poco più di cento anni dopo, arriviamo al sistema usato per accordare i pianoforti oggi: Werckmeister divide l'ottava in dodici parti identiche ponendo un numero irrazionale per calcolare i rapporti tra le note (radice dodicesima di due): il sistema temperato, onorato poi da Johann Sebastian Bach con la sua opera «Il clavicembalo ben temperato», in cui ha dimostrato che si poteva scrivere indifferentemente in tutte le tonalità maggiori e minori.

4. Le formanti armoniche sono fasce di frequenze che si vengono a creare in ogni suono strumentale o vocale. Si parla anche di suoni armonici (nel prossimo paragrafo).
5. Per curiosità ecco la serie delle frequenza: (65.4, 130.8, 196.2, 261.6, 327.0, 392.4, 457.8, 523.2, 588.6, 654.0, 719.4, 784.8, 850.2, 915.6, 981.0, 1046.5, 1111.9, 1177.3, 1242.7, 1308.1).

Nel corso del Novecento, grazie alle ricerche condotte da numerosi compositori, soprattutto nell'ambito della musica elettronica, sono stati inventati sistemi intonativi sempre diversi. Infatti, attraverso l'elaboratore elettronico è possibile costruire successioni di suoni molto complesse. A questo proposito possiamo citare alcuni software che permettono di «programmare» la produzione dei suoni: Csound e Max/Msp.

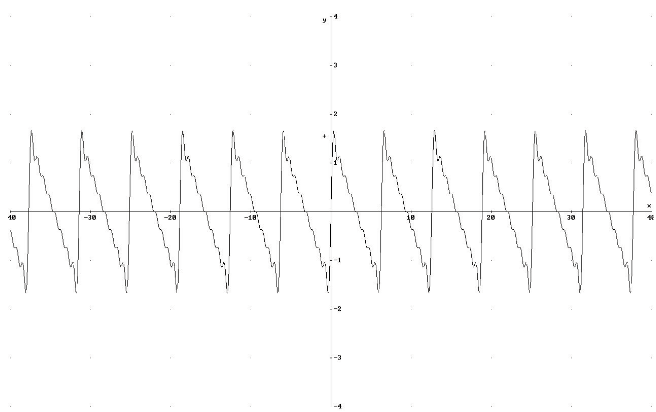
La rappresentazione del suono

La rappresentazione dell'onda sonora implica una serie di conoscenze e formule matematiche: il suono puro (privo di suoni armonici) viene rappresentato con il grafico della funzione y=sin(x).



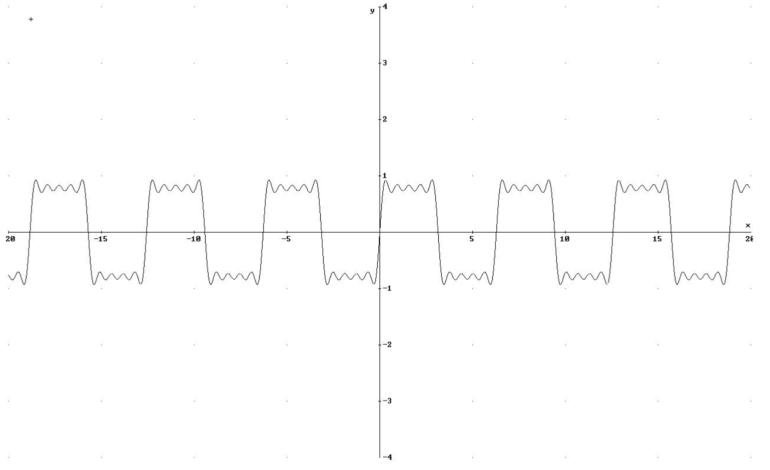
La teoria di Fourier (FFT) dimostra che ogni suono, anche il più complesso, può essere ridotto alla *somma* di sinusoidi.

È molto semplice ottenere il grafico che rappresenta un'onda con i soli suoni armonici pari o dispari o entrambi. Ad esempio vediamo la rappresentazione «teorica» dell'onda «*a denti di sega»* ottenuta dalla somma della fondamentale (y=sin(x)) e dei primi 9 suoni armonici (1/n sin (n))[6].



6. Si divide il fattore di moltiplicazione dei suoni armonici poiché l'ampiezza di questi diminuisce in rapporto alla posizione.

Se sommiamo alla fondamentale solamente i suoni armonici dispari otterremo l'onda «*quadra*», alla quale possiamo abbinare il timbro del clarinetto.



Sull'asse delle x (t) possiamo leggere la frequenza, mentre sull'asse delle y (A) leggiamo l'ampiezza del suono.

Le nozioni presenti in questo paragrafo sono fondamentali per chi si occupa di suoni a livello elettronico (tecnici del suono, compositori di musica elettronica, …).

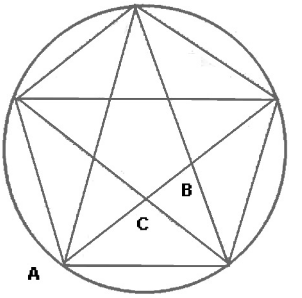
Non possiamo fare a meno di ricordare gli studi compiuti e realizzati da K. Stockhausen presso lo studio di musica elettronica di Colonia tra la fine degli anni '50 e l'inizio degli anni '60. In questo studio hanno lavorato poi tutti i più grandi compositori del Novecento.

Musica e matematica

Finora abbiamo trattato argomenti piuttosto tecnici che non riguardano ancora il vero rapporto tra musica e matematica, intendo a livello filosofico di pensiero.

Gli autori che hanno utilizzato elementi derivati dalla matematica sono stati e sono tuttora parecchi: Bach si è servito spesso nelle sue composizioni della numerologia, Mozart ha usato la casualità e le probabilità del lancio dei dadi, alcuni autori si sono avvalsi dei rapporti numerici della sezione aurea, o delle proprietà particolari del quadrato magico.

S	A	T	O	R
A	R	E	P	O
T	E	N	E	T
O	P	E	R	A
R	O	T	A	S



Il polifonista Guillaume Dufay pare abbia composto il suo mottetto *Nuper rosarum flores* usando le proporzioni architettoniche dell'appena costruito Duomo di Firenze.

Se ci avviciniamo ai nostri tempi ricordiamo per esempio il compositore e architetto greco Iannis Xenakis. Egli ha messo in pratica in diverse composizioni la teoria del caos programmando un elaboratore elettronico affinché gli scegliesse le note da utilizzare nel brano. Ha pure messo in musica rapporti matematici utilizzati nei suoi progetti architettonici.

Altri moduli matematici molto usati nella composizione si ispirano alla successione di Fibonacci. Una spinta molto forte in questa direzione l'ha data l'IRCAM[7] di Parigi, dove sono stati sviluppati softwares per la realizzazione di algoritmi compositivi basati, in gran parte, su teorie e formule matematiche.

Utilizzare i numeri per comporre non rappresenta l'unione tra il pensiero matematico più profondo con quello musicale. Possiamo affermare che l'uso di formule matematiche, rapporti numerici, risulta essere quasi sempre un *pretesto* per comporre.

Il fatto interessante è che la ricerca della *perfezione matematica* nelle strutture musicali che possono essere di carattere armonico, melodico o formale, non dà per forza la perfezione musicale. Molta ricerca in questo campo è stata svolta da quei compositori del Novecento che, dopo la caduta dell'impero della tonalità che ha regnato dall'inizio del '600 fino all'inizio del '900, si sono ritrovati senza regole che potessero reggere solidamente le loro scelte musicali. Se andiamo a studiare in maniera approfondita la teoria sulla quale si fonda la tecnica compositiva di Stockhausen (per la musica elettronica) o Boulez possiamo trovare una sequenza di calcoli che hanno lo scopo di «giustificare» ogni suono presente nell'opera. Tutto nasce, naturalmente, dall'evoluzione del linguaggio nato, come detto, dopo lo smantellamento della tonalità e messo a punto dapprima da Arnold Schoenberg e poi dai suoi seguaci come Anton Webern, Alban Berg, e altri nella cosiddetta «Nuova Scuola di Vienna». Stiamo parlando del sistema «dodecafonico»: le dodici note della scala cromatica vengono usate senza che nessuna di esse abbia un'importanza maggiore o minore delle altre[8]. A questo punto vengono serializzati gli elementi musicali, si estrapolano caratteristiche numeriche degli intervalli della serie dodecafonica, che vengono di conseguenza usate per la proliferazione del materiale compositivo che a sua volta produrrà altri numeri che saranno messi in pratica per ulteriori elementi. Alcuni studiosi si sono chiesti quali siano le differenze estetiche fra brani riconducibili a migliaia di calcoli matematici, opere in cui è stata usata la casualità e composti «a orecchio».

Probabilmente le differenze estetiche sono poche. L'orecchio e il cervello umano non sono in grado di percepire strutture matematiche molto complesse.

A questo punto dovremmo aprire l'argomento della percezione musicale, ma andremmo veramente fuori tema!

Nella speranza che questo articolo abbia suscitato l'interesse del lettore, si desidera far notare che servirebbe un riscontro uditivo di tutto ciò di cui si è parlato. È in via di realizzazione una pagina web che vuole sopperire a questa mancanza: www.remifa.com/musmat.html.

7. Istituto di ricerca sulla musica e l'acustica (www.ircam.fr) fondato dal compositore e direttore d'orchestra francese Pierre Boulez.
8. Il sistema tonale si basa infatti sulla gerarchizzazione di alcune note.

1. Sullo zero e sull'infinito[1]

André Delessert

Some mathematical objects were not well accepted by mathematicians. They provoked sometimes long and severe disputes in the world of mathematics and philosophy. The history of these notions is instructive. We shall evoke the cases of zero and of the mathematical infinite. It would be interesting to consider the non-mathematical grounds of these discords, which are not yet appeased today.

Non ho l'intenzione di presentare nuove proprietà dello zero e dell'infinito matematico. Mi propongo invece di considerare alcune nozioni matematiche che hanno stentato a trovare uno statuto regolare presso gli specialisti, matematici o filosofi. Basta pensare ai numeri detti impossibili o alle geometrie non-euclidee. La continuità, nozione importante se si vuole, ha dovuto attendere parecchi secoli prima di trovare una definizione appropriata.

Altre nozioni hanno addirittura provocato veri e propri scontri fra scuole diverse. Sarebbe interessante studiare questi eventi della storia della matematica. Ciò permetterebbe forse di meglio capire i pregiudizi e gli articoli di parte che hanno caratterizzato anche grandi matematici. Fra le nozioni che hanno a lungo turbato la comunità matematica, ho scelto lo zero e l'infinito. Inizierò dallo zero.

Tutti conoscono la storia dello zero. È stata preceduta dall'invenzione della numerazione posizionale. Solo quattro civiltà hanno scoperto questo notevole sistema: i Sumeri e i Babilonesi nel secondo millennio a.C., i Cinesi poco prima della nostra era, i Maya d'America attorno al IV secolo d.C. e infine gli Indiani d'Asia verso il V secolo. Gli Arabi lo presero dagli Indiani all'inizio del IX secolo. Fu introdotto in Occidente da Fibonacci, verso gli anni 1200.

Lo «zero» apparve solo quando gli astronomi e i calcolatori vollero rappresentare i numeri sulla carta e non più in un abaco, in un quadro prefabbricato. I Babilonesi, prima del III secolo a.C., introdussero un segno per esprimere che un numero intero era divisibile per la base del sistema di numerazione. Nei calcoli, giocava il ruolo di una casella per indicare che esisteva come casella, ma che vera vuota. Ma, per i Babilonesi, non era un numero.

I primi e i soli a servirsene come un numero furono gli Indiani. Svilupparono ammirevolmente tutte le proprietà aritmetiche dello zero. Per contro, per qualche tempo, certi sapienti d'Occidente non vollero considerarlo come numero. Si rifacevano ad Aristotele. Secondo il grande filosofo, il numero era un accidente di una cosa

1. Il testo è un riassunto della conferenza tenuta da André Delessert a Bellinzona il 21 settembre 2005, in occasione dei festeggiamenti del numero 50 di questa rivista.

vista nell'ottica della quantità. Moltiplicare o dividere un numero, significava agire sull'accidente, senza per nulla agire sull'essenza della cosa. Così, quando si raddoppia un segmento di retta, si ottiene ancora un segmento di retta. I pensatori europei del XIII secolo consideravano che se lo zero fosse stato un numero, sarebbe stato un accidente, un attributo per il Nulla. Raddoppiando il Nulla reppresentato da una collezione vuota di punti, si otterrebbe indifferentemente un rappresentante di una collezione vuota di punti, o di triangoli o di anatre. Non si agirebbe sull'accidente, ma sull'essenza della cosa. Era dunque escluso di poter associare un numero al Nulla.

In seguito, i numeri hanno cessato di esprimere unicamente misure di grandezze. Ci si è serviti di loro per graduare scale e per formare sistemi di coordinate. Lo zero si è aggiunto ai numeri naturali. Ma i più anziani fra noi si ricordano di aver appreso a recitare i numeri interi senza menzionare lo zero. Molti considerano ancora lo zero come un oggetto bizzarro e addirittura un po' diabolico. Eppure, la teoria degli insiemi ha fatto molto per dissipare questo mistero. Lo zero è stato messo in relazione stretta, e persino identificato, con l'insieme vuoto. L'insieme vuoto non è il Nulla. Possiede tutte le proprietà della nozione di insieme. Inoltre, nella teoria degli insiemi gioca un ruolo fondamentale, un ruolo di elemento generatore. Paradossalmente, questa disposizione ha rilanciato la disputa. Ho conosciuto personalmente filosofi convinti che non fosse possibile alcuna teoria degli insiemi e che la nozione stessa di insieme matematico non esistesse affatto. Parecchi specialisti ritenuti filosofi della matematica (per esempio N.D. Goodman, Hilary Putnam) esprimono totale diffidenza verso la teoria degli insiemi. L'ultimo citato nega persino la possibilità di esistenza di un insieme vuoto. Per lui, ogni insieme deve, per definizione, possedere elementi. Pretende pure che sia perfettamente possibile descrivere gli insiemi senza parlare dell'insieme vuoto. Purtroppo, Putnam non lo mostra e non descrive nemmeno lo stato pietoso nel quale la sua curiosa iniziativa condurrebbe la matematica. Dunque, ancora oggi, esistono persone di cultura per le quali lo zero, sotto forma di insieme vuoto, presenta una difficoltà superiore.

Perché questa incomprensione si manifesta ancora oggigiorno? Penso che la ragione principale sia che, per molta gente, la matematica non è che un linguaggio. Il matematico non sarebbe altro che un soffiatore di vetro. Per loro, il matematico costruisce, con alcuni segni e con qualche regola che lui solo conosce, formule prive di senso. Queste formule acquistano un contenuto solo quando il fisico, l'economista, in generale uno scientifico gli attribuisce proprietà quantitative dello spazio-tempo. Questa gente ignora che la matematica ha un suo dominio, un dominio non materiale, di natura diversa dall'universo spazio-temporale. Questa disciplina prende a prestito alcuni termini dalla lingua corrente: retta, anello, funzione, insieme. Ma dà loro sensi totalmente diversi e, soprattutto, una portata molto più generale. Uno degli scopi principali della matematica è una migliore comprensione della capacità di capire dell'uomo. Apre così la porta della trascendenza. Possiede un carattere essenzialmente scientifico, in quanto mira a capire un dominio della realtà in modo disinteressato. L'esistenza della matematica mette in evidenza la distinzione che occorre fare tra la scienza e la tecnica. Non sono lontano dal credere che la confusione tra scienza e tecnica sia uno degli errori più carichi di conseguenze della nostra epoca.

Passiamo alla nozione di infinito matematico. Come vedremo, non ci allontaniamo molto da quello che precede. Infatti, mentre noi enunciamo il numero «diecimila», gli Indiani dovevano pronunciare nella loro lingua la successione di cifre: «uno, zero, zero, zero, zero». Per essere sicuri di non sbagliare il numero di zeri, associavano a zero – come a ogni altra cifra – molte designazioni. Fra quelle dello zero, figuravano, fra l'altro, «Cielo», «Infinito», «Plenitudine», «Piede di Visnù». Alla cifra 1 erano associati i vocaboli «Corpo», «Inizio», «Primo Padre». Il numero 10'000 poteva allora leggersi come una poesiola: *Corpo, Cielo, Infinito, Plenitudine, Piede di Visnù*, per esempio. È l'immagine del Cielo che ha suggerito l'uso di un tondo pieno o vuoto per rappresentare lo zero. Noi utilizziamo ancora quest'ultima notazione. Gli Indiani consideravano l'infinito come l'inverso dello zero. Lo intendevano anche come numero. Enunciarono formule aritmetiche corrette come $\infty + 2 = \infty$ oppure $\infty \times \infty = \infty$.

I matematici greci non menzionavano la nozione di infinito. Aristotele, di nuovo, ne condannava l'uso in matematica. Costatava che qualcosa come l'infinito appariva quando si recitavano i numeri naturali o quando si divideva un segmento a metà, poi l'una delle metà di nuovo a metà e così via. Ma, per lui, questi processi non sfociavano mai in una totalità completa. L'infinito che si profilava dietro queste operazioni ricorrenti non era un oggetto «attuale», diceva Aristotele, ma un oggetto «in potenza». I matematici dovevano lavorare solo con oggetti attuali come il numero 17, il punto, il triangolo, e non con oggetti indefiniti, in gestazione costante, che non si potevano costruire effettivamente.

L'influenza dei decreti di Aristotele prevalse fino al XIX secolo. Nel 1832, il grande Karl-Friedrich Gauss proclamava ancora: «*Protesto soprattutto contro l'uso di una quantità infinita come una quantità completa, ciò che in matematica, non è mai permesso*». Si è dovuto attendere i lavori di Cantor e di Dedekind e l'introduzione della nozione di insieme matematico perché l'infinito sia riconosciuto come una realtà matematica. Vi fece un'entrata con la fanfara, per due ragioni. Primo, si rivelò molto più ricco e più strano di quanto ci si aspettava. Poi perché era destinato a diventare una pietra fondamentale nella formulazione della teoria degli insiemi.

Si è potuto dimostrare che la teoria degli insiemi è primitiva, nel senso che vi si possono ricondurre tutte le teorie matematiche. Il teorema di completezza di Gödel afferma che un sistema formale di primo ordine è consistente – cioè è una teoria matematica – se e solo se ammette un modello insiemistico. Ciò significa che per formulare gli assiomi della teoria degli insiemi, non si può ricorrere a nessuna delle nozioni matematiche conosciute a priori come il punto o il numero. La riflessione si situa dunque a un livello che si potrebbe qualificare di inframatematico. I matematici non sono abituati a questo genere di speculazione. Questa situazione li conduce ad appoggiarsi a certe convinzioni non matematiche, di ordine filosofico o anche patriottico. Per esempio, la nascita della teoria degli insiemi oppose l'idealismo germanico al razionalismo francese. È in Germania che apparvero i primi lavori sugli insiemi. Importanti matematici francesi, come Henri Poincaré, consideravano queste ricerche divertimenti senza alcun interesse. Le controversie concernenti convinzioni soggettive possono diventare molto violente. Queste si inserirono all'origine sull'opposizione politica franco-germanica. Ma si protrassero a lungo anche dopo, senza sottofondo patriottico, e si può credere che ancora oggi non siano del tutto finite.

Per illustrare questa battaglia, si può chiamare in causa l'*assioma della scelta*, detto anche *assioma di Zermelo*. Questo assioma gioca un ruolo essenziale nello studio degli insiemi infiniti. Afferma che per ogni insieme non vuoto **E** i cui elementi sono insiemi non vuoti, esiste una funzione φ che, in ogni elemento-insieme **e** di **E**, «scelga» un elemento ben determinato. Questo assioma non dà la funzione φ. Postula solo la sua esistenza. Il fatto è che non si sa costruire una funzione di scelta per l'insieme degli insiemi non vuoti di numeri reali, per esempio. Ma l'assioma della scelta ci dice che essa esiste. Henri Lebesgue, che conduceva la lotta contro l'assioma di Zermelo, esigeva da ogni oggetto matematico che potesse essere costruito. Il duello si svolse tra quelli che pensavano che bisogna accettare di lavorare con oggetti matematici la cui esistenza è garantita da un assioma ma che non si saprà mai costruire e quelli che stimavano che ci si debba limitare ai soli oggetti costruibili. Di conseguenza, o esistono due scienze matematiche diverse, oppure l'una di queste concezioni è errata.

Fortunatamente la storia della matematica ha tagliato corto. Si è potuto stabilire che l'assioma della scelta è compatibile con gli altri assiomi della teoria degli insiemi e che è indispensabile per definire certi oggetti matematici essenziali. Zermelo ha mostrato inoltre che quelli che lo rifiutano se ne servono inconsapevolmente, anche in casi abbastanza elementari. Altrimenti detto, l'assioma della scelta è una delle chiavi essenziali della teoria degli insiemi e getta una luce sorprendente sull'infinito matematico. Malgrado ciò, grandi matematici sono disturbati nella loro visione della matematica dalla presenza necessaria di questo assioma. Da dove viene questa difficoltà?

Si affrontano due concezioni dell'universo matematico. Per gli uni, questo universo è una realtà situata fuori dal tempo. I matematici lo scoprono passo dopo passo, così come l'astronomo scopre a poco a poco i fenomeni celesti. Per gli altri, il dominio matematico è una creazione dell'uomo, che lo costruisce passo dopo passo. Questa visione si iscrive in una corrente di pensiero che si presenta sotto diverse denominazioni: il costruttivismo, il positivismo logico, fra le altre. Senza entrare nei dettagli, queste dottrine affermano che «*una proposizione ha significato solo se si conoscono le osservazioni necessarie per verificarla*». È evidente che l'assioma della scelta non soddisfa questa condizione. Il caso della matematica rappresenta un ostacolo essenziale per i seguaci di questa seconda concezione. Per esempio, già in geometria euclidea classica è impossibile osservare effettivamente che, per ogni paio di punti del piano, passa una retta e una sola. Eppure questo fatto è ammesso anche dai filosofi più intransigenti. Per uscirne, alcuni di loro decidono che gli assiomi matematici esprimono solo evidenze. Dunque le conseguenze logiche che la matematica ne deduce non sarebbero altro che tautologie. La matematica non sarebbe per loro che una gigantesca variazione sul tema a=a. Ancora una volta si costata a quali aberrazioni può condurre la non conoscenza della natura della matematica.

Lo zero e l'infinito sono solo due fra la moltitudine degli oggetti matematici. Ma ci mostrano già che l'universo matematico offre all'immaginazione uno spazio di libertà illimitato e complesso. La sua esplorazione mette in gioco qualcuna delle facoltà più raffinate del pensiero. La scoperta di un teorema matematico onora lo spirito umano. Ma, nello stesso tempo, induce alla modestia, perché determina limiti che il pensiero non può oltrepassare. In ogni teoria, ogni teorema segna una frontiera invalicabile. Chi provasse a fare geometria euclidea trasgredendo il teorema di Pitagora annegherebbe presto in discorsi deliranti. La matematica è quindi allo stesso tempo una scuola di libertà e di umiltà. Questa breve relazione aveva lo scopo di mostrare che esistono comunque eccellenti spiriti che hanno difficoltà ad accettare insieme la grandezza e la servitù della matematica.

1. Pipe, cavalli, triangoli e significati Contributo ad una teoria problematica del significato concettuale, da Frege e Magritte, ai giorni nostri[1]

Bruno D'Amore[2]

In this paper we describe a proposal for a problematic interpretation of the concept of signification, taken from conceptual signification theory, not only in the field of mathematics, but also presenting examples of analogous behaviour from another field of study, that of figurative art. The aim is to show how a totally satisfactory signification theory has still not been constructed, while other fields of study continue to rediscover the basic stages of the epistemological domain.

1. Significato e sua rappresentazione; il caso della matematica

Quando si parla di «teoria del significato», il pensiero corre rapido alla psicologia, alla semiotica, alla linguistica o alla matematica.

Ma non si deve pensare che questo tipo di problematiche interessi solo questi settori di ricerca e di analisi. Ogni disciplina che si rispetti, che voglia mettere in campo una riflessione sugli oggetti del proprio conoscere e del proprio specifico rappresentare, prima o poi è costretta a entrare nei meriti della questione. Tanto più se si serve di «rappresentazioni del significato», com'è costretta a fare la matematica (Duval, 1993; D'Amore, 2000, 2001a, b, c, 2003a).

In matematica, infatti, a causa del fatto che gli «oggetti» evocati non hanno natura reale (in un realismo ingenuo a carattere cosale), non si può fare altro, se non ricorrere a *rappresentazioni* di essi all'interno di una semiotica opportuna; cosicché il matematico, mentre cita e parla di oggetti nel dominio della matematica, di fatto sceglie, manipola e trasforma loro rappresentazioni in registri semiotici.

1. Il testo è un riassunto molto sintetico della conferenza tenuta da Bruno D'Amore a Bellinzona il 21 settembre 2005, in occasione dei festeggiamenti del numero 50 di questa rivista. L'articolo è in corso di stampa in lingua italiana (2005) su *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* [Paderno del Grappa, Italia] ed è pubblicato in lingua spagnola: D'Amore B. (2005). Pipas, caballos, triángulos significados. Contribución a una teoría problemática del significado conceptual, de Frege y Magritte, hasta nuestros días. *Números*. [Tenerife, Spagna]. 61, 3-18.
2. NRD – Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia. ASP – Alta Scuola Pedagogica, Locarno, Svizzera. MESCUD – Università Distrettuale Fr. José de Caldas, Bogotà, Colombia.

2. Il caso dell'arte figurativa: pipe e cavalli

Un caso analogo alla matematica, forse inatteso per i più, è decisamente costituito dall'arte figurativa. Se anche non si vuol complicare la questione e si assume, in modo decisamente acritico e storicamente superato, che l'arte sia lo studio delle interpretazioni delle rappresentazioni figurali problematiche degli oggetti e dei fenomeni della natura, appare piuttosto evidente che ogni rappresentazione nel mondo figurale allude a un oggetto o a un fenomeno, ma è distinto da essi. Ogni prodotto artistico è, alla fine, esso stesso un oggetto o un fenomeno della natura.

Così, apparve subito necessaria e rivelatrice l'opera di riflessione sulla natura del linguaggio dell'arte e sul senso del rapporto tra significato e rappresentazione, del pittore surrealista belga René Magritte (1898-1967).

Queste sue riflessioni spesso costituivano a loro volta vere e proprie opere d'arte, come la celeberrima *Ceci n'est pas une pipe*, che Magritte realizzò in diverse versioni tra il 1929 ed il 1946.

Al di là dell'imbarazzo che creò al suo apparire esposta, vista con gli occhi critici e acuti di oggi, il senso di questa opera, volutamente divulgativa, è del tutto evidente: quel che l'osservatore vede NON è una pipa, infatti, ma una sua rappresentazione che a una pipa allude; quel che si vede, insomma, è una rappresentazione, un'allusione, un'evocazione, non l'oggetto in sé.

A volte, invece, Magritte ama elaborare veri e propri studi teorici, come l'altrettanto famoso *Les mots et les images* (1929) che, pur essendo, come dicevo, uno studio teorico, venne anch'esso esposto come opera.

All'interno di questo studio, forse il particolare più famoso e discusso è quello relativo all'immagine del cavallo la cui evidenza è totale.

Vi appare un cavallo, una sua rappresentazione pittorica, una sua enunciazione verbale (nel registro semiotico «linguaggio orale»). Non bisogna dimenticare, però, che il cavallo che appare alla sinistra del riquadro è, a sua volta un disegno…

3. Gottlob Frege e il significato in matematica

Questa analisi del linguaggio pittorico non può non richiamare alla mente l'opera del logico matematico tedesco Gottlob Frege (1848-1925).

Insieme ad altre immortali opere, Frege scrisse un articolo relativo alla natura ed al senso della matematica e del suo linguaggio: *Über Sinn und Bedeutung* (*Senso e denotazione*, pubblicato nel 1891); esso fu una vera e propria bomba nel mondo della riflessione matematica e contribuì ad aprire la strada a quel periodo di ripensamento critico che va sotto il nome di *Crisi dei fondamenti* e che portò al modo attuale di concepire la matematica (D'Amore, Matteuzzi, 1975).

In tale articolo, che fu poi l'occasione di una polemica annosa con G. Peano (1858-1932) (D'Amore, Matteuzzi, 1975), Frege proponeva in maniera netta una distinzione tra «concetto» ed «oggetto» per la quale il primo è un'espressione che non denota in modo specifico con sole caratteristiche funzionali, e il secondo ha ruolo di argomento. Per esempio, un numero viene identificato con l'oggetto denotato da un concetto, ovvero con l'estensione di quel concetto.

Nell'altra sua celebre opera, *Die Grundlagen der Arithmetik – Eine logisch-matematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, pubblicata a Breslavia nel 1884, a pag. 59 Frege afferma: «L'attribuzione di un numero contiene sempre un'affermazione intorno a un concetto. La cosa risulta particolarmente chiara per il numero 0. Quando si dice "Il pianete Venere ha 0 satelliti", non vi è proprio alcun satellite o aggregato di satelliti intorno a cui possa venir affermato qualcosa. È invece al concetto «satellite di Venere» che l'asserto anzidetto attribuisce una proprietà (cioè quella di non comprendere nessun oggetto sotto di sé)».

Questa posizione, che non esito ad annoverare tra quelle oggi cosiddette «realiste», ebbe un grande successo fino agli anni '70 del XX secolo, ma è attualmente in crisi a favore di posizioni «pragmatiste» (D'Amore, 2001a, c; D'Amore, Fandiño Pinilla, 2001).

4. Schemi ternari del significato

Torniamo alle interpretazioni del significato concettuale.

Frege può permettersi di considerare il *Bedeutung* in senso strettamente estensionale, dato che egli pensava esclusivamente alla matematica e non alla lingua naturale.

Una delle più recenti e più notevoli schematizzazioni a tre termini è certo, almeno nel campo della didattica e della riflessione epistemologica, soprattutto per quanto concerne la matematica, quella di Gérard Vergnaud (1990). Secondo questo celebre autore francese, il punto decisivo della concettualizzazione del reale (e nella didattica della matematica) è il passaggio dai *concetti-come-strumento* ai *concetti-come-oggetto*, e una operazione linguistica essenziale in questa trasformazione è la nominalizzazione.

È allora fondamentale dare una definizione pertinente ed efficace di *concetto*; secondo Vergnaud:

concetto C è una terna di insiemi C = (**S**, **I**, ***S***), tale che:

- **S** è l'insieme delle situazioni che danno senso al concetto (il *referente*);
- **I** è l'insieme degli invarianti (da lui definiti ed esemplificati in altre opere) sui quali si basa l'operatività degli schemi (idem) (il *significato*);
- ***S*** è l'insieme delle forme linguistiche e non linguistiche che permettono di rappresentare simbolicamente il concetto, le sue procedure, le situazioni e le procedure di trattazione (il *significante*).

Secondo Vergnaud, studiare come si sviluppa e come funziona un concetto significa considerare di volta in volta questi tre piani separatamente e in mutua relazione reciproca.

5. Schemi binari del significato

In tempi assai più recenti, Raymond Duval (1993) ha sostituito allo schema ternario uno schema binario, quello che si esprime attraverso la coppia: significato – oggetto oppure la coppia segno – oggetto; il fatto è che in Duval il termine «significato» raggruppa i significanti diversi dello stesso oggetto; dunque i termini «significato» e «segno» sono in un certo senso interscambiabili.

La concettualizzazione passa allora attraverso il segno che esprime il suo stesso oggetto.

Il caso della matematica è, in questo settore, peculiare; ciò, almeno per tre motivi:

- ogni concetto matematico ha rinvii, come già detto, a «non-oggetti»; dunque la concettualizzazione non è e non può essere basata su significati che poggiano sulla realtà concreta; in altre parole in matematica non sono possibili rinvii ostensivi;
- ogni concetto matematico è costretto a servirsi di rappresentazioni, dato che non vi sono «oggetti» da esibire in loro vece o a loro evocazione; dunque la concettualizzazione deve necessariamente passare attraverso registri rappresentativi che, per vari motivi, soprattutto se sono a carattere linguistico, non possono essere univoci;
- si parla più spesso in matematica di «oggetti matematici» che non di concetti matematici in quanto in matematica si studiano preferibilmente oggetti piuttosto che concetti; «la nozione di oggetto è una nozione che non si può non utilizzare dal momento in cui ci si interroga sulla natura, sulle condizioni di validità o sul valore della conoscenza» (Duval, 1998).

Nel sentiero tracciato da Duval, la nozione di concetto, preliminare o comunque prioritaria in quasi tutti gli Autori, diventa secondaria, mentre ciò che assume carattere di priorità è la coppia (*segno, oggetto*).

D’Amore V.
Elementi di didattica della matematica. Bologna: Pitagora, 1999.

D’Amore B.
«Concetti» e «oggetti» in Matematica. *Rivista di Matematica dell’Università di Parma*. (6) 3, 143-151, 2000.

D’Amore B.
Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione «ingenua» in una teoria «realista» vs il modello «antropologico» in una teoria «pragmatica». *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-30, 2001a.

D’Amore B.
Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*. 2, 150-173, 2001b.

D’Amore B.
Scritti di Epistemologia Matematica. 1980-2001. Bologna: Pitagora, 2001c.

D’Amore B.
La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*. 23, 1, 47-51, 2003a.

D’Amore B.
Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica. Bologna: Pitagora, 2003b.

D’Amore B., Fandiño Pinilla M.I.
Concepts et objects mathématiques. In: Gagatsis A. (ed.) (2001). *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology*. Nicosia (Cipro): Intercollege Press Ed. [Atti del «Third Intensive Programme Socrates-Erasmus, Nicosia, Università di Cipro, 22 giugno - 6 luglio 2001. 111-130], 2001.

D’Amore B., Matteuzzi M.
Dal numero alla struttura. Bologna: Zanichelli, 1975.

D’Amore B., Menna F.
De Mathematica. Roma: L’Obelisco. [Libro - catalogo di una mostra internazionale], 1974.

D’Amore B., Speranza F. ed altri
Alcuni aspetti della critica analitica. Rapporti tra critica analitica e ricerca nelle arti visive. Bologna: Galleria d’arte moderna. [Atti di un convegno, l’atto di nascita del filone dell’*arte esatta* che diede vita ad una quantità infinita di mostre], 1977.

Duval R.
Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65, 1993.

Duval R.
Il punto decisivo nell’apprendimento della matematica. La conversione e l’articolazione delle rappresentazioni. In: D’Amore B. (ed.) (1996). *Convegno del decennale*. 11-26. Bologna: Pitagora, 1996.

Duval R.
Signe et objet (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre répresentations et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. 6, 139-163, 1998.

Menna F.
La linea analitica dell’arte moderna. Milano: Einaudi, 1975.

Speranza F.
Scritti di epistemologia della matematica. Bologna: Pitagora, 1997.

Vergnaud G.
La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*. 10, 133-169. [Trad. it. di F. Speranza in: *La matematica e la sua didattica*, 1992, 4-19], 1990.

2. Quale matematica per la scuola media?[1]

Gianfranco Arrigo

This paper takes up the subject discussed in the number 48 of the BDM but, on that occasion, concerning only primary school. Now the focus is moved onto low secondary school which completes the compulsory school training.The reflection suggested by the author does not dwell upon *what* to teach (the new 'Piano Formativo' of the low secondary school clearly states the contents), but it only examines *how* to teach, a delicate and vital issue, particularly in the light of the results of the recent PISA survey.

1. Anche in Germania…

Il Ticino scolastico ha quasi sempre fatto riferimento alla pedagogia ginevrina e francese oltre che, ci mancherebbe, a quella italiana. Questa volta mi è propizia l'occasione per proporre alcune riflessioni freschissime dei nostri vicini tedeschi. Il numero 127 della rivista «mathematiklehren»[2] è interamente dedicato a una interessante e documentata riflessione sullo stato dell'insegnamento della matematica in Germania. In esso si trovano anche articoli dedicati all'immagine che gli studenti germanici hanno dell'insegnamento di questa disciplina. Sono riportati sia i risultati delle varie inchieste effettuate sia esempi di risposte, scelte, credo, fra le più significative. Ebbene, la lettura di queste pagine (una settantina) mi ha rafforzato la convinzione che la situazione dell'insegnamento della matematica si presenta in modo analogo in Germania come in Francia e in Italia, praticamente in tutta l'Europa.

Dico subito che la situazione è preoccupante e che la scuola deve fare di tutto per uscire dalla stasi nella quale si è adagiata da qualche anno. Mi spiace che ci siano volute le indagini internazionali (non del tutto attendibili, ma di forte impatto pubblico come la recente PISA) per portare alla luce gli aspetti negativi dell'insegnamento della matematica che vengono esaminati anche dai colleghi tedeschi nella rivista citata. Gli autori sono tutti matematici che si occupano di didattica, quindi persone qualificate per esprimersi su questo tema tanto delicato quanto importante.

Come giudicano gli studenti l'insegnamento della matematica ricevuto finora?

1. Questo contributo riprende il discorso iniziato con l'articolo «*Quale matematica per la scuola elementare?*» apparso in una prima versione sul numero 48 del BDM e ripreso dalla Conferenza dei Direttori degli Istituti Scolastici Comunali del Canton Ticino nel fascicolo «*A scuola per il piacere di apprendere*», a cura di Adolfo Tomasini, in via di pubblicazione presso il Centro Didattico Cantonale di Bellinzona.
2. *mathematiklehren*, Zeitschrift für den Unterricht in allen Schulstufen, Nr. 127, Dezember 2004, Klett Verlag.

È quasi incredibile, ma gli studenti interpellati – per mezzo di appositi questionari – mostrano di avere idee chiare e corrette sulla qualità dell'insegnamento. Innanzi tutto individuano l'esistenza di grandi differenze da insegnante a insegnante: con alcuni si impara e si ha piacere di fare matematica, con altri non si impara e si finisce per odiare la disciplina. Il docente di matematica è ritenuto la persona centrale – il massimo responsabile – della riuscita dell'apprendimento. Quasi tutti apprezzano nel docente una buona capacità di spiegare (e di rispiegare, se necessario), l'importanza che questi assegni nutrite serie di esercizi, la sua disposizione a correggere a breve termine i compiti fatti a casa e a promuovere la discussione in classe di determinati esercizi generalmente non riusciti. Un quadro tradizionale, non c'è che dire, centrato sulla sequenza spiegazione-esercizio-ripresa della spiegazione, ma che va apprezzato per la spontaneità mostrata dagli studenti i quali sono stati abituati a ricoprire nelle lezioni un ruolo per lo più passivo, molto dipendente dall'insegnante.

A proposito sono significative alcune percentuali dedotte dai dati statistici:

- il 68% dichiara di non aver mai sentito l'insegnante fare accenni alla problematica e alla storia che sta dietro ai concetti presentati;
- il 77% dice di non essere mai stato stimolato a cercare relazioni fra i concetti appresi, né a produrre riflessioni metacognitive;
- l'81% afferma di non aver mai applicato modelli matematici a dati reali;
- l'87% ritiene di non aver mai visto alcuna applicazione della matematica a situazioni quotidiane;
- il 95% assicura di non aver mai usato il computer per risolvere problemi assegnati dal docente.

Su che cosa in realtà abbiano fatto a matematica, gli studenti, rispondendo a una serie di domande precise, si esprimono così:

- hanno tradotto problemi in equazioni;
- hanno risolto equazioni;
- hanno eseguito lunghi esercizi di calcolo;
- hanno ricopiato teoria dalla lavagna;
- sono stati spettatori di insegnanti che risolvevano problemi alla lavagna.

Ben più interessanti e positivi sono i desideri espressi dagli studenti che hanno risposto a domande del tipo: «che cosa si dovrebbe cambiare nell'insegnamento della matematica?», «come dovrebbero comportarsi gli insegnanti?», «quali forme didattiche sarebbero da preferire?», «che tipo di clima dovrebbe istaurarsi in classe durante le lezioni di matematica?»:

- l'insegnamento dovrebbe essere più vivace (*lebendig*), dovrebbe tenere conto maggiormente dell'applicabilità delle conoscenze, della bellezza della matematica, del suo sviluppo storico;
- l'insegnante dovrebbe considerare seriamente il fatto che si impara con «testa, cuore e mano»; in particolare sarebbero gradite dagli studenti attività di misurazione, piegatura, costruzione, ecc.
- sulle forme didattiche, gli studenti puntano molto sull'apprendimento cooperativo (per esempio con lavori in piccoli gruppi);
- secondo gli studenti, l'insegnante dovrebbe predisporre momenti di calma, silenzio e concentrazione;

- l'insegnante stesso dovrebbe entrare in classe rilassato, mantenere un atteggiamento corretto e promuovere la cooperazione e la solidarietà di fronte alle difficoltà dell'apprendimento.

Questi stimoli forniti dagli studenti vengono poi ripresi ed elaborati negli articoli scritti dai didatti tedeschi. In particolare si afferma senza mezzi termini la necessità di staccarsi dall'interpretazione *predicativa* del pensiero, secondo la quale – per sintetizzare – le varie componenti della conoscenza si collocano nella mente come le tessere in un mosaico. Per contro si afferma la volontà di promuovere, in ogni ordine di scuola, l'interpretazione *funzionale-cognitiva* dell'apprendimento, secondo la quale ogni processo di apprendimento è legato alla risoluzione di un problema. Gli individui che pensano in modo funzionale procedono per tentativi (ovviamente in modo cosciente e conseguente a quanto già conosciuto) prima di giungere a una completa strutturazione delle proprie idee. Stabiliscono un dialogo con l'oggetto di apprendimento e giungono alla soluzione completa mediante successivi interventi di modifica e di adattamento della soluzione parziale.

2. Un grave pericolo

La pubblicazione dei risultati TIMSS mi aveva suggerito di intervenire sul numero 35 di questa rivista, uscito nel dicembre del 1997, con uno scritto dal titolo volutamente provocatorio: «*Siamo i primi della classe?*». In quella sede esortai gli insegnanti di matematica ticinesi a non considerare quel risultato – peraltro lusinghiero – con troppa serietà. I miei dubbi sull'attendibilità e sul significato di tali risultati erano radicati su due elementi:

- l'affidabilità relativa di qualsiasi test scritto[3];
- il fatto che TIMSS avesse proposto esercizi di diretta applicazione dell'apprendimento, non veri problemi.

In sostanza avevo detto agli insegnanti suppergiù questo: «fin qui ci siamo, ma ora si tratta di intraprendere la via verso un apprendimento decisamente euristico della matematica, di curare la formazione del pensiero, di tendere alla pratica della risoluzione di (veri) problemi, cioè di problemi che non siano di diretta applicazione della conoscenza acquisita, ma che presentino situazioni nuove, ben studiate per sviluppare le capacità cognitive superiori (analizzare, sintetizzare, intuire, inventare[4])». Un apprendimento, guarda caso, che nella sua linea direttrice ricalca, almeno in parte, i desideri espressi dagli studenti tedeschi, presentati nel paragrafo precedente.

Il messaggio lanciato in quell'occasione mi sembra chiaro.

Nel frattempo la scuola media ticinese si è data un nuovo «Piano di formazione». Esso non appare più come un programma inteso in senso tradizionale – un

3. Si veda in particolare il «Rapporto intermedio relativo alla ricerca sulla robustezza degli apprendimenti» (in bibliografia), nel quale viene messo in risalto – e documentato da una serie di verifiche sperimentali – come dietro a una risposta esatta non vi sia sempre un corretto apprendimento, mentre in certi casi vi sia un apprendimento corretto anche se non ancora completo dietro a risposte considerate errate.
4. Mi riferisco alla «Tavola tassonomica per la matematica» di Arrigo-Frabboni, 1993.

elenco di argomenti e di obiettivi specifici, per intenderci –, ma si fonda su una Mappa formativa generale che, per la prima volta nella nostra storia scolastica riveste (finalmente) il carattere di una (chiara) filosofia dell'insegnamento. Dalla Mappa formativa generale, gli esperti delle varie discipline hanno ricavato le Mappe disciplinari: un'operazione di qualità, un esempio di coerenza. Sulla carta, almeno.

La Mappa formativa per la matematica rappresenta un netto salto di qualità: essa indica agli insegnanti importanti finalità educative che, oltre ai tradizionali «saperi» e «saper fare», concernono in modo equo i «saper essere», novità assoluta rispetto al passato. Ciò significa che la matematica, anche quella scolastica, anche quella che si insegna in una classe di corso base, dev'essere interpretata dagli insegnanti in tutti i suoi risvolti e non solo – come purtroppo accade ancora – unicamente nei suoi aspetti tecnici e nozionistici. Ce lo spiegano chiaramente anche i didatti tedeschi, quando affermano che:

«*un ritorno alla tradizionale "didattica degli esercizi", che taluni ancora preconizzano, non è affatto una soluzione. (…) Non solo la matematica, anche la sua didattica dev'essere tematizzata. Ciò significa intraprendere una riflessione sull'apprendimento, che, già a partire dalla scuola media può essere proposta in classe*». (Wittmann G.[5], 2004).

E ancora:

«*È incontestabile che attraverso una esercitazione insistita di regole e procedimenti si arriva a risolvere gran parte degli esercizi scolastici. Ma così facendo si costruisce un apprendimento paragonabile a un gigante dai piedi di argilla. Quando gli allievi così (ben) preparati tecnicamente si trovano a dover risolvere problemi nuovi più complessi e aperti – simili a gran parte di quelli proposti dallo studio PISA –, o a dover agire in situazioni di apprendimento, il fallimento è assicurato.*» (Leuders T.[6]-Pallack[7] A., 2004)».

E a chi replica che attraverso la pratica di situazioni e di (cosiddetti veri) problemi si trascura l'apprendimento sicuro e completo di nozioni e di procedimenti matematici giudicati indispensabili per il proseguimento degli studi, i didatti tedeschi rispondono:

«*È proprio necessario costruire "completamente" l'armamentario strumentale? Non è proprio possibile riprendere e rinforzare metodi elementari, anche nella scuola superiore, nel momento in cui se ne ha bisogno e si è in grado di approfondirli e di applicarli a situazioni idonee?*[8]».

La prassi consistente nel centrare l'insegnamento della matematica su nozioni e procedimenti ripetuti fino al raggiungimento di automatismi (per taluni allievi) o fino alla nausea e al rifiuto della disciplina (per altri), da noi, si contraddistingue come stato patologico dell'insegnante, causato da un'eccessivo timore di non preparare in modo sufficiente gli allievi per le scuole successive. Siamo giunti così al punto nevralgico. Tutti i buoni propositi e l'intera operazione di rinnovamento lanciata col Piano

5. Gerald Wittmann docente di didattica della matematica all'Alta Scuola Pedagogica della Svevia, Gemünd.
6. Timo Leuders docente di didattica della matematica all'Alta Scuola Pedagogica di Freiburg.
7. Andreas Pallack, referente scientifico per matematica e scienze naturali presso il Landesinstitut für Schule, NRW, Soest.
8. Ibidem.

di formazione arrischiano di rimanere sulla carta per colpa (anche) di questa malaugurata paura del dopo.

Occorre inoltre osservare che, volendo preparare gli allievi in vista, per esempio, della frequentazione del liceo, in quel modo, paradossalmente, si finisce per mandarli incontro a gravi difficoltà. Perché lo strato di nozioni e tecniche consegnato al giovane alla fine della scuola media non può che essere superficiale e se anche dovesse resistere nel corso dei primi mesi di scuola superiore – dando così ingannevolmente l'impressione, al docente di scuola media, di aver avuto successo –, col passare del tempo viene assorbito da un mucchio di altre cose e, quando finalmente lo studente sarà chiamato a dare prova di maturità, non si ritroverà più: triste destino causato da un maledetto quanto clamoroso errore didattico. Lo stesso può essere compiuto anche dal docente di liceo, eccessivamente preoccupato di preparare gli studenti a superare l'esame di maturità.

Sui contenuti che dovrebbero entrare in un programma aggiornato di matematica per la scuola media non mi esprimo in questa sede: rimando al Piano di formazione per la matematica, che condivido pienamente. Più che l'aspetto contenutistico, mi preoccupa quello didattico. Gli insegnanti devono prendere coscienza del problema e cercare di convergere il più possibile verso le linee direttrici appena tracciate. Non è facile per chi è lontano da questi principi, lo so, ma vale la pena tentare. Non solo per gli allievi (anche se sarebbe più che sufficiente per giustificare il cambiamento!), ma anche per loro stessi, per la loro professionalità. Non è certo un grande problema insegnare ad allievi di terza media come si risolve un'equazione di primo grado; ben altro è fare in modo che l'allievo capisca il senso che sta dietro allo strumento equazione, che sia in grado di decidere quando e come usarlo per rispondere a determinati interrogativi indotti da una situazione, che sappia valutare criticamente la soluzione trovata. È solo un piccolo esempio, lo riconosco, ma si può partire anche da qui, a condizione di perseverare e di costruire di conseguenza. Ciò significa anche abituare lo studente a dubitare, piuttosto che inculcargli (false) certezze. Vale di più dubitare di una risposta (anche corretta) di un allievo che affrettarsi a dichiarare corretta la stessa, magari ripetendola convenientemente emendata. Perché non è la certezza dichiarata ma il dubbio che stimola la riflessione.

Parallelamente, è più produttivo fare in modo che gli allievi debbano districarsi di fronte a un solo problema sconosciuto, che non far loro risolvere una serie di problemi noti perché spiegati in lungo e in largo precedentemente.

Di questo passo, il libro di testo (o la dispensa) che «spiega la teoria» risulta dannoso, mentre tornano molto utili i manuali che propongono situazioni di apprendimento e attività di laboratorio matematico, prima ancora di proporre sintesi teoriche o sequenze di esercizi di apprendimento.

3. L'esempio del calcolo letterale, tanto per capirci

In quarta media si dovrebbe giungere a una prima formalizzazione del calcolo letterale. La tradizione vuole che si inizi con i concetti di monomio, di polinomio, di grado di un monomio (di un polinomio) e con le tecniche di base come la moltiplicazione di un monomio per un polinomio, la messa in evidenza di un fattore comune da una somma algebrica, i cosiddetti «prodotti notevoli», per finire in particolari tecniche di fattorizzazione applicate poi alla semplificazione di frazioni letterali e al calcolo di somme algebriche di frazioni letterali. Chi segue ogni anno questo percorso si sarà (finalmente) accorto che, accanto a quei pochi studenti che imparano tutto al primo impatto e a un altro insieme di allievi che apprendono mnemonicamente (leggi: strato superficiale), vi è sempre quel gruppo che non capisce e che, nonostante tutti gli sforzi profusi da chi insegna, cade costantemente nei soliti errori. A questo punto, scartate le abituali battute sul quoziente d'intelligenza o sul mancato impegno, occorre riflettere seriamente.

La mia risposta è già contenuta nelle righe precedenti: non possiamo pretendere che l'allievo raggiunga un apprendimento cosciente e stabile nel tempo, se non gli facciamo capire prima il senso di effettuare un calcolo letterale. Per uno studente di quarta media, il calcolo letterale deve essere prima di tutto la generalizzazione del calcolo numerico, non un sistema formale in cui gli oggetti sono lettere che vanno composte secondo un numero sovrabbondante di regole (per lo più ingiustificate) e disseminato da altrettanti divieti (pure poco comprensibili). Prima di iniziare la sistemazione teorica – che va completata nelle scuole superiori – occorre quindi far nascere in lui la necessità di usare lettere e poi di effettuare calcoli con esse. In questo modo l'allievo non solo vede che cosa c'è dietro la manipolazione algebrica delle lettere, ma è anche stimolato a perfezionare le proprie capacità, a mano a mano che avvertirà nuove esigenze, nel contesto della risoluzione di un nuovo problema. Scommettiamo che così facendo più nessuno porrà la «tradizionale» domanda: «a che serve tutto ciò?».

Già, ma come riuscire a far nascere la necessità di usare lettere? Ecco una domanda impegnativa. Le possibilità sono molte: la scelta sta all'insegnante, ma il criterio della scelta dovrebbe possibilmente tenere conto anche delle caratteristiche della classe, delle situazioni contingenti, in generale di tutto ciò che potrebbe stimolare maggiormente l'interesse degli allievi. Siccome in questo momento non mi riferisco a una classe particolare (questa del resto è la situazione degli autori di manuali), propongo un paio di attività, a mo' di esempio, cosciente del fatto che ogni insegnante saprà costruirsi le proprie.

3.1. Primo esempio: intuizione del termine n-esimo di una successione numerica

La situazione[9]

Consideriamo una successione di numeri interi positivi, tale che ogni numero dal terzo in poi sia la somma di tutti quelli che lo precedono, il primo numero sia 1 e l'ultimo sia 2888.

Domande possibili

Di quanti termini si compone la più lunga successione che si può costruire con questa legge?

Qual è il secondo termine?

E volendo si possono anche trovare tutti i termini della successione.

9. Da uno spunto offerto dalla (sempre ricca) raccolta di problemi dell'organizzazione internazionale Kangourou; si veda in particolare Kangourou Italia, sul sito www.kangourou.it; il problema al quale mi riferisco è il numero 30 della serie Cadet del 2002.

Un possibile iter risolutivo

Ci può aiutare la (ri)costruzione della successione dall'inizio, introducendo una lettera al posto del secondo termine che per ora è sconosciuto.

n	**termine di ordine n**
1	1
2	a
3	1+a
4	$1+a+(1+a) = 2 \cdot (1+a)$
5	$1+a+(1+a)+[(2 \cdot (1+a)] = 2^2 \cdot (1+a)$
6	$1+a+(1+a)+2 \cdot (1+a) +2^2 \cdot (1+a) = 2^3 \cdot (1+a)$
…	…
n	$2^{n-3} \cdot (1+a)$

La formula che esprime il termine n-esimo è raggiunta per intuizione: è questa abilità mentale che ci interessa sviluppare nella scuola media[10].

Nel nostro caso dev'essere:

$2^{n-3} \cdot (1+a) = 2888$

cioè

$2^{n-3} \cdot (1+a) = 2^3 \cdot 19^2$

da cui si ricava (nel caso della successione più lunga):

$n-3 = 3$, cioè $n=6$ e $1+a = 361$, cioè $a = 360$.

Ed ecco infine i 6 termini della successione più lunga:

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$\mathbf{t_n}$	1	360	361	722	1444	2888

Appendice

Le tabelle mettono in risalto anche la formula ricorsiva della successione:

$t_n = 2 \cdot t_{n-1}$, per $n \geq 4$

3.2. Secondo esempio: l'epantema[11] di Timarida[12] o fiorita di Timarida

Una versione moderna proponibile in classe[13]

Aldo, Baldo, Carlo, Diego e Franco pesano assieme 213 kg.

Aldo e Baldo pesano assieme 78 kg;

10. Il lettore può facilmente dimostrare la correttezza della formula per induzione completa.
11. Il termine *epantèma* doveva significare una **concatenazione**, o una **germogliazione in serie**, di risultati, o come conseguenza ed estensione di un risultato iniziale (che costituiva un caso particolare) il cui sviluppo consisteva in una generalizzazione progressiva, o infine come sviluppo in varie direzioni di un risultato raggiunto.
12. Timarida di Paro (isola greca situata nel Mar Egeo appartenente all'arcipelago delle Cicladi) fu seguace della scuola pitagorica. Visse probabilmente nel IV secolo a.C. ed è noto per i suoi contributi aritmetici.
13. Il testo del problema è tratto dal volume di Timpanaro Cardini M. (in bibliografia). Vedere anche il sito http://digilander.libero.it/basecinque/index.htm, Laboratorio di Matematica Ricreativa.

Aldo e Carlo pesano assieme 84 kg;
Aldo e Diego pesano assieme 67 kg;
Aldo e Franco pesano assieme 89 kg.
Quanto pesa ciascuno di essi?

Un possibile iter risolutivo

Chiamiamo A il peso[14] di Aldo, B quello di Baldo, C quello di Carlo, D quello di Diego e F quello di Franco.

Le 5 equazioni seguenti si ricavano direttamente dal testo del problema:

(1) $A+B+C+D+F=213$
(2) $A+B=78$
(3) $A+C=84$
(4) $A+D=67$
(5) $A+F=89$

Addizionando le equazioni dalla (2) alla (5) si ottiene
$4A+B+C+D+F=318$
$3A+(A+B+C+D+F)=318$
e, tenendo conto della (1), si può scrivere:

$$A=\frac{105}{3}=35$$

Infine da ciascuna delle equazioni da (2) a (5), sostituendo il valore trovato di A, si ottengono gli altri valori incogniti.

I pesi cercati, in kg, sono:
A=35 ; B=43 ; C=49 ; D=32 ; F=54

Commento

È pur vero che questo problema potrebbe anche essere risolto senza introdurre alcuna lettera. Basta provarci per costatare quanta fatica in più si deve fare.

Inoltre, l'introduzione di lettere può permettere la generalizzazione di questa situazione, compresa la sua decontestualizzazione.

Si hanno n incognite $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$
Si conoscono le seguenti relazioni fra di esse:

(0) $x_0+x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{n-1}=T$
(1) $x_0+x_1=A_1$
(2) $x_0+x_2=A_2$
(3) $x_0+x_3=A_3$
……………………………
$(n-1)$ $x_0+x_{n-1}=A_{n-1}$

14. Chiedo scusa ai colleghi di fisica per non usare il termine *massa*, ma preferisco rimanere fedele alla terminologia del problema.

Analogamente a quanto fatto nel caso particolare, addizionando le equazioni dalla (2) alla (n–1) e tenendo conto della (0) si ottiene:

$$x_0 = \frac{T - (A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{n-1})}{n-2}$$

$$x_i = A_i - x_0 \quad , \quad \text{per } i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$$

Il ruolo delle lettere nei processi di generalizzazione è essenziale. Generalizzare una situazione particolare significa cogliere la struttura matematica che la caratterizza. Con ciò si esce dal contesto particolare e si raggiunge un'intera classe di situazioni. Inoltre, avendo generalizzato la situazione, se abbiamo a disposizione un computer, possiamo immettere l'algoritmo risolutivo nella macchina. Fatto questo, sarà sufficiente introdurre il vettore di dati (T, A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1}) per ottenere in una frazione di secondo la corrispondente soluzione del problema.

3.3. Dulcis in fundo

I due esempi addotti, scelti fra i molti che si potrebbero considerare, dovrebbero suggerirci almeno le seguenti riflessioni didattiche:

- il primo significativo contatto dell'allievo con l'uso delle lettere in matematica dovrebbe avvenire nell'ambito di situazioni sufficientemente ricche da indurre domande stimolanti; nel primo esempio, intuire il termine n-esimo di una successione, o, in generale, capire come si sviluppa un processo, ha in sé un valore intellettuale notevole, che non dovrebbe lasciare indifferente nemmeno il neofita; nel secondo esempio, l'ambito storico e linguistico (Timarida e i pitagorici, il significato del termine «epantema»), se opportunamente presentati, dovrebbero pure agire da stimolo;
- prima di giungere a formalismi di qualsiasi tipo e livello (polinomi, frazioni algebriche, ecc.), occorre proporre in classe diverse attività nelle quali le lettere vengano usate per semplificare iter risolutivi o per meglio capire e descrivere determinati concetti o situazioni;
- sempre nella fase euristica, propedeutica alla formalizzazione, non si devono porre limiti di carattere matematico; le lettere si collocano dove è opportuno (nel primo esempio si trovano anche a esponente) e se si hanno più di due relazioni tra lettere (vedere il secondo esempio), ben vengano; la tradizionale limitazione a non più di due equazioni e due incognite ha provocato gravi danni all'apprendimento perché ha costretto generazioni di insegnanti a inventare problemi tutt'altro che interessanti (per forza!) e a rendere così la materia parecchio noiosa.

Le considerazioni fatte attorno al calcolo letterale possono essere estese – opportunamente adattate – a qualsiasi altro capitolo previsto dai programmi ufficiali. Il raggiungimento di qualsiasi livello di competenza in matematica dipende anche e soprattutto da impostazioni didattiche di questo tipo.

Termino con una citazione vecchia di cent'anni, ma sorprendentemente attuale.

«*La differenza fra noi e gli allievi affidati alle nostre cure sta solo in ciò, che noi abbiamo percorso un più lungo tratto della parabola della vita. Se gli allievi non capiscono, il torto è dell'insegnante che non sa spiegare. Né vale addossare la responsabilità alle scuole inferiori. Dobbiamo prendere gli allievi come sono, e richiamare ciò che essi hanno dimenticato, o studiato sotto altra nomenclatura. Se l'insegnante tormenta i suoi alunni, e invece di cattivarsi il loro amore, eccita odio contro sé e la scienza che insegna, non solo il suo insegnamento sarà negativo, ma il dover convivere con tanti piccoli nemici sarà per lui un continuo tormento. Ognuno si fabbrica la sua fortuna, buona o cattiva. Chi è causa del suo mal, pianga sé stesso. Così disse Giove, e lo riferisce Omero, Odissea I, 34. Con questi principii, caro lettore e collega, vivrai felice*». (Giuseppe Peano, 1925[15])

Bibliografia

Arrigo G.
Siamo i primi della classe? Bollettino dei docenti di matematica, numero 35, dicembre 2001, pp. 103-105. Bellinzona: UIM.

Arrigo G.
Quale matematica per la scuola elementare? Bollettino dei docenti di matematica, numero 48, maggio 2004, pp. 9-28. Bellinzona: UIM.

Arrigo G.
Rapporto intermedio relativo alla ricerca sulla robustezza degli apprendimenti. Locarno: ASP, 2004.

Wittmann G.
Zwischen Erwartung und Realität. Mathematiklehren, Zeitschrift für den Unterricht in allen Schulstufen, Nr. 127, Dezember 2004, Stuttgart: Klett Verlag.

Leuders T.-Pallack A.
Der Grundkurs-Mathematik für alle? Mathematiklehren, Zeitschrift für den Unterricht in allen Schulstufen, Nr. 127, Dezember 2004. Stuttgart: Klett Verlag.

Timpanaro Cardini M. (a cura di)
Pitagorici. Testimonianze e frammenti, Fasc. I, II, III, 1973. Firenze: La Nuova Italia.

15. Giuseppe Peano. Giochi di aritmetica e problemi interessanti. Torino: Paravia, 1925-II, pp. 65.

3. Matematica in Ticino 1963-2005

Giorgio Mainini

This paper is a synthesis of the history of mathematics teaching in Ticino from 1963 to 2005.

This review is an help for the young teachers, in order to understand the choices that are operated today in the teaching of mathematics in our schools. We suggest also some guidelines for the teachers, that should allow the natural development of mathematics teaching.

Amarcord

… correvano gli anni ’60 del Novecento e la matematica, al Ginnasio, era più o meno la medesima di quella dell’epoca del Franscini.

In prima, calcoli con le «espressioni», e che espressioni! Capitava che, fuori dalle parentesi graffe, ci fossero altre parentesi tonde. Naturalmente, solo numeri interi («naturali», diremmo oggi). E, a geometria, perimetri, aree e volumi delle figure fondamentali (triangolo, parallelogrammo, trapezio, cerchio, parallelepipedo, prisma, piramide, cilindro, cono e sfera). Le formule, e i «numeri fissi», si sprecavano, senza che ci si prendesse più di tanto la briga di spiegare perché erano quelle e non altre, e le «inverse» avevano la stessa importanza delle «dirette».

In seconda si introduceva il calcolo con le frazioni, consentendo così un «arricchimento» delle espressioni, e a geometria si trattavano figure piane e solide composte (un *hit* era il cilindro con sovrapposta una semisfera di uguale diametro: siccome la «didattica» sosteneva la necessità di dare problemi «concreti», quella figura diventava una stufa…). L’introduzione delle frazioni si svolgeva secondo una liturgia ben precisa: prima come parti di un qualche intero, poi come operatori, infine come numeri a sé stanti. Come mai delle «parti» potessero operare su qualcosa o, addirittura, moltiplicarsi fra di loro era un mistero di fede. Lo diceva il ‘sore, e tanto bastava. Non è opportuno indagare sulla questione se il ‘sore, almeno lui, sapesse come mai…

In terza si introducevano i numeri negativi, come debiti, temperature gelide, profondità marine: poi, già che c’erano i numeri negativi, si elevavano gli interi al rango di positivi e il tutto dava i numeri relativi. Le frazioni seguivano l’andazzo e si poteva così, finalmente, risolvere espressioni degne di tale nome. Improvvisamente si scopriva poi che c’erano le proporzioni e le grandezze direttamente e inversamente proporzionali. Ne conseguiva la trattazione dei problemi del tre semplice e del tre composto: qualcuno ricorderà ancora che andavano risolti con uno schema rettangolare in cui si disegnavano «frecce in su» e «frecce in giù» («punta per coda fratto coda», «punta per punta fratto coda», ecc.). La geometria si riduceva a vedere qualche figura «nuova»:

settori, corone, segmenti circolari nel piano, mucchi di ghiaia, tubi, sfere cave, calotte *et similia* nello spazio.

In quarta equazioni di primo grado intere, fratte, parametriche (con i famosi «valori eccezionali») e, se tutto andava per il meglio, qualche problema da risolvere con le equazioni. Risolvere le equazioni era una faccenda di «trasporti con cambiamento di segno» e di «dividi se moltiplica e moltiplica se divide». A nostra insaputa, seguivamo il metodo di Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi (circa 780-850 d.C.), ma, appunto, a nostra insaputa. A geometria, invece, improvvisamente saltava fuori un incontenibile desiderio di rigore: Euclide, insomma. Assiomi, postulati, primi teoremi, fino ai famosi (famigerati?) tre «criteri di uguaglianza dei triangoli».

In quinta, sistemi di equazioni a due incognite e due equazioni, (metodi di somma e sottrazione e di sostituzione) interi, fratti, parametrici e, naturalmente, metodo di Cramer. A geometria l'operazione rigore veniva sviluppata fino ad arrivare ai teoremi di Pitagora e di Euclide.

Una descrizione da un lato un po' troppo dettagliata e dall'altro incompleta: ciò che si vuole qui sottolineare è la pressoché totale mancanza di riflessione sul perché l'algebra (cioè ciò che aveva a che fare con i numeri) e la geometria «funzionassero» così. L'*ipse dixit* era la norma. Non eravamo cattivi insegnanti: semplicemente, eravamo insegnanti come si voleva che fossimo. Qualcuno, però, non dormiva del tutto: un primo cambiamento, avvenuto dopo lunghissime discussioni e con dubbi atroci, fu l'introduzione delle equazioni e del calcolo letterale nelle scuole maggiori. La «rivoluzione» fu codificata da un testo dell'allora esperto per la matematica prof. Angelo Boffa («Aritmetica generalizzata») e valutata alla fine dell'anno con un gigantesco test esperito dall'Ufficio Studi e Ricerche (USR), diretto da un personaggio che si incontrerà ancora nel seguito: il prof. Franco Lepori.

Ben altra «rivoluzione», però, era nell'aria. Un giovane matematico appena uscito dal Poli, un certo Gianfranco Arrigo, era riuscito a raccogliere intorno a sé un gruppetto di pazzoidi che, una mattina alla settimana, si riunivano in un'aula delle Scuole Nord di Bellinzona. Lì veniva loro rivelato un nuovo Verbo: la «Matematica Moderna» (MM). L'idea di fondo era di lavorare con gli insiemi, da cui il termine di «insiemistica» con cui la MM si fece conoscere. Altri termini che assursero a celebrità furono quelli di unione, intersezione, prodotto cartesiano, relazione, funzione e applicazione (con i relativi aggettivi). Impararono, i pazzoidi, che cosa fossero una partizione e le classi d'equivalenza: dedussero quindi che un numero relativo era una classe di coppie di NxN secondo una certa relazione d'equivalenza, e analogamente che un numero razionale era una classe di coppie di ZxZ* secondo una cert'altra relazione d'equivalenza. Un mondo nuovo si apriva: gli oggetti matematici, pur nella loro astrazione, acquistavano un senso e un senso cominciava ad avere ragionare su di essi. Scoprirono che il corretto ragionare era stato matematizzato, più di un secolo prima, da George Boole (1815-1864) e qualcuno di loro si appassionò alla cosa. Anche la geometria prese un nuovo corso: se il piano è un insieme di punti, le figure geometriche sono suoi sottoinsiemi e quindi possono essere trattate a base di funzioni: ecco quindi la geometria delle trasformazioni. Gli eventi precipitarono: qualche anno prima la Olivetti aveva messo sul mercato un calcolatore da tavolo, il mitico P101, sul quale il solito Gianfranco Arrigo tenne un corso per adulti al Liceo di Lugano e, per Giove, come tutti i calcolatori, era l'applicazione materiale dell'algebra di Boole; si tenne poi un convegno in Belgio, a Morlanwaeltz, sulla logica, al quale buon numero degli ora non più pazzoidi partecipò; nell'anno scolastico 1968-1969, al Ginnasio di Viganello si sperimentò, nella mia II D, l'insegnamento della matematica moderna; dopo un esasperante tira e molla da parte dell'Ufficio dell'Insegnamento Medio (UIM), l'allora Consigliere di Stato direttore del DIP, ing. Ugo Sadis, autorizzò l'acquisto di un calcolatore da tavolo (e non è più pubblicità dire che si trattava di un Monroe) di cui dotare la medesima sede ginnasiale. Mi piace qui ricordare due allievi che, insieme a chi scrive, sperimentarono l'uso che si può fare di un computer per imparare la matematica: in ordine alfabetico, Alberto «Bitoz» Bertocci, ora giornalista radiofonico, appassionato musicista e, quando il tempo glielo consente, matematico dilettante, e Francesco Pelloni, ora dottore in medicina specialista in dermatologia: quante volte, alle sette di sera e più tardi ancora, i signori Bertocci e Pelloni telefonarono al ginnasio per chiedere se i loro figli erano quasi pronti per tornare a casa… Anche in II D le cose andavano per il meglio: si volava sulle ali dell'entusiasmo, al punto che persino esagerazioni, oggi evidenti, come la costruzione di Z e di Q con le classi di equivalenza avevano successo. Chi ha vissuto quegli anni li ricorda come un periodo eccitante, sia per la durezza di alcune battaglie, sia per la soddisfazione di averle vinte, sia per la sensazione di avanguardia che permeava il tutto. Naturalmente c'è sempre chi, seduto su un paracarro al bordo della strada, deride le scarpe sporche di chi cammina, e anche allora non mancarono. Ma oramai l'insegnamento della matematica aveva preso una nuova via. Il pendolo, prima tutto da una parte, si era spostato completamente dall'altra e, inevitabilmente, tornò indietro. Dopo qualche anno la MM si mutò in «matematica essenziale», una specie di compromesso tra il vecchio e il nuovo, ma gli insegnanti si erano convinti che al «vecchio vecchio» non si poteva più tornare. Anche per un altro motivo, istituzionale questo: si era cominciato a parlare, prima in piccoli gruppi poi sempre più apertamente, di sostituire la Scuola Maggiore e il Ginnasio con la Scuola Media (SMe). Ideatore e animatore fu Franco Lepori che, da capo dell'USR era diventato capo dell'UIM. Purtroppo lo spazio a disposizione non consente di dire del compianto amico Franco tutto il bene che si merita: manzonianamente dirò «La sventurata rispose». Fatto sta che, proprio durante il periodo delle Olimpiadi di Monaco, nel 1972, a Faido si riunirono i gruppi che avrebbero steso i primi programmi della SMe: il risultato di quei lavori fu pubblicato sul nro. 27 di «Scuola Ticinese», edita dalla Sezione pedagogica, nata, guarda caso, nel 1968. Per quanto riguarda il seguito dell'insegnamento della matematica, fondamentale fu la «macchina»: un diagramma di flusso che, per la prima volta, cercava di schematizzare le procedure di apprendimento della disciplina. Fondamentale perché fece capire che, va bene la struttura interna della disciplina, ma che anche la sua didattica era da prendere in seria considerazione. C'è chi crede che fu proprio la «macchina» a fulminare Gianfranco Arrigo (nel frattempo assurto al soglio di esperto per la matematica) sulla via di Damasco dello studio della didattica. Ne seguirono due lavori: il «Glossario di matematica», che cercò di uniformare su base moderna tutta la terminologia che si sarebbe poi usata, e le varie stesure della tassonomia, strumento che consente di programmare e valutare un'unità didattica. Entrambi i lavori coinvolsero un buon numero di insegnanti, che ebbero così ulteriori occasioni di incontri, discussioni, approfondimenti. Ancora in quegli anni si scrissero i testi «Matematica» e il «Geometria programmata», un libro sfogliato prodotto da un fantomatico GSIP (Gruppo di studio per l'insegnamento programmato) che, *à la* Bourbaki, nascondeva i nomi di quattro insegnanti di matematica ticinesi. Ovviamente non si trattava di geometria razionale (alla Euclide) e nemmeno di geometria metrica (il solito calcolo di ampiezze angolari, perimetri, aree e volumi), ma di geometria delle trasformazioni ispirata al famoso quanto importante contributo di Felix Klein, conosciuto grazie alla diffusione del suo «Programma di Erlangen», prolusione pronunciata alla sua nomina a professore ad Erlangen[1], appunto, il 7 dicembre 1872.

Essere digitali

Un'altra novità tecnologica fece la sua apparizione, le calcolatrici elettroniche, e ci fu chi pensò di utilizzarle anche a scuola. Adesso che le «macchinette» sono entrate a far parte della panoplia di tutti, è difficile immaginare quanto fu dura la lotta per la loro introduzione. Ci furono alcuni docenti che, novelli *clerici vagantes*, batterono sin le più remote contrade per spiegare che non era il massimo dell'intelligenza matematica moltiplicare o dividere fra loro numeri di quattro o cinque cifre. Banalità, ma bisogna leggere i giornali del tempo per rendersi conto di quali abomini i fautori furono accusati.

Nel frattempo il vecchio Monroe era stato sostituito da macchine più potenti. Certo che dire «potenti» oggi fa ridere: in realtà avevano capacità di memoria talmente ridotte (circa un quarto di kB) che, anche solo per verificare se un numero era primo, bisognava fare i salti mortali per far sì che il programma «ci stesse dentro». Ciononostante, nei ginnasi prima e nella SMe poi, si sperimentarono le opzioni di informatica. Quando poi arrivarono il C64 e il PC1, le opzioni rinacquero a una nuova vita. Finalmente, nei primi anni '80, fu proposta, e accettata, un'esperienza il cui senso sta nel suo stesso nome: «Progetto di Informatica Integrata nell'Insegnamento» (P3i), che fu fatta nelle sedi di Besso e di Gordola. Si noti che si parla di «integrazione nell'insegnamento», non di «integrazione nell'insegnamento della matematica». Ciò che si voleva infatti sperimentare era se, e come, l'informatica potesse rappresentare una sorta di cemento fra tutte le discipline: purtroppo, per una serie di motivi che non mi piace esaminare qui, il successo della P3i fu solo parziale. Può essere importante sapere che le idee e i principi didattici nati in seno alla P3i furono fondamentalmente gli stessi proclamati – qualche anno dopo – in tutto il mondo da Nicholas Negroponte[2], uno dei maggiori esperti mondiali di comunicazione digitale, professore al famoso MIT di Cambridge Massachusetts (USA). Un vero peccato! Non è fuori luogo dire che il Cantone perse un treno che non riuscì più a raggiungere.

Una rivoluzione didattica

Intanto erano stati scritti altri testi, i «Dimensione matematica»: non solo perché i «Matematica» erano fisiologicamente invecchiati, ma perché la riflessione didattica era continuata. Bisognerebbe qui spendere almeno qualche parola sull'importanza che ebbero le varie forme di collaborazione con l'Università di Bologna, in par-

1. Cittadina universitaria nei pressi di Norimberga, Germania.
2. Si veda per esempio il testo tradotto in italiano: Negroponte N. *Essere digitali*. Sperling & Kupfer Editori. Milano: 1995.

ticolare con il prof. Bruno D'Amore, che di molti di noi è diventato nel frattempo caro amico, ma si scenderebbe troppo nei dettagli. Basterà ricordare i convegni di Castel San Pietro Terme, giunti all'edizione nro. 19 ai quali hanno partecipato varie decine di docenti ticinesi[3]. Gli ultimi anni sono nella memoria di tutti, e dunque non vale parlarne, ma qualcosa va pur detto. Come vent'anni fa le «macchinette» resero obsoleto il calcolo numerico (al di là di una ragionevole competenza che deve pur essere acquisita), così oggi i programmi di elaborazione simbolica dovrebbero sostituire l'alta scuola viennese del calcolo letterale (al di là di una ragionevole competenza che deve pur essere acquisita). Purtroppo non è così: c'è ancora chi sostiene che scopo e meta dell'insegnamento della matematica nella SMe sia l'acquisizione di tecnicismi che consentano di seguire il programma liceale senza troppi patemi. A chi scrive (fortunatamente non solo a lui) una tale tesi sembra francamente assurda, e per più di un motivo. Senza metterli in ordine d'importanza ne esporrò alcuni. I tecnicismi sono una spaventosa barba, utile (si fa per dire) solo a far credere che la matematica, a sua volta, sia una spaventosa barba. Se non sono sorretti da serie motivazioni, essi fanno pensare a candidi conigli estratti dal nero cilindro di un mago: «Ma guarda te, bastava cambiare il segno davanti e sotto e tutto si semplificava!». Se si sa semplificare una frazione con un $f(x+\Delta x) - f(x)$ al numeratore con qualcosa che sta al denominatore, si è davvero sulla strada di capire che cosa sia una derivata? E sottolineo il «capire», non il saperla calcolare. Per quale motivo devo mai saper calcolare il limite per x tendente a boh! del coseno di bah! elevato al valore assoluto di bèh!? Certo, può ben capitare di doverlo trovare, ma allora vuol dire che ci si è imbattuti in un problema che lo richiede. A me pare che interessante sia risolvere il problema: il limite o lo si calcolerà con il computer o si telefonerà al Poli. Gli attuali programmi di elaborazione simbolica mostrano, a richiesta, anche i passaggi intermedi: ha senso passare ore e ore, allievi stufi e docenti demotivati, a calcolare passaggi intermedi che persino una macchina sa eseguire? Amici, colleghi, difendiamo la nostra dignità professionale! A chi dovesse sostenere che tanto vale lasciare a casa i 'sori di mate, se il loro mestiere consiste nel fare, a migliaia di franchi al mese, ciò che uno stupido programma da 300 franchi sa fare altrettanto bene, che cosa ribatteremo? Nessuno oserà tanto? Forse così tanto no, ma certi discorsi anche recenti dovrebbero metterci all'erta: non mettiamo armi in mano ai nostri avversari. Qui si potrebbe di conseguenza spiegare perché chi scrive è coautore dei testi della nuova collana per la scuola media «Atolli matematici», e perché tali testi sono così e non cosà: ma a questo punto dovrebbe essere evidente.

3. In realtà è la ventesima, perché la prima, tenutasi a Bologna, fu prudenzialmente numerata come numero 0.

4. Ricerche in Didattica della matematica effettuate presso l'ASP come lavoro di Diploma di Maestro nell'anno accademico 2004-2005

Emanuele Di Marco, Vania Lehner, Denise Lo Priore, Daniela Mitta, Elena Mombelli, Giada Mossi, Elisa Rech

This paper presents some of the research studies in Didactics of Mathematics carried out by students of the ASP (High School of Pedagogy) of Locarno as final work for the Diploma at the end of their curriculum. These studies range over several traditional research topics and provide contributions of some relevance.

Il lavoro finale di Diploma di Maestro previsto dall'ASP di Locarno consiste in una vera e propria ricerca in didattica disciplinare. L'idea di base è che un insegnante di scuola dell'infanzia o primaria, anche alle prime armi, porti con sé, al di là del bagaglio cognitivo, pedagogico e disciplinare, anche quella minima esperienza di ricerca che gli permetterà di guardare alle situazioni d'aula con occhi diversi, quelli di chi sa indagare, sa vedere, sa osservare, sa capire. Il ricercatore è capace infatti di analizzare le situazioni d'aula meglio di chiunque altro.

I temi vengono scelti dai candidati stessi, sulla base di un elenco che viene redatto dai docenti; alcuni di questi ultimi vengono poi nominati direttori delle ricerche: seguono gli studenti fin dall'impostazione e garantiscono da un lato la qualità della metodologia, dall'altro la validità dei risultati.

Il primo gruppo di Diplomati all'ASP ha avuto come direttori Martha Isabel Fandiño Pinilla, Danilo Frigerio e Silvia Sbaragli; Bruno D'Amore è stato il coordinatore e la guida per tutti i lavori.

Ci è sembrato interessante e forse utile far conoscere ai lettori del BDM e, in generale a tutti gli insegnanti, almeno i temi affrontati da queste ricerche e i loro risultati. Siccome i lavori presentati sono tutti lunghi almeno 30-40 pagine e qui ogni presentazione consta di 2-3 pagine, è ovvio che quel che si presenta non è che una traccia, neppure un riassunto, solo un minimo cenno sul contenuto indagato. I lavori di ricerca completi sono depositati presso il Centro di Documentazione dell'ASP e sono dunque a disposizione degli eventuali interessati.

Per semplicità e per opportunità, ogni ricerca delineata descrive la propria bibliografia, anche a costo di ripetizioni; ci è sembrato più opportuno procedere così anche per semplicità di lettura.

Influenza di apprendimento scolastico ed esperienza quotidiana sul concetto di frazione

Emanuele Di Marco

La presente ricerca effettuata in Didattica della matematica si è concentrata sul rapporto che esiste tra gli apprendimenti scolastici e la loro applicazione nella vita quotidiana riguardo al concetto di frazione. Come ha già dimostrato la ricerca in questo campo, soprattutto negli ultimi anni, il bambino che si avvia alla scolarizzazione obbligatoria vanta numerosi apprendimenti. Ne consegue che gli insegnamenti sul concetto di frazione impartiti dal terzo anno di scuola elementare si confondono con ciò che è stato imparato in modo empirico. Prima di iniziare la ricerca, è stato quindi opportuno confrontarsi con i diversi tipi di interpretazioni del concetto di frazione che sono presenti nella vita di tutti i giorni. Ci si è dunque concentrati su nove accezioni del concetto di frazione, creando, per ciascuna, delle situazioni da risolvere che sarebbero poi state proposte agli allievi per verificare il livello di competenza delle differenti classi. I nove tipi di accezioni del concetto di frazione sui quali ci si è concentrati sono i seguenti.

1. La frazione come parte di un uno-tutto.
2. La frazione come operatore (questo significato è forse il più presente nella scuola).
3. La frazione come rapporto.
4. La frazione nella probabilità.
5. La frazione nei punteggi (ad esempio: *Laura ha fatto centro 3 tiri su 5: il punteggio è 3/5).*
6. La frazione come misura.
7. La frazione come indicazione di quantità di scelta da un tutto.
8. La frazione come percentuale.
9. La frazione nel linguaggio quotidiano (sono numerose le situazioni di vita quotidiana nella quale vengono adottate le frazioni. Si parla di «quarti d'ora»; sulle monete da 50 centesimi svizzeri non c'è scritto «50», bensì «1/2 Fr»; percentuali sono indicate anche sui segnali stradali per indicare le pendenze…).

Le due domande di ricerca che ci siamo posti al riguardo sono state:

— l'apprendimento scolastico del concetto di frazione cambia i contesti d'uso dell'idea di frazione nella vita quotidiana? Se sì, come?

— l'apprendimento scolastico del concetto di frazione influisce sulla risoluzione di situazioni pratiche?

Questa ricerca è stata realizzata con sessantasei studenti di tre ordini scolastici differenti (seconda e quinta elementare, seconda media) tramite un questionario pensato per sondare il livello di competenza su questo tema da parte di allievi che non hanno mai avuto alcuna formazione scolastica in merito al concetto di frazione, altri che ne hanno ricevuto una parte e infine altri con una competenza scolastica maggiore. Tramite il questionario e successivi colloqui, gli studenti sono stati confrontati con delle situazioni di vita pratica nelle quali era necessario affrontare il concetto di frazione. Tutti gli scolari hanno risolto il questionario individualmente, secondo la propria competenza. In una seconda fase poi coloro che hanno ottenuto il migliore o il peggiore risultato hanno sostenuto un colloquio tramite il quale si sono verificate ulteriormente le convinzioni, basandosi su un ulteriore questionario. Gli esiti dei due questionari dimostrano innanzitutto che gli scolari di seconda elementare vantano una buona riuscita in diverse situazioni. Inoltre, in alcuni casi i risultati della quinta elementare sono stati migliori di quelli della seconda media, lasciando intuire che una maggiore formazione scolastica in merito non corrisponde ad una migliore riuscita nelle situazioni di vita pratica. Tra i vari tipi di frazione utilizzati nella vita di tutti i giorni, alcuni risultano ben compresi ed applicati anche dagli studenti più giovani (ad esempio, in talune contingenze, gli allievi di seconda elementare hanno ottenuto risultati pari al 90% di riuscita) mentre altri sono compresi solo dalle classi che hanno avuto una formazione in merito (è il caso della frazione come probabilità, della frazione come percentuale, ecc.). Di conseguenza ci si può interrogare sull'opportunità di proporre attività sulle frazioni solo dalla terza elementare in poi. Concretamente, la ricerca dimostra che tra i numerosi apprendimenti quotidiani che gli scolari hanno fuori dal contesto scolastico, vi sono anche nozioni sul concetto di frazione. Questi non sono sufficienti però ad avere una formazione completa; è quindi compito della scuola fornire i necessari complementi basando i propri insegnamenti sulla competenza che ciascun allievo ha già acquisito. In effetti, anche nell'insegnamento di questo concetto bisogna tenere in considerazione che gli allievi possiedono un sapere molto differente l'uno dall'altro.

Bibliografia

Artusi Chini L.
Numeri e operazioni nella scuola di base. Bologna: Zanichelli, 1990.

D'Amore B.
Didattica della matematica. Bologna: Pitagora, 2001.

Fandiño Pinilla M. I.
Curricolo e valutazione. Bologna: Pitagora, 2003.

Fandiño Pinilla M. I.
Le frazioni. *Aspetti concettuali e didattici.* Bologna: Pitagora, 2005.

L'infinito nella scuola dell'infanzia

Vania Lehner

L'infinito suscita da sempre una particolare curiosità, la quale ha spinto diversi studiosi ad approfondire l'argomento, in particolare in ambito matematico e in didattica della matematica dove si sono potuti studiare i passaggi storici più delicati, gli ostacoli epistemologici e culturali del concetto stesso e le comprensibili difficoltà incontrate dagli allievi nell'affrontare questo complesso concetto. Le basi per sviluppare questa ricerca sono state fornite dagli studi sulle convinzioni di insegnanti e allievi di diversi livelli scolastici. Tuttavia, la letteratura relativa all'infinito nel contesto della scuola dell'infanzia è ancora limitata, probabilmente anche a causa dello scetticismo che caratterizza l'approccio matematico a questo livello scolastico. Con questa ricerca intendevamo studiare le modalità con le quali i bambini di scuola dell'infanzia (5 anni) si rappresentano l'infinito e le convinzioni ingenue che stanno alla base delle immagini intuitive relative a questo argomento. In particolare abbiamo esaminato se già a questa età fossero presenti le misconcezioni relative all'infinito matematico rilevate negli insegnanti in altre ricerche. Si tratta di misconcezioni quali l'infinito come illimitato, l'infinito come indefinito, l'infinito come numero «grande» finito, l'infinito come procedimento senza fine (Sbaragli, 2004). Le scelte metodologiche hanno prima di tutto voluto favorire la spontaneità dei bambini. A tale scopo la ricercatrice si è preoccupata di riservare diverse uscite per entrare in contatto con loro, per farsi conoscere e per guadagnare la loro fiducia, in modo da giustificare le richieste che sarebbero arrivate in seguito. In questo modo si è pure cercato di limitare gli effetti del contratto sperimentale, per il quale il bambino tende a dare la risposta che il maestro desidera sentire, favorendo ancora una volta la spontaneità. Nella prima fase della ricerca è stato chiesto ai bambini di «raffigurare graficamente l'infinito», per poi discuterne a gruppetti con l'aiuto del ricercatore, il quale ha inscenato una simpatica lite tra burattini e formulato una serie di domande-stimolo per permettere ai bambini di argomentare le proprie opinioni. L'interazione tra bambini si è rivelata molto produttiva e interessante, oltre ad essere stata un valido supporto per i bambini, i quali sono stati in grado di discutere a proposito di un tema complesso come quello dell'infinito. I risultati della ricerca confermano in parte le nostre ipotesi e testimoniano il fatto che, benché con i comprensibili limiti dovuti all'età e a tutte le conseguenze che questo comporta, un bambino di 5 anni possiede già alcune convinzioni intuitive relative all'infinito. Le risposte dei bambini possono rientrare nelle stesse concezioni erronee degli insegnanti rilevate dalla letteratura, alle quali è possibile accostare altre categorie significative specifiche della scuola dell'infanzia, le quali vanno prevalentemente nella direzione «magico-religiosa», piuttosto che maggiormente indirizzate verso i racconti fantastici e gli stimoli mediatici, come invece avevamo ipotizzato inizialmente. Sulla base dei risultati ottenuti con questo percorso di ricerca si aprono ora nuove prospettive di indagine. A livello trasversale abbiamo notato che il contesto ricopre un ruolo determinante e questo ci spinge a pensare che sarebbe opportuno lavorare nella direzione di un uso più attento dei termini matematici, tenendo conto dei molteplici significati che essi possono assumere nei vari contesti, al fine di prevenire confusioni e difficoltà future. Inoltre, i bambini intervistati hanno fondato una parte delle loro risposte sui numeri, cercando di definire l'infinito proprio attraverso di essi. La scelta dei bambini di utilizzare questo «oggetto» matematico è significativa e lascia pensare che si potrebbe sviluppare una ricerca in questa direzione, ampliando quelle che sono già state svolte in passato. Infine, potrebbe essere interessante fare un discorso più generale rivolgendo l'attenzione alle idee che i genitori hanno della Matematica nella scuola dell'infanzia, per poi poter lavorare nella direzione di una chiarificazione delle attività, dei processi didattici e di conseguenza degli scopi.

Bibliografia

Arrigo G., D'Amore B.
«Lo vedo ma non ci credo...». Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 22B, 5, 465-494, 1999.

Arrigo G., D'Amore B.
«Lo vedo ma non ci credo...», seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La matematica e la sua didattica.* 1, 4-57, 2002.

Sbaragli S.
La scoperta dell'importanza del contesto: il punto nei diversi ambiti. *Bollettino dei Docenti di Matematica.* Bellinzona (Svizzera). 47, 49-58, 2003.

Sbaragli S.
Le convinzioni degli insegnanti sull'infinito matematico. Tesi di dottorato di ricerca. Bratislava: Università Komenského. (cap. 4). Versione in italiano e in inglese nel sito: http://math.unipa.it/~grim/tesi_it.htm, 2004.

I bambini e i problemi impossibili: qual è il ruolo dell'apprendimento collaborativo all'interno di questo binomio?
Denise Lo Priore

Chi si occupa, a qualsiasi livello, di didattica della matematica riconosce all'attività di risoluzione di problemi un ruolo centrale: «Fare matematica è in prima istanza affrontare problemi» (D'Amore, 1996). Ciò risulta ancora più evidente se si pensa che il bambino quotidianamente si pone delle domande e cerca una soluzione che lo soddisfi. Spesso, però, accade che gli insegnanti si limitino esclusivamente a problemi che possiamo definire tipicamente scolastici, i quali poco hanno a che fare con situazioni problematiche aperte e portano quasi inevitabilmente alla costruzione di un modello mentale di problema rigido e limitato.

Di qui l'importanza e la necessità di proporre nella prassi scolastica, problemi che possiedano caratteristiche varie, che presentino dati insufficienti o sovrabbondanti, che ammettano più soluzioni o nessuna, in modo che il problema diventi uno strumento per verificare le proprie capacità, la propria preparazione, ma anche un'occasione di ragionamento, di acquisizione di nuove conoscenze, di consolidamento di abilità.

La ricerca effettuata poggia su alcune considerazioni emerse da svariati studi in merito al problem solving in generale, e più precisamente ai problemi impossibili e a tutto ciò che li riguarda. Particolare attenzione è stata rivolta al contratto didattico e ai suoi effetti sulla risoluzione di problemi; esso può essere visto come un ostacolo all'apprendimento nel momento in cui si formano cattive consuetudini. Ciò è ben evidente quando gli allievi si trovano confrontati con un problema impossibile: il contratto didattico instaurato implicitamente tra allievo e insegnante prevede, infatti, che il problema dato da quest'ultimo debba poter essere risolto, per cui l'allievo tenterà di risolverlo sebbene sia convinto che il problema è impossibile.

La ricerca si è quindi occupata di osservare e interpretare i comportamenti, gli atteggiamenti e le strategie messe in atto dagli allievi di fronte a diversi tipi di problemi impossibili, inserendoli però in una situazione diversa da quella abituale: la situazione di apprendimento collaborativo. All'interno di un gruppo collaborativo gli allievi sono chiamati a collaborare, mettere in comune le proprie conoscenze, confrontare i saperi, negoziare e condividere, esaminare, sperimentare e comprendere i propri argomenti di studio. Si tratta cioè di formare il pensiero critico attraverso la discussione.

Facendo riferimento a tali aspetti teorici, si è ipotizzato che una situazione di apprendimento collaborativo potesse incitare l'allievo meno coraggioso a rompere il contratto didattico e quindi aiutarlo ad affrontare un problema impossibile. In altre parole, si è supposto che la possibilità di confrontarsi con i compagni facilitasse la comprensione profonda di un problema e permettesse all'allievo di trattarlo con consapevolezza e spirito critico.

La sperimentazione ha visto come protagonisti 34 allievi di V elementare (appartenenti a sedi diverse del Ticino), dei quali una parte ha lavorato in un gruppo collaborativo e un'altra individualmente.

Il più interessante tra i risultati ottenuti mostra chiaramente che, se da un lato la situazione di apprendimento collaborativo ha permesso agli allievi di affrontare con maggior consapevolezza i problemi impossibili, dall'altro, essa non intacca significativamente la loro capacità di superare gli ostacoli creati dal contratto didattico e dal modello generale di problema più radicato in loro. Resta naturalmente aperta la possibilità che questo tipo di lavoro collaborativo acquisti maggior efficacia se condotto frequentemente e su tempi lunghi. Sarebbe interessante continuare la ricerca in questa direzione, in modo da ottenere risultati che possano confluire nella realtà concreta delle aule e che permettano una effettiva crescita professionale degli insegnanti.

Bibliografia

D'Amore B.
Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving. Bologna: Pitagora, 1996.

D'Amore B.
Elementi di didattica della matematica. Bologna:Pitagora, 1999.

Locatelo S., Meloni G.
Apprendimento collaborativo in matematica. Bologna: Pitagora, 2003.

Il ruolo del disegno spontaneo
Daniela Mitta

Con questa ricerca si è voluto indagare il comportamento dei bambini di scuola elementare davanti a problemi matematici; più precisamente si voleva osservare se nel procedimento di risoluzione essi avrebbero utilizzato spontaneamente o meno una rappresentazione grafica.

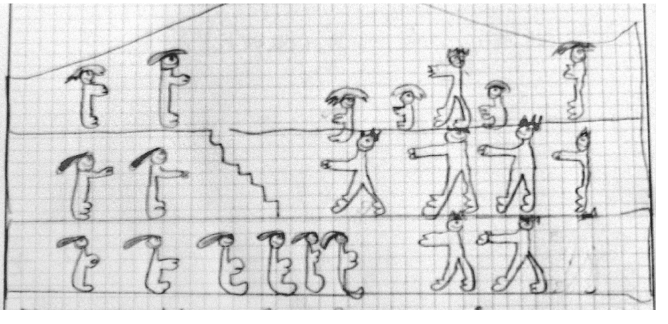
Il lavoro è stato suddiviso in alcune fasi principali: innanzitutto a una II e una V elementare sono stati proposti alcuni problemi, che inducevano più o meno implicitamente all'uso del disegno. La decisione di effettuare la ricerca in queste due classi era dettata dall'intenzione di osservare le differenze che potevano esistere nel modo di agire dei bambini.

La seconda fase consisteva nell'analisi delle soluzioni prodotte dai bambini, che ci avrebbe aiutato ad individuare alcune situazioni curiose da poter indagare ulteriormente. In questa seconda fase si sono osservate sia la funzione (allegorica o risolutiva) che la tipologia di tale disegno (iconica o pittorica).

A seguito di questo secondo momento si è poi sviluppata la terza fase, che consisteva nell'intervistare quei bambini che avevano prodotto dei risultati interessanti ai fini della ricerca. Si è poi resa necessaria una sottofase, nella quale si sono analizzati i colloqui tenuti con i bambini, per mettere in evidenza i punti salienti di tali interviste.

A mio parere i risultati ottenuti sono interessanti, in vista anche del mio lavoro come docente di scuola elementare. In effetti, mi sono resa conto di come il bambino dei primi anni di scuola elementare sia ancora molto legato alla rappresentazione grafica; ha bisogno di quest'ultima anche solo per visualizzare meglio la situazione. Inoltre, tale bambino è più portato ad eseguire dei disegni pittorici, piuttosto che iconici, tenendo quindi conto di tutti i particolari della situazione. Come esempio di quanto affermato, riporto di seguito il disegno realizzato da un bambino di II elementare, concernente il seguente problema:

«*Una classe è composta di 12 femmine e 9 maschi; 4 femmine e 3 maschi hanno i capelli biondi; 2 femmine e 4 maschi hanno i capelli neri. Tutti gli altri hanno i capelli castani. Quante sono le femmine che hanno i capelli castani e i maschi che hanno i capelli castani?*»



Per quanto riguarda invece i bambini di V, essi sono meno portati a utilizzare spontaneamente il disegno, poiché lo considerano un metodo ormai superato e soprattutto appartenente al mondo dei piccoli. Un altro motivo potrebbe essere legato al contratto didattico istituito dal docente: infatti, se esso prevede che il bambino non faccia uso in alcun modo del disegno, ecco che egli andrà a ricercare altri metodi. Capitava anche che durante i colloqui, quando chiedevo loro se c'era un altro modo per risolvere quel particolare problema, facevano davvero fatica ad accettare la rappresentazione grafica come possibile metodo di risoluzione.

Per quanto riguarda la funzione del disegno, per la quale avevo ipotizzato che in II elementare sarebbe stata solamente allegorica, ossia che non sarebbe servita a risolvere il problema, sono stata smentita dai prodotti stessi dei bambini, poiché nella maggior parte dei casi il disegno è stato risolutivo.

Come docente di scuola elementare mi sono resa conto di quanto sia importante che l'insegnante non instauri con i propri allievi un contratto didattico troppo stretto, altrimenti si rischia che gli studenti perdano quella libertà di azione che permette di comportarsi in modo più spontaneo anche davanti alla risoluzione di problemi matematici.

Bibliografia

D'Amore B.
Uso spontaneo del disegno nella risoluzione di problemi di matematica. *La matematica e la sua didattica.* 3, 329-370, 1995.

D'Amore B.
Elementi di Didattica della Matematica. Bologna: Pitagora, 1999.

Zan R.
Problemi e convinzioni. Bologna: Pitagora, 1998.

Il disegno spontaneo nella risoluzione di problemi: un aiuto o un ostacolo?

Elena Mombelli[1]

L'interesse verso l'uso e la funzione del disegno spontaneo nella risoluzione di problemi da parte di allievi di quarta elementare, che rappresenta la tematica affrontata in questa ricerca, è nato dall'osservazione di alcuni comportamenti avuti dagli allievi durante una pratica professionale. In tale occasione due allievi di terza elementare avevano affermato che sentivano la necessità di disegnare la situazione problematica «per riuscire a riflettere meglio». La curiosità suscitata dall'episodio è sfociata nella ricerca, con la quale si voleva valutare se l'uso del disegno spontaneo dipenda o meno dalla tipologia di problema proposto e se esso possa costituire un aiuto effettivo, risultare inutile o, a volte, essere addirittura quasi di ostacolo verso la soluzione di un problema. Un altro obiettivo che si voleva raggiungere era quello di analizzare la tipologia di disegno spontaneo usata, differenziandola tra pittorica[2] e iconica[3] (Aglì, D'Amore, 1995) e determinandone la funzione allegorica[4] e risolutiva[5] (D'Amore, 1995).

L'indagine, caratterizzata da una metodologia qualitativa, è stata effettuata in tre classi di quarta elementare di due diversi istituti del Mendrisiotto per un totale di 55 allievi. A tutti gli studenti sono stati sottoposti quattro problemi che richiamassero l'uso del disegno spontaneo con gradi diversi e che potessero prevedere per la loro risoluzione rappresentazioni pittoriche e iconiche spontanee, tralasciando volutamente quelli che avrebbero potuto portare a figure geometriche, che di solito vengono imposte dal contratto didattico.

Ho infatti ritenuto che una situazione problematica standard priva di situazioni reali facilmente immaginabili e troppo vicina alla routine scolastica, potesse essere affrontata con superficialità o noia, senza generare quella vivace curiosità necessaria a fare in modo che, volendo risolvere a tutti i costi il problema, l'allievo ricorra a tutti i mezzi a sua disposizione, anche a quelli non contemplati ufficialmente dalle clausole del contratto didattico.

Dall'analisi dei risultati a nostra disposizione è emerso uno scarso ricorso al disegno spontaneo (220 risoluzioni di cui 165 numeriche e 55 grafiche, privilegiando come ipotizzato la modalità iconica e la funzione risolutiva) pur rivelandosi, per chi ne fa uso, un valido aiuto nella comprensione della situazione problematica, nella ricerca del risultato e, diversamente da quanto previsto, anche nella verifica della soluzione aritmetica trovata. I risultati della ricerca mettono in evidenza che questo mancato uso sia dovuto all'influenza delle clausole del contratto didattico instaurato in classe, che privilegia un risultato di tipo numerico, accordando secondaria importanza al linguaggio figurale.

Le interviste effettuate hanno permesso di appurare che, se in alcuni casi il disegno spontaneo è svolto «per sicurezza», come mezzo di verifica del risultato cal-

1. Questa ricerca ha ricevuto il premio Lions Club Ceresio.
2. Rappresentazione realistica degli oggetti dei quali si sta parlando, quindi dei dettagli della situazione, come ad esempio una lumaca.
3. Rappresentazione di segni-simbolo senza esplicitare concretamente l'oggetto del quale si sta parlando, come ad esempio un cerchio invece di una lumaca.
4. Figure non legate esplicitamente alla soluzione.
5. Figure disegnate come supporto alla risoluzione.

colato per via formale, in altri casi è utilizzato dagli allievi che non riescono a trovare la soluzione aritmetica.

Le convinzioni degli allievi scaturite dalle interviste relative all'uso del disegno spontaneo sono di diversa natura:

- legate alla concezione della matematica: *«in matematica si deve risolvere il problema con calcolo e risposta, e non con un disegno»*;
- ad aspetti pratici: *«di solito non c'è lo spazio per il disegno perché su un foglio A4 ci sono tanti problemi con una riga per il calcolo e due per la risposta»*;
- al contratto didattico: *«mi sembra che l'insegnante preferisca il calcolo al disegno»*, *«faccio il disegno quando lo chiede il docente nella consegna, altrimenti se non è obbligatorio non lo faccio mai»*, *«l'insegnante ci dice di aiutarci con un disegno se non riusciamo bene a risolvere un problema»*.

Nelle classi esaminate il disegno è considerato come un linguaggio compensatore, secondario, da utilizzare solo in caso di difficoltà e dopo aver tentato la risoluzione aritmetica.

Eppure, numerose ricerche mettono in evidenza che nella scuola elementare il docente dovrebbe accettare le risoluzioni dell'allievo espresse con diversi linguaggi, permettendo e valorizzando anche il disegno spontaneo fondato su una scelta personale che procurerà quasi sicuramente dei vantaggi per la risoluzione della situazione.

In questo senso le clausole del contratto didattico dovrebbero mostrarsi più elastiche invece di condizionare il comportamento risolutivo dell'allievo, eliminando al più presto le procedure spontanee per sostituirle con modelli adulti di risoluzione che possono generare ostacolo, dal momento che ogni allievo predilige un proprio registro e che il passaggio da uno ad un altro non è affatto immediato. È dunque necessario abituare l'allievo a interagire con diversi registri rappresentativi e *«a fare pratica di traduzioni da un registro ad un altro»* (D'Amore, 1998); questo modo di procedere, come è stato evidenziato in diversi lavori da Duval, favorisce la concettualizzazione in ambito matematico.

È quindi necessario che l'allievo non affronti la risoluzione di un problema solo in base alle attese del docente, con il linguaggio da lui desiderato, ma faccia uso di quello che personalmente ritiene di volta in volta più adatto, comodo, sicuro e vantaggioso, pur assumendosi il carico di un'eventuale rottura del contratto didattico esistente.

Sarebbe a questo proposito didatticamente interessante proporre varie situazioni da risolvere, affinché l'allievo sia portato a usufruire dei diversi linguaggi, tra cui anche il figurale. In effetti da questa ricerca è emersa in me la convinzione che la varietà rimanga una delle armi vincenti della didattica.

Bibliografia

Aglì F., D’Amore B.
L’educazione matematica nella scuola dell’infanzia. Milano: Juvenilia, 1995.

D’Amore B.
Uso spontaneo del disegno nella risoluzione di problemi di matematica. *La matematica e la sua didattica.* 3, 328-370, 1995.

D’Amore B.
Oggetti relazionali e diversi registri rappresentativi: difficoltà cognitive ed ostacoli. *L’educazione matematica.* 1, 7-28 [testo bilingue, italiano ed inglese], 1998.

D’Amore B.
Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica. Bologna: Pitagora, 2003.

Theodoulou R., Gagatsis A., Theodoulou A.
Un’immagine vale più di mille parole... Ma che tipo di immagine risulta più efficace nelle attività di problem solving matematico degli studenti? *La matematica e la sua didattica.* 2, 4-32, 2004.

Zan R.
Problemi e convinzioni. Bologna: Pitagora, 1998.

Concezioni allo sbaraglio
Giada Mossi

Com'è possibile riempire d'acqua un cubo di plexiglas per metà del suo volume senza effettuare alcuna misurazione?

Questa ed altre situazioni, in realtà banali, ma che in presenza di misconcezioni possono trasformarsi in veri rompicapo, hanno fatto nascere in me l'interesse per le misconcezioni, e più puntualmente per le misconcezioni in ambito geometrico, tema della ricerca che ho condotto nell'arco dell'anno scolastico 2004/2005 con il prezioso aiuto della professoressa Sbaragli e degli altri docenti presenti del gruppo di ricerca di matematica.

In ambito matematico, sono numerosi i misconcetti, i fraintendimenti, gli errori che si presentano a tutti i livelli di età e di tipi di scuole, compreso quello universitario. Lo studio si basa sull'ipotesi che solo portando gli insegnanti ad esplicitare le loro convinzioni circa la geometria sia possibile mettere a nudo loro eventuali rigidità concettuali, misconcezioni, difficoltà, in modo tale da avviare discussioni e confronti che li portino ad acquisire consapevolezza delle loro lacune e, attraverso percorsi operativi mirati, giungere a una ristrutturazione delle loro conoscenze e opinioni.

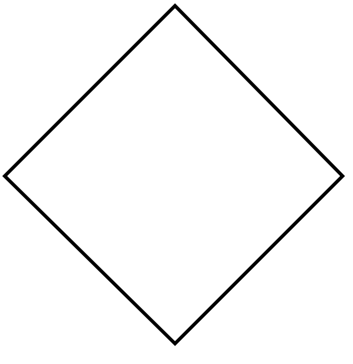
Sintesi della ricerca

In questa ricerca si sono studiate le misconcezioni relative ai concetti di base e di altezza, intese secondo l'interpretazione semantica-didattica di D'Amore e Sbaragli (2005) che mette in luce la connotazione costruttiva di tale termine, considerandole come concezioni erronee, spesso ben motivabili e che dipendono da cause sensate. Tutto ciò al fine di far emergere le varie categorie di misconcezioni presenti fra gli individui e di scoprire le cause che portano alla loro nascita. Questa ricerca coinvolge bambini di scuola elementare, studenti di scuola media e superiore e insegnanti; si tratta di una ricerca essenzialmente di tipo qualitativo, realizzata tramite questionari e colloqui clinici, dove i risultati vengono accompagnati con delle esemplificazioni significative che facilitano la comprensione delle riflessioni effettuate e dei risultati ottenuti. Dalla ricerca sono emerse diverse categorie di misconcezioni legate a questi concetti basilari, le quali risultano essere essenzialmente «evitabili» (Sbaragli, 2005), ossia sono una conseguenza diretta di scelte didattiche effettuate dagli insegnanti, oppure della presenza delle misconcezioni negli insegnanti stessi. In particolare si è potuto concludere che la rappresentazione standard delle rappresentazioni grafiche delle figure geometriche ha una grossa influenza sulla formazione delle misconcezioni in ambito geometrico. Con questa ricerca, si spera che gli insegnanti possano prendere coscienza dell'esistenza delle misconcezioni relative al concetto di base e di altezza e che possano fare delle scelte didattiche che favoriscano la corretta costruzione dei concetti geometrici.

Presentazione dei risultati della ricerca

I risultati della ricerca hanno dimostrato che nei bambini di scuola elementare, negli studenti di scuola media e superiore e negli insegnanti sono presenti le medesime tipologie di misconcezioni, sebbene la quantità di queste diminuisca con il crescere dell'età. Riguardo all'altezza, è emerso che questa viene concepita principalmente come un segmento necessariamente verticale, che parte esclusivamente da un vertice della figura e arriva alla base (lato orizzontale) formando due angoli retti, oppure come un segmento qualsiasi che con la base forma due angoli retti o come un segmento necessariamente interno alla figura. Queste caratteristiche sono spesso presenti nelle rappresentazioni di altezze proposte in classe, ma non sono necessarie e non corrispondono al concetto di altezza condiviso dalla comunità scientifica.

La base invece viene concepita come il lato «d'appoggio», ossia il lato orizzontale disposto nella parte inferiore del foglio, oppure come un particolare lato imposto dalle formule presenti nei libri e nel materiale didattico, o come la coppia di lati paralleli delle figure. L'analisi dei sussidiari e dei materiali didattici e la presenza delle misconcezioni nei docenti stessi hanno permesso di confermare l'ipotesi che le rappresentazioni grafiche standard delle figure geometriche hanno una grossa influenza sulla formazione delle misconcezioni in ambito geometrico. Prova di questo, è che la maggior parte degli individui sottoposti al test, dovendo denominare delle figure geometriche, come un trapezio isoscele, un quadrato o un triangolo isoscele, che erano state rappresentate in una posizione inusuale, non è stata in grado di classificarle correttamente. Le figure geometriche vengono rappresentate dai manuali e sussidiari sempre nella stessa stereotipata posizione. Questo uso inadeguato delle rappresentazioni figurali crea il pericolo che queste rappresentazioni vengano identificate con il concetto geometrico che si vuole far costruire, creando così misconcezioni che, se rafforzate, costituiranno un ostacolo per gli apprendimenti futuri. Una concezione erronea del concetto di base e di altezza infatti non crea difficoltà solo nella comprensione di questi due concetti, ma si ripercuote su altri aspetti della geometria, mettendo in difficoltà i bambini in situazioni apparentemente semplici. Per esempio, la mancanza di un vertice opposto alla base del quadrato, ha portato alcuni bambini a concludere che un quadrato non abbia un'altezza e di conseguenza, non abbia un'area. La medesima conclusione è stata tratta nel caso in cui un quadrato è stato disposto con il vertice rappresentato nella parte inferiore del foglio (vedi figura seguente) portando i bambini ad affermare che quel quadrato non avesse una base, o avesse come base il vertice.



Difficoltà enormi si sono riscontrate anche nel caso dei triangoli ottusangoli per l'altezza che *«cadeva fuori dalla figura»*: alcune persone intervistate non hanno saputo rintracciare l'altezza, altre ne hanno considerata una erronea, sbagliando così il calcolo dell'area. La lista delle difficoltà che sono emerse potrebbe continuare a lungo, e per chi fosse interessato si rimanda all'intera documentazione di ricerca; si vuole qui sottolineare in ogni caso, che oltre alle difficoltà che portano queste misconcezioni, è sconcertante vedere che in un contesto pedagogico-didattico dove si tende sempre più a ricorrere ad un approccio sistemico, ad una visione volta a considerare le cose nella loro complessità, la geometria si muove in una direzione opposta e appare come qualcosa di rigido, standardizzato, che può essere affrontato in una sola maniera (Martini, Sbaragli, 2005).

Bibliografia

D'Amore B.
Elementi di Didattica della Matematica. Bologna: Pitagora, 1999.

D'Amore B., Sbaragli S.
Analisi semantica e didattica dell'idea di «misconcezione». *La matematica e la sua didattica*. 2. 139-163, 2005.

Martini B., Sbaragli S.
Insegnare e apprendere la matematica. Napoli: Tecnodid, 2005.

Sbaragli S.
Misconcezioni «inevitabili» e misconcezioni «evitabili». *La matematica e la sua didattica.* 1. 57-71, 2005.

Le misconcezioni sulla sottrazione.
Quale sarà il problema inventato?
Elisa Rech

Nella formazione scolastica in matematica molti ostacoli[6] possono rendere difficoltoso un corretto apprendimento. Se la sottrazione, oggetto della presente ricerca, non presenta sostanzialmente quelli epistemologici, si può invece parlare di ostacoli ontogenetici e didattici, dai quali conseguono determinate misconcezioni (interpretazioni ancora imprecise o momentaneamente scorrette del concetto formale).

Questa «elementare» operazione, concepita dai bambini spontaneamente in termini operativi, già nei primi anni di vita viene formalizzata nel corso della scolarizzazione a partire dalla situazione del «togliere via»,[7] il cui significato intuitivo del togliere, del separare fisicamente da una collezione iniziale un suo sottoinsieme, conteggiando l'entità rimanente, coincide con il significato formale del sottrarre (algoritmo), favorendo il superamento dei relativi ostacoli ontogenetici. La comprensibile scelta didattica di introdurre parzialmente un concetto, agganciandolo all'immagine che i bambini sono in grado di afferrare, se rafforzata da continue e ripetute esperienze analoghe (tali da generare così veri e propri «ostacoli didattici»), rischia nel tempo di cristallizzare l'immagine iniziale, necessariamente riduttiva, in modello, resistente ormai ad ogni altra sollecitazione cognitiva. A causa della formazione di tale modello che diventa «parassita», essendo non esaustivo del concetto di sottrazione, vengono escluse le altre situazioni riconducibili all'operazione del sottrarre, che risultano prive di corrispondenza diretta con il suo significato formale come quelle relative alla strategia additiva del complementare (*quanto manca a…?; quanto si deve aggiungere per avere come…?; che differenza c'è tra … e …?; …*).

Per indagare quali siano le immagini di sottrazione che i bambini di quinta elementare concepiscono, abbiamo interpellato 44 allievi, appartenenti a tre classi diverse, rivolgendo loro una richiesta apparentemente banale – «*Fa' finta di essere un/a maestro/a e inventa due problemi da risolvere con la sottrazione, uno per un bambino di II elementare, e l'altro per un tuo coetaneo*»[8] – ma rivelatasi molto efficace per cogliere indirettamente le loro concezioni più recondite e inconsapevoli, tali da non poter essere direttamente verbalizzate.

La ricerca ha assunto così un carattere quantitativo nell'analisi degli 88 problemi redatti, dai quali si sono rilevate le categorie algebrico-semantiche adottate (tra cui appunto quella del *togliere via*), la modalità di graduazione della difficoltà tra i due problemi e lo stile della loro formulazione, più «schematica» o più «narrativa». I 16 colloqui clinici seguiti hanno permesso, da un punto di vista qualitativo, di sondare la consapevolezza posseduta dalle diverse tipologie di bambini sulla categoria algebrico-semantica ravvisabile nei problemi da loro proposti, e quanto l'eventuale misconcezione si fosse consolidata in modello.

I risultati raccolti hanno confermato una maggioranza di problemi costruiti sul significato intuitivo del *togliere* (56 su 88), benché si riscontrino sostanziali

6. Si ricordi la nota classificazione di G. Brousseau (1980).
7. Definizione di E. Fischbein (1985).
8. Tecnica dei *TEPs* (D'Amore, Maier, 2002): produzioni testuali autonome degli allievi su questioni matematiche e del «*Fa' finta di essere …*» (D'Amore, Sandri; 1996).

divergenze a livello di classe. Riguardo alla differenziazione dei due problemi, quasi tutti i bambini (41 su 44), per graduarne la difficoltà, hanno adottato come previsto il fattore dell'entità numerica. Sorprendentemente si osserva però anche una differenziazione nelle categorie algebrico-semantiche fondamentali (benché generalmente non intesa come consapevole graduazione della difficoltà): 16 bambini hanno infatti proposto il problema per un bambino di 2 elementare secondo il *togliere via*, e quello per l'allievo coetaneo secondo la strategia del complementare. Per loro è così da escludere l'instaurarsi del modello «parassita» cui si accennava prima, a differenza dei 20 bambini che hanno formulato entrambi i problemi secondo la struttura del *togliere via*, per i quali si potrebbe invece ipotizzare il consolidamento di tale modello. Inoltre, a differenza di quanto ipotizzato, a un «cliché algebrico», dato dalla rappresentazione della situazione intuitiva del *togliere via*, non corrisponde necessariamente un «cliché formale», ovvero una formulazione schematica stereotipata: testi più «narrativi» (13 su 88) sono indifferentemente associabili sia all'impostazione dei problemi sulla strategia additiva del complementare (6 casi) che a quella riferita al *togliere via* (7 casi).

Al di là degli interrogativi posti, dall'indagine si possono trarre ulteriori considerazioni, che prospettano nuovi scenari di ricerca. In particolare, si constata che l'inventare problemi matematici è vissuto con difficoltà e risulta per questo meno gradito della consueta attività di risoluzione. Viene allora spontaneo chiedersi quale tipologia di problemi venga abitualmente proposta dai docenti: situazioni autenticamente problematiche o meri esercizi applicativi, così come lasciano supporre i commenti dei bambini intervistati? Inoltre, si osserva come le diverse strutture algebrico-semantiche, intrinseche ai problemi formulati, non siano altrettanto facilmente illustrabili: nell'ambito dei colloqui clinici nessun bambino è stato in grado di rappresentare correttamente i problemi costruiti secondo la più complessa strategia additiva del complementare. Se da un lato la più facile rappresentabilità del *togliere via* spiega ulteriormente l'introduzione formale della sottrazione attraverso questa situazione, dall'altro è possibile che la stessa rappresentazione grafica delle situazioni-problema, come *habitus* risolutivo sistematico, favorisca, tra le altre cose, la consapevolezza sulle relative strutture algebrico-semantiche.

Si tratta naturalmente di considerazioni ipotetiche e quindi da verificare, che richiamano però, una volta ancora, le abitudini implicitamente instaurate, o instaurabili, in classe tra docente e allievi. Tale «contratto didattico», studiato da G. Brousseau sin dagli anni '70, dovrebbe essere costante oggetto di pratica riflessiva: viene infatti «sottoscritto» inconsapevolmente da ogni intervento didattico del docente, contribuendo all'apprendimento, ma anche spesso determinando le tante *evitabili* misconcezioni in matematica.

Bibliografia

Artusi Chini L. (ed.)
Numeri e operazioni nella scuola di base. Bologna: Zanichelli. 14-19, 54-59, 122-132, 1985.

D'Amore B.
Didattica della Matematica. Bologna: Pitagora. 33-46, 47-72, 2001a.

D'Amore B., Sandri P.
«*Fa' finta di essere …»*. Indagine sull'uso della lingua comune in contesto matematico nella scuola media. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 19A, 3, 223-246, 1996.

D'Amore B., Maier H.
Produzioni scritte degli studenti su argomenti di matematica (TEPs) e loro utilizzazione didattica. *La Matematica e la sua didattica*. 2, 144-189, 2002.

Fischbein E., Vergnaud G.
Matematica a scuola: teorie ed esperienze. A cura di B. D'Amore. Bologna: Pitagora. 33-35, 104-111, 1992.

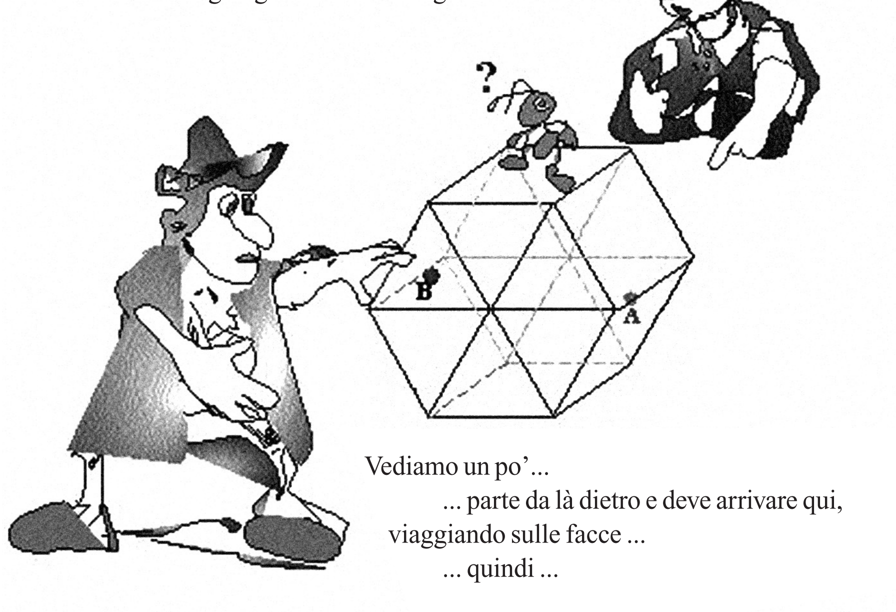
Sbaragli S.
Misconcezioni «inevitabili» e misconcezioni «evitabili». Bologna: Nucleo di Ricerca in didattica della Matematica, 2005.

Vergnaud G.
L'enfant, la mathématique et la réalité. Berne: Lang P. [Trad. it.: *Il bambino, la matematica, la realtà*, 1994, Roma: Armando, 145-164], 1981.

Quiz numero 34

Aldo Frapolli

Ciao Joe!
Questa volta la nostra formichina è alle prese con uno «scatolone di cioccolatini» famosi, a forma di prisma esagonale regolare retto, con tutti gli spigoli lunghi esattamente 1 metro.
Sta cercando la strada più breve per andare dal punto A al punto B muovendosi sulla superficie della scatola.
Se ci riuscirà, in B le verrà aperta una porticina per entrare a farsi una scorpacciata.
Devi sapere che A e B si trovano su due facce opposte, sfasati di 120° e piazzati nel baricentro di due dei tanti triangoli generati dalle diagonali.



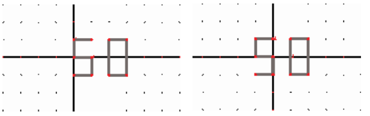
E voi quale strada scegliereste?

Quanto è lungo il percorso più breve? Perché?

Attendiamo le vostre risposte motivate. Un bel libro attende colui che invierà la soluzione più originale.
Buon divertimento!

Soluzione del Quiz numero 33

Ci sono esattamente due posizioni in cui tutti i vertici del 50 sono visibili contemporaneamente dal punto di osservazione O(0,0). Sono le seguenti e proprio solo queste:



Ma sono veramente accettabili? Sì, se si ammette che il punto di osservazione possa coincidere con un punto osservato. A queste due soluzioni elementari sono arrivati in molti, la maggior parte per tentativi. Fra questi tanti allievi di scuola media, che le hanno esibite con orgoglio. Bravissimi!

Ma ci sono veramente solo queste due? Possibile che, per quanto si trasli la figura 50 su tutto Puntilandia, non ci sia un'altra posizione favorevole? Era questa la parte interessante del quesito: dimostrare che non ce ne sono altre.

A sciogliere il dubbio sono stati in diversi, con argomentazioni più o meno complesse ed esaustive.

Quella premiata per la sua semplicità e originalità è la seguente, presentata da una coppia di studenti della IIIB del liceo di Coira che si sono aggiudicati il libro di Paul Hoffmann «L'uomo che amava solo i numeri». Ecco che cosa ci hanno scritto:

Tutto si fonda sulla seguente proprietà, che chiamiamo «condizione di visibilità»:

Un punto A(u,v), con u ≠ 0, v ≠ 0 è visibile da O se e soltanto se u e v sono primi fra loro, cioè mcd(u,v) = 1.

Nel caso in cui u = 0 e , v ≠ 0, A è visibile se e soltanto se v = 1 oppure v=–1

Analogamente se u ≠ 0 e v = 0, A è visibile se e soltanto se u = 1 oppure u=–1

L'affermazione si dimostra facilmente. Infatti, se A(u,v) è visibile, allora non esiste nessun punto B(a,b) allineato con O e A più vicino a O (cioè tale che |OB|<|OA|). Ciò significa che non esiste k ∈ Z tale che u=ka e v=kb. Dunque u e v sono primi fra loro. Inversamente se u e v sono primi fra loro allora non esiste h ∈ Z tale che u=ha e v=hb. Di conseguenza non esiste nemmeno h ∈ Z tale che $\frac{u}{v} = \frac{ha}{hb}$*. Quindi A(u,v) è visibile. I casi particolari sono evidenti.*

Ora, se chiamiamo P(x,y) il punto della figura avente le coordinate «minime», per gli altri 9 vertici otteniamo:

(x+1,y), (x+1,y+1), (x,y+1), (x,y+2), (x+1,y+2), (x+2,y), (x+3,y), (x+3,y+2), (x+2,y+2).

Siccome tutti i vertici devono essere visibili, per tutte le coppie elencate deve valere la «condizione di visibilità».

Se ammettiamo che nessuno dei vertici della figura coincida con il punto di osservazione, si possono avere i seguenti 4 casi:

i) x e y sono divisibili per 2: allora c'è almeno il punto (x,y) non visibile

ii) x e y non sono divisibili per 2: allora c'è almeno il punto (x+1,y+1) non visibile, siccome x+1 e y+1 sono divisibili per 2 e quindi mcd(x+1,y+1) ≠ 1

iii) x è divisibile per 2 e y no: allora c'è almeno il punto (x,y+1) non visibile, siccome x e y+1 sono divisibili per 2 e quindi mcd(x,y+1) ≠ 1

iv) x non è divisibile per 2 e y si: allora c'è almeno il punto (x+1,y) non visibile, siccome x+1 e y sono divisibili per 2 e quindi mcd(x+1,y) ≠ 1.

Restano da analizzare i casi particolari in cui uno dei 10 vertici coincide con (0,0).

Facilmente si possono escludere tutti tranne due: i casi P(0, –1) e P(–1,–1), rappresentati nella figura iniziale, che permettono effettivamente la visibilità di tutti i 10 vertici conseguenti.

1. L'analisi moderna a partire da Lebesgue e Hausdorff[1]

S. D. Chatterji[2]

We exemplify modern analysis by discussing three important theorems: Stone-Weierstrass theorem, Riesz representation theorem and Gelfand-Naimark theorem. Even the basic concepts underIying these theorems were unknown in 1900; the theorems themselves had not been formulated in 1930; however, by 1950, a knowledge of these theorems was to be considered essential for almost all aspiring research workers in analysis.

1. Introduzione

Ho scelto di parlare dell'analisi moderna discutendo tre importanti teoremi:

(A) teorema di Stone-Weierstrass;
(B) teorema di rappresentazione di Riesz;
(C) teorema di Gelfand-Naimark.

Pur concernendo concetti basilari, questi teoremi erano sconosciuti nel 1900; gli stessi non erano ancora stati formulati nel 1930; per contro, nel 1950 la conoscenza di questi teoremi veniva considerata essenziale per quasi tutti quelli che aspiravano a effettuare lavori di ricerca in analisi. Di sicuro, resoconti di questi teoremi appaiono in numerosi libri di testo e monografie pubblicati dopo il 1950; faccio riferimento a Dunford e Schwarz [DS], un'opera autorevole che presenta questi teoremi (oltre ovviamente ad altri elementi di analisi moderna) accuratamente in veste moderna.

Nel seguito indichiamo con $\mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi; inoltre, $C(X)$ denota lo spazio di tutte le funzioni continue $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ dove X è uno spazio di Hausdorff compatto; scriviamo $\|f\| = \sup_x |f(x)|$; chiamiamo $C_{\mathbb{R}}(X)$ l'insieme delle funzioni continue a valori reali $f: X \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che il lettore sia in chiaro con la nozione di spazio di Hausdorff e che conosca le proprietà delle funzioni continue in questi spazi; $f \in C(X)$ implica $\|f\| < \infty$. Per i teoremi (A) e (B) può considerare X come un sottoinsieme limitato e chiuso di $\mathbb{R}^n$ (lo spazio delle n-tuple di numeri reali, munito della topologia euclidea). Tutte le notazioni e le terminologie che uso in seguito sono standard; inoltre cercherò di spiegare il più possibile con lo scopo di rendere l'esposto comprensibile.

Nel punto 2 presento i tre teoremi nella forma generale più semplice; dopo alcune brevi osservazioni generali riportate nel punto 3, commento separatamente

1. Il testo è un'elaborazione della conferenza tenuta da S.D. Chatterji a Bellinzona il 21 settembre 2005, in occasione dei festeggiamenti del numero 50 di questa rivista.
2. SB-Institut de Mathématiques, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Switzerland.

i teoremi nei punti 4, 5 e 6. Allego in chiusura una lista sintetica di riferimenti bibliografici, mentre altri sono citati nel testo. Una lista più estesa di riferimenti si trova in [DS] e in [Co].

Enunciazione dei tre teoremi

Ricordo che in seguito X indica uno spazio di Hausdorff compatto.

Teorema (A): di Stone-Weierstrass

a) Sia $S \subset C_{\mathbb{R}}(X)$ tale che: (i) $1 \in S$; (ii) $\forall\, x \neq y\, \exists\, f \in S$ tale che $f(x) \neq f(y)$. Allora l'algebra generata da S (su $\mathbb{R}$) è densa in $C_{\mathbb{R}}(X)$.
b) Sia $S \subset C(X)$ tale che S soddisfi le condizioni (i) e (ii) e in più la (iii) se $f \in S$ allora $\overline{f} \in S$.
Allora l'algebra generata da S (su $\mathbb{C}$) è densa in C(X).

Chiariamo il significato dei termini usati sopra.

Il senso della conclusione dell'enunciato (a) (detto caso reale) è che per ogni $f \in C_{\mathbb{R}}(X)$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un polinomio reale $P(t_1,\dots,t_m)$ e funzioni $f_1,\dots,f_m$ in S tali che

$$\left\| f - P(f_1,\dots,f_m) \right\| < \varepsilon \qquad (1)$$

dove $P(f_1,\dots,f_m)(x) = P(f_1(x),\dots,f_m(x))$.

Il senso della conclusione dell'enunciato (b) (detto caso complesso) è analogo; il polinomio $P(t_1,\dots,t_m)$ in (1) qui è un polinomio complesso (cioè un polinomio nelle variabili $t_1,\dots,t_m$ a coefficienti complessi) e (1) vale per ogni $f \in C(X)$ e per ogni $\varepsilon > 0$ e una scelta opportuna di P e di $f_1,\dots,f_m$ in S.

Nella precedente condizione (i), 1 rappresenta la funzione $f(x) \equiv 1$ e nella (iii) $\overline{f}$ è la funzione ottenuta da f nel modo seguente:

$$\overline{f}(x) = \operatorname{Re} f(x) - i \operatorname{Im} f(x) = \overline{f(x)}$$

ricordando che se $z = x + iy \in \mathbb{C}$ con $x, y \in \mathbb{R}$, allora $\overline{z} = x - iy$. La condizione (iii) ci fa dire che S è una famiglia **autoaggiunta** di funzioni; la condizione (ii) è spesso sintetizzata dall'affermazione che le funzioni in S *separano* in punti di X.

Ricordo che un'algebra su R (o su C) è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (o su $\mathbb{C}$) che in più è un anello; il fatto che $C_{\mathbb{R}}(X)$ sia un'algebra su $\mathbb{R}$ (o su $\mathbb{C}$) e che $f, g \in C_{\mathbb{R}}(X)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ implica che $\alpha f, f+g, fg$ sono in $C_{\mathbb{R}}(X)$; analogamente C(X) è un'algebra su $\mathbb{C}$ (o un'algebra complessa).

Con questa terminologia possiamo enunciare diversamente il teorema (A):

a) se A è una sotto-algebra di $C_{\mathbb{R}}(X)$ che contiene costanti e che separa i punti di X, allora A è densa in $C_{\mathbb{R}}(X)$;
b) se A è una sotto-algebra complessa di C(X) che contiene costanti, che separa i punti di X e che è **autoaggiunta**, allora A è densa in C (X).

Teorema (B): di rappresentazione di Riesz

Sia $L : C(x) \to \mathbb{C}$ un funzionale reale e positivo nel senso che: se $f \geq 0$, allora $L(f) \geq 0$. Sia Σ la più piccola σ–algebra di sottoinsiemi di X tale che tutte le funzioni di C(X) siano misurabili;

allora esiste una sola misura positiva, finita e σ–additiva $\mu:\Sigma\to\mathbb{R}_+=[0,\infty[$ tale che

$$L(f)=\int_X f\,d\mu \quad , \quad f\in C(X) \qquad (2)$$

Richiamo ora un po' di terminologia standard, propria della teoria della misura. Una famiglia di sottoinsiemi Σ di un insieme X è detta σ–algebra se $X\in\Sigma, \varnothing\in\Sigma$ e $A\in X$, allora $A^c\in X$ (dove $A^c=X\backslash A$); inoltre, per ogni $A_n\in\Sigma$, $n=1,2,\ldots$, si ha

$$\bigcup_n A_n\in\Sigma$$

Si può dimostrare che, data una famiglia *F* non vuota di sottoinsiemi di X, esiste una più piccola σ– algebra Σ contenente *F*; si dice che Σ è la σ– algebra generata dalla famiglia

$$F=\{f^{-1}(V): f\in C(X), V\subset\mathbb{C}, V \text{ aperto}\} \qquad (3)$$

Ricordo che un insieme di Borel in uno spazio topologico (come X o $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) è la più piccola σ– algebra contenente tutti gli insiemi aperti dello spazio topologico. La σ– algebra del teorema (B) è detta σ– algebra degli insiemi di Baire in X; è la stessa della σ– algebra degli insiemi di Borel in X, a condizione che X sia compatto e metrizzabile; cioè X non è solo uno spazio di Hausdorff compatto, ma anche una base numerabile di questa topologia. La famiglia di insiemi di Baire Σ di X è la più piccola σ– algebra contenente F definita da (3); si può dimostrare che allora $f^{-1}(B)\in\Sigma$ per ogni $f\in C(X)$ e ogni insieme di Borel $B\subset\mathbb{C}$.

Una misura positiva μ su Σ è un'applicazione $\mu:\Sigma\to[0,\infty]$ tale che $\mu(\varnothing)=0$ e che se $A_n\in\Sigma$, n=1,2,… sono disgiunti, allora

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) \qquad (\sigma-\text{additività})$$

La misura μ è detta finita se i valori $\mu(A)$, $A\in\Sigma$, sono tutti numeri (finiti) di $\mathbb{R}_+$; ciò è equivalente a $\mu(X)<\infty$ poiché ogni misura positiva è monotona: $A\subset B$, A, B in Σ implica che $\mu(A)\le\mu(B)$.

Una semplice definizione dell'integrale in (2) può essere data nel modo seguente: supposto che f sia una funzione σ– misurabile **limitata** e a valori reali [cioè $f^{-1}(B)\in\Sigma$ per ogni $B\subset\mathbb{R}$, B insieme di Borel], allora

$$\int_X f\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{k}{n}\;\mu\left\{x\in X:\frac{k}{n}\le f(x)<\frac{k+1}{n}\right\} \qquad (4)$$

Essendo f limitata, ogni somma in (4) è finita poiché gli insiemi

$$\{x : f(x) > M\}, \{x : f(x) < -M\}$$

sono vuoti se $M \geq \|f\|$. Si può dimostrare che il limite di (4) esiste; se f è limitata, σ– misurabile e a valori complessi, allora

$$\int_X f\, d\mu = \int_X \mathrm{Re}\, f\, d\mu + i \int_X \mathrm{Im}\, f\, d\mu$$

In uno sviluppo completo della teoria dell'integrazione, certamente, l'integrale $\int f\, d\mu$ è definito anche per certe funzioni illimitate f (dette funzioni μ– integrabili); inoltre, poiché nel nostro teorema μ è una misura finita e positiva, [μ (X) $< \infty$] e tutte le funzioni f in C(X) sono limitate, per il nostro teorema è sufficiente l'integrazione di funzioni limitate.

Passiamo ora all'enunciazione del nostro terzo teorema.

Teorema (C): di Gelfand-Naimark

Sia *A* un'algebra C*-commutativa con unità. Allora esiste uno spazio di Hausdorff compatto X tale che A sia isometricamente isomorfo a C(X).

Chiariamo i termini usati nell'enunciato del teorema. Abbiamo già definito che cos'è un'algebra complessa (vedere subito sotto l'enunciato del teorema (A)); *A* è prima di tutto un'algebra complessa con elemento unitario (denotato 1), cioè tale che a · 1 = 1 · a = a per ogni $a \in A$; allora *A* è commutativa, cioè a · b = b · a per ogni a, b in *A*. Inoltre esiste un'**involuzione** definita in *A*, cioè un'applicazione $A \to A$ $(a \mapsto a^*)$ tale che (per ogni $a, b \in A, \alpha \in \mathbb{C}$)

$$(a+b)^* = a^* + b^* \quad , \quad (a \cdot b)^* = b^* \cdot a^* \quad , \quad 1^* = 1 \quad , \quad (\alpha\, a)^* = \bar{\alpha}\, a^* \quad (a^*)^* = a \qquad (5)$$

Su *A* è definita una norma, cioè un'applicazione $A \to [0, \infty[$ $(a \mapsto \|a\|)$ tale che (per ogni $a, b \in A, \alpha \in \mathbb{C}$)

$$\|a\| \geq 0 \quad ; \quad \|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0 \quad ; \quad \|a+b\| \leq \|a\| + \|b\| \quad ; \quad \|\alpha\, a\| = |\alpha|\, \|a\| \qquad (6)$$

Inoltre si suppone che la norma soddisfi la condizione

$$\|a \cdot b\| \leq \|a\| \cdot \|b\| \qquad (7)$$

e $\|1\| = 1$; infine poniamo anche $\|a^* a\| = \|a\|^2$ (8)

La condizione (5) fa di A un'algebra **involutiva**; le condizioni (6) definiscono la nozione di norma su uno spazio vettoriale complesso; la (7) è richiesta dalle norme sulle algebre e la (8) è una condizione speciale e importante che rende precisa la teoria delle algebre involutive normate. Infine richiediamo che A sia uno **spazio di**

Banach con la norma $\|\cdot\|$; ciò significa che A è **completa**, cioè, se $\{a_n\}$ è una successione in A (n=1,2,...) tale che $\|a_m - a_n\| \to 0$ quando m,n $\to \infty$, allora esiste un elemento $a \in A$ con $\|a_n - a\| \to 0$ per $n \to \infty$. Ora, ogni spazio di Banach che è un'algebra normata (norma con le proprietà (7)) è detta **algebra di Banach**. Un'algebra di Banach involutiva che possiede una norma che soddisfa le proprietà (8) è detta C*-algebra. Si può dimostrare che per ogni spazio di Hausdorff compatto X, C(X) esiste una **C*-algebra commutativa** con unità; la funzione 1 è l'unità e $f^* = \overline{f}$ definisce l'involuzione; il teorema (C) afferma che su un isomorfismo isometrico tutte le C*-algebre con unità sono della forma C(X). Quest'ultima affermazione significa che esiste un'applicazione biiettiva, lineare e moltiplicativa $T: A \to C(X)$, con $\|Ta\| = \|a\|$, $a \in A$.

Un esempio di C*-algebra non commutativa è l'insieme di tutti gli operatori di uno spazio di Hilbert con involuzione definita come formazione di aggiunti. Non mi dilungherò su questo importante esempio, ma mi limito ad affermare che una C*-algebra (commutativa o no) è isometricamente isomorfa a una sottoalgebra di C*-algebra di tutti gli operatori di uno spazio di Hilbert. Altre osservazioni sul teorema (C) (come pure degli altri due teoremi) saranno date nel seguito.

2. Osservazioni generali sui tre teoremi

È notevole come tutti e tre i teoremi presentano un miscuglio di topologia e di algebra; tutto ciò, con il considerevole impiego della teoria della misura, costituisce un'importante caratteristica dell'analisi moderna. Inoltre si può costatare che ciascun teorema, singolarmente o collettivamente, riassume parecchi altri risultati. Supponiamo X un adeguato sottoinsieme di diverse varietà topologiche presenti in geometria e molto usate nell'analisi moderna; ciò implica la necessità di estendere il teorema a un X localmente compatto (o a spazi ancor più generali), una questione nella quale non entrerò in seguito. Per noi, basta sapere che se X è localmente compatto, generalizza bene i teoremi (A) e (B) e nel teorema (C) abbiamo la caratterizzazione di una C*-algebra commutativa, non necessariamente munita di unità.

3. Osservazioni sul teorema (A)

Il teorema (A) certamente non è stato formulato prima del 1914, quando Hausdorff (1868-1942) introduce la definizione generale di spazio topologico usando il concetto di intorno; questa appare nel libro, scritto allora, dal titolo «Grundzüge der Mengenlehre[3]», del quale è uscita una nuova edizione nel 2002 dal volume 2 al volume 9 dell'edizione dell'opera omnia di Hausdorff [H]. La formalizzazione di Hausdorff della topologia è stata preparata da parecchie opere precedenti, fra le quali la più importante è quella di Fréchet (1878-1973) del 1906. Il teorema di Weierstrass (1815-1897) e Stone (1903-1989) generalizzato in modo importante e utile nel 1937 recita che

3. Fondamenti di teoria degli insiemi.

se X=[a,b], allora ogni applicazione continua $f: X \to \mathbb{R}$ può essere uniformemente approssimata, a meno di ogni $\varepsilon > 0$, da un polinomio reale p, cioè:

$$\sup_{x \in X} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$$

Questa è una conseguenza immediata del teorema (A), (a) con X=[a,b], S={1,x}; numerosi altri casi particolari del teorema (A) s'incontrano in analisi.

Per ragioni di spazio non posso compiere un'analisi dettagliata della dimostrazione originale di Weierstrass, che richiede lo studio dell'«operatore convolutorio»

$$T_t f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k_t(x - y) f(y) \, dy$$

dove k_t è un'opportuna funzione analitica, cioè

$$k_t(u) = \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-u^2/2t\right) \quad , \quad t > 0 \quad , \quad u \in \mathbb{R}$$

e $t \to 0$; Weierstrass studia inoltre il caso multidimensionale e la tecnica originale usata nella dimostrazione viene usata frequentemente. Il lettore può consultare l'Opera omnia di Weierstrass, Tomo 3, Edizione III, p. 1-37 (p. 5 per il caso [a,b]; l'articolo fu pubblicato per la prima volta nel 1885, quando Weierstrass aveva 70 anni. Ricordo che Weierstrass ha precedentemente dimostrato (nel 1872) che una funzione continua molto semplice come

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos\left(a^n \pi x\right) \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad , \quad 0 < b < 1 \quad , \quad a = 1,2,\ldots$$

non è derivabile in alcun punto se $a\,b > 1 + \pi\, 3/2$; l'esempio e la sua complicata dimostrazione furono pubblicati molto più tardi, nel 1875; altri dettagli storici relativi si possono trovare a p. 46 di [Haw]; aggiungo solo che Hardy dimostra nel 1911 che la funzione precedente non è derivabile in alcun punto se $a \cdot b \geq 1$ per ogni a>1, 0<b<1 (cfr. Opera omnia di G.H. Hardy, vol. IV, pp. 477-501). Si noti che la continuità uniforme di f è ovvia se 0<b<1, ma che la serie ottenuta per derivazione formale termine-dopo-termine della serie f(x) è divergente se $a \cdot b \geq 1$. È difficile dire esattamente quali proprietà apparentemente paradossali delle funzioni continue Weierstrass riuscì a riunire; da una parte queste funzioni possono essere non-derivabili dappertutto e dall'altra possono essere approssimate uniformemente da un polinomio. In ogni caso, a partire dal 1900, si è iniziato a raccogliere risultati non intuitivi concernenti le funzioni continue; nello stesso tempo cominciano ad apparire dappertutto dimostrazioni del teorema di Weierstrass concernente l'approssimazione di funzioni continue con altre funzioni «semplici», polinomiali o trigonometriche, o funzioni continue a intervalli. Un caso sorprendentemente semplice (per X=[a,b]) fu prodotto da Lebesgue (nel 1898), del quale un aspetto analitico è la dimostrazione del fatto elementare che |x| può essere approssimato uniformemente in [–1,+1] con un polinomio, a meno di ogni $\varepsilon > 0$; ciò significa essenzialmente che:

$$|x| = \left(1 + x^2 - 1\right)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \left(x^2 - 1\right)^n \quad , \quad |x| \le \sqrt{2}$$

la serie converge assolutamente e uniformemente per $|x| \le \sqrt{2}$; vedere Hewitt e Stromberg «Real and Abstract Analysis» (1965), p. 92 per una dimostrazione dettagliata di questo fatto «elementare». Per l'articolo di Lebesgue si vedano le sue Oeuvres Scientifiques, vol. III, pp. 11-20; Lebesgue affronta il caso n-dimensionale. Stone combina questa semplice idea con la topologia generale per costruire il suo teorema nel 1937; un eccellente e chiaro enunciato del teorema e delle sue numerose applicazioni fu dato da Stone nell'articolo del 1947-48 riprodotto nel volume «Studies in Modern Analysis»[4] *MAA Studies in Mathematics*, vol. 1 (1962) col titolo «A generalized Weierstrass approximation theorem[5]» pp. 30-87. Questa opera di Stone può essere considerata come un punto d'appoggio dell'analisi moderna.

4. Osservazioni sul teorema (B)

Questo teorema fu dimostrato nel caso X=[a,b] nel 1909 da F. Riesz (1880-1956), da non confondere col suo fratello minore M. Riesz. F. Riesz usa il linguaggio dell'integrale di Stieltjes invece della misura. Che la $\sigma-$ additività sia importante fu sottolineato da Borel (1871-1956) nella conosciutissima monografia «Leçons sur la théorie des fonctions» (1898), ma fu Lebesgue (1875-1941) a stabilire (nella sua tesi del 1902) l'esistenza di una misura $\mu\,\sigma-$ additiva (detta misura di Lebesgue) sui sottoinsiemi «Lebesgue-misurabili» di $\mathbb{R}_n$ con μ (A) uguale all'abituale volume (o area o lunghezza) di A se Aè un parallelepipedo rettangolo (intervallo rettangolare). Ricordo che un insieme $E \subset \mathbb{R}_n$ è detto Lebesgue-misurabile se esistono insiemi di Borel A, B con $A \subset E \subset B$ tali che $\mu\,(B/A) = 0$; abbiamo già definito gli insiemi di Borel di $\mathbb{R}_n$ (vedere nel punto 2, dopo il teorema (B)) come la più piccola $\sigma-$ algebra degli insiemi contenenti tutti gli insiemi aperti in $\mathbb{R}_n$. In verità, nel 1905, Vitali ha dimostrato che la misura di Lebesgue μ non può essere definita per tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}_n$, se vogliamo insistere sulla sua $\sigma-$ additività e invarianza per traslazione. Lo questione della misurabilità di insiemi e funzioni gioca un ruolo sottile ma essenziale nella teoria dell'integrazione di Lebesgue; per molti lavori «pratici» la nozione può essere ignorata, siccome una funzione o un insieme non misurabile è difficile da ottenere. D'altra parte l'esistenza di insiemi non misurabili è strettamente connessa con profondi assiomi della teoria degli insiemi e una totale ignoranza della questione non può essere teoricamente accettata. Lebesgue dedicò molti sforzi allo studio delle proprietà delle funzioni misurabili e diede una definizione generale di un integrale per funzioni misurabili (analoga a quella presentata nel punto 2): questi lavori lo portarono a costruire una teoria consistente della lunghezza delle curve e dell'area delle superfici, che era il suo maggiore obiettivo iniziale. Lebesgue riunì numerosi suoi risultati della teoria dell'integrazione nel famoso libro «Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives»

4. Complementi di analisi moderna.
5. Un teorema generale di approssimazione di Weierstrass.

(1904, seconda edizione 1928). L'opera di Lebesgue concerne prevalentemente il proprio concetto di misura; la generalizzazione della teoria dell'integrazione ad altre misure in $\mathbb{R}_n$ fu compiuta da Radon (1887-1956) nel 1913. Poco dopo la teoria fu estesa a spazi astratti completi, da Fréchet (1878-1973) nel 1915, da Daniell (1889-1946) negli anni 1917-18 e da Banach (1892-1945) in appendice a un importante libro di Saks (1897-1942), pubblicato per la prima volta in Francia nel 1933 col titolo «Théorie de l'intégrale» e successivamente, nel 1937, in inglese come «Theory of the integral»; quest'ultima pubblicazione (stampata a Dover) appare ancora oggi come una importantissima monografia per lo studio della teoria generale della misura. È piuttosto difficile individuare esattamente date e persone cui attribuire la forma generale del teorema (B); dev'essere dato credito a A.Markov (1938), a A.D. Alexandrov (1940-41) e infine a S. Kakutani (1941). L'esatto riferimento si trova in [DS] vol. 1. Il teorema è talmente importante che Bourbaki ha definito una Radom-misura in uno spazio di Hausdorff compatto come funzionale lineare positivo in C(X). Questo modo di procedere trascura le importanti applicazioni della teoria della misura in spazi non-compatti (o anche non-localmente-compatti) come si hanno nella teoria della probabilità e in analisi funzionale. Tuttavia ciò mostra l'importanza del teorema (B) in numerose branche dell'analisi moderna. Per altre considerazioni storiche sui primi passi della teoria della misura si può consultare [Haw]; il volume [DS] vol. 1 è una buona sorgente per ulteriori sviluppi.

Ora voglio spendere quattro parole su come è stato dimostrato il teorema (B). La dimostrazione consiste nell'estendere il dato funzionale lineare L in C(X) a un'ampia classe di funzioni definite in X. Così Banach dimostra il teorema di Riesz in [a,b] con una semplice estensione di L a tutte le funzioni reali limitate in X (nel cosiddetto teorema di Hahn-Banach) e poi definendo $\mu(A)=L(1_A)$ dove 1_A è la funzione indicatrice dell'intervallo A. Questo metodo si presta bene nel caso semplice di [a,b]; per spazi X generali questa procedura dev'essere eseguita molto cautamente e necessita di molto lavoro tecnico. Osserviamo che la misura μ in questione può essere anche estesa a tutti gli insiemi di Borel di X unicamente se l'estensione è mantenuta «regolare», una condizione che non abbiamo discusso. Vedere [DS] vol. 1, p. 265. Confrontare anche la discussione sugli insiemi di Borel e Baire presentata nel punto 2.

Ricordo che Baire (1874-1932), contemporaneo di Borel e Lebesgue, introdusse l'allora rivoluzionaria nozione di classe di Baire di funzioni in $\mathbb{R}_n$ attorno agli anni 1898-99. In sintesi, se Y è uno spazio topologico, la classe F(Y) delle funzioni di Baire reali in Y è la più piccola classe di funzioni contenente tutte le funzioni reali in Y e che è chiusa rispetto alla convergenza sequenziale per punti. Una funzione $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$f(y)=\lim_{n} f_n(y),\ y \in Y$$

per ogni successione di funzioni reali continue f_n è detta funzione di Baire di classe 1; tutte le funzioni di Baire sono ottenute prendendo punto per punto i limiti di successioni di un'altra funzione di Baire. Ciò necessita il calcolo di limiti di successioni «transfinite» e non ci concerne. Il primo importante risultato di Baire è una caratterizzazione di funzioni di Baire di classe 1 in $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{R}_n$) e, essenzialmente, la dimostrazione che queste ultime non possono essere veramente discontinue. Lebesgue dimostra inoltre che le funzioni di Baire in $\mathbb{R}$ sono esattamente quelle Borel-misurabili, così che in realtà per la teoria ordinaria della misura non sono necessarie molte delle considerazioni di dettaglio fatte da Baire. Comunque l'opera di Baire, costruita in cinque anni di tormentato lavoro, ha lasciato un'impronta permanente nella topologia moderna, con l'introduzione delle nuove nozioni di semi-continuità e di categoria; la vita e l'opera di Baire possono essere studiate sulle sue «Oeuvres scientifiques» pubblicate nel 1990.

5. Osservazioni sul teorema (C)

Gelfand (nato nel 1913) e Naimark (anche scritto da taluni Neumark) pubblicano i loro risultati nel 1943 (in una forma un po' diversa) in un articolo pubblicato su una rivista russa (vedere il riferimento preciso in [DS] vol. 1), il cui oggetto di studio è la teoria generale delle algebre di Banach rappresentate come operatori in uno spazio di Hilbert. È evidente che questi lavori sono stati influenzati dall'articolo di Stone del 1937 che ha introdotto nuovi metodi algebrici e topologici per lo studio di C(Y) per **ogni** spazio topologico Y; senza entrare nei dettagli, diciamo che Stone ha introdotto la compattazione di Y (chiamata poi compattazione di Stone-Cech) e la rappresentazione delle algebre astratte booleane come algebre di sottoinsiemi (chiusi e aperti) di certi spazi di Hausdorff compatti. È il metodo di dimostrazione di usato in questi lavori che ha giocato un ruolo importante nella dimostrazione del teorema (C); si deve riconoscere che questo metodo ha lasciato un'impronta permanente in buona parte della matematica moderna.

Voglio ora sintetizzare la dimostrazione del teorema (C), più o meno data da Gelfand e Naimark e riprodotta in molte presentazioni moderne. Data una C*-algebra commutativa A con unità, si considera X come insieme di tutte gli omomorfismi non banali $\varphi : A \to \mathbb{R}$ cioè φ è lineare, moltiplicativa e $\varphi(1)=1$. Per ogni $\varphi \in X$, $\ker \varphi = \varphi^{-1}(0)$ è un ideale massimo $F = F_{\varphi}$ dell'algebra A; così A/F è un campo commutativo e un teorema (detto teorema di Gelfand-Mazur) ci assicura che il campo in questione è isomorfo a $\mathbb{C}$. Questa è la via standard per introdurre una topologia in X, poiché X è uno spazio di funzioni complesse nello spazio topologico A; grazie al teorema di Tychonov X diventa uno spazio di Hausdorff compatto. Ora, se $a \in A$, definiamo $\hat{a}(\varphi) = \varphi(a), \varphi \in X$; allora $\hat{a} \in C(X)$ e la corrispondenza $a \mapsto \hat{a}$ risulta essere un isomorfismo isometrico tra A e C(X). La funzione â è spesso detta la Gelfand-trasformata di $a \in A$.

Lo spazio X è essenzialmente lo spazio degli ideali massimi dell'algebra A. Accenniamo che questa interazione tra un'algebra A e il suo spazio di ideali massimi (o più in generale ideali primi) è la caratteristica di buona parte della moderna geometria algebrica.

Sottolineamo inoltre che la C*-algebra commutativa A (con unità) determina lo spazio di Hausdorff compatto unicamente a meno di un isomorfismo; più precisamente, se X, Y sono due spazi di Hausdorff compatti, tali che C(X), C(Y) siano algebricamente isomorfi, allora X e Y sono isomorfi agli spazi topologici. Questo fatto ha indotto alcuni matematici (il più noto fu A. Connes) a definire lo studio di C*-algebre non necessariamente commutative come lo studio della geometria non commutativa. Il notevole libro di Connes [Co], benché difficile da seguire nei dettagli, dev'essere considerato di gran lunga il manifesto matematico del ventesimo secolo.

[Co] Connes, A.
Noncommutative geometry. Academic Press, London, 1994.

[DS] Dunford, N.; Schwartz, J. T.
Linear operators. Interscience Publishers, New York. Vol. 1, 1958, vol. 2, 1963.

[H] Hausdorff, F.
Gesammelte Werke. Springer-Verlag, Berlin (in 9 volumi; vol. 2, 4, 7 sono stati pubblicati nel 2002, 2000, 2004 rispettivamente).

[Haw] Hawkins, T.
Lebesgues theory of integration. University of Wisconsin Press, Madison, 1970.

2. Variazioni su una formula

Francesco Cavalli

The formula by Georg Pick (1859-1942) presents an original method to calculate the area of a polygon drawn on a grid with its vertices on the knots of this grid. In this article, following the demonstration of the formula, and only once the definition of a polygon has been extended to figures which would normally not be considered as polygons, some variations of this formula are then examined.

La formula di **Pick** propone un curioso procedimento per calcolare l'area di poligoni disegnati su una griglia quadrettata, e aventi tutti i vertici sui nodi della griglia stessa.

Si prendono in considerazione due parametri che, apparentemente, non hanno nulla a che fare con l'area del poligono.

i = numero dei nodi interni al poligono (cerchi pieni)

c = numero dei nodi sul contorno del poligono (cerchi vuoti)

Allora l'area di un poligono P è data dalla funzione:

$$\varphi(P) = i + \frac{c}{2} - 1$$

Esempio:

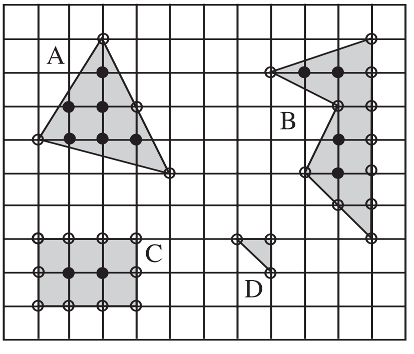


Figura	**i**	**c**	**φ(P)**
A	6	4	7
B	4	11	8.5
C	2	10	6
D	0	3	0.5

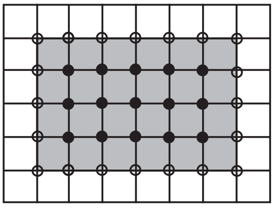
L'area può naturalmente essere calcolata anche in modo elementare, operando con somme e sottrazioni di rettangoli, triangoli rettangoli e trapezi rettangoli.

Quindi la verifica dell'esattezza del procedimento risulta agevole per gli esempi proposti, come pure per ogni altro poligono.

Per questo la formula di Pick può anche costituire una situazione interessante per un'attività di laboratorio di matematica nella scuola dell'obbligo.

Una dimostrazione vera e propria può essere suddivisa in 5 passaggi.

1. La formula vale per i rettangoli con i lati sulla griglia.



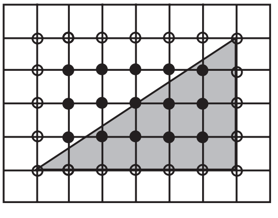
Siano a, b le dimensioni del rettangolo R

$i = (a-1)(b-1)$
$c = 2a + 2b$

$$\varphi(R) = i + \frac{c}{2} - 1$$

$ab - a - b + 1 + a + b - 1 = ab$

2. La formula vale per i triangoli rettangoli con i cateti sulla griglia.



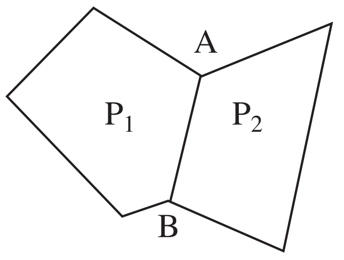
Siano a, b i cateti del triangolo rettangolo T, d i nodi sull'ipotenusa (esclusi gli estremi)

$$i = \frac{1}{2}\left[(a-1)\cdot(b-1) - d\right]$$

$c = a + b + 1 + d$

$$\varphi(T) = i + \frac{c}{2} - 1 = \frac{1}{2}\left[ab - a - b + 1 - d\right] + \frac{1}{2}(a + b + 1 + d) - 1 = \frac{1}{2}ab$$

3. La funzione è additiva per poligoni adiacenti lungo un lato.



$$\varphi(P_1) = i_1 + \frac{c_1}{2} - 1$$

$$\varphi(P_2) = i_2 + \frac{c_2}{2} - 1$$

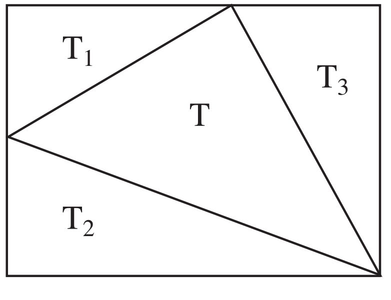
Sia d il numero di nodi internamente al lato comune (senza A e B)
I parametri del poligono intero sono allora:
$i = i_1 + i_2 + d$
$c = c_1 + c_2 - 2\,d - 2$

$$\varphi(P_1) + \varphi(P_2) = i_1 + \frac{c_1}{2} - 1 + i_2 + \frac{c_2}{2} - 1 = i_1 + i_2 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2} - 2$$

$$\varphi(P_1 \cup P_2) = i_1 + \frac{c_1}{2} - 1 = i_1 + i_2 + d + \frac{1}{2}(c_1 + c_2 - 2\,d - 2) - 1 = i_1 + i_2 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2} - 2$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(P_1) + \varphi(P_2) = \varphi(P_1 \cup P_2)$$

4. La funzione esprime l'area di un triangolo qualunque.



Sia $R = T \cup T_1 \cup T_2 \cup T_3$

$$\varphi(R) = \varphi(T) + \varphi(T_1) + \varphi(T_2) + \varphi(T_3)$$

$$\varphi(T) = \varphi(R) - \varphi(T_1) - \varphi(T_2) - \varphi(T_3)$$

quindi $\varphi(T)$ esprime l'area del triangolo.

5. Ogni poligono può essere scomposto in triangoli per cui la funzione φ esprima l'area di qualunque poligono.

La formula di Pick evidenzia in modo palese che l'area di un poligono con i vertici sui nodi della griglia è espressa da un numero intero di «mezzi quadretti», proprietà che peraltro può essere dimostrata anche per altre vie.

Una interessante conseguenza è la seguente:

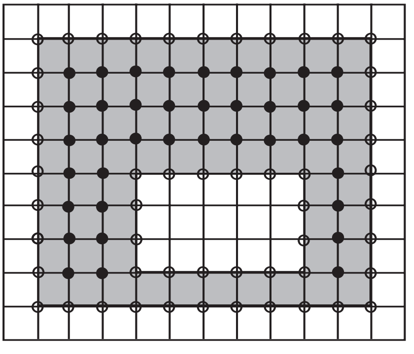
Un triangolo equilatero non può avere i tre vertici sui nodi della griglia.

Infatti l'area di un triangolo equilatero di lato a è espressa dalla formula

$$a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Ora, ammettendo che i vertici si trovino sui nodi della griglia, a^2 è certamente un numero intero e quindi l'area è irrazionale, mentre secondo la formula di Pick dovrebbe essere razionale, ciò che comporta una palese contraddizione.

Ma questa funzione calcola davvero l'area di tutti i poligoni? Osserviamo una figura un po' speciale e troviamo subito una sorpresa.



Si tratta di un rettangolo con un «buco», per il quale si verifica immediatamente che la funzione j non corrisponde all'area. Infatti:

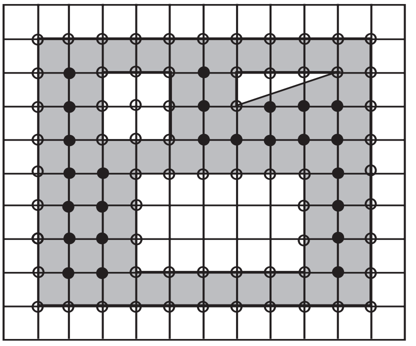
Area = 80 – 15 = 65

i = 39 c = 36 + 16 = 52

$$i + \frac{c}{2} - 1 \;= 39 + 26 - 1 = 64 \text{ (1 in meno)}$$

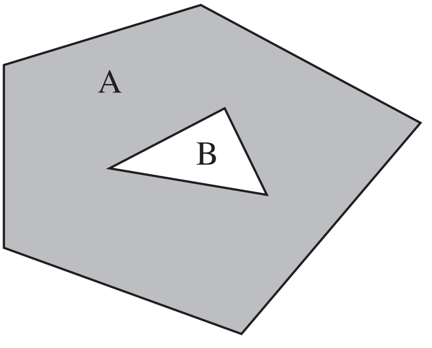
Naturalmente si potrebbe obbiettare che questo non è un poligono nel senso comunemente accettato. Ma, secondo me, poligono o non poligono, vale la pena di continuare l'indagine matematica per trovare una regola più generale.

Provando con più «buchi» l'anomalia viene confermata:



Area = 80 – 15 – 4 – 1,5 = 59,5
$i = 25$ $c = 36 + 16 + 8 + 5 = 65$ $i + \frac{c}{2} - 1 = 25 + 32{,}5 - 1 = 56{,}5$ (3 in meno)

Osserviamo una figura generica A (in grigio) con un buco B.



Area figura completa: $\varphi(A \cup B) = i_1 + \frac{c_1}{2} - 1$

Area figura interna (in bianco): $\varphi(B) = i_2 + \frac{c_2}{2} - 1$

Area della figura con il buco (in grigio): $\varphi(A \cup B) - \varphi(B)$

I parametri del poligono considerato A sono allora:
$i = i_1 - i_2 - c_2 \qquad c = c_1 + c_2$

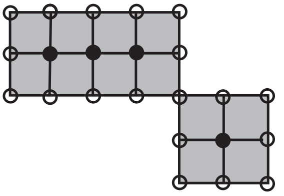
$$\varphi(A) = i + \frac{c}{2} - 1 = i_1 - i_2 - c_2 + \frac{c_1 + c_2}{2} - 1 = i_1 - i_2 + \frac{c_1 - c_2}{2} - 1 = \varphi(P_1) - \varphi(P_2) - 1$$

Procedendo per induzione, se si indica con n il numero dei buchi, si può arrivare a una funzione più generale che definisce l'area anche in presenza di «buchi»:

$$\varphi_n(P) = i + \frac{c}{2} - 1 + n$$

(n = numero di «buchi»)

Tutto a posto allora? Esaminiamo un altro scenario:

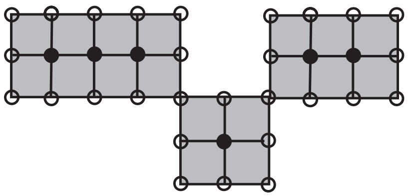


Area = 8 + 4 = 12

i = 4 c = 19 $\quad i+\frac{c}{2}-1$ = 4 + 9,5 -1 = 12,5 (1/2 in più)

Anche in questo caso il poligono è certamente anomalo, ma se vogliamo considerarlo tale, ci accorgiamo che la funzione j dà un risultato superiore di mezza unità rispetto all'area effettiva.

Continuando:

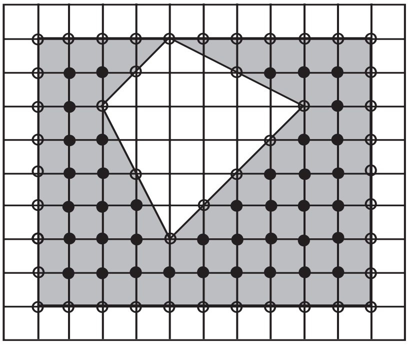


Area = 8 + 4 + 6 = 18

i = 6 c = 28 $\quad i+\frac{c}{2}-1$ = 6 + 14 – 1 = 19 (1 in più)

Quindi un'ulteriore mezza unità in più. E così di seguito per ogni componente del poligono intrecciato.

Infine provo a combinare le due anomalie:



Area = 80 - 18 = 62

i = 40 c = 36 + 9 = 45 $\quad i+\frac{c}{2}-1$ = 40 + 22,5 - 1 = 61,5 (1/2 in meno)

Si combinano i due effetti, uno in meno per il «buco» e un mezzo in più per il punto singolo in comune.

Si può allora definire una funzione ancora più generale che tiene conto del numero n di «buchi» e del numero k dei punti singoli di contatto tra le componenti della figura.

$$\varphi_{n,k}(P) = i + \frac{c}{2} - 1 + n - \frac{k}{2}$$

Non è stato facile trovare notizie su Pick, poiché i testi di storia della matematica e persino internet non forniscono molte informazioni. Ecco comunque quanto sono riuscito a trovare.

Georg Alexander Pick nacque il 10 agosto 1859 a Vienna da una famiglia di origine ebraica. Studiò matematica e filosofia a Vienna, dove si laureò nel 1880 con una dissertazione «Über eine Klasse abelscher Integrale».

In seguito fu assistente di Ernst Mach all'università Karl-Ferdinand di Praga, dove poi divenne docente ottenendo l'abilitazione con il lavoro «Über die Integration hyperelliptischer Differentiale durch Logarithmen».

Durante la sua lunga permanenza a Praga pubblicò una settantina di lavori su analisi funzionale, geometria differenziale, funzioni ellittiche, equazioni differenziali, e anche geometria elementare.

Si ricorda pure una sua collaborazione con Einstein attorno al 1920 in merito a questioni matematiche inerenti la teoria generale della relatività.

Dopo il pensionamento, nel 1929 rientrò a Vienna, ma dopo l'annessione dell'Austria da parte del terzo Reich, nel 1938 preferì tornare a Praga. Ma ciò non gli evitò la deportazione nel campo di concentramento nazista di Theresienstadt dove morì il 26 luglio 1942.

1. Introduzione storica alle equazioni di secondo grado Attività svolta in due classi di prima commercio

Paolo Hägler

Per il mio dossier di (seconda) abilitazione quale docente di matematica nel settore medio superiore ho affrontato in classe il tema delle equazioni di secondo grado partendo da 3 problemi di tre epoche storiche diverse, in modo da fornire ai ragazzi di 1A e di 1B (anno 2003/2004) della SCC[1] anche un'idea sullo sviluppo della matematica.

Il primo problema, in ordine cronologico, risale all'epoca mesopotamica (2100-1600 a.C.), il secondo a Diofanto (III sec. d.C.) ed il terzo a Rafael Bombelli (1572).

Tra gli obiettivi di questa attività figurano *in primis* l'acquisizione di un'idea dello sviluppo storico della matematica, della difficoltà di operare (senza la scrittura compatta tipica dell'algebra moderna) incontrata dai nostri predecessori e del bisogno di fare matematica già presente migliaia di anni fa. L'obiettivo di saper riconoscere, caratterizzare e risolvere le equazioni di secondo grado ha trovato spazio subito dopo questa attività quando, col metodo del completamento del quadrato, abbiamo ricavato la formula risolutiva (e dopo l'attività precedentemente svolta ne abbiamo approfittato per fare dei paragoni tra i tre periodi storici diversi).

Prima parte: giungere all'equazione

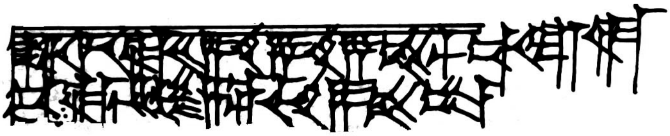
Ho iniziato questa attività distribuendo agli allievi i tre problemi (dicendo loro che erano di periodi storici diversi) e chiedendo loro cosa avessero in comune. Ecco il testo consegnato.

Problemi risolvibili mediante…

I 3 problemi che seguono sono tutti risolvibili grazie allo stesso strumento matematico. Quale?

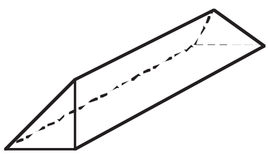
1. Scuola Cantonale di Commercio, inserita nell'Istituto Cantonale di Economia e Commercio, con sede Bellinzona.

Problema 1 (Mesopotamia, tra il –2100 ed il –1600)
(traduzione adattata al nostro sistema metrico decimale)



Un mucchio di grano. L'altezza è 48, l'alto è 4, il volume di grano è 1152. La somma di lunghezza e larghezza è 16. Quanto sono lunghezza e larghezza?

Informazioni indispensabili sottintese nel problema: il mucchio di grano ha la forma seguente:



t (top) è l'alto
h (height) è l'altezza
w (width) è la larghezza
l (length) è la lunghezza

Problema 2 (Diofanto, III secolo d.C.)

نريد أن نجد عددين تكون جملتُهما وجملةُ مكعبيهما
مثلَ عددين مفروضين وينبغى أن تكون أربعة أمثال
العدد المفروض لجملة مكعبى العددين منهما تزيد
على مكعب العدد المفروض لجملة العددين عددا إذا
قسم على ثلاثة أمثال العدد المفروض لجملة العددين
كان القسم مربعا، وإذا ضرب فى ثلاثة أرباع

العدد المفروض لجملة العددين كان مربعا، وهذه من

Trovare due numeri tali che la loro somma e la somma dei loro cubi siano due numeri dati [; ed è necessario che quattro volte il numero dato per la somma dei cubi dei due numeri eccedano il cubo del numero dato per somma dei due numeri, di un numero tale che se lo si divide per tre volte il numero dato per somma dei due numeri, il quoziente sia un quadrato e che se lo si moltiplica per i tre quarti delnumero dato per somma dei due numeri, si abbia un quadrato. Così il problema è convenientemente determinato].

Indicazione: Diofanto sceglie 20 per la somma dei numeri, e 2240 per la somma dei cubi.

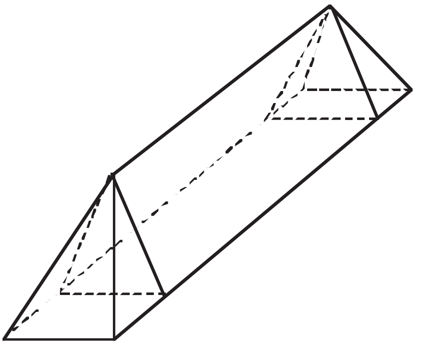
Problema 3 (Rafael Bombelli, 1572)

Si scomponga il 10 in una somma in modo che il quadrato dell'addendo maggiore valga quanto l'addendo minore moltiplicato per 10.

Per risolvere i problemi, gli allievi hanno dovuto sostanzialmente trasformare le indicazioni del testo in un'equazione di secondo grado.

Vediamo in dettaglio i 3 problemi in ordine cronologico.

Per il primo dei 3 ho rifatto il disegno alla lavagna, aggiungendovi i due triangoli (sezioni del solido), in posizione verticale, con un vertice coincidente con uno dei due vertici superiori del solido.



Questa indicazione è d'obbligo, anche per mostrare che il solido non è un prisma a base triangolare, come gli studenti inizialmente pensavano (il fatto che lo spigolo superiore fosse chiamato t e quelli inferiori l non ha avuto riscontro al momento di intuire la forma del solido). Grazie all'indicazione, però, tutti si sono accorti che la parte centrale (tra i due triangoli aggiunti) era effettivamente un prisma a base triangolare, mentre le altre due parti non sono state identificate da tutti come piramidi; ma chi non le ha viste come due piramidi ha riconosciuto come piramide il solido risultante dal loro accostamento. A questo punto non resta che calcolare il volume delle due parti del solido, ossia prisma e piramide risultante dall'accostamento delle due piramidi alle estremità. Le formule dei volumi sono conosciute da tutti, ma la loro applicazione in questo caso non è immediata. Iniziamo col prisma: per alcuni la sua altezza era h (invece di t), di conseguenza diventa impossibile identificare la base. Ma anche chi ha notato che il prisma è, per così dire, «sdraiato» (quindi con altezza t) ha incontrato difficoltà nel calcolare l'area della base (w·h/2), quindi del triangolo della sezione. Il volume del prisma è di conseguenza

$$V(\text{prisma}) = \frac{w \cdot h \cdot t}{2}$$

Anche nel caso della piramide, gli studenti hanno incontrato difficoltà. Che l'altezza sia stavolta effettivamente h non ha causato dubbi, ma nel calcolo dell'area di base si è verificato qualche problema nella determinazione del lato (l–t).

Il volume della piramide è stato infine espresso nel modo seguente:

$$V(\text{piramide}) = \frac{w \cdot (l - t) \cdot h}{3}$$

A questo punto tutti hanno scritto l'equazione:

$$1152=\frac{w\cdot h\cdot t}{2}+\frac{w\cdot(l-t)\cdot h}{3}$$

Sostituendo le lettere con i valori conosciuti e rimpiazzando l con 16–w (alcuni hanno rimpiazzato w con 16–l) si ottiene:

$$1152=\frac{w\cdot 48\cdot 4}{2}+\frac{w\cdot 48\cdot(16-w-4)}{3}$$

e infine:

$$1152=96w+192w-16w^2$$

Il secondo problema è stato quello più difficile da comprendere (la difficoltà sta tutta nel testo da decifrare, molto contorto).

In sostanza si cercano due numeri la cui somma sia 20 e tali che la somma dei loro cubi sia 2240. Si può quindi facilmente scrivere il sistema:

$$\begin{cases} x+y=20 \\ x^3+y^3=2240 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava y=20–x; se si sostituisce nella seconda equazione si ottiene:

$$x^3+(20-x)^3=2240$$

$$x^3+20^3-3.20^2x+3.20x^2-x^3=2240$$

$$8000-1200x+60x^2=2240$$

Il terzo problema si è rivelato più facile. Il sistema iniziale è

$$\begin{cases} x+y=10 \\ x^2=10\,y \end{cases}$$

Qualcuno ha pensato di ricavare x dalla seconda equazione e di sostituirla nella prima…

Gli altri hanno proceduto ricavando la y (dalla prima o dalla seconda equazione) e sostituendola nell'altra equazione. Hanno quindi ottenuto un'equazione equivalente a

$$x^2=100-10x$$

Per questa prima parte di lavoro, nella quale gli studenti lavoravano per piccoli gruppi, avevo previsto un'ora. La classe 1A è riuscita ad arrivare alla determinazione delle equazioni in questo tempo, ma gli studenti mi hanno fatto notare che sarebbe meglio disporre di due ore: il tempo che ho lasciato alla classe 1B.

La reazione iniziale degli studenti di fronte a questi problemi è stata di sconcerto e di incapacità: non riuscivano a comprendere i testi. Solo dopo una lettura più attenta e suddivisa in piccole parti la comprensione è stata raggiunta, almeno parzialmente.

Il terzo problema è stato trasformato da quasi tutti in un'equazione di secondo grado (fanno eccezione quelli che si sono scontrati con la radice…).

Nel primo problema l'ostacolo maggiore è stato costituito dall'insufficiente visione tridimensionale della maggior parte degli studenti, al punto che sono dovuto intervenire impostando il calcolo dei volumi del prisma e della piramide alla lavagna, e ciò in entrambe le classi.

I problemi più seri si sono incontrati nel secondo problema. Qui la costruzione del sistema era facile… una volta capito il testo, ma ho riscontrato un errore abbastanza frequente:

$20^3 - x^3$ al posto di $(20 - x)^3$.

(È il solito errore nello sviluppo del binomio, verificatosi nonostante l'avessi già fatto notare in classe.)

Le mie aspettative per questa prima parte di lavoro erano molto più ottimistiche, rispetto a ciò che si è verificato.

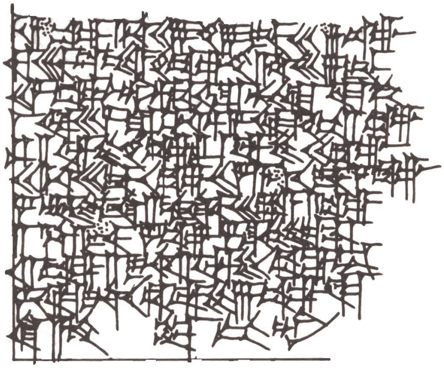
Infine un'osservazione. Nel secondo problema la parte del testo inclusa tra le parentesi quadre riguarda l'esistenza di una soluzione al problema (che per Diofanto corrispondeva al caso in cui il discriminante è uguale al quadrato di un numero razionale). Ho detto ai ragazzi che quella parte del testo riguardava appunto la condizione di esistenza di soluzioni del problema, con l'intenzione di rivederla in seguito dopo aver studiato la formula risolutiva ed il discriminante in particolare, ma viste le difficoltà di lettura del testo ho lasciato cadere questa aggiunta.

Seconda parte: interpretare le risoluzioni storiche

Dopo avere scoperto che i tre problemi si potevano risolvere tramite equazioni di secondo grado (e averle trovate) ho fatto suddividere la classe in 6 gruppetti (di 3 o 4 allievi ciascuno essendo le classi di 20 e 19 allievi) lasciando agli studenti la libertà di scegliersi i compagni. Ho quindi distribuito le soluzioni storiche dei tre problemi e fatto in modo che di ogni soluzione si occupassero due gruppi. È interessante notare che gli ultimi due gruppi rimasti, in ambedue le classi, non hanno avuto scelta e si sono ritrovati con la soluzione del secondo problema. Ogni gruppo ha ricevuto la consegna di leggere le soluzioni dell'epoca, di interpretarle, di commentarle (per stile: sia linguistico che matematico; per contenuti) e inoltre di tradurle nel linguaggio matematico moderno. Alla fine sarebbe stata effettuata la messa in comune.

Faccio seguire le tre soluzioni distribuite, e in seguito presenterò qualche interessante osservazione degli studenti.

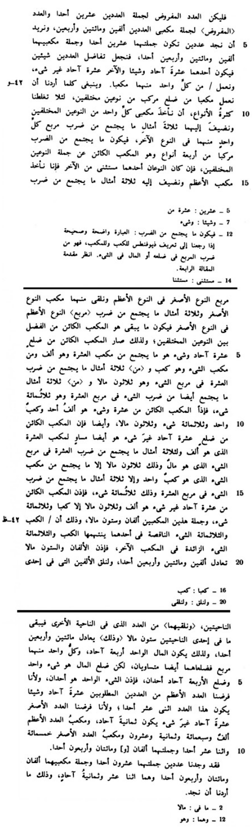
Soluzione storica del problema 1
(traduzione adattata al nostro sistema metrico decimale)



Tu: prendi il reciproco di 48, l'altezza. Troverai $^1/_{48}$. Moltiplica per 1152. Troverai 24. Prendi $^1/_3$ di 24. Troverai 8. Dimezza 4, l'alto. Troverai 2. Prendi $^1/_3$ di 2. Troverai $^2/_3$. Prendi $^1/_3$ di 16. Troverai $5^1/_3$. Aggiungi $^2/_3$ a $5^1/_3$. Troverai 6. Dimezza 6. Troverai 3. Quadra. Troverai 9. Togli 8 da 9. Troverai 1. Qual è la radice quadrata di 1? La radice quadrata è 1. Aggiungi 1 a 3. Troverai 4. Togli 1 da 3. Troverai 2. Triplica 4. Troverai 12. Togli 2 da 12. Troverai 10, la lunghezza. Togli da 16, la somma. Troverai 6. La larghezza è 6. Il metodo.

Soluzione storica del problema 2

Sia il numero dato per somma dei due numeri, venti unità e il numero dato per somma dei cubi dei due numeri, due mila due cento quaranta. Trovare due numeri dei quali la somma sia venti unità e la somma dei loro cubi, due mila due cento quaranta unità. Poniamo la differenza dei due numeri due cose, abbiamo l'uno dieci unità più una cosa e l'altro, dieci unità meno una cosa. Formiamo di ciascuno dei due un cubo; è necessario, ogni volta che si vuole formare un cubo del quale il lato è composto da due specie diverse, al fine di non essere indotti in errore dalla pluralità delle specie, di prendere il cubo di ciascuna delle due specie diverse e di aumentarli di tre volte il risultato della moltiplicazione del quadrato di ciascuno per l'altra specie; abbiamo allora il risultato della moltiplicazione composto da quattro specie; è il cubo ottenuto dalla somma di due specie diverse. Se le due specie sono una tolta dall'altra, prendiamo allora il cubo della più grande e l'aumentiamo di tre volte il risultato della moltiplicazione del quadrato della specie più piccola per la specie più grande e detraiamo dalle due il cubo della specie più piccola e tre volte quello che risulta dalla moltiplicazione del quadrato della specie più grande per la specie più piccola, il resto è allora il cubo della differenza di due specie differenti. Ne segue di conseguenza che il cubo ottenuto dal lato di dieci unità più una cosa è quello che risulta dal cubo di dieci, che è mille,


فليكن العدد المفروض لجملة العددين عشرين أحدا والعدد ‹المفروض› لجملة مكعبى العددين ألفين ومائتين وأربعين، ونريد أن نجد عددين تكون جملتهما عشرين أحدا وجملة مكعبيهما ألفين ومائتين وأربعين أحدا، فنجعل تفاضل العددين شيئين فيكون أحدهما عشرةَ آحاد وشيئا والآخر عشرة آحاد غير شىء، ونعمل / ٤٢-و من كلٍّ واحد منهما مكعبا. وينبغى كلما أردنا أن نعمل مكعبا من ضلع مركب من نوعين مختلفين، لئلا تغلطنا كثرةُ الأنواع، أن نأخذَ مكعبى كلٍّ واحد من النوعين المختلفين ونضيفَ إليهما ثلاثةَ أمثالِ ما يجتمع من ضرب مربع كل واحدٍ منهما فى النوع الآخر، فيكون ما يجتمع من الضرب مركبا من أربعة أنواع وهو المكعب الكائن عن جملة النوعين المختلفين، فإن كان النوعان أحدهما مستثنى من الآخر فإنا نأخذ مكعب الأعظم ونضيف إليه ثلاثة أمثال ما يجتمع من ضرب

5 ـ عشرين : عشرة من
7 ـ وشيئا : وشىء
12 ـ فيكون ما يجتمع من الضرب : العبارة واضحة وصحيحة إذا رجعنا إلى تعريف ذيوفنطس للكعب وللمكعب، فهو من ضرب المربع فى ضلعه أو المال فى الشىء. انظر مقدمة المقالة الرابعة.
14 ـ مستثنى : مستثنا

مربع النوع الأصغر فى النوع الأعظم ونلقى منهما مكعب النوع الأصغر وثلاثة أمثال ما يجتمع من ضرب ‹مربع› النوع الأعظم فى النوع الأصغر فيكون ما يبقى هو المكعب الكائن من الفضل بين النوعين المختلفين؛ ولذلك صار المكعب الكائن من ضلعٍ عشرة آحاد وشىء هو ما يجتمع من مكعب العشرة وهو ألف ومن مكعب الشىء وهو كعب و ‹من› ثلاثة أمثال ما يجتمع من ضرب العشرة فى مربع الشىء وهو ثلاثون مالا و ‹من› ثلاثة أمثال ما يجتمع أيضا من ضرب الشىء فى مربع العشرة وهو ثلاثُمائة شىء، فإذاً المكعب الكائن من عشرة وشىء هو ألفُ أحد وكعبٌ واحد وثلاثمائة شىء وثلاثون مالا، وأيضا فإن المكعب الكائن من ضلعٍ عشرة آحاد غيرَ شىء هو أيضا مساوٍ لمكعب العشرة الذى هو ألف ولثلاثة أمثال ما يجتمع من ضرب العشرة فى مربع الشىء الذى هو مالٌ وذلك ثلاثون مالا إلا ما يجتمع من مكعب الشىء الذى هو كعبٌ واحد وإلا ثلاثة أمثال ما يجتمع من ضرب الشىء فى مربع العشرة وذلك ثلاثُمائة شىء، فإذن المكعب الكائن من عشرة آحاد غير شىء هو ألف وثلاثون مالا إلا كعبا وثلاثمائة شىء، وجملة هذين المكعبين ألفان وستون مالا، وذلك أن / ٤٢-ظ الكعب والثلاثمائة الشىء الناقصة فى أحدهما ينتبهما الكعب والثلاثمائة الشىء الزائدة فى المكعب الآخر، فإذن الألفان والستون مالا تعادل ألفين ومائتين وأربعين أحدا، ولنلق الألفين التى فى إحدى

16 ـ كعبا : كعب
20 ـ ولنلق : ولنلقى

الناحيتين، ‹ونلقيهما› من العدد الذى فى الناحية الأخرى فيبقى ما فى إحدى الناحيتين ستون مالا ‹وذلك› يعادل مائتين وأربعين أحدا، ولذلك يكون المال الواحد أربعة آحاد، وكلٌّ واحد منهما مربع فضلعاهما أيضا متساويان، لكن ضلع المال هو شىء واحد وضلع الأربعة آحاد أحدان، فإذن الشىء الواحد هو أحدان، ولأنا فرضنا العدد الأعظم من العددين المطلوبين عشرةَ آحاد وشيئا يكون هذا العدد اثنى عشر أحدا؛ ولأنا فرضنا العدد الأصغر عشرةَ آحاد غيرَ شىء يكون ثمانيةَ آحاد، ومكعبُ العدد الأعظم ألفٌ وسبعمائة وثمانية وعشرون ومكعبُ العدد الأصغر خمسمائة واثنا عشر أحدا وجملتهما ألفان [و] ومائتان وأربعون أحدا.

فقد وجدنا عددين جملتهما عشرون أحدا وجملة مكعبيهما ألفان ومائتان وأربعون أحدا وهما اثنا عشر وثمانيةُ آحادٍ، وذلك ما أردنا أن نجد.

2 ـ ما فى : مالا
12 ـ وهما : وهو

più il cubo della cosa, che è un cubo, più tre volte quello che risulta dalla moltiplicazione di dieci per il quadrato della cosa, che è trenta quadrati, più pure tre volte quello che risulta dalla moltiplicazione della cosa per il quadrato di dieci, che è tre cento cose. Il cubo ottenuto da dieci più una cosa è dunque mille unità più un solo cubo più tre cento cose più trenta quadrati; per analogia, il cubo ottenuto dal lato che è dieci unità meno una cosa è anche uguale al cubo di dieci che è mille, più tre volte quello che risulta dalla moltiplicazione di dieci per il quadrato della cosa che è un quadrato, che è trenta quadrati, meno quello che risulta dal cubo della cosa che è un solo cubo, meno tre volte quello che risulta dalla moltiplicazione della cosa per il quadrato di 10, quello che è tre cento cose. Il cubo ottenuto da dieci unità meno una cosa è di conseguenza mille più trenta quadrati meno un cubo più tre cento cose e la somma di questi due cubi, due mila più sessanta quadrati poiché/ il cubo più tre cento cose sottratti dall'uno dei due è assorbito dal cubo più tre cento cosa aggiunti nell'altro cubo. Due mila più sessanta quadrati uguagliano dunque due mila due cento quaranta unità. Detraiamo i due mila che sono nell'uno dei due membri e detraiamoli dal numero che è nell'altro membro, resta nell'uno dei due membri sessanta quadrati, che è uguale a due cento quaranta unità. Abbiamo perciò che un quadrato è quattro unità; ora ciascuno di loro è un quadrato, i loro lati sono dunque anche uguali. Ma il lato del quadrato è una sola cosa e il lato di quattro unità, due unità, una sola cosa e di conseguenza due unità. Poiché abbiamo supposto il più grande dei due numeri cercati dieci unità più una cosa, questo numero è dodici unità, e poiché abbiamo supposto il più piccolo numero, dieci unità meno una cosa, è otto unità. Il cubo del più grande numero è mille sette cento vent'otto, il cubo del più piccolo numero è cinque cento dodici e la loro somma, due mila due cento quaranta unità.

Abbiamo dunque trovato due numeri dei quali la somma è venti unità e la somma dei loro cubi, due mila due cento quaranta unità: dodici e otto unità. Quello che bisognava trovare.

Soluzione storica del problema 3

Si ponga una delle due parti $1x^1$; l'altra sarà $10\text{-}1x^1$ e sebbene la domanda dice che il quadrato della maggiore fa quanto la minore moltiplicata per 10, nondimeno in questo caso non importa quale si prenda per la maggiore; prendendo $1x^1$, il suo quadrato sarà $1x^2$ e questo sarà uguale a $100\text{-}10x^1$, prodotto di 10 per $10\text{-}1x^1$, che è l'altra parte, e togliendo il segno meno si ottiene $1x^2+10x^1$ uguale a 100, che risolto, cioè sottratta la metà del coefficiente di x, che è 5 e preso il suo quadrato che è 25, sommato al numero, che è 100, fa 125, presone il lato che è $\sqrt{125}$, e toltogli 5, metà del coefficiente di x, fa $\sqrt{125}-5$ e questa è una parte; l'altra sarà il mancante a 10, cioè

Ponghisi che l'una di dette parti sia $1\overset{1}{\smile}$; l'altra sarà $10 - 1\overset{1}{\smile}$ e se bene la dimanda dice che moltiplicata la maggiore in sè faccia quanto la minore moltiplicata per 10, nondimeno in questo caso non importa qual si pigli per la maggiore; che pigliato $1\overset{1}{\smile}$, il suo quadrato sarà $1\overset{2}{\smile}$ e questo sarà eguale a $100 - 10\overset{1}{\smile}$, produtto di 10 via $10 - 1\overset{1}{\smile}$, ch'è l'altra parte, che levato il meno si haverà $1\overset{2}{\smile} + 10\overset{1}{\smile}$ eguale a 100, che agguagliato, cioè tolta la metà delli Tanti, ch'è 5 e quadrata fa 25, che gionto col numero, ch'è 100, fa 125, il suo lato è R.q.125, che cavato 5, metà delli Tanti, fa R.q.125 — 5 e questa è una parte; l'altra sarà lo restante sino in 10, cioè 15 — R.q.125 e questa quantità così divisa è chiamata quantità divisa secondo la proportione che ha il mezzo e dui estremi, e non è quantità nè linea così divisa che habbia più dignità nè che di essa si possa più servire (come ben dimostra Euclide nel 13, 14, e 15 libro de gli elementi) e sono tre quantità in continua proportione, che la prima è 15 — R.q. 125, la seconda R.q. 125 — 5 e la terza 10 e volendole trovare senza la positione si terrà la infrascritta regola.

Se una quantità si haverà da dividere secondo la proportione che habbia il mezzo e dui estremi, cioè in due parti tali che il quadrato dell'una sia eguale al produtto dell'altra parte in essa quantità, quadrisi essa quantità ed al produtto si gionghi il quarto di esso quadrato e della somma si pigli il lato e se ne cavi la metà della quantità proposta e lo restante sarà la parte maggiore.

Dividasi $10 + 2\overset{1}{\smile}$ secondo la proportione che habbia il mezzo e due estremi.

Quadrisi esso $10 + 2\overset{1}{\smile}$, fa $100 + 40\overset{1}{\smile} + 4\overset{2}{\smile}$, che giontoli il quarto, ch'è $25 + 10\overset{1}{\smile} + 1\overset{2}{\smile}$, fa $125 + 50\overset{1}{\smile} + 5\overset{2}{\smile}$, che il suo lato è R.q. 125 + R.q.5$\overset{1}{\smile}$, che cavatone $5 + 1\overset{1}{\smile}$, metà della quantità proposta, resta R.q. 125 — 5 + R.q. 5$\overset{1}{\smile}$ — $1\overset{1}{\smile}$ e questa è una parte; l'altra sarà lo restante, cioè 15 — R.q.125 + $3\overset{1}{\smile}$ — R.q.5$\overset{1}{\smile}$.

$15-\sqrt{125}$ e questa quantità così divisa è chiamata divisa secondo la proporzione che ha il medio e due estremi, e non c'è quantità o lunghezza che così divisa abbia più valore, né che si possa usare più spesso (come ben dimostra Euclide nei libri 13, 14 e 15 degli Elementi). Sono tre quantità in proporzione continua, la prima è $15-\sqrt{125}$, la seconda $\sqrt{125}-5$ e la terza 10 e volendole trovare senza l'ordine si segua la seguente regola.

Se una quantità si dovrà dividere secondo la proporzione che abbia un medio e due estremi, cioè in due parti tali che il quadrato dell'una sia uguale al prodotto dell'altra con la quantità data, si quadri questa quantità ed al prodotto si aggiunga il quarto dello stesso quadrato e della somma si trovi il lato e se ne tolga la metà della quantità proposta ed il restante sarà la parte maggiore.

Si divida $10+2x^1$ secondo la proporzione che abbia un medio e due estremi.

Si quadri $10+2x^1$, fa $100+40x^1+4x^2$, che sommato il quarto, che è $25+10x^1+1x^2$, fa $125+50x^1+5x^2$, che il suo lato è

$\sqrt{125}+\sqrt{5x^1}$, che sottrattogli $5+x^1$, metà della quantità proposta, resta

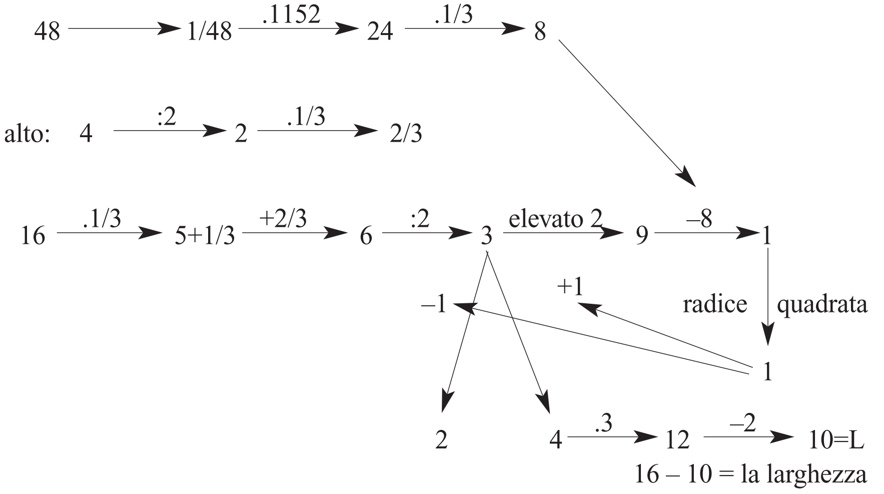
$\sqrt{125}-5+\sqrt{5x^1}-1x^1$ e questa è una parte; l'altra sarà il restante, cioè

$15-\sqrt{125}+3x^1-\sqrt{5x^1}$.

Alcune osservazioni degli allievi

Problema 1
(1A: Bilijana, Gessica, Isabel)

[L'organizzazione spaziale dei dati è mia poiché la loro occupava un intero foglio A4, ma i risultati e le frecce sono loro]



Questo schema non è preciso (mancano alcune frecce), ma il testo della soluzione è completamente privo di qualsiasi indicazione di legame tra i vari passaggi. Per giungere a questo schema, è stato prodotto uno sforzo non indifferente di analisi e successivamente di sintesi e di schematizzazione.

(1A: Gregory, Taryn, Larissa)

Oltre ad una lista delle varie operazioni numeriche con una sola freccia per indicare un risultato ripreso hanno fatto lo stesso lavoro con le lettere ottenendo i vari risultati parziali seguenti:

$$\frac{V}{h} \qquad \frac{1}{3}.\frac{V}{h}=\frac{V}{3h} \qquad \frac{T}{2} \qquad \frac{1}{3}.\frac{T}{2}=\frac{T}{6} \qquad (W+L).\frac{1}{3}=\frac{W+L}{3}$$

$$\frac{W+L}{3}+\frac{T}{6}=\frac{2W+2L+T}{6} \qquad \left(\frac{2W+2L+T}{6}\right):2$$

$$\frac{2W+2L+T}{12}-\frac{V}{3h}=\frac{2Wh+2Lh+Th-4V}{12h} \qquad \sqrt{\frac{2Wh+2Lh+Th-4V}{12h}}+\frac{2W+2L+T}{6}:2$$

$$@=\frac{2W+2L+T}{6}:2-\sqrt{\frac{2Wh+2Lh+Th-4V}{12h}}$$

E infine giungono alla formula finale:

$$\left[\left(\frac{2W+2L+T}{6}:2+\sqrt{\frac{2Wh+2Lh+Th-4V}{12h}}\right).3\right]-@=L$$

(1B: Fabienne, Luca, Karin)

Hanno presentato direttamente una formula finale un po' imprecisa perché manca un «–» dopo il «·3», e perché la seconda radice dovrebbe essere prolungata fino alla fine dell'espressione, ma che permette di fare un'osservazione interessante (vedi terza parte) che la forma di prima non ha permesso.

Formula per la lunghezza:

$$\left[\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{3}w+\frac{1}{3}l+\frac{t}{6}}{2}\right)^2}-\frac{V}{3h}+\frac{\frac{1}{3}w+\frac{1}{3}l+\frac{t}{6}}{2}\right].3\quad\frac{\frac{1}{3}w+\frac{1}{3}l+\frac{t}{6}}{2}-\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{3}w+\frac{1}{3}l+\frac{t}{6}}{2}\right)^2}-\frac{V}{3h}$$

Problema 2

(1A; Aleks, David, Mauro – lavori molto simili sono stati svolti anche da 1A: Patrick, Stefano, Daniele, Ariele e da 1B: Lorenza, Carlotta, Chiara)

Siano x e y i due numeri.

$$\begin{matrix}\text{nostro} \\ \text{metodo}\end{matrix}\begin{cases} x+y=20 \\ x^3+y^3=2240 \end{cases}$$

$x-y=2k$
$x=10+k$
$y=10-k$
$x^3=(10+k)^3 \Rightarrow x^3=1000+k^3+3\cdot10^2k+3\cdot10k^2$
$y^3=(10-k)^3 \Rightarrow y^3=1000-k^3-3\cdot10^2k+3\cdot10k^2$

$x^3 + y^3 = 2000 + 60\,k^2$
$2000 + 60\,k^2 = 2240$
$60\,k^2 = 240$

$k^2 = \frac{240}{60}$

$k^2 = 4$
$k = 2$
$x = 10 + 2 = 12$
$y = 10 - 2 = 8$

Oltre all'ottimo risultato di questi tre gruppi, il quarto **(1B: Genny, Marina, Alessandra)** ha ricostruito il triangolo «di Tartaglia» (disegnandone le prime tre righe), che ha poi usato per gli sviluppi dei cubi dei binomi.

Problema 3
(1B: Marco L., Cem, Pascal – un lavoro molto simile è stato presentato da 1B: Marco B., Cristoforo, Manuele)
Sia x uno dei numeri; l'altro 10 – x

$x^2 = (10 - x) \cdot 10$

$x^2 = 100 - 10\,x$

$10\,x + x^2 = 100$

$-\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 100 = 125$

$\sqrt{125} - 5 = x$

$10 - x = \sqrt{125} - 5$

$-x = \sqrt{125} - 5 - 10 \quad | \cdot (-1)$

$x = -\sqrt{125} + 5 + 10$

$x = -\sqrt{125} + 15$

(1A: Deborah, Aaron, Simone)

1°	passaggio: porre le incognite:	x
		10 – x
2°	passaggio: scrivere equazione	$x^2 = (10 - x) \cdot 10$
3°	passaggio: risolvere equazione	$x^2 = 100 - 10\,x$
		$x^2 + 10\,x = 100$
		$x = (-5)^2 + 100$

4° passaggio: come trovare la x

$$x = \sqrt{(-5)^2 + 100} - 5$$

$$x = \sqrt{125} - 5$$

$$x = 15 - \sqrt{125}$$

Poi hanno svolto la stesso esercizio usando le lettere:

1° passaggio: cambiare numeri con lettere 100=a
10=b

2° passaggio: scrivere equazione

$$x^2 = a - b\,x$$

$$x^2 + b\,x = a$$

$$x^2 = \left(-\frac{b}{2}\right)^2 + a$$

3° passaggio: come trovare la x

$$x = \sqrt{\left(-\frac{b}{2}\right)^2 + a}$$

$$x = \left(b + \frac{b}{2}\right) - \sqrt{\left(-\frac{b}{2}\right)^2 + a}$$

(1A- Rachele, Nora, Paola)
Sia x il numero e sarà 10 – x il secondo.

$$x^2 = 100 - 10\,x$$

$$x^2 + 10\,x = 100$$

1) $x = (-5)^2 + 100$

$x = 125$

$x = \sqrt{125} - 5$

2) $10 - x = 10\,(\sqrt{125} - 5)$

$10 - x = 15 - \sqrt{125}$

Regola (formula):
sia x il primo numero e sarà a – x il secondo.

$$x^2 = b - a\,x$$

$$x^2 + a\,x = b$$

1) $x = \left(\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + b} - \frac{a}{2}\right)$

2) $a - x = a - \left(\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + b} - \frac{a}{2}\right)$

$a - x = a - \frac{a}{2} - \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + b}$

Questa fase è durata due ore di preparazione ed un'ora di presentazione

(7-8 minuti a gruppo), e nonostante abbia dovuto dare una mano qua e là a compiere certi passaggi (soprattutto nel secondo problema e a rendere coscienti gli allievi della necessità di sviluppare i cubi dei binomi) tutti hanno lavorato molto bene (tranne forse un gruppo) ed i risultati si vedono.

Terza parte: conclusioni

Questa fase è improntata al confronto fra i vari problemi, sia dal lato linguistico sia da quello matematico e sono scaturite molte informazioni interessanti quali:

– **riferiti al primo problema**
- Il linguaggio è essenziale, conciso
- Le parole si ripetono spesso
- Le spiegazioni non ci sono
- L'equazione è stata risolta senza mai indicare che esista un'incognita
- Il metodo di risoluzione è basato su una serie di calcoli difficili da seguire
- Tra i calcoli svolti ve ne erano di troppi (il moltiplicare per un terzo e poi per tre)

– **riferiti al secondo problema**
- Il testo è molto ripetitivo
- Il linguaggio (totalmente testuale) è incomprensibile
- Le spiegazioni sono chiare
- L'equazione è stata risolta tramite un'ulteriore incognita

– **riferiti al terzo problema**
- Il testo è chiaro
- Nel testo figurano alcuni simboli (sebbene i vari simboli del Bombelli non siano stati identificati con i nostri)
- Le spiegazioni sono chiare
- L'equazione è risolta tramite una formula non precisata

Dopo questa attività abbiamo studiato la formula risolutiva che usiamo attualmente e abbiamo notato, rispetto ai testi storici, le similitudini (la radice quadrata di una differenza, la divisione per due, etc.) ed anche le differenze, in particolare l'esistenza di due soluzioni nel caso generale, mentre in nessuno dei tre problemi si citava l'esistenza di più soluzioni (sebbene negli ultimi due i numeri richiesti erano due, ragione per cui bastava invertirli per ottenere una soluzione matematicamnete diversa).

Commento

L'esperienza vissuta è stata molto istruttiva ed arricchente sia per i ragazzi sia per me. Loro hanno gettato uno sguardo nella storia della matematica, mentre io ho scoperto alcune loro difficoltà che proprio non mi aspettavo, in particolare riguardo all'interpretazione dei testi.

Proprio per questa ragione consiglio a tutti i docenti di matematica di provare un'esperienza simile, con uno sguardo sul passato della nostra scienza, su un tema a loro piacimento.

Avverto comunque che se dovessi rifarlo sceglierei un problema diverso per il periodo greco, in modo che la difficoltà del testo sia ridotta, magari soltanto in lunghezza. Questo problema era stato scelto per la discussione sull'esistenza di soluzioni, che poi però ho dovuto saltare per le citate difficoltà che non avevo previsto, mentre il terzo è stato scelto per mostrare l'inizio di una matematica fatta di simboli e per la presenza delle sezione aurea, che avevamo già visto sotto forma di frazione continua in un'ora di laboratorio.

Per il primo invece la scelta è stata dettata dalla mia volontà di utilizzare un problema mesopotamico (i primi che hanno risolto le equazioni di secondo grado) e per l'esistenza di un problema reale pervenutoci quasi completamente (senza troppi buchi).

Bibliografia

Rafael Bombelli
L'algebra, Feltrinelli, 1966.
Carl B. Boyer
Storia della matematica, ISEDI.
Bruno D'Amore e Francesco Speranza
Lo sviluppo storico della matematica, Armando Editore, 1989.
Diophante
Les arithmétiques (livres V-VI-VII), Les belles lettres, 1984.
Paolo Hägler
L'algebra di Raffaele Bombelli cittadino bolognese, lavoro di semestre EPFL, 1998.
Morris Kline
Storia del pensiero matematico, volume I, Einaudi, 1972.
Eleanor Robson
Mesopotamian mathematics 2100-1600 BC, Clarendon Press, 1999.
Jacques Sesiano
Notes du cours Histoire des mathématiques I année 1995/96.

VII. Segnalazioni

1. Recensioni

Gianfranco Arrigo, Giorgio T. Bagni

Martha Isabel Fandiño Pinilla – Le frazioni. Aspetti concettuali e didattici – Pitagora Editrice, Bologna, 2005, ISBN 88-371-1540-7, pag. 228, 12 €

I numeri razionali, le frazioni: certamente tali denominazioni evocano uno dei più importanti argomenti dei curricola matematici di ogni livello scolastico, a partire dalla scuola primaria. Una profonda riflessione critica su questo capitolo fondamentale è dunque un avvenimento editoriale importante nell'àmbito della didattica della matematica. L'autrice del volume che presentiamo, Martha Isabel Fandiño Pinilla, è colombiana di nascita e risiede a Bologna; ha maturato un'esperienza profonda e completa nel settore dell'educazione matematica: infatti, dopo la laurea in Matematica e la specializzazione presso l'Università distrettuale di Bogotà, ha insegnato nelle scuole primarie e secondarie prima di assumere la docenza universitaria di Didattica della Matematica. Opera attualmente come docente a contratto all'Università di Urbino e tiene corsi SSIS all'Università di Bologna e di Bolzano (sede di Bressanone); è inoltre docente presso l'Alta Scuola Pedagogica di Locarno (Canton Ticino, Svizzera). Ha già pubblicato numerosi e apprezzati libri ed articoli e propone oggi *Le frazioni. Aspetti concettuali e didattici*, con la prefazione di Athanasios Gagatsis (docente di Didattica della Matematica e vicepreside della *Scuola di Scienze sociali e dell'educazione*, Università di Nicosia, Cipro).

Il primo capitolo del volume che presentiamo è riservato all'introduzione, chiarissima e lucidamente strutturata, dei principali concetti matematici coinvolti, dai numeri naturali, ai numeri razionali assoluti, ai numeri interi.

Il successivo capitolo è interamente dedicato ad una chiara presentazione dello sviluppo storico: dunque le frazioni degli antichi egizi si affiancano alle esperienze orientali cinesi e indiane; si sottolinea così l'assoluta importanza di considerare la collocazione geografica delle grandi tradizioni matematiche che sono fiorite, nei secoli, all'interno delle diverse civiltà.

Certamente questa prima parte dell'opera viene ad essere fondamentale, indispensabile per definire con la necessaria chiarezza culturale il vasto contesto scientifico, storico e geografico dell'argomento trattato: ma è dal terzo capitolo, dunque per i due terzi del libro, che Martha Isabel Fandiño Pinilla raccoglie una sfida forte ed entusiasmante: invertendo completamente la procedura tradizionale, l'Autrice sceglie di studiare le frazioni alla luce della didattica. La centralità del processo di insegnamento-apprendimento è costante: le frazioni oggetto di sapere scolastico con riferimento al triangolo della didattica e alla trasposizione (capitolo 3), quadro teorico delle ricerche didattiche sulle frazioni (capitolo 4, con una ricca riflessione dedicata alla storia della didattica), vari modi di intendere il concetto di frazione (capitolo 5), noetica e semiotica delle frazioni (capitolo 6), difficoltà nell'apprendimento delle frazioni e conseguenze didattiche (capitolo 7) ed infine alcune preziose osservazioni sulla didattica delle frazioni in aula (capitolo 8). La bibliografia riporta i titoli di 266 opere.

La trattazione di contenuti matematici e l'approccio didattico scientificamente sempre rigoroso si fondono inscindibilmente in tutta l'opera. Il quinto capitolo fornisce un ottimo esempio della ricchezza del concetto di frazione, varietà che l'Autrice ha saputo cogliere e integralmente riproporre attraverso una sensibilità, al contempo matematica e pedagogica, davvero brillante: la frazione come quoziente, rapporto, operatore; la frazione in probabilità e nei punteggi; la frazione come numero razionale, come punto di una retta orientata, come misura; la frazione come indicazione di quantità di scelta in un tutto, la frazione e la percentuale, la frazione nel linguaggio quotidiano; per concludere con la concettualizzazione della frazione con riferimento alla teoria di Vergnaud e rispetto all'impostazione segno-oggetto di Duval.

Il volume di Martha Isabel Fandiño Pinilla si distingue chiaramente per rigore e profondità: costituirà certamente un efficacissimo e versatile strumento di lavoro per l'insegnante, una fonte di stimolo per il matematico e una preziosa occasione di riflessione per ogni studioso di didattica della matematica. (G.T.B.)

Michele Impedovo – Matematica generale con il calcolatore – Springer Verlag Italia, Bologna, 2005, ISBN 88-470-0258-3, pag. 527, 35,95 €

Si tratta di un testo di matematica molto interessante per studenti delle superiori e delle nostre scuole universitarie professionali. Ma non è il solito testo per i licei, teorico, rigoroso (per quanto abbia ancora senso questo aggettivo inflazionato), votato soprattutto alla cura degli aspetti sintattici. Come è chiaramente espresso nell'introduzione dell'autore, l'opera privilegia il lato semantico degli oggetti matematici, la «sostanza», come la chiama chi è solito «sporcarsi le mani» con la matematica. Inoltre – e questo è annunciato già nel titolo – la materia proposta da Impedovo è elaborata con l'ausilio del calcolatore. Questo modo di fare, nonostante l'enorme sviluppo dell'informatica, non è così scontato nelle nostre scuole. Purtroppo sono ancora troppi gli studenti che concludono i propri studi superiori senza avere avuto la possibilità di usare il computer per imparare la matematica! Non lo saranno certamente i fortunati che potranno usare questo testo. Qui si parla di matematica, certamente, e anche bene, ma il ricorso alla ricchezza e alle preziose potenzialità della macchina è sempre presente.

C'è un altro aspetto che ci piace particolarmente: la metodologia dell'approccio al sapere matematico, di netto stampo sperimentale e induttivo, unito alla costante preoccupazione di offrire contenuti matematici stimolanti e avvincenti per tutti gli studenti, appassionanti per quelli che sono in grado e che meritano di scoprire il piacere di fare matematica.

Il software al quale si fa ricorso è Mathcad, efficiente strumento di calcolo numerico e simbolico e ottimo linguaggio di programmazione. Ma, quando ne vale la pena, si ricorre al più modesto – ma didatticamente squisito – foglio elettronico.

I contenuti teorici proposti si articolano su:

- approssimazioni: indispensabili per la formulazione di congetture sensate;
- algoritmi: motori di sviluppo della costruzione matematica;
- simulazioni: essenziali se si punta alla costruzione dell'apprendimento matematico da parte dello studente.

Invitiamo gli insegnanti delle nostre scuole superiori e universitarie professionali a esaminare con attenzione il ricco contenuto di questo testo. Nelle numerose pagine potranno trovare molte risposte concrete agli interrogativi che da tempo sono senza risposte concrete, primo fra tutti quello a sapere come dovrebbe cambiare un corso di matematica, se gli studenti hanno la possibilità concreta di usare il computer. (G.A.)

John D. Barrow – Da zero a infinito, la grande storia del nulla – (ed. italiana) Mondadori, Milano, 2001, ISBN 88-04-48961-8, pag. 367, 18,20 €

Questo è un libro per cultori della matematica, per didatti attenti ai problemi filosofici che soggiacciono alla costruzione del sapere matematico, per filosofi che hanno un marcato interesse per la filosofia della scienza. Il titolo annuncia già molto apertamente quali sono i problemi fondamentali presi in considerazione nelle impegnative pagine di questo volume. Da una parte lo zero, il nulla e il vuoto (anche fisico), dall'altra l'infinito, l'universo, l'illimitato.

Il discorso si intreccia fra spunti storici, riflessioni epistemologiche e contributi filosofici, con il coinvolgimento, qua e là, di aspetti teologici.

Sull'arco di diversi millenni si avverte la diversa accentuazione dell'ottica della riflessione su questi concetti complessi e interdisciplinari. All'inizio prevalgono gli aspetti filosofici e teologici, poi a poco a poco si fa strada la matematizzazione che raggiunge il culmine, diciamo, con i lavori dei matematici tedeschi del XIX secolo; infine, a partire dal XX secolo, sembra imporsi la teoria fisica. Ma tutto ciò si potrà riesaminare leggendo, e rileggendo qua e là, le sostanziose pagine di questo volume. (G.A.)

Marcello Frixione, Dario Palladino – Funzioni, macchine, algoritmi. Introduzione alla teoria della computabilità – Carocci editore, Roma, 2004, ISBN 88-430-3002-7 pag. 432, 33,90 €

Argomento centrale di questo testo è la teoria della computabilità, cioè lo studio del calcolo algoritmico, ossia del calcolo eseguibile in modo meccanico. La teoria è nata attorno al 1930, grazie ai contributi dei vari Alan Turing, Kurt Gödel, Alonso Church, Stephen Kleene. Con lo sviluppo dei computer negli ultimi decenni del secolo XX, la teoria della computabilità ha assunto il ruolo di disciplina dei fondamenti per l'informatica teorica. Oggi i risultati della teoria della computabilità si trovano al centro di alcuni dei crocevia più vitali e stimolanti della cultura filosofica e scientifica contemporanea.

Lo scopo dichiarato di questo volume è rendere accessibili con un adeguato livello di approfondimento i principali risultati della teoria della computabilità ad un pubblico che non disponga necessariamente di preparazione e di strumenti matematici e logici. La lettura è quindi caldamente consigliata a coloro che, pur non disponendo di una formazione specialistica di tipo logico-matematico o di informatica teorica, hanno la necessità di una migliore comprensione dei temi e dei risultati della teoria della computabilità. Rientrano in questa categoria studenti e studiosi di filosofia della scienza, della mente e del linguaggio, di psicologia e, più in generale, di scienze cognitive, insegnanti delle scuole superiori, linguisti, economisti e così via.

Per quel che concerne la struttura, il libro può essere idealmente suddiviso in due parti: una prima parte generale (capitoli dal primo al sesto) e una serie di capitoli di approfondimento su settori di applicazione specifici (logica e filosofia della matematica, informatica, scienze cognitive, linguistica, complessità computazionale). (G.A.)

2. Secondo convegno La Matematica e la sua Didattica Per insegnanti della scuola dell'infanzia, primaria e secondaria di primo grado

Istituto Comprensivo di Corinaldo, in rete con I.C. Ostra, I.C. Ripe,
I.C. «Federico II» Jesi, I.C. Senigallia Sud, I.C. Jesicentro,
in collaborazione
con il Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica
del Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna

Sabato 29 aprile 2006, Corinaldo (AN)

Programma

Tutti gli ordini scolastici - Sala «S.M. Goretti»

8.45-9.00 Saluto delle Autorità
9.00-9.15 Apertura dei lavori (Dirigente Scolastico)
9.15-9.30 La rete di scuole di Corinaldo *Facciamo il punto sui lavori del gruppo*
9.30-10.00 Bruno D'Amore: relazione introduttiva:
Dalla pratica in aula alla didattica della matematica
10.00-10.45 Silvia Sbaragli *L'armonizzazione degli aspetti concettuali e figurali*
11.15-12.30 **Divisione in gruppi**
Scuola dell'Infanzia - Sala Epicentro
Laura Prosdocimi: *Passeggiando tra la matematica e le fiabe*
Scuola Primaria - Sala «S. M. Goretti»
Ines Marazzani: *Parole e immagini nella matematica*
Scuola Secondaria di primo grado - Sala Grande del Comune
Fabrizio Monari: *Segni e significati in aritmetica e in algebra*

15.00-16.30 **Divisione in gruppi**
Scuola dell'Infanzia - Sala Epicentro
Ines Marazzani: *Le competenze numeriche nei bambini in età prescolare*
Scuola Primaria - Sala «S. M. Goretti»
Laura Prosdocimi: *Incontri inattesi con la matematica*
Scuola Secondaria di primo grado - Sala Grande del Comune
Gianfranco Arrigo: *Educare al pensiero probabilistico*

Tutti gli ordini scolastici - Sala «S. M. Goretti»

17.00-17.45 Martha Isabel Fandiño Pinilla: *Matematica ed etnomatematica: un punto di vista storico per una visione etica*

17.45-18.30 Bruno D'Amore: Relazione conclusiva: *Didattica della matematica ieri, oggi e domani*

Informazioni e pre-iscrizioni

Tel. 07167005 (Prof.ssa Stefania Puerini)
Fax 071 7978035
Possibilità di trascorrere il fine settimana a Corinaldo. Area per camper.

3. Matematica: è la più odiata dagli italiani! Come farla amare? Con le nuove tecnologie?

3° Incontro e aggiornamento organizzato da ADT
(Associazione per la Didattica con le Tecnologie)
e Mathesis in collaborazione con l'Istituto d'Istruzione Superiore
«Isa Conti Eller Vainicher», Lipari (ME)
21-22-23 aprile 2006, Hotel La Filadelfia, Lipari (ME)

Programma

21 aprile 14.30: iscrizioni e apertura dei lavori. Relazioni fino alle ore 19.00.
22 aprile relazioni dalle 9.00 alle 13.00 e dalle 15.00 alle 19.00.
23 aprile relazioni dalle 9.00 alle 13.00 e chiusura dei lavori.

Alberghi

Hotel La Filadelfia
www.lafiladelfia.it, info@lafiladelfia.it – Tel. 0909812795
Pensione in doppia: mezza € 45, completa € 60 (in singola: € 60 e 75).
Un pasto: € 15.
Hotel Gattopardo
www.gattopardoparkhotel.it – Tel. 0909811035.
I partecipanti sono invitati a provvedere personalmente
alla prenotazione alberghiera.

Relazioni

Chi desidera tenere una relazione di 20 o di 30 minuti è invitato a scrivere al
Prof. Mauro Cerasoli: mceraso@tin.it, tel. 3471562833, oppure al
Prof. Andrea Laforgia: laforgia@mat.uniroma3.it
specificando la durata, il titolo e allegando un sunto di almeno una pagina, entro il **15 marzo 2006**. È prevista la pubblicazione degli atti dei lavori del convegno. A tutti i partecipanti è richiesto un contributo alle spese di organizzazione di €30 (€20 per i soci ADT e Mathesis).

Informazioni

Per informazioni su come raggiungere Lipari: iisconti.lipari@tiscali.it
oppure
prof.ssa *Cinzia Catanzaro*: cinziadome@tiscali.it, tel. 3475212608.

Progetto grafico
Bruno Monguzzi
Prestampa
Taiana
Stampa
Veladini

Redazione
Laboratorio di didattica della matematica
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera

Telefono
091 814 34 28/57/58
Fax
091 814 44 92
a.bdm@ticino.com

Amministrazione
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera
Fax
091 814 44 92

Esce due volte all'anno
a maggio e a dicembre

Abbonamento annuo
Sfr. 30.–
€ 16

Bollettino dei docenti di matematica
51

In questo numero: le tre relazioni degli interventi scientifici relativi al pomeriggio di studio del 21 settembre di A. Delessert, B. D'Amore e S.D. Chatterji; contributi di varia natura di A. Quarteroni, G. Domenighetti, C. Malaguerra e M. Rigamonti; riflessioni didattiche di G. Arrigo, di G. Mainini e di studenti dell'ASP; un saggio di matematica di F. Cavalli e la presentazione di un'attività didattica di P. Hägler; il quiz di A. Frapolli; recensioni di G. Arrigo e G.T. Bagni; segnalazioni di convegni.

ISBN 88-86486-67-7
Fr. 18.–

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport