A cura
del Laboratorio di didattica della matematica

Bollettino dei docenti di matematica

52

Maggio
2006

Ufficio
dell'insegnamento medio
Centro
didattico cantonale

Bollettino
dei docenti di matematica
52

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport

ISBN 88-86486-52-9

Bollettino dei docenti di matematica 52

Maggio
2006

Ufficio dell'insegnamento medio
Centro didattico cantonale

Indice

Prefazione

Sempre attenti alla ricerca di un equilibrio che possa tenere conto dei gusti molto variati dei nostri lettori, in questo numero offriamo parecchi contributi ticinesi. Lo consideriamo un segnale importante perché indica che la didattica della matematica sta piano piano interessando i nostri insegnanti. Ed è anche una dimostrazione che le giovani leve stanno ricevendo una formazione che dà i suoi primi frutti e che sono in grado di affiancare le firme più quotate.

Apre il numero Bruno Jannamorelli, noto specialista in strumenti di calcolo, che ci presenta il Prontuarium di Nepero.

Il secondo articolo è di Angel Balderas Puga, il nostro amico messicano specialista nell'integrazione dell'informatica nell'insegnamento, tema sempre attuale e di non facile approccio.

Segue poi la presentazione di Gianfranco Arrigo del nuovo testo per le prime medie «Atolli matematici 1», che sarà già disponibile a partire da settembre. L'articolo propone anche un'ampia riflessione didattica allo scopo di chiarire ancora le peculiarità e il quadro teorico dell'intera serie di manuali scolastici.

La sezione didattica è gestita da due giovani insegnanti, che hanno appena concluso la formazione all'ASP di Locarno. Rocco Legato, docente di scuola media, offre una sintesi del suo ottimo lavoro di diploma sulla dimostrazione matematica come strumento per apprendere. Lo accompagna la maestra della scuola dell'infanzia Vania Lehner con un articolo… a dir poco coraggioso: un'indagine sulle immagini mentali che i bambini dai 4 ai 5 anni mostrano di avere sull'infinito inteso in senso lato.

Per i fini palati matematici offriamo un articoletto di Giuseppe Pirillo, l'amico toscano di Prato, sulla frazione continua del numero aureo, seguito da un sostanzioso contributo su un problema apparentemente semplice, ma dai risvolti imprevedibili, problema studiato con grande perizia dalla coppia Paolo Hägler-Giorgio Mainini. Come dire: freschezza ed esperienza nella risoluzione di problemi.

Giorgio Mainini inaugura una nuova sezione del Bollettino, dal maininiano titolo «P-bam». Che cosa vuole essere? Una rassegna aperta di problemi dall'enunciazione elementare che, se affrontati con spirito critico, possono esplodere in direzioni assai diverse e assumere aspetti complessi. Ogni lettore potrà inviare un suo P-bam, a condizione che alleghi anche almeno una traccia di risoluzione.

Torna la rubrica «Dalla bricolla» dedicata agli insegnanti in attività, sempre alla ricerca di nuovi spunti didattici, e questa volta anche agli sportivi con un'interessante sequenza di esercizi applicati al gioco del baseball proposta dal giovane docente Luca Bellini.

Non può mancare il solito quiz di Aldo Frapolli, questa volta concepito nel bel mezzo di un (meritato) congedo di anzianità.

Infine si invitano i colleghi a prendere conoscenza del «Convegno del ventennale» di Castel San Pietro Terme (Bo), un avvenimento assolutamente da non perdere, come pure a dare un'occhiata a due recensioni di particolare interesse.

I. Varia

1. Il *Prontuarium* di Nepero

Bruno Jannamorelli[1]

The writer of this article, an expert of ancient computation tools, describes the Prontuarium by John Napier. The author himself has recreated this calculating device, made of wood. Its working principle is based on the multiplication method "per gelosia", as it was called by Luca Pacioli in his *Summa de Arithmetica* in 1494. At that time, such a method was already known and used in India, from where people handed it down to the Arabs, who called it either "dyadwall" (cells method) or "chabagah" (grid method).

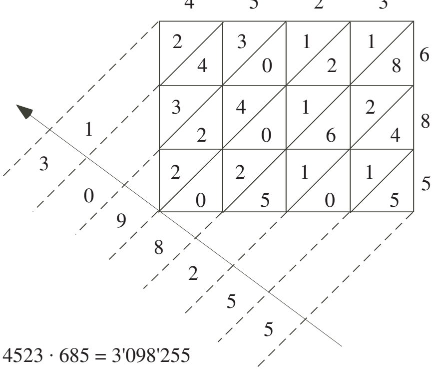
Eseguire dei calcoli è operazione difficile e lenta e, spesso, la noia che ne deriva allontana molti dalla matematica.
Ho cercato sempre, con tutta la forza e il talento che avevo a disposizione, di rendere più spedito questo processo.
(John Napier)

Premessa

Il nome Prontuarium dato da Nepero allo strumento di calcolo che qui descriviamo è poco accattivante. Fa pensare ad una serie di tabelle utili per eseguire calcoli aritmetici e invece è la materializzazione di un antico algoritmo della moltiplicazione: è uno schema usato in India e trasmesso agli arabi, i quali lo chiamarono «a caselle» (dyadwall) o «a reticolo» (chabagah). In Italia, alla fine del 1400, questo metodo era detto «a gelosia» e la motivazione dello strano appellativo si trova nella Summa de Arithmetica (1494) di Luca Pacioli: «*Gelosia intendiamo quelle graticelle che si costumano mettere alle finestre de le case dove habitano done; acio che non si possino facilmente vedere…*».

Si tratta di uno schema molto semplice: il moltiplicando e il moltiplicatore si scrivono ai lati di un rettangolo suddiviso in caselle quadrate. Ogni casella viene divisa in due da una diagonale e riempita con i prodotti parziali, come in fig.1. Infine si somma in diagonale, da destra a sinistra, ottenendo così il prodotto richiesto.

Figura 1



4523 · 685 = 3'098'255

1. Liceo Scientifico «E. Fermi», Sulmona (AQ).

È da notare che utilizzando la configurazione della figura 1 c'è anche lo spazio per scrivere i riporti e questo accorgimento fa diminuire la probabilità di errore.

A parte il fastidio di disegnare il reticolo, questo schema oltre che sicuro è anche rapido e per tale motivo la moltiplicazione così eseguita veniva chiamata *«fulminea»*.

I bastoncini di Nepero

Sono una o più serie di asticciole di legno a sezione quadrata con le facce laterali divise in dieci quadrati nei quali, eccetto il primo, è tracciata la diagonale che va dal basso a sinistra in alto a destra. Nel primo quadratino in alto è stampata una delle cifre della base dieci, mentre negli altri quadratini di ogni asticciola sono riportati i multipli del numero che sta in testa: le decine al di sopra della diagonale, le unità al di sotto di questa.

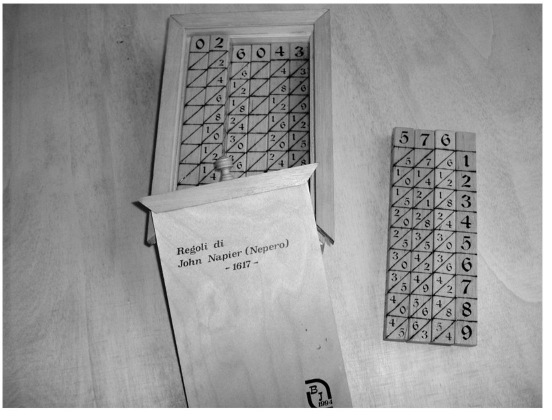


Figura 2 Foto dei Bastoncini di Nepero ricostruiti da B. Jannamorelli

L'uso dei bastoncini di Nepero diventa macchinoso quando si vogliono moltiplicare due numeri aventi ciascuno due o più cifre. Se solo uno dei due fattori è composto da due o più cifre consecutive (es. 345), con i bastoncini è facile calcolare il prodotto: basta sommare in diagonale i numeri che appaiono nelle caselle triangolari (vedi figura 3).

Esempio 1

$527 \cdot 345 =$

$= 5 \cdot 10^0 + (0+3+8) \cdot 10^1 + (5+1+8+2+1) \cdot 10^2 +$

$+ (2+0+6+2) \cdot 10^3 + (2+5) \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^5 = 181'815$

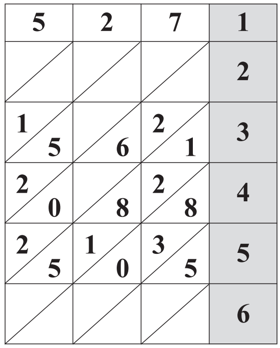
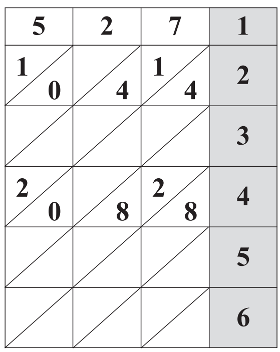


Figura 3 Rappresentazione dell'esempio 1

Se nessuno dei due fattori è composto da cifre consecutive, bisogna trovare sui bastoncini i prodotti parziali e poi sommarli.



$527 \cdot 2 = 1054$

$527 \cdot 4 = 2108$

Figura 4

Esempio 2

$527 \cdot 42 = 527 \cdot (40+2) = (527 \cdot 40) \cdot (527 \cdot 2) = 21080 + 1054 = 22'134$

Ovviare a questo inconveniente significa riuscire a materializzare con uno strumento di calcolo l'algoritmo della moltiplicazione «a reticolo».

Dall'algoritmo allo strumento di calcolo

Si tratta di realizzare tante strisce, una per ogni cifra, da disporre verticalmente e altrettante da disporre orizzontalmente. Nella casella quadrata, intersezione della striscia verticale con quella orizzontale, deve comparire il prodotto delle due cifre scritte in testa alle due strisce.

Ma la striscia verticale del 7, ad esempio, deve essere sovrapponibile con una striscia orizzontale che può andare da 0 a 9. Allora la striscia verticale del 7 deve essere divisa in dieci caselle quadrate e ciascuna di esse deve contenere tutti i multipli di 7.

Come si possono disporre tutti questi multipli? Come devono essere realizzate le strisce orizzontali?

Queste domande trovano risposta nel libro di Nepero *Rabdologie, seu numerationis per virgulas* (1617) dove il matematico scozzese descrive uno strumento di calcolo che chiama *«Prontuarium»*.

Come realizzare le strisce del *Prontuarium*

Devono essere realizzate con un materiale solido di colore bianco: Nepero suggeriva l'avorio…, ma legno, cartoncino o plastica vanno benissimo. Se si vogliono moltiplicare due numeri di dieci cifre ciascuno e le cifre possono essere anche tutte uguali, sono necessarie cento strisce verticali e altrettante orizzontali. Ci si può accontentare di moltiplicare numeri più piccoli e allora il numero di strisce scende considerevolmente.

Ciascuna striscia deve essere larga 3 cm e lunga 33 cm (le misure possono variare in proporzione e la lunghezza dipende dal numero di cifre dei fattori). Continuiamo a descrivere le strisce nel caso in cui i fattori abbiano ciascuno dieci cifre.

Su ogni striscia bisogna lasciare un margine superiore di 2 cm ed uno inferiore di 1 cm. I restanti 30 cm di lunghezza vanno divisi in dieci parti uguali in modo da avere dieci caselle quadrate 3x3.

Le strisce verticali vanno collocate con il margine di 2 cm in alto mentre quelle orizzontali, da sovrapporre alle prime, con lo stesso margine a destra. Nel margine di 2 cm vanno scritte le cifre da 0 a 9 (dieci strisce per ogni cifra).

Strisce verticali

Ogni casella quadrata 3x3 delle strisce verticali va divisa con la diagonale ascendente che deve essere marcata bene con una penna o un pennarello non cancellabile. Deve essere inoltre suddivisa con una matita in nove quadratini 1x1, ognuno con la diagonale ascendente sempre marcata a matita. È necessario disegnare su un foglio di carta una di queste caselle quadrate scrivendo nei triangolini le lettere riportate in figura 5.

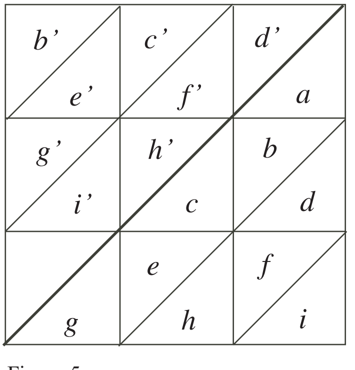


Figura 5

A questo punto si prende una striscia verticale che porta scritta una cifra ***a*** sul margine superiore (***a*** = 0,1,2,…,9).

- Nei dieci triangolini delle dieci caselle quadrate marcati con la lettera ***(a)*** nella figura 3, si scrive la cifra ***a*** della striscia presa in considerazione.
- Nei triangolini marcati con le lettere ***b'***, ***b*** vanno scritte rispettivamente la cifra delle decine e quella delle unità del doppio di ***a***. (Se la cifra delle decine è zero si può omettere di scrivere 0).
- Nei triangolini marcati con le lettere ***c'***, ***c*** si scrivono rispettivamente la cifra delle decine e quella delle unità del triplo di ***a***.
- Si continua così a scrivere le cifre del prodotto ***4a*** nei triangolini marcati ***d'***, ***d***; le cifre del prodotto ***5a*** nei triangolini marcati ***e'***, ***e***; le cifre del prodotto ***6a*** nei triangolini marcati ***f'***, ***f***; le cifre del prodotto ***7a*** nei triangolini marcati ***g'***, ***g***; le cifre del prodotto ***8a*** nei triangolini marcati ***h'***, ***h***; le cifre del prodotto ***9a*** nei triangolini marcati ***i'***, ***i***.

La striscia verticale del ***4*** si presenta come nella figura 6, se le caselle quadrate come quelle della figura 5 sono solo cinque e non dieci.

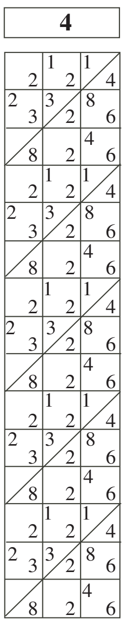


Figura 6

Non resta che cancellare tutte le linee tracciate a matita lasciando solo la diagonale di ogni casella 3 x 3 e i multipli. La stessa operazione va ripetuta per tutte le altre strisce verticali che si vogliono utilizzare.

Strisce orizzontali

Le strisce orizzontali devono essere sovrapposte a quelle verticali e servono a coprire tutti i multipli inutili, lasciando apparire da due fori solo le cifre del prodotto richiesto.

Per prepararle è necessario dividere ciascuna delle dieci caselle quadrate 3x3 con la diagonale discendente che deve essere marcata bene in maniera indelebile.

Deve essere inoltre suddivisa con una matita in nove quadratini 1x1, ognuno con la diagonale discendente, sempre marcata a matita. Per praticare i fori in ogni striscia al posto giusto, è bene disegnare su un foglio di carta la figura 5 ruotata di 90° a sinistra, come viene riportata nella figura 7.

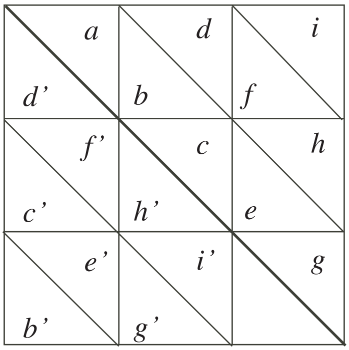


Figura 7

Nella striscia che porta lo zero scritto sul margine di 2 cm non bisogna praticare alcun foro. Nella striscia dell'uno bisogna forare i triangolini marcati con la lettere ***a***. Nella striscia del due si forano i triangolini marcati con le lettere ***b'***, ***b*** e così via fino alla striscia del nove dove si forano i triangolini marcati con le lettere ***i'***, ***i***.

Ecco come si presenta la striscia del ***6***, disposta orizzontalmente:

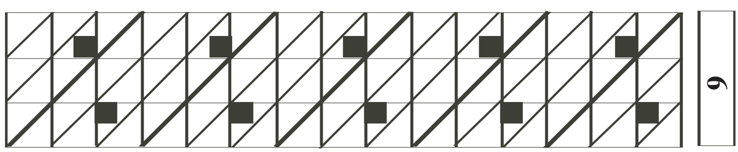


Figura 8

Ora si possono cancellare tutte le linee disegnate a matita e ripetere la stessa operazione per tutte le strisce che si vogliono utilizzare.

Come assemblare le strisce

Dopo aver realizzato tutte le strisce, Nepero suggerisce di costruire una scatola con due basi quadrate 33x33 (di legno o di metallo) separate da quattro colonnine. Uno dei due quadrati è il fondo e su questo si dispone uno strato di dieci strisce verticali del ***9***. Su queste si dispongono, ortogonalmente ad esse, le strisce orizzontali del ***9***. Si procede così a strati di strisce dell'***8*** del ***7*** fino alle strisce dello ***0*** e si poggia sulle quattro colonnine l'altro quadrato che fa da coperchio. Su due lati consecutivi di quest'ultimo quadrato si incollano due stecche, di altezza pari alla somma degli spessori di una striscia verticale e di una orizzontale, che servono da guide. Le colonnine possono essere marcate con le cifre da 0 a 9, come in fig. 9, per segnalare lo strato dove si trovano le strisce con una determinata cifra.

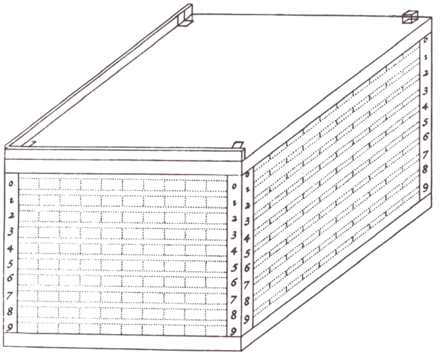


Figura 9

Uso del *Prontuarium*

Volendo moltiplicare due numeri, si considera il moltiplicando e si accostano a una delle due guide sul quadrato superiore del *Prontuarium* le strisce verticali corrispondenti alle cifre che formano il moltiplicando stesso.

A queste strisce si sovrappongono le strisce orizzontali che formano il moltiplicatore. Per calcolare il prodotto non resta che sommare i numeri che appaiono dai fori lungo le bande in diagonale. Nella foto è raffigurato il prodotto 934 x 314.

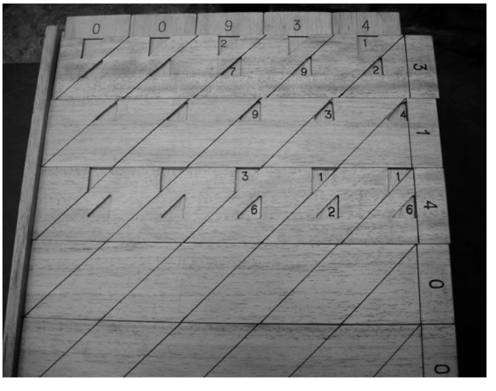


Figura 10 Foto del *Prontuarium* ricostruito da Bruno Jannamorelli

Bibliografia

[1] John Napier, *Rabdology*, tradotto da W.F.Richardson, The MIT press, Cambridge, Massachusetts, 1990.

[2] B. Jannamorelli, *Strumenti di calcolo aritmetico ingenui … ma ingegnosi*, Ed. Qualevita, Torre dei Nolfi (AQ), 1995.

[3] B. Jannamorelli, *Antichi strumenti rabdologici di calcolo aritmetico*, Didattica delle Scienze. N° 215 ott. 2001, Ed. La Scuola, Brescia.

2. Didattica delle scienze e informatica: la formazione del docente come fattore chiave

Angel Balderas Puga[1]

This work examines the use science teachers of high secondary school make of IT (informatics technology) in the didactics of mathematics. The first part of the paper shows a short outline of what leads to and supports the use of IT in the teaching-learning process. Whereas the second one deals with the matter relevant to a suitable teachers training, which is too often inadequate or totally lacking.

1. Introduzione

Le idee esposte in questo lavoro sono state concepite pensando a soggetti specifici: professori di scienze della scuola secondaria superiore (matematica, fisica, chimica, biologia) che usano o vogliono usare tecnologia informatica (TI[2]) nella loro pratica professionale. Sono state fatte diverse analisi di questo fenomeno che considerano ormai solamente la cornice della didattica specifica senza prendere in considerazione l'informatica generale e, viceversa, solo considerazioni generali senza entrare nel merito delle didattiche specifiche. Dal nostro punto di vista, per capire meglio certi aspetti del fenomeno è necessario fare appello a una cornice più ampia che prenda in considerazione l'uso dell'informatica a livello generale, l'uso da parte dei docenti nei diversi livelli scolastici e nelle diverse materie, come anche aspetti delle didattiche specifiche. È quello che tentiamo di fare qui. È importante segnalare che la specialità dell'Autore è la didattica della matematica, per cui la maggior parte delle considerazioni sono nate nell'ambito di quest'area. Ciò nonostante, crediamo che la maggior parte delle riflessioni possano adattarsi, senza troppi problemi, alla didattica di altre scienze. O, se si preferisce, useremo la didattica della matematica per esemplificare problematiche più generali relative alla didattica delle scienze nella scuola secondaria superiore quando si usano le TI.

2. La penetrazione dell'informatica nella vita corrente

La massificazione dell'informatica vissuta a partire dagli anni '90 del secolo scorso ha generato profondi cambiamenti nella vita politica, economica, sociale,

1. Facoltà di Ingegneria, Dipartimento di Didattica della Matematica, Università Autonoma di Querétaro, Messico, balderas@uaq.mx.
2. D'ora in poi useremo l'abbreviazione TI per riferirci alla tecnologia informatica. Si può considerare come sinonimo del più usato TIC (Tecnologie dell'Informazione e della Comunicazione), ma preferiamo usare il primo termine dato che lo riteniamo più adatto.

culturale, privata, ecc. delle persone e delle istituzioni di molte regioni del mondo. Niente è più come prima. Ramonet (2004), riferendosi ad Internet, mette in rilievo che l'accelerazione e l'affidabilità delle reti hanno cambiato la *forma di comunicare*, *studiare*, *informarsi*, *organizzare*, *coltivarsi* e *lavorare* per una parte importante degli abitanti del pianeta. Internet è solo una parte dell'informatica, per cui i cambiamenti, cui si riferisce Ramonet, sono molto più profondi e sono diventati un importante oggetto di attenzione come lo testimoniano i seguenti fatti.

Alla fine del 2003 si è tenuta la prima fase[3] della *Riunione Mondiale sulla Società dell'Informazione* (WSIS[4]) promossa dall'ONU, cui hanno partecipato più di 10.000 rappresentanti di 175 Paesi. Da questa riunione sono nati la *Dichiarazione di principi* «*Costruire la società dell'informazione: una sfida mondiale per il nuovo millennio*» (WSIS, 2003a) e un *Piano di azione* (WSIS, 2003b). Nel primo documento si afferma che «le TIC hanno ripercussioni immense in praticamente tutti gli aspetti della nostra vita» (WSIS, 2003a p. 2). Nel futuro immediato si prevede un'intensificazione del fenomeno, come lo evidenziano alcuni obiettivi del *Piano di Azione*: connettere villaggi con le TIC e creare punti di accesso per le comunità; connettere con le TIC scuole *primarie* e *secondarie*, *licei* e *università*, centri scientifici e di ricerca; biblioteche pubbliche, centri culturali e musei; adattare *tutti i programmi di studio* delle scuole primarie e secondarie all'esecuzione degli obiettivi della società dell'informazione, prendendo in considerazione le circostanze di ogni Paese.

Il progetto internazionale ALLS, *The Adult Literacy and Lifeskills Survey* tenta di misurare competenze in adulti, che diversi Paesi dell'OECD[5] considerano come *chiave* per il successo sociale ed economico. Oltre ai quattro domini tradizionali *alfabetizzazione testuale*, *alfabetizzazione documentale*, *alfabetizzazione matematica* e *ragionamento analitico* ora si aggiunge *l'alfabetizzazione informatica*, il che significa un riconoscimento che queste competenze sono una «importante risorsa che influenza la partecipazione economica e sociale delle persone così come il loro sviluppo umano» (ALLS, 2000 p. 1-2).

Da alcuni anni si tenta di stabilire *standard di competenze informatiche*. A riguardo, consideriamo il rapporto FITness, *Being Fluent with Information Technology*, (NAS, 1999) come il più riuscito e completo tentativo per chiarire le competenze informatiche necessarie nel presente e nel futuro. Queste competenze includono non solo quelle strettamente tecniche ma anche altre di livello culturale più elevato. Nel rapporto FITness si considerano tre dimensioni o tipi di conoscenza: competenze contemporanee, concetti fondamentali e capacità intellettuali. Altri tentativi per stabilire standard di competenze informatiche sono le patenti internazionali di «guida informatica» ICDL, *International Computer Driving Licence* ed ECDL, *European Computer Driving Licence* a cui hanno aderito datori di lavoro, *istituzioni educative* ed agenzie di governo di più di 125 Paesi. Dati del più recente studio del *National Center for Education Statistics* (NCES, 2003) indicano che già nel 2001, negli Stati Uniti, il 54% dei lavoratori aventi almeno 18 anni usavano in modo regolare i computer nei loro posti di lavoro.

---

3. La seconda fase si sta sviluppando quest'anno.
4. *World Summit on the Information Society*.
5. *Organisation for Economic Co-operation and Development*.

Di fronte a questo panorama, è necessario chiedersi se alcuni sistemi educativi possono continuare a sottrarsi a questa tendenza globale: noi crediamo di no. Frequentemente si accusano i sistemi educativi di essere estremamente conservatori, di isolarsi dal mondo «reale», di non prendere in considerazione quello che accade fuori dal mondo scolastico, per cui l'integrazione dell'informatica in questi sistemi educativi è una sfida alla quale si deve far fronte.

3. Scienza e informatica

Non tutti i settori della società hanno subìto nello stesso modo l'influenza dell'informatica. Kissane (1999) indica che negozi, banche, aziende e mercati sono stati influenzati dalle nuove tecnologie informatiche ma che l'influenza nella *matematica*, nella *scienza* e nell'*ingegneria* è stata particolarmente profonda, dato che ora il computer è una parte *necessaria* nei processi di design e manifattura e nei diversi tipi di lavoro scientifico e di ingegneria.

L'influenza nella scienza è così profonda che il precedente direttore della NSF, *National Science Foundation*, degli Stati Uniti, la microbiologa Rita Colwell (2000) ha affermato che l'informatica gioca un *ruolo unificatore* nella ricerca in diverse scienze, dato che consente di mettere in relazione diversi campi della conoscenza, che *nessun* campo della ricerca resterà immune dall'esplosione dell'informatica e che fino a poco tempo fa la scienza aveva due componenti, la teoria e la sperimentazione, ma che *ora ha un terzo componente* «la *simulazione informatica* che mette in rapporto gli altri due» (p. 16). Colwell sottolinea che molti successi scientifici saranno raggiunti solo nella misura in cui ci saranno progressi nell'informatica: «abbiamo bisogno di questo potere informatico per mettere tutto insieme: elaborare una grande quantità di dati, visualizzare risultati e collaborare con altre persone» (p. 17), frasi che testimoniano una nuova forma di lavorare nella scienza al giorno d'oggi.

Nel caso specifico, è stato detto che la matematica applicata è informatica e lo sarà sempre di più (Bricio, 1992), che nel mondo della matematica si investono milioni di dollari per promuovere nelle nuove generazioni di matematici un coinvolgimento nelle scienze informatiche e un uso esteso dei computer (Aragón, 1996) che gli strumenti informatici si sono rivelati molto importanti anche nel campo della ricerca in matematica «pura» (Gjone, 1999) e che i computer stanno trasformando il modo in cui i matematici *scoprono* e *comunicano* le loro idee (Horgan, 1993).

Lo studio del NCES (2003), cui abbiamo fatto riferimento nel punto precedente, indica che già nel 2001, negli Stati Uniti, l'85% delle persone in possesso di un master o di un dottorato di ricerca usavano in modo regolare i computer nei loro centri di lavoro, e, ancora più notevole, li usavano in modo regolare l'89% dei professori universitari.

Di fronte a questo panorama, è necessario chiedersi se questi cambi drammatici nel modo di lavorare nella scienza possano essere ignorati dai professori di scienze: noi crediamo di no.

4. Educazione e informatica

La penetrazione intensa dell'informatica a livello globale implica che ogni settore deve studiare e risolvere i problemi specifici relativi *all'integrazione* dei *valori profondi dell'informatica* nel proprio settore, il che implica necessariamente un processo *personale* e *collettivo* di adattamento e di apprendimento per incorporare l'informatica come parte della nostra cultura. Questa considerazione di carattere generale si applica anche, naturalmente, al settore educativo. In relazione all'importanza della questione a livello internazionale, possiamo indicare i seguenti elementi.

Nella *Dichiarazione di principi* della WSIS si indica che «si deve promuovere l'uso delle TIC a tutti i livelli nell'educazione, nella formazione e nel miglioramento delle risorse umane» (WSIS, 2003a p.5); nel rapporto *Cyberculture. Rapport au Conseil de l'Europe* sulle *implicazioni culturali* dello sviluppo delle nuove TIC (Lévy, 1997), si discutono alcune delle trasformazioni derivate dall'integrazione dell'informatica, che sono di capitale importanza per l'educazione: le *trasformazioni della relazione con il sapere*, le *implicazioni per l'educazione e la formazione*, l'economia del sapere, l'apprendimento aperto e a distanza, il *nuovo ruolo dei docenti*, il riconoscimento dei saperi acquisiti, i conflitti di interesse e l'intelligenza collettiva, tra gli altri.

Sono sorte organizzazioni internazionali, nazionali e locali che, a diversi livelli, promuovono l'integrazione dell'informatica nell'educazione e cui partecipano ricercatori, docenti di scuola e universitari, amministratori scolastici e governativi, software designer e altri specialisti in questioni educative, ad esempio l'AACE, *Association for the Advancement of Computing in Education*; EDUCAUSE il cui motto è «trasformare l'educazione attraverso le tecnologie dell'informazione»; l'ADT italiana, *Associazione per la Didattica con le Tecnologie* e la SOMECE, *Società Messicana di Computer nell'Educazione*, fra le altre.

In più esiste anche un numero crescente di riviste sempre più specializzate e di progetti internazionali e nazionali. Oltre al dibattito internazionale, in ogni Paese ci sono dibattiti interni, ma che si riferiscono a questioni universali. Ad esempio, Contu (1998), commentando il rapporto di una commissione di esperti sulla riforma della scuola pubblica italiana, conclude il suo articolo con questa frase «ciò significa: molto nel computer, quasi nulla fuori del computer».

Le tematiche specifiche del settore educativo sono molto varie:

- fondamenti pedagogici;
- attenzione all'apprendimento interattivo;
- micromondi;
- progettazione di sistemi di apprendimento a distanza;
- valutazione;
- curriculum;
- formazione del docente;
- uso di telecomunicazioni, multimedia, ipermedia, Internet, intelligenza artificiale e realtà virtuale;
- atteggiamenti e convinzioni;
- equità;
- specificità socioculturale;
- popolazioni speciali;

- collaborazione con altri settori;
- finanziamenti, costi e benefici, ecc.

Lo studio del NCES (2003), al quale abbiamo già fatto riferimento in punti precedenti, indica che già nel 2001, negli Stati Uniti, il 72% dei professori della scuola primaria, secondaria e superiore usavano in modo regolare i computer nei loro centri di lavoro, nel 2002 il 99% delle scuole di questi livelli avevano accesso ad Internet, nel 2001 le percentuali di studenti degli stessi livelli che usavano un computer a scuola o a casa era già dell'84% e del 66% rispettivamente.

In questo contesto vediamo ora il caso specifico dell'educazione matematica.

5. Educazione matematica e informatica

5.1. Vitalità di una nuova comunità mondiale

L'uso di TI nei processi di insegnamento-apprendimento della matematica si considera *essenziale* in molti settori, posizione che illustra in modo chiaro il cosiddetto «principio tecnologico» della NCTM, *National Council of Teachers of Mathematics* degli Stati Uniti «la tecnologia è *essenziale nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica*; *influenza quello che si insegna di matematica e migliora l'apprendimento da parte degli studenti*» (NCTM, 2000, p. 24). Nel curriculum nazionale francese di matematica liceale si afferma, tra altre cose che «[i computer] favoriscono approcci per gli studenti *più attivi e motivati*... aumentano in modo cospicuo le possibilità di *osservazione* e di *manipolazione*... contribuiscono al processo di astrazione specifico della matematica e conducono ad una riflessione più profonda e a una migliore comprensione» (riportato in Laborde, 2001, p. 284).

È, forse, nell'educazione matematica, dove più è stata dibattuta l'integrazione della TI, e ha originato la nascita di una nuova comunità mondiale che

- ha un oggetto specifico di studio: l'integrazione dell'informatica nell'educazione matematica;
- usa una combinazione di metodi di studio che vanno dalle forme di sperimentazione empirica ai metodi di ricerca comuni in didattica della matematica;
- coinvolge non solo ricercatori in didattica della matematica ma anche un gran numero di docenti;
- sta costruendo un linguaggio specifico comune.

Prova della vitalità di questa comunità e della crescente importanza del tema sono gli spazi aperti nel più importante convegno di didattica della matematica a livello internazionale, l'ICME, *International Congress on Mathematics Education*, dove dal 1992 sono stati dedicati alla questione diversi *Working Group* e *Topic Group*; ma anche spazi specifici nei convegni della PME, *Psychology of Mathematics Education*. Possiamo anche indicare che cresce il numero di convegni specifici come l'ICTCM, *International Conference on Technology in Collegiate Mathematics*, che hanno luogo ogni anno dal 1988; le *International T³ Conference* che hanno luogo ogni anno dal 1989; i TIME, *International Symposium on Technology and its Integration into Mathematics Education*, ecc.

Esiste anche un numero crescente di organizzazioni internazionali come la T³, *Teachers Teaching with Technology* o la CAME, *Computer Algebra in Mathematics Education* o organizzazioni nazionali come l'ACDCA, *Austrian Center for Didactics of Computer Algebra*; progetti nazionali ed internazionali come ATLAST, *Augment the Teaching of Linear Algebra through the use of Software Tools*, METRIC, *Mathematics Education Technology Research at Imperial College*, dell'Imperial College dell'Università di Londra, *Symbolic-computation-aided mathematics education* promosso dal Ministero dell'Istruzione dell'Austria, ecc. Cresce anche il numero di riviste specializzate come *International Journal for Technology in Mathematics Education*, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching* e molte altre.

Possiamo anche segnalare il continuo sviluppo di nuovo software di matematica e il miglioramento di quello già esistente, la pubblicazione di libri ed articoli specializzati, lo sviluppo di siti web, la progettazione di materiali per l'insegnamento, ecc.

5.2. Supporto istituzionale

In molti Paesi, i governi hanno offerto supporto a specifici progetti di integrazione dell'informatica nell'educazione. Principalmente si tratta di Paesi anglosassoni come gli Stati Uniti, il Regno Unito, il Canada e l'Australia e alcuni Paesi europei come la Francia, l'Austria e la Germania, ma stanno seguendo la stessa strada molti altri Paesi europei e asiatici e con meno vigore alcuni dell'America Latina. Ad esempio, Oldknow (2000) indica che il governo inglese ha destinato nel 2000, un miliardo di sterline per promuovere l'uso della TI nell'educazione e che addirittura ha creato apposta un nuovo dipartimento.

Nel caso specifico dell'educazione matematica, per esempio, segnaliamo che già dal 1991 il Ministero dell'Istruzione dell'Austria dotò tutte le scuole superiori del software *Derive* di tipo CAS (*Computer Algebra Systems*); dal 1992 il Ministero dell'Istruzione della Francia mise quel programma nell'elenco di software suggerito per le scuole; dal 1993 le autorità scolastiche della regione italiana dell'Alto Adige dotarono di *Derive* tutte le scuole superiori; lo stesso fecero dal 1995 le autorità scolastiche della città di Amburgo, in Germania; dal 1997 lo fecero il Ministero dell'Istruzione di Slovenia e quello degli Emirati Arabi Uniti; dal 1998 il Ministero dell'Istruzione del Belgio lo mise nell'elenco di software suggerito per l'insegnamento della matematica e furono dotate di questo programma tutte le scuole superiori di Stoccolma, in Svezia.

È analoga la situazione, dai primi anni '90, col software di geometria dinamica *Cabri-Géomètre* e *The Geometer's Sketchpad*, solo per indicare i più diffusi software di questo tipo[6].

6. Ad esempio, *Cabri-Géomètre* si distribuisce in più di 40 Paesi, ne sono state vendute più di 2,5 milioni di copie ed è stato tradotto in più di 20 lingue diverse (http://www.cabrilog.com/).

In Francia, il Ministero dell'Istruzione ha creato un dipartimento specifico per sostenere lo sviluppo e l'uso di nuove tecnologie e dal 1980 l'uso di calcolatrici è obbligatorio nell'educazione secondaria e superiore (Artigue, 1997). In questo stesso Paese il Ministero dell'Istruzione promuove lo sviluppo e l'uso di software didattico con misure concrete, come la firma di contratti con i distributori di software affinché le scuole possano acquistare i loro prodotti a prezzi ragionevoli, o la creazione di gruppi per aiutare i docenti a integrare nuovi strumenti pedagogici nel loro insegnamento. Rimandiamo a Laborde (2001), dove si trova un'analisi dettagliata del supporto istituzionale che si offre in Francia per l'integrazione dell'informatica nell'educazione matematica.

6. Risultati non soddisfacenti

Di fronte alla situazione descritta nei punti precedenti, si potrebbe pensare che l'uso di software di matematica nelle scuole è una pratica estremamente diffusa e ricorrente. Ma la realtà è ben diversa. Anche in Paesi sviluppati come la Francia esiste un grande divario tra il supporto istituzionale e la debole integrazione della TI nella pratica quotidiana dei docenti di matematica (Laborde, 2001). In questo lavoro, Laborde sottolinea che, anche se è difficile misurare la proporzione esatta di docenti che fanno un uso *reale* di TI nell'aula, è possibile considerare la stima di Guin e Trouche (1998): circa il 20%. Il lettore può guardare attorno nel proprio ambiente e fare una stima delle percentuali: siamo sicuri che in molti casi questa percentuale è molto più bassa. La realtà è che molti docenti delle scuole secondarie e superiori non conoscono nemmeno software di matematica che possano essere utili nel loro processo di insegnamento (Bako, 2002) e che l'integrazione di TI nelle aule è stata più difficile di quello che ci si aspettava (Lagrange, 2003).

E allora, perché sorge il divario a cui si riferisce Colette Laborde tra, da una parte, le tendenze globali e il supporto istituzionale (nei casi in cui esiste), e, dall'altra, una debole integrazione della TI nella pratica quotidiana dei docenti? La stessa Laborde indica che questo potrebbe sembrare sorprendente e che è estremamente importante cercare le ragioni di questa «poca disponibilità» dei docenti.

In quello che segue tenteremo di abbozzare alcune delle cause, tenendo presente un fattore che consideriamo di importanza cruciale: la mancanza di un'adeguata formazione del docente.

7. Quando si parla di TI nell'Educazione, di che cosa stiamo parlando?

Laborde (2001) sottolinea che l'espressione «integrazione della tecnologia» è molto generale e che in particolare, anche se questa espressione si usa largamente in suggerimenti, currícula e ricerca, la caratterizzazione dell'espressione non viene spiegata in dettaglio. Noi pensiamo addirittura che il termine «tecnologia» sia troppo ampio (include orologi, motori, ecc.) e che si usa, frequentemente, come sinonimo di *tecnologia informatica*. D'altra parte è sbagliato parlare solamente di *computer* (parte dell'hardware) quando si pensa alla TI, concetto che in seguito caratterizziamo più dettagliatamente. Per questioni di spazio, noi non discuteremo qui il concetto di «integrazione dell'informatica»; per chi è interessato ad approfondire la questione, nel caso della didattica della matematica, rimandiamo al già citato lavoro di Laborde.

7.1. Computer vs. calcolatrici

Prima di tutto è necessario categorizzare la TI basata sull'*hardware*: computer e calcolatrici[7].

La differenza principale tra computer e calcolatrici è che i primi sono macchine *universali* progettate per scopi multipli mentre con le seconde è possibile eseguire solamente un numero limitato di compiti. Un'altra differenza sostanziale è che per usare software con i primi si richiedono competenze informatiche generali relative non solo all'uso di un sistema operativo ma anche di software supplementare, mentre le seconde usano software autonomo. Queste due importanti differenze motivano un'altra serie di differenze fra questi tipi di hardware: costi, portabilità, facilità di uso, diversi requisiti di uso, ecc. I computer sono usati da tutti mentre le calcolatrici si usano principalmente nelle cosiddette aree scientifiche, per cui le considerazioni relative ai primi hanno un carattere più generale e interdisciplinare.

Date le differenze sostanziali tra l'uso di un computer e una calcolatrice, le considerazioni che faremo in seguito si riferiscono all'uso di TI con i computer, per cui alcune di queste considerazioni possono estendersi anche all'uso di calcolatrici, ma altre no.

7.2. Software generico vs. software specifico

Consideriamo che qualsiasi analisi sull'uso della TI nell'educazione dovrebbe distinguere tra due grandi categorie di software: quello *generico* e quello *specifico*. Questa classificazione è necessaria data la grande differenza di peso epistemologico e cognitivo che ogni categoria esige dalle persone che le usano.

Con software *generico* ci riferiamo a software il cui uso *non richiede una specialità in alcuna area della conoscenza*, per cui questa categoria include sistemi operativi, elaboratori di testi, fogli di calcolo elettronico, programmi di presentazione, software per l'elaborazione di immagini, navigatori di pagine web, programmi di posta elettronica, ecc. Un elaboratore di testi può essere usato sia da uno scrittore di romanzi sia da un bambino della scuola elementare[8], un programma per creare presentazioni può essere usato tanto da un medico quanto da un docente di geografia nella scuola secondaria, un foglio di calcolo elettronico può essere usato e da un ragioniere e da un docente di matematica di liceo, ecc.

Al contrario, questo non accade col software *specifico*. Questo tipo di software *richiede conoscenza di una disciplina*: per usare un certo software di medicina si richiedono saperi di medicina, per usare un software specifico di fisica si deve avere una determinata conoscenza della fisica, ecc. Questo è il motivo per cui il suo peso epistemologico e cognitivo è molto più forte nelle aree specifiche dove si usa e nelle esigenze nei confronti degli utenti.

7. Solo per nominare l'hardware più usato nelle scuole, forse un giorno potremmo aggiungere i *palmtop*.
8. Certo, con differenze nell'efficienza nell'uso.

Questa è una differenziazione *chiave*. Dovrebbe essere evidente a tutti, in base all'esperienza di ciascuno, che il *transfer cognitivo*[9] da una categoria all'altra è praticamente inesistente, soprattutto quando passiamo dalla categoria generica a quella specifica. Cioè, il fatto di saper usare un elaboratore di testi o un programma di presentazione non implica che si sappia usare un software specifico, dato che quest'ultimo richiede conoscenza della disciplina associata. Questo può spiegare l'osservazione di Lagrange (2003) sul fatto che molti docenti di matematica giovani e con una buona formazione nell'uso di software generico non hanno competenze adeguate per l'uso di software specifico.

Comunque, è necessario indicare che molte *competenze informatiche*, sia *tecniche* che *concettuali*, acquisite nell'ambito dell'uso di software generico, servono come base per costruire *certe* competenze nell'uso di software specifico (basti pensare ad alcune operazioni comuni a ogni software progettato per il sistema operativo *Windows*, sia generico che specifico, come ad esempio salvare, chiudere, copiare).

È evidente che l'uso di software generico non richiede competenze nell'uso di software specifico, ma per l'uso di quest'ultimo, principalmente nella dimensione relativa alla comunicazione con altri, è molto conveniente avere adeguate competenze informatiche generali.

D'altra parte, dovrebbe essere anche evidente che il *transfer cognitivo* all'interno di una stessa categoria è praticamente inesistente in software di *tipo diverso*. Cioè, il fatto di sapere usare un elaboratore di testi non implica (e non richiede) che si sappia usare un programma di presentazione. Allo stesso modo, il saper usare un software di geometria dinamica non implica (e non richiede) che si sappia usare un software di calcolo algebrico o un simulatore di equazioni differenziali. Ciò nonostante, e come indicato prima, è probabile che molte competenze informatiche acquisite nell'ambito dell'uso di un software specifico possano essere di utilità nell'uso di un altro software di un altro tipo (principalmente, quelle che sono comuni a diversi tipi di software).

Invece, esistono molte possibilità di *transfer cognitivo* all'interno di una *stessa categoria* e dello *stesso tipo* di software. Ad esempio, competenze sviluppate con l'elaboratore di testi *Word* possono essere usate per sviluppare competenze in *Writer* e viceversa; competenze sviluppate col foglio di calcolo elettronico *Excel* possono essere usate per sviluppare competenze in *Calc* e viceversa; competenze sviluppate col software di geometria dinamica *Cabri-Géomètre* possono essere usate per sviluppare competenze in *The Geometer's Sketchpad* o in *Cinderella* e viceversa.

Un'ultima considerazione riguardo alle differenze tra il software generico e il software specifico è che, come in molte tassonomie, alcuni casi particolari hanno caratteristiche di diverse categorie. Questo è il caso dei fogli di calcolo elettronico perché, anche se si tratta di software generici, si usano nell'educazione matematica, in molti casi, come software specifico, per esempio per fare matematica discreta o statistica (in quest'ultimo caso, forse in combinazione con software specifico come *Minitab* o *Autograph*).

9. Qui sto estrapolando un concetto della didattica della matematica spiegato molto chiaramente in D'Amore (1999) e che, in modo semplificato, si riferisce al fenomeno per cui molte volte le capacità cognitive, in particolare di eseguire procedure, restano ancorate nell'ambito in cui si sono sviluppate e non si è in grado di trasferirle, tranne che in casi particolari.

7.3. Il software specifico e la didattica

Parlando di software specifico, vogliamo sottolineare che una cosa è *saperlo usare* e un'altra è saperlo usare come *strumento per l'insegnamento e l'apprendimento*. La prima cosa non richiede la seconda ma la seconda richiede senz'altro la prima (anche se forse non allo stesso livello di conoscenza).

Si può classificare il software specifico usando approcci diversi. Come esempio, consideriamo il caso del software di matematica.

La GAMS, *Guide to Available Mathematical Software* (http://gams.nist.gov/), usa una tassonomia basata sul *tipo di problema matematico* e stabilisce 20 categorie diverse (che a sua volta si dividono in sottocategorie diverse); *Mathematics Archives* (http://archives.math.utk.edu/software.html) usa una tassonomia basata sul *sistema operativo* e poi per *materia*; Zhao (1998) definisce due grandi categorie: *prodotti diretti* e *indiretti* e a sua volta stabilisce sottocategorie in ciascuna di esse. Partendo dalla didattica della matematica, Hoyles e Noss (2003) propongono una tassonomia molto più sofisticata, fatta per mettere in rilievo i modi in cui il software modella ed è modellato dalla sua incorporazione nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica: i *micromondi programmabili* e gli *strumenti espressivi*.

Noi qui proponiamo due classificazioni che ci sembrano molto importanti dal punto di vista educativo.

La prima è differenziare tra il software *professionale* (progettato per *fare matematica*) ed il software *educativo* (progettato per l'insegnamento e l'apprendimento). Non ci si può aspettare che il software professionale abbia certe caratteristiche educative perché i professionisti che lo usano non si pongono nemmeno questo problema (tranne, naturalmente, quelli che l'usano nei sistemi educativi).

La seconda è differenziare tra il software di tipo *aperto* e quello di tipo *chiuso*. Nella prima categoria includiamo tutto quel software che serve per *fare matematica*, che quindi è uno *strumento per risolvere problemi matematici*, dove è possibile impostare problemi aperti per risolverli, dove l'utente può generare i propri file e modificare quelli già esistenti, dove è possibile eseguire attività di esplorazione aperta. Nella seconda categoria includiamo le cosiddette *risorse didattiche e virtuali*. Si tratta di software dove tutto è già fatto, dove si presenta materiale in modo elettronico (libri, corsi, tabelle, ecc.) anche in modi piuttosto sofisticati (ad esempio i *manipolatori virtuali* che usano *applets* di Java) e che seguono la logica del *tutor* dove «basta» sapere navigare in strutture di informazione, dove non possono esserci sorprese per l'utente. È evidente che la caratteristica di «apertura» fa sì che la prima categoria abbia un peso epistemologico e cognitivo molto maggiore di quello del software della seconda categoria.

Laborde (2001) indica che gli attuali sforzi di formazione degli insegnanti miglioreranno le cose nel futuro. Ciò nonostante, crediamo che le osservazioni fatte in questa sezione dovrebbero essere prese in considerazione nei processi di formazione iniziale e nell'aggiornamento dei docenti attivi: non si può offrire solo formazione nell'uso di software generico per poi pretendere che il docente abbia competenze adeguate nell'uso di software specifico: si richiede formazione in entrambe le categorie. Non si può offrire formazione nell'uso di un software specifico di un tipo per poi pretendere che il docente abbia adeguate competenze nell'uso di software specifico di un *altro* tipo.

Non si può offrire solo formazione tecnica nell'uso di un software specifico per poi pretendere che il docente abbia adeguate competenze per usarlo come strumento di insegnamento e di apprendimento.

Gli studi sul processo dell'integrazione della TI nell'aula, dovrebbero prendere in considerazione il fatto che il software generico e il software specifico non hanno lo stesso peso epistemologico e cognitivo in docenti e allievi. Nel caso dei docenti di matematica abbiamo a uno degli estremi coloro che usano solo software generico e all'altro coloro che usano software specifico aperto come strumento di insegnamento e di apprendimento.

8. Il ruolo centrale del professore

La risposta al quesito di Laborde sul divario tra il supporto istituzionale e l'uso di TI nell'aula non può essere unica: intervengono troppi fattori (relativi al sapere, agli studenti, ai professori, alle istituzioni educative, alle politiche statali, ecc.). Ciò nonostante, un fattore che consideriamo centrale è quello di *sottovalutare le difficoltà che incontra il docente* nel processo di integrazione della TI nella sua pratica professionale. Di seguito discutiamo alcuni degli aspetti relativi a questo elemento incominciando con uno di tipo sociologico.

8.1. La frattura digitale... e la sua relatività

Uno dei più importanti problemi relativi all'integrazione di TI si riferisce al pericolo che grandi settori della popolazione restino esclusi e di conseguenza le divisioni socio-economiche e culturali divengano più grandi invece di diminuire. Colwell (2000) parla di gruppi «ricchi in informazione» e di altri «derubati di informazione». Questo fenomeno riceve il nome di *frattura digitale* e sta ricevendo un'attenzione crescente (si veda, ad esempio, ALLS, 2000, p. 2 e WSIS 2003a, p. 3). Possiamo considerare *tre* dimensioni diverse del problema.

Differenze tra *Paesi*[10]. È un dato di fatto che in molti Paesi poveri, ad esempio in Africa e in America Latina, i docenti si trovano in svantaggio rispetto ai professori di Paesi più sviluppati. Basta vedere che il prezzo di molto software in un Paese sviluppato è lo stesso che in uno sottosviluppato anche se i redditi di docenti e famiglie sono sensibilmente diversi.

Differenze fra *gruppi socio-economici* di uno stesso Paese[11], che si osservano soprattutto in quei Paesi dove esistono ineguaglianze sociali forti, differenze abissali tra le risorse di scuole pubbliche e private, ecc.

Differenze *fra persone dello stesso gruppo socio-economico*. In questo caso si tratta di differenze la cui origine è *culturale*.

10. Ad esempio, solo riguardo a Internet, Colwell (2000) afferma che gli utenti sono meno del 2% della popolazione mondiale, dei quali più della metà si trova negli Stati Uniti e in Canada, mentre Ramonet (2004) afferma che il 19% degli abitanti del pianeta rappresenta il 91% degli utenti.
11. In Colwell (2000) si fa riferimento a ricerche che hanno mostrato che la frattura tra gruppi all'interno degli Stati Uniti invece di diminuire è aumentata.

Anche se questo fenomeno è fortemente condizionato dai redditi economici, è un errore pensare che sia *l'unico* fattore, dato che essere proprietario di un computer «non implica necessariamente forti competenze informatiche» (ALLS, 2000 p. 7) e gli esempi sono migliaia. Esistono altri fattori come la differenza sessuale, di età, geografica, culturale o di capacità cognitiva[12].

Nemmeno si possono attribuire le ingiustizie in *modo intrinseco all'informatica*; in parte è anche una *responsabilità diretta degli utenti*. Infatti, esistono docenti che giustificano il non uso dell'informatica nell'aula a causa della mancanza di accesso alla stessa da parte dei loro studenti. Anche se questo è vero solo in certi casi, in altri non è così, come dimostra il seguente esempio.

Nel rapporto DfES (2002) compaiono i seguenti dati relativi all'acceso alla TI da parte delle famiglie inglesi nel 2001: 76% accesso ad un computer; 13% ad un portatile e 64% ad Internet. Nello stesso periodo gli studenti dell'Autore (di un'università pubblica) avevano il seguente accesso ad un computer: 100% a scuola, 88% fuori dalla scuola di cui 68% a casa[13]; 12% ad un portatile (percentuale che si alzava al 52% negli esami); il 100% fa uso regolare di Internet (di cui 39% a casa, 59% fuori dalla scuola ed il resto solamente a scuola). Solo due anni dopo e nello stesso contesto, le percentuali degli studenti dell'Autore sono salite alle seguenti: 81% con computer a casa, 91% con accesso fuori dalla scuola; 17% con accesso a portatile; 43% con Internet a casa e 76% usavano Internet fuori dalla scuola.

Il parallelismo fra questi dati è sorprendente. I primi si riferiscono a una nazione economicamente sviluppata, una fra le più avanzate nell'integrazione dell'informatica nell'educazione, gli altri sono relativi a una realtà molto concreta del livello universitario di un Paese sottosviluppato. Il potenziale di infrastruttura informatica che mostra il secondo gruppo permette di fare un uso non banale della TI. Sarebbe auspicabile che le istituzioni eseguissero studi simili per studiare il problema dell'accesso alla TI da parte degli studenti in un modo razionale e non attraverso convinzioni che nulla hanno a che fare con la realtà. È evidente che non saranno i ricercatori in didattica della matematica a risolvere i problemi socio-economici, tuttavia è interessante indagare perché fra docenti che lavorano nello stesso contesto alcuni usano TI nell'aula e altri no.

8.2. L'insegnamento: una professione difficile

Visioni semplicistiche fuori e dentro il mondo scolastico considerano l'insegnamento come una attività facile; per contro in ambienti specializzati si riconosce sempre di più che l'insegnamento è un processo complesso che implica interazioni non banali tra il docente, gli studenti e il sapere (NRC, 2001).

Per illustrare parte della complessità di tale processo consideriamo un caso specifico: l'insegnamento della matematica. Nel seguente schema, costruito apportando una piccola variazione a quello proposto da Steiner (1990), si mostrano le re-

12. «Le persone con un basso livello di capacità cognitive possono avere meno opportunità di sviluppare competenze informatiche» (ALLS, 2000, p. 8).
13. La differenza si deve al fatto che gli studenti che non hanno computer a casa, appena ne scoprono l'utilità per il loro apprendimento, lo cercano presso amici e parenti. Lo stesso fenomeno viene esposto nello studio britannico a cui facciamo riferimento.

lazioni che il sistema di insegnamento della matematica (SIM) mantiene con altre discipline e sistemi. Seguendo Steiner, il SIM è formato da cinque grandi aree:

- la formazione del docente;
- lo sviluppo curricolare;
- la lezione di matematica;
- i testi e il materiale didattico;
- la valutazione.

Una visione ingenua dell'insegnamento della matematica, ancora oggi purtroppo molto diffusa in certi ambienti, sostiene che, per insegnare matematica, basta sapere la matematica; visione che sin dai primi anni '80 del secolo scorso la ricerca in didattica della matematica ha smentito sulla base di prove empiriche.

La situazione ideale, come si mostra nello schema (in cui al centro si trovano l'educazione matematica e la didattica della matematica), è che il docente di matematica abbia una preparazione in matematica (M) ma anche in epistemologia e in filosofia della matematica (EFM), in storia della matematica (SM), in pedagogia (PE), in psicologia (PS), in sociologia (SO), in linguistica (L), in scienze naturali (SN) e in informatica (IN). In più, questo complesso sistema di relazioni deve prendere in considerazione anche i nuovi apprendimenti della società (NAS).

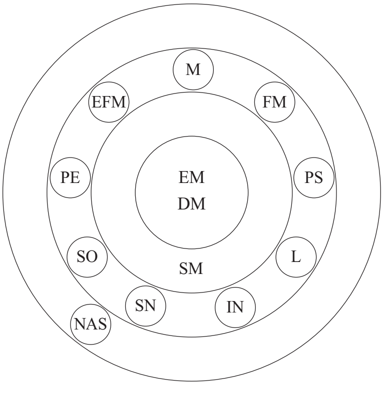


Figura 1 Relazioni fra l'educazione matematica e le altre discipline e sistemi

Una cosa simile è valida per la didattica di altre scienze come la fisica, la chimica o la biologia.

Che quella dell'insegnante non sia una professione facile, lo dimostrano i risultati del recente studio fatto dall'Associazione di Docenti del Regno Unito (Garner, 2005) dove si rivela che quasi la metà dei docenti della scuola secondaria di quel Paese hanno problemi di salute mentale le cui cause sono legate alla professione che esercitano. Lo stesso studio ha rivelato che il 72% dei docenti consultati ha considerato seriamente l'idea di abbandonare il proprio lavoro. In ambienti medici si riconosce sempre di più che i docenti formano una categoria ad alto rischio della sindrome del *burn-out* (secondo la definizione di Edelwich & Brodsky (1980) si tratta di una progressiva perdita di idealismo, energia e obiettivi come risultato delle condizioni di lavoro).

Tra i fattori che provocano questa sindrome Bartolozzi e Bachmann (2003) indicano che frequentemente il docente ha dovuto lottare per anni contro un sistema che non funziona, contro resistenze al cambio, contro la burocrazia. Fra i *fattori relazionali*, i due ricercatori indicano difficoltà di rapporto con gli studenti, gruppi troppo numerosi ed eccessiva concorrenza con i colleghi; tra i *fattori professionali* annoverano il precariato, l'ambiguità del ruolo, il continuo bisogno di aggiornamento, gli stipendi bassi e le richieste eccessive; infine tra i *fattori* legati ai *cambi sociali e culturali* dell'ambiente citano: le continue riforme, il passaggio a un lavoro in gruppo, la mancanza di riconoscimento della professione, la scarsa considerazione da parte dell'opinione pubblica e *l'arrivo dell'era dell'informatica*.

Infatti, in generale, il processo di insegnamento-apprendimento si fa più complesso nel passaggio dall'ambiente carta e penna all'ambiente informatico, dato che cambiano sostanzialmente le interazioni docente-studenti, docente-sapere e studenti-sapere. Crediamo che una delle ragioni di tale crescente complessità sia l'informatica stessa, come vedremo in seguito e che tale ragione è a tutt'oggi sottovalutata.

8.3. La mancanza di adeguate competenze informatiche generali

Grazie al suo carattere universale, la TI si trasforma in un potente strumento concettuale con cui è possibile eseguire una grande molteplicità di compiti. Nel caso specifico dell'insegnamento, l'uso di TI lo rende più stimolante ma anche molto più complesso. Abbiamo secoli di esperienza nell'insegnamento e nell'apprendimento in ambiente carta e penna, ma è necessario ricordare che i primi computer elettronici videro la luce solo 60 anni fa, che i personal computer hanno un'età di circa 30 anni e che è passata solo una decina di anni da quando il grande pubblico ha cominciato a sapere del WWW. L'informatica è entrata nella vita delle persone «in un periodo di tempo relativamente breve, con *poche avvertenze* ed essenzialmente *senza una preparazione formale* della *maggior* parte delle persone» (NAS, 1999, p. 1).

Per usare un computer in una situazione normale della vita quotidiana, la maggior parte delle persone non ha bisogno di sapere come funziona un circuito elettronico. Invece, la *mancanza di profonda familiarità con le sue reazioni* provoca angoscia, delusione, ansietà, stress, paura, frustrazione, perdita di tempo, ecc. il che provoca un rifiuto dello strumento, che a sua volta ha conseguenze negative sul piano sociale: le persone lavorano male e controvoglia, perdono tempo, sotto utilizzano gli strumenti, non imparano a usarli, non si adattano ai rapidi cambiamenti delle tecnologie, ecc. Questo problema è molto importante perché il non uso, la sotto utilizzazione e l'uso erroneo di strumenti informatici hanno forti implicazioni negative nell'efficienza individuale e collettiva, e significano inoltre uno spreco di risorse e una sfida enorme per i programmi di formazione.

In quello che resta di questa sezione ci serviremo di alcune delle considerazioni che compaiono nel rapporto FITness (NAS, 1999). FITness è l'acronimo di *Being Fluent with Information Technology* (avere *scioltezza* in informatica). È il rapporto di un progetto statunitense sull'alfabetizzazione informatica approvato dal NRC, *National Research Council* (Consiglio Nazionale della Ricerca) dove si stabilisce un *insieme fondamentale di concetti, competenze e capacità* che ogni individuo dovrebbe avere allo scopo di usare l'informatica in modo *efficace*. L'intenzione del rapporto è proporre una *cornice teorica* che possa essere utile per altre cornici più adatte alle discipline o ai settori specifici della società, per cui molte delle sue direttive sono applicabili al caso particolare dei docenti.

Per capire l'importanza del documento segnaliamo che i membri del comitato del NRC provengono dai consigli direttivi del NAS, *National Academy of Sciences* (Accademia Nazionale delle Scienze), della NAE, *National Academy of Engineering* (Accademia Nazionale dell'Ingegneria) e dell'Istituto di Medicina. Il progetto è stato supportato dalla NSF (*National Science Foundation*). Oltre alle istituzioni segnalate sono state coinvolte nel progetto il CITL, *Committee on Information Technology Literacy* (Comitato sull'alfabetizzazione informatica), il CSTB, *Computer Science and Telecommunications Board* (Consiglio delle Scienze Informatiche e delle Telecomunicazioni) e la CPSMA, *Commission on Physical Sciences, Mathematics, and Applications* (Commissione delle Scienze Fisico Matematiche e le loro Applicazioni). A queste organizzazioni partecipano persone con ampie capacità specifiche: professori universitari, ricercatori e professionisti di società private. Si può percepire il prestigio degli autori osservando alla fine del documento la sintesi curricolare di alcuni dei membri del comitato per l'alfabetizzazione informatica. Un'altra caratteristica che dà autorevolezza al documento è la metodologia usata: incontri col comitato e partecipazione di molte altre persone qualificate; inoltre il rapporto è stato valutato da *referee* esterni.

Il rapporto FITness presenta diversi punti critici sull'uso corrente e futuro della TI.

Il primo si riferisce a un apparente paradosso: «molte persone si avvicinano ai computer in un modo esitante, con poca fiducia anche se li usano da anni» (p. 11) e indicano che la causa probabile di questo atteggiamento è la *poca comprensione reale* della TI. In più molte persone che usano oggi TI «hanno solo una *comprensione limitata* degli strumenti che usano e una convinzione (probabilmente *corretta*) che li sotto utilizzano. Molte persone non sentono né *sicurezza* né *controllo* quando affrontano la TI, anche se a loro piacerebbe sentirli» (p. 1). Si segnala anche che usare un computer al lavoro tutti i giorni non conferisce in modo automatico *scioltezza* nel suo uso: anche se lo usa per fare compiti complessi, la maggior parte delle persone ha solo la dimensione relativa alle destrezze tecniche, che a loro volta costituiscono solo il punto di partenza. D'altra parte sembrerebbe che le persone che hanno solamente abilità tecniche di base in applicazioni generiche (elaboratori di testi, posta elettronica, ecc.) non abbiano bisogno di una comprensione più robusta e più profonda dell'informatica; invece queste persone, quando si trovano di fronte a imprevisti, si adattano meno e hanno meno capacità di trovare una soluzione. Finalmente consideriamo una questione che crediamo molto importante:

> L'abilità di usare uno strumento in modo *rudimentale* per un numero *limitato* di compiti non è la stessa che occorre per usarlo in modo *sicuro*, *efficace* e *flessibile*... più una persona possiede la seconda abilità, più utile le sarà quello strumento. (p.10)

Le precedenti riflessioni generali sono valide per l'informatica in generale e per le persone che la usano e perciò si applicano anche ai *docenti* che usano o vogliono usare TI generica o specifica, quindi crediamo che tutte queste osservazioni dovrebbero essere prese in considerazione dalla ricerca in didattica della matematica, quando l'oggetto di studio sono i professori che usano o vogliono usare TI in aula. Ad esempio, i risultati della ricerca di Strehle, Whatley, Kurz e Hausfather (2002) indicano che la TI tende a complicare i compiti abituali dei docenti, limitando così la loro abilità di incorporarla nella propria pratica docente.

Infatti, non basta che un docente abbia usato durante anni TI per garantire che lo faccia in modo sicuro, affidabile, efficace, con una comprensione ampia degli strumenti che usa, che non li sotto utilizzi, che le usi con *scioltezza* (nei termini del rapporto FITness), che oltre alle competenze tecniche capisca anche *concetti fondamentali* dell'informatica (principi e idee di base sull'informatica, che sappia spiegare il come e il perché dell'informatica, che abbia una prospettiva di opportunità e limitazioni, che capisca l'informatica mentre evolve) e abbia sviluppato *capacità intellettuali* necessarie (abilità nell'applicare l'informatica in situazioni complesse e permanenti, incapsulare pensiero di alto livello nel contesto dell'informatica, saper manipolare lo strumento a proprio favore e risolvere problemi imprevisti e mai immaginati). Nemmeno è sufficiente *poca* preparazione nell'uso di software specifico.

Una delle ragioni fondamentali dei suddetti problemi è la *dinamicità* dell'informatica, che provoca un rapido invecchiamento di molta conoscenza tecnica e che complica la risposta alla domanda «che cosa dovrebbe sapere di TI ciascuno di noi per essere capace di usarla in modo efficace nel presente e nel futuro?». Infatti, in presenza di un cambiamento così rapido, «è impossibile stabilire competenze informatiche fisse che rimangano stabili ed effettive» (NAS, 1999 p. 2). Berger (1999) indica che, oggigiorno, il divario tra utenti e sviluppatori di hardware o software è praticamente incolmabile per cui non si vede soluzione a questo problema a breve termine.

Nello stesso lavoro, Berger indica che le convinzioni dei docenti sull'informatica si formano a partire da tre diversi ruoli sociali: docente, esperto (ad esempio di matematica) e cittadino; perciò identifica tre domini di esperienza che danno forma alla visione dell'informatica di un docente: la scuola, la scienza e la società. La visione individuale di ogni docente è modellata dalle sue esperienze in ogni campo, il che determina aspetti particolari, sovrapposizioni e discordanze (ad esempio tra la sua visione dell'informatica a scuola e nella scienza e la sua visione come persona). I risultati di questo studio con professori di matematica e di informatica della scuola secondaria indicano che, dalla scienza alla società passando per la scuola, le visioni si caricano di emotività mentre contemporaneamente aumenta l'importanza del ruolo dei computer (i commenti fatti come persone comuni vanno da un'approvazione euforica fino a una disapprovazione veemente, dalla sicurezza a un'ansietà estrema). Ne consegue che la componente affettiva prevale su quella cognitiva ed è necessario considerare questo in qualsiasi analisi del fenomeno dell'integrazione di TI nella didattica della matematica.

8.4. Il divario generazionale... e la sua relatività

I giovani si trovano più esposti alla tecnologia in generale e, come segnala Simone (2000), siccome non hanno alle spalle un grande passato, possono migrare verso le novità senza troppi rimpianti o ricordi di cose imparate da tempo. Questi due fattori fanno sì che la gioventù abbia una maggiore disponibilità verso l'informatica e che questo si riconosca sempre di più: «riconosciamo che i giovani... sono all'avanguardia nelle TIC e sono anche i primi che le hanno adottate» (WSIS, 2003a, p. 2).

La maggiore disponibilità si traduce nel fatto che i giovani tendono ad avere più competenze informatiche rispetto ai loro professori perciò si genera un *divario generazionale*, fenomeno drammatico che non deve essere sottovalutato perché mai accaduto nella storia dell'umanità che i giovani avessero più competenze degli adulti in un certo campo della conoscenza. Questa situazione provoca disagio in *entrambi* i gruppi. I docenti si bloccano davanti ai propri studenti arrivando anche a situazioni assurde come la proibizione, prepotente e non giustificata, dell'uso di uno strumento, semplicemente perché il docente non lo conosce o non lo domina. Esistono docenti che richiedono a *tutti* i loro studenti lavori scritti a mano «altrimenti, li copiano da Internet», il che riflette una mancanza di strategie per scoprire questo tipo di situazioni e agire di conseguenza, perdendo un'opportunità preziosa di educare i propri studenti su come usare gli strumenti a loro portata in modo etico e adeguato. Con questo tipo di «ragionamenti» si dovrebbe proibire l'uso dell'automobile o della televisione a tutta la popolazione semplicemente perché alcuni di loro ne fanno un uso sbagliato! Sintomatico al riguardo è il titolo del numero 24 che la rivista elettronica *Telèma* (http://www.fub.it/telema/Welcome.html) ha dedicato totalmente alla discussione di una parte di questo fenomeno: «chi spiega ai giovani un mondo a noi ignoto?».

Ma è necessario segnalare che il divario non è assoluto: è un mito che la maggior parte degli studenti usino l'informatica in *modo adeguato*. In molti casi neanche loro sono passati attraverso un processo *adeguato* di istruzione formale (anche se va segnalato che le cose stanno cambiando) e quindi, come in altre categorie della società, la loro formazione è basata principalmente sull'autoapprendimento. La nostra esperienza nell'insegnamento in corsi di laurea in ingegneria (primo biennio) ci mostra che la maggior parte degli studenti ha grandi carenze informatiche[14]: ne consegue che i docenti non dovrebbero avere timore dei propri studenti, ma dovrebbero piuttosto stabilire con loro una comunanza di apprendimento reciproco e collaborativo.

8.5. L'enorme sforzo di ristrutturazione

Parlando di cultura informatica, Breton (1987) avverte di *non sottovalutare* «*il potente sforzo di formazione e di ristrutturazione dell'attività intellettuale che l'acquisizione di una tale cultura presuppone*» (p.218), avvertimento che è vitale in qualsiasi processo di formazione e di integrazione dell'informatica. Nel caso dei docenti, la TI richiede di *ripensare motivi e contesti pedagogici e curricolari* (Kaput, 1992) e compiti non ovvi come la progettazione di prassi adatte al nuovo ambiente (Lagrange, 2000). Per esempio, i risultati della ricerca di Trouche (2000) con docenti di matematica che usano calcolatrici mostrano che la loro introduzione non semplifica il lavoro dei docenti, dato che si rende necessaria una nuova organizzazione dell'insegnamento e un nuovo stile di amministrazione del tempo della lezione.

Laborde (2001), nella sua analisi delle tappe di integrazione dell'informatica da parte di docenti di geometria che usano *Cabri-Géomètre*, segnala alcune dif-

14. Studenti che non sanno usare compattatori, che non sanno scaricare materiale da Internet, che si bloccano davanti a documenti in formato PDF, che usano in modo pessimo la posta elettronica, che non conoscono nemmeno l'uso delle più elementari combinazioni di tasti!

ficoltà per il docente uguali a quelle che devono affrontare altri docenti quando usano un altro software specifico e aperto all'insegnamento di altre materie: le nuove attività richiedono tempo da parte del docente e lo sviluppo di schemi specifici di strumentazione; inoltre esistono restrizioni legate al curriculum ufficiale e alla struttura del sapere matematico; ci vuole tempo affinché i docenti accettino che l'apprendimento può avvenire in un ambiente nuovo senza necessità di dover fare riferimento all'ambiente carta e penna, ecc. Di fatto, per tutte queste cause ed altre ancora, Laborde sottolinea che il processo di integrazione dell'informatica è un processo lungo.

Nel rapporto FITness (op. cit., 1999) si segnala che l'apprendimento che consenta di usare con scioltezza la TI è *personale*, *graduale* e *dinamico*. In questo caso ci interessa evidenziare la dimensione *personale*. Nel rapporto il significato di personale è il seguente:

> Le persone che usano con scioltezza la TI, valutano, distinguono, imparano e usano *nuova* TI nella misura in cui è utile per le loro attività personali e professionali. Quello che è adatto per una persona dipende dalle applicazioni particolari, dalle attività e dalle opportunità che ha di sviluppare detta scioltezza e che sono associate alla sua area di interesse o di specialità (p. 3).

D'altronde in didattica della matematica si sa che l'apprendimento personale richiede la cosiddetta *devoluzione*, fenomeno relativo al fatto che ognuno di noi si fa carico del proprio apprendimento. Crediamo che entrambe le considerazioni si possano applicare anche ai docenti.

8.6. Considerare poco il docente

Nel processo di integrazione della TI nell'aula, il *docente gioca un ruolo centrale* dato che, e qui estendiamo categorie proposte da Breton (2001) riguardo all'uso di Internet, il docente può comportarsi come *promotore militante*, come *detrattore* o come *utente critico* (cioè che considera che a certe condizioni l'uso razionale di TI può essere un fattore di progresso).

La posizione globale del NCTM sottolinea che un prerequisito per l'integrazione dell'informatica nell'educazione matematica è che i docenti abbiano piena coscienza dei suoi benefici potenziali. Coffland e Strickland (2004) indicano che questo tipo di preoccupazioni non è recente, come dimostra l'avvertimento di VanDeMark (1983) sul fatto che i docenti non solo dovrebbero essere coscienti delle potenzialità della TI ma anche dei problemi e delle diverse forme di uso in modo che possa essere impiegata positivamente nella pratica docente, soprattutto se prendiamo in considerazione che gli strumenti informatici modellano l'apprendimento in maniera non prevedibile e che l'apprendimento è estremamente sensibile a piccoli cambiamenti nelle tecnologie (Hoyles e Noss, 2003). Il docente dovrebbe essere preparato ad affrontare questa nuova situazione.

Tirosh e Graeber (2003) indicano che i progressi tecnologici sono una delle più grandi forze che spingono il cambiamento nei docenti (altre forze sono valori e convinzioni) ma questi progressi da soli non bastano.

Nonostante queste considerazioni, Dreyfus (2002), commentando lo studio di Lagrange, Artigue, Laborde e Trouche (2001) su più di 600 pubblicazioni concernenti l'uso di TI nella didattica della matematica, indica che una larga maggioranza di questi lavori si concentra nel descrivere le *possibilità* che offre un software più che nel ricercare *attività innovative in aula*, e fa un'interessante autocritica come ricercatore:

> «[Matematici e sviluppatori] Stiamo seduti davanti ai nostri computer impostando idee ingegnose su come mettere la matematica in uno schermo. Ma siamo meno ansiosi di pensare in profondità alla *progettazione di attività didattiche* basate sulle nostre idee meravigliose, e di provare queste attività *in vere situazioni di aula*. In più, solo alcuni di noi hanno i mezzi, l'esperienza, il tempo e la propensione per studiare seriamente quello che accade nell'insegnamento e nell'apprendimento quando si portano in aula questi meravigliosi software» (p. 17-18)

Ciò implica che questi importanti compiti si lasciano al docente, il quale però non sempre ha i mezzi, l'esperienza, la preparazione e il tempo per eseguirli.

Lagrange (2003) indica che la maggior parte della ricerca sull'uso di TI in didattica della matematica, fino al 1998, ha considerato solamente le dimensioni epistemologica (relazione tra la TI e il sapere matematico) e cognitiva (influenza della TI nella concettualizzazione) il che *non permette di spiegare* l'integrazione nell'aula. Si richiede che la ricerca consideri altre dimensioni di analisi. Lagrange propone due nuove dimensioni, una strumentale e una istituzionale (aula, scuola, sistema educativo, ecc.), in cui il docente gioca un ruolo centrale, soprattutto in questi aspetti chiave: le *decisioni* che prende quando tenta di integrare TI nella sua pratica docente; le *nuove competenze* che deve avere per poter gestire la lezione nel nuovo contesto; la sua formazione; e l'influenza della visione che ha della matematica e dell'informatica.

9. L'importanza di un'adeguata formazione del docente

9.1. I docenti: vittime di una formazione non adeguata

L'importanza della formazione del docente in campo informatico emerge nel *Piano di Azione* della WSIS nel modo seguente: «debbono definirsi politiche nazionali che garantiscano la piena integrazione delle TIC in tutti i livelli educativi sia nell'elaborazione di piani di studio, sia nella formazione dei docenti sia nella gestione e nell'amministrazione istituzionale» (WSIS, 2003b p. 6).

Lo studio del 1999 del NCES (2000) mostrò che il 99% dei docenti a *tempo pieno* delle scuole pubbliche degli Stati Uniti, dalla primaria al liceo, usano computer e Internet a scuola. Ma, come abbiamo visto, «usare» un computer significa poco se non si specifica come lo si usa e per fare che cosa. Infatti, lo stesso studio mostra che mentre una buona percentuale dei docenti di scuola secondaria e liceale lo usa per compiti amministrativi (47%), solo il 19% lo usa per ottenere informazioni utili alla preparazione delle lezioni, solo l'8% per cercare risultati di ricerca e forme efficaci di uso della TI e solo il 6% per comunicare con i propri studenti.

Riguardo alle percentuali dei docenti che fanno un uso del computer e di Internet da moderato a esteso in *attività con gli studenti*, lo studio mostra che nella scuola secondaria e nei licei, solo il 44% li usa come strumenti di istruzione in aula; solo il 20% nella risoluzione di problemi e nell'analisi di dati; solo il 21% per dimostrazioni e simulazioni e solo il 7% li promuove come strumenti di comunicazione.

D'altronde non è facile sapere come usare la TI in forma efficace, perciò non è affatto semplice insegnare a usarla in questo modo: «se usare in modo efficace la TI fosse così semplice come guidare una macchina o usare un cassiere automatico, sarebbe semplice conoscere che cosa si dovrebbe sapere di TI per essere capaci di usarla» (NAS, 1999 p. 13). Ma le cose non stanno così, dato che questo è il prezzo da pagare per la dimensione di universalità della TI, che a sua volta implica la necessità di una formazione adeguata.

Infatti, nello stesso studio del NCES (2000) cui abbiamo appena fatto riferimento, i risultati sulle convinzioni dei docenti sulla loro preparazione nell'usare computer e Internet nella loro pratica docente, indicano che (solo nei casi della scuola secondaria e superiore): il 15% di loro non si sente per nulla preparato e il 50% si sente poco preparato dunque con una maggioranza del 65% che si sente poco o per nulla preparato. Inoltre solo il 23% si sente ben preparato e solo il 12% si sente molto ben preparato. Il che non vuol dire (come attestano i risultati dello studio del rapporto FITness) che questo corrisponda alla realtà (la cosa più probabile è che non sia così).

Infatti il rapporto FITness (l'op. cit, 1999) indica alcuni errori nella formazione informatica: «la formazione nelle applicazioni si è concentrata nell'uso degli strumenti e ha *ignorato una descrizione più generale di principi e concetti*» (p. 11); le conseguenze sono che

> quando qualche cosa non funziona, o quando è disponibile una nuova applicazione, le persone con questi antecedenti si sentono perse, non sanno che cosa fare e molte volte si sentono frustrate. Cercano aiuto, il che aumenta il loro sentimento di mancanza di controllo e, di solito, l'aiuto che ricevono si riferisce al problema immediato senza offrire più conoscenza di base per cui il problema si perpetua» (p. 11).

In più, la dinamicità dell'informatica implica un processo di *apprendimento permanente* e quindi una formazione *continua*.

Il settore educativo è formato, fondamentalmente, da quattro categorie di individui: gli *studenti*; i *docenti*; gli *amministratori* e le *autorità*. In ciascuna categoria la mancanza di efficacia informatica può essere individuale, collettiva o istituzionale (da una scuola fino a un'università). La mancanza di cultura informatica in una delle categorie provoca, inevitabilmente, un calo di efficacia nelle altre categorie.

Dreyfus (2002, p. 1) sottolinea che molte delle difficoltà nell'integrare l'informatica nell'educazione «sono connesse spesso al conservatorismo dei sistemi educativi e alle *difficoltà che i docenti accusano nel cambiare le proprie forme di pensiero e i propri atteggiamenti nell'aula*». Ciò nonostante, al di là di queste difficoltà, vogliamo porre in rilievo due errori relativi alla formazione del docente nell'uso di TI.

9.1.1. Primo errore: «l'hardware è sufficiente»

Scavetta (1992, p. 135) fornisce un esempio piuttosto illuminante di questo errore, che riguarda l'informatizzazione del giornale francese *Libération*: «è avvenuta nell'arco di un fine settimana, in occasione del cambiamento di sede del quotidiano. Il venerdì i giornalisti utilizzavano la macchina per scrivere, il lunedì mattina hanno trovato i computer sulle scrivanie dei nuovi uffici», Scavetta, con ragione, usa il termine di *informatizzazione selvaggia*, aggiungendo che, più che l'eccezione, questa sembra essere la regola. Infatti, la realtà indica che la maggioranza delle persone non è passata attraverso un processo di formazione formale, ma al massimo ha seguito un non ben definito «corso di informatica». Le conseguenze sono sotto gli occhi di tutti: la maggior parte delle persone non usa, sotto utilizza o usa male l'informatica. Ciò si riflette in una scarsa produttività e crea problemi personali (rifiuto assoluto, ansietà, frustrazione, insicurezza, ecc.), collettivi e istituzionali (perdita di tempo, inefficienza, duplicazione di attività, perdita di informazione, ecc.).

Una delle cause è una visione estremamente ingenua, derivata dalla mancanza di cultura informatica di enti, istituzioni e datori di lavoro: durante molto tempo hanno creduto in modo illusorio (e alcuni sfortunatamente continuano a crederlo) che basta dare un computer agli impiegati affinché imparino automaticamente a usarlo in modo adeguato ed efficace. Nulla più lontano dalla realtà! Questa visione ingenua è contraddetta ogni giorno dalla realtà, come abbiamo mostrato precedentemente.

Certe autorità scolastiche, con lo scopo di «promuovere» l'uso della TI, prendono decisioni estremamente discutibili, per esempio *improvvisano professionisti*. In Italia, abbiamo conosciuto personalmente, anche recentemente, casi di docenti liceali che sono *costretti* ad «insegnare» informatica senza avere un'adeguata preparazione. Queste autorità credono che se un matematico insegna matematica e un fisico insegna fisica allora ha la capacità di insegnare informatica: ma ciò è falso! Peggio ancora il caso di un architetto che per tutta la sua vita lavorativa aveva insegnato disegno in un corso chiamato «*Educazione tecnica*» sostituito da un anno all'altro dal corso «*Tecnologia e informatica*» dove non si insegna più disegno ma informatica. Nessuno ha chiesto alla docente se conosceva quell'argomento; questa insegnante non era nemmeno una discreta utente dell'informatica! Durante le sue ferie si è messa a studiare due libri che i suoi studenti avrebbero usato durante il corso, entrambi basati sul sistema operativo *Windows*; quando il corso è iniziato, l'insegnante ha scoperto con amarezza che tutti i computer dell'aula di informatica dove doveva insegnare avevano il sistema operativo Linux! Ancora più sconosciuto!

Casi come questo illustrano il fatto che l'informatizzazione frequentemente è imposta e quasi mai pianificata o negoziata con i lavoratori.

Questo tipo di atteggiamento, purtroppo ancora comune nelle autorità scolastiche, deriva da una mancanza di cultura informatica e ha profonde conseguenze negative sui docenti (rifiuto, stress, insicurezza, ecc.), sugli studenti (che non ricevono una formazione adeguata, perpetuando una spirale di formazione improvvisata) e sull'istituto scolastico stesso.

9.1.2. Secondo errore: formazione indipendente dal dominio

Lo sviluppo di competenze informatiche deve essere legato all'area di interesse o di lavoro della persona coinvolta. La scioltezza nell'uso di TI «non dovrebbe vedersi come... *indipendente dal dominio* ma come qualcosa da sviluppare... in *particolari* campi di interesse, che hanno diversi profili *a seconda del dominio coinvolto*» (NAS, 1999 p. 3).

Da qui l'importanza di una formazione particolare del docente: non si può pretendere che persone che ignorano il campo di lavoro del docente possano offrire una formazione adeguata ai docenti nell'uso di TI, a meno che non siano esperti molto competenti nell'uso di TI di un *certo* tipo. Quindi, per aiutare i docenti, sarebbe necessario avere formatori esperti non solo in informatica ma anche nel lavoro del docente.

Ma siccome tale profilo professionale non è facile da trovare (in parte l'informatica è giovane), si propongono ai docenti molti «corsi di informatica» tenuti da specialisti di informatica generale, che ignorano la specificità del lavoro del docente, perché le questioni educative restano così subordinate alle convinzioni dell'esperto informatico su quello che *potrebbe* essere utile ad un docente. Il risultato tipico di questi corsi è il senso di frustrazione nei docenti, la noia e nei casi estremi la loro totale inutilità con il conseguente spreco di sforzi e di risorse.

Un esperto informatico non può sapere tutto; anzi, nel caso dell'uso di software specifico, sono gli utenti intensivi quelli che ne diventano esperti. Una strategia di formazione che funzionerebbe meglio sarebbe la formazione tra pari.

9.2. Che cosa sarebbe necessario sapere

Nel caso di software di matematica per computer, non basta formare i docenti nel suo uso, ma è necessaria anche una formazione nell'uso della TI generica.

Al riguardo, una delle più importanti osservazioni nel rapporto FITness (l'op. cit., 1999) si riferisce a quello che una persona dovrebbe conoscere:

> Forse, la più grande sfida per le persone che intraprendono la strada dell'apprendimento permanente dell'uso efficace della TI consiste nel decidere *quando imparare* l'uso di un *nuovo* strumento, *quando passare* a una *nuova* tecnologia, *quando* dedicare energia per aumentare la propria competenza informatica e *quando* dedicare tempo ad altre attività professionali» (p. 17).

Questo in opposizione a ciò che accade in molti casi nei quali, per mancanza di cultura informatica, le persone sono vittime delle decisioni prese da altri o da loro stesse (un esempio «classico» è il dannoso cambio di versione del proprio sistema operativo, o altro software, che prima funzionava perfettamente e che poi provoca molti nuovi problemi).

Nel caso dei docenti di matematica questo significa che il docente che usa la TI in aula dovrebbe avere le competenze per decidere *quando* imparare l'uso di un nuovo strumento informatico (hardware e software), *quando* passare a uno strumento nuovo, *quando* dedicare energia per aumentare la sua competenza nell'uso di un certo strumento e *quanto* tempo dedicare a questo tipo di attività.

Una persona che usa in modo efficace la TI, oltre a dominare un insieme di abilità tecniche, ha imparato una serie di concetti di base e ha sviluppato una serie di capacità intellettuali sufficienti per acquisire una nuova conoscenza sulla TI in modo *indipendente*, il che gli permette di allargarne l'uso e di adattarsi rapidamente ai cambiamenti.

Nella misura in cui impara di più, aumenta la sua competenza generale, e quindi la sua disposizione a provare l'uso di TI nella soluzione di problemi notevoli (personali e collettivi).

Il rapporto FITness (l'op. cit., 1999) sintetizza che una persona con adeguate competenze informatiche dovrebbe:

- usare la TI con fiducia;
- essere in grado di imparare rapidamente sistemi nuovi (fondamentalmente software) e di usarli in modo efficace;
- avere la capacità di applicare la TI alla soluzione di problemi importanti;

- avere la capacità di adattarsi all'inevitabile evoluzione dell'informatica durante tutta la vita;
- possedere la conoscenza essenziale per poter usare la TI in modo efficace ora e nel futuro.

10. Considerazioni finali

Più di dieci anni fa, Chevallard (1992) segnalava che frequentemente le strategie basate sull'uso dell'informatica sottovalutano i problemi logistici cui deve far fronte il docente. Sfortunatamente, questa continua a essere la tendenza in molti ambienti, come viene dimostrato dai seguenti due esempi.

Enciclomedia è un ambizioso progetto del governo messicano che fondamentalmente consiste, nella sua prima tappa, nella presentazione elettronica del contenuto dei testi dei corsi di quinta e sesta elementare con diverse risorse multimediali (SEP, 2004). Nel documento di riferimento si parla di «attrezzatura tecnologica» ma senza specificare in che consiste tale attrezzatura, anche se si può intuire che, come minimo, si richiede un computer e un proiettore. Al di là delle affermazioni ufficiali è interessante osservare quello che accade nella realtà in alcuni casi. Di seguito si presentano due testimonianze, la prima di un'insegnante, la seconda di una madre (pubblicate entrambe nel giornale *La Jornada*, i giorni 25 e 27 febbraio di 2005):

> «Dimmi se non ti viene da ridere. Nella scuola dove lavoro stanno per installare *l'Enciclomedia*, ma non abbiamo energia elettrica da quasi un anno!» [insegnante];

> «Giorni fa sono andata a una riunione di genitori nella scuola di mia figlia, del sesto anno elementare. L'insegnante è brava e l'apprezzo; orgogliosa ci ha mostrato la famosa *Enciclomedia*. In quell'aula entra molta luce per cui quando si accende il proiettore non si vede nulla, ma proprio nulla! Allora ci hanno chiesto soldi per acquistare tende scure. Più tardi l'insegnante ci ha detto che non può usare la stampante che avevano perché le cartucce costano troppo e nel progetto *Enciclomedia* queste spese non sono considerate. – Daranno periodicamente manutenzione alle macchine? – Ho chiesto. – *No, quello non è contemplato...* – Per finire ho chiesto: lei ha Internet? No, perché il cavo del telefono non è abbastanza lungo per raggiungere la stanza del preside dove si trova l'unico collegamento» [madre di famiglia].

Nel migliore dei casi, possiamo interpretare questo tipo di atteggiamento delle autorità come una mancanza di cultura informatica che impedisce loro di capire che le attrezzature informatiche richiedono condizioni adeguate e manutenzione per poter essere realmente usate.

La fisica, la chimica e la biologia hanno già i propri laboratori, anche se la tendenza è di passare a laboratori «virtuali» (in grande misura perché costano meno), mentre per la Matematica il laboratorio è costituito da computer e calcolatrici. Sfortunatamente, molti amministratori hanno la forte convinzione che l'insegnamento e l'apprendimento della matematica si fa con carta e penna (in parte come conseguenza della propria esperienza di studenti), quindi, per l'uso di aule informatiche, la priorità è data ad altre aree della conoscenza, principalmente a quelle legate all'informatica, poi a quelle applicative, poi allo studio di lingue straniere e alla fine, se c'è spazio libero, alla matematica.

Infatti, in una ricerca in corso che l'Autore sta eseguendo con docenti di matematica di liceo in Messico e in Italia, uno dei docenti messicani che ha usato software di matematica coi suoi studenti durante anni ha smesso di farlo perché la sua scuola non gli dà più accesso a un laboratorio informatico:

> da 4 semestri non posso più usare i computer con i miei studenti, perché l'attuale centro computer è sempre pieno, e i computer 386 che avevamo recuperato sono stati gettati via [come immondizia] per trasformare la nostra aula di informatica in un laboratorio per l'insegnamento delle lingue.

Come si può intuire, le autorità scolastiche coinvolte denotano una grande mancanza di cultura informatica perché gettano via computer funzionanti credendoli troppo vecchi, e hanno la convinzione segnalata prima: per insegnare e imparare la matematica basta carta e penna. L'informatica è vista come qualcosa di addizionale, in contrapposizione alle indicazioni di organismi internazionali e nazionali specializzati.

Questo è uno dei motivi per cui molti docenti di matematica hanno deciso di usare calcolatrici (e alcuni CBL, *Calculator Based Laboratory* o CBR, *Calculator Based Ranger*) perché almeno non richiedono un laboratorio informatico.

Come conseguenza di quanto esposto fin qui, non ci sono dubbi che esistano certi prerequisiti affinché il docente di scienze usi la TI nella sua pratica:

1. accesso *adeguato* ad hardware, software e laboratorio per docenti e studenti;
2. *adeguata* formazione del docente in informatica generale;
3. *adeguata* formazione del docente nell'uso di software specifico.

Le autorità scolastiche dovrebbero *capire* l'enorme sforzo di quei docenti che hanno accettato la sfida dell'informatica nonostante non abbiano tutti gli elementi precedenti. Questa comprensione dovrebbe portarli a *incentivare* questi docenti, garantendo loro i prerequisiti detti e contribuendo economicamente.

Oltre ai prerequisiti precedenti, ne esistono altri due che consideriamo molto importanti:

1. accesso a materiali per lavorare nel nuovo contesto;
2. flessibilità nel curriculum (contenuti e sequenza).

Da parte dei docenti, non è necessario aspettare tutto dall'alto. L'argomento fatalistico «non ho condizioni per usare la TI con i miei studenti», potrebbe essere sostituito da questi altri due:

- «***che cosa posso fare con quello che ho già?***» (ad esempio: usare una versione DOS di un software invece di una per *Windows*; usare software *freeware* invece che commerciale; usare la versione *demo* di un software anziché quella completa; imparare a navigare *off-line* invece di chiedere accesso ad Internet; progettare metodologie adatte per sfruttare al meglio tutto ciò di cui già si dispone, ecc.)
- «***che cosa posso fare per migliorare le condizioni attuali?***» (ad esempio: convincere le autorità scolastiche ad attuare alcuni cambiamenti; lavorare in gruppo con altri docenti; progettare strategie per l'acquisizione di software, ecc.)

È importante non demoralizzarsi di fronte agli ostacoli perché è in gioco il futuro dei giovani.

ALLS - The Adult Literacy and Lifeskills Survey
Information And Communication Technology Literacy Assessment Framework http://www.ets.org/all/ICTL_2nd_framework.pdf (24/08/04), 2000.

Aragon J.L.
¿Hacia un nuevo paradigma?, *Ciencia y Desarrollo*, México D.F., n. XXII (127), 53-58, 1996.

Artigue M.
Le logiciel 'Derive' comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Educational Studies in Mathematics*, 33(2), 133-169, 1997.

Bako M.
Mathematical software in the educational process of the French and Hungarians teachers. In: M. Borovcnik & H. Kautschitsch (Eds.), *Proceedings of International Conference on Technology in Mathematics Teaching 5* (pp. 37-40). Vienna: Schriftenreihe Didaktik der Mathematik vol. 25, öbv&hpt, 2002.

Barzolizzi E. & Bachmann C.
I rischi del mestiere: Il burnout nella professione docente. http://www.gildains.it/burnout/bartolozzi.htm (12/07/05), 2003.

Berger P.
Affective components of teachers' computer beliefs: role of specific aspects. In: K. Krainer, F. Goffree & P. Berger (Eds.), *Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, *CERME*-1 (pp. 63-78), vol. 3. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik, 1999.

Breto P.
Histoire de l'informatique. Paris: Éditions La Découverte. [Trad. it: *La storia dell'informatica*. Bologna: Cappelli Editore, 1992], 1987.

Breton P.
Il culto di Internet. L'interconnessione globale e la fine del legame sociale. Torino: Testo & Immagine, 2001.

Bricio D.
Ideas sobre el futuro de la Matemática Aplicada. *Reunión Nacional de Matemáticas*, Coahuila, México, 65-89, 1992.

Chevallard Y.
Intégration et viabilité des objets informatiques dans l'enseignement des mathématiques. In B. Cornu (Ed.), *L'ordinateur pour enseigner les Mathématiques*, *Nouvelle Encyclopédie Diderot* (pp. 183-203). Paris: Presses Universitaires de France, 1992.

Coffland D. & Strickland A.
Factors Related to Teacher Use of Technology in Secondary Geometry Instruction, *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 23(4), 347-365, 2004.

Colwell R.
Information technology Ariadne's thread through the research and education labyrinth, *EDUCAUSE review*, May/June 2000, 15-18, 2000.

Contu, I.
La sapienza della scuola è più moderna, telematica. Telèma, 12. http://www.fub.it/telema/TELEMA12/Contu12.html (16/03/04), 1998.

DfES
Transforming the way we learn, a vision for the future of ICT in schools. Department for education and skills, UK, 2002.

Dreyfus T.
Computer-rich learning environments and the construction of abstract algebraic concepts. In: M. Borovcnik & H. Kautschitsch (Eds.), *Proceedings of International Conference on Technology in Mathematics Teaching 5* (pp. 17-32). Vienna: Schriftenreihe Didaktik der Mathematik vol.25, öbv&hpt, 2002.

Edelwich J.E. & Brodsky A.
Burn-out. Stages of disillusionment in the helping professions. New York: Human Sciences Press, 1980.

Garner R.
Nearly half of teachers have suffered from mental illness. *The Independent*, 23 de marzo de 2005.

Gjone G.
«New math» for the 21st century. In: A. Rogerson (Ed.), *Proceedings of the International Conference on Mathematics Education into the 21st Century: Societal Challenges, Issues and Approaches*, vol. III (pp. 11-15). El Cairo, 1999.

Guin D. & Trouche L.
The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3(3), 195-227, 1998.

Horgan J.
The death of proof. *Scientific American*, n. 10, 74-82, 1993.

Hoyles, C. & Noss R.
What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? In: A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & F.K.S. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 323-349). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003.

Kaput, J.
Technology and mathematics education. In: D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan, 1992.

Kissane B.
Technology for the 21st century: The case of the graphics calculator. In: A. Rogerson (Ed.), *Proceedings of the International Conference on Mathematics Education into the 21st Century: Societal Challenges, Issues and Approaches*, vol. I (pp. 208-219). El Cairo, 1999.

Laborde C.
Integration of Technology in the Design of Geometry Tasks with Cabri-Geometry, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6(3), 283-317, 2001.

Lagrange J.B.
Analysing the impact of ICT on mathematics teaching practices. *Proceedings of CERME-3*, Bellaria. http://www.dm.unipi.it/%7Edidattica/CERME3/proceedings/Groups/TG9/TG9_Lagrange_cerme3.pdf (21/06/05), 2003

Lagrange J.-B., Artigue M., Laborde C. & Trouche L.
A metastudy on IC technologies in education. In: M. Heuvel (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of PME*, vol. 1 (pp. 111-122). Utrecht: OW&OC, 2001.

Lagrange J-B.
L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement: Une approche par les techniques, *Educational Studies in Mathematics*, 43(1), 1-30, 2000.

Levy P.
Cyberculture. Rapport au Conseil de l'Europe. Éditions Odile Jacob. [Trad. it.: *Cybercultura. Gli usi sociali delle nuove tecnologie*. Milano: Feltrinelli, 2001], 1997.

NAS - National Academy of Sciences
Being Fluent with Information Technology. Washington, DC: National Academy Press, 1999.

NCES - National Center for Education Statistics
Teacher use of computers and the Internet in public schools. http://nces.ed.gov/pubs 2000/2000090.pdf (16/07/05), 2000.

NCES - National Center for Education Statistics
Digest of Education Statistics 2003, *Chapter 7: Libraries and Educational Technology*. http://nces.ed.gov/programs/digest/d03/ch_7.asp (16/07/05), 2003.

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics
Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM, 2000.

NRC - National Research Council
Adding it up: Helping children learn mathematics. In J. Kilpatrick, J. Swafford & B. Findell (Eds.), *Mathematics Learning Study Committee*. Washington, DC: Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education, National Academy Press, 2001.

Oldknow A.
The government's strategy for ICT in education – what's in it for mathematics?, *Micromath*, 16(2). http://www.atm.org.uk/journals/micromath/articles/mmarchivepdfs/mm162oldknow.pdf (05/07/05), 2000.

Ramonet I.
Le nouvel ordre Internet. *Le monde diplomatique*, enero de 2004.
Scavetta D.
Le metamorfosi della scrittura. Firenze: La Nuova Italia, 1992.
SEP – Secretaría de Educación Pública de México
Programa Enciclomedia Documento Base. http://www.sep.gob.mx/work/appsite/Enciclomedia/documentonciclomedia.pdf (18/07/05), 2004.
Simone R.
La Terza Fase (Forme di sapere che stiamo perdendo). Bari: Editori Laterza, 2000.
Steiner H.G.
Needed cooperation between science education and mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, n. 6, 194-197, 1990.
Strehle E.L., Whatley A., Kurz K.A. & Hausfather S.J.
Narratives of Collaboration: Inquiring into Technology Integration in Teacher Education.

3. Atolli matematici: è in arrivo il testo per le prime medie

Gianfranco Arrigo

The author of the present article not only aims at informing about the publication of the new volume “Atolli matematici 1”, addressed to first year secondary school pupils, but also at introducing the didactical principles on which the new series of handbooks is based. In 2007, a book intended for second year secondary school pupils will complete the series. Moreover, the title “Atolli matematici” denotes a teaching philosophy based on the latest theories of mathematical didactics. It also takes into consideration the wealth of experience belonging to a whole generation of teachers next to conclude their own working life.

Introduzione

La realizzazione della collana di testi di matematica per la scuola media «Atolli matematici» procede secondo programma e dal prossimo mese di agosto sarà in libreria il volume per le prime[1], che si unirà ai già collaudati manuali per le terze e per le quarte.

«Atolli matematici» è anche l’etichetta di una filosofia dell’insegnamento, fondata sulle più recenti teorie della didattica della matematica, che nel contempo vuole tenere conto del grande bagaglio di esperienza accumulato da una generazione di insegnanti giunti quasi alla fine del loro ciclo lavorativo. Il compito che gli autori della nuova collana hanno assunto è senza dubbio fra i più ardui nel campo dell’editoria scolastica, e per diversi motivi.

Intanto diciamo subito che volersi fondare sulla ricerca in didattica della matematica è affermazione che va almeno un po’ precisata. Esistono molte teorie, che occorre conoscere per poi poter operare scelte non avventate; esistono, nella prassi didattica, mode più o meno passeggere, ma anche assunti e principi che si potrebbero senza esitazione definire universali.

Inoltre, chi si assume l’onere di scrivere libri di testo non può non tenere conto dell’esistenza della tradizione culturale locale e della storia recente del settore al quale si riferisce, iniziata, nel nostro cantone, col numero 27 di «Scuola ticinese», o, per maggior chiarezza, con la creazione della scuola media – detta allora «unica» – che, almeno istituzionalmente, è ancora quella di oggi.

Al di là dell’importanza di offrire alla nostra scuola materiali didattici adeguati e aggiornati alle esigenze dell’insegnamento e aperti a ciò che è dibattuto, studiato e prodotto fuori dai ristretti confini del nostro mondo – aspetto, questo, di solito poco avvertito dagli insegnanti che in buona parte continuano a usare materiali prodotti

1. «Atolli matematici 1» è stato scritto da Gianfranco Arrigo, Giovanna Corrent, Giorgio Mainini e Azzurra Marchio ed è pubblicato dall’editore Giampiero Casagrande di Lugano.

da loro – la nuova collana si propone come tentativo dichiarato di tradurre in classe, per un'intera popolazione scolastica, gli importanti risultati cui sono giunte le ricerche teoriche e sul campo.

Il compito, oltre che essere di per sé complesso, appare anche di non facile comunicazione. Ciò spiegherebbe, almeno in parte, le perplessità con le quali alcuni insegnanti hanno accolto il primo volume, «Atolli matematici 3». È soprattutto per questo che ogni tanto si torna a parlare di questa pubblicazione, non certamente per narcisismo come qualche mala lingua ha affermato.

Desidero ringraziare gli insegnanti e i genitori che, nel segno di una sincera amicizia, ci hanno segnalato imperfezioni, sviste ed errori sui due volumi già usciti che, come sa bene chi ha già pubblicato, sono inevitabili in una prima edizione.

«Atolli matematici 1»: alcune linee direttrici teoriche

Anche se l'idea didattica di atollo è già stata più volte spiegata (Arrigo, 2004a, 2004b), mi sembra doveroso riprenderla. Essa è fortemente legata alla teoria dell'apprendimento del concetto matematico sviluppatasi, già a partire dagli anni sessanta, grazie ai contributi di numerosi studiosi, fra i quali ritengo doveroso citare Efraim Fischbein. In sintesi, il concetto matematico viene costruito a tappe successive, nel tempo, attraverso una serie di immagini mentali (D'Amore, 1999) che, nei passi successivi, perdono via via gli elementi varianti, fin che rimangono solo gli invarianti che ne costituiscono il modello mentale, destinato a perdurare e a essere convenientemente formalizzato. Ma, perché ciò avvenga, occorrono almeno due condizioni:

- bisogna lasciare evolvere le immagini mentali per un lasso di tempo sufficiente e in situazioni di apprendimento il più possibile ricche matematicamente e variate;
- bisogna evitare di lasciare cristallizzare immagini mentali errate, incomplete o soffocate da elementi varianti ininfluenti sul concetto matematico; in breve, occorre evitare che si formino misconcetti (o, in generale, misconcezioni).

Qualcuno sorriderà, pensando che queste due condizioni sono note da decenni agli insegnanti sperimentati. Attenti, però, perché se così fosse, non si sarebbero commessi buona parte degli errori didattici che, da un osservatorio adatto, si possono tuttora riscontrare.

Per esempio, non si farebbero certe formalizzazioni su immagini mentali inesistenti o ancora molto provvisorie.

Per esempio, si avrebbe più cura di sviluppare molto prima le immagini mentali necessarie alla comprensione di certi concetti basilari.

E ancora, non si continuerebbe a far riprodurre procedure o formalizzazioni di concetti ad allievi – solitamente definiti insufficienti o da corsi base – che non sono riusciti a costruire immagini mentali adeguate (quasi sempre non per causa loro).

Riconosco che in questo senso abbiamo sbagliato tutti, chi più chi meno, e ammetto pure che è nel sistema scolastico stesso e nella società in generale che vanno ricercate le cause profonde di questi comportamenti erronei. Ciò non toglie che l'apprendimento della matematica e, più in generale, l'educazione al pensiero scientifico dei nostri giovani sono condizionati anche da questi aspetti didattici. Ma gli errori didattici – fortunatamente – si possono correggere, anche se non è sempre facile…

Una delle caratteristiche degli atolli è proprio quella di mettere l'allievo davanti a un buon numero di situazioni, in modo che possa sviluppare, passo dopo passo, le proprie immagini mentali, passando attraverso momenti di crisi nei quali l'immagine attuale si rivela non adeguata alla nuova situazione (i cosiddetti conflitti cognitivi), momenti che oggi si riconoscono fondamentali nel processo di formazione.

Ecco perché, già nel testo di prima media, si pone l'allievo nella condizione di sperimentare la frazione come parte, come rapporto e come probabilità, per poi proseguire in seconda col passo più deciso verso il numero razionale, che verrà poi formalizzato (quel tanto che basta) in terza e perfezionato in quarta.

Ecco perché, già nel testo di prima media, si affronta il calcolo in tutti i suoi aspetti: mentale, con la calcolatrice, con il computer e persino letterale. Ovviamente col passo di un allievo di prima; anzi con un passo leggermente più lungo, quel tanto che basta per consentirgli di progredire, di agire in quell'ambito che Vygotsky[2] definisce *zona prossimale di sviluppo*, con una mirabile immagine (Schneuwly e Bronckart, 1985).

Ecco perché, già nel testo di prima media, la geometria è subito un continuo passaggio tra spazio e piano, fatto all'inizio mediante manipolazione e costruzione di modellini, che passa poi – con cautela – agli schizzi a mano libera (primi modelli matematici) e alle costruzioni con gli strumenti geometrici e informatici: ciclo ripreso poi, con le variazioni del caso, nei volumi successivi.

Ecco perché, già nel testo di prima media, il laboratorio matematico dà la possibilità agli allievi di toccare con mano certe questioni matematiche, semplici in partenza, ma dagli sviluppi imprevedibili, talune sfocianti persino in problemi ancora irrisolti, come si proporrà regolarmente anche negli altri volumi.

Esempi di misconcezioni se ne vedono tutti i giorni in classe. Vale forse la pena di citarne alcune, che preoccupano in modo particolare gli autori di «Atolli matematici 1», i quali, di conseguenza, hanno cercato di proporre contromisure, almeno quelle più facilmente inseribili in un libro di testo. Fra queste misconcezioni ne cito due, a mo' d'esempio.

- Le immagini secondo le quali la moltiplicazione darebbe un risultato sempre maggiore dei fattori e la divisione uno sempre minore del dividendo;
- L'idea errata che un'uguaglianza si debba leggere necessariamente da sinistra a destra, con la conseguenza, per esempio, di distinguere tra proprietà associativa e proprietà dissociativa.

Infine si è pure tenuto conto di aspetti erronei tuttora presenti nella prassi didattica e causa di non poche misconcezioni degli allievi. Cito qualche esempio.

- La pericolosa infiltrazione di elementi non matematici come, in geometria, il sistema di riferimento geografico-fisico *orizzontale/verticale*. Nel

2. Per *zona prossimale di sviluppo* s'intende quella parte di apprendimento che il soggetto riesce a conquistare autonomamente (cioè non per imitazione), con l'aiuto di un certo numero di stimolazioni opportune, solitamente fornite dall'insegnante. In questo modo si riesce a ottenere dagli allievi prestazioni normalmente fornite un paio d'anni più tardi.

caso della rappresentazione di figure piane su un foglio quadrettato, ciò porta a considerare addirittura *orizzontale* la direzione del suo lato minore e dunque a riconoscere un trapezio solo se ha i due lati paralleli «orizzontali» e a chiamare gli altri «*lati obliqui*». In modo più nascosto ciò porta a chiamare *lunghezza* e *larghezza* le dimensioni di un rettangolo e *lunghezza*, *larghezza* e *altezza* quelle di un parallelepipedo rettangolo.

- L'abitudine di parlare di base e altezza di un poligono, legata unicamente a casi particolari, che porta a dire che il triangolo ha tre basi e tre altezze (preferiremmo dire tre coppie (base, altezza) – e su questo, niente da recriminare – ma anche che un trapezio ha due basi e una sola altezza e che dal pentagono in su i poligoni non possiedono né basi né altezze…
- L'abitudine di parlare di basi (o diagonali) *maggiori/minori*, che, per esempio, porta a un'evidente contraddizione quando si afferma che il quadrato è sia un trapezio sia un rombo.
- L'abitudine didattica di far precedere la geometria del piano a quella dello spazio – trasportando in classe, senza alcuna trasposizione didattica, lo schema assiomatico (risalente a Euclide) – relegando così la geometria dei solidi a qualcosa da fare alla fine del corso, se resta il tempo. Ciò causa due grossi difetti all'apprendimento della geometria: l'insufficiente capacità degli allievi di risolvere problemi nello spazio tridimensionale (3D) e l'impossibilità di poter conoscere una sola geometria (euclidea), modello dello spazio fisico in cui viviamo, che in certe situazioni è utile trasportare su un piano (2D), in altre su una linea (1D) per poi sempre tornare alla realtà (3D).

Motivazione e volizione

C'è infine un altro aspetto del complesso sistema insegnamento/apprendimento; un aspetto sul quale l'autore di un manuale scolastico non può influire in modo sensibile, almeno in apparenza. Per capirlo, dobbiamo entrare nel delicato ambito dell'affettività. L'insegnante sa benissimo che può preparare le sue lezioni nel migliore dei modi, predisporre i mezzi didattici migliori, tenere conto di tutto ciò cui abbiamo accennato finora, ma, se gli allievi non sono disposti ad apprendere, la sua azione didattica è destinata a fallire. Occorre quindi riflettere sulle dinamiche relative alla motivazione e alla volizione legate all'apprendimento. Riconosciuto che il primo e fondamentale passo verso l'apprendimento si compie in situazione a-didattica[3] e che, affinché ciò avvenga, è indispensabile che si verifichi il fenomeno della devoluzione[4], il problema si sposta sulla questione consistente nel cercare di mettere a fuoco mezzi, modi o strate-

3. Si chiama *a-didattica* una situazione che vede come soli protagonisti gli studenti e l'oggetto della conoscenza; in particolare in assenza dell'insegnante. Si può ottenere proponendo problemi che stimolano gli allievi a cercare una risposta, senza che vi sia alcun obbligo didattico. L'allievo agisce da solo (o in un gruppo), fa tentativi, verifica, se necessario torna sui suoi passi, tenta di nuovo e così via.
4. La *devoluzione* è lo stato nel quale l'allievo accetta di assumersi la responsabilità del proprio apprendimento.

gie applicabili in classe che aiutino l'insegnante a ottenere dai propri allievi questo importante atto di volontà.

La domanda che gli autori si sono posti è questa: come è possibile dare un contributo tangibile anche a questo delicato aspetto dell'apprendimento per mezzo di un manuale, che è pur sempre un libro, e quindi, in un certo senso, uno strumento perdente in partenza?

Ecco spiegato il perché della metafora della crociera nell'oceano degli atolli, che sta a significare che la matematica da apprendere non è più vista come una costruzione perfetta (nel senso che tutto è già stato predisposto), oggettiva (nel senso che il soggetto non può interagire per eventualmente modificarla) e totalmente estranea all'esperienza di vita che ogni allievo si porta dietro, ma, per contro, come una disciplina (un insieme di conoscenze, di modi di fare e di comportarsi) che ciascuno può costruirsi praticando un certo numero di famiglie di situazioni – gli atolli, appunto – che lo aiutano dapprima a formare e a modificare le immagini mentali spontanee, poi, ad affinarle sempre più, fino a raggiungere lo stato di modello matematico. Lo slogan dell'immaginaria crociera nell'oceano degli atolli potrebbe essere «più atolli esplori, più importante sarà la tua competenza matematica» e, come raccomandazione per i passeggeri, potremmo riproporre l'aforisma di Sarrazy «credimi, dice il maestro all'allievo, osa utilizzare il tuo proprio sapere e imparerai».

Anche i dialoghi introduttivi di ogni sezione sono da interpretare in questa prospettiva: il loro ruolo è principalmente quello di aiutare gli allievi a dare il giusto senso a ciò che stanno per imparare.

Nel tentativo di far provare agli allievi il piacere di fare matematica, si sono privilegiate le attività meno scontate, meno abituali, meno ripetitive. Le proposte più qualificanti in questo senso si trovano nell'atollo «Laboratorio matematico»: sono problemi che, se non mi si consente di definire «stimolanti, accattivanti, intellettualmente gratificanti», non mi si potrà impedire di qualificare come stimoli «che non lasciano per nulla indifferenti». Il concetto di laboratorio matematico, oggi, è diffuso in gran parte anche fuori dai nostri confini geografici, a volte con la stessa denominazione, altre con appellativi diversi. La sostanza però è comune a tutte le interpretazioni: un contenuto matematico più semplice possibile, domande facili da capire ma completamente fuori dagli schemi scolastici abituali e che richiedono molta intuizione e doti di creatività. Domande che quasi mai portano a una sola soluzione – nel senso che possono avere risposte diverse anche in funzione delle interpretazioni date e delle scelte operate dal risolutore –, e anche domande che non sempre portano a soluzioni note in ambito matematico.

Facile o difficile?

A questo punto vorrei invitare il lettore a riflettere su una questione basilare. Provocatoriamente pongo due domande.

1. Gli Atolli matematici sono libri «facili» o «difficili»?
2. È ragionevole proporre «Atolli matematici» anche nei corsi base, o, in generale, ad allievi che accusano serie difficoltà di apprendimento?

Diciamo subito che valutare «facile» o «difficile» un problema matematico è un atto soggettivo, in generale arbitrario. Di solito si tende a considerare facile ciò che si sa (o che si sa fare) e difficile ciò che non si sa (o non si sa fare), come sapere, o no, pattinare o ballare il tango. Questa affermazione trova conferma anche nell'ambito delle tassonomie cognitive: basta pensare al *push-down principle* di Merrill, secondo il quale, in sintesi, ogni tipo di prestazione, se ripetuta più volte, perde valore cognitivo. Per esempio, un concetto matematico, se praticato più volte, può diventare una nozione memorizzata e un procedimento finisce per diventare un automatismo.

Anche sul piano affettivo, in particolare per ciò che concerne il fenomeno della volizione, l'affermazione sembra reggere: l'allievo considera facile ciò che sa fare e considera difficile ciò che non gli riesce (in realtà usa appellativi più coloriti!). Qui occorrerebbe distinguere fra una complessa tipologia di allievi, che, per comodità, mi limito a ridurre a due soli tipi (estremi) di comportamento: quello che chiamo dell'*allievo spontaneo* e quello dello *studente navigato*. Il primo apprende spinto da una forza interiore generata dalla curiosità intellettuale o dalla convinzione che apprendendo migliora se stesso; generalmente ha fiducia nella scuola e vede nell'insegnante un modello da imitare. Lo studente navigato, invece, è spinto ad apprendere soprattutto da ragioni pragmatiche, di convenienza: egli restituisce all'insegnante ciò che questi si aspetta da lui, allo scopo di ricevere una bella nota, di essere promosso, ecc. Mancando una convinzione interiore, il suo apprendimento è per lo più superficiale e non dura nel tempo. In generale, i bambini della scuola elementare sono spontanei, mentre gli allievi delle scuole post-obbligatorie tendono a diventare studenti navigati. È indubbio che il passaggio dal primo al secondo tipo, dal punto di vista della qualità dell'apprendimento, è una degenerazione che avviene, in generale, nel periodo più critico dell'età evolutiva, che è proprio quello relativo alla scuola media. In questa fascia di età occorre quindi fare di tutto per impedire che l'allievo spontaneo – che si presenta in prima media con grandi aspettative – venga dapprima deluso e poi, seguendo un naturale atteggiamento di auto-difesa, impari il mestiere di studente navigato.

Se si è d'accordo con quanto esposto, si giunge presto alla conclusione che non è certo proponendo compiti facili e ripetitivi che si migliora la situazione. Dunque, per consentire agli allievi di sviluppare nuove immagini e modelli mentali, di costruire il proprio apprendimento – come si usa dire –, occorre metterli di fronte a problemi non facili, creare situazioni a-didattiche e spingere gli allievi ad agire, con una certa frequenza, nella zona prossimale di sviluppo. Ma attenzione: tutto ciò non vale solo per gli allievi brillanti, o comunque che non mostrano di avere serie difficoltà di apprendimento, ma, a maggior ragione, anche per quelli che incontrano grosse difficoltà. Sono loro, infatti, che devono (ri)costruire le immagini mentali – che non possiedono o che sono inadeguate – e sono loro soprattutto che devono smontare, a poco a poco, le misconcezioni che si sono creati. Lavoro di recupero non certamente ottenibile con interventi di tipo frontale.

Ciò implica importanti cambiamenti della prassi didattica. I più evidenti sembrano essere:

- nel ruolo dell'insegnante: che non deve più assumere il ruolo di colui che espone la teoria e che pretende poi dall'allievo una restituzione basata sull'imitazione, ma colui che sa mettere gli allievi nelle migliori condizioni possibili perché possano costruire il loro apprendimento;
- nelle forme didattiche: non esclusivamente basate su tecniche frontali, ma comprendenti importanti momenti a-didattici;

- nei materiali didattici: non più basati sulla terna ordinata (teoria, esercitazione, valutazione), ma preparati in modo funzionale alla scoperta personale, la discussione in gruppo, la validazione (o messa in comune dell'apprendimento grezzo), l'istituzionalizzazione della conoscenza (o formalizzazione matematica).

Un auspicio

È più che comprensibile la speranza di ogni autore di vedere la propria opera accolta con successo dai lettori. Nel nostro caso, trattandosi di un manuale scolastico, la legittima speranza degli autori non è certo di carattere economico, ma sempre unicamente di natura didattica. Gli autori sono convinti che «Atolli matematici» è uno strumento che aiuta in modo importante chi vuole impostare il proprio insegnamento secondo i principi esposti in questo scritto; chi già si ispira a questa filosofia didattica può trovare nuovi spunti per variare le attività in classe; chi sta cercando di cambiare la propria impostazione trova un manuale che gli facilita l'operazione e che gli dà maggiore sicurezza; chi non ha ancora avvertito la necessità di abbandonare vecchi schemi e abitudini didattiche sedimentate da anni, ebbene, forse, sfogliando una copia di «Atolli matematici» potrebbe rivedere le proprie posizioni.

Alcuni esempi[5]

Dalle situazioni dell'atollo 1
Numeri – attività di calcolo mentale

Calcolatore prodigio?

I calcolatori prodigio sono individui molto abili nel calcolare a mente, che amano esibirsi. Nei loro spettacoli invitano il pubblico a proporre dei calcoli e dopo un attimo dicono il risultato corretto. Chi fra i presenti è munito di calcolatrice non ha nemmeno il tempo di inserire il primo numero.

Gianni, un ragazzino di prima media, dice di essere un calcolatore prodigio e sfida chiunque abbia in mano una calcolatrice. Ecco alcuni calcoli con i quali Gianni ha umiliato gli sfidanti:

$47 + 188 + 53$
$99{,}7 + 99{,}8 + 100{,}2 + 100{,}3$
$10 + 16 + 16 + 10 + 10 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 10 + 16 + 16 + 16$
$2377 - 177$
$25 \cdot 337 \cdot 4$
$125 \cdot 283 \cdot 8$
$102 : 34$
$0{,}72 : 0{,}09$

D. Come farà Gianni a trovare così velocemente il risultato?

5. Legenda: D. = Domanda; C. = Consiglio; A. = Attenzione; I. = Informati.

Dalle situazioni dell'atollo 1
Numeri – attività sull'uso della calcolatrice

Cenetta fra amici

Alberto, Beatrice, Claudio, Daniela, Ernesto e Fausta si sono recati al ristorante per una simpatica cenetta.

Ecco la lista delle vivande:

Porzione di salumi	6,50 Fr.	Secondi piatti	22,40 Fr.
Porzione di frutti di mare	8,60 Fr.	Coppa di gelato e frutta	6,60 Fr.
Vassoio di focacce	4,50 Fr.	Bottiglia di vino	16,80 Fr.
Primi piatti	11,50 Fr.	Bottiglia di acqua minerale	6,20 Fr.

Iniziano con un antipasto in comune che consta di 3 porzioni di salumi, 3 porzioni di frutti di mare e un vassoio di focacce.

Tutti meno Claudio ed Ernesto prendono un primo a testa.

Solo gli uomini ordinano un secondo.

Tutti, salvo Alberto, prendono una coppa di gelato e frutta.

I 6 amici innaffiano il pasto con 3 bottiglie di vino e 3 di acqua minerale.

I caffè e i digestivi sono offerti. Alla fine viene presentato il conto.

D. Esprimi con una sola espressione numerica il calcolo che permette di trovare l'esatto ammontare del conto.

D. Stima questo valore e poi calcolalo esattamente.

D. L'importo viene diviso equamente tra i 6 amici. Stabilisci quanto deve pagare ogni persona, tenendo conto che gli amici decidono di lasciare una piccola mancia.

Dalle situazioni dell'atollo 1
Numeri – divisibilità

Nuovo pavimento

Un vecchio corridoio è ricoperto di piastrelle rettangolari di dimensioni 18 cm e 14 cm. Sulla lunghezza del corridoio ci stanno esattamente 35 piastrelle allineate secondo la loro dimensione maggiore, mentre sulla larghezza ce ne stanno esattamente 18 allineate secondo la loro dimensione minore. Si vogliono sostituire queste piastrelle con altre quadrate, le cui dimensioni devono essere un numero intero di cm e tali da doverne usare il meno possibile.

D. Che dimensioni devono avere le nuove piastrelle?

D. Quante ne occorrono?

Dalle situazioni dell'atollo 1
Numeri – grandezze e misure

Misurazioni

Gli allievi di una prima media hanno ricevuto il compito di misurare la lunghezza del corridoio principale della loro scuola. Si sono suddivisi in 4 gruppi e hanno usato strumenti di misura diversi. Ecco come hanno scritto i risultati:

19550 mm   19 metri e mezzo   2 dam   1968 cm

Sui piani disegnati dall'architetto il corridoio figura lungo 19'665 mm.

D. Calcola la media aritmetica delle misure ottenute dai gruppi.

D. Di quanto differisce la media dal valore indicato dall'architetto?

D. Quale unità di misura si presta meglio, secondo te, per calcolare quanto richiesto e per dare la risposta?

Dalle situazioni dell'atollo 1
Numeri – i diversi volti della frazione

Suddividere una corda

Una corda è lunga 10 m. La si vuole tagliare in due pezzi in modo che il primo abbia lunghezza tripla del secondo.

D. Quanto dev'essere lungo il primo pezzo?

D. Che frazione è la lunghezza di questo pezzo rispetto a quella dell'intera corda?

Ruota della fortuna

Una ruota della fortuna è suddivisa in 12 settori uguali; 5 settori sono vincenti, 3 settori comportano una perdita e i rimanenti non danno luogo né a vincite né a perdite.

D. Qual è la probabilità di vincere?

D. Qual è la probabilità di non perdere?

Dalle situazioni dell'atollo 2
Figure geometriche – attività sul calcolo di aree

Dal triangolo qualunque al trapezio

Una diagonale suddivide un trapezio in due triangoli.

D. Questa osservazione permette di dedurre l'area di un trapezio da quella del triangolo: come?

D. Trova l'area di un trapezio che ha i lati paralleli di lunghezza 15 cm e 9 cm distanti fra loro 10 cm.

Se si considerano come base l'uno o l'altro dei lati paralleli, la loro distanza è l'altezza relativa.

D. Siano a, b e h le lunghezze, ordinatamente, dei due lati paralleli e la distanza fra di loro: scrivi nel riquadro seguente l'area A_T del trapezio.

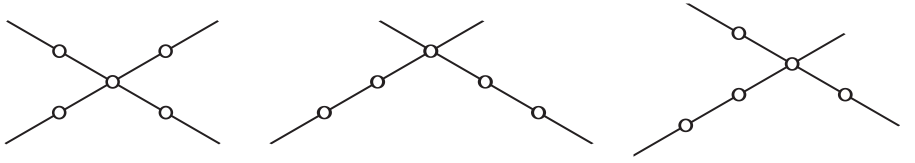
Dalle situazioni dell'atollo 2
Figure geometriche – figure geometriche particolari

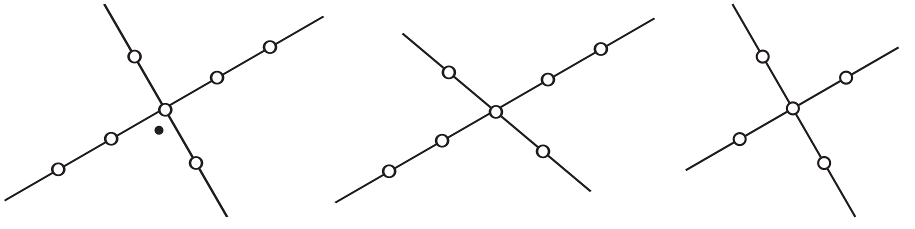
Dalle diagonali… che cosa apparirà?

Le 6 figure seguenti mostrano le diagonali di un quadrilatero. Ogni diagonale è suddivisa in un certo numero di parti uguali.

D. Per ciascuna coppia determina il tipo di quadrilatero e scrivilo sui puntini.

A. Cerca di dedurre la risposta senza disegnare. Il disegno può servire come controllo.





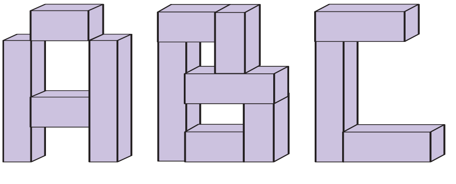
Dalle situazioni dell'atollo 2
Figure geometriche – attività sul calcolo di volumi

L'alfabeto in rilievo

Un grafico sta progettando una serie completa di caratteri in rilievo da usare per grandi insegne. Le sue lettere sono composte di parallelepipedi rettangoli ottenuti unendo cubi di spigolo s. La figura mostra gli schizzi delle prime tre lettere che sono composte di elementi di 2, 3 e 4 cubi.

D. Calcola il volume di ciascuna lettera.

D. Progetta altre lettere, in modo analogo seguendo la tua fantasia, e calcola il loro volume.



Dall'atollo 3
Laboratorio matematico – divertimenti numerici

Sempre uno

Utilizzando i numeri 1, 2, 3 una sola volta, i segni di operazione e le parentesi è possibile ottenere 1.

Ecco come

3 : (1 + 2) = 1

D. Prova a ottenere 1 utilizzando i numeri 1, 2, 3, 4 una sola volta, i segni di operazione e le parentesi.
Si può anche ottenere 1 utilizzando 1, 2, 3, 4, 5 una sola volta, i segni di operazione e le parentesi.

D. Come?
Ma anche utilizzando, alle stesse condizioni, i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6.

D. Come?
Ma anche utilizzando, alle stesse condizioni, i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

D. Come?
Ma anche utilizzando, alle stesse condizioni, i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

D. Come?
Ma anche utilizzando, alle stesse condizioni, i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

D. Come?

Dall'atollo 3
Laboratorio matematico – attività combinatorie

Collanine

Immagina di avere 3 perline di colore diverso e di volerle mettere l'una accanto all'altra:

D. In quanti modi diversi puoi disporle?

D. E se le perline fossero di 4 colori diversi, in quanti modi diversi potresti disporle?

D. E se le perline fossero di 5 colori diversi, in quanti modi diversi potresti disporle?

C. Non provarci davvero: sono parecchi. Prova invece a ragionarci su.

D. E se le perline fossero di k colori diversi, in quanti modi diversi potresti disporle?

C. Il ragionamento fatto prima dovrebbe aiutarti.

Dall'atollo 3
Laboratorio matematico – problemi classici

La parola d'ordine

Questo bel problema arriva dalla Princeton University.

È notte. Una spia, nascosta vicino al forte nemico, cerca di carpire la parola d'ordine necessaria per poter entrare. Arriva un primo soldato: la sentinella dice «dodici», il soldato risponde «sei» e entra. Arriva un secondo soldato: la sentinella dice «dieci», il soldato risponde «cinque» e entra. A un terzo soldato la sentinella dice «otto», il soldato risponde «quattro» e entra. Un quarto soldato risponde con «dodici» al «ventiquattro» della sentinella ed entra pure lui. A questo punto la spia si presenta all'entrata del forte, sicura di aver trovato la chiave della parola d'ordine. La sentinella dice «venti», la spia risponde «dieci!», si prende una pallottola in fronte e muore senza sapere dove ha sbagliato.

D. Quale risposta doveva dare la spia, per non essere scoperta e poter entrare?

A. Non sempre calcolare è la migliore idea…

Bibliografia

Arrigo G.
Il calcolo a scuola, ovvero: l'inizio di un cambiamento epocale, *Bollettino dei docenti di matematica*, nr. 40 maggio 2000, UIM/CDC: Bellinzona.

Arrigo G.
Il calcolo a scuola (2): l'uso della calcolatrice, *Bollettino dei docenti di matematica*, nr. 43 dicembre 2001, UIM/CDC: Bellinzona.

Arrigo G., Sbaragli S.
I solidi. Riscopriamo la geometria, 2004, Carocci Faber: Roma.

D'Amore B.
Elementi di didattica della matematica, 1999, Pitagora: Bologna.

De Landsheere V, De Landsheere G.
Definire gli obiettivi dell'educazione, 1977, La Nuova Italia: Firenze.

Schneuwly B., Bronckart J.-P.
Vygotsky aujourd'hui, 1985, Delachaux & Niestlé: Neuchâtel, Paris.

1. Quale approccio per una didattica della dimostrazione?

Rocco Legato[1]

The present article examines the vexed question of the approach to a didactics of demonstration and focuses on two main issues. The first one concerns the role played by such a didactics when applied in the classroom; the other one relates to the kind of added value brought to the learning process. The writer upholds his argument having observed a group of students acting in an "adidactic" situation. The result is a very interesting analysis of the students' interactions, leading one to deem it necessary to go beyond the empirical phase.

1. Introduzione

Il problema dell'approccio a una didattica della dimostrazione è molto dibattuto. Se non è certo possibile disconoscere che «la dimostrazione è un'attività cruciale della pratica matematica» (Olivero, 2004 p. 548), ci si interroga comunque sul significato da attribuire a una sua trasposizione in classe e sul valore aggiunto che porterebbe all'apprendimento.

Nicolas Balacheff fu uno dei primi a porre l'accento sulla necessità di rendere gli allievi soggetti attivi in tutto il processo che parte dalla formulazione di congetture alla ricerca di prove per sostenerle. L'idea è che l'allievo possa avvertire, per averla provata in prima persona, l'esigenza di una prova che vada al di là di una sperimentazione pratica. Si dà rilievo quindi all'aspetto euristico della ricerca intorno a un problema, e non alla imposizione di schemi formali. In questo caso si presuppone anche che i processi messi in atto in maniera spontanea nelle fasi di elaborazione, e soprattutto di «validazione», abbiano una continuità cognitiva con il tipo di ragionamento che sostiene una dimostrazione.

Nella prospettiva accennata sono da tenere in considerazione principalmente due aspetti per avviare un percorso didattico: da un lato «la necessità di provare è legata alla situazione nella quale ci si trova» (Balacheff 1982, p. 272), dall'altro non si può trascurare la componente «sociale» della dimostrazione, se è vero che dimostrare implica convincere (un interlocutore o se stessi). Il contesto nel quale avviene l'atto del provare gioca ugualmente un ruolo importante; se «la situazione nella quale ci si trova» è quella dell'allievo che deve fornire prova del suo sapere all'insegnante, saranno messi in opera determinati meccanismi, sicuramente diversi da quelli che l'allievo attuerebbe in un'ottica di scoperta autonoma.

1. Docente di matematica alla Scuola media di Locarno 1. Dopo la laurea ha conseguito il master pedagogico presso l'ASP di Locarno nell'anno scolastico 2004-05. L'articolo è una sintesi del suo lavoro di diploma.

Queste posizioni potrebbero portare a intravedere il rischio di confondere il valore di verità di un risultato dimostrato con la verità di un risultato di cui tutti sono convinti. Se per convincere, poi, basta citare esempi particolari in cui una certa congettura si verifica, allora, da un punto di vista didattico, delineerebbe una situazione di stallo[2].

L'ultima riflessione si può leggere sul piano epistemologico nella dicotomia tra argomentazione e dimostrazione, la quale è stata ampiamente studiata da ricercatori come R. Duval[3], che attraverso un'analisi delle differenze cognitive tra ragionamento «argomentativo» e ragionamento «valido» – proprio della dimostrazione matematica – risponderebbe negativamente alla questione del passaggio, all'interno di un curricolo didattico, dall'una all'altra forma di ragionamento. D'altra parte nella scuola dell'obbligo non avrebbe ancora senso attuare percorsi finalizzati direttamente all'acquisizione degli schemi del ragionamento dimostrativo.

Per rispondere, quindi, alla domanda posta nel titolo, e a quella fondamentale sul senso di una didattica della dimostrazione, è probabilmente utile ripercorrere due posizioni che permeano la ricerca ma anche la pratica quotidiana dell'insegnamento.

2. Due interpretazioni della dimostrazione nella scuola

Sul senso di una educazione alla dimostrazione si possono distinguere le tesi di chi sostiene la necessità di dimostrare per così dire a priori, e di chi invece pensa alla dimostrazione, a scuola, come mezzo per comprendere.

Nel primo caso si può vedere una concezione della matematica come esemplificazione del rigore logico e di una struttura, ormai ben definita, che per sua stessa natura richiede di esplicitare, di spiegare tutto quello che al suo interno è spiegabile. Gli effetti sulla didattica sono quelli della separazione netta di due momenti nel corso della carriera scolastica di uno studente che continui la sua formazione anche oltre l'obbligo. Un silenzio quasi assoluto sul tema caratterizza l'insegnamento nella scuola media, dove le prime dimostrazioni (non formalizzate) che in geometria ad esempio si possono incontrare, sono accolte in parecchi casi in maniera acritica e, aspetto fondamentale, senza coglierne l'utilità.

È difficile, ad esempio, far nascere negli allievi l'interesse su ciò che soggiace a una certa tecnica, procedimento, o algoritmo che già è consolidato nell'uso, così come a contenuti che intuitivamente arrivano a riconoscere.

In ogni caso, dopo un periodo in cui l'argomento dimostrazione è sottaciuto, nel prosieguo degli studi superiori lo studente può trovarsi di fronte a passi deduttivi completamente formalizzati. Questi possono essere anche accolti, ma senza che vi sia un coinvolgimento intellettuale che consenta la riflessione sul perché di certe ipotesi, sul valore esplicativo in generale, sul collegamento con la pratica dei problemi e, perché no, sulla «bellezza» di certi passaggi. Spesso, soprattutto nella scuola seconda-

2. È emblematica, a questo proposito, l'affermazione di Hersch (1993) che sostiene: «gli studenti sono fin troppo facilmente convincibili: due esempi sono sufficienti» (in Bencivenni-Morini, 2003).
3. Il testo di riferimento a volte non esplicitamente citato è in bibliografia Duval, 1998.

ria superiore, «la dimostrazione viene considerata il momento essenziale dell'intera trattazione di una questione matematica, anche dal punto di vista didattico» (Bagni 1998). Se così è, da un lato non bisognerebbe escludere il ruolo della fase di scoperta – di importanza fondamentale sicuramente per l'apprendimento, ma anche elemento costitutivo del «fare matematica» – dall'altro appare necessario un periodo di avviamento già nella scuola dell'obbligo. È in questo momento che, prima di accedere alla formalizzazione, si può insistere sugli aspetti euristici, sul linguaggio naturale, sui processi dialettici, su tutta quella attività che i matematici stessi praticano prima di ricostruire i passaggi affrontati, sulla base della argomentazione logico-deduttiva.

Un secondo filone di pensiero sul ruolo scolastico della dimostrazione si incentra maggiormente sull'apprendimento. In sostanza le dimostrazioni sarebbero strumenti di cui gli allievi possono servirsi per comprendere i teoremi stessi. Il fondamento di questa posizione si trova nella tesi secondo la quale il senso della pratica della dimostrazione debba entrare a far parte del contratto didattico. Si intende con ciò che è necessario in qualche modo instaurare un accordo, in base al quale gli allievi possano sempre aspettarsi – o ricercare – una spiegazione, sotto forma di dimostrazione (non ancora formale), di una proprietà, di un teorema (Bencivenni-Morini, 2003). Si può pensare in questo caso a una trasposizione didattica delle tesi in particolare di Lakatos e Popper, che hanno animato il dibattito epistemologico sul tema della dimostrazione e che appaiono tuttora attuali. In questa prospettiva, infatti, la dimostrazione è vista come strumento che consente di «sondare il potere e la validità degli assiomi» (Popper, 1982). In ambito didattico allora avrà senso riflettere sulle circostanze in cui effettivamente, attraverso un passaggio deduttivo, si fa luce sul motivo di determinate congetture. Questo vorrebbe dire, per gli allievi, essere compartecipi dello spirito di un risultato, che è molto più che ritenerlo a memoria, conoscerne l'ambito di validità ma non il perché. Vuol dire, anche, essere nella possibilità di rivedere in modo critico, razionale, la validità delle proposizioni, il che è coerente con gli obiettivi di una formazione scientifica. Non intendo con questo sostenere la tesi di chi vede nell'insegnamento della dimostrazione l'espressione più completa della didattica della matematica. Si tratta piuttosto di pensare alla dimostrazione come un potente strumento intellettuale e didattico, che può contribuire alla costruzione di un apprendimento più efficace. L'aspetto rilevante è proprio il fatto che inizialmente l'insegnante, ma il più presto possibile l'allievo stesso, selezioni sia le dimostrazioni da studiare sia quelle che meritano di essere oggetto di ricerca a sostegno delle proprie congetture.

3. Il senso di una didattica della dimostrazione

È importante che la dimostrazione matematica entri nell'insieme delle competenze mirate dai piani di formazione, perché è un'attività che, se concepita come un processo che parte dalla formulazione di una congettura, può diventare molto stimolante e didatticamente produttiva proprio per l'insieme complesso di risorse che mobilita ed esercita: intuizione, capacità di argomentare, di analizzare, di astrarre e generalizzare, di formulare problemi nuovi, di organizzare razionalmente il pensiero, di comprendere a fondo, di interagire criticamente tra pari, di assumere la responsabilità delle proprie idee. All'acquisizione di queste risorse può mirare, nella pratica quotidiana, un insegnamento che tenga conto anche dei processi dimostrativi, intesi in un senso meglio chiarito più avanti.

Non si tratta comunque di tentare di riproporre a un livello scolastico inferiore quello che, come accennato sopra, accade spesso nel corso degli studi secondari superiori. Pretendere che gli allievi riproducano i passi deduttivi della dimostrazione di un teorema (o di tanti teoremi) non è assolutamente una pratica della dimostrazione nel senso qui esplicitato. Uno studente può essere in grado di svolgere questo esercizio e anche magari di comprendere le concatenazioni logiche e la struttura generale di un ragionamento logico-deduttivo senza essere in grado di produrre lui stesso una dimostrazione. Non lo è, per esempio, se alla fine di un «esercizio di dimostrazione» l'allievo si troverà a interrogarsi sulla sua utilità. E ancora non può esserlo se egli non potrà mai riconoscere che quella particolare dimostrazione gli è stata utile per comprendere, o appunto per provare, certe asserzioni.

In ultima analisi l'obiettivo, per così dire, «primario« (e generale) di una pratica didattica della dimostrazione nella scuola media potrebbe proprio essere quello di portare gli allievi ad abbandonare la concezione sperimentale della prova e di indurli alla riflessione – in casi alla sua portata – sulla questione, appena menzionata, dell'utilità ai fini della comprensione. Ovviamente non si tratta ancora di dimostrazioni formalizzate, ma espresse in linguaggio naturale, seppur organizzate nella struttura logica di un passo di deduzione (Duval 1996, p. 372).

Questo lavoro, in particolare, si prefigge l'obiettivo di raccogliere alcuni riscontri sulle reazioni degli allievi quando vengono confrontati con problemi, o situazioni, che richiedono di investire proprio quel modello di «prova sperimentale» che solitamente mettono in campo in maniera spontanea. L'intento è, nel contempo di considerare quali potenzialità, a livello di scuola media, vengono offerte a un discorso più ampio sul tema della dimostrazione matematica.

È doveroso premettere che la sequenza didattica descritta in seguito può avere solo un valore e un senso di prima indagine.

Gli esempi discussi più avanti potrebbero far parte di una classe più vasta di problemi, attraverso i quali gli allievi possono crearsi la consapevolezza che non sempre la verifica in alcuni casi di una congettura garantisce la sua validità.

L'interesse è anche rivolto alle dinamiche interne e di classe che si innescano nel momento in cui sono proposti problemi che indurrebbero alla verifica puntuale come prova, ma che, nello stesso tempo, offrono possibilità di soluzioni diverse. La domanda è se gli allievi vi ricorreranno e in che misura la progressione delle attività incida sulle loro scelte.

4. Alcuni esempi

Nel seguito ho rivolto l'attenzione alle posizioni già ricordate di ricercatori come Balacheff. Quindi la «situazione» e il «contesto sociale» hanno svolto un ruolo preponderante nell'impostazione e nello svolgimento delle attività. Se è vero che la situazione in cui ci si trova è legata strettamente all'esigenza della prova, allora soprattutto in un contesto di ricerca (ma anche in attività didattiche in generale e in un'ottica formativa), ho ritenuto fosse importante creare non le situazioni tipiche di un'interrogazione degli allievi, ma piuttosto quelle di un compito che avesse come fine la risoluzione di un problema che non sempre è dichiarato in partenza, ma la cui formulazione stessa può dipendere dalla riflessione su di un input iniziale.

Nella descrizione delle attività svolte sono precisate puntualmente le metodologie di lavoro seguite.

4.1. A caccia di quadrati

L'attività è stata svolta in una terza classe di un corso attitudinale e, parzialmente, anche in una terza classe di un corso base.

L'obiettivo è quello di portare gli allievi a investire il modello di dimostrazione sperimentale in un caso in cui questo possa rivelarsi infruttuoso. Non tanto perché ciò generi una riflessione immediata sulla inaffidabilità della prova basata sulla verifica puntuale, che pure in parte c'è stata, ma piuttosto perché rappresenta un «precedente» al quale riferirsi nel corso delle attività seguenti. L'intento è di lasciare gli allievi liberi di esprimere una qualche congettura, sulla base dell'input lanciato loro, e osservare le possibili argomentazioni che potrebbero portare a sostegno, nel confronto con i compagni. L'attenzione sarà rivolta tanto al contenuto di queste argomentazioni, quanto alla forma in cui vengono organizzate nel dibattito, con lo scopo di evidenziare eventuali somiglianze con passi di deduzione. Questo punto riveste la sua importanza nella prospettiva di una indagine sui meccanismi messi in atto dagli allievi in queste fasi, il cui fine è quello di registrare gli spunti che possano offrire a un discorso più ampio, che indirizzi verso la costruzione di una prima immagine del senso del dimostrare matematico.

L'aspetto che ho ritenuto importante dal punto di vista del metodo è stato assicurare che potesse realizzarsi con allievi liberi di interagire e di esprimersi fra loro, cioè in situazione a-didattica (D'Amore, 1999). Bisogna però tener conto che, avviando un percorso su questo tema, si dovrebbero controllare il più possibile anche tutti quegli aspetti che non sono direttamente legati alla discussione sui contenuti, ma per così dire, basati sulle «gerarchie» relazionali affettive, che si instaurano nel gruppo classe, se si considera che «il solo fatto di porre gli allievi in una situazione di interazione non garantisce il funzionamento di una dialettica della validazione» (Balacheff 1982, p. 275), proprio per l'instaurarsi di questi aspetti relazionali.

Il processo di validazione a cui fa riferimento l'autore è quello nel quale «agli allievi sono richieste prove delle teorie utilizzate e anche esplicitazione dei mezzi che soggiacciono ai processi dimostrativi» (M.D.). Ed è una delle quattro fasi che caratterizzano la teoria delle situazioni didattiche sviluppatasi con le ricerche di Brousseau (Brousseau, 1978).

Sviluppo dell'attività

A caccia dei quadrati: prima scheda

*Nell'insieme dei primi **10** numeri naturali {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} si trovano **3** numeri che si possono ottenere elevando al quadrato altri numeri naturali dell'insieme.*

*Questi numeri sono …………………… e si chiamano **quadrati perfetti**.*

*Nell'insieme dei primi **20** numeri naturali {1,2,3,………,20} ci sono **4** quadrati perfetti.*

*Nell'insieme dei primi **30** numeri naturali {1,2,3,………,30} ci sono **5** quadrati perfetti.*

A caccia dei quadrati: seconda scheda

*Nell'insieme dei primi **10** numeri naturali {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} si trovano **3** numeri che si possono ottenere elevando al quadrato altri numeri naturali dell'insieme.*

*Questi numeri sono …………………… e si chiamano **quadrati perfetti**.*

*Nell'insieme dei primi **20** numeri naturali {1,2,3,………,20} ci sono **4** quadrati perfetti.*

*Nell'insieme dei primi **30** numeri naturali {1,2,3,………,30} ci sono **5** quadrati perfetti.*

*Nell'insieme dei primi **40** numeri naturali {1,2,3,………,40} ci sono **6** quadrati perfetti.*

*Nell'insieme dei primi **50** numeri naturali {1,2,3,………,50} ci sono 7 quadrati perfetti.*

*Quanti ce ne saranno fra i primi **500** numeri naturali?*

Gli allievi hanno ricevuto due tipi di schede[4]. La prima scheda non pone alcuna richiesta specifica e, all'atto della consegna, ho solo chiesto loro di leggerla ed esprimere qualunque cosa sentissero di dover esprimere. Questo tipo di consegna ha subito sollevato perplessità ma dopo i primi minuti quasi tutti hanno iniziato a produrre alcune congetture che esaminerò più avanti.

Per quanto riguarda la seconda scheda invece la richiesta era precisa: si trattava di rispondere al quesito proposto, senza peraltro dover fornire una qualche giustificazione scritta del risultato ottenuto, che è comunque emersa nel confronto con i compagni che è seguito. Dopo la consegna delle schede la classe risultava così divisa in due gruppi ugualmente eterogenei.

La diversificazione delle consegne aveva lo scopo di portare il gruppo della seconda scheda ad agire come supervisore delle congetture dell'altro in modo da innescare il dibattito. Dover rispondere a un quesito ben preciso, infatti, avrebbe dovuto comportare l'esigenza di un controllo di almeno un altro caso, oltre i primi cinque riportati. Per quasi tutti gli allievi, questo controllo non c'è stato; del resto, come già accennato, in queste occasioni gli studenti si convincono facilmente. Solo un allievo su sette – del gruppo – ha messo in atto la verifica per il caso dell'insieme {1,2,…..,60}. Il risultato di questo controllo è stato comunicato ai compagni che a loro volta hanno ripetuto il procedimento di verifica cancellando la prima risposta, sbagliata.

A questo punto ho rivolto loro qualche domanda tesa a capire se la correzione fosse stata fatta in maniera acritica accettando il dato del compagno[5]:

4. Nel seguito mi riferirò al 1° gruppo e al 2° gruppo a cui sono associate risp. la 1ª e la 2ª scheda.
5. Quella che segue è una ricostruzione del dialogo sulla base degli appunti che ho preso subito dopo.

D: – *Come mai hai cancellato il risultato?*

A: – *Avevo sbagliato.*

D: – *Come fai a saperlo?*

A: – *Non mi ero accorto che otto per otto fa 64 che è oltre 60, per cui non aumenta di uno ogni 10.*

D: – *Sì ma tutti i numeri che sono tra 50 e 60 non li consideri? Se ci fosse un quadrato perfetto tra questi?*

A: – *Non può esserci perché con sette siamo già a 49 e con otto a 64.*

D: – *Prima hai usato un procedimento diverso?*

A: – *Sì ho visto che il numero aumentava sempre di uno andando avanti di dieci e ho fatto il conto fino a cinquecento.*

Marco (l'allievo in questione) ha rivisto completamente, negandola, la sua congettura[6]. Egli ha mostrato di aver compreso il motivo della non validità di quanto aveva supposto, ma quello che sembra interessante è che sia ricorso alla formulazione di una spiegazione autonoma, di cui ha sentito la necessità proprio perché l'ipotesi di partenza gli era parsa plausibile.

Dal primo gruppo, invece, sono emerse produzioni dalle quali si capisce come negli scambi intercorsi gli allievi abbiano sostanzialmente integrato le proprie congetture con quelle degli altri. Le osservazioni prodotte sono di tre tipi:

- ci sono pochi quadrati perfetti in confronto ai numeri naturali;
- «ogni 10 numeri si aggiunge un quadrato perfetto»;
- «moltiplicando un numero naturale per se stesso esce un quadrato perfetto».

Queste considerazioni sono state poi estese al resto della classe. Inizialmente la discussione si è concentrata sulla seconda affermazione: qui il secondo gruppo ha subito fatto valere il risultato che aveva già trovato e che smentiva questa congettura. Ciò ha indotto i compagni del primo gruppo, dopo aver ripercorso il ragionamento che hanno svolto anche gli altri, ad aggiungere alla propria affermazione la condizione di non considerare un insieme più grande dei primi cinquanta numeri naturali. È interessante che le reazioni siano state, in un primo momento, di rifiuto verso quanto gli allievi del secondo gruppo andavano sostenendo, ma ancora una volta (come nel caso precedente di Marco) la comprensione della spiegazione portata dai compagni ha prevalso sul convincimento basato sulla verifica «sperimentale».

Analisi e commenti

Il momento appena descritto era il punto considerato essenziale a cui giungere: constatare che è stata commessa una estensione impropria di quanto visto in alcuni casi, e che ciò avvenisse autonomamente senza l'intervento dell'insegnante. Va pure rilevato che la congettura iniziale è venuta meno una volta chiarita la struttura del pro-

6. Questo allievo, come la maggior parte del suo gruppo, ha scritto solo in un secondo momento il risultato corretto sulla scheda, cancellando quello precedente.

blema, che non immediatamente era stata presa in esame, visto che ad attirare l'attenzione era il fattore della regolarità che si presentava nell'esempio. C'è stata, in altre parole, la presa di coscienza di due percezioni diverse del problema che potremmo definire apparente e sostanziale, dove l'una ha trovato associazione con l'aspetto della verifica puntuale, l'altra con la spiegazione del perché questa non funzioni nel caso in questione. È una riflessione di per sé importante, senz'altro; il problema da considerare è però capire in che misura essa potrà essere reinvestita nelle situazioni che seguono. Più in generale la domanda è: «in una situazione in cui l'intuizione conduce subito a prospettarsi un quadro di un certo tipo, che peso gli allievi attribuiranno alla comprensione?».

È emblematico a questo proposito quanto emerso in una ricerca, condotta da G. Arrigo e B. D'Amore, sugli ostacoli epistemologici nell'apprendimento del concetto di infinito attuale, in relazione alla dimostrazione che $0,3\overline{9} = 0,4$: «*molti allievi hanno ben capito il modo con cui si arriva all'uguaglianza; tuttavia, al momento di concludere, nella loro mente riaffiora l'immagine secondo la quale* $0,3\overline{9}$ *sarebbe solo un'approssimazione di 0,4*» (Arrigo, 2001 p. 39).

La questione può essere letta anche alla luce delle affermazioni di Fischbein riguardo al ruolo dell'intuizione: «Formalmente non c'è differenza tra l'accettare la correttezza di una dimostrazione matematica e l'accettare l'universalità di un'affermazione come garantita da quella dimostrazione. Il fatto che, per l'alunno, ci sia differenza tra accettare una dimostrazione ed accettare l'universalità dell'asserto provato da essa, dimostra che si può prendere in considerazione un elemento in più. Tale elemento aggiuntivo è costituito dal bisogno di un'accettazione intuitiva complementare della capacità predittoria assoluta di un'affermazione che è stata formalmente provata» (Fischbein, 1993, pp. 22-23).

Però l'allievo che intuisce può ancora non avvertire alcun bisogno di dimostrare, ma forse può avvertire il bisogno di comprendere, cosa peraltro successa nella breve attività descritta in precedenza: torniamo quindi al senso del nostro dimostrare a scuola. Le dimostrazioni servono per capire, e aggiungerei anche per capire che grado di bontà può avere una intuizione. Se un allievo si trovasse confrontato (magari nella scuola superiore) con una dimostrazione il cui enunciato gli sembra ovvio, potrà criticamente e coscientemente valutare se la dimostrazione gli prospetta qualche elemento nuovo di comprensione o di conoscenza. Questo avverrà nella misura in cui egli si sarà creato un'immagine della dimostrazione quale elemento di comprensione. Ben venga allora lo studio in classe di quelle dimostrazioni, non importa se non formalizzate, che non mirino a generare, negli allievi, dei meccanismi di imitazione con atteggiamenti da parte dell'insegnante del tipo: «ecco, questa è una dimostrazione»; ma che partano sempre dalla esigenza di capire.

È possibile precisare qualcosa sull'aspetto dell'intuizione dal punto di vista epistemologico e dell'apprendimento. Intanto è bene dire che facciamo riferimento a quella intuizione che, come già osserva D'Amore (2001, p. 119), va intesa come caratteristica della «dinamica dell'accettazione soggettiva di un enunciato matematico come cosa evidente e certa» (Fischbein). In particolare, l'atteggiamento che consente agli allievi di estendere, in prima battuta, una regola verificata solo in pochi casi, può essere letto nella prospettiva della «intuizione di accettazione», cioè di quella forma di intuizione che porta a ritenere certa una data situazione per un convincimento interiore, che appunto la fa accettare come vera di per sé, senza alcuna spiegazione.

Quanti sono i quadrati perfetti? (Una congettura alla prova)

Tornando alla discussione sull'attività, consideriamo l'ultima delle congetture formulate dagli allievi. Questa non è stata dibattuta a livello di classe ma è stata utilizzata in modo molto interessante al momento della discussione sul primo dei tre enunciati formulati. Su questo punto si è innescata la discussione tra quanti sostenevano l'evidenza della superiorità numerica dei numeri naturali su quelli che abbiamo chiamato quadrati perfetti e coloro che già avanzavano l'ipotesi di una perfetta corrispondenza. La discussione si è poi concretizzata in una domanda ben precisa che gli allievi hanno formulato scrivendola alla lavagna come nuovo quesito di lavoro: *«I quadrati perfetti sono tanti quanti i numeri naturali?».*

La tesi della risposta affermativa non ha subito convinto tutti fino a quando però, il gruppo di allievi sostenitori del «sì» non ha prodotto alla lavagna la dimostrazione seguente:

$\mathbf{1}^2 = 1$

$\mathbf{2}^2 = 4$

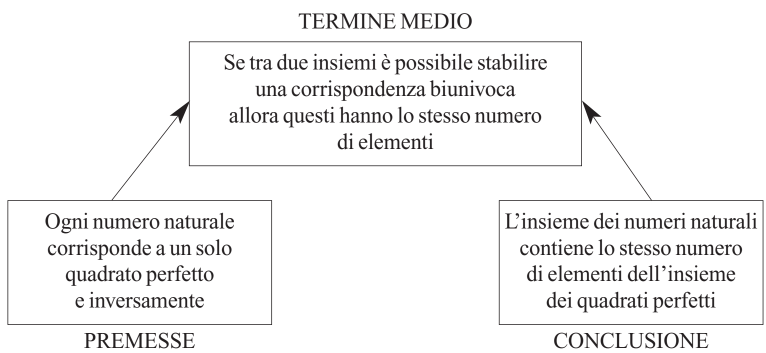
$\mathbf{3}^2 = 9$

$\mathbf{4}^2 = 16$

…….

A questo punto anche gli altri (quasi tutti) hanno accettato le considerazioni espresse dai compagni facendole proprie. È interessante seguire il ragionamento messo in campo dagli autori[7] di questo passaggio perché sembra significativo di quello che si indica come «passo di deduzione» (Duval, 1998 p. 16). Il tipo di esposizione seguita dall'allieva alla lavagna, si può pensare come segue: «*visto che per ogni numero ottengo un quadrato perfetto vuol dire che ci sono tanti quadrati perfetti quanti sono i numeri naturali».*

E in effetti è un passo di deduzione non formalizzato che può essere schematizzato così:



Duval sottolinea la necessità di avviare un percorso proprio sulla costruzione di passi del genere, dove gli allievi possano andare oltre la logica dell'argomentazione – per così dire più naturale – per iniziare a considerare le relazioni tra le proposizioni in funzione, non del loro contenuto, bensì del loro *statuto operativo* fissato

7. In particolare un'allieva, Simona, che in genere non è tra quelli che intervengono spontaneamente nella discussione.

preliminarmente. Così avremo proposizioni che sono *premesse* (le ipotesi iniziali), *termini medi* (un teorema, il quadro teorico generale), *conclusioni*; le relazioni tra queste sono stabilite indipendentemente dal contenuto, così come stabilito è il *valore epistemico* legato a ognuna. Fare questo tipo di osservazioni è «essenziale per la comprensione di ciò che è un passo di deduzione. In generale gli allievi si limitano unicamente al contenuto delle proposizioni o non sanno come prendere in considerazione il loro statuto operativo. Questo crea come un vicolo cieco.» (Duval, 1996 p. 373).

L'intenzione non è in questa occasione di avviare un discorso del genere in classe, però è interessante osservare come in questo caso la prima accettazione intuitiva è stata abbandonata in favore di un *ragionamento valido*, che pure sicuramente ha comportato una comprensione intuitiva, in un certo senso più sofisticata, che ancora una volta è avvenuta attraverso la comprensione della struttura reale del problema.

4.2 La somma di numeri dispari

La seconda attività svolta in classe, e discussa qui, va sempre nella direzione di indagare dal punto di vista operativo, ciò che succede appunto all'interno della classe, e sul rapporto tra intuizione e comprensione in relazione alla costruzione di un ragionamento valido.

In particolare sarebbe opportuno, da questo punto di vista, valutare cosa effettivamente gli allievi reinvestono dell'attività fatta in precedenza.

Qui ho chiesto loro di esprimersi – ancora come meglio credevano – sulla questione se il risultato della somma di due numeri dispari è in ogni caso un numero pari. Lo stupore iniziale generato da questa richiesta si è mitigato quando insieme abbiamo riassunto il percorso fatto per il problema *«A caccia di quadrati»*: anche lì sembrava di dover solo constatare una regolarità intrinseca che invece non c'era.

È molto forte in questo caso il livello di fiducia nella comprensione intuitiva, sicuramente più che nella esperienza fatta in precedenza. Lo si legge bene nelle parole di Annetta, che dice: – «*secondo me è una domanda assurda …è ovvio che…» –;* e che propone alcuni esempi che per lei sono assoluti e definitivi. Ma in qualche modo deve aver cambiato un po' la sua prospettiva perché dopo la discussione plenaria (come vedremo più avanti) sente di dover commentare «*sono sicura…perché hanno trovato una formula per verificarlo»*[8]. La differenza con la posizione assunta di primo acchito sta proprio nel fatto che «aver trovato un formula» sembra costituire ora, per lei, una forma di verifica più forte. Non è certo se questo sia avvenuto per una piena convinzione dell'atto dimostrativo prodotto dai compagni, tuttavia è indicativo della presa di coscienza di una prospettiva diversa. D'altra parte è lecito pensare che possa essere intervenuta – in maniera più decisa che in altre circostanze – una qualche clausola del cosiddetto «*contratto didattico»* (Brousseau 1980, p. 127).

In particolare può essere passato il ragionamento implicito per cui in matematica tutto ciò che si esprime attraverso formule ha una dignità maggiore di quanto espresso con un calcolo, e molto di più di quanto affidato alla comunicazione verbale. Questa rientrerebbe quindi in una di quelle «attese» – in questo caso degli allievi – che «non sono dovute ad accordi espliciti, imposti dalla scuola o dagli insegnanti o concor-

8. Come si può vedere più avanti.

dati con gli allievi, ma alla concezione della scuola, della matematica, alla ripetizione di modalità» (D'Amore 2001, p. 34). Non mi è stato possibile approfondire questo punto con Annetta, però da alcune battute scambiate con lei ho avuto l'impressione che, dal lato della comprensione dei passaggi matematici, il procedimento dei compagni fosse stato recepito. Questo porrebbe delle garanzie almeno sul fatto che, come accennato, ci possa essere la consapevolezza di un nuovo punto di vista sul problema.

Questo aspetto del passaggio a una nuova chiave di lettura del problema è risultato cruciale anche nell'attività precedente; si tratta in fondo di un astrarre dal caso concreto nel tentativo di accedere a una comprensione diversa. Lo stesso aspetto può essere letto nella produzione di Simone. Egli segue inizialmente la strada della verifica puntuale, poi cerca di entrare nella struttura del problema, comprende che è importante capire «come è fatto» un numero dispari, e lo rappresenta scrivendo:

dispari	*dispari*		
x+1;3;5;7;9;…	*x+1;3;5;7;9;…*	=	*NUMERO PARI*

È interessante l'introduzione della parte letterale che proprio va nella direzione dell'astrazione suddetta, ed anche l'aver messo in evidenza la cifra finale. Questo ha portato ad una conclusione non esplicita, ma evidente nelle intenzioni, che per determinare la parità della somma di un numero dispari qualsiasi, ci si può limitare a considerare i casi finiti dei numeri dispari di una sola cifra. Poi però per avvalorare quanto trovato in forma ancora incompiuta, egli richiama la regola del «prodotto dei segni» scrivendola e notando l'analogia formale:

segno «meno» numero dispari; segno «più» numero pari.

Questo è un atteggiamento tipico che mi è capitato di incontrare più volte: cioè il ricorso alle analogie con quanto già appreso per risolvere problemi nuovi, anche se queste non sono sostanziali. Non è solo una considerazione a margine che spinge Simone a questo tipo di codifica: egli infatti la impiega anche nella discussione con i compagni, piuttosto che insistere sulla strada della prima rappresentazione. Dagli scambi registrati con i compagni ho poi potuto constatare che per lui il ricorso all'analogia con i segni ha un forte valore estetico quando replica, a chi gli fa osservare che questa non risolve il problema: «*so che non spiega niente però ho scoperto questo fatto*».

La stessa tecnica adoperata da Simone è utilizzata anche dalla sua compagna Michelle ma in modo più esplicito. È un tipo di dimostrazione ovviamente non formalizzata, piuttosto operativa, ma che giunge a una conclusione necessaria e vera.

Una terza categoria di produzioni degli allievi su questo tema è quella proposta da Giovanni, che affronta anch'egli la questione della struttura dei numeri da un altro punto di vista, già più formale. Egli scrive infatti:

Numero dispari = numero pari + 1 (*)
2 numeri dispari = 2 numeri pari +2 = numero pari

Evidentemente questa è la soluzione che presenta il grado di astrazione più alto tra quelle prodotte dagli allievi. Quest'ultimo contributo sembra essere stato accettato anche dai compagni che invece avevano optato per la verifica puntuale (come nel caso discusso di Annetta). In classe infatti la dimostrazione di Giovanni è stata oggetto di domande tese a chiarirne proprio il contenuto matematico. Probabilmente l'unico merito che ha avuto la richiesta a tutti di assegnare un punteggio (che nelle intenzioni doveva esprimere il grado di convincimento) per ogni contributo presentato dai compagni, è stato quello di stimolare la curiosità per le produzioni altrui.

Gli aspetti dell'attività precedente, dal punto di vista dell'indagine sull'apprendimento, che posso dire di ritrovare anche in questo caso, si identificano sicuramente con la già citata presa di coscienza di un ancora indefinito livello superiore di comprensione e di possibilità di prova che vanno al di là della verifica puntuale di una congettura. Certamente di grande importanza è il fatto che nel primo caso proprio dagli allievi sia partita la formulazione della congettura che poi ha trovato sistemazione in sessione comune. Questo è sicuramente sempre vantaggioso per l'apprendimento e inoltre, seguendo ancora Balacheff, si può aggiungere che «affinché sia innestato un processo di prova è necessario che ci sia un rischio dovuto all'incertezza e quindi una posta in gioco per cui valga la pena di cercare di assicurarsi del risultato» (Balcheff 1982 p. 275). Nel caso discusso si trattava allora di assumersi di fronte alla propria classe l'onere della prova. La cosa importante è che questa assunzione di responsabilità non avviene nel quadro del contesto stabilito dall'insegnante. Nella seconda attività l'assenza di questo aspetto è stata ovviata dal gioco dei punteggi, del quale ho potuto rendermi conto che non ha il valore per l'indagine che mi aspettavo, ma solo esprime situazioni relazionali, affettive, contingenti alla esposizione, alla comprensione, e che tuttavia ha dato gli esiti positivi nel senso appena detto.

Entrambe le attività mettono in luce comunque potenzialità che gli allievi hanno e che possono essere per loro e per l'insegnante di grande aiuto nella pratica quotidiana per una costruzione del senso del dimostrare in matematica.

4.3. Il prodotto di numeri dispari

Il problema che segue fa da corollario all'attività appena descritta. Nella struttura matematica è del tutto simile e si configura più con un carattere di esercizio mediante il quale applicare il modello esplicativo dimostrativo emerso nell'attività sulla somma. Dal punto di vista della indagine sui comportamenti che gli allievi mettono in atto in questo tipo di attività, il problema ha l'obiettivo di una verifica dal punto di vista concettuale e operativo, dal riscontro immediato.

Farò riferimento alle produzioni di Marco e Daniele (cui appartiene l'elaborato senza nome) con i quali ho lavorato e che mi sono sembrati i più defilati nella attività precedente. Il problema era in questa occasione verificare, come meglio gli allievi ritenessero, la parità del prodotto di due numeri dispari qualunque.

I due allievi hanno interagito liberamente e tra loro c'è stato un buon interscambio alla pari come testimoniano le produzioni. Si sono subito indirizzati verso la produzione di un «esempio generico» (Bencivenni, Morini, 2003 p. 91), nel senso che è stato preso a pretesto un caso concreto per mettere subito in risalto la struttura dei numeri impiegati. Lo scopo sembra quello di andare nella direzione di quanto osservato la volta precedente. Ciò si concretizza nella scrittura:

$$3\,x = x+x+x$$

Ancora una volta, dopo aver riflettuto sull'esempio concreto a sostegno delle proprie congetture, si è fatto ricorso all'astrazione mediante il passaggio sopra riportato. È Daniele che sottolinea la continuità di procedimento (e cognitiva) con l'ultima attività, quando scrive:

Seguendo il processo della volta scorsa …

Da quanto prodotto da questi due allievi sembra evidente, infatti, la traccia dell'impostazione precedente. Il ricorso all'espressione letterale era già emerso nel problema sulla somma, quando, dopo il contributo sintetizzato in (*), si è passati appunto alla formulazione letterale «canonica» proprio per precisare il contenuto algebrico di quella dimostrazione. Qui la rappresentazione letterale è impiegata opportunamente per richiamare il risultato già ottenuto in quella occasione.

Vorrei precisare che questo impiego del calcolo letterale, anche nell'attività precedente, è per così dire una esigenza di lavoro, che si è venuta a creare in quella occasione col sostituire una lettera alla dicitura «numero pari». Ciò ha poi portato a riflettere su quale espressione rappresenterebbe a questo livello un numero pari e quale può essere usata per indicare un numero dispari. Ho notato che gli allievi si sono soffermati su questi aspetti volentieri, prendendoli appunto come esercizi di calcolo letterale, e in alcuni casi hanno portato a passaggi completamente formalizzati. Non credo che sarebbe giusto tuttavia a questo livello enfatizzare o in qualche modo indirizzare verso questo tipo di approccio formale, perché ciò prefigurerebbe una immagine della formulazione letterale come mezzo di prova, che tra l'altro gli allievi non faticherebbero ad accogliere e rafforzare. Bencivenni e Morini concludono a tal proposito: «Non tutte le dimostrazioni matematiche debbono essere espresse algebricamente nel senso dell'uso delle lettere in esse, benché molti studenti siano indotti a pensare che così debba essere» (Bencivenni, Morini 2003, p. 94).

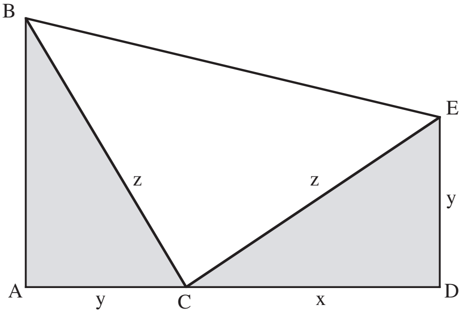
4.4. Il teorema di Pitagora

Tradizionalmente non viene proposta agli allievi di scuola media una dimostrazione del teorema di Pitagora, ma questo viene giustificato in maniera empirica come succede per tante altre proprietà e teoremi. Non voglio qui sostenere l'opportunità di affrontare lo studio di una tra le tante dimostrazioni di questo teorema, né aprire la riflessione su quale, o quali, di queste dimostrazioni sarebbe più opportuno considerare. L'obiettivo è invece di provare nell'ambito della geometria – e in particolare del teorema di Pitagora – il tipo di approccio alla dimostrazione usato per i problemi numerici.

Si partirà quindi da un problema aperto sul quale gli allievi potranno effettuare le proprie congetture, cercando poi di stimolare a partire da queste le riflessioni che possano portarli a scoprire la relazione cercata. Alla fine si tratterà di valutare quanto per loro il risultato trovato attraverso una operazione di questo tipo costituisca una prova proprio di quel risultato.

In questo caso sarebbe stato opportuno (avendo avuto più tempo a disposizione) svolgere l'attività in più tappe, proprio perché il processo di costruzione del risultato, affinché sia efficace, dovrebbe essere il più possibile libero; ma così facendo bisogna essere disposti a lasciare il problema in momenti opportuni, per riprenderlo dopo un certo intervallo di tempo.

La dimostrazione di Garfield[9] *proposta agli allievi.*



l'area del trapezio ABDE è: $\dfrac{(x+y)(x+y)}{2}$

ma è anche la somma delle aree dei tre triangoli ABC, BCE e CDE:

$$\frac{z^2}{2}+2\cdot\frac{x\,y}{2}$$

perciò:

$$\frac{(x+y)(x+y)}{2}=\frac{z^2}{2}+2\cdot\frac{x\,y}{2} \quad\Rightarrow\quad x^2+y^2=z^2$$

Questa attività è stata svolta con un gruppo di quattro allievi che hanno spontaneamente costituito a loro volta due coppie, producendo due tipi sostanzialmente simili di congettura iniziale. Il punto di inizio è stata la costruzione della figura che viene impiegata per la dimostrazione. Dopo questa fase gli allievi sono stati liberi di fare ipotesi sul disegno. Mentre un gruppo ha considerato che due trapezi come quello costruito possono comporre un rettangolo, un secondo gruppo ha visto il rettangolo già nella figura di partenza, perché nella costruzione ha impiegato come triangolo di base un triangolo rettangolo isoscele. Dopo le discussioni, anche piuttosto animate, su come interpretare questo dato, ho posto loro esplicitamente la domanda sulle dimensioni dei due triangoli ABC e DCE e nel caso del secondo gruppo la risposta è stata immediata; nell'altro caso è arrivata dopo l'esame della figura completa ottenuta e la conclusione che si tratta, sì, di un rettangolo e in particolare di un quadrato. Da qui in poi gli allievi hanno proceduto rispondendo alle domande, che ponevo, mirate a far loro percorrere i vari passaggi della dimostrazione di Garfield fino al risultato finale. Quello che, infatti, a questo livello di indagine, mi interessava registrare erano proprio le loro reazioni di fronte al risultato non annunciato.

In un primo momento il fatto di essere concentrati sui passaggi algebrici ha fatto perdere loro il senso delle grandezze in gioco, però quando questo è stato re-

9. James A. Garfield, presidente degli USA per un solo anno: il 1881. Morì prematuramente a seguito di un attentato.

cuperato con il confronto sulla figura di partenza, l'estemporaneità delle loro affermazioni mostra che in fondo il senso globale di tutta l'operazione è stato colto. Si trattava di «scoprire», come dice Andrea, il teorema di Pitagora e «confermarne l'esattezza». Manca però la consapevolezza del perché, ed era immaginabile che fosse così. «Perché abbiamo dovuto fare tanta fatica per scoprire una cosa che già si sapeva?», questa è la legittima domanda che gli allievi si pongono. Per darle una risposta bisognerà forse porre loro un'altra domanda: «Perché il teorema è valido solo per i triangoli rettangoli?»; adesso probabilmente possono dare una riposta nella quale è chiuso il senso stesso della dimostrazione.

5. Conclusioni e possibili sviluppi futuri

L'obiettivo dichiarato di questo lavoro era di indagare, per quanto possibile, quei meccanismi che gli allievi mettono in opera in situazioni che riguardano la verifica e la produzione di congetture, sia a livello di dinamiche di classe sia di ragionamento individuale. La speranza era di riscontrare nel loro modo di agire, ragionare, argomentare, quelle che sono le potenzialità per proporre, a ragione, una sensibilizzazione sul tema della prova matematica. Non si tratterebbe evidentemente di aggiungere un capitolo ai piani di formazione, ma di riconsiderare durante tutto il processo di insegnamento/apprendimento, che si sviluppa nell'arco di un anno scolastico, i temi che si affrontano anche alla luce di questo strumento. Perché, se si accoglie l'accezione della prova come mezzo di comprensione, questa non può che essere uno degli strumenti didattici da usare.

Esprimo nuovamente qui questo punto di vista con le parole di C.Hoyles, che sostiene: «Forse le dimostrazioni scolastiche, dove il contenuto è assegnato, dovrebbero mirare a fornire una approfondita comprensione del perché una affermazione è vera e a chiarire le strutture matematiche che sono oggetto di studio piuttosto che puntare a verificare solo la correttezza» (Hoyles 1998, p. 8).

Ciò che mi sento di affermare, se pur con tutti i limiti metodologici e teorici della breve indagine effettuata, è che gli allievi (almeno quelli che ho visto) mostrano di avere già alla scuola media il grado di sviluppo cognitivo necessario per accedere alla forma di comprensione che può derivare dall'accettare una dimostrazione. Perché è proprio questa possibilità di accettazione che viene messa in dubbio quando non si accede allo strumento della dimostrazione. Così, molte ricerche (alcune già citate) pongono giustamente in risalto che solo una minima parte di allievi quando, più avanti negli studi, incontrano le dimostrazioni sono in grado di coglierne il senso. La mia esperienza mi porta a concludere che questa possibilità dell'accettazione c'è ed è concreta nella misura in cui ho potuto vedere gli allievi rinunciare momentaneamente all'intuizione in favore del ragionamento valido, per «riprenderla», come forma di comprensione, dopo aver visto il problema da una nuova prospettiva, quella appunto fornita dalla costruzione di una dimostrazione.

Bibliografia

Arrigo G.
Lo vedo ma non ci credo. Presentazione di una ricerca in corso, Bollettino dei docenti di matematica, n. 42, 2001, Ufficio dell'insegnamento medio.

Bagni G.T.
Dimostrare e convincere, Bollettino dei docenti di matematica, n. 36, 1998, Ufficio dell'insegnamento medio.

Balacheff N.
Preuve et Demonstration en Mathématiques au College, Recherches en didadactique des mathematiques, 1982, La Penssée Sauvage éditions.

Bencivenni I. e Morini C.
Sull'avviamento alla dimostrazione, L'insegnamento della matematica e delle scienza integrate, vol. 26, gennaio 2003, G. Battagin Editore.

Boffa M.
Il discorso matematico nella scuola media: linguaggio dell'algebra e dimostrazioni, la matematica e la sua didattica n. 1, 1998, Pitagora Editrice Bologna.

D'Amore B.
Didattica della matematica 2001 Pitagora editrice Bologna.

Duval R.
Argomentare, dimostrare, spiegare, continuità o rottura cognitiva? 1998, Pitagora Editrice Bologna.

Duval R.
Struttura del ragionamento deduttivo e apprendimento della dimostrazione, la matematica e la sua didattica n. 4, 1996, Pitagora Editrice Bologna.

Fischbein, E.
Matematica a scuola: *teoria ed esperienze*, Pitagora Editrice Bologna, 1983.

Hoyles C.
L'influenza del curriculum sull'approccio degli studenti alla dimostrazione, 1998 Pitagora Editrice Bologna.

Olivero F.
Congetturare e dimostrare in un ambiente di geometria dinamica, L'insegnamento della matematica e delle scienza integrate, vol. 27, settembre-ottobre 2004, G. Battagin Editore.

Popper K.R.
Postscript to the Logic of Scientific Discovery I, 1982, Hutchinson, London.

Veronesi C.
Dimostrazioni e certezza matemaitca: il dibattito continua, la matematica e la sua didattica n. 1, 1999, Pitagora Editrice Bologna.

2. L’infinito nella scuola dell’infanzia

Vania Lehner[1]

The idea of infinite has always embodied a halo of scepticism, mixed with deep curiosity and fascination. The present article tells of a study on the concept of infinite, carried out with children attending a nursery school. The aim of the research is to catch and observe the children’s beliefs, which sometimes go beyond the mathematical concept.

Introduzione

Da sempre l’infinito rappresenta un argomento che si porta appresso un alone di scetticismo misto a una forte curiosità e fascino; tutto ciò è testimoniato da molteplici studi effettuati in questo ambito. Decidere di affrontare una ricerca sul tema dell’infinito e desiderare di svilupparla nella scuola dell’infanzia è stata una scelta tutt’altro che semplice. In ambito matematico si sarebbero potuti approfondire diversi aspetti, forse più convenienti a questo tipo di scuola. Tuttavia abbiamo scelto di muoverci in un’ottica nuova e appassionante, cogliendo questa sfida che ci ha portato a sondare le idee ingenue dei bambini di 5 anni relative ad un tema per loro mai trattato «scolasticamente». Riteniamo importante precisare che, occupandoci di convinzioni ingenue degli allievi, non abbiamo fatto forzature qualora i bambini avessero spaziato con la fantasia in contesti diversi da quello matematico.

1. Il quadro teorico

Una delle parti più corpose della ricerca è stata senza dubbio la stesura di un quadro teorico chiaro e mirato, che ci permettesse di gettare solide basi per la definizione del percorso. Nel contesto internazionale la letteratura relativa all’infinito matematico è assai vasta: tuttavia, a causa delle difficoltà insite in questo argomento, questo tema è stato assai poco trattato nell’ambito della scuola dell’infanzia. Più in dettaglio, il nostro quadro teorico di riferimento verte sulle convinzioni (D’Amore, Fandiño Pinilla, 2004; Zan 1998) dei bambini di scuola dell’infanzia relative all’infinito matematico (Arrigo, D’Amore, 1999; 2002; Sbaragli, 2003a; 2004). Con questa ricerca non si ha quindi l’ambizione di effettuare un’analisi minuziosa ed esaustiva del tema: il no-

1. Maestra della scuola dell’infanzia, diplomata all’Alta Scuola Pedagogica di Locarno. L’articolo è una sintesi del suo lavoro di diploma diretto dalla prof. Silvia Sbaragli.

stro interesse è quello di indagare le convinzioni sull'infinito dei bambini in età prescolare, siccome non sono stati ancora soggetti a insegnamenti specifici in questo campo, risultando così portatori di convinzioni dette «ingenue», poiché esse derivano da conoscenze poco o per nulla formali e prive di consapevolezza (D'Amore et al. 2004, pp. 4; 25; 27; 31-36). I bambini, possono aver già sentito nominare la parola infinito, in contesti diversi e, anche se non ne conoscono ancora il significato, soprattutto in ambito matematico, ne possono aver intuito la «potenza» e il fascino che genera. Proprio grazie alle esperienze di vita quotidiana i bambini di scuola dell'infanzia cominciano ad organizzare logicamente ciò che li circonda, sviluppando modelli che si formano spontaneamente (D'Amore et al. 2004, pp. 15-16) e che evolvono con il passare del tempo. In particolare, per effettuare la ricerca siamo partiti dagli studi di Sbaragli (2003a; 2004) che mettono in evidenza diverse convinzioni degli insegnanti relative all'infinito matematico, che molto spesso risultano essere vere e proprie misconcezioni (D'Amore, 1999; Sbaragli, 2005; D'Amore, Sbaragli, 2005). Queste erronee convinzioni del concetto di infinito sono state suddivise dall'autrice in quattro categorie: *infinito come illimitato*, ossia come qualcosa che non può esistere all'interno di determinati limiti e contorni; *infinito come indefinito*, nel senso che non si sa quanto sia, che cosa sia e che cosa rappresenti precisamente; *infinito come numero molto grande, ma comunque finito*; *infinito esclusivamente come procedimento senza fine (infinito potenziale)*: in questo caso si è potuto notare che si tende a riferirsi ad un procedimento che continua per sempre[2]. In questa ricerca non intendiamo indagare le misconcezioni degli insegnanti, ma le immagini intuitive (D'Amore 1999, p. 151; 2002; 2003) dei bambini di scuola dell'infanzia relative all'infinito, analizzandole in base alle categorie studiate da Sbaragli (2003a). Qui di seguito descriveremo brevemente gli aspetti che influenzano le categorie sopra citate, affinché possa essere più chiaro al lettore il quadro teorico di riferimento nel quale ci muoveremo. Già in precedenti ricerche (Arrigo, D'Amore 1999; 2002) si erano messi in evidenza alcuni fenomeni riscontrati in allievi di scuola superiore e ritrovati da Sbaragli (2003a; 2004) negli insegnanti, tra i quali ricordiamo la *dipendenza*, convinzione legata alla nozione euclidea del tutto sempre maggiore della sua parte propria, considerata vera sia nel finito che nell'infinito. Ad esempio si ha la convinzione che vi sono più punti matematici in un segmento lungo, piuttosto che in uno corto. In questo caso, l'immagine visiva risulta essere ingannevole, dato che il segmento corto poiché «contenuto» in quello più lungo, si pensa di potere generalizzare tale modello figurale ai numeri di punti dei segmenti.

Inoltre, le idee ingenue che si formano sui diversi saperi sono spesso legate a contesti differenti da quello matematico e vengono poi trasferite con disinvoltura anche in questo contesto, soprattutto a causa di una forte analogia linguistica. Nel corso della nostra indagine è risultato importante far capire al bambino l'importanza del contesto, chiarendo l'ambito di riferimento, quindi considerando i diversi «usi» di un sapere, i quali determinano il significato degli oggetti (Sbaragli 2003b). Si possono attribuire significati diversi al concetto di punto a dipendenza del contesto in cui ci si trova: nel nostro caso non abbiamo fornito delle spiegazioni puntuali, ma quando si parlava di punto esso veniva nominato punto matematico. In questo modo il bambino di scuola

1. Fu Aristotele [384-322 a.C.] che rilevò la duplice natura dell'infinito, «in atto» e «in potenza»: «l'infinito attuale è quello al di là del quale non c'è più nulla; […] l'infinito potenziale è quello al di fuori del quale c'è sempre qualcosa».

dell'infanzia ha cominciato a percepire una differenza di significato a dipendenza del contesto in cui ci si trova. Per questo tipo di indagine è stato inoltre indispensabile adottare una metodologia che offrisse al bambino una notevole libertà di scegliere e di operare al di fuori dei vincoli scolastici. Nell'affrontare la ricerca in questo livello scolastico, occorre tener conto che vincoli del tipo contratto didattico (Brousseau, 1986) di solito non sono presenti nella scuola dell'infanzia. Tuttavia, è necessario tenere presente la possibilità dell'instaurarsi di un particolare contratto sperimentale tra allievo e ricercatore, all'interno del quale il bambino tenderebbe a volerne soddisfare le attese (dimensione affettiva).

2. Interrogativi di ricerca

P1. Un bambino di scuola dell'infanzia (5 anni) ha qualche idea intuitiva riguardante l'infinito? Se sì, di quale tipo è? Tali idee potrebbero rientrare già tra le misconcezioni evidenziate dalla letteratura?

P2. Un bambino di 5 anni come si rappresenta l'infinito? La sua visione si fonda su che cosa? Su «oggetti» inerenti il contesto della matematica oppure no?

P3. Nel considerare l'idea di infinito potenziale, il bambino tenderà a considerarlo come un procedimento che tende prevalentemente all'infinitamente grande oppure all'infinitamente piccolo? Quali potrebbero essere le cause di questa scelta?

3. Metodologia

La ricerca è stata realizzata con le seguenti modalità: si sono organizzati tre incontri per sezione (4 sezioni), nei quali il ricercatore potesse entrare in contatto informale con i bambini, al fine di stabilire un rapporto di simpatia e fiducia che favorisse e giustificasse le domande che si sarebbero fatte in seguito nel corso del quarto incontro. La ricerca vera e propria è iniziata con la richiesta rivolta a tutti i bambini della sezione (5 anni) di disegnare l'infinito su un foglio A4; in seguito sono state selezionate alcune tra le rappresentazioni dell'infinito realizzate dai bambini e, sulla base di queste, sono stati formati i gruppetti di discussione. L'intervista e il successivo scambio di opinioni sono stati svolti con gruppi campione (6-7 bambini per sezione suddivisi in gruppetti da 3-4, per un totale di 25 intervistati), cercando di mettere a confronto bambini con rappresentazioni dell'infinito differenti tra loro, affinché la seduta argomentativa risultasse più ricca e stimolante. L'indagine è iniziata con la presentazione di ogni singolo disegno dei membri del gruppetto. In tali gruppetti di discussione il ruolo del ricercatore era quello di mediatore, che lanciasse uno stimolo che i bambini dovevano cogliere a favore di eventuali conflitti socio-cognitivi; in questo modo le discussioni risultano essere terreno fertile per percepire in profondità le reali convinzioni degli intervistati. Affinché i bambini potessero comprendere il senso dell'attività, il ricercatore si è preoccupato di creare uno sfondo motivazionale all'interno del quale egli chiedeva aiuto ai bambini presenti, per soddisfare la curiosità di altri bambini della loro età per quanto riguarda il tema dell'infinito. Il ricercatore si è rivolto ai bambini proponendo una simpatica «lite» tra due burattini a dito, i quali non riuscivano ad accordarsi su alcuni concetti inerenti l'infinito [le 4 categorie rilevate da Sbaragli (2004)] e quindi non erano molto d'aiuto alla ricerca di una soluzione che potesse aiutare i bambini in difficoltà.

4. Descrizione delle rappresentazioni dell'infinito e degli scambi di opinione

Dalle rappresentazioni dell'infinito sono emerse idee intuitive generiche, le quali sono poi state approfondite grazie agli scambi effettuati nel corso delle interviste a piccoli gruppi. Qui di seguito riporteremo alcune tra le affermazioni e le risposte fornite dai bambini nel corso della rappresentazione dell'infinito e le risposte alle domande effettuate durante la discussione successiva. Sono state scelte alcune tra le affermazioni e le risposte più significative per meglio percepire i risultati di ricerca. Si sono evidenziati gli interventi effettuati dal ricercatore durante la discussione per stimolare la conversazione e per indagare più a fondo sulle idee intuitive dei bambini relative all'infinito.

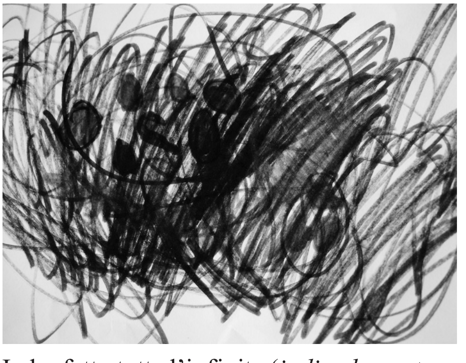
4.1. Rappresentazione grafica dell'infinito

Per quanto riguarda la prima parte della ricerca, i bambini sono stati confrontati con la richiesta di rappresentare graficamente l'infinito (*sapresti disegnare l'infinito?*). Tutte le rappresentazioni rientrano tra le convinzioni riportate di seguito. Riteniamo importante precisare che la classificazione presentata non è definitiva, poiché, come potremo vedere in seguito, i bambini daranno risposte che potranno entrare anche in altre categorie. Il cambio di opinione sarà la conseguenza della discussione a gruppetti. Nel corso della realizzazione grafica dell'infinito, i bambini hanno iniziato a discutere spontaneamente tra loro a proposito del quesito. Questo scambio spontaneo ha permesso ai bambini inizialmente in difficoltà (*io non lo so disegnare l'infinito*) di produrre comunque qualcosa: tuttavia l'influenza dei compagni ha generato diverse occasioni di imitazione, rendendo i disegni in alcuni casi molto simili tra loro. Ci sembra importante citare questa dinamica, poiché siamo coscienti della possibile influenza reciproca; inoltre, abbiamo potuto osservare diverse occasioni di co-costruzione. Riteniamo importante rilevare una sottile diversità tra le affermazioni orali dei bambini nel corso della rappresentazione grafica e gli elementi concretamente realizzati nel disegno, nel senso che i bambini quando sentono nominare l'infinito dicono una cosa, la quale non verrà poi per forza realizzata sulla carta, forse anche per motivi riconducibili alle capacità grafico-pittoriche. Nel corso della sintesi dei dati ci siamo resi conto della possibilità di suddividere in 5 categorie le idee intuitive riguardanti la rappresentazione dell'infinito. Qui di seguito verranno riportate alcune tra le rappresentazioni più significative di ogni categoria, accompagnate da stralci di protocollo:

- *Mondo, Spazio, pianeti*

T.: Tutto il mondo, perché poi è finito l'infinito.

D.: L'infinito è lo Spazio/ c'è lo Spazio, l'infinito, che non c'è mai una fine… alla fine dello Spazio però ci sono i vortici grandissimi… quegli spazi giganti.



F.: Io ho fatto tutto l'infinito (*indica la parte nera*) qua qua sono i pianeti, la Luna, delle stelle e qua il nostro mondo.

- *Numeri*

Una delle caratteristiche più interessanti di questa categoria è rappresentata dalla difficoltà che i bambini incontrano nello scrivere una lunga serie di numeri, difficoltà che li spinge a completare il proprio disegno con altri elementi, già presenti in altre categorie.

V.: Prova a pensare, hai già sentito la parola «infinito»?

S.: Sì, i numeri sono infiniti

Alcuni bambini, invece, ricorrono indirettamente al numero, facendone una rappresentazione pittorica (Aglì, D'Amore, 1995; D'Amore et. al. 2004, p. 73), ossia rappresentando più volte uno stesso elemento. Anche in questo caso il limite grafico viene completato con una spiegazione orale delle intenzioni.

E.: Faccio una marea di topi che non finisce mai.

V.: Quanti topi vuoi disegnare?

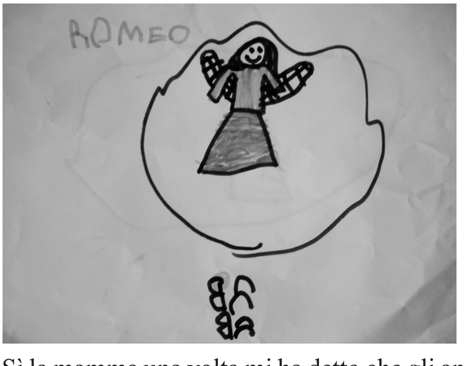
E.: Eh tanti, almeno tutto il foglio (*dopo un po'*) non ce la faccio più, faccio finta che ho riempito il foglio.

- *Morte, vita, angelo, (nuvola)*

Questa categoria presenta importanti limiti legati alla rappresentazione grafica di entità astratte, presenti già nella richiesta di rappresentare l'infinito. Alcuni bambini parlano delle morte e della vita, di difficile raffigurazione, quindi ricorrono ad altri soggetti per loro legati a tali concetti.

E.: Infinito… come la morte.

S.: La vita è infinita, quando io sono morto poi gli altri vivono; anche noi viviamo in cielo e conosciamo Dio.

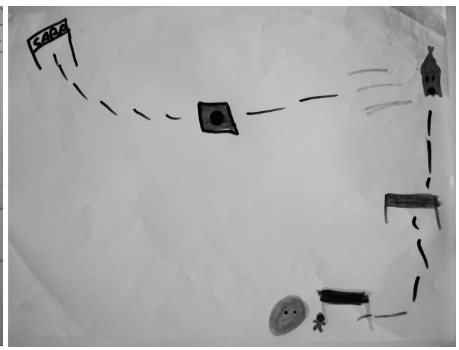


R.: Sì la mamma una volta mi ha detto che gli angeli vivono all'infinito, fino alla grandissima… all'infinito.

In seguito, quando risponderanno agli interrogativi successivi, tratteremo alcuni aspetti significativi che possono influenzare i bambini di scuola dell'infanzia, tra i quali è emersa, appunto, la religione.

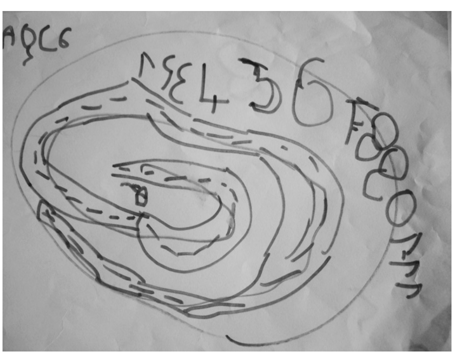
• *Strada*

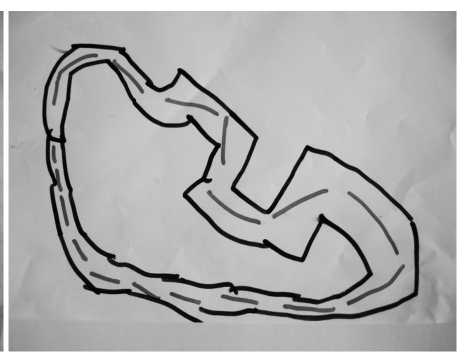
Nel corso delle prime rappresentazioni è emersa l'idea di strada associata all'infinito per la quale eravamo stati portati a pensare che tale esigenza derivasse dal desiderio di un singolo bambino di disegnare proprio questo soggetto, non tanto dalla reale volontà di rappresentare l'infinito. Insomma, pensavamo che si trattasse di un semplice pretesto per fare un disegno libero. Tuttavia, ci siamo presto resi conto dell'importante e continuo ricorso a questo oggetto. Quasi la metà degli intervistati hanno subito fatto riferimento alla strada e 10 di loro hanno deciso di rappresentarla per spiegare che cosa fosse l'infinito. In alcuni casi la strada viene associata alla pista delle automobiline, molto presente nella vita ludica dei bambini. Dalle rappresentazioni sono emersi due tipi di strade: aperta e circolare.



Strada aperta

J.: È una curva, c'è una curva e dopo c'è il parcheggio.
E.: Una strada che la strada finiva.
V.: Perché la strada vi fa venire in mente l'infinito?
S.: Perché la strada se te vai in giro ci sono taaante fermate e dopo e dopo e dopo non puoi più andare avanti (*sta intendendo qualcosa che comunque finisce*)





Strada circolare

G.: Perché la strada non finisce mai.

S.: Così… in rotondo perché non finisce mai (*passa sulla strada con il dito*).

Riteniamo questo aspetto della circolarità molto significativo perché associato all'idea di ricorsività, che spesso viene fatta osservare didatticamente legandola ai giorni della settimana, ai mesi, alle stagioni.

4.2. Risposte alle domande dell'intervista e convinzioni emerse nel corso della stessa

Le risposte relative alla seconda parte della ricerca, ossia all'intervista a piccoli gruppi, evidenziano la presenza di misconcezioni legate all'infinito analoghe a quelle individuate negli insegnanti da Sbaragli (2003a; 2004): infinito come illimitato, infinito come indefinito, infinito come numero finito grande, infinito come procedimento senza fine (infinitamente grande/infinitamente piccolo). Inoltre, dall'intervista sono emerse altre due categorie specifiche dei bambini di scuola dell'infanzia: i personaggi mitico-magici e la religione e le figure religiose.

- *Infinito come illimitato*

Ben 12 bambini parlano dell'infinito riferendosi a qualcosa che non finisce mai, qualcosa che non può stare entro dei limiti o contorni.

E.: Ci sono tanti topi, volevano entrare in una casina piccola e dopo dovevano fare la fila, erano talmente tanti che andavano uno sopra l'altro.

V.: Perché ti è venuta in mente questa idea per disegnare l'infinito?

E.: Perché ci sono talmente tanti topi che non finiscono mai e non ci stanno nella casina.

Come abbiamo già avuto modo di osservare in precedenza, sono diversi i bambini che fanno riferimento alla circolarità per spiegare l'infinito. 6 bambini associano l'infinito a qualcosa che non finisce mai, poiché ricomincia sempre.

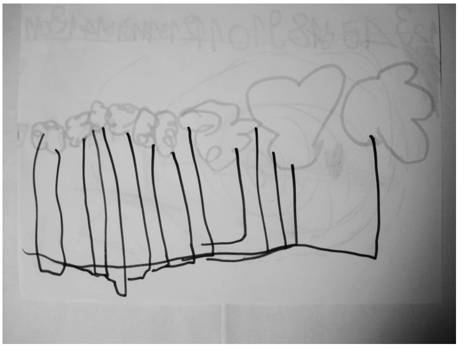
L.: La pista delle macchine.

V.: Perché ti ricorda l'infinito?

L.: Perché sono sulla pista che poi ricominciano da capo… continua a ricominciare da capo.

D.: Sì, perché l'infinito non ha mai fine.

La richiesta di rappresentare l'infinito su un foglio A4 ha generato osservazioni acute e interessanti da parte dei bambini a proposito del misconcetto in questione, poiché si trattava di svolgere un'azione concreta, ossia disegnare qualcosa che non finisce mai, in uno spazio per forza limitato.



M.: Alberi alberi.
V.: Perché ti hanno fatto pensare all'infinito?
M.: Ho sbagliato così…
V.: Cosa avresti voluto fare?
M.: Forse perché gli alberi non finiscono mai, ma non avevo più posto allora ho sbagliato.

Per meglio approfondire le convinzioni relative all'infinito come illimitato, abbiamo proposto ai bambini la «lite» tra i burattini a dito, in disaccordo sulla possibilità o meno di inserire infiniti punti matematici in un segmento, in un quadrato e in un cubo (tutti e tre a disposizione dei bambini). La prima domanda è sempre stata posta prendendo come punto di riferimento il segmento (*A. dice che in questo segmento ci sono infiniti punti matematici, mentre B. dice che non è possibile, secondo voi chi ha ragione?*) ed è stata seguita la stessa modalità anche per il quadrato ed il cubo. Riteniamo importante osservare che le risposte relative al segmento hanno poi influenzato quelle relative al quadrato e al cubo, le quali hanno generato giustificazioni analoghe e più succinte da parte dei bambini. Qui di seguito verrà illustrato come già alla scuola dell'infanzia sia presente il misconcetto legato all'infinito come illimitato.

Segmento: 10 bambini non condividono la possibilità che in un segmento ci possano essere infiniti punti matematici, mentre 7 affermano il contrario. La differenza è esigua, tuttavia riteniamo assai importante notare che ben 6 tra i bambini che inizialmente hanno risposto affermativamente hanno cambiato idea nel corso della discussione. Sono stati solo 3 tra quelli che inizialmente erano contrari a cambiare idea a favore della possibilità di fare stare infiniti punti matematici in un segmento. I motivi dei bambini contrari alla possibilità di far stare infiniti punti matematici in un segmento erano legate alla dimensione degli elementi coinvolti: 4 bambini sostengono che il foglio sul quale è disegnato l'infinito è troppo piccolo, mentre 3 di loro affermano che il segmento interessato è troppo sottile.

V.: Voi cosa ne pensate? Ci stanno oppure no infiniti punti matematici nel segmento?
G.: Non ci stanno mai, perché non finisce mai l'infinito neanche se li fai piccoli, anche se vai avanti non è ancora finito l'infinito.
V.: E di quanto spazio avreste bisogno?
M.: Un graaaande foglio, questo no è piccolo.
G.: Più grande del mondo.

V.: In questo segmento non ci possono stare infiniti punti matematici?

E.: No è una riga che è troppo fine.

Quando un bambino affermava che era possibile che nel segmento ci stiano infiniti punti matematici, egli forniva sempre delle condizioni. La condizione-motivazione alla quale tutti i bambini favorevoli hanno fatto capo è quella legata alle dimensioni del punto matematico, il quale deve avere dimensioni particolarmente ridotte.

A.: Sì, facendo tante righe.

N.: Sicuro, però devi attaccare tanti fogli e allungarlo (*il segmento*).

E.: Ma i punti della della matematica devono essere piccoli piccoli punti.

Quadrato: Buona parte delle motivazioni fornite per il segmento le abbiamo riscontrate anche nel caso del quadrato. I bambini che affermano che non è possibile che nel quadrato ci stiano infiniti punti matematici sono 13, mentre i bambini che sostengono il contrario sono 6. I cambi di opinione sono praticamente inesistenti. In precedenza la condizione imposta dalla maggior parte dei bambini che sostenevano la possibilità che in un segmento potessero starci infiniti punti matematici, viene ripresa da 4 bambini anche per il quadrato, i quali sostengono che è possibile che nel quadrato ci stiano infiniti punti matematici solo a patto che essi abbiano dimensioni molto ridotte. Per quanto riguarda le motivazioni che giustificano l'impossibilità che in un quadrato vi siano infiniti punti matematici, 5 bambini sostengono che il quadrato è troppo piccolo, 3 che è troppo piatto ed 1 che l'infinito è comunque troppo grande per poter stare in un quadrato.

Cubo: Riteniamo importante far notare la coerenza dei bambini nel fornire le risposte. La domanda del ricercatore è stata la stessa, ma questa volta in relazione al cubo. Abbiamo notato che 13 bambini hanno dato una risposta negativa, mentre 6 hanno affermato che nel cubo era possibile farci stare infiniti punti matematici; proprio come in precedenza. È comunque importante notare che 2 bambini dapprima hanno dato un'affermazione negativa, mentre in un secondo momento hanno sostenuto il contrario. Anche in questo caso, come era accaduto nella parte dell'intervista relativa al segmento, i bambini che sostengono la possibilità che in cubo ci stiano infiniti punti matematici danno delle condizioni-motivazioni: 5 bambini sostengono che sarebbe meglio se il cubo fosse più grande, mentre 3 di loro ribadiscono l'importanza dell'uso di punti molti piccoli. I contrari sono invece quasi tutti d'accordo nell'affermare che il cubo in questione ha dimensioni troppo ridotte per fare in modo che ci possano stare infiniti punti matematici al suo interno e 2 di loro ricorrono ad un'immagine suggestiva: l'esplosione del cubo qualora si tentasse di inserirvi infiniti punti matematici.

T.: Ma cheee, è troppo piccolo, con tutti i punti del mondo deve scoppiare (*il cubo*) in un momento.

A.: Sì… se li disegni piccolissimo sì piccolo piccolo piccolo sì (*ci stanno infiniti punti matematici*)

Fe.: Invece se sono grandi ce li metti (*i punti matematici*) esplode (*il cubo*).

R.: Se li fai minuscoli (*i punti matematici*) puoi farcela.

F.: No, è troppo piccolo (*il cubo*).

R.: Meglio se più grande.

D.: Magari deve essere più grande fino al tetto.

L.: Che tocca il cielo.
D.: Fino alla Terra, fino allo Spazio
Emergono due risposte particolarmente significative:
1) segmento/quadrato/cubo sono troppo piccoli;
2) i punti matematici devono avere una dimensione molto ridotta.

• *Infinito come indefinito*

Nel corso dell’intervista alcune domande hanno messo in difficoltà 8 bambini, i quali non sapendosi rappresentare l’infinito, lo hanno descritto come qualcosa di non tangibile o privo di spiegazione. Tra gli 8 bambini che rientrano in questa categoria, 2 affermano che l’infinito non esiste.

V.: Che cosa sai dell’infinito?
M.: Che l’infinito non esisteva.

Abbiamo poi notato che i restanti 6 bambini appartenenti a questa categoria si rifanno a un problema di spiegazione o di cardinalità dell’infinito.

J.: Non lo so spiegare (*l’infinito*).
V.: Perché?
S.: Eeh… non posso dirlo, è così tanto che non riesco a dirlo.

• *Infinito come numero finito grande*

La parte dell’intervista relativa all’indagine del misconcetto concernente l’esistenza o meno di un numero più grande di tutti ha generato molto entusiasmo tra i bambini, apparsi molto coinvolti, ma anche molto scettici nel dare le risposte. I numeri sono stati associati all’infinito sin dall’inizio dell’intervista, infatti, 8 bambini hanno affermato che i numeri sono infiniti.

V.: Prima, mentre facevate il disegno, ho sentito parlare di numeri, perché?
A.: Beh, perché i numeri sono infiniti.
D.: Non c’è mai, non c’è mai una fine ai numeri.

Riteniamo importante andare oltre questa affermazione iniziale e cercare di indagare più in profondità il pensiero dei bambini per quanto riguarda i numeri e l’infinito. Infatti, l’interpretazione dell’interazione che esiste tra numeri e infinito varia da bambino a bambino. 6 bambini identificano l’infinito come numero più grande che esiste.

V.: Qual è il numero più grande che esiste?
E.: Infinito.
E.: *Prende un foglio e comincia a scrivere delle cifre in successione e man mano che scrive si rivolge al ricercatore per chiedere conferma dell’esistenza o meno di quel numero.*
V.: Puoi farlo ancora più grande?
E.: (*riscrive circa lo stesso numero aumentandone le dimensioni*)… o più lungo? Se voglio farlo più grande… più lungo devo scrivere più in piccolo sennò non ci sta.
V.: È lunghissimo!
E.: Forse allora è questo il numero dell’infinito.

V.: Secondo te si può andare ancora più avanti? Fino a quando?
E.: Sì, fino a qua (*indica il bordo del foglio*).
V.: Quando finisce il foglio devi fermarti?
E.: … rifaccio sotto… è il numero dell'infinito quello che sto facendo? Il papi dice che si può andare ancora più in avanti.
V.: Ti ha anche detto fino a quando?
E.: Allora, da qua a qua (*indica le estremità del foglio*)… il papi mi ha spiegato che cos'è il numero dell'infinito.
V.: Interessante… che cos'è?
E.: Il papi mi ha detto che il numero dell'infinito è così forse non me lo ricordo bene (*scrive 109810256100*).

3 bambini sostengono invece che il numero più grande non esiste o che sia impossibile. Solitamente questa affermazione arriva alla fine di un percorso di ricerca del numero più grande, nessun bambino afferma l'inesistenza del numero più grande senza prima aver provato a cercarlo.
F.: Non esiste il numero più grande.
V.: Perché dici che non esiste?
J.: Perché è impossibile farlo.

La maggior parte dei bambini ha dato come risposta un numero, 10 di loro inizialmente hanno menzionato numeri compresi tra il 7 e il 28 sostenendo che fossero i più grandi che esistono; poi però nel corso dell'intervista 7 hanno fatto riferimento al 100 come numero più grande; 4 bambini hanno nominato il 1'000 e 2 di loro anche il 100'000. Infine, 6 bambini hanno parlato di miliardo (molto spesso chiamato *miliarda*) e uno di essi di trilione. La sfida della ricerca del numero più grande che esiste ha spinto i bambini ad inventare dei numeri «molto lunghi» dal punto di vista linguistico, composti da numeri reali, ma combinati in modo personale.
N.: Ducentomilabahmiliarda
M.: Quarantacento
S.: Millequarantacentonovanta
R.: Duemiladuesett
D.: Centomiliardanovantamila

Inoltre, alcuni bambini hanno scoperto la possibilità di ricorrere alla somma, effettuata da 3 bambini con modalità differenti: la ripetizione continua di un numero; la nomina del segno dell'addizione o il fare «lampeggiare» le mani.
D.: 100'000 100'000 100'000 100'000 100'000 100'000 100'000 100'000
R.: Dopo il 100 c'è il 1'000, poi il 100+100 e 100+100+100 (*continua a ripetere*)

In risposta alla proposta della somma, 2 bambini suggeriscono la possibilità di ricominciare sempre.
G.: Il miliardo è il più grande
M.: No, ricominci
V.: Come?
S.: Miliardo 1, miliardo 2

• *Infinito come procedimento senza fine*
(infinitamente grande/ infinitamente piccolo)

Abbiamo visto che i bambini attribuiscono all'infinito una continuità potenziale. In questa parte dell'intervista abbiamo indagato le loro idee intuitive sull'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo.

Infinitamente grande: 9 bambini sostengono che il mondo sia la cosa più grande che esiste, 5 bambini fanno riferimento al cielo, altri 4 all'universo, allo Spazio, comprendendo pianeti vari e il Sole.

V.: Qual è la cosa più grande che esiste?
S.: Il mondo.
D.: Lo Spazio… il mondo… lo Spazio, perché lo Spazio è l'infinito che non c'è mai una fine.
V.: C'è qualcosa di più grande dello Spazio?
D.: No, non c'è niente di più grande dello Spazio.
L.: Sìì… il cielo, perché è tutto grande più dei mondi.

Riteniamo rilevante l'opinione di 6 bambini, i quali citano strutture familiari come le cose più grandi che esistono, coinvolgendo così la sfera affettiva.

S.: L'asilo.
L.: Il palazzo… io tutta la città.
A.: Il castello della principessa che ho disegnato qui, ma manca il principe.

Infine, ci sono i bambini indecisi sul da farsi: 2 bambini dicono che non esiste la cosa più grande, mentre uno dice che esiste, ma che purtroppo non sa come si chiama. Riteniamo curioso annotare che 2 bambini si aiutano nella definizione della cosa più grande che esiste ricorrendo alla lingua italiana (D'Amore et al. 2004, p. 6), nel senso che fanno capo ad aggettivi accrescitivi.

J.: Una… sanguisuga… una gigantessssssca sanguisuga.

Infinitamente piccolo: 14 bambini ricorrono a insetti e animali per rispondere alla domanda del ricercatore, il quale voleva sapere quale fosse la cosa più piccola che esiste e ben 7 di loro nominano le formiche. Le formiche rappresentano l'insetto più piccolo usato come esempio nelle ore di educazione fisica, quando si chiede ai bambini di drammatizzare gli animali; la scelta dei bambini sarà stata influenzata anche da questo fattore. 3 bambini si rifanno un'altra volta al quotidiano, citando le briciole di pane. 5 bambini, invece, ricercano la cosa più piccola che esiste sul proprio corpo, nominando capelli, nei, ciglia, pupille e denti. Una bambina ha raccontato ai compagni di possedere un microscopio, grazie al quale è possibile vedere cose molto piccole.

G.: Un microbo.
V.: Che cos'è un microbo?
G.: È la cosa più piccola che nessuno può vederla, solo con il microscopio… perché le cose più piccole che ci sono non si lasciano vedere.

Siamo coscienti del fatto che la sequenza delle domande che ha guidato l'intervista ha influenzato l'esito delle domande seguenti. In questa sede, infatti, 8 bambini hanno citato il puntino come la cosa più piccola che esiste. Per indagare il misconcetto legato all'infinito come illimitato il ricercatore ha discusso con i bambini a proposito dei punti matematici e i bambini hanno affermato che essi dovevano essere molto piccoli. I bambini possono dunque aver trasferito alla nuova domanda le osservazioni fatte in precedenza. I bambini cercano un riscontro nell'ambiente in cui si trovano, mostrando al ricercatore dei puntini o provando a disegnarli.

E.: (*fa un puntino con la matita*) Guarda! Non si vede quasi.
F.: Provo io più piccolo… non si vede.

In relazione al fatto che non è possibile vedere la cosa più piccola che esiste, 3 bambini hanno affermato che essa è il niente, ossia il nulla.

F.: Più piccolo è… una formica… no più piccolo più piccolo è niente.

Un solo bambino ha fatto l'esempio che riporteremo in seguito, ma riteniamo molto interessante citarlo in questa occasione.

A.: Il mondo visto da lontano lontano lontano lontano e ancora lontano (*ripete «lontano»*).
V.: Fino a quando andiamo avanti a dire lontano?
A.: (*continua a ripetere «lontano»*) Fin che diventa più piccolo che si veda e ci sembra piccolissimo.

Se in precedenza i bambini hanno proposto l'addizione, in questa occasione 3 di loro si rifanno alla divisione, proponendo di suddividere in più parti un oggetto.

E.: Un bastoncino tagliato in 5 pezzi che diventa piccolo piccolo.
A.: No ci sono piccoli piccoli più delle cose, mille volte più piccoli di una formica sai…

L'uso della lingua italiana si dimostra ancora una volta in stretta connessione con la Matematica (D'Amore et al., 2004, p. 6). I bambini si servono di diminutivi per definire la cosa più piccola che esiste.

E.: Un puntino, un puntino ino ino.
J.: Le formichine.
D.: Un omino minuscolo.

La nostra analisi dei dati raccolti termina con l'introduzione di due categorie significative nel contesto della scuola dell'infanzia, alle quali i bambini fanno capo per definire e spiegare l'infinito:

- *Personaggi mitico-magici*

6 bambini fanno riferimento al gigante, portatore di una sola caratteristica, la sua grandezza, che, secondo loro, ben esprime il concetto di infinito.

L.: L'infinito è grande.
V.: Come cosa?
L.: Un gigante… sì è più grande di tutto… è grande fin nello spazio e di più.

Un bambino preferisce ricorrere alla magia di *Harry Potter*, senza però fare una connessione diretta tra infinito e magia.

V.: Ci stanno infiniti punti matematici nel cubo secondo voi?
A.: Forse come *Harry Potter*… lui fa delle magie.

Un altro bambino invece associa la vita di *Hercules* al misconcetto legato all'infinito come illimitato.

F.: *Hercules* non muore mai… come all'infinito…

- *Religione e figure religiose*

10 bambini fanno parte di questa categoria e 3 di loro hanno fatto riferimento a Gesù.

V.: Che cos'è la cosa più grande che esiste?
D.: Il gigante è grande un po' più del mondo, magari si rompe il mondo e non so cosa esce… la cosa più bella e più grande è Gesù.
A.: Solo Gesù sa l'infinito.
V.: Sapreste disegnare l'infinito? Prima pensate a cos' è secondo voi l'infinito e poi disegnate…
R.: La Madonna, Gesù e i morti.

Altri 3 bambini associano la morte all'infinito, ma spesso poi passano a parlare della vita.

D.: Anche morire sembra all'infinito.
S.: Sì, la vita è infinita, quando io sono morto gli altri vivono. Anche noi viviamo in cielo e conosciamo Dio.

2 bambini ricorrono al Paradiso come cosa più grande che esiste e parlano di angeli, raffigurati anche nella rappresentazione grafica dell'infinito.

J.: E… l'infinito finisce al Paradiso.
D.: Dove ci sono gli angeli che vuol dire che possono vivere e non muoiono mai.

5. Conclusioni

In questa ricerca si sono messe in evidenza le idee ingenue di bambini di scuola dell'infanzia, sorrette da immagini mentali, alcune delle quali erronee, che derivano da ostacoli ontogenetici ed epistemologici; infatti, le convinzioni possedute dagli allievi non possono dipendere da ostacoli didattici, poiché questi bambini non sono ancora stati soggetti ad alcun tipo di insegnamento specifico nell'ambito dell'infinito matematico. Tali convinzioni sembrano dipendere dall'uso di tali termini in contesti diversi da quello matematico. I bambini coinvolti in questo lavoro di ricerca hanno partecipato con interesse, lasciando trasparire la sincera curiosità che caratterizza i bambini di scuola dell'infanzia. In seguito al percorso svolto è stato possibile rispondere agli interrogativi formulati in precedenza, ottenendo risposte assolutamente interessanti. Abbiamo svolto la nostra ricerca su un tema ostico e difficile, tuttavia ci riteniamo soddisfatti soprattutto di poter affermare che anche i bambini di scuola dell'infanzia hanno interessanti convinzioni dalle quali è bene partire per strutturare nuovi apprendimenti.

Questo conferma che il bambino di scuola dell'infanzia non è una *tabula rasa* ed è in grado di generare delle immagini mentali con gli strumenti a sua disposizione. Come avevamo ipotizzato in precedenza, i risultati confermano che i bambini possiedono idee intuitive riguardanti l'infinito esterne al contesto della matematica. Tuttavia, abbiamo potuto notare che è già possibile far rientrare alcune idee intuitive tra le misconcezioni evidenziate dalla letteratura (Sbaragli 2003a, 2004): infinito come sinonimo di illimitato, infinito come indefinito, infinito come numero finito grande. Confermiamo inoltre la forte presenza della convinzione erronea legata al punto matematico, il quale, secondo i bambini intervistati, possiede una dimensione, anche se in parecchi casi viene precisato che essa deve essere molto ridotta. Dopo aver notato che le idee intuitive dei bambini potevano rientrare già nei misconcetti evidenziati dalla letteratura, ci siamo resi conto della necessità di creare nuove categorie. Le nuove categorie sono legate ad aspetti mitico-magici e alla religione, entrambi aspetti molto significativi nel contesto della scuola dell'infanzia, entro il quale il bambino vive ancora in un mondo diviso tra il reale e la fantasia. La religione, come l'infinito, appare ai bambini piccoli (e non solo) come qualcosa di poco tangibile, tendente al mistico, quindi difficile da spiegare a parole. Alla luce dei fatti possiamo affermare che le rappresentazioni dell'infinito realizzate dai bambini sono il frutto dell'influenza della quotidianità, esercita una forza importante e determinante sulla costruzione del sapere degli individui, soprattutto se così piccoli come alla scuola dell'infanzia. Infine avevamo ipotizzato una maggiore differenziazione tra infinitamente grande e infinitamente piccolo. Invece, non risulta possibile affermare con sicurezza se il bambino prediliga l'uno piuttosto che l'altro, poiché dalle risposte non è emersa una sostanziale differenza. Tuttavia, è importante considerare che l'infinitamente grande sembrerebbe suscitare un maggiore interesse tra i bambini, poiché, osservando i loro disegni, si può notare che molti di essi ricorrono a elementi piuttosto grandi, mentre l'infinitamente piccolo è stato ignorato completamente a livello grafico. I bambini non pongono differenze di tipo qualitativo tra l'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo, anche perché non sono stati direttamente sollecitati a farlo. Tuttavia possiamo affermare che la dimensione affettiva ha influenzato le scelte dei bambini per rapporto all'infinitamente grande, poiché hanno nominato delle strutture a loro vicine e familiari. Dall'intervista è emerso un fattore molto interessante relativo allo stretto legame tra linguaggio e matematica: il ricorso alla lingua italiana per aiutarsi a definire l'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo, mediante aggettivi accrescitivi e diminutivi. Possiamo notare come il bambino si serva degli strumenti a sua disposizione per interagire con la realtà e cercare di risolvere i suoi problemi, dimostrando di poter «dire la sua» anche a proposito di temi apparentemente fuori dalla sua portata, come l'infinito.

6. Ipotesi di sviluppo

Sulla base della ricerca effettuata riteniamo comunque precoce inserire il tema dell'infinito negli orientamenti per la scuola dell'infanzia, anche se questo non esclude una maggiore chiarezza e coerenza nell'uso dei termini. Abbiamo notato che il contesto ricopre un ruolo determinante: sarà dunque opportuno spingere nella direzione di un uso più attento dei termini matematici, tenendo conto dei molteplici significati che essi possono assumere se trasferiti in altri ambiti. Basti pensare al punto matematico, del quale si è discusso nel corso della nostra ricerca. Un uso più attento dei termini matematici permetterà ai bambini di prevenire o ridurre la confusione e la conseguente cattiva comprensione che subentreranno in seguito, quando saranno confrontati con la matematica e i suoi problemi. A questo proposito occorrerebbe sensibilizzare gli insegnanti. È importante ribadire che i bambini intervistati hanno basato una parte delle loro risposte sui numeri, cercando di definire l'infinito proprio attraverso essi. La scelta dei bambini di utilizzare questo oggetto matematico è significativa. Per di più, viste alcune osservazioni curiose e interessanti, si potrebbe sviluppare una ricerca in questa direzione, ampliando quelle che sono già state svolte in passato (D'Amore et. al., 2004). Sempre in relazione ai numeri, abbiamo visto che i bambini tendono a inventare dei numeri e ad attribuirgli una grandezza a dipendenza della lunghezza e della quantità di consonanti presenti, ma spesso i numeri utilizzati sono molto simili tra loro. Questo fatto ci spinge a chiederci che cosa influenza le loro scelte, ancora una volta l'esperienza quotidiana? Concludiamo con uno stimolo ricevuto dal territorio sul quale abbiamo operato. Alcuni genitori si sono avvicinati con interesse alla tematica che si sarebbe indagata con i loro bambini, ma poi si sono mostrati scettici riguardo all'accostamento matematica e scuola dell'infanzia. In futuro ci interesserebbe indagare sull'idea che i genitori hanno della matematica nella scuola dell'infanzia, per poi poter lavorare nella direzione di una chiarificazione delle attività, degli obiettivi e quindi degli scopi.

Bibliografia

Aglì F., D'Amore B.
L'educazione matematica nella scuola dell'infanzia. Lo spazio, l'ordine, la misura. Milano: Juvenilia, 1995.

Arrigo G., D'Amore B.
Infiniti. Milano: Franco Angeli, 1993.

Arrigo G., D'Amore B.
Lo vedo ma non ci credo... Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, in «La Matematica e la sua didattica». 22B, 5, pp. 465-494, 1999.

Arrigo G., D'Amore B.
Lo vedo ma non ci credo..., seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor, in «La Matematica e la sua didattica». 1, pp. 4-57, 2002.

Baldisserri F., D'Amore B., Fascinelli E., Fiori M., Gastaldelli B., Golinelli P.
I palloncini di Greta, Infanzia, in «La Matematica e la sua didattica». 4, pp. 444-449, 1993.

D'Amore B., Arrigo G., Bonilla Estévez M., Fandiño Pinilla M.I., Piatti A., Rojas Garzón P.J., Rodríguez Bejarano J., Romero Cruz J.H., Sbaragli S.
Il «senso dell'infinito», in «La Matematica e la sua didattica». 4, pp. 46-83, 2004.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I.
Cambi di convinzioni in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale, in «La Matematica e la sua didattica». 3, pp. 27-50, 2004.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Gabellini G., Marazzani I., Masi F., Sbaragli S.
Matematica e infanzia. Didattica della matematica nella scuola dell'infanzia. Bologna: Pitagora, 2004.

Sbaragli S.
Le convinzioni degli insegnanti elementari sull'infiniti matematico. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate. Prima parte 26A, 2, 155-186, Seconda parte 26A, 5, pp. 573-588, 2003a.

Sbaragli S.
La scoperta dell'importanza del contesto: il punto nei diversi ambiti. Bollettino dei Docenti di Matematica. Bellinzona (Svizzera). 47, pp. 49-58, 2003b.

Sbaragli S.
Le convinzioni degli insegnanti sull'infinito matematico. Tesi di dottorato di ricerca. Bratislava: Università Komenského. (cap. 4) Versione in italiano e in inglese nel sito: http://math.unipa.it/~grim/tesi_it.htm, 2004

Zan R.
Problemi e convinzioni. Bologna: Pitagora, 1998.

1. Sulla frazione continua di $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

Giuseppe Pirillo[1]

Si dicono grandezze commensurabili
quelle che sono misurate da una stessa misura,
e incommensurabili quelle di cui non può esistere
nessuna misura comune (Euclide, Elementi, Libro X)

The theory of continued fractions does not receive
the attention it deserves (Rockett A. M., Szüsz, P. [3])

La incommensurabilità del lato e della diagonale del quadrato e la incommensurabilità del lato e della diagonale del pentagono regolare sono comunemente attribuite alla Scuola Pitagorica (Crotone, nell'attuale Calabria, IV secolo avanti Cristo).

Le dimostrazioni si trovano negli *Elementi* di Euclide.

Ricordiamo che una frazione continua è un'espressione del tipo

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}}$$

che possiamo anche scrivere nella forma $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$.
Si vedano [1, 3-7].

La *sezione aurea* (o *divina proporzione*)

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi$$

è il rapporto fra la diagonale e il lato del pentagono regolare. I suoi *quozienti parziali*, cioè gli a_i, possono essere trovati per via geometrica. Infatti, come è ben noto, l'argomento usato dalla Scuola Pitagorica per dimostrare l'irrazionalità di Φ (si veda la Figura 1) serve anche a dimostrare che tutti i suoi quozienti parziali sono uguali a 1:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AE_1 + E_1C}{AB} = 1 + \frac{E_1C}{AB} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{AB}{E_1C}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{AD_1 + D_1E_1}{E_1C}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}$$

Dunque lo sviluppo in frazione continua di Φ è $[1; 1, 1, 1, \dots]$.

1. IASI CNR Viale Morgagni 67/A 50134 Firenze, Italy - Université de Marne-la-Vallée 5, Boulevard Descartes Champs sur Marne 77454 Marne-la-Vallée Cedex2.

Qui di seguito proponiamo una costruzione geometrica che abbiamo già usato in [2]. Il decagono regolare possiede diagonali di quattro possibili lunghezze. Diciamo diagonali *corte* di un decagono regolare quelle che lo dividono in un trapezio e in un ottagono.

Sia (De)=ABCDEFGHIL un decagono regolare. Diciamo (Figura 2) che (DE)' $= A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1I_1L_1$ è il decagono generato dalle diagonali corte di (De) e che (DE)" $= A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2H_2I_2L_2$ (non esplicitamente disegnato in Figura 2) è il decagono generato dalle diagonali corte di (De)'. Ricordiamo, si veda [2], quanto segue:

i) due diagonali corte di (De) sono uguali;
ii) un lato di (De) è parallelo al corrispondente lato di (De)';
iii) una diagonale corta di (De)' è pari alla somma di due lati di *(De)* con un lato di (De)';
iv) (De)' è regolare;
v) una diagonale corta di (De)' è uguale alla somma di un lato di (De) e di un lato di (De)'.

In [2] abbiamo dimostrato anche che il lato di (De) e quello di (De)' sono incommensurabili. Chiediamoci ora quale sia il rapporto delle loro lunghezze.

Sempre con riferimento alla Figura 2 abbiamo

$A_1D_1 = 2\, B_1C_1 + B_2C_2$

$A_1D_1 = BC + B_1C_1$

e pertanto

$BC = B_1C_1 + B_2C_2$

Ponendo $x = \dfrac{BC}{B_1C_1}$ abbiamo

$$x = \frac{B_1C_1 + B_2C_2}{B_1C_1} = 1 + \frac{B_2C_2}{B_1C_1} 1 + \frac{1}{\dfrac{B_1C_1}{B_2C_2}} = 1 + \frac{1}{x} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}} = [1;1,1,1,\dots]$$

cioè $x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

e quindi il rapporto delle lunghezze dei lati di (De) e di (De)' è esattamente

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

cioè la divina proporzione.

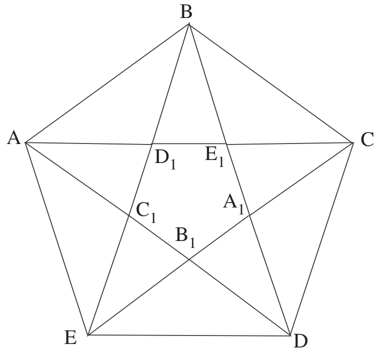


Figura 1 Pentagoni regolari

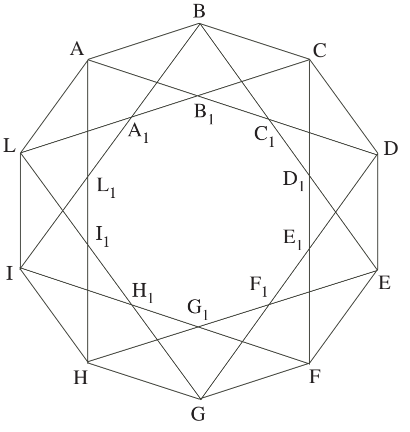


Figura 2 Decagoni regolari

Ringraziamenti

Ringrazio J. Justin per le utilissime conversazioni e il Dipartimento di Matematica U. Dini per la generosa ospitalità che mi concede.

Bibliografia

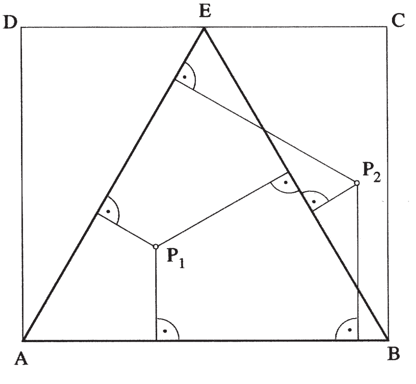
[1] Olds C.D., *Frazioni continue*, Zanichelli, Bologna, 1968.
[2] Pirillo G., *Numeri irrazionali e segmenti incommensurabili*, Nuova Secondaria, 7, (2005) 97-103.
[3] Pirillo, G., *Sulla frazione continua di p*2, Archimede, in corso di stampa.
[4] Pirillo, G., *Sulla frazione continua di p*3, manoscritto.
[5] Pirillo, G., *Ancora sulla frazione continua di p*3, manoscritto.
[6] Rockett A. M., Szüsz, P., *Continued fractions*, World Scientific Publishing Co. Inc., 1992.
[7] Scimemi B., *Le frazioni continue rivisitate*, Atti del Quindicesimo Convegno sull'insegnamento della matematica, Notiziario Unione Matematica Italiana, Supplemento, n. 5, Maggio 1993.

Quiz numero 35

Aldo Frapolli

Caro Archie,
per restare in tema di percorsi, senti questa.
Mi sono messo a ragionare su un triangolo equilatero inscritto in un rettangolo, tipo quello indicato nella figura. Ho scelto un punto P a caso appartenente al rettangolo e mi sono interessato alle tre distanze di P dalle rette che contengono i lati del triangolo.
Curioso, quello che ho scoperto sulla loro somma.

Secondo te il percorso formato dalla loro somma, è maggiore quando P si trova all'interno o all'esterno del triangolo ABE?
Sono curioso di vedere se sai illustrarmi il perché e dirmi qual è la differenza.



Dunque Joe...
se ricordo bene...

No, non va.

Voglio provare a misurare...
Ah ecco! Mi sembra... ma perché?
Lasciami riflettere!

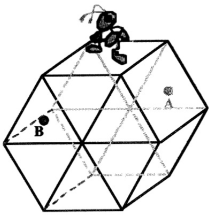
E voi, ragazzi, che cosa ne pensate?

Qual è la differenza fra i due percorsi? Perché?

Attendiamo le vostre risposte motivate e illustrate.
E ricordate: questa volta più che mai è importante «leggere» la figura osservando quanto c'è ma soprattutto quanto non è rappresentato.
Come sempre c'è un bel libro in premio. Stavolta andrà però a chi invierà la soluzione più «semplice». Buon divertimento a tutti!

Soluzione del Quiz numero 34

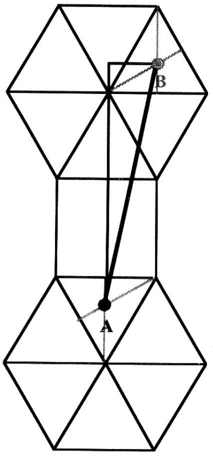
Purtroppo nella figura illustrativa del Quiz 34 è scappato un errore, subito rilevato dai lettori più attenti, che ringraziamo per la pronta segnalazione.
A lato trovate l'immagine corretta, cioè quella coerente con la descrizione di Archie.



Questa volta non ci sono pervenute soluzioni corrette, molto probabilmente a causa del contrattempo descritto. Il libro in palio non viene quindi assegnato.

Vi proponiamo comunque la soluzione della redazione.

Il percorso più breve che collega i punti A e B è lungo circa 2,49 m. Come mai?



Il problema chiave per la formica sta nel capire che, dovendosi spostare sulla superficie dello «scatolone di cioccolatini», può facilmente visualizzare il percorso vincente aprendo la confezione in modo da poterla stendere per terra.
Matematicamente parlando, la soluzione la si vede ragionando sullo sviluppo del solido che rappresenta la confezione di cioccolatini, vale a dire un prisma a base esagonale.
Sfruttando la proprietà che il baricentro del triangolo equilatero è situato sugli assi a due terzi dai vertici e applicando il teorema di Pitagora, si può calcolare la lunghezza cercata, vale a dire:

$$l = \sqrt{\left(\tfrac{5}{3} \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2} = \dots = \sqrt{\tfrac{10+5\sqrt{3}}{3}} \cong 2{,}49\ (m)$$

1. P-bam: teoria e pratica

Giorgio Mainini

In questa nuova sezione del Bollettino si proporranno problemi che hanno la maligna ma stimolante tendenza a scoppiare fra le mani di chi li tratta. P-bam è quindi contemporaneamente un acrostico di «problema bomba a mano» e un'onomatopea. La matematica è piena di problemi irrisolti che, almeno in teoria, possono essere considerati P-bam. Secondo le intenzioni della redazione, questa rubrica dovrà accogliere le migliori proposte dei nostri lettori: quindi forza e coraggio!

Poniamo una condizione all'accettabilità di un P-bam: la sua formulazione deve essere comprensibile a un allievo di scuola media. Per esemplificare, riproduciamo l'elenco dei quattro problemi definiti «inattaccabili» da Edmund Landau al Quinto congresso dei matematici, tenutosi nel 1912 a Cambridge:

1. la congettura di Goldbach (ogni numero pari maggiore di due è la somma di almeno una coppia di numeri primi),
2. la congettura dei numeri primi gemelli (le coppie di numeri primi aventi fra loro differenza 2 sono in numero infinito),
3. la congettura di Legendre (esiste almeno un numero primo tra n^2 e $(n+1)^2$)
4. la congettura secondo la quale esistono infiniti numeri primi della forma $p=n^2+1$.

Tutti i quattro problemi sono tuttora irrisolti, pur presentandosi in forma comprensibile a un allievo di scuola media.

Almeno tre sono le idee che stanno alla base dell'uso di P-bam.

Prima idea

Tutti i docenti hanno sperimentato la situazione nella quale viene a trovarsi una classe eterogenea quando si assegna un problema. Ci sono allievi che dopo pochi minuti l'hanno risolto, e che, da quel momento in avanti, richiedono altri stimoli (o che si annoiano), altri che ne intravedono la soluzione dopo un tempo, un po' o tanto, più lungo e altri che proprio non vedono come affrontarlo. È quindi comodo e opportuno avere sotto mano un cesto di situazioni che possono essere trattate a più livelli e che rilanciano continuamente nuove domande. Insomma, per rifarci alla metafora, situazioni che scoppiano fra le mani. E questo valga come considerazione ***didattica***.

Seconda idea

La matematica, come tutte le attività umane, procede, per così dire, a salti. È diffusa l'idea che il matematico sia colui che, a partire da alcuni, possibilmente pochi, principi costruisce uno dopo l'altro un certo numero di affermazioni successive, ottenendo così un corpus coerente e, nei limiti delle sue capacità, completo. L'idea è falsa, e molti matematici l'hanno sostenuto apertamente[1]. In realtà l'avanzamento è costellato di vicoli ciechi, di fallimenti e di percorsi circolari: solo alla fine si nascondono gli scheletri nell'armadio e si pubblica una bella ed elegante teoria. Chi credesse nell'idea diffusa andrebbe incontro a delusioni: è quindi bene mostrare agli allievi qual è la natura della ricerca. Raggiunto un certo risultato nasce la curiosità di vedere che cosa ne discende, fino al raggiungimento di un nuovo risultato, dal quale nasce la curiosità… e così via. E questo valga come considerazione ***culturale***.

Terza idea

Non tutte le curiosità possono essere soddisfatte. Non è necessario rifarsi ai teoremi di Gödel[2]: in matematica molte sono ancora le congetture, e qualcuna, ogni tanto, smette di essere tale per diventare un teorema.

Tra le prime, oltre a quelle elencate da Landau, si possono citare quella relativa ai numeri perfetti[3] (i numeri perfetti sono tutti pari o se ne esistono di dispari?) e quella di Collatz (si prenda un numero intero; se è pari lo si divida per due, se è dispari lo si moltiplichi per tre e si aggiunga uno; si ricominci con il nuovo numero; la congettura sostiene che, dopo un certo numero di iterazioni, si ottiene 1).

Tra le seconde, l'esempio classico è dato dal «Grande teorema di Fermat» (l'equazione $a^n+b^n=c^n$, dove a, b, c, n sono numeri naturali, non è soddisfatta per alcun $n>2$), risalente al 1637 e trasformata in teorema solo nel 1995 da Andrew Wiles.

Un caso speciale è dato dalla congettura (o teorema?) dei quattro colori, secondo la/il quale per colorare qualsiasi carta geografica, sia essa su un piano, su una sfera o su un solido topologicamente equivalente, bastano quattro colori[4]. La congettura, proposta da Francis Guthrie nel 1852, è stata «dimostrata» nel 1977 da Kenneth

1. «Mathematics is full of unsolved problems. Many well educated people believe that mathematics is really a closed subject where everything is already known. Perhaps it would be good to explain already early in school how false this is» (Paul Erdös*, Some Elementary Problems (Solved and Unsolved) in Number Theory and Geometry*, 1994). [sottolineatura nostra].
2. Il suo famoso «Teorema di incompletezza» (1931) risponde negativamente al secondo dei 10 problemi (poi diventati 23) che Hilbert propose nel 1900 al Secondo congresso internazionale dei matematici a Parigi.
3. Un numero perfetto è un numero uguale alla somma di tutti i suoi divisori, escluso il numero stesso. Ad esempio 28 è perfetto perché 28=1+2+4+7+14).
4. Per essere precisi, occorre che valgano le seguenti ipotesi:
   - due stati sono considerati confinanti se hanno una striscia di confine in comune, non solo un numero finito di punti isolati (altrimenti una figura a forma di torta a fette sarebbe un controesempio);
   - ogni stato deve occupare un territorio connesso (Campione d'Italia deve avere un proprio colore, diverso da quello del resto dell'Italia).

Appel e Wolfgang Haken. Le virgolette sono importanti: difatti il metodo adottato è consistito nel ridurre tutte le possibili carte geografiche a 1476 configurazioni per le quali la validità del teorema è stata verificata caso per caso dal computer. Il rivoluzionario utilizzo di algoritmi informatici per verificare l'esattezza della congettura scatenò grandi polemiche sull'affidabilità di questi metodi. Il fatto che la dimostrazione fosse basata sull'analisi di una moltitudine di casi discreti portò alcuni matematici a contestarne l'effettiva validità: sia per l'impraticabilità di una verifica manuale di tutti i casi possibili, sia per l'impossibiltà di avere la certezza che l'algoritmo fosse implementato correttamente. Una dimostrazione (non ancora verificata) di sole 12 pagine è stata proposta nel 2004. Di conseguenza, chi vuole parli di congettura, e chi vuole parli di teorema. E questo valga come considerazione ***psicologica***.

Come già detto, l'obiettivo di questa sezione è quello di proporre e raccogliere P-bam: i colleghi e gli appassionati in genere sono quindi invitati a sottoporre alla redazione i loro. Da parte nostra, rompiamo il ghiaccio con una prima proposta.

P-bam numero 1

Dato un triangolo ABC inscritto in una circonferenza *K*, qual è il luogo del suo baricentro, se C percorre la circonferenza?

È una seconda circonferenza, *H*: provare per credere. Con un programma di geometria dinamica è facilissimo trovare *H*, e qui si potrebbe o fermarsi o domandarsi quali sono i luoghi, *H'* e *H"*, del baricentro se prima A e poi B percorrono la circonferenza e quali relazioni intercorrono tra *H*, *H'* e *H"*.

Il problema diventa «instabile»: qual è il luogo del centro di *H*, se B percorre la circonferenza? È una terza circonferenza, *J*.

Il problema «scoppia»: di *J* che cosa si può dire? Perché è una circonferenza? Qual è il suo centro? Che rapporto c'è fra il suo raggio e quello di *K*? Qual è il luogo del suo centro, se A percorre la circonferenza?

Non è «scoppiato» abbastanza? Bene: si sostituisca il baricentro con l'incentro, o l'ortocentro, o il circocentro (?).

VI. Dalla bricolla

1. Il gioco del baseball: quando la matematica si applica allo sport…

Luca Bellini[1]

Cari ragazzi, ecco una nuova e appassionante sfida.

Conoscete il baseball? No? Proviamo a scoprire il fascino di questo sport giocando anche un po' con la matematica.

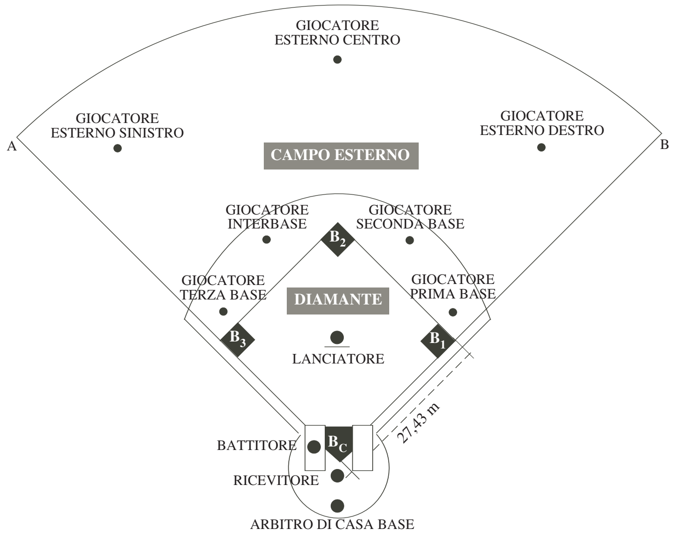


Il campo da gioco

Il campo di baseball può essere rappresentato approssimativamente come un quarto di cerchio delimitato da due linee perpendicolari, dette *linee di foul*. Il campo di gioco può essere suddiviso in un settore interno, chiamato *diamante*, e in uno esterno. Il diamante è costituito da un quadrato di lato 27,43 m (90 piedi) ai cui vertici sono poste quattro basi. La *casa base*, o *piatto* di casa base, deve essere di gomma e avere forma pentagonale e larghezza di 43,18 cm (17 pollici) nella parte rivolta al lanciatore. Il vertice inferiore è posto al punto di convergenza delle linee di foul. Alla destra e alla sinistra dei lati paralleli del piatto vengono segnati con il gesso anche due rettangoli detti *box del battitore*. La prima, la seconda e la terza base sono sacchetti quadrati di tela o plastica bianca di 38,1 cm (15 pollici) di lato, fissati saldamente al terreno. In

1. Docente di matematica alla Scuola media di Minusio e docente di pratica professionale all'ASP di Locarno.

mezzo al diamante si trova il *monte di lancio*, un piccolo dosso circolare alla cui sommità, 25 cm rispetto al piatto della casa base, viene fissata la pedana del lanciatore costituita da una lastra rettangolare di gomma bianca di 60x15 cm. La distanza tra la punta inferiore del piatto della casa base e l'orlo frontale della pedana del lanciatore deve essere di 18,44 m (60 piedi e 6 pollici).



Legenda:
B_C: casa base
B_1: prima base
B_2: seconda base
B_3: terza base
$B_C\ B_1\ B_2\ B_3$: quadrato detto diamante.

Completa: 1 piede = ... m 1 pollice = ... cm
Verifica l'esattezza di tutte le misure date in pollici e piedi.
Ipotizzando che il lanciatore si posizioni nel centro del diamante, a che distanza si trova dal vertice inferiore della casa base?

$$d = 27,43 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 19,40\ (m)$$

Il gioco

Una partita di baseball viene giocata da due squadre di 9 giocatori. Le varie riprese della partita si chiamano *innings*. Ogni inning è composto a sua volta di due fasi in cui le squadre si alternano in attacco e difesa.

Una partita si svolge comunemente sulla distanza dei 9 innings in campo professionistico e internazionale, e pertanto non sono previsti limiti di tempo. Se al termine degli innings il punteggio è in parità, verranno disputati uno o più inninng supplementari, finché una delle due squadre non sia in vantaggio. Nel caso in cui la differenza punti tra le due squadre sia maggiore o uguale a 10 punti dal 7° inning in poi, la partita si conclude anticipatamente per manifesta superiorità di una squadra.

A iniziare la partita in difesa è sempre la squadra di casa. La squadra in difesa posiziona tutti e 9 i propri giocatori sul campo di gioco nei vari ruoli:

lanciatore (*pitcher*)
ricevitore (*catcher*)
giocatore prima base (*first baseman*)
giocatore seconda base (*second baseman*)
giocatore terza base (*third baseman*)
giocatore interbase (*shortstop*)
giocatore esterno sinistro (*left fielder*)
giocatore esterno centro (*center fielder*)
giocatore esterno destro (*right fielder*)

La squadra in attacco manda a turno, seguendo un ordine di battuta (*line up*), i propri giocatori nel box di battuta per cercare di colpire la palla tirata dal lanciatore e di correre sulle basi del diamante per segnare i punti (*run*). Scopo della squadra in difesa è di effettuare 3 eliminazioni (*out*) dei giocatori della squadra in attacco. Una volta effettuate le 3 eliminazioni la squadra in difesa passerà all'attacco e viceversa.

L'attacco e i punti

Per aumentare il punteggio della propria squadra il battitore deve cercare di colpire la pallina tirata dal lanciatore. Se la pallina battuta cade in territorio buono il battitore deve correre verso la prima base. Se il battitore batte lungo può cercare di arrivare anche alle basi successive, con l'obbligo però di toccarle nella corsa. Il battitore che arriva «salvo» su una base viene da quel momento definito corridore e nel box di battuta andrà un suo compagno di squadra. Un'ulteriore battuta farà avanzare il corridore verso le basi successive fino a raggiungere la casa base e segnare così un punto. Su una base può fermarsi un solo corridore. Nel caso un battitore colpisca la palla e la mandi oltre la recinzione, ma tra la proiezione delle linee di foul, viene assegnato un fuoricampo (*home run*). Egli avrà diritto a fare il giro delle basi e segnare un punto così come i corridori presenti in quel momento sulle basi. Il battitore può battere indifferentemente nel box di battuta alla sinistra o alla destra del piatto di casa base.

La difesa

Il ruolo principale della squadra in difesa è sicuramente quello del lanciatore. Il tiro del lanciatore dà il via all'azione di gioco. Egli deve cercare di lanciare la palla all'interno dell'area di *strike* del battitore, cioè di quel rettangolo immaginario situato sopra il piatto di casa base e che in altezza va dalle ginocchia alle ascelle del battitore. Se ci riesce e il battitore non colpisce la palla, viene contato uno strike. Anche nel caso in cui la palla lanciata non passa per l'area di strike e il battitore gira la mazza senza colpirla viene contato uno strike. Al terzo strike il battitore è eliminato. Se il lancio non passa per la zona di strike e il battitore non gira la mazza, viene contato un *ball*. Al quarto ball il battitore ha diritto ad andare in prima base. I modi più usuali in cui la squadra in difesa può eliminare i giocatori avversari sono i seguenti:

- il lanciatore realizza tre strike;
- se la pallina battuta viene presa al volo da un difensore, cioè prima che tocchi terra;
- dopo una sua battuta buona a terra, il battitore stesso o la prima base sono toccati dal difensore che ha in mano la palla prima che il battitore riesca a raggiungere il sacchetto;
- un corridore che non si trova su una base viene toccato da un difensore che ha in mano la palla.

Attività

Per motivi di spazio, la squadra di baseball *Ticino Yankees* si allena su un campo dalle dimensioni leggermente diverse da quelle ufficiali: la distanza tra il lanciatore e la casa base è infatti di 18 m.

a) *Calcola la distanza che un giocatore deve percorrere attorno al diamante per effettuare il punto. (È richiesto il risultato esatto e quello approssimato al cm)*

$$d_{diam} = 4 \cdot \sqrt{18^2 + 18^2} = 72\sqrt{2}\,(m) \cong 101,82\,(m)$$

Per comodità indichiamo d'ora in poi con A e B gli estremi dell'arco del settore circolare.

b) *Sapendo che la distanza in linea d'aria tra A e B è di 144 m, calcola il raggio del settore circolare che delimita il campo. (È richiesto il risultato esatto e quello approssimato al cm)*

$$\frac{144}{36} = \frac{x}{18\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad x = 72\sqrt{2}\,(m) \cong 101,82\,(m)$$

c) *Che cosa osservi?*

La distanza da percorrere attorno al diamante per effettuare il punto è pari alla distanza tra la casa base e gli estremi del campo.

d) *Che percentuale rappresenta la superficie del diamante rispetto alla superficie totale del campo da gioco?*

$$A_{diam} = 18\sqrt{2} \cdot 18\sqrt{2} = 648\left(m^2\right)$$

$$A_{campo} = \left(72\sqrt{2} \cdot 72\sqrt{2} \cdot \pi\right) : 4 = 2592\pi\left(m^2\right) \cong 8143\left(m^2\right)$$

$$A_{diam}/A_{campo} \cong 8\%$$

e) *A che distanza dalla seconda base si trovano gli stremi A e B? (È richiesto il risultato esatto e quello approssimato al cm)*

$$d_{AB_2} = \sqrt{\left(72\sqrt{2} - 18\sqrt{2}\right)^2 + \left(18\sqrt{2}\right)^2} = 36\sqrt{5}\,(m) \cong 80,5\,(m)$$

Una posizione interessante è quella occupata dal giocatore interbase e dal giocatore seconda base.

Prendiamo ad esempio quello della seconda base (analogamente per simmetria vale anche per quello dell'interbase).

Prima che il battitore colpisca la palla, il giocatore si posiziona nel punto di incrocio dell'asse di simmetria di B_1B_2 con la retta AB_2.

f) *Calcola la distanza di A dal giocatore seconda base.*

$$\frac{63\sqrt{2}}{54\sqrt{2}} = \frac{x}{36\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad x = 42\sqrt{5}\,(m) \cong 94\,(m)$$

g) *Calcola la distanza tra l'interbase e il lanciatore.*

$$d_{il} = \sqrt{\left(42\sqrt{5}\right)^2 - \left(63\sqrt{2}\right)^2} - 9\sqrt{2} = 21\sqrt{2} - 9\sqrt{2} = 12\sqrt{2}\,(m) \cong 17\,(m)$$

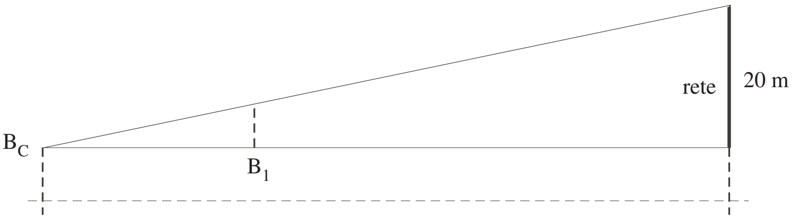
h) *Calcola la distanza tra il giocatore interbase e la case base B_C.*

$$d_{iB_C} = \sqrt{\left(21\sqrt{2}\right)^2 + \left(9\sqrt{2}\right)^2} = 6\sqrt{29}\,(m) \cong 32\,(m)$$

Lungo l'arco del settore circolare che delimita il campo da gioco, viene posizionata una rete di protezione alta 20 m.

i) *Per effettuare un fuori campo è necessario che la pallina venga colpita con sufficiente forza ma anche in una direzione tale da potergli permettere di superare la rete di recinzione. Se la pallina viene colpita in direzione della prima base con la do-*

vuta potenza, a quale altezza deve passare la pallina sopra la testa del giocatore prima base per poter effettuare il fuori campo?



$$\frac{x}{20} = \frac{18\sqrt{2}}{72\sqrt{2}} \qquad x = 5\,(m)$$

l) *Sarebbe fuori campo se la pallina transitasse 6 m sopra la seconda base?*

$$\frac{6}{20} < \frac{36}{72\sqrt{2}} \quad \Rightarrow$$ non sarebbe quindi fuori campo.

Per ragioni di sicurezza, il campo da gioco viene recintato con la stessa rete a 15 m di distanza dal perimetro di gioco.

m) *Qual è la lunghezza minima della rete necessaria per la recinzione?*

$$l_{min} = \left(72\sqrt{2}+15\right)\cdot 2 + \left(72\sqrt{2}+15\right)\cdot\frac{2\pi}{4} = \left(72\sqrt{2}+15\right)\cdot\frac{4+\pi}{2} \cong 417\,(m)$$

n) *Se avessi a disposizione 500 m di rete metallica, a che distanza D dal perimetro di gioco la potrei posizionare, ipotizzando di volerla utilizzare interamente?*

La recinzione è idealmente il contorno di un settore circolare; sia r il suo raggio:

$$2r + \frac{2\pi r}{4} = 500 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1000}{4+\pi} \cong 140\,(m)$$

di conseguenza:

$$D = \frac{1000}{4+\pi} - 72\sqrt{2} \cong 38{,}2\,(m)$$

1. Il problema delle pillole

Paolo Hägler, Giorgio Mainini

Il problema

Il signor G tutti i giorni deve ingerire quattro pillole, diciamo A, B, C e D. La prima volta che si è dedicato all'incombenza, le ha prese nell'ordine A, B, C, D e poi si è prefissato di riprenderle nello stesso ordine solo dopo averle assunte in tutti i modi possibili. La faccenda, a prima vista, gli è sembrata facile: i modi possibili sono 4! = 24. Dopo una riflessione più approfondita, però, gli è apparso chiaro che sono ben di più. Infatti non è detto che debba prendere una pillola per volta: si può ben immaginare di assumerle, ad esempio, nell'ordine A, {B, C}, D, dove le parentesi graffe significano che B e C sono ingoiate contemporaneamente. Ne consegue che

(A, {B, C}, D) = (A, {C, B}, D)

ma anche che

(A, {B, C}, D) ≠ (D, {B, C}, A).

Cioè: all'interno delle parentesi tonde l'ordine conta, all'interno delle graffe, invece, no.

Primo tentativo di soluzione: elenco

- A una a una: 4! = 24 modi.
- Due singolarmente e una coppia:
  (A,B,{C,D}) ; (B,A,{C,D}) ; (A,{C,D},B) ; (B,{C,D},A) ; ({C,D},A,B) ; ({C, D},B,A)
  e sono 6. Ma invece di {C,D} si può scegliere {A,B} o {A,C} o {A,D} o {B,C} o {B,D}. Quindi, in tutto, 6 x 6 = 36 modi.
- Due coppie:
  ({A,B},{C,D}) ; ({C,D},{A,B})
  e sono 2. Ma invece di {A,B} si può scegliere {A,C} o {A,D}. Attenzione: la scelta di una coppia «costringe» la scelta dell'altra. Quindi le coppie {B,C} e {B,D} non sono da contare, perché «costrette», rispettivamente, da {A,D} e da {A,C}.
  Quindi, in tutto, 3 x 2 = 6 modi.

– Una singolarmente e una terna:
  (A,{B,C,D}) ; ({B,C,D},A)
  e sono 2. Ma invece di A si può scegliere B o C o D.
  Quindi, in tutto, 4 x 2 = 8 modi.
– Tutte e quattro insieme, in 1 modo.
  In totale i modi sono 24 + 36 + 6 + 8 + 1 = 75.
  Il problema, così come dato, è risolto, ma…
  … e se le pillole fossero 3 o 5 o 32 o n?

Secondo tentativo: ricerca di un «ritmo di crescita»

Zero pillole: 1 modo (fa un po' ridere, ma lo mettiamo per amore di completezza).
Una pillola: 1 modo.
Due pillole: 3 modi.
Tre pillole: 13 modi.
Quattro pillole: 75 modi.

Cinque pillole: vediamo. È già tanto facile sbagliare elencando i 75 modi mostrati sopra che provare ad elencare tutti i modi per cinque pillole sembra una via che è meglio evitare. È invece opportuno ragionarci.

Per prima cosa si osserva che, se si prendono tutte insieme, c'è un solo modo, indipendentemente dal numero di pillole.

Poi si osserva che se si prendono k pillole singolarmente i modi sono k!

Poi si osserva che se si fanno h «ingerimenti» (non importa se un ingerimento è di una sola o di più pillole) i modi sono h!

Resta da vedere in quanti modi si possono suddividere le pillole. Nel caso di quattro pillole (vedi sopra) i modi sono cinque, cioè (1,1,1,1) , (2,1,1) , (2,2) , (3,1) e (4). Si tratta dunque di vedere in quanti modi si può ottenere il numero di pillole con scomposizioni additive: Eulero (sempre lui!) ha trovato una formula per calcolare quante sono le scomposizioni additive di n, indicate di solito con P(n). Gli interessati la possono trovare al sito http://mathworld.wolfram.com/PartitionFunctionP.html.

Non ce ne occuperemo qui, anche perché i valori di P(n) per i primi n si possono trovare al sito http://www.research.att.com/~njas/sequences/A000041.

Una volta scritte tutte le scomposizioni additive si può procedere come nell'esempio che segue, valido per cinque pillole.

– (1,1,1,1,1): 5! = 120.
– (2,1,1,1): le coppie sono $\binom{5}{2}$

  (in quanti modi si possono pescare 2 elementi da un insieme di 5); siccome la scomposizione è in quattro termini, si deve moltiplicare per 4!. Dunque l'ingestione di una coppia di pillole e di tre singole può essere fatta in

  $\binom{5}{2} \cdot 4! = 10 \cdot 24 = 240$ modi.

– (3,1,1): le terne sono $\binom{5}{3}$

(in quanti modi si possono pescare 3 elementi da un insieme di 5); siccome la scomposizione è in tre termini, si deve moltiplicare per 3!. Dunque l'ingestione di una coppia di pillole e di tre singole può essere fatta in

$\binom{5}{3} \cdot 3! = 10 \cdot 6 = 60$ modi.

– (2,2,1): la prima coppia può essere scelta in $\binom{5}{2}$ modi;

la seconda in $\binom{3}{2}$ modi;

siccome la scomposizione è in tre termini, si deve moltiplicare per 3! Il risultato deve poi essere diviso per 2! perché abbiamo implicitamente introdotto l'ordine delle coppie.
Dunque l'ingestione di due coppie e di una singola può essere fatta in

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot 3! \cdot \frac{1}{2!} = 10 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 60 \text{ modi}$$

– (4,1): la quaterna può essere scelta in $\binom{5}{4}$ modi;

siccome la scomposizione è in due termini, si deve moltiplicare per 2! Dunque l'ingestione di una quaterna e di una singola può essere fatta in

$$\binom{5}{4} \cdot 2! = 5 \cdot 2 = 10 \text{ modi}$$

– (3,2): ragionando come sopra, si ottengono

$$\binom{5}{3} \cdot 2! = 10 \cdot 2 = 20 \text{ modi}$$

– (5): evidentemente, un solo modo.

In totale, si possono prendere 5 pillole in
120 + 240 + 60 + 90 + 10 + 20 + 1 = 541 modi.

Se si procede in modo analogo per 6 pillole, si ottiene:

(1,1,1,1,1,1):	720 modi
(2,1,1,1,1):	1800 modi
(2,2,1,1):	1080 modi
(3,1,1,1):	480 modi
(2,2,2):	90 modi
(3,2,1):	360 modi
(4,1,1):	90 modi
(5,1):	12 modi

(4,2): 30 modi
(3,3): 20 modi
(6): 1 modo
Totale: 4683 modi

Si osservi ora che
nel caso di 2 pillole, i modi totali di (2) e (1,1) sono $1+2 = 3 = 2^2 - 1$,
nel caso di 3 pillole, i modi totali di (3) e (2,1) sono $1+6 = 7 = 2^3 - 1$,
nel caso di 4 pillole, i modi totali di (4), (3,1) e (2,2)
sono $1+8+6 = 15 = 2^4 - 1$,
nel caso di 5 pillole, i modi totali di (5), (4,1) e (3,2)
sono $1+10+20 = 31 = 2^5 - 1$,
nel caso di 6 pillole, i modi totali di (6), (5,1), (4,2) e (3,3)
sono $1+12+30 + 20 = 63 = 2^6 - 1$.

Il numero totale di modi in cui k pillole possono essere assunte con scomposizioni additive di meno di tre termini è $2^k - 1$. In effetti la scomposizione (n,k) è la somma dei coefficienti binomiali

$$\binom{n}{k} \text{ e } \binom{n}{n-k}$$

perché si scelgono rispettivamente k e (n–k) pillole da ingerire per prime. Mentre la scomposizione (n) è

$$\binom{n}{0}$$

Quindi i modi totali di (n), (n–1,1), (n–2,2), …(n/2,n/2) [o (n+1)/2, (n–1)/2) se n è dispari] sono

$$\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} - 1 = 2^n - 1$$

Questo fatto ci consente di accorciare i calcoli successivi. Per esempio, nel caso di 7 pillole avremo:

(1,1,1,1,1,1,1): 5040 modi
(2,1,1,1,1,1): 15120 modi
(3,1,1,1,1): 4200 modi
(2,2,1,1,1): 12600 modi
(4,1,1,1): 840 modi
(3,2,1,1): 5040 modi
(2,2,2,1): 2520 modi
(5,1,1): 126 modi
(4,2,1): 630 modi
(3,3,1): 420 modi
(3,2,2): 630 modi
altre (v. sopra): 127 (= $2^7 - 1$)
Totale: 47’293 modi.

A questo punto si ottiene la seguente tabella:

Nro. di pillole	**Nro. di modi**
0	1
1	1
2	3
3	13
4	75
5	541
6	4683
7	47’293

Una visita al sito http://www.research.att.com/~njas/sequences/ permette di reperire una marea di informazioni sulla successione nella seconda colonna: lasciamo al lettore il piacere della scoperta.

Terzo tentativo: ricerca di una formula ricorsiva

Sia M(n) la funzione che associa a n pillole il numero di modi di assumerle, che corrisponde al numero di partizioni ordinate di un insieme di n elementi diversi. L’inizializzazione è M(0)=1 (se si preferisce si può inizializzare con M(1)=1: non cambia niente).

Consideriamo adesso il problema di assumere p pillole: possiamo cominciare con una sola, o con 2 assieme, o con 3 assieme, … fino a con p assieme. Se cominciamo con j pillole dobbiamo innanzitutto scegliere quali sono, quelle j pillole, e ciò può essere fatto in

$\binom{p}{j}$ modi, e poi scegliere come assumere le restanti (p-j),

per l’assunzione delle quali abbiamo M(p-j) modi.

Di conseguenza si ha

$$M(p) = \sum_{j=1}^{p}\left(\binom{p}{j}\cdot M(p-j)\right) = \sum_{i=0}^{p-1}\binom{p}{p-i}M(i) = \sum_{i=0}^{p-1}\binom{p}{i}M(i) \quad \text{con} \quad M(0)=0$$

Per comodità, chiameremo (F) la formula

$$M(p) = \sum_{i=0}^{p-1}\binom{p}{i}M(i) \quad \text{con} \quad M(0)=0$$

Avendo a disposizione la (F) non è difficile preparare una tabella dei primi valori di M(p) (quanti si vuole: basta che il programma di calcolo gestisca abbastanza cifre, poiché la crescita è rapidissima), dalla quale si ricava, con un po’ di fantasia … combinatoria, che

$$\frac{M(p)}{p\cdot M(p-1)}$$

sembra tendere al valore 1,442695… al crescere di p. Empiricamente, abbiamo trovato che tale valore non è altro che $\log_2 e$.

Quarto tentativo: ricerca di una formula esplicita

Il primo tentativo, forse il più naturale, è quello di iterare la formula ricorsiva, esprimendo ogni termine M(p) in funzione dei primi due, M(0) e M(1). Otteniamo così, applicando la (F)

M(2) = 2M(1) + M(0)
M(3) = 9M(1) + 4M(0) (due quadrati, lascia ben sperare…)
M(4) = 52M(1) + 23M(0) (accidenti… già un numero primo…)
M(5) = 375M(1) + 166M(0) (arrivederci e grazie…)
Eccetera.

Questa strada si è rivelata, se non un vicolo cieco, un passaggio troppo stretto per le nostre capacità. Magari qualcuno riuscirà ad esplorarla.

Così siamo tornati al punto di partenza. Nel frattempo una formula esplicita,valida per p > 0 e dovuta a Benoît Cloitre, è apparsa in internet nel sito delle sequenze citato sopra:

$$M(p) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k-1)^p}{2^k}$$

L'obiettivo è quindi diventato quello della dimostrazione di tale formula. La prima idea è stata quella della dimostrazione per induzione, ma né la serie, né i coefficienti binomiali erano manipolabili, e così ci siamo ben presto arenati. Dopo qualche altro tentativo fallito ci siamo rivolti direttamente alla fonte, cercando e trovando l'indirizzo del signor Cloitre[1], il quale ci ha indicato una traccia per la dimostrazione, che abbiamo ricostruito qui di seguito in dettaglio.

Partiamo dalla formula ricorsiva, cioè la (F):

$$M(p) = \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p}{i} M(i) \quad \text{con} \quad M(0) = 0$$

Per poter ottenere la formula esplicita dobbiamo considerare la serie seguente:

$$\sum_{p=0}^{+\infty} M(p) \frac{x^p}{p!}$$

Se moltiplichiamo quest'ultima con la serie (convergente per qualunque x) per

$$2 - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^p}{p!}$$

1. Che ringraziamo cordialmente per la rapidissima ed efficace risposta.

otteniamo:

$$\left(\sum_{p=0}^{+\infty} M(p)\frac{x^p}{p!}\right)\left(2-\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^p}{p!}\right)=$$

$$=\left(M(0)\frac{x^0}{0!}+\sum_{p=1}^{+\infty} M(p)\frac{x^p}{p!}\right)\left(2-\frac{x^0}{0!}-\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x^p}{p!}\right)=$$

$$=M(0)\frac{x^0}{0!}.\left(2-\frac{x^0}{0!}\right)+\sum_{p=1}^{+\infty} M(p)\frac{x^p}{p!}\left(2-\frac{x^0}{0!}-\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x^p}{p!}\right)=$$

$$=M(0)\frac{x^0}{0!}\left(2-\frac{x^0}{0!}\right)+\sum_{p=1}^{+\infty} x^p\left(\frac{M(p)}{p!}\left(2-\frac{x^0}{0!}\right)-\sum_{i=0}^{p-1}\frac{M(i)}{i!}\frac{1}{(p-i)!}\right)=$$

$$=1+\sum_{p=1}^{+\infty} x^p\left(\frac{M(p)}{p!}-\frac{1}{p!}\sum_{i=0}^{p-1}\frac{M(i)}{i!}\frac{p!}{(p-i)!}\right)=$$

$$=1+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x^p}{p!}\left(M(p)-\sum_{i=0}^{p-1}\frac{M(i)}{i!}\frac{p!}{(p-i)!}\right)=$$

$$=1+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x^p}{p!}\left(M(p)-\sum_{i=0}^{p-1}\binom{p}{i}M(i)\right)=$$

$$=1+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x^p}{p!}\big(M(p)-M(p)\big)=1$$

Quindi:

$$\sum_{p=0}^{+\infty} M(p)\frac{x^p}{p!}=\frac{1}{2-\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^p}{p!}}=\frac{1}{2-e^x}$$

per una delle possibili definizioni di e.
D'altro canto, per ogni $x < \ln 2$:

$$\frac{1}{2-e^x}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\left(-\frac{e^x}{2}\right)}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{e^x}{2}\right)^i=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{2^i}=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{i+1}}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(ix)^p}{p!}=$$

$$=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^p}{p!}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{i^p}{2^{i+1}}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^p}{p!}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(k-1)^p}{2^k}$$

Abbiamo infine ottenuto:

$$\sum_{p=0}^{+\infty} M(p)\frac{x^p}{p!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^p}{p!}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(k-1)^p}{2^k}$$

per ogni valore di x < ln2. Di conseguenza deve valere pure:

$$M(p) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(k-1)^p}{2^k}$$

Esempio

Sia p = 7

k	$(k-1)^7/2^k$	Somme parziali
1	0.000	0.000
2	0.250	0.250
3	16.000	16.250
4	136.688	152.938
5	512.000	664.938
6	1220.703	1885.641
7	2187.000	4072.641
8	3216.965	7289.605
9	4096.000	11385.605
…	…	…
36	0.936	47291.569
37	0.570	47292.140
38	0.345	47292.485
39	0.208	47292.693
40	0.125	47292.818
41	0.075	47292.892
…	…	…

Nella tabella si vede che, a partire da k=39, le somme parziali arrotondate all'intero danno il valore trovato in precedenza.

Inviti

Chi avesse voglia di divertirsi, può ora provare a dimostrare la convergenza, citata prima, di

$\dfrac{M(p)}{p\cdot M(p-1)}$ verso $\log_2 e = \dfrac{1}{\log_e 2}$ al crescere di p.

Dalla tabella precedente si ricava anche che i valori della seconda colonna prima crescono, poi diminuiscono tendendo a zero. È interessante vedere il grafico che generano e trovare per quale valore di k, in funzione di p, esso raggiunge il suo massimo e, in generale, il suo andamento.

Commento didattico

Un problema equivalente

Il «problema delle pillole» è nato dalla situazione fattuale di uno degli autori (diciamo pure del meno giovane). Nel corso dei lavori, però, ci siamo accorti che una sua formulazione più accattivante è la seguente: se ad una gara di corsa partecipano n atleti e nessuno si ritira, quanti sono gli ordini di arrivo possibili, nell'ipotesi che siano possibili arrivi in contemporanea di due o più atleti?

Considerazioni didattiche

L'interesse didattico di questo problema consiste soprattutto nel fatto che può essere proposto in ogni ordine di scuola, a stadi diversi[2]. Per esempio, se ci si limita a tre o quattro pillole, il problema può essere proposto già nella scuola elementare. In sostanza si tratta di trovare un metodo di seriare le possibilità di ingestione delle pillole, cioè una procedura che consenta di elencarle tutte senza ripetizioni. Riconosciamo qui un'importante attività introduttiva al pensiero combinatorio: elencare tutti i casi possibili di una situazione e produrre un ragionamento che spieghi perché l'elenco proposto è esaustivo.

Alla scuola media il problema può essere posto per un numero di pillole maggiore, diciamo fino a 5 o 6 pillole. Qui l'elencazione diventa problematica: si tratta dunque di individuare una procedura di tipo ricorsivo, che faccia cioè passare da 3 a 4, da 4 a 5, da 5 a 6 pillole. Non si pretenderà ovviamente di usare i coefficienti binomiali, tanto meno nella loro forma generale, ma di vedere che un certo numero di pillole può essere scelto in un certo numero di modi da un cert'altro numero di pillole. L'idea di procedura ricorsiva è importante e vale la pena mettere gli allievi di questa fascia di età nella condizione di poterla intuire. Del resto, uno degli ambiti da privilegiare nell'educazione al pensiero combinatorio è proprio quello delle successioni numeriche. Un allievo di scuola media può anche limitarsi a intuire qualche elemento successivo di una successione numerica data mediante un certo numero di primi termini e, in casi più semplici di quello qui presentato, potrebbe giungere alla formulazione in linguaggio naturale o addirittura matematico del termine n-esimo. Il sito indicato in precedenza è un valido aiuto in questa direzione. Inoltre sappiamo come l'atto del «tentare» sia fondamentale nella costruzione dell'apprendimento matematico, purché, evidentemente, porti a formulare congetture che in seguito devono essere attentamente esaminate.

Se ci si stacca dal contesto deterministico, questo discorso può portare a capire il problema di inferenza statistica consistente nel prevedere proiezioni di dati, partendo da un numero limitato di valori conosciuti. I *trend* ricavati da successioni di valori, pubblicati dai vari mezzi di comunicazione, assumono così il loro giusto significato di «aspettative ragionevoli» (quanto ragionevoli non si sa).

A un livello scolastico superiore si potranno operare generalizzazioni più complete e formalizzate. Nel nostro esempio gli studenti potranno utilizzare coefficienti binomiali e simboli di sommatoria per giungere a diversi stadi di generalizzazione. Anche il discorso sui *trend* potrà opportunamente essere ampliato. Il che, male non può fare…

2. Il problema fa parte dell'insieme dei P-bam: si veda il contributo di Giorgio Mainini su questo numero.

1. Convegno Nazionale n. 20: Incontri con la Matematica

Il Convegno del ventennale

Castel San Pietro Terme (Bologna)
3-4-5 novembre 2006

Conferenze

Venerdì 3 novembre, Centro Congressi (Hotel Castello)

Tutti gli ordini scolastici

14.45-15.00 **Introduzione al convegno**

15.00-15.45 **Maria Alessandra Mariotti** (Università di Siena):
Educazione matematica: tra nuove tecnologie e vecchi problemi

15.45-16.30 **Luis Radford** (Université Laurentienne, Sudbury, Ontario, Canada):
Comunicazione e apprendimento. Una prospettiva vygotskijana

16.30-17.00 Intervallo; **interventi teatrali**[1]

17.00-17.30 **Inaugurazione ufficiale**.
Saluti di apertura del **Sindaco**, del **Magnifico Rettore**, dell'**Assessore alla Cultura**, di altre personalità del mondo politico ed accademico

17.30-18.15 **Bruno D'Amore** (Università di Bologna):
Oggetti matematici, trasformazioni semiotiche e senso

18.15-19.00 **Ferdinando Arzarello** (Università di Torino):
Apprendere la matematica: il paradigma dell'embodied mind e lo Spazio di Azione, Produzione e Comunicazione

Sabato 4 novembre, Salone delle Terme (Albergo delle Terme)

Scuola dell'Infanzia

15.00-15.45 **Silvia Sbaragli** (NRD, Bologna):
Pratiche personali nella scuola dell'infanzia

1. Classe V SP di Rocca San Casciano (FO) coordinati da **L. Billi** e **P. Ricci**.

15.45-16.30 **Giancarlo Navarra** (GREM, Modena): La ricerca di regolarità per favorire lo sviluppo del pensiero relazionale
16.30-17.00 Intervallo
17.00-17.45 **Daniela Lucangeli** (Università di Padova): Potenziamento dello sviluppo prossimale dell'intelligenza numerica
17.45-18.30 **Gianfranco Staccioli** (Università di Firenze): La Máthema-tica della realtà

Sabato 4 novembre, Centro Congressi (Hotel Castello)

Scuola Primaria, Secondaria di primo e di secondo grado
15.00-15.45 **Colette Laborde** (Università di Grenoble, Francia): L'ingresso nel mondo della geometria con Cabri-géomètre nelle scuole primaria e media
15.45-16.30 **Rosetta Zan** (Università di Pisa): 20 anni di convegni, di ricerca, ... di figli e di animali strani
16.30-17.00 Intervallo ed attività ludiche[2]
17.00-17.45 **Juan D. Godino** (Università di Granada, Spagna): Idoneità didattica di processi di insegnamento e apprendimento della matematica
17.45-18.30 **Pier Luigi Ferrari** (Università del Piemonte Orientale): Per una formazione linguistica che sostenga l'apprendimento matematico
18.30-19.15 **Aurelia Orlandoni** (IRRE Emilia Romagna, ADT): Le prove PISA e INVALSI e il loro rapporto con l'uso delle tecnologie

Seminari

Sabato 4 novembre, Aula Magna (Istituto Alberghiero)

Seminari per la Scuola dell'Infanzia
9.00-9.45 **T. Zamboni** (GREM, Modena): Progetto ArAl e ricerca di regolarità: Popoffi, Ligurzi, Mafoni, analisi di scene di classe
9.45-10.30 **P. Vighi** (ULRDM, Parma): Costruiamo un bel pavimento. Indagine su alcune pre-concezioni e intuizioni relative all'organizzazione spaziale
10.30-11.15 **M. Avaltroni e M. Marchetti** (IC di San Marcello): Che cos'è per noi un problema
11.15-14.00 **Visita alle mostre e teatro**

2. Estrazione a sorte omaggi Media Direct e Texas Instruments.

Sabato 4 novembre, Centro Congressi (Hotel Castello)

	Seminari per la Scuola Primaria e Secondaria di primo grado
9.00-9.45	**G. Arrigo** (NRD, Bologna): Il lato affettivo del concetto di competenza
9.45-10.30	**P.L. Ferrari** (Università del Piemonte Orientale): Dal lavoro di lingua alla costruzione dei concetti matematici: idee ed esperienze
10.30-11.15	**G. Navarra** (GREM, Modena): Il progetto ArAl e l'approccio anticipato al pensiero algebrico: la formazione degli insegnanti a cavallo fra teoria e prassi
11.15-14.00	**Visita alle mostre e teatro**

Sabato 4 novembre, Sala Giardino (Hotel delle Terme)

	Seminari della Sezione «Disagio nei processi di apprendimento»
9.00-9.45	**R. Zan** (Università di Pisa): Dall'idea di errore a quella di fallimento: un cambiamento nell'approccio alle difficoltà in matematica
9.45-10.30	A. Canevaro (Università di Bologna): Differenze, difficoltà, disagio
10.30-11.15	**D. Lucangeli** (Università di Padova): L'impotenza appresa ossia la paura di non riuscire ad imparare
11.15-14.00	**Visita alle mostre e teatro**

Sabato 4 novembre, Salone delle Terme (Albergo delle Terme)

	Seminari per la Scuola Secondaria di secondo grado
9.00-9.45	**J. Sagula** (Università di Luján, Argentina): Gestione della conoscenza matematica
9.45-10.30	**G. Bagni** (Università di Udine): A cinquant'anni dalla pubblicazione delle *Osservazioni sopra* *i fondamenti della matematica* di Wittgenstein
10.30-11.00	Intervallo
11.00-11.45	**P. Accomazzo** (LS, «Einstein», Torino): Calcolo simbolico e geometria dinamica: due facce della stessa medaglia
11.45-12.30	**G. Arrigo** (NRD, Bologna): Attività di pre-analisi: loro importanza ed esempi
12.30-14.00	**Visita alle mostre e teatro**

Sabato 4 novembre, Cinema Jolly (Centro Storico)

Per tutti i livelli scolastici

12.00-13.00 **Teatro**: Studenti SM e Liceo delle Scuole Visitandine, Castel San Pietro Terme, coord. da **G. Nobili** e **G. Tinarelli**: *Più che 'l doppiar delli scacchi s'inmilla* Incontri di Dante con la Matematica

14.00-14.30 **Teatro**: Studenti dell'Alta Scuola Pedagogica di Locarno (Svizzera) coord. da **E. Ferretti** e **S. Sbaragli:** *Un racconto e un po' di matematica*

Domenica 5 novembre, Aula Magna (Istituto Alberghiero)

Seminari per la Scuola dell'Infanzia

8.30-9.15 **M. Sangiorgi** (NRD, Bologna): Conoscenze in Didattica della Matematica e cambiamento di concezioni di allievi di Scienze della Formazione

9.15-10.00 **G. Staccioli** (Università di Firenze): Problemi per/nel giocare?

10.00-10.45 **N. Vecchi** (RSDDM, Bologna): Bastano un percorso e un sasso per fare matematica

10.45-12.00 **Visita alle mostre**

12.15-12.45 **Manifestazione di chiusura del convegno presso il Centro Congressi: saluto delle autorità, consegna degli attestati, interventi ludici**

Domenica 5 novembre, Centro Congressi (Hotel Castello)

Seminari per la Scuola Primaria

8.30-9.15 **L. Campolucci** e **D. Maori** (Gruppo Matematica in Rete, Corinaldo): Esempi di trasposizione didattica delle frazioni

9.15-10.00 **G. Bolondi** (Università di Bologna): I mille significati della locuzione «laboratorio di matematica»

10.00-10.45 **L. Bardone** (NRD, Pavia): Con Cabri costruisco e muovo le figure: giocando imparo la geometria

10.45-12.00 **Visita alle mostre**

12.15-12.45 **Manifestazione di chiusura del convegno presso il Centro Congressi: saluto delle autorità, consegna degli attestati, interventi ludici**

Domenica 5 novembre, Sala Giardino (Albergo delle Terme)

Seminari per la Scuola Secondaria di primo grado

8.30-9.15 **L. Tomasi** (LS «Galilei», Adria - SSIS, Ferrara): Dallo spazio al piano e viceversa: esplorazioni dinamiche con Cabri II Plus e Cabri 3D

9.15-10.00 **P. Vighi, I. Aschieri** (ULRDM, Parma):
Matematica e Arte: i quadri di «quadri» di Theo Van Doesburg
10.00-10.45 **F. Monari** (RSDDM, Bologna):
Segni e significati in aritmetica e in algebra
10.45-12.00 **Visita alle mostre**
12.15-12.45 **Manifestazione di chiusura del convegno presso il Centro Congressi: saluto delle autorità, consegna degli attestati, interventi ludici**

Domenica 5 novembre, Salone delle Terme (Albergo delle Terme)

Seminari per la Scuola Secondaria di secondo grado
8.30-9.15 **S. Cappuccio** (RSDDM, Bologna):
Ruolo delle tecnologie nelle proposte UMI-CIIM e negli OSA di Matematica
9.15-10.00 **D. Foà** (LS «F. Buonarroti», Pisa):
La matematica: una disciplina controversa
10.00-10.45 **L. Tomasi** (LS «Galilei», Adria - SSIS, Ferrara):
Geometria dello spazio con Cabri 3D: itinerari didattici
10.45-12.00 **Visita alle mostre**
12.15-12.45 **Manifestazione di chiusura del convegno presso il Centro Congressi: saluto delle autorità, consegna degli attestati, interventi ludici**

Mostre e Laboratori
(a cura di Ines Marazzani e Silvia Sbaragli)

Presso l'Istituto Alberghiero
Sabato 4 novembre dalle 8.30 alle 14.00
e domenica 5 novembre dalle 8.30 alle 12.00

Per tutti
- Laboratorio di robotica con LEGO Mindstorms a cura di LEGO Education (ogni ora sabato dalle 9.00 alle 13.00 e domenica dalle 9.00 alle 12.00)

Scuola dell'infanzia
- **A. Angeli** e **M. Di Nunzio,** Circolo Didattico di Porcari, Montecarlo: «L'occhio della tua Mente»… ovvero osserva liberaMente
- SI e SP del 2° Circolo Didattico di Biella coord. da **N. Vecchi**: Costruire per raccontare
- **I. Foresti** (a cura di), con la coll. di **R. Guastalla** e **C. Provitera**: Matematica in tutti i sensi
- **SI «M. Pieralisi»** di Morro d'Alba in continuità con le classi IIe A, B e C di SM dell'Istituto Comprensivo di San Marcello: In viaggio con i problemi

- **Gruppo Matematica in Rete**, IC di Corinaldo, Ostra, Ripe, Jesicentro, Jesi «Federico II», Senigallia Sud:
  Giocando sui diversi aspetti delle frazioni
- **A. Carmeci, F. Franzi, I. Fregosi, P. Hold, S. Scaramazza** e **L. Zanchin** studentesse ASP (Locarno):
  Giochi matematici allo sbaraglio
- **GREM,** Modena: Esplorando il Progetto ArAl
- **IC «D. Alighieri» di Cerchio** (Aquila):
  Labiccerchio... supermatematici in «forma»

Scuola primaria

- **SI «M. Pieralisi» di Morro d'Alba** in continuità con le classi IIe A, B e C di SM dell'Istituto Comprensivo di San Marcello:
  In viaggio con i problemi
- SI e SP del 2° Circolo Didattico di Biella coord. da **N. Vecchi**:
  Costruire per raccontare
- **I. Foresti** (a cura di), con la coll. di **R. Guastalla** e **C. Provitera**:
  Matematica in tutti i sensi
- **Gruppo Matematica in Rete**, IC di Corinaldo, Ostra, Ripe, Jesicentro, Jesi «Federico II», Senigallia Sud:
  Giocando sui diversi aspetti delle frazioni
- **GREM**, Modena: Esplorando il Progetto ArAl
- Classi V A e B della SP «Livio Tempesta» di Forlì coord. da **A. Carloni** e **L. Giorgi**:
  A spasso tra antiche civiltà
- SP «I.C. Giusti» e «I.C. V. Locchi» di Milano coord. da **L. Cottino, C. Gualandi, G. Nobis, A. Ponti, M. Ricci** e **L. Zola**: L'analogia in aula: alcune proposte
- SP «G. Rodari» e SM di Verona coord. da **F. Aldegheri** e **P. Dalle Pezze** e con la coll. di **E. Frigo** per la parte musicale:
  Un percorso inedito nella chiesa di Santa Maria in Organo a Verona.
  I bambini, l'arte e la matematica: linee, numeri, forme e proporzioni
- **G. Gabellini** e **F. Masi** (RSDDM, Bologna):
  Gli algoritmi di calcolo: tra storia e didattica
- **A. Carmeci, F. Franzi, I. Fregosi, P. Hold, S. Scaramozza** e **L. Zanchin** studentesse ASP (Locarno):
  Giochi matematici allo sbaraglio
- **GREM**, Modena: cicli di laboratori a rotazione per SP e SM:
  1. **A. Giacomin, T. Zamboni** (dalle 9.00 alle 10.00): Progetto ArAl: piramidi, gnomoni e altro ancora, alla ricerca di regolarità nascoste; 2. **R. Fiorini, S. Marchi, R. Nasi, P. Stefani** (dalle 10.00 alle 11.00): Progetto ArAl: verso le funzioni; 3. **D. Burtet, T. Dell'Eva** (dalle 11.00 alle 12.00): Progetto ArAl: un itinerario sulla proprietà distributiva
- **GREM,** Modena: Laboratorio informatico coordinato da **N. Miolo**:
  Progetto ArAl e e-Learning: un ambiente di apprendimento on-line per docenti dell'area matematica

- Minicorso su CABRI Géomètre II PLUS a cura di **L. Facciotto** (ITIS, Biella) (ogni ora solo domenica dalle 9.00 alle 12.00, laboratorio di informatica)
- **P. Pasi** (RSDDM, Bologna):
Mathemìmesis: Il fascino della Matematica (videoproiezioni: «Rappresentare lo spazio» e «Il numero come principio del cosmo»)
- **IC «D. Alighieri» di Cerchio** (Aquila): Labiccerchio... supermatematici in «forma»

Scuola secondaria di primo grado

- Classi IIe A, B e C di **SM dell'Istituto Comprensivo di San Marcello** in continuità con **SI «M. Pieralisi» di Morro d'Alba:**
In viaggio con i problemi
- **Gruppo Matematica in Rete**, IC di Corinaldo, Ostra, Ripe, Jesicentro, Jesi «Federico II», Senigallia Sud:
Giocando sui diversi aspetti delle frazioni
- SP «G. Rodari» e SM di Verona coord. da **F. Aldegheri** e **P. Dalle Pezze** e con la coll. di **E. Frigo** per la parte musicale:
Un percorso inedito nella chiesa di Santa Maria in Organo a Verona. I bambini, l'arte e la matematica: linee, numeri, forme e proporzioni
- **G. Gabellini** e **F. Masi** (RSDDM, Bologna):
Gli algoritmi di calcolo: tra storia e didattica
- Classe IV LdC «S. Pio X», Castel San Pietro Terme coord. da **G. Nobili**:
I numeri della musica
- Classi II A e C dell'ICS di Vedano al Lambro coord. da **C. Colombo**, **R. Didoni** e **R. Pieretti**:
Riflessi matematici nell'arte e in natura
- Classi IV I e V G dell'IISS «Giovanni da San Giovanni» di S. Giovanni Valdarno, coord. da **C. Romanelli** e **A. Ferrini**:
L'Infinito: nella Matematica, nella Letteratura, nella Filosofia, nella Musica
- **GREM,** Modena: Esplorando il Progetto ArAl
- **GREM**, Modena: cicli di laboratori a rotazione per SP e SM:
1. **A. Giacomin, T. Zamboni** (dalle 9.00 alle 10.00): Progetto ArAl: piramidi, gnomoni e altro ancora, alla ricerca di regolarità nascoste; 2. **R. Fiorini, S. Marchi, R. Nasi, P. Stefani** (dalle 10.00 alle 11.00): Progetto ArAl: verso le funzioni; 3. **D. Burtet, T. Dell'Eva** (dalle 11.00 alle 12.00): Progetto ArAl: un itinerario sulla proprietà distributiva
- **GREM,** Modena: Laboratorio informatico coordinato da **N. Miolo**:
Progetto ArAl e e-Learning: un ambiente di apprendimento on-line per docenti dell'area matematica
- Minicorso su CABRI 3D a cura di **L. Tomasi** (ogni ora solo sabato dalle 9.00 alle 13.00, laboratorio di informatica)
- Minicorso su CABRI Géomètre II PLUS a cura di **L. Facciotto** (ITIS, Biella) (ogni ora solo domenica dalle 9.00 alle 12.00, laboratorio di informatica)

- **P. Pasi** (RSDDM, Bologna):
  Mathemìmesis: Il fascino della Matematica (videoproiezioni:
  «Rappresentare lo spazio» e «Il numero come principio del cosmo»)
- **IC «D. Alighieri» di Cerchio** (Aquila):
  Labiccerchio... supermatematici in «forma»

Scuola secondaria di secondo grado

- Classe IV LdC «S. Pio X», Castel San Pietro Terme coord. da **G. Nobili**:
  I numeri della musica
- Classi IV I e V G dell'IISS «Giovanni da San Giovanni»
  di S. Giovanni Valdarno, coord. da **C. Romanelli** e **A. Ferrini**:
  L'Infinito: nella Matematica, nella Letteratura, nella Filosofia,
  nella Musica
- Minicorso su CABRI 3D a cura di **L. Tomasi**
  (ogni ora solo sabato dalle 9.00 alle 13.00, laboratorio di informatica)
- **P. Pasi** (RSDDM, Bologna):
  Mathemìmesis: Il fascino della Matematica (videoproiezioni:
  «Rappresentare lo spazio» e «Il numero come principio del cosmo»)

Informazioni

Rivolgersi a Gianfranco Arrigo
tel. 091 966 72 12
e-mail: gianfranco.arrigo@span.ch

2. Recensioni

Gianfranco Arrigo

Giorgio Bagni, Bruno D'Amore – Leonardo e la Matematica – Giunti, Firenze, 2006, 107 pag. 128, 10,00 €

In questo agile saggio, gli autori ci guidano alla scoperta di un Leonardo più umano e credibile di quello che solitamente viene presentato con parecchia enfasi e con un misto di storia, aneddotica e leggenda. L'analisi critica del XX secolo, basata sullo studio di documenti esistenti, ha permesso di fare chiarezza, restituendo un Leonardo, uomo affascinante per quello che realmente seppe fare e concepire, ma anche uomo con le sue debolezze, i suoi limiti, i suoi errori. Ed è questa l'immagine che gli autori ci presentano: quella del genio che non è *«perfezione divina per la quale non c'è merito, ma sapienza e intelletto umani, che ispirano assai più il rispetto»*. In questa ottica sono visti i rapporti tra Leonardo e la matematica. Occorre tenere presente che i primi libri di matematica, pubblicati nella seconda metà del Quattrocento, erano soprattutto traduzioni in greco e in latino delle opere di Euclide e di Archimede. Ora, si sa che Leonardo non conosceva queste lingue: tradizionalmente è conosciuto come «omo sanza lettere», quindi è poco credibile che abbia potuto apprendere importanti conoscenze matematiche, contrariamente a ciò che pretendono certi autori, sulla base degli scritti di Giorgio Vasari, che presentano Leonardo come lettore accanito e competente delle opere di Euclide, Archimede e di Aristotele. Questo gli autori lo deducono anche dall'esame dei suoi mirabili progetti di ingegneria, nella descrizione dei quali la matematica è ridotta a poche nozioni di base. A ciò occorre aggiungere che Leonardo aveva un carattere incostante: i suoi interessi, come si sa, spaziavano in molti campi del sapere, prevalentemente nella pittura, nell'ingegneria e nell'anatomia, il tutto soggetto alla sua grande passione: la ricerca della bellezza estetica. È assai credibile l'immagine di un uomo, spinto da una grande curiosità e sorretto da un intelletto fuori dal comune, che si appassiona di mille cose, iniziando studi, trattati e realizzazioni tecniche, che poi quasi regolarmente lascia incompiuti per dedicarsi ad altro. I suoi scritti (in lingua volgare e curiosamente con grafia speculare) sono raccolti in una successione di «codici», sinteticamente presentati in questo libro, fra i quali il più conosciuto è detto «codice atlantico». Molti di questi scritti sono imparaticci: Leonardo soleva scrivere mentre stava apprendendo. Gli autori ne colgono l'interesse didattico e ci fanno notare anche gli errori matematici clamorosi che qua e là vi si possono trovare. Per esempio, errori commessi nell'eseguire semplici addizioni o moltiplicazioni di frazioni. Anche la geometria non doveva essere la specialità di Leonardo, se è vero che soltanto all'età di 44 anni stava apprendendo nozioni elementari come la somma degli angoli interni di un triangolo e il teorema relativo all'ampiezza di un angolo esterno a un triangolo. Un evento importante per l'apprendimento matematico di Leonardo è la pubblicazione, nel 1494 a Venezia, dell'opera enciclopedica di Luca Pacioli *Summa de aritmetica, geometria, proporzioni et proporzionalità*, opera che Leonardo compera pagando 119 soldi e che finalmente può studiare, essendo scritta in italiano. Leonardo conosce poi di persona Luca Pacioli e ciò dà inizio a un periodo di intensi studi di carattere matematico. La sua inclinazione all'ingegneria e all'estetica lo indirizzano verso la geometria, della quale apprezza soprattutto i problemi relativi alla sezione aurea e alla quadratura del cerchio. Ma anche in questi frangenti gli autori ci danno di Leonardo un'immagine che non è di un matematico, ma di un uomo che seppe fare della scienza, della tecnica e dell'arte pittorica una realtà unica.

Silvio Maracchia – Storia dell'algebra – Liguori, Napoli, 2005, pag. 640, 48,50 €

La nuova opera di Silvio Maracchia, conosciuto e apprezzato storico della matematica, si può ben definire un'enciclopedia storica dell'algebra. Storia che affonda le proprie radici nella più remota antichità perché, all'origine, anche se non si chiamava ancora algebra, la disciplina consisteva nello studio di procedimenti atti a risolvere equazioni numeriche. Come si sa, il nome appare per la prima volta col significato di «operazione di trasporto» di un termine da un membro all'altro di un'equazione nel titolo dell'opera di Mohammed ibn Musa Al-Khuwarizmi *«Al-giabr wa-l-muqabala»* resa pubblica attorno all'anno 820. Con l'introduzione della lettera e del moderno linguaggio algebrico, la disciplina diventa teoria delle equazioni e studio delle strutture generalizzanti, fino a raggiungere l'attuale stato di algebra astratta. L'autore ci fa vivere questo lungo cammino con dovizia di particolari e con intenti squisitamente didattici. Qui sta il punto centrale e il grande valore dell'opera. Essa si propone come preziosissimo ausilio per gli insegnanti che ne potranno ricavare innumerevoli stimoli per arricchire il proprio bagaglio culturale e didattico. Dopo aver letto solo poche pagine di questo denso volume, per esempio quelle dedicate alla storia delle equazioni di primo e secondo grado, appare insensato insegnare questo capitolo senza far conoscere agli allievi – anche solo parzialmente – le vicissitudini, i tentativi riusciti e no, i contrasti e i successi che si sono alternati nel corso dei millenni passati. Il processo di umanizzazione della matematica, al quale noi teniamo parecchio, passa obbligatoriamente dalla sua storia, scritta e interpretata come sa fare molto bene Silvio Maracchia, che, ricordo ai lettori, è stato ospite della nostra rivista, nel numero 12 del maggio 1986, proprio con un articolo dal titolo «Storia della matematica: le equazioni di primo e di secondo grado nell'antichità». Un'altra ragione, questa, di carattere affettivo, per correre in libreria ad acquistare il prezioso volume, che non dovrebbe mancare in nessuna bibliotechina personale dell'insegnante.

Progetto grafico
Bruno Monguzzi
Prestampa
Taiana
Stampa
Veladini

Redazione
Laboratorio di didattica della matematica
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera

Telefono
091 814 18 21/22/24
Fax
091 814 18 19
a.bdm@ticino.com

Amministrazione
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera
Fax
091 814 18 19

Esce due volte all'anno
a maggio e a dicembre

Abbonamento annuo
Sfr. 30.–
€ 16

Bollettino dei docenti di matematica
52

In questo numero: strumenti per calcolare di B. Jannamorelli; didattica e informatica di A. Balderas Puga; atolli matematici di G. Arrigo; saggi di didattica di R. Legato e V. Lehner; matematica con G. Pirillo, P. Hägler e G. Mainini; il quiz di A. Frapolli; lancio di una nuova rubrica di G. Mainini; matematica e baseball di L. Bellini; invito al convegno del ventennale; recensioni.

ISBN 88-86486-52-9
Fr. 18.–

Repubblica e Cantone Ticino
Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport