A cura
del Laboratorio di didattica della matematica

Bollettino dei docenti di matematica

53

Dicembre
2006

Ufficio
dell’insegnamento medio
Centro
didattico cantonale

Bollettino
dei docenti di matematica
53

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport

ISBN 88-86486-53-7

Bollettino dei docenti di matematica 53

Dicembre
2006

Ufficio dell'insegnamento medio
Centro didattico cantonale

Indice

Prefazione

Il numero 53 dà ampio spazio a contributi di giovani insegnanti delle nostre scuole, dalle elementari alle superiori: lo diciamo con soddisfazione e speranza. Soddisfazione perché, malgrado tutto, è la dimostrazione che i giovani ci sono, mostrano di essere sensibili ai problemi didattici e di aver già acquisito un buon livello nella formazione professionale. La speranza è che non perdano l'interesse per l'insegnamento della matematica e che continuino a ricercare, a sperimentare, a vivere da protagonisti la professione di insegnante. Il Bollettino è uno strumento di lavoro aperto a chiunque senta il bisogno di confrontarsi con i propri colleghi, con insegnanti stranieri e con specialisti internazionali.

Fra gli ospiti troviamo Silvio Maracchia, storico della matematica, che qualcuno ricorderà di aver conosciuto nel 1986 quando tenne una memorabile conferenza sulle equazioni di primo e di secondo grado nell'antichità. Se tutto andrà bene, lo rivedremo di nuovo in Ticino l'anno prossimo. Questa volta Silvio ci presenta un contributo di Lagrange alla soluzione delle equazioni di quarto grado. L'altro ospite straniero, amico ed estimatore della nostra rivista, è Mauro Cerasoli, la cui verve è nota a tutti. Questa volta attira la nostra attenzione sul fatto che non sempre i nomi dei personaggi che si legano a teoremi o a oggetti matematici sono pertinenti: è il caso, per esempio, del frattale di Mandelbrot.

La rubrica Didattica questa volta è molto ricca. Inizia con l'esordio di un giovanissimo insegnante di scuola primaria, Fabrizio Capeder, che ci presenta la sintesi del suo lavoro di diploma all'ASP: una ricerca sulle convinzioni degli allievi di scuola dell'infanzia, elementare e media su che cosa s'intende con la parola «problema».

Segue poi un contributo parecchio interessante offerto da Alessandra Di Maria, giovane insegnante di scuola elementare, laureatasi nel frattempo anche alla Facoltà di Scienze della Comunicazione di Lugano: si interessa in particolare dell'aspetto comunicativo in didattica e il suo articolo è imperniato su una sperimentazione relativa al concetto di probabilità matematica effettuata in una quinta elementare.

Gianfranco Arrigo propone una sintesi elaborata della sua relazione tenuta a Castel San Pietro Terme in occasione del Convegno del ventennale sul delicato problema della preparazione degli studenti ad affrontare lo studio dell'analisi, seguita da una sequenza di attività di pre-analisi.

Paolo Hägler ci presenta la sua esperienza di insegnamento della matematica in lingua francese: un insegnamento per immersione effettuato lo scorso anno alla Scuola Cantonale di Commercio di Bellinzona.

Chiude un'interessante serie di proposte metodologiche di Egon Conti Rossini, insegnante alla Scuola media di Losone.

I Giochi ora si sono fatti più tosti: alle famigerate proposte di Aldo Frapolli (che però questa volta si è intenerito…) si aggiungono le avventure intellettuali di Giorgio Mainini dall'altisonante titolo P-bam.

Così come la Didattica, anche la rubrica Dalla bricolla è interamente ticinese. Si apre con un intermezzo musicale molto carino offerto da due giovanissimi insegnanti di scuola media: Luca Bellini e l'esordiente Sara Cataldi Spinola ci suonano J.S. Bach con strumenti matematici.

La seconda parte è dedicata alla Bricolla degli Atolli matematici, che potrebbe avere un seguito e presentare altri materiali didattici immediatamente usabili in classe, scelti fra le numerosissime proposte che gli autori della nuova collana di manuali hanno dovuto scartare per mancanza di spazio.

Si finisce festosamente, con una breve relazione sulla Festa della matematica, tenutasi a Castel San Pietro Terme il 23 settembre scorso… con tanto di servizio fotografico.

I. Varia

1. Lagrange e la soluzione delle equazioni di quarto grado

Silvio Maracchia

The theory of the symmetrical functions has developed a decisive role in the clarification of the risolubilità or less than equations of every type, complete or no. In the article the example of Lagrange introduces him for the resolution of the equations of 4° degree and, mainly, as its general indication was taken back, opportunely modified, from Évariste Galois to face and to resolve the secular problem.

1. Considerazioni preliminari

Dall'esame della risolubilità delle equazioni di terzo e quarto grado e successivamente da quella di equazioni di grado *n* qualsiasi, Lagrange trasse la convinzione che sarebbe stato necessario determinare un'espressione *r* delle radici dell'equazione, una funzione quindi, tale che al permutarsi di esse, assumesse un numero di valori formali minori del numero n! delle permutazioni.

L'espressione non avrebbe dovuto essere simmetrica nelle radici, altrimenti essa sarebbe stata esprimibile mediante le «somme semplici» di esse
$(x_1+x_2+x_3+ \ldots +x_n;\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n;\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n;\ x_1x_2\ldots x_n)$
a loro volta esprimibili con i coefficienti dell'equazione tramite le cosiddette formule di Viète-Girard[1]. In questo caso, però, l'espressione *r* non avrebbe potuto dire nulla di più di queste formule, già note, da cui sarebbe stata dipendenti e che, per la risoluzione del sistema da esse determinato, avrebbe ricondotto alla stessa equazione da risolvere![2]

Come esemplificazione del suo risultato, Lagrange indica come sarebbe possibile risolvere un'equazione generica di quarto grado considerando l'espressione:

$$r = x_1x_2 + x_3x_4 \quad [3] \qquad (1)$$

---

1. Nel caso di un'equazione di secondo grado $x^2 + mx + n = 0$ (considerare il coefficiente di grado massimo uguale ad uno non lede la generalità di questo procedimento, né di quelli successivi, ma consente solo di avere formule più semplici) le formule di Viète-Girard sono: $x_1+ x_2 = -m$; $x_1x_2 = n$. In generale, per un'equazione $x_n + mx^{n-1} + nx^{n-2} + + q = 0$ esse sono: $x_1+x_2+x_3+ \ldots x_n = -m$; $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n = n$; … ; $x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n q$.
2. Nel semplice caso delle equazioni di 2° grado, dal sistema $x_1 + x_2 = -m$; $x_1x_2 = n$, si ottiene infatti $x_2 = -m -x_1$ dalla prima equazione e sostituendo nella seconda, $x_1^2 + mx_1 + n = 0$.
3. Cfr. *Réflections sur la resolution algébrique des equations* in *Œuvres de Lagrange*, T.III, Paris, Gauthier-Villars, 1869, pp. 263 sgg.

che non è evidentemente simmetrica dato che essa muta, ad esempio, formalmente con la sostituzione

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

che porta alla espressione formalmente diversa:
$r^* = x_1x_3+x_4x_2$

(mentre non muterebbe operando la sostituzione che dalla permutazione fondamentale 1, 2, 3, 4 porta a quella 2, 1, 3, 4).

Ebbene, operando tutte le 4! sostituzione degli indici ottenute con le 4! permutazioni possibili si può notare che la *r* assume *solo tre valori diversi*

$$y_1 = x_1x_2 + x_3x_4; \tag{2}$$
$$y_2 = x_1x_3 + x_2x_4; \tag{3}$$
$$y_3 = x_1x_4 + x_2x_3. \tag{4}$$

Per risolvere l'equazione data, si scrive, secondo il metodo di Lagrange, quella che ha tali valori come radici:

$$(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3) = 0. \tag{5}$$

I coefficienti di questa equazione rimangono invariati al permutarsi delle x_1, x_2, x_3, x_4 [4] sono cioè simmetrici rispetto a tali radici e si possono pertanto esprimere mediante i coefficienti dell'equazione data,

Risolta l'equazione di terzo grado (5) e trovate quindi le y_1, y_2, y_3, espresse con tali coefficienti, si possono in questo modo ottenere con le (2), (3), (4), ulteriori informazioni sulle x_1, x_2, x_3, x_4 (oltre quelle già note con le formule di Viète-Girard) e risolvere così la nostra equazione.

2. Un semplice esempio

Prima di affrontare in generale la risoluzione dell'equazione generica di quarto grado, vediamo come esempio l'equazione particolare che abbia come radici i valori 1, 2, 3, 4, e cioè:

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0. \tag{6}$$

le cui formule di Viète-Girard sono:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \tag{7}$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2 x_4 + x_3x_4 = 35 \tag{8}$$
$$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+ x_1x_3x_4+ x_2x_3x_4 = 50 \tag{9}$$
$$x_1x_2x_3x_4 = 24 \tag{10}$$

4. Ad esempio, con la permutazione 4, 1, 2, 3 operata sugli indici delle formule (2), y_1 si trasforma in y_3; y_2 rimane invariata e y_3 si trasforma in y_1 e la (3) rimane invariata.

Dovremmo ora calcolare i tre valori y_1, y_2, y_3 dell'equazione (5) i cui coefficienti sappiamo potersi esprimere con i coefficienti dell'equazione data (6)[5] e servircene per calcolare le radici di quest'ultima. Vedremo questo in generale ma in questo esempio, sapendo già le radici della (6) otteniamo, saltando il procedimento indicato:

$$y_1 = x_1x_2 + x_3x_4 = 14 \quad (11)$$
$$y_2 = x_1x_3 + x_2x_4 = 11 \quad (12)$$
$$y_3 = x_1x_4 + x_2x_3 = 10 \quad (13)$$

Possiamo adesso trovare le radici della (6). Ad esempio la (11) e la (10) si possono pensare costituire un sistema «somma e prodotto» delle due incognite: x_1x_2 e x_3x_4 ottenendo così:

$$x_1x_2 = 2 \quad (14)$$
$$x_3x_4 = 126 \quad (15)$$

Analogamente dalle (12) e (10) si ottiene:

$$x_1x_3 = 3 \quad (16)$$
$$x_2x_4 = 8 \quad (17)$$

e dalle (12) e (10):

$$x_1x_4 = 4 \quad (18)$$
$$x_2x_3 = 6. \quad (19)$$

Ebbene, dividendo membro a membro le (14) e (16) si ha:

$x_2 / x_3 = 2/3$

e questa moltiplicandola membro a membro con la (19) dà:

$x_2^2 = 4$ da cui $x_2 = 2$[7]

Senza proseguire oltre si troverebbero per le altre radici della (6) i valori già noti.

3. Risoluzione dell'equazione di quarto grado

Affrontiamo ora la soluzione dell'equazione di quarto grado

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0 \quad (6')$$

riportandola a quella di terzo di più facile soluzione[8].

5. L'equazione (5) risulterebbe $y^3 - 35y^2 + 404y - 1540 = 0$; la ritroveremo dal caso generale che si vedrà tra poco.
6. Si ha naturalmente anche la soluzione simmetrica $x_1x_2 = 12$ e $x_3x_4 = 2$ (e questo anche per le soluzioni degli analoghi sistemi che vedremo di seguito) ma non si varierebbe il risultato finale.
7. Abbiamo preso solo il valore positivo poiché l'equazione (6) non può avere radici negative che renderebbero tutti i termini del primo membro positivi.
8. Lagrange, applicando il metodo risolutivo di Ludovico Ferrari, scrive anche la formula risolutiva delle equazioni di quarto grado (cfr. S. Maracchia, *Storia dell'Algebra*, Liguori, Napoli, 2005, pp. 424 sgg.) ma noi, nella presente nota, seguiamo la particolare indicazione mostrata nei paragrafi precedenti.

In questo caso, le formule di Viète-Girard sono:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -m$ (7’)

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = n$ (8’)

$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -p$ (9’)

$x_1x_2x_3x_4 = q$ (10’)

I tre valori y_1, y_2, y_3 diversi dell’espressione

$r = x_1x_2 + x_3x_4$ (1)

indicati dalle (11), (12), (13), sono le radici dell’equazione (5) che possiamo scrivere nella forma:

$y^3 + ay^2 + by + c = 0.$ (5’)

Com’è noto, il legame tra le tre radici di questa equazione e i suoi coefficienti sono dati dalle formule di Viète-Girard:

$-a = y_1 + y_2 + y_3$

$b = y_1y_2, + y_1y_3 + y_2y_3$

$-c = y_1\, y_2\, y_3$

Come abbiamo già detto, poiché al permutarsi delle radici x_1, x_2, x_3, x_4 (ad esempio mediante le 4! sostituzioni sui loro indici) le espressioni y_1, y_2, y_3 mutano tra loro ma l’equazione (5’) rimane invariata, i coefficienti *a, b, c* di essa sono simmetrici rispetto a tali radici e *devono potersi esprimere mediante i coefficienti dell’equazione (6’) data.* Infatti:

$-a = y_1+ y_2+ y_3 = (x_1x_2 + x_3x_4) + (x_1x_3 + x_2x_4) + (x_1x_4 + x_2x_3) = n$ [9]

$b = y_1y_2+ y_1y_3 + y_2y_3 = (x_1x_2 + x_3x_4) (x_1x_3 + x_2x_4) + (x_1x_2 + x_3x_4) (x_1x_4 + x_2x_3) + (x_1x_3 + x_2x_4) (x_1x_4 + x_2x_3) = x_1^2x_2x_3 + x_1x_2^2 x_4 + x_1x_3^2 x_4 + x_2x_3x_4^2 + x_1^2x_2x_4 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_3x_4^2 + x_2x_3^2x_4 + x_1^2x_3x_4 + x_1x_2x_3^2 + x_1x_2x_4^2 + x_2^2x_3x_4 = x_1x_2x_3 (x_1 + x_2 + x_3 \mathbf{+ x_4}) \mathbf{- x_1x_2x_3x_4} + x_1x_2x_4 (x_2 + x_1 + x_4 \mathbf{+ x_3}) \mathbf{- x_1x_2x_3x_4} + x_1x_3x_4 (x_3 + x_4 + x_1 \mathbf{+ x_2}) \mathbf{- x_1x_2x_3x_4} + x_2x_3x_4 (x_4 + x_3 + x_2 \mathbf{+ x_1}) \mathbf{- x_1x_2x_3x_4}$ [10] $= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) (x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) -4\, x_1x_2x_3x_4 = mp – 4q.$

$-c = (x_1x_2 + x_3x_4) (x_1x_3 + x_2x_4) (x_1x_4 + x_2x_3) = qm^2 + p^2 – 4nq$ [11]

Sostituendo i valori trovati nella (5’) si ha la cubica risolvente.

$y^3 – ny^2 + (mp – 4q)y -qm^2 - p^2 + 4nq = 0$ [12] (5”)

9. Dalla (8’).
10. Sono stati opportunamente aggiunti e tolti alcuni termini indicati in grassetto.
11. Questo calcolo è più elaborato anche se non presenta alcuna difficoltà; bisogna tener conto, ad esempio che $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 – 2(x_1x_2 + x_1x_3+ x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)$ ecc.
12. Sostituendo al posto di m, n, p, q i corrispondenti valori della (6) si ottiene la sua cubica risolvente $y^3 - 35y^2 + 404y – 1540 = 0$ le cui radici sono appunto i valori (11), (12) e (13) e cioè 14, 11 e 10. Tali radici si potrebbero determinare risolvendo l’equazione con la cosiddetta «formula di Cardano» che però porterebbe a radicali del tipo $\sqrt[3]{25515 \pm i\,13122\sqrt{3}}$ che, a prescindere dalla teoria dei numeri complessi, si potrebbe tentare di portarli alla forma $a \pm ib$ con il metodo di Bombelli per cui rinviamo alla nostra *Storia dell’Algebra*, (Liguori, Napoli, 2004, pp. 291 sgg.).

4. Una conseguenza importante

Lagrange affronta anche le equazioni di grado *n* qualsiasi e, seguendo quanto noi abbiamo già visto, cerca di determinare un'espressione *r* delle sue radici x_1, x_2, … x_n che assuma n! valori y_1, y_2, … $y_{n!}$ questa volta diversi con le n! sostituzioni da operare su esse per poi ridurre, con procedimenti assai eleganti il numero dei valori diversi in modo da ricadere nella teoria che abbiamo visto per le equazioni di quarto grado. Egli così passa dall'equazione ausiliaria $(y-y_1)(y-y_2)\ \dots\ (y-y^{n!}) = 0$ ad altre di grado minore[13].

Con la funzione *r* considerata, dopo aver osservato che essa assume solo tre valori diversi con le 24 sostituzioni, si può determinare quali sono le altre sette da associare a tre diverse in modo da strutturarle tutte in tre insiemi di otto sostituzioni.

$$
\begin{array}{ccc}
y_1 & y_2 & y_3 \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}
\end{array}
$$

13. Lagrange usò la funzione $r = x_1 + ax_2 + bx_3 + \dots + gx_{n!}$ con 1, a, b, .. g radici n-sime dell'unità. Egli riuscì ad abbassarne il grado dell'equazione ausiliaria sino ad (n-2)! e quindi per gradi maggiori di quattro il grado di tale equazione risultava superiore a quella di partenza. Il procedimento di Lagrange rimase così interrotto ma rimaneva sempre la possibilità della ricerca di una nuova funzione *r* maggiormente efficace.

Questi tre insiemi sono «identici»[14] poiché se si considera, ad esempio, il secondo sottogruppo e si prende la permutazione 1, 3, 4, 2 come fondamentale pensata come I, II, III, IV, allora le varie sostituzioni del gruppo diventano quelle stesse del primo[15].

Segue, inoltre, che in una eventuale equazione avente per radici tutti i valori y_1^*, y_2^* .. $y_{4!}^*$ ottenuti dalle 24 permutazioni:

$$(y - y_1^*)(y - y_2^*) \dots (y - y_{4!}) = 0$$

si ottiene, avendosi solo tre valori diversi:

$$(y - y_1)^8(y - y_2)^8(y - y_3)^8 = 0.$$

L'equazione in questo caso si è spezzata in tre componenti, ciascuno relativo agli otto valori uguali della funzione *r* corrispondenti ai tre sottogruppi che abbiamo chiamato «identici» ma che lasciano intravedere quel concetto, non ancora espresso, di sottogruppo, di laterale e successivamente di «sottogruppo normale massimale»…

Ma allora perché non *invertire il procedimento?* Perché non esaminare quando un gruppo di sostituzioni può spezzarsi in sottogruppi di questo tipo e da questa circostanza indagare sull'equazione legata a tale gruppo?

Da qui, pensiamo, l'idea che folgorò il genio di Galois che oltre tutto pose come esempio del suo metodo proprio l'analisi delle equazioni di quarto grado anche se parte dalla funzione generale $r = x_1 + ax_2 + bx_3 + \dots + gx_n$ di Lagrange e non da quella $r = x_1x_2 + x_3x_4$ posta però da quest'ultimo come semplice indicazione.

Si tratta, ben inteso, di una ipotesi che presentiamo soltanto come tale.

14. Abbiamo usato volutamente un vocaboli generici e poco scientifici per mostrare uno sviluppo appena iniziato, senza cioè una formalizzazione ormai acquisita. In verità l'insieme delle 24 sostituzioni costituisce un gruppo «totale»; le otto sostituzioni della prima colonna sono un suo «sottogruppo» e le sostituzioni della seconda e terza colonna, facendo riferimento, ad esempio, alle rispettive prime sostituzioni, sono suoi «laterali». Considerando, poi, queste prime sostituzioni come derivate da permutazioni principali, anche queste ulteriori sostituzioni costituiscono altrettanti sottogruppi, come viene indicato nel testo in relazione al secondo gruppo.

15. Ad esempio, la prima è la sostituzione identica, la seconda (dalla 1, 3, 4, 2 alla 1, 3, 2, 4 diventa dalla I, II, III, IV alla I, II, IV, III e così via.

2. I frattali di Mandelbrot?

Mauro Cerasoli[1]

Il 17 gennaio 2006 è stata pubblicata su *La Repubblica* l'intervista di Piergiorgio Odifreddi a Benoit Mandelbrot dal titolo *Quando scoprii i frattali*. Prima di arrivare ai frattali si parla un po' di Benoit e delle sue esperienze come insegnante. Vale la pena di citare un suo ricordo del Caltech, il più noto Politecnico della California, a proposito di uno studente, famoso pilota, che, dopo aver preso un brutto voto, affermò di essere venuto lì non per imparare a fare dimostrazioni eleganti, bensì per risolvere problemi pratici che gli dovevano servire sul lavoro.

Poco dopo il giornalista chiede: *ha mai conosciuto di persona Julia?* Certo, risponde Benoit, affermando di aver studiato «l'articolo miracoloso che quell'uomo deprecabile aveva scritto negli anni venti, e che nessuno era riuscito a sviluppare per trent'anni». L'articolo in questione di Gaston Jiulia (1893-1978) è *Mémoires sur l'iteration des fonctions rationelles,* Jour. de Math. Pure et Appl. (1918) pp. 47-245. In esso, Gaston riprendeva un'idea di Arthur Cayley, pubblicata il 3 marzo 1879 sull'American Journal of Mathematics, nella breve nota *The Newton-Fourier imaginary problem*. Nell'articolo Cayley definiva per la prima volta un frattale ma affermava l'impossibilità di visualizzarlo. Si veda in proposito il mio l'articolo *Dall'algoritmo babilonese al frattale di Mandelbrot: una pinacoteca infinita*, pubblicato su questa rivista nel 2001 e reperibile anche sul sito www.xoomer.virgilio.it/maurocer. Perché era impossibile vederlo? E questa è la domanda che pone l'intervistatore subito dopo: *che cosa mancava, per farlo: la potenza dei computer?* La risposta giusta sembra essere ovviamente: sì, visto che Benoit lavorava alla IBM quando «scoprì» il suo frattale. Invece egli dice: «Assolutamente no: era un fallimento del pensiero, non del calcolo! Non si sapeva che domande farsi, con o senza il computer. Mancava la visione: sia in senso geometrico, che in senso metaforico».

Replica il giornalista: «*Lei ce l'aveva, invece, e grazie al suo lavoro oggi i frattali sono diventati uno strumento comune della matematica*».

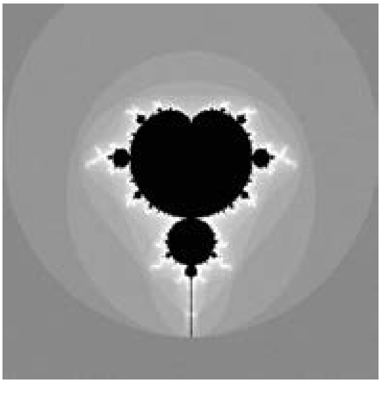
Saremmo curiosi di sapere «quale visione avesse Mandelbrot». Noi siamo convinti che Benoit aveva, come Galileo il cannocchiale, lo strumento necessario

1. Indirizzo e-mail dell'autore: mauro.cerasoli@alice.it.

per vedere i frattali e che non avevano Cayley, Julia e Fatou: poteva usare i super computer della IBM. Infatti i Bourbakisti, a proposito dei lavori di Benoit che aveva lasciato Parigi per gli States, affermavano che«qualsiasi cosa fosse Mandelbrot, non era uno di loro». Per loro, lavorare al computer, non era «fare matematica», così come credono oggi ancora molti matematici benpensanti.

La falsità dell'affermazione di Mandelbrot si può trovare nel mio articolo citato sopra dove viene sviluppata passo passo la definizione che, mediante il teorema di dicotomia di Julia e Pierre Fatou, porta al *frattale di Mandelbrot*. Così chiamato in suo onore per averlo *visualizzato con il computer*, non per averlo *definito* e quindi *inventato o scoperto* che dir si voglia. Mandelbrot è l'ostetrica dei frattali, non il padre. Cayley aveva definito esattamente il suo frattale, quindi concepito, così come si può definire una circonferenza, ma gli mancava il compasso, cioè il computer, per disegnarlo, per vederlo. Eccolo:

Allo stesso modo, Julia e Fatou avevano definito il frattale detto oggi impropriamente, per me, di Mandelbrot. Esso fu ottenuto per la prima volta nel 1979 da Mandelbrot che lavorava nei laboratori dell'IBM e che disponeva dei migliori computer dell'epoca. Infatti Mandelbrot, nel 1977 aveva già pubblicato *Fractals-Form, Chance, and Dimension* che lo aveva reso famoso per quelle strane figure tutte fatte di pezzettini spigolosi. In quel volume non appaiono i nomi di Cayley, Julia e Fatou. Nel 1980 però, Mandelbrot pubblicava *Fractals aspects of the iteration* $z \rightarrow \lambda z(1-z)$ *for complex* λ *and z*, Annals NY Acad. Sciences 357(1980) 249-259, e vi riporta il suo frattale.



1. Ricerca sulle convinzioni di allievi di scuola dell'infanzia, elementare e media su cosa si intende con la parola «problema»

Fabrizio Capeder[1]

This article presents a research on the study of the pupils' convictions concerning the word "problem". Carried out with children attending kindergarten, elementary and secondary schools, this research especially tries to define the evolution of the conceptual models fabricated during the compulsory school years. The aim of our enquiry is to provide possible didactic manners in order to be able to adopt a more general definition of the word «problem». This definition should enable the pupils to identify the real problematic situations and to stimulate the development of effective solution procedures.

1. Introduzione

La ricerca in oggetto si propone di studiare le convinzioni espresse dagli allievi della scuola dell'infanzia, elementare e media su che cosa si intende con la parola «problema». Con questa indagine si vuole quindi esplorare un ambito di ricerca attualmente molto studiato: i fattori che influenzano i processi risolutivi legati all'attività di risoluzione di problemi matematici scolastici. Si tratta di una ricerca che ha visto soltanto recentemente aggiungersi i fattori affettivi, metacognitivi, le convinzioni e le condizioni socioculturali ai fattori esclusivamente cognitivi come chiavi interpretative supplementari del fenomeno [Lester 1987]. Nelle attività di *problem solving* il modello personale di problema svolge difatti un ruolo importante poiché, essendo una convinzione, guida i processi risolutivi e può inibire a priori *«le possibilità di utilizzare conoscenze e abilità, seppur disponibili»* [Poli, Zan 1996a].

Il contributo che questo studio vuole offrire è di tipo qualitativo ed è legato al territorio sul quale sono stati raccolti i dati. In particolare, si è cercato di individuare e descrivere come evolve la concezione di problema all'interno della scuola obbligatoria per verificare quali sono i modelli concettuali di problemi presso gli allievi e se, e come, questi variano nei diversi livelli scolastici. Il fine educativo di questo lavoro sfocia così nella formulazione di ipotesi circa gli eventuali spazi d'azione della didattica della matematica capaci di rendere il concetto di problema più flessibile e tale da favorire un'effettiva assunzione della situazione problematica da parte degli allievi in fase di risoluzione.

1. Docente di scuola elementare, diplomato all'Alta Scuola Pedagogica di Locarno. L'articolo è una sintesi del suo lavoro di diploma diretto dalla prof.ssa Silvia Sbaragli.

1. Quadro teorico di riferimento

Per questa ricerca abbiamo fatto riferimento agli studi scientifici relativi all'implicazione delle convinzioni nell'attività di risoluzione di problemi. Questo indirizzo di studi relativo alle convinzioni, sempre più riconosciuto all'interno della ricerca educazionale, muove dalla constatazione che le prestazioni degli allievi non dipendono solo da fattori cognitivi legati ai contenuti della disciplina, ma anche da fattori affettivi/emozionali. Secondo molti Autori, difatti, questi fattori affettivi *«giocano un ruolo centrale nella vita di classe, condizionando il comportamento di insegnanti e studenti»* [Furinghetti 2001]. A questo proposito, Schoenfeld [1983, 330] scrive che

> un comportamento «puramente cognitivo» è estremamente raro e ciò che spesso è preso per pura cognizione è in realtà formato, se non distorto, da una varietà di fattori. [...] La tesi avanzata qui è che i comportamenti cognitivi che usualmente studiamo in maniera sperimentale si situano e sono forgiati da una vasta matrice sociocognitiva e metacognitiva. Cioè, le azioni tangibili cognitive prodotte dai nostri soggetti sperimentali sono spesso il risultato di consce o inconsce convinzioni su (a) il compito in oggetto, (b) l'ambiente sociale entro il quale il compito si situa e (c) la percezione individuale del *problem solver* di sé e la sua relazione con il compito e l'ambiente.

La tematica sviluppata in questo articolo verterà in particolare sul punto (a) citato da Schoenfeld nel passaggio citato sopra. A questo proposito si rivela dunque innanzitutto necessario esplicitare la terminologia di riferimento distinguendo l'*esercizio* dal *problema*, essendo quest'ultimo il nostro «compito in oggetto».

In D'Amore [1999a, 284] viene proposto un tentativo di descrizione (o precisazione) di tali termini.

- Si ha un esercizio quando la risoluzione prevede che si debbano utilizzare regole e procedure già apprese, anche se in corso di consolidamento. Gli esercizi dunque rientrano nella categoria delle prove a scopo di verifica immediata o di rafforzamento.
- Si ha invece un problema quando una o più regole o una o più procedure non sono ancora bagaglio cognitivo del risolutore; alcune di esse potrebbero essere proprio in quell'occasione in via di esplicitazione; a volte è la successione stessa delle operazioni risolventi a richiedere un atto creativo da parte del risolutore.

A questi termini se ne accosta un terzo, importante in questo ambito, chiamato *situazione problema* e descritto da D'Amore [2003, 4] come:

> sistema delle competenze reali nelle quali si può immaginare quanto descritto da un testo e dal suo significato (semantica) all'interno delle esperienze del singolo bambino (il sistema è specifico per quel dato problema).

Una situazione effettivamente problematica recupererebbe quindi aspetti semantici, pragmatici ed esperenziali per rispondere a una domanda che scaturisce «come naturale esplicitazione dell'obiettivo relativo a tale situazione» [Zan 1991-1992]. Come osserva D'Amore [2003, 5]: «Non c'è problema se non c'è una situazione problematica che crea una domanda, rispondere alla quale sia per qualche motivo causa di difficoltà».

Per poter indagare in modo approfondito i modelli concettuali di problemi, oltre ai termini precedentemente definiti si rivela fondamentale distinguere le *convinzioni* dalle *concezioni*. A questo riguardo D'Amore e Fandiño Pinilla [2004, 27-50] propongono le seguenti interpretazioni, *«peraltro sempre più diffuse e condivise»*:

- *convinzione* (belief) (o credenza): opinione, insieme di giudizi/attese, quel che si pensa a proposito di qualcosa;
- l'insieme delle convinzioni di qualcuno (A) su qualcosa (T) dà la *concezione* (K) di A relativamente a T; se A appartiene ad un gruppo sociale (S) e condivide con gli altri appartenenti ad S quell'insieme di convinzioni relativamente a T, allora K è la concezione di S relativamente a T[2].

Le convinzioni si organizzano perlopiù in strutture relativamente stabili chiamate *sistemi di convinzioni* [Zan 1995; 1998a]. Questi presentano tre caratteristiche studiate da Green [1971] che influenzano notevolmente l'apprendimento della matematica.

- Ci sono convinzioni primarie e convinzioni derivate. Ad esempio un insegnante può ritenere che «è importante presentare la matematica in modo chiaro» (convinzione primaria) e per questo ritiene importante: a] preparare bene le lezioni in modo da offrire una presentazione chiara e sequenziale; b] essere pronto ad eventuali domande degli studenti; (convinzioni derivate).
- Le convinzioni non hanno tutte la stessa «forza» psicologica. In questo senso si possono distinguere convinzioni centrali (quelle più consolidate) e periferiche (più soggette a cambiamento).
- Infine le convinzioni sono strutturate in settori relativamente isolati: questo isolamento fa sì che un soggetto possa avere contemporaneamente convinzioni apparentemente contraddittorie.

La ricerca specifica sulle concezioni degli allievi della scuola elementare su che cosa s'intende con la parola «problema», trattata in modo approfondito da Zan [1991-1992], pur rilevando che «moltissimi allievi dichiarano che lo scopo per cui viene dato da risolvere un problema da parte dell'insegnante è quello di vedere se [...] sanno *ragionare*», ha però constatato un certo «appiattimento del problema verso esercizi di routine» all'interno della pratica didattica, concludendo che «il problema è identificato [dagli allievi] con la sua risoluzione» [D'Amore 1999a, 105]. Ciò che stereotipizza il problema matematico di natura scolastica – precisa l'Autore precedentemente citato – è quindi l'operazione necessaria per risolverlo più alcuni elementi strutturali (una situazione, alcuni dati numerici che caratterizzano la situazione) e alcuni elementi variabili (il tipo di situazione, i protagonisti, gli oggetti). Risulta quindi evidente come gli allievi individuino due categorie di problemi distinti e indipendenti: quello concreto, reale, legato alle esperienze di vita extra-scolastica e il problema matematico standard. Sanno che quando si dice problema a scuola durante le lezioni di matematica non ci si riferisce a problemi reali, ma a qualcosa di «artificioso, prefabbricato, con caratteristiche già tutte codificate» [D'Amore 1999a, 104]. Un lungo studio condotto da Zan [1991-1992] sembra difatti confermare come gli allievi elaborino, attraverso l'esperienza scolastica, «un modello di problema matematico scolastico fortemente dissociato da quello di problema reale, che costruiscono prima e indipendentemente da tale esperienza». Una differenza fondamentale tra i due tipi di problemi risiede nel fatto che quello reale è caratterizzato da un contesto che corrisponde a una situazione problematica dalla quale la domanda esce in modo naturale, mentre quello scolastico standard è caratterizzato da una o più domande possibili che utilizzano tutti i dati contenuti nel testo facendo uso prevalente degli strumenti matematici. Fischbein e Zan [1989] hanno evi-

2. Spesso, in luogo di «concezione di A relativamente a T» si parla di «immagine che A ha di T».

denziato così come il problema scolastico espresso in forma verbale risenta di alcuni stereotipi molto lontani dalle caratteristiche del problema reale; li elenchiamo di seguito:

- il campo di conoscenze in cui cercare la soluzione è esplicitamente definito a priori;
- sicuramente si dovranno utilizzare conoscenze scolastiche acquisite precedentemente in tal campo;
- bisogna utilizzare tutti i dati e non mancano dati essenziali;
- la soluzione esiste ed è unica.

Il fatto che i problemi siano visti attraverso questi stereotipi come «rituale scolastico» [Nesher 1980] è dovuto all'incontro dei due fattori che permettono l'apprendimento: il primo è legato alle capacità iniziali dell'allievo e il secondo alle condizioni di apprendimento con le quali è confrontato. In D'Amore [2003, 41] si distinguono così le *capacità* (o *competenze*) *interne* dalle *condizioni esterne*. Le *capacità interne* «sono quelle che permettono *performance* e *problem solving* autonomo», mentre le *condizioni esterne* corrispondono alle attività specifiche definite dalla situazione di apprendimento. Queste condizioni esterne coincidono *«troppo spesso, nella pratica didattica tradizionale»* con esercizi di classificazione di problemi piuttosto che con attività di risoluzione: fatto che tende a compromettere la coppia dinamica motivazione/volizione[3] nell'allievo, la quale permette, se opportunamente indotta dall'insegnante (motivazione) e colta dall'allievo (volizione), di assicurare l'implicazione attiva di quest'ultimo nell'attività di *problem solving*. Un aspetto importante del processo di risoluzione è dunque la motivazione, che può essere inserita come componente nel complesso meccanismo che opera all'interno dell'allievo impegnato in questa attività. Lester [1987] evidenzia a questo riguardo cinque grandi categorie interdipendenti di parametri che influiscono sull'attività di risoluzione dei problemi:

- conoscenza (comprende i «mezzi» a disposizione quali definizioni, algoritmi, euristiche, ecc., ma anche il modo in cui un soggetto organizza, rappresenta e quindi utilizza la propria conoscenza);
- controllo (comprende decisioni esecutive riguardanti la pianificazione, la valutazione, il controllo e la regolazione della conoscenza);
- fattori affettivi;
- convinzioni (il modo in cui un soggetto vede la matematica);
- condizioni socioculturali.

D'Amore [2003, 7-8], invece, propone una modellizzazione di *«strategia di risoluzione di un problema»*[4] con la seguente serie di passaggi:

- esplorazione delle regole (norme, esperienze, ...) già note e già applicate;
- scarto di ciascuna;
- analisi della situazione da più punti di vista;
- costruzione di una regola comportamentale nuova, ottenuta «dosando» in modo opportuno regole (norme, esperienze, ...) vincenti già utilizzate in precedenza;
- verifica della risolubilità del problema con tale regola nuova.

3. «Mentre la motivazione è vista come un processo che passa dall'insegnante all'allievo, la volizione è vista più come un un processo di convinzioni "interne", in base al quale l'allievo, motivato dal compito, decide di impegnarvisi» [D'Amore 2003, 57].
4. In D'Amore [1999a, 184] l'Autore propone una schematizzazione più completa.

L'Autore precisa però, nel testo sopraccitato, che «per quanto l'applicazione di regole [...] sia importante, è bene notare che il processo risolutivo genera [...] un nuovo *apprendimento*». La risoluzione di problemi provoca dunque un effetto che corrisponde a un pensiero; si parla di *problem solving* produttivo. Secondo Gagné [1971]: «Il *problem solving*, come metodo di apprendimento, richiede che il soggetto scopra la regola di ordine superiore senza un aiuto specifico. Presumibilmente egli così costruisce una nuova regola in un suo modo particolare e può anche non essere in grado di verbalizzarla dopo averlo fatto». Secondo alcuni studiosi non c'è «apprendimento più elevato e sublime. L'azione di risolvere un problema è un apprendimento veramente significativo» [D'Amore 2003, 13].

Il fatto che l'apprendimento, mediante il processo di *problem solving*, conduca a nuove capacità di ulteriore pensiero ci permette di fare riferimento anche al suo prodotto. Di seguito specifichiamo dunque una forma di organizzazione con la quale la mente strutturerebbe le informazioni di cui dispone: i *modelli mentali*. Kosslyn [1980] suggerisce l'idea di immagine mentale come «una forma di attivazione e utilizzazione di strutture di dati a disposizione dell'individuo». D'Amore [1999a, 151] evidenzia che «l'insieme delle *immagini mentali* elaborate (più o meno consciamente) e tutte relative a uno stesso concetto costituisce il modello mentale del concetto stesso». Vi sono però modelli interni e modelli esterni. I modelli interni sono assolutamente personali e commentabili a se stessi solamente per mezzo di una «lingua interna priva di regole lessicali» [Duval 1996-1997a], mentre «se lo studente intende [...] comunicare all'esterno il proprio modello mentale relativo ad un concetto, allora è costretto a "tradurlo" in qualche cosa di "esterno" [quale che sia il linguaggio nel quale comunicherà il risultato: verbale (orale o scritto), non verbale (grafico, iconico, figurale, mimico, gestuale, ...)]» [D'Amore 1999a, 155-156]. Questo è un argomento di grande interesse per la ricerca in didattica della matematica. Tutti gli scambi linguistici relativi al sapere matematico attuati in aula avvengono difatti attraverso modelli esterni, spesso anche falsati dal desiderio di renderli vicini a quelle che l'allievo ritiene essere le attese dell'insegnante o del ricercatore, a causa di alcune clausole del contratto didattico[5] o del contratto sperimentale[6].

Il modello mentale può essere più o meno generalizzato e corrisponde alla propria convinzione (o credenza) relativa al concetto. Come segnala Zan [1995; 1998a], situandoci all'interno della teoria costruttivista e considerando dunque il soggetto in apprendimento come individuo attivo che «interpreta la realtà, che mette in re-

5. Il *contratto didattico* potrebbe essere sinteticamente definito come «le abitudini (specifiche) del maestro attese dall'allievo ed i comportamenti dell'allievo attesi dal docente» [Brousseau 1980a, 127]. Le aspettative e le regole implicite ed esplicite che si creano all'interno della classe influenzano dunque in modo evidente l'espressione degli allievi; «soprattutto le clausole del contratto organizzano i rapporti che allievi ed insegnante intrattengono con il sapere» [Chevallard 1988b].
6. Per Schubauer-Leoni e Ntamakiliro [1994] il *contratto sperimentale* differisce essenzialmente da quello didattico nelle intenzioni e nelle finalità tacite attribuite alla situazione da parte dello sperimentatore. «[L'allievo] avrebbe la tendenza a ricondurre il significato alle regole del contratto didattico del quale ha un'esperienza nel quotidiano e ciò anche se l'adulto che ha di fronte ha precedentemente costruito il suo domandare come rilevante in un contratto sperimentale». Il contratto sperimentale viene definito dunque dai due Autori come «l'insieme dei significati attribuiti dall'allievo e dallo sperimentatore in funzione dei contratti ai quali ciascuno si riferisce tacitamente».

lazione i fatti osservati con le esperienze precedenti e che costruisce schemi interpretativi alla luce dei quali anticipa le esperienze future», si possono considerare queste convinzioni come «il frutto di questo continuo processo di interpretazione», cioè un collegamento tra aspetti cognitivi, metacognitivi e affettivi che difficilmente si possono distinguere dalla conoscenza. Un altro ricercatore le definisce come «la conoscenza soggettiva (cioè non necessariamente vera) di un individuo su di sé, sulla matematica e sull'ambiente» [Lester 1987]. Si può allora capire in termini generali come e a quali condizioni un allievo riesca a costruirsi un modello mentale di problema per poi socializzarlo all'interno dell'ambiente di classe; questa costruzione è un processo dinamico in evoluzione influenzato dall'esperienza scolastica e di vita sociale che coinvolge tutte le dimensioni legate all'individuo. Il sapere così prodotto è espresso attraverso gli strumenti linguistici in una sua interpretazione influenzata a sua volta dall'interazione dei soggetti in azione e dal contesto nel quale questi sono inseriti.

2. Domande di ricerca

D1. a. Quali sono le convinzioni personali degli allievi di scuola dell'infanzia, elementare e media su che cosa s'intende con la parola «problema»?

D2. a. Queste convinzioni variano nel passaggio dalla scuola dell'infanzia alla scuola media?

b. Se variano, in che modo e in quali termini?

D3. a. [*Solo SE e SM*] Data una sequenza di quattro problemi, le convinzioni emerse precedentemente saranno confermate dalla scelta e dalla motivazione degli allievi di quello che per loro maggiormente rispecchia il testo di un problema?

3. Ipotesi di ricerca

I1. a. Si ipotizza che gli allievi, a seconda del contesto scolastico nel quale si collocheranno, individueranno due modelli concettuali di problemi: quello scolastico standard e quello reale come se fossero due categorie distinte e indipendenti. Il problema inteso dunque come:

- una situazione da risolvere legata alla matematica scolastica, in cui l'identificazione della soluzione è determinata dalla capacità di usare gli strumenti matematici da loro conosciuti (calcolo, misura, disegno geometrico). I problemi, cioè, visti come testi costruiti dal docente in cui sono descritte situazioni contenenti dati numerici e richieste esplicite di risoluzione che fanno ricorso a determinate operazioni (algoritmi);
- una situazione da risolvere legata a un ambito di vita reale vicino al vissuto dell'allievo, la cui soluzione è determinata dall'esperienza di vita pratica e sociale.

Si ipotizza inoltre che la maggior parte degli allievi attribuisca al termine «problema» una connotazione negativa.

I2. a. Prevediamo che dall'indagine emergerà che nel passaggio dalla scuola dell'infanzia alla scuola media le convinzioni varieranno.

b. Si ipotizza che gli allievi della SI legheranno la parola «problema» piuttosto a un contesto di vita reale, mentre nel corso della SE le convinzioni muteranno e passeranno gradualmente da un contesto reale a uno scolastico standard, mettendo in evidenza anche stereotipi quali quelli formulati da Fischbein e Zan [1989].

Prevediamo inoltre che verso la fine della SM la maggior parte degli allievi si distaccherà in parte dall'idea del problema esclusivamente matematico per tornare a considerarlo come una situazione non risolta legata prevalentemente alla realtà, grazie soprattutto alla loro maggiore esperienza di vita sociale.

I3. a. [*Solo SE e SM*] Possiamo immaginare che di fronte alla richiesta di segnalare il testo che maggiormente rispecchia la loro convinzione di problema da una scelta di quattro, gli allievi indicheranno in maggioranza il problema scolastico standard indipendentemente dalle loro personali convinzioni precedentemente segnalate. Questo perché i quattro testi potrebbero a quel momento rievocare in loro l'esperienza matematica vissuta a scuola e indurre a credere che, in nome di un contratto sperimentale, la risposta attesa dai ricercatori sia proprio "questa".

4. Indagine

4.1 Metodologia e popolazione di riferimento

Per rispondere alle domande di ricerca sopra esposte è stata prevista una raccolta di dati che fa riferimento a una metodologia di tipo qualitativo. La raccolta è stata condotta in una sezione di scuola dell'infanzia, in una seconda elementare, in una quinta elementare e in una quarta media, sottoponendo gli allievi a un questionario e a un colloquio clinico individuale, come indicato nella tab. 4.1.1.

Ordine scolastico	**Classe / Livello**	**Età**	**N. allievi sottoposti:** al questionario	al colloquio
SI	3° livello	5-6	0	4
SE	2ª classe	7-8	19	4
	5ª classe	10-11	19	4
SM	4ª classe	14-15	22	4
Totale			**60**	**16**

Tab. 4.1.1

Il questionario è stato dunque somministrato complessivamente a 60 allievi, mentre il colloquio clinico individuale è stato proposto solamente a una loro parte: 12 allievi, più ulteriori 4 di scuola dell'infanzia.

La sezione e le classi che hanno collaborato al progetto non ci conoscevano prima della nostra visita, così come nessun docente titolare era stato messo al corrente dell'oggetto studiato da questa ricerca per evitare che, anche in buona fede, gli allievi venissero preparati in modo specifico a rispondere alle domande sull'argomento, compromettendo così la qualità dei dati. I docenti hanno difatti potuto esaminare il contenuto del questionario preparato per l'indagine solamente nel momento in cui è stato consegnato ai loro allievi. Oltre a ciò i docenti titolari non erano a conoscenza di quante e quali classi collaborassero alla medesima indagine, impedendo loro di informarsi al riguardo presso terzi.

Alla SE e alla SM la procedura da noi seguita all'interno delle classi è stata la medesima. Prima che gli allievi entrassero nell'aula la disposizione dei banchi era già stata modificata al fine di evitare che fossero in contatto tra di loro. Su ognuno, inoltre, erano già state poste delle separazioni per evitare qualsiasi tipo di comunicazione tra allievi. Una seconda aula vicino alla nostra, nella quale si trovava il docente titolare, era nel frattempo pronta ad accogliere gli allievi che man mano terminavano il compito, per impedire che potessero disturbare i propri compagni. Alla SI, non potendo sottoporre gli allievi ai medesimi interrogativi per mezzo del questionario, sono stati effettuati solamente alcuni colloqui clinici individuali.

Agli allievi di SE e di SM ci siamo presentati come persone che non erano legate in nessun modo all'ambito scolastico: abbiamo difatti spiegato loro che siamo ricercatori, cioè persone che cercano risposte a certe domande per aiutare altre persone a fare meglio il loro mestiere. Agli allievi è stato detto che si stava chiedendo il loro aiuto per scoprire, tramite le loro risposte, cosa pensano i bambini/ragazzi della loro età a proposito di cosa significa la parola «problema».

4.2. Questionario

Tranne che alla SI, tutti gli allievi sono stati sottoposti a un medesimo questionario, nel quale si proponeva di rispondere a sei domande finalizzate a indagare le loro convinzioni personali su cosa intendono con la parola «problema», sia dal punto di vista affettivo che cognitivo. Gli allievi ricevevano così un fascicolo di sei pagine aggraffate in alto a sinistra e stampato su carta bianca in formato A4. Questi fogli erano stampati solo a fronte; ogni foglio conteneva una sola domanda seguita da una freccia indicante il riquadro entro il quale rispondere nel caso di domande aperte o gli spazi dove porre delle crocette nel caso di domande a scelta multipla.

Presentiamo di seguito le domande del questionario.

Q1) Che cosa ti fa venire in mente la parola «problema»?

Motivazione della scelta

Questa domanda intende contribuire a rispondere al primo interrogativo di ricerca (*D1*). Si tratta di una domanda aperta che coinvolge la sfera affettiva e che è volta a indagare le immagini e le situazioni evocate dalla parola «problema».

Ipotesi di risoluzione

Zan [1991-1992] distingue a questo proposito due categorie di problemi: quello reale e quello scolastico standard. Nel primo è ricorrente l'individuazione dei significati: guaio, incidente, disgrazia. Nel testo sopra citato l'Autrice osserva in modo particolare come in questo caso «il problema appare [...] come la rottura di un equilibrio preesistente» in cui «il solutore è anche il protagonista della situazione problematica descritta». Nel secondo il problema è invece, come già indicato nel quadro teorico di questo studio, caratterizzato da una o più domande possibili che utilizzano tutti i dati contenuti nel testo facendo uso prevalente degli strumenti matematici.

Q2) Secondo te perché al problema si è dato il nome «problema»?

Motivazione della scelta

Questa seconda domanda intende contribuire a rispondere al primo interrogativo di ricerca (*D1*). Si tratta di una domanda aperta che coinvolge la sfera affettiva e che è volta a indagare le convinzioni personali sulle caratteristiche del problema.

Ipotesi di risoluzione

Le risposte date dagli allievi possono rientrare anche in questo caso all'interno dei criteri definiti dalle ipotesi di risoluzione esposte per *Q1*.

Q3) Secondo te un problema ha sempre una soluzione? Perché?

Motivazione della scelta

Questa domanda intende contribuire a rispondere al primo interrogativo di ricerca (*D1*). Si tratta di una domanda che coinvolge la sfera cognitiva e che è volta a indagare le convinzioni personali sulle caratteristiche del problema. La prima parte della domanda è chiusa: l'allievo può rispondere scrivendo «Sì» oppure «No», mentre la seconda parte è aperta ed è volta a giustificare la risposta data alla prima parte.

Ipotesi di risoluzione

La domanda si rifà in modo evidente a uno dei quattro «stereotipi del problema scolastico espresso in forma verbale» già indicato nel quadro teorico: «la soluzione esiste ed è unica» [Fischbein, Zan 1989]. Schoenfeld [1992], nella sua proposta di classificazione delle convinzioni a proposito della matematica, cita un punto a questo riguardo: «i problemi matematici hanno una sola risposta». Le risposte positive verranno pertanto ritenute significative per l'identificazione, effettuata da parte degli allievi, dei criteri caratteristici che definiscono il problema scolastico standard, mentre le risposte negative saranno considerate come indicatrici di un modello mentale di problema che tende piuttosto verso «un unico modello generale (grazie alle crescenti capacità di generalizzazione e di controllo dei propri processi cognitivi del bambino)» [Zan 1991-1992].

Q4) Hanno appena attribuito a una persona il premio
di «miglior risolutore di problemi del mondo».
Secondo te come sarà questa persona?

Motivazione della scelta

Questa domanda intende contribuire a rispondere al primo interrogativo di ricerca (*D1*). Si tratta di una domanda aperta che coinvolge la sfera affettiva e che è volta a indagare le convinzioni personali relative al secondo punto elencato da Schoenfeld [1992] nella sua proposta di classificazione delle convinzioni a proposito della matematica: «i matematici sono individui isolati che lavorano isolatamente», ciò che corrisponde, nel caso qui considerato, allo stereotipo del «buon risolutore di problemi». Furinghetti [2001] spiega in una sua nota come, nel corso di uno studio comparativo sull'immagine dei matematici e della matematica, alla richiesta di disegnare il ritratto di un matematico al lavoro, i disegni e le spiegazioni fornite da studenti di 12-13 anni abbiano corrisposto allo «stereotipo del matematico nella visione comune: stravagante, disordinato, immerso nel suo mondo di conti». Dato che con questo stimolo si portano gli allievi a identificare la Matematica in una persona, ci aspettiamo che qui emerga in modo evidente la connotazione che danno al problema: negativa o positiva.

Ipotesi di risoluzione

La formulazione di questa domanda si presta a rispondere anche con un disegno, e non solamente con un testo scritto. Sarà pertanto presa in considerazione la volontà, manifestata da parte dell'allievo attraverso la sua produzione, di rendere la descrizione (testuale o iconica) di questo individuo aderente a un modello sociale positivo, oppure a un modello caratterizzato da tratti negativi.

Q5) Per essere un buon risolutore di problemi bisogna...
(segna al massimo tre crocette)
1. ☐ ragionare;
2. ☐ avere tempo;
3. ☐ conoscere il mondo;
4. ☐ avere fortuna;
5. ☐ essere molto precisi;
6. ☐ vedere i problemi;
7. ☐ conoscere la matematica;
8. ☐ avere voglia di risolverlo;
9. ☐ vedere la soluzione al primo colpo.

Motivazione della scelta

Questa domanda intende contribuire a rispondere al primo interrogativo di ricerca (*D1*). Si tratta di una domanda a scelta multipla che coinvolge la sfera affettiva e che è volta a precisare le convinzioni personali sullo stereotipo del «buon risolutore di problemi» espresse rispondendo a *Q4*.

Ipotizziamo che le nove caratteristiche poste come possibile scelta siano considerate dagli allievi rientranti nelle seguenti tipologie: problema scolastico standard (4; 5; 7; 9) e problema reale (1; 2; 3; 6; 8). La prima caratteristica (1) potrebbe virtualmente caratterizzare entrambe le tipologie, ma qui faremo riferimento a un'ulteriore convinzione relativa alla matematica individuata da Schoenfeld [1992], secondo la quale «uno studente normale, non particolarmente portato per la matematica, deve memorizzare il più possibile le regole ed i procedimenti, non può sperare di capirla». Intenderemo perciò il ragionamento come un'attività specifica legata al problema reale. Le caratteristiche rimanenti collegate al problema reale si rifanno a criteri antitetici rispetto agli stereotipi del problema scolastico standard: possibilità di avere un lungo tempo di risoluzione a propria disposizione (2), cultura generale (3), capacità di individuare e formulare problematiche (6), avere piacere ad affrontare e risolvere situazioni problematiche (8).

Per quanto riguarda le caratteristiche collegate al problema scolastico standard, giustifichiamo qui di seguito la loro scelta facendo riferimento ad alcune convinzioni relative alla matematica individuate da tre Autori: Frank [1985], Schoenfeld [1992] e Furinghetti [1994].

4. *Avere fortuna*: «C'è un certo non so che, una tecnica magica per fare matematica; o ce l'hai o non ce l'hai» [Schoenfeld 1992].
5. *Essere molto precisi*: «Ogni cosa va espressa nel modo più esatto possibile» [Furinghetti 1994].
7. *Conoscere la matematica*: «C'è chi ha una mente matematica e chi no» [Frank 1985]. Questa caratteristica contribuisce a identificare in modo evidente il problema matematico come distinto da altre tipologie di problemi.
9. *Vedere la soluzione al primo colpo*: «Si deve sempre dare la risposta giusta nel più breve tempo possibile» [Furinghetti 1994]; «Gli studenti che hanno capito un tema di matematica sanno risolvere un problema su quel tema nei primi 5 minuti in cui lo vedono» [Schoenfeld 1992].

Ipotesi di risoluzione

Avendo la possibilità di selezionare tre caratteristiche al massimo, ipotizziamo che gli allievi tendano a selezionarle tutte all'interno dei due sottoinsiemi definiti dalle due tipologie di problema: problema scolastico standard (4; 5; 7; 9) e problema reale (1; 2; 3; 6; 8).

Q6) Leggi i seguenti testi.

A.: Un architetto guadagna 5000 franchi al mese. Quanto guadagna in dodici mesi?

B.: Il contadino di una fattoria decide di contare gli animali che possiede. Conta 12 mucche, 8 capre, 4 maiali e 12 galline.

C.: Ho forato la ruota della bicicletta. Come faccio a ripararla?

D.: Ho perso il mio gioco preferito.

Secondo te quale tra questi quattro testi rispecchia di più la tua idea di problema? Perché hai scelto proprio quello?

Motivazione della scelta

Questa domanda intende contribuire a rispondere al terzo interrogativo di ricerca (*D3*) ed è pertanto indirizzata solo agli allievi di SE e SM. Si tratta di una domanda divisa in due parti: la prima è strutturata come una domanda a scelta multipla che chiede agli allievi di scegliere quello che per loro maggiormente coincide con la loro concezione di problema da una scelta di quattro testi, mentre la seconda chiede di motivare la scelta operata precedentemente. Poli e Zan [1995] mettono in evidenza gli schemi in base ai quali un problema matematico viene riconosciuto, definendo così diverse «categorie» di soggetti:

- i *formalisti*, che riconoscono il problema da caratteristiche formali del testo, quali la presenza di numeri e di una domanda;

- gli *strutturali*, secondo i quali il problema è caratterizzato dal fatto di richiedere l'uso di strumenti matematici;
- gli *operativi*, per i quali tali strumenti matematici sono limitati alle operazioni aritmetiche;
- i *pragmatici*, che riconoscono il problema da elementi contingenti, come il fatto di essere presentato nell'ora di matematica.

Nel nostro caso ipotizziamo che i testi scelti siano considerati dagli allievi rientranti nelle seguenti tipologie: situazione scolastica standard con domanda esplicita (A); situazione scolastica standard senza domanda esplicita (B); situazione problematica reale con domanda esplicita (C); situazione problematica reale senza domanda esplicita (D).

Ipotesi di risoluzione

Come segnalato in *I3*, ipotizziamo che gli allievi indicheranno in maggioranza il problema scolastico standard con la domanda esplicita indipendentemente dalle loro personali convinzioni precedentemente segnalate. Questo perché i quattro testi potrebbero a quel momento rievocare in loro l'esperienza matematica vissuta a scuola e credere che, in nome di un contratto sperimentale, la risposta attesa dai ricercatori sia proprio questa.

4.3. Colloquio clinico individuale

La metodologia del colloquio clinico individuale è stata scelta come strumento per approfondire le risposte date da parte degli allievi di SE e di SM alle domande contenute nel questionario. I colloqui clinici individuali avvenivano in sede separata senza porre limiti di tempo; l'allievo e i ricercatori si sedevano entrambi dalla stessa parte di un tavolo e si prendevano il tempo per indagare tutto ciò che si riteneva fosse indispensabile per rileggere in profondità le risposte date al questionario. I colloqui clinici individuali sono stati tutti interamente registrati.

La metodologia del colloquio clinico è stata anche adottata per sottoporre in maniera adeguata gli allievi di SI del terzo livello ai medesimi interrogativi proposti alla SE e alla SM tramite il questionario, tranne la domanda *Q6*; pertanto i dati raccolti in quest'ordine scolastico non contribuiscono a rispondere alla terza domanda di ricerca (*D3*). Per farci conoscere a questi allievi ci siamo presentati facendo riferimento a uno sfondo motivazionale: abbiamo detto che siamo dei giornalisti che lavorano per la radio e che stiamo intervistando delle persone sul tema «problemi». Per confermare quanto detto ci siamo presentati con registratore e microfono dicendo che gli allievi intervistati, se lo avessero voluto, al termine dell'intervista avrebbero potuto riascoltare la propria voce. A una presentazione rivolta alla sezione intera sono dunque seguiti i colloqui clinici individuali con quattro allievi scelti a caso tra quelli del terzo livello. Come per la SE e la SM, anche per la SI i colloqui clinici individuali avvenivano in sede separata senza porre limiti di tempo; l'allievo e i ricercatori si sedevano dalla stessa parte di un tavolo e si prendevano il tempo per indagare tutto ciò che si riteneva fosse indispensabile per discutere i primi cinque interrogativi contenuti nel questionario. I colloqui clinici individuali sono stati tutti interamente registrati.

5. Analisi dei dati[7]

5.1. Analisi dei dati derivanti dal questionario

Dall'analisi delle risposte ottenute per mezzo del questionario emerge con evidenza come gli allievi individuino due modelli concettuali di problema: quello legato alla matematica e quello legato alla vita reale; è la «netta frattura» citata da Zan [1991-1992]. Osservando la tabella della classificazione delle convinzioni (tab. 5.1.1) si può notare inoltre come coloro che rivelano di possedere un modello concettuale legato esclusivamente alla matematica siano la minoranza, mentre la consapevolezza dell'esistenza di entrambi i tipi di convinzioni cresca nel corso della scolarità.

Classificazione delle convinzioni

Convinzioni emerse	**2ª SE**	**5ª SE**	**4ª SM**
Problema scolastico standard legato alla matematica	**6**	**2**	**3**
Problema legato alla vita reale	**12**	**10**	**7**
Entrambe le convinzioni	**0**	**7**	**12**
Incerte	**1**	**0**	**0**

Tab. 5.1.1

Un problema è dunque visto, all'interno della popolazione coinvolta nell'indagine, sia come qualcosa in cui *«Bisogna fare un calcolo a tanti numeri»* [5SE-3], sia come *«Un ostacolo qualcosa che ti impedisce di compiere qualcosa»* [4SM-20]. Queste due convinzioni sono però coordinate negli allievi che distinguono spontaneamente il problema reale da quello matematico *«Perché fa parte della vita e non si sa mai quando possa accadere come con i problemi matematici i quali ce li dà il maestro e noi siamo già pronti»* [4SM-10].

Rispondendo alla domanda *Q3*, in cui si chiedeva di indicare se un problema ha sempre una soluzione o no, gli allievi non evidenziano tendenze di rilievo: indipendentemente dalle loro convinzioni personali scelgono di argomentare in misura uguale sia le risposte affermative sia negative, ripartendosi in due insiemi molto equilibrati, come indicato nella tab. 5.1.2.

Risposte date a Q3

2ª SE		**5ª SE**		**4ª SM**	
Sì	No	Sì	No	Sì	No
7	**9**	**8**	**11**	**12**	**10**

Tab. 5.1.2

7. Nei prossimi paragrafi verranno inserite citazioni tratte dai questionari e dai protocolli dei colloqui clinici. Per indicarne gli Autori utilizzeremo dei codici, ad esempio «5SE-2», che permettono di identificare il livello scolastico e il numero progressivo attribuito al soggetto all'interno della popolazione presa in considerazione in quello specifico livello. I codici degli allievi sottoposti anche al colloquio clinico verranno indicati sempre in *corsivo*.

Le risposte date a *Q5* si rivelano invece capaci di confermare il tipo di classificazione evidenziata dalla tab. 5.1.1, grazie alla quale abbiamo potuto notare che la maggioranza degli allievi identifica il problema come legato alla vita reale. Di fronte alla possibilità di scelta di nove criteri da attribuire al «buon risolutore», emerge come i tre parametri che sono stati selezionati con maggiore frequenza appartengano tutti all'insieme delle caratteristiche rientranti a nostro parere nel problema reale. «Ragionare» è stato scelto da quasi la totalità della popolazione: 53 allievi su 60, «vedere i problemi» da 36 e «avere voglia di risolverlo» da 28, come indicato nella tab. 5.1.3.

Risposte date a Q5

N.	**Opzione**	**Totale**
1	ragionare	**53**
2	avere tempo	**20**
3	conoscere il mondo	**12**
4	avere fortuna	**3**
5	essere molto precisi	**15**
6	vedere i problemi	**36**
7	conoscere la matematica	**6**
8	avere voglia di risolverlo	**28**
9	vedere la soluzione al primo colpo	**7**

Tab. 5.1.3

5.2. Analisi dei dati derivanti dai colloqui clinici

Scuola dell'infanzia

Dai protocolli stesi a seguito dei colloqui clinici effettuati alla SI emerge innanzitutto come l'unica convinzione di problema sia strettamente legata alle loro esperienze di vita e alle interazioni avute con gli adulti più vicini. Interessante il commento di *SI-1* che considera entrambi gli aspetti: *«Un problema può essere che non hai più la mamma. Un problema da grandi è che non hai il lavoro»*. Emerge dunque solo il modello concettuale di problema riferito alla vita reale.

Tre su quattro allievi di questo livello considerano che ai problemi corrisponda sempre una soluzione, mentre *SI-4* afferma, riferendosi ai cibi zuccherati, come certi problemi non possono avere soluzione: *«Per esempio gli zuccheri esistono e non si può fare niente»*.

Data la quantità limitata di allievi sottoposta ai colloqui clinici in questo ordine scolastico, le risposte date a *Q5* potrebbero apparire poco rilevanti. Consideriamo tuttavia significativo il fatto che le opzioni «avere fortuna» e «vedere la soluzione al primo colpo», non considerate da nessun allievo durante i colloqui clinici, siano entrambi aspetti rientranti nella tipologia legata al problema matematico standard. *SI-3* manifesta però a questo riguardo di essere già a conoscenza di un modello scolastico che prevede la risoluzione di esercizi sotto il controllo di un'autorità. Giustificando la rilevanza delle conoscenze matematiche per essere un «buon risolutore di problemi» afferma: *«Se non fai i calcoli diventi un asinello [...] se no mi dà il castigo la mamma o la maestra»*.

Scuola elementare

I colloqui clinici individuali effettuati alla SE e alla SM ci hanno permesso di approfondire le risposte date alle domande del questionario da parte di 12 allievi. Come indicato dalla tab. 5.1.1, in seconda SE gli allievi distinguono già il problema matematico standard da quello legato alla vita reale. A questo livello i colloqui permettono quindi di notare come gli allievi da noi intervistati possiedano già una buona consapevolezza riguardo alla struttura di un testo di matematica; *2SE-1* descrive così con chiarezza come *«La parte di sopra è più facile e quella di sotto è più difficile perché quella di sopra si doveva solo leggere, mentre quella di sotto leggere e fare i compiti, fare dei calcoli difficili»*. Facendo riferimento al sistema di valutazione da lui conosciuto aggiunge inoltre: *«Se non sei preciso la maestra potrebbe metterti una nota bassa nelle note»*, completando così il quadro del suo vissuto scolastico riguardo alla matematica. Un ulteriore allievo di 2ª SE, pur confermando come i problemi scolastici legati alla matematica siano codificati secondo caratteristiche standardizzate (*«Devi risolvere qualcosa con i calcoli [...] e alla fine so il risultato»* [*2SE-2*]), affianca alla dimensione scolastica un polo antitetico, proprio della dimensione affettivo-relazionale. Durante il colloquio l'allievo descrive difatti una situazione per lui insolubile che porta a un'inevitabile frustrazione: *«Io vorrei che può giocare ma si è in troppi. Lui si sente triste e anch'io un po'»* [*2SE-2*]. Oltre all'emergenza delle convinzioni legate al problema matematico standardizzato e a quello facente capo alla vita reale, vi è l'intuizione dell'esistenza di una metodologia funzionale ad affrontare il processo di risoluzione. *2SE-4* precisa a questo proposito che *«Bisogna capire un po' il meccanismo, cioè cosa succede. Prima si pensa, poi si agisce e poi stop»*, stabilendo anche un'analogia con il lavoro degli investigatori.

I soggetti di 5ª SE dimostrano quanto i problemi scolastici continuino a presentare caratteristiche rigidamente codificate anche dopo cinque anni di scolarità. Il problema, alla fine della scuola elementare, non mostra nessun tipo di evoluzione e continua a essere considerato *«Un foglietto con su scritto delle cose e con alla fine una domanda che tu devi riuscire a rispondere facendo dei calcoli»* [*5SE-6*]. L'analisi dei dati raccolti in 5ª SE ci ha però permesso di appurare come i suoi allievi, pur mantenendo distinte le categorie di convinzioni identificate in precedenza (*«Quelli matematici della maestra [...], quelli di tutti i giorni»* [*5SE-4*]), possano già evidenziare consapevolezza riguardo ad alcune intersezioni esistenti tra il sapere matematico e la realtà, funzionali alla risoluzione di problemi pratici. Un unico allievo di 5ª SE espone a questo riguardo un esempio, anticipando quanto verrà detto da due allievi di SM: *«Se uno si rompe una gamba e la deve ingessare bisogna misurare quanto deve essere grande il gesso»* [*5SE-1*]. *5SE-4* aggiunge una riflessione relativa ai problemi sociali facendo riferimento alla disoccupazione e ai conseguenti *«Problemi di soldi e di cibo»*, ma mostrando sensibilità anche verso una categoria di problemi legata alla dimensione affettivo-relazionale: i problemi sentimentali.

Le considerazioni sin qui segnalate non vogliono nascondere che in 5ª SE ci possano essere allievi che fanno ancora riferimento diretto alle proprie esperienze di vita (*«Ci sono anche i problemi quando io faccio un po' di disastri»* [*5SE-5*]), bensì sottolineare che oltre al problema di vita reale caratterizzato dagli allievi di SI, le tendenze individuate in 2ª SE sono mantenute e sviluppate anche dagli allievi di fine secondo ciclo. La distinzione tra problema matematico e reale non cambia, ma, mentre il primo sviluppa un modello cristallizzato, il secondo gode di un'ulteriore categorizzazione, in taluni casi intersecandosi anche con la matematica: *«Se qualcuno si rompe gli occhiali, per andare a rifarsi le lenti uno deve calcolare la grandezza della montatura»* [*5SE-1*].

Scuola media

Alla SM la distinzione tra le due tipologie di problemi è mantenuta e confermata (*«Ci sono tanti tipi di problemi, anzi, due: i problemi di matematica e gli altri»* [*4SM-8*]); tuttavia la scolarità ha influito in modo tale che il problema reale emerge con difficoltà all'interno del contesto scolastico quotidiano. Le parole di *4SM-2* sono eloquenti: *«Io sono a scuola, e visto che mi fanno questa domanda ho pensato subito alla matematica»*, e aggiunge: *«Nella mia vita ho fatto più problemi di matematica che problemi della mia vita comune»*. Viene inoltre segnalata l'esistenza di diverse modalità per arrivare alla risoluzione di un problema («[Bisogna] *allenarsi, non fare tutto in fretta e subito, ragionarci sopra, guardarlo, provare altre cose. [...] cerco magari di rifarlo in un altro modo e si trova un'altra via»* [*4SM-3*]) e la possibilità di trovare intersezioni tra i problemi matematici e quelli legati a un contesto di vita reale. *4SM-8* accenna a questo riguardo come *«Un problema di soldi può diventare un problema di matematica»*, ma è *4SM-3* che riesce a fornire il pensiero più raffinato, nonostante l'analisi delle risposte date al suo questionario abbiano fatto emergere senza ambiguità una convinzione legata al problema scolastico standard. Durante il colloquio *4SM-3* riesce ad andare oltre: *«I problemi veri secondo me sono [...] i problemi di matematica legati alla vita reale»*. *«Ci sono i problemi di matematica non naturali e i problemi della vita non naturali»*, riassume *4SM-3* al termine del colloquio confermando così la distinzione dicotomica già individuata dai soggetti di 2ª SE, e conclude: *«In mezzo ci sono i problemi veri, quelli naturali»*.

5.3. Classificazione dei dati in sottocategorie

Da un'analisi dettagliata di tutti i dati emersi nei tre ordini scolastici siamo stati in grado di individuare 15 sottocategorie relative alle convinzioni di problemi e, per mezzo di una lettura approfondita e incrociata dei questionari e dei protocolli, siamo riusciti a osservare in quale misura queste sono state considerate dalla popolazione presa in esame. Di seguito presentiamo dunque le sottocategorie individuate.

1. Non sapere / saper fare qualcosa;
2. ragionare / pensare;
3. difficoltà;
4. bisogno di aiuto;
5. risoluzione;
6. conflitto;
7. perdita;
8. mancanza / privazione;
9. guasto / distruzione;
10. malattia / infortunio / incidente;
11. infrazione / divieto;
12. disequilibrio;
13. pericolo / guaio;
14. morte;
15. raggiungere un obiettivo.

Riportiamo inoltre, in estrema sintesi, i risultati della classificazione dei dati in tali sottocategorie (tab. 5.3.1).

Classe / Livello	**Sottocategorie**														
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
	Non sapere / saper fare qualcosa	**Ragionare / Pensare**	**Difficoltà**	**Bisogno di aiuto**	**Risoluzione**	**Conflitto**	**Perdita**	**Mancanza / Privazione**	**Guasto / Distruzione**	**Malattia / Infor-tunio / Incidente**	**Infrazione / Divieto**	**Disequilibrio**	**Pericolo / Guaio**	**Morte**	**Raggiungere un obiettivo**
SI	0	2	0	1	0	0	1	3	1	2	0	0	0	1	0
2ª SE	6	3	4	1	4	1	3	1	2	1	2	1	2	2	1
5ª SE	8	2	10	3	7	2	1	6	5	5	1	4	2	1	2
4ª SM	1	10	9	4	18	4	0	2	3	4	1	5	3	1	1
Totale	**15**	**17**	**23**	**9**	**29**	**7**	**5**	**12**	**11**	**12**	**4**	**10**	**7**	**5**	**4**

Tab. 5.3.1

Dalla tabella riportata sopra appare con immediatezza come le sottocategorie toccate con maggiore frequenza siano quelle relative alla «risoluzione» e alla «difficoltà». Questo conferma quanto ricordato da D'Amore [1999a, 105]: «il problema è identificato [dagli allievi] con la sua risoluzione», ma è pure interessante notare come i soggetti che hanno maggiormente insistito su questi aspetti siano quelli dall'esperienza scolastica più lunga, mentre gli allievi di SI, che ancora non hanno vissuto sui banchi di scuola, non le prendano in considerazione. Gli allievi considerati descrivono dunque il problema come *«Qualcosa da risolvere»* [4SM-1], ma *«Difficile da superare»* [*2SE-4*]. Gli allievi di SI fanno piuttosto riferimento alla «mancanza», alla «malattia» e al «ragionamento». Quest'ultima informazione in particolare è interessante perché indica come, nonostante la giovane età, ci sia una certa consapevolezza della funzione del proprio pensiero. *SI-3* precisa a questo riguardo con grande chiarezza l'importanza della riflessione e della comunicazione: *«Per me è come [...] pensare con il tuo cervello per poi dirlo a qualcuno»*.

14 allievi di SE identificano il problema anche come «non sapere / saper fare qualcosa» (*«Perché non si riesce a fare gnente»* [*2SE-3*]), mentre 10 soggetti di SM sembrano essere più autonomi; mostrano difatti di far corrispondere il problema all'azione di «ragionare» individualmente: *«Mi fa venire in mente una «cosa» difficile, che devi pensare»* [4SM-15].

Ulteriori sottocategorie riscontrate, all'interno di tutta la popolazione coinvolta, in una decina di soggetti per ciascuna, sono la «mancanza» e la «malattia», già citate parlando degli allievi di SI, e il «guasto». La prima sottocategoria si riferisce a una privazione importante come *«Problemi di soldi o di cibo»* [*5SE-4*], mentre le altre due rimandano a degenerazioni di oggetti o del corpo umano: *«Un ragazzo per sbaglio rompe il suo natel nuovo!»* [*2SE-4*]; *«Un problema può essere che sto male»* [*SI-2*].

Le sottocategorie del «disequilibrio» e del «bisogno di aiuto» sono pure state considerate da una decina di allievi ognuna. Con la prima intendiamo indicare gli argomenti trattati dai soggetti che fanno riferimento a situazioni destabilizzanti: *«Quando si gioca a sieme e un bambino vuol giocare sono in troppi»* [*2SE-3*] o più in generale *«Si tratta di un problema possibile perché hai delle scelte, ma non sai cosa* *scegliere»* [*4SM-2*]. Con la seconda sottocategoria individuiamo invece gli allievi che segnalano la necessità di far riferimento a terzi per facilitare o rendere possibile la risoluzione di una situazione problematica: *«Qualcuno a bisogno d'aiuto perche a un problema!!!»* [2SE-8].

In minor misura sono stati considerati argomenti relativi alle sottocategorie: «conflitto», «perdita», «pericolo» e «morte» (5-7 individui). Il «conflitto» è visto piuttosto come personale: *«Si ha litigato con il suo tipo»* [*4SM-8*]; la perdita è legata agli oggetti ai quali si è affettivamente legati (*«Un bambino perde la palla»* [*2SE-4*]); il pericolo è inteso come rischio di ferirsi fisicamente (*«In guerra quando finisci le munizioni»* [4SM-1]) o di vedersi limitata la libertà individuale (*«Sono in difficoltà a scappare da quelli che li stanno ricercando»* [*5SE-6*]); la morte è invece vissuta da parte dei soggetti come l'allontanamento definitivo di persone care (*«La morte di qualcuno che ti è stato vicino»* [*4SM-8*]) o sconosciute (*«Quelli che sono affondati sotto l'acqua, quelli che sono morti»* [*SI-2*]).

Tra le sottocategorie meno toccate segnaliamo quelle relative alla «infrazione» (*«Un cacatore spara a un cervo e la caca non era aperta»* [2SE-5]) e al raggiungimento di un obiettivo. Sottolineiamo però l'importanza di quest'ultima sottocategoria perché si riferisce a una definizione classica di problema. Per Duncker [1935], difatti, «Un problema sorge quando un essere vivente ha una meta, ma non sa come raggiungerla»: c'è un obiettivo da raggiungere e delle difficoltà per raggiungerlo, *«Ad esempio costruire un ponte»* [*4SM-3*].

6. Risposte alle domande di ricerca

R1. L'analisi dei dati ci permette di rispondere alle domande di ricerca formulate in 2. Relativamente alla domanda di ricerca *D1* riteniamo di poter confermare l'ipotesi *I1* in cui si prevedeva l'emergenza di due modelli concettuali di problemi distinti e indipendenti: quello scolastico legato alla matematica e quello reale. La lettura delle tabelle di analisi suggerisce tuttavia una precisione maggiore: oltre ai soggetti che evidenziano di appartenere esclusivamente a una delle due categorie sopra menzionate vi è pure una classe che manifesta consapevolezza riguardo a entrambi i modelli concettuali. Diciannove soggetti su 64 evidenziano la possibilità di interpretare in almeno due modi diversi la parola «problema», distinguendo così il problema matematico dai problemi legati a un ambito di vita reale. Questa consapevolezza emerge dopo la seconda elementare (*«La parola problema mi fa venire in mente: un problema di una persona, un problema matematico o un problema fisico»* [*5SE-1*]) e si precisa alla scuola media sottolineando il carattere artificiale di quelli trattati a scuola. A questo proposito *4SM-3* osserva, così come *5SE-6*, che *«I problemi fatti dai maestri non sono tanto reali* [mentre] *i problemi veri esistono da sempre»*. Le 15 sottocategorie precedentemente individuate e commentate evidenziano inoltre che la maggior parte degli intervistati attribuisce al termine «problema» una connotazione negativa, nonostante le risposte date a *Q4* facciano emergere un profilo piuttosto positivo. Riteniamo tuttavia maggiormente significative le tipologie di categorie emerse, delle quali solamente una è caratterizzata da un argomento costruttivo. La quindicesima categoria è difatti individuata da *4SM-3* come facente parte *«Dei problemi che stanno tra quelli* *della vita e quelli della matematica»*, funzionali al miglioramento della qualità di vita dell'uomo.

R2. Per quanto concerne la domanda di ricerca *D2* possiamo confermare con sicurezza che le convinzioni personali degli allievi variano nel passaggio dalla scuola dell'infanzia alla scuola media; tuttavia emerge che, al crescere del livello scolastico, il problema reale assume un'importanza maggiore rispetto a quello matematico. Le ipotesi sono confermate anche dalle convinzioni espresse dagli allievi di SI: questi associano la parola «problema» a un contesto di vita reale, ma la tendenza manifestata dagli allievi SE sembra confutare le nostre previsioni. In 2ª SE i soggetti che evidenziano di possedere un modello concettuale legato alla matematica sono la metà di quelli rientranti nella categoria legata al contesto reale, mentre in 5ª SE questi diminuiscono andando ad alimentare la classe di coloro che riescono a coordinare entrambe le convinzioni. I soggetti di SM confermano la tendenza individuata in precedenza: rimangono pochi gli allievi legati ai problemi matematici, diminuiscono ulteriormente quelli legati esclusivamente ai problemi identificati come situazioni di vita reale e aumentano considerevolmente coloro che li considerano entrambi spontaneamente. La parte *b* dell'ipotesi *I2* si rivela dunque confermata solamente in parte: gli aspetti ipotizzati in riferimento agli allievi di SI e SM si sono rivelati fondati, mentre quelli ipotizzati in riferimento agli allievi di SE sono stati confutati.

R3. Riguardo all'interrogativo formulato in *D3* possiamo segnalare due allievi, che rispondendo a *Q6*, non sono riusciti a restare coerenti con quanto da loro precedentemente affermato. Uno di essi [*2SE-1*] passa dalla considerazione del problema come matematico standard al problema visto come appartenente alla vita quotidiana, mentre il suo compagno di classe [2SE-15] compie il passaggio inverso. Ipotizziamo che questa incoerenza sia dovuta al fatto che la lettura dei quattro testi finali abbia potuto fungere da stimolo per suscitare in loro la presa in considerazione dell'aspetto «complementare», ma senza tuttavia permettere di cambiare convinzione o di coordinarle entrambe. Riteniamo che questa incoerenza sia potuta emergere perché i soggetti non si trovavano influenzati dal contratto didattico, bensì da quello sperimentale. Due ulteriori allievi di seconda più tre allievi di quinta scelgono un testo considerato essere in contrasto con quanto da loro precedentemente affermato, ma la loro giustificazione risulta essere coerente. Scegliendo il testo «B» l'allievo *2SE-4* osserva così che *«Sembra strano che un contadino abbia cosi pochi animali»* evidenziando un forte collegamento con le sue conoscenze enciclopediche legate alla realtà, mentre scegliendo il testo «A» l'allievo 5SE-13 contesta la quantità di denaro guadagnata dall'architetto confermando il suo modello concettuale di problema legato alla realtà: *«Per me è un problema rispetto ai poveri d'Africa, perché non hanno quasi niente da mangiare»*. Queste considerazioni confutano con evidenza l'ipotesi *I3* che prevedeva, da parte degli allievi sottoposti al questionario, l'indicazione del problema scolastico standard indipendentemente dalle loro personali convinzioni precedentemente segnalate.

7. Conclusioni e possibili sviluppi

Con questo studio si voleva capire a quali modelli concettuali di problema facessero riferimento gli allievi di scuola dell'infanzia, elementare e media per poter poi ipotizzare, sulla base dei risultati ottenuti, l'indirizzo degli interventi didattici capaci di rendere il concetto di problema più flessibile e favorire un'effettiva assunzione della situazione problematica in fase di risoluzione da parte degli allievi.

Dall'analisi dei risultati emerge come gli allievi sviluppino un modello di problema matematico isolato e molto rigido (11 su 64), chiaramente indipendente dal modello di problema generato grazie alle esperienze di vita reale (33 su 64). I dati a nostra disposizione indicano inoltre come solamente pochi soggetti citino entrambi i modelli spontaneamente (19 su 64), e ancora meno riescano a individuare spontaneamente delle possibili sintesi tra i due (3 su 64). I risultati emersi sono quindi importanti. Possiamo ipotizzare come a scuola le occasioni che mettono gli allievi a confronto con situazioni problematiche motivanti, capaci di suscitare processi di *problem solving* significativi siano perlomeno rare: gli allievi considerano ancora, dopo nove anni di scolarità obbligatoria, i problemi matematici come «un rito formale, completamente avulso dalla realtà» [Zan 1995]. È quindi necessario prendere atto delle concezioni cui gli allievi fanno riferimento distinguendo innanzitutto il *problema* dall'*esercizio* sul piano linguistico. Ciò permetterebbe di evitare l'emergenza di «fenomeni inquietanti» quali quelli segnalati da Zan [1995]. Citando tali fenomeni la studiosa si riferisce a lacune nei processi di risoluzione date dall'incapacità di operare transfert di competenze da un contesto reale a uno scolastico e viceversa. Bisogna cioè riuscire a portare gli allievi a discutere e confrontarsi su situazioni problematiche complesse e diversificate, capaci di mobilitare le loro conoscenze e di stimolare al contempo la zona di sviluppo prossimale [Vygotskij 1978] per iniziare a tendere verso quell'«apprendimento veramente significativo» citato da D'Amore [2003, 13].

In futuro sarebbe quindi auspicabile estendere il presente studio a una popolazione più vasta, ma coinvolgendo anche i docenti titolari delle classi. Ciò permetterebbe di osservare in quale misura le loro convinzioni relative alla parola «problema» coincidono con quelle degli allievi e valutare, grazie ai risultati ottenuti, l'adeguatezza di attività di tipo metacognitivo. Queste attività si rivelerebbero funzionali a far prendere coscienza di «cosa si sa» e a «regolare il proprio comportamento in base alle proprie risorse» [Zan 1995], per giungere infine a formulare e affrontare problemi teorici derivanti da problemi pratici.

Brousseau, G.
Les échecs électifs dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire, in «Revue de laryngologie, otologie, rhinologie», vol. 101, nn. 3-4, pp. 107-131, 1980a, cit. in D'Amore, B., 1999a.

Camaioni L., Di Blasio P.
Psicologia dello sviluppo, Bologna, Il Mulino, pp. 100-102, 2002.

Chevallard, Y.
L'univers didactique et ses objets: fonctionnement et dysfonctionnement, in «Interactions didactiques», Genève-Neuchâtel, pp. 9-37, 1988b, cit. in D'Amore, B., 1999a.

D'Amore, B.
Elementi di didattica della matematica, Bologna, Pitagora, pp. 97-389, 1999a.

D'Amore, B.
Problemi di matematica nella scuola primaria, Bologna, Pitagora, 2003.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I.
Cambi di convinzioni in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale, in «La matematica e la sua didattica», n. 3, pp. 27-50, 2004.

Duncker, K.
Psychologie des produktiven Denkens, Berlin, Springer, 1935; trad. it. *La psicologia del pensiero produttivo*, Firenze, Giunti Barbera, 1969, cit. in D'Amore, 1999a.

Duval, R.
Appunti provvisori non pubblicati del corso tenuto presso l'IUFM di Gravelines, 1996-1997a, cit. in D'Amore, B. 1999a.

Fischbein E., Zan R.
I bambini di fronte ad un problema aritmetico privo di dati numerici: come si orientano nella scelta dei dati e delle strategie risolutive, in «L'insegnamento della matematica e delle scienza integrate», vol. 12, n. 9, 1989.

Frank, M.L.
What myths about mathematics are held and conveyed by teachers?, in «Arithmetic teacher», n. 37, pp. 10-12, 1985, cit. in D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., 2004.

Furinghetti, F.
Ghosts in the classroom: beliefs, prejudices and fears, in Bazzini, L. (ed.), «Proceedings of SCTP-V», Grado, pp. 81-91, 1994, cit. in D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., 2004.

Furinghetti, F.
Credenze/convinzioni in classe su matematica e dintorni, in D'Amore, B. (ed.), «Didattica della matematica e rinnovamente curricolare. Atti del convegno: Incontri con la matematica», n. 15, pp. 59-69, 2001.

Gagné, R.M.
Instruction based on research in learning, in «Engineering education», n. 6, pp. 519-523, 1971, cit. in D'Amore, B., 1999a.

Green, T.F.
The activities of teaching, McGraw-Hill, 1971, cit. in Zan, R., 1995; 1998a.

Kosslyn, S.M.
Image and Mind, Cambridge (MA), Harvard University Press, 1980, cit. in D'Amore, B., 1999a.

Lester, F.
Why is problem solving such a problem?, in «Proceedings PME XI», 1987, cit. in Zan, R. 1991-1992.

Nesher, P.A.
The stereotyped nature of word problems, in «For the learning of mathematics», vol. 1, n. 1, pp. 41-48, 1980, cit. in D'Amore, B., 1999a.

Poli P., Zan R.
Problemi e convinzioni, in Caredda C., Longo P., Piochi B. (a cura di), «Il ruolo della matematica nella conquista dell'autonomia», Bologna, Pitagora, 1995, cit. in Poli P., Zan R., 1996a; 1996b.

Poli P., Zan R.
Le convinzioni dei bambini sui problemi: un confronto tra bravi e cattivi solutori, in «Studi di Psicologia dell'Educazione», nn. 1-2, 1996a.

Poli P., Zan R.
Il ruolo delle convinzioni nella risoluzione di problemi: presentazione di un questionario elaborato per un'indagine nella scuola elementare, in «La matematica e la sua didattica», n. 4, 1996b.

Schoenfeld, A.H.
Beyond the purely cognitive: Beliefs systems, social cognitions and metacognitions as driving forces in intellectual performance, in «Cognitive science», n. 7, pp. 329-363, 1983, cit. in Furinghetti, F., 2001.

Schoenfeld, A.H.
Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics, in Grows A.D. (ed.), «Handbook of research on mathematics learning and teaching», New York, MacMillan, 1992, cit. in D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., 2004.

Schubauer-Leoni M.L., Ntamakiliro L.
La contruction de réponses à des problèmes impossibles, in «Revue des sciences de l'éducation», vol. 20, n. 1, pp. 87-113, 1994, cit. in D'Amore, B., 1999a.

Vygotskij, L.S.
Mind in Society. The development of higher psychological processes, Cambridge (MA), Harvard University Press, 1978; trad. it. *Il processo cognitivo*, Torino, Bollati Boringhieri, 1987, cit. in Camaioni L., Di Blasio P., 2002.

Zan, R.
I modelli concettuali di «problema» negli allievi della scuola elementare, in «L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate», in tre parti: I: 1991, vol. 14, n. 7; II: 1991, vol. 14, n. 9; III: 1992, vol. 15, n. 1.

Zan, R.
L'approccio metacognitivo, in «Le scienze e il loro insegnamento», Le Monnier, nn. 4-5, 1995.

Zan, R.
Problemi e alunni con problemi, in Aschieri I., Pertichino M., Sandri P., Vighi P. (a cura di), «Matematica e affettività. Chi ha paura della matematica?», Bologna, Pitagora, 1997.

Zan, R.
Introduzione ad alcune ricerche sul tema dell'affettività, in Aschieri I., Pertichino M., Sandri P., Vighi P. (a cura di), «Matematica e affettività. Chi ha paura della matematica?», Bologna, Pitagora, 1998a.

2. I bambini e la probabilità: studio sulla trattazione di situazioni problematiche caratterizzate da incertezza e informazione incompleta in 5a elementare

Alessandra Di Maria

Reasoning begins with the recognition of ignorance and uncertainty. Peter Walley

This paper is a summary of the Bachelor Thesis written by the author at the faculty of Science in Communication of the University of Lugano. The paper proposes a new approach to the teaching of probability through problematic situations characterized by uncertainty and incomplete information. The research was carried out in a fifth grade class of the primary school in Minusio (Switzerland), where the author works as a teacher.

Introduzione

Il presente lavoro costituisce una proposta alternativa all'approccio adottato classicamente per l'insegnamento della probabilità. Quest'ultimo si basa sull'assunzione secondo cui del problema si deve avere un'informazione completa, in modo da poter calcolare probabilità precise.

La convinzione che, prendendo le distanze da una trasposizione didattica eccessiva, sia possibile conferire maggiore coinvolgimento e senso di utilità nei confronti di quanto gli alunni apprendono, ha indotto alla progettazione di situazioni problematiche caratterizzate da informazione incompleta. Ciò che le contraddistingue, rispetto a quelle tradizionali, è la possibilità di agire in una condizione di indecisione.

La ricerca mette in luce come l'introduzione della probabilità in una quinta elementare si sia rivelata un argomento ben accetto e abbia favorito il nascere di una serie di operazioni mentali, dall'inventiva alla capacità di giudizio critico, necessarie per una più ampia comprensione della realtà nei suoi diversi aspetti.

Oggetto della ricerca

Per maggiore chiarezza, si preferisce una definizione dell'argomento che prenda avvio da alcune situazioni, come la seguente:

In un sacchetto di stoffa sono contenuti 30 cubetti. 12 sono di colore rosso, 10 sono verdi e altri 8 sono gialli. Vi si chiede di scegliere un colore e pescare un cubetto dal sacchetto; se il colore del cubetto estratto corrisponde a quello prescelto avete vinto, in caso contrario avete perso.

Quale colore scegliete?

Per giungere a una soluzione non occorre altro che calcolare le probabilità di uscita di ogni singolo colore. Ne consegue che,

P(rosso) = 12/30 = 0.4
P(verde) = 10/30 ≅ 0.33
P(giallo) = 8/30 ≅ 0.27

Non vi è perciò dubbio che la probabilità di pescare un cubetto rosso sia superiore alla probabilità di pescare un cubetto verde o alla probabilità di estrarne uno giallo.

Lo stesso quesito risulta meno ovvio, se riferito a una situazione caratterizzata da informazione incompleta:

Se in un sacchetto contenente 30 cubetti, 10 fossero rossi, e i rimanenti 20 di colore verde oppure giallo, quale colore sceglieresti?

In tal caso la decisione appare meno scontata. Le informazioni di cui si dispone, consentono di affermare che

P(rosso) = 10/30 ≅ 0.33

ma non permettono di calcolare in maniera precisa P(verde) e P(giallo). Pur osservando che la somma del numero di cubetti verdi e gialli è pari a 20, sarebbe ragionevole ipotizzare che essi siano tutti verdi così come tutti di colore giallo. Perciò la probabilità di pescare un cubetto verde (o giallo) è maggiore o uguale a 0/30 = 0 e minore o uguale a 20/30 ≅ 0.67. Non si tratta quindi di una probabilità precisa, bensì di un insieme di possibili probabilità, caratterizzabili con una probabilità minima e una probabilità massima.

In sintesi, date le informazioni a disposizione è possibile asserire che,

P(rosso) = 10/30 ≅ 0.33
0 ≤ P(verde) ≤ 0.67
0 ≤ P(giallo) ≤ 0.67
P(verde) + P(giallo) ≅ 0.67

Di conseguenza non è possibile determinare quale sia il colore che ha maggiore probabilità di essere estratto. Ma è opportuno considerare che se il numero di cubetti verdi fosse superiore al numero di cubetti gialli, allora P(verde) >0.33 e quindi il verde sarebbe il colore estratto con probabilità più alta. Un ragionamento analogo può essere fatto per il colore giallo.

Non esiste ragione per supporre che uno scenario sia più probabile degli altri, per cui l'unica certezza riguarda il fatto che il colore rosso non potrà mai avere una probabilità di essere estratto superiore a quella degli altri colori.

Tuttavia, nella realtà, a confronto con una situazione analoga, è frequente la tendenza a scegliere proprio il colore rosso, per il fatto che si tratta dell'unico colore del quale si hanno informazioni certe. Tale atteggiamento non fa capo unicamente al ragionamento probabilistico, ma è anche generato da un comportamento personale di avversione all'ambiguità che è noto con il nome di *Paradosso di Ellsberg* (1961).

In situazioni di informazione completa, un'elaborazione coerente dei dati conduce inevitabilmente a una decisione. Ciò che caratterizza una situazione di informazione incompleta, è invece la possibilità di riscontrare una condizione di indecisione.

Nonostante tale situazione sia frequente nella vita quotidiana, è impossibile da ritrovare nella probabilità insegnata classicamente, ossia facendo riferimento esclusivamente a situazioni di informazione completa e quindi a probabilità precise (per approfondimenti si veda: Piatti & Arrigo 2004; Piatti 2004; Piatti & Arrigo 2005). Inoltre, le situazioni di informazione incompleta creano la necessità di distinguere la dimensione *razionale* di una determinata decisione da quella *emozionale*, così come esemplificato attraverso il paradosso di Ellsberg.

Un obiettivo fondamentale del presente lavoro è proprio quello di valutare se gli allievi di scuola elementare siano in grado di trattare queste situazioni, elaborando in maniera razionale l'informazione in loro possesso.

Interrogativo di ricerca e rispettive ipotesi

Quali effetti può produrre il porre l'allievo di V elementare di fronte a situazioni di incertezza e in cui si trattano casi di informazione incompleta?

Ciò che si ipotizza in primo luogo concerne la capacità, da parte degli allievi, di confrontarsi con situazioni probabilistiche caratterizzate da informazione incompleta, elaborando razionalmente i dati. Tale obiettivo sarebbe conseguibile attraverso un approccio metodologico-didattico adeguato, in grado cioè di sollecitare gli alunni alla riflessione e alla scoperta, di fronte a situazioni in cui la dimensione motivazionale assume un ruolo essenziale.

Questa dimensione costituisce il fulcro di una seconda ipotesi, secondo cui un confronto con situazioni caratterizzate da incertezza e da informazione incompleta possono suscitare curiosità e interesse, poiché realistiche e vicine all'esperienza dell'allievo. Esse favorirebbero altresì la motivazione, in quanto contengono una certa problematicità e non si pongono affatto come esercizi ripetitivi.

D'altronde, non è possibile escludere a priori che esse vengano percepite di difficile risoluzione poiché, contrariamente a quanto l'alunno è solito affrontare durante le lezioni di matematica, non sono determinabili con un unico risultato; la presenza di una condizione di indecisione impedisce la costruzione di una soluzione *elegante* basata su un semplice algoritmo.

Approccio teorico della ricerca

La teoria delle situazioni di Guy Brousseau

Ciascuna delle situazioni problematiche proposte nella ricerca si iscrive nella tipologia delle situazioni didattiche esposta da Brousseau, in cui si distinguono quattro categorie: *situazione d'azione; situazione di formulazione; situazione di validazione; situazione di istituzionalizzazione* (Brousseau, 1998).

La situazione d'azione si incentra su una situazione problematica, nella cui risoluzione risiede la conoscenza che si vuole che l'alunno apprenda, attraverso tentativi che implicano competenze di cui, almeno in parte, già dispone e la messa in atto di strategie via via più sofisticate. Tuttavia, le comunicazioni informali tra gli allievi che hanno luogo in questa prima fase non sono sufficienti a generare un «sapere utilizzabile culturalmente». Come osserva Rossera-Tralamazza: «Questo suppone la presa di coscienza attraverso l'esplicitazione dei mezzi utilizzati per risolvere il problema» (1997). A ciò mira la situazione di formulazione, la quale consiste nel mettere progressivamente a punto un linguaggio comprensibile a tutti gli allievi.

Quanto alla situazione di validazione, si basa essenzialmente sul confronto e la discussione dei diversi risultati e delle strategie applicate, in modo da giungere alla definizione di un concetto o di una nuova conoscenza. Questa situazione, dunque, deve condurre gli alunni a «evolvere e rivedere le loro opinioni, a sostituire le loro teorie false con teorie vere» (Brousseau, 1998).

Infine l'ultima situazione, di istituzionalizzazione, consiste nel consolidamento di quanto appreso attraverso esercizi di funzionamento.

Il contratto didattico

La teoria delle situazioni di Brousseau scaturisce dai suoi studi degli anni '70 sul *contratto didattico* e si pone in risposta all'esigenza di creare una situazione didattica che non venga vissuta attraverso il docente, ma che appartenga di più all'allievo e perciò che sia cognitivamente più ricca.

Il contratto didattico si riferisce al rapporto tra ambiente educativo, maestri, allievi e saperi disciplinari e costituisce «l'insieme delle regole e dei comportamenti abituali che insegnanti e alunni mettono in atto reciprocamente a proposito di un 'sapere' definito dai programmi scolastici» (Zani, Selleri & David, 1998). Tali aspettative di funzionamento interpersonale non derivano da accordi espliciti e condivisi ma sono dovuti alla concezione della scuola, della matematica e a schemi generali prodotti dagli stessi soggetti coinvolti.

Lo studio sulla condotta degli alunni in questa prospettiva è di grande interesse, soprattutto per quanto riguarda gli effetti derivanti da ciò che Brousseau definisce la *rottura del contratto* (1998): la consuetudine regolarmente ripetuta di un contratto didattico che determina ciò che è ritenuto legittimo a scuola, abitua l'allievo a non dubitare della pertinenza dei quesiti dell'insegnante. Se anche egli crede di aver scoperto l'indeterminazione di un problema le cui informazioni a disposizione non permettono una risposta precisa, per giustificare questo fatto, dovrà farsi carico della rottura del contratto oppure cercherà una risposta comunque e qualunque. Tale situazione è in opposizione con le sue aspettative, «con tutte le sue abitudini, con tutte le clausole fin qui messe in campo nelle situazioni didattiche» (D'Amore 1999).

Rientrano tra gli stessi effetti i casi di alunni che, come chiarisce D'Amore (1999), per rendere coerente un modello della matematica come disciplina in cui si *devono* eseguire dei calcoli, fanno uso di una parte o di tutti i numeri forniti nell'enunciato, anche scegliendoli casualmente, laddove la risposta al problema non richiede una soluzione numerica.

Le produzioni testuali autonome degli allievi (TEPs)

Per quanto spesso l'alunno interrogato risponda cercando di soddisfare quelle che crede le aspettative del docente – a causa di alcune clausole del contratto didattico (D'Amore 1999) – attraverso tecniche di indagine sofisticate, è possibile ovviare a questo inconveniente. Le produzioni testuali autonome degli allievi (TEPs) infatti, hanno il pregio di consentire all'alunno di liberarsi da tale condizionamento e di raccontarsi facendo uso di un linguaggio spontaneo, naturale e rivelatore.

Si considerano TEPs «*… dei testi elaborati in modo autonomo dagli studenti e aventi come soggetto questioni matematiche*» (D'Amore & Meier 2002). È necessario perciò che l'allievo sia messo in condizione di volersi esprimere in tal senso, per esempio come se dovesse spiegare a un bambino di un'altra scuola uno specifico concetto matematico o scientifico. Pertanto, che il destinatario necessiti di queste informazioni, e che egli non sia identificabile né con il docente né con il vuoto, risultano essere presupposti necessari.

D'Amore e Meier (2002) attribuiscono molteplici funzioni didattiche ai TEPs, favorendo una maggiore consapevolezza di quanto appreso, l'uso attivo di termini scientifici e di un linguaggio matematico e implicando altresì l'allievo nella valutazione del proprio apprendimento.

Ciò nondimeno, «*i TEPs consentono all'insegnante di valutare in modo effettivo la conoscenza personalmente costruita e la comprensione di idee matematiche, in maniera più dettagliata e profonda di quanto sia possibile sulla base dei comuni testi scritti…*» (D'Amore & Meier 2002, 147).

Percorso metodologico-didattico

Prima attività

La classe ha il compito di rispondere alle domande, lavorando in gruppi di 4-5 allievi e di produrre una traccia scritta dei procedimenti effettuati in modo da permettere un facile confronto dei risultati ottenuti dai diversi gruppi.

Segue quindi una discussione critica sulle scelte operate, in cui i proponenti devono difendere la correttezza delle loro opzioni e gli altri riconoscere la fondatezza di proposte alternative a quelle scelte. In particolare, ciò su cui si vuole focalizzare l'attenzione riguarda il fatto che non è possibile rispondere ai quesiti con un unico risultato, ma occorre lavorare con risultati minimi e massimi. Si vuole infatti verificare come reagisce la classe, dovendo trattare casi di informazione incompleta.

Obiettivi

- Ricercare una soluzione di gruppo e lasciarne una traccia scritta.
- Giustificare i propri risultati; cercare di spiegare i procedimenti effettuati.
- Prendere coscienza che non esiste una risposta unica alle domande poste, ma che più risultati sono accettabili.

Di seguito, il testo distribuito agli allievi.

Il compleanno di Andrea

In occasione del suo compleanno, tra i tanti festeggiamenti, Andrea decide di invitare i suoi otto amici del cuore per una merenda tutti insieme.

Vuole acquistare in pasticceria due vassoi di sandwich vari, uno o due vassoi di pizzette e una torta e disporli su una tavola ben apparecchiata insieme a Coca-Cola in lattine da 33 centilitri.

Sapendo che: un vassoio di sandwich costa più di un vassoio di pizzette ma è sicuramente meno caro della torta, rispondi alle seguenti domande:

Quanto viene a costare la merenda di Andrea?
Per essere sicuro di avere abbastanza soldi, quando va a comprare tutto l'occorrente, quanti franchi deve avere con sé?

Può esserti d'aiuto la lista della spesa che Andrea ha preparato:

2 vassoi di sandwich
1 o **2** vassoi di pizzette da 21,50 frs
1 torta da 38,90 frs
9 lattine di Coca-Cola da 1,25 frs

Seconda attività

In questa occasione gli alunni sono confrontati con una situazione di incertezza, in cui si chiede di prendere una decisione in base alle informazioni in loro possesso, facendo capo al ragionamento probabilistico.

L'attività si svolge similmente alla precedente, per cui una fase collettiva di confronto dei vari risultati ottenuti segue a una prima fase di risoluzione della situazione problematica in gruppi di 4-5 allievi.

Ogni gruppo dispone di materiali, quali cubetti colorati e sacchetti di stoffa, in modo da consentire di eseguire tutte le prove desiderate.

Inoltre agli allievi viene richiesto di scrivere su cartelloni i procedimenti effettuati; al termine della prima fase dell'attività i cartelloni vengono esposti in classe, allo scopo di favorire un raffronto immediato dei diversi risultati.

Con questa seconda attività si mira a mettere in luce come in situazioni di incertezza non sia possibile giungere a un risultato inequivocabile, pur potendo distinguere tra esiti impossibili e possibili e tra esiti più o meno probabili.

Obiettivi

- Ricercare una soluzione di gruppo e lasciarne una traccia scritta.
- Giustificare i propri risultati; cercare di spiegare i procedimenti effettuati.
- Familiarizzare con i concetti di *probabile*, *possibile*, *impossibile*, *certo.*
- Intuire che interessa vedere il rapporto tra il numero di cubetti rossi e il numero totale di cubetti in ogni sacchetto per quantificare la probabilità di vincere al gioco.

Segue la situazione proposta alla classe.

Andrea ti propone un gioco!

Ci sono 2 sacchetti contenenti cubetti di colore rosso, verde e giallo.

Puoi pescare a caso 1 cubetto da un sacchetto a tua scelta. Se peschi un cubetto rosso vinci tu, mentre se peschi un cubetto di altro colore vince Andrea.

Il **1° sacchetto** contiene:
- 4 cubetti rossi
- 2 cubetti verdi
- 2 cubetti gialli

Nel **2° sacchetto** abbiamo:
- 4 cubetti rossi
- 10 cubetti verdi
- 6 cubetti gialli

- **Quale sacchetto sceglieresti?**
- **Trovi che sia un gioco leale?**

Terza attività

Con questa attività si vuole testare l'efficacia della metodologia privilegiata per l'analisi dei dati (TEPs), all'interno della situazione di ricerca.

Il testo distribuito è quindi stato pensato con l'intento di mettere l'allievo in condizione di volersi esprimere liberamente, richiedendogli di partecipare alla discussione di alcuni coetanei con opinioni divergenti, in merito alla risoluzione di un problema pratico e facilmente riscontrabile nella vita quotidiana.

Ovviamente, il compito assegnato è da svolgersi per iscritto e individualmente.

Obiettivi
– Leggere con attenzione il testo, cercando di comprendere le posizioni dei tre amici fittizi.
– Esprimere per iscritto il proprio parere, avendo cura di essere sufficientemente esaustivo nei confronti dei destinatari.

La situazione assegnata è la seguente.

Grandi festeggiamenti

Il fratello di Andrea si sposa e ha organizzato un rinfresco per 80 persone. Ad Andrea è toccato il compito di servire succo d'arancia, con il tuo aiuto e quello dei suoi amici Francesco e Alberto. Ecco ciò che si dicono:

Andrea: *Quel tirchio di mio fratello ha acquistato 24 bottiglie da 7dl, e dato che con una bottiglia riempiamo 3 bicchieri da 2dl, non riusciremo a servire tutti!*

Francesco: *Fatemi pensare… abbiamo sette decilitri moltiplicati 24 volte… quindi 168 persone possono bere il nostro succo d'arancia… e cioè più del doppio degli invitati!*

Alberto: *Ho due fessi per amici! Con una bottiglia riempiamo 3 bicchieri e mezzo! Perciò dobbiamo eseguire una divisione e secondo la mia calcolatrice*
80 : 3.5 = 22.85714285714286
Dunque 22 bottiglie bastano e avanzano!

E tu? Che cosa ne pensi?

Quarta attività

La quarta attività si iscrive nell'ultima delle categorie proposte da Brousseau, ossia la *situazione di istituzionalizzazione.* Il suo scopo è difatti quello di consentire agli allievi – attraverso un esercizio di funzionamento – di consolidare e applicare quanto appreso in precedenza, e, all'insegnante, di verificare l'acquisizione degli obiettivi preposti per la seconda attività.

Questa fase dunque, non si propone di introdurre nuovi concetti e strategie ma vuole favorire le condizioni per agevolarne l'acquisizione in seguito. Inoltre consente un proseguimento di progettazione il cui livello di difficoltà risulta adeguato alle possibilità degli alunni inerenti all'incertezza, in modo che le osservazioni che si faranno siano strettamente attinenti all'incertezza introdotta.

L'esercitazione viene svolta dagli alunni per iscritto e individualmente.

Obiettivi

– Consolidare i concetti di *probabile*, *possibile*, *impossibile*, *certo.*
– Applicare le strategie e le conoscenze apprese per quantificare la probabilità di vincere al gioco.

La scheda distribuita agli allievi.

La pesca ai... cubetti colorati

Ricordi il gioco di Andrea? Vincevi se pescavi da un sacchetto a tua scelta un cubetto di colore rosso, mentre perdevi in caso contrario.

Allora si trattava di scegliere tra 2 sacchetti, mentre ora ce ne sono ben 4!

Il **1° sacchetto** contiene:
- 10 cubetti rossi
- 2 cubetti verdi
- 3 cubetti gialli

Nel **2° sacchetto** ci sono:
- 6 cubetti rossi
- 11 cubetti verdi
- 8 cubetti gialli

Nel **3° sacchetto** ci sono:
- 3 cubetti verdi
- 8 cubetti gialli

Nel **4° sacchetto** abbiamo:
- 12 cubetti rossi
- 8 cubetti verdi
- 4 cubetti gialli

Rispondi alle domande:

1. **Quale sacchetto scegli per avere più probabilità di vincere? Perché?**
2. **Con quali sacchetti è possibile che tu vinca?**
3. **Quale sacchetto scegli per giocare lealmente?**
4. **E se vuoi imbrogliare Andrea? Disegna un sacchetto contenente cubetti rossi, verdi e gialli in modo che per lui sia possibile, ma meno probabile, vincere!**

Quinta attività

Nuovamente, gli allievi si trovano ad affrontare una situazione di incertezza. A differenza di quanto proposto nella seconda attività, essa è inoltre caratterizzata da informazione incompleta.

La metodologia adottata è la stessa della seconda attività.

L'intento dell'insegnante è quello di centrare l'attenzione sul fatto che in situazioni di incertezza caratterizzate da informazione incompleta, si può ipotizzare un intervallo di risultati possibili (la cui ampiezza è solitamente proporzionale al grado di ignoranza dell'evento considerato), non potendo tuttavia pervenire a un'unica soluzione certa.

Obiettivi:
- Ricercare una soluzione di gruppo e lasciarne una traccia scritta.
- Giustificare le proprie conclusioni; cercare di spiegare i procedimenti effettuati.
- Osservare come le informazioni a disposizione consentano unicamente di ipotizzare una serie di risultati possibili.
- Prendere atto che le decisioni dei vari gruppi non possono prescindere da una componente di soggettività.

Lo scritto consegnato agli alunni è il seguente.

Il gioco di Andrea si complica!

Ricordi il gioco di Andrea? Quanto ti propone questa volta è simile, ma ora abbiamo 3 sacchetti con cubetti blu, cubetti verdi e altri gialli, ma di alcuni non si conosce esattamente il colore.

Puoi pescare a caso 1 cubetto da un sacchetto a tua scelta. Se ne peschi uno blu vinci tu, mentre se peschi un cubetto di un altro colore vince Andrea.

Il **1° sacchetto** contiene:
• 4 cubetti blu
• 5 cubetti verdi
• 5 cubetti gialli

Nel **2° sacchetto** abbiamo:
• 4 cubetti blu
• 11 cubetti gialli
• 7 cubetti di cui non sappiamo il colore

Nel **3° sacchetto** ci sono:
• 2 cubetti blu
• 16 cubetti verdi
• 2 cubetti di cui non sappiamo il colore

Quale sacchetto sceglieresti?

Sesta attività

L'ultima attività è dedicata alla raccolta delle produzioni testuali autonome degli allievi e pertanto si svolge come nella terza attività.

Di nuovo il compito assegnato viene eseguito individualmente e in forma scritta.

Obiettivi
- Leggere con attenzione il testo, cercando di comprendere le posizioni dei due amici fittizi.
- Esprimere per iscritto il proprio parere, avendo cura di essere sufficientemente esaustivo nei confronti dei destinatari.

Di seguito, il testo distribuito alla classe.

Scommettiamo?

Andrea propone a Francesco il gioco della pesca ai cubetti che tu conosci e i due decidono di scommettere addirittura la loro paghetta settimanale! Alberto, tifa per Francesco e si sente in dovere di dargli alcuni consigli:

Alberto: *Per vincere la scommessa devi analizzare bene la situazione e scegliere il sacchetto più conveniente, giusto? Ne abbiamo 2*:

Il **1° sacchetto** contiene:
- 8 cubetti blu
- 9 cubetti verdi
- 10 cubetti gialli

Nel **2° sacchetto** ci sono:
- 6 cubetti blu
- 9 cubetti verdi
- 12 cubetti di cui non sappiamo il colore

Visto che nel primo hai 8 cubetti blu e nel secondo solo 6, devi scegliere il primo, così hai maggiori probabilità di vincere!

Francesco: *Ma non vedi che così ho solo 8 possibilità di vincere su 27 e invece Andrea ne ha ben 19? No, no, io scelgo il secondo…se i 12 cubetti di cui non sappiamo il colore fossero blu, avrei molte più probabilità di vincere la sua paghetta e di comprarmi un sacco di figurine…*

Alberto: *Che genio! E se invece i 12 cubetti fossero tutti verdi e gialli? Quante probabilità avresti di salvare la TUA di paghetta?*

Francesco: *Non ci avevo pensato… e ora? Come faccio?*

E tu? Che cosa ne pensi?

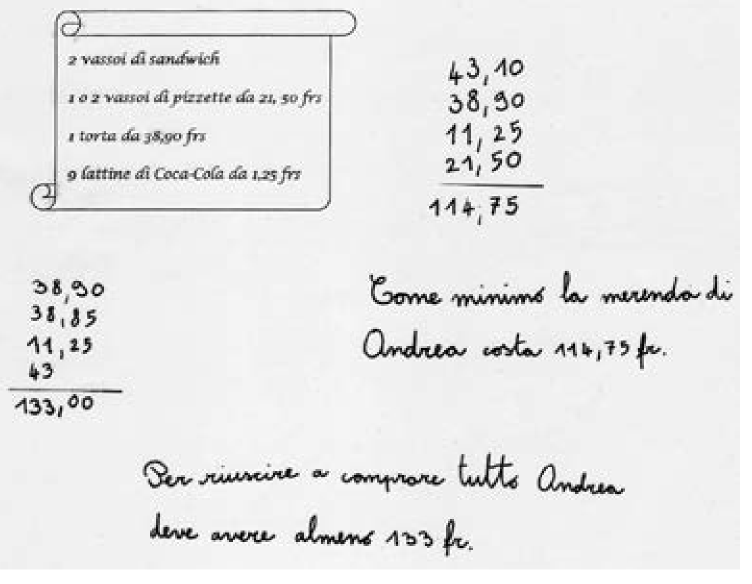
Consuntivo dell’itinerario

Prima attività

Il confronto con una prima situazione di informazione incompleta, ha consentito agli allievi di prendere atto che in simili circostanze un’analisi dei dati non conduce a un esito unico, ma più risultati sono ipotizzabili. Si tratta tuttavia di una conclusione a cui il gruppo-classe è giunto non senza una certa *resistenza* da parte di qualcuno, secondo cui non era ammissibile una via di risoluzione così imprecisa, per lo meno non in ambito matematico. Per ovviare a tale ostacolo infatti, più di un alunno ha proposto di stabilire una sorta di «via di mezzo» tra le diverse alternative che la situazione richiede di considerare, in maniera da pervenire a un unico risultato.

Un ulteriore elemento di conferma della tensione cognitiva che essa ha suscitato risiede negli scritti prodotti dai diversi gruppi: questi ultimi si sono concentrati prevalentemente sui processi attuati per la loro risoluzione, trascurando invece di verificare la correttezza dei calcoli effettuati. Si sono osservati infatti errori di calcolo in operazioni semplici, considerato il livello scolastico degli allievi, come se in questa circostanza fossero troppi gli aspetti da tenere sotto controllo.

Anche se si voleva focalizzare l’attenzione su ben altro e sebbene gli errori di calcolo non abbiano ostacolato il conseguimento degli obiettivi preposti, si è tenuto conto anche di ciò nella progettazione delle attività successive.



Traccia scritta della risoluzione di un gruppo.

Seconda attività

La reazione della classe, alla richiesta di prendere una decisione facendo capo al ragionamento probabilistico, è stata sorprendente. Che in situazioni simili non si possa giungere a un risultato inequivocabile, è parso evidente, così come la distinzione tra esiti possibili e impossibili e tra esiti più o meno probabili. Di conseguenza, l’acquisizione degli obiettivi preposti non ha posto alcuna difficoltà.

Un aspetto particolarmente significativo riguarda la progressiva messa a punto da parte degli alunni, di un linguaggio *scientifico* in modo naturale, attraverso l'uso di espressioni come «probabile», «impossibile», «maggiori probabilità», «percentuale» e così via. Ciò si è verificato specialmente in fase di confronto e discussione dei risultati e delle strategie applicate.

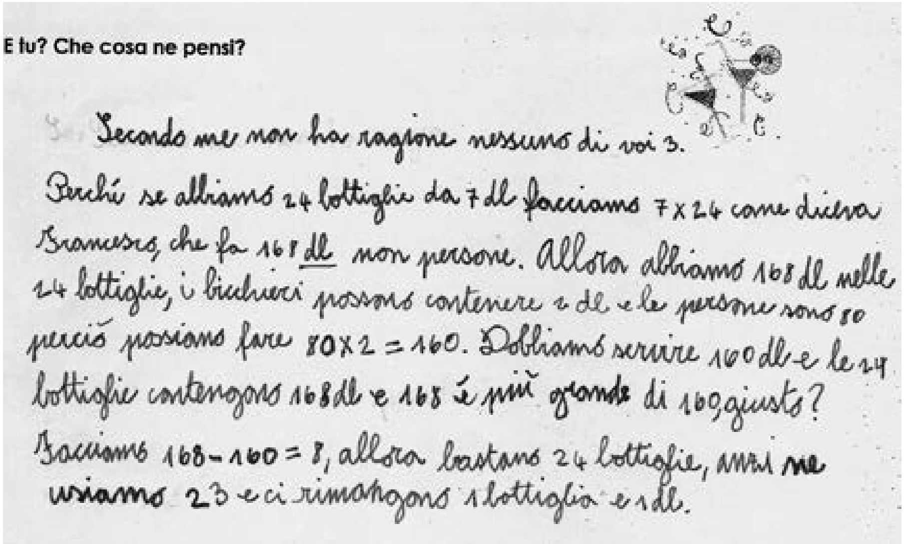
Immagini degli allievi al lavoro.

Terza attività

I risultati ottenuti sono confortanti, in quanto consentono di confermare la validità dei TEPs come strumento per valutare la conoscenza personalmente costruita e la comprensione di idee matematiche, dal momento che l'allievo si trova *effettivamente* implicato nell'incarico assegnatogli. Tale condizione, lo spinge dunque ad esprimersi spontaneamente, svincolato da condizionamenti.

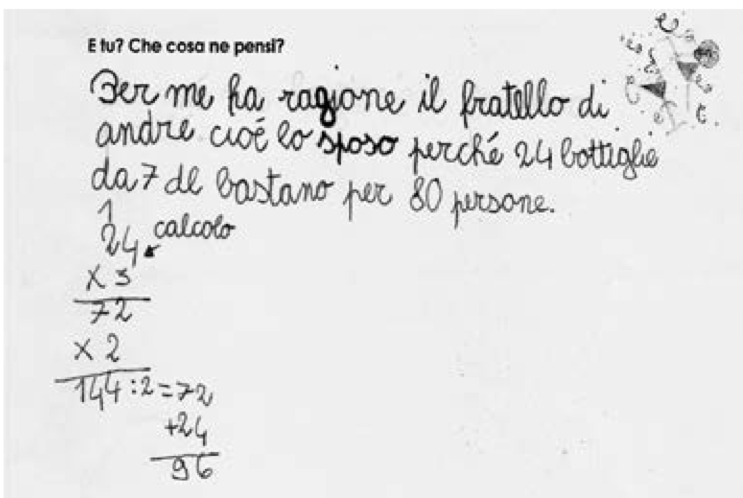
Sono ricorrenti le espressioni degli allievi in cui è possibile trovare conferma di ciò, come nel rimprovero di un'allieva per le posizioni assunte dai tre destinatari fittizi: «avete fatto dei calcoli e dei ragionamenti sbagliati!», oppure come nella proposta scherzosa di un altro alunno: «una parte [del succo d'arancia da distribuire] la diamo agli invitati e quello che resta ce lo beviamo noi!».

Anche la capacità di redigere un testo in grado di riassumere il proprio pensiero in maniera sufficientemente articolata e chiara, quale prerequisito per un uso efficace dei TEPs, trova conferma, come si può notare nell'esempio seguente:


E tu? Che cosa ne pensi?

Secondo me non ha ragione nessuno di voi 3.
Perché se abbiamo 24 bottiglie da 7 dl facciamo 7x24 come diceva Francesca che fa 168 dl non persone. Allora abbiamo 168 dl nelle 24 bottiglie, i bicchieri possono contenere 2 dl e le persone sono 80 perciò possiamo fare 80x2=160. Dobbiamo servire 160 dl e le 24 bottiglie contengono 168 dl e 168 è più grande di 160, giusto? Facciamo 168-160=8, allora bastano 24 bottiglie, anzi ne usiamo 23 e ci rimangono 1 bottiglia e 1 dl.

Sebbene un giudizio sulla correttezza delle risposte non sia oggetto di interesse in questa fase, è difficile trascurare la risoluzione scritta di due allievi, la quale sembra essere insensata, come se la scelta dei numeri tra quelli forniti dall'enunciato sia giustificabile semplicemente con l'esigenza di fornire una risposta ad ogni costo, come si può osservare di seguito:


E tu? Che cosa ne pensi?

Per me ha ragione il fratello di andre cioè lo sposo perché 24 bottiglie da 7 dl bastano per 80 persone.

calcolo

24
x 3
72
x 2
144 : 2 = 72
+24
96

In ciò si ritrovano di nuovo effetti del contratto didattico, così come chiarito da D'Amore (1999) e riportato in fase di definizione dell'approccio teorico.

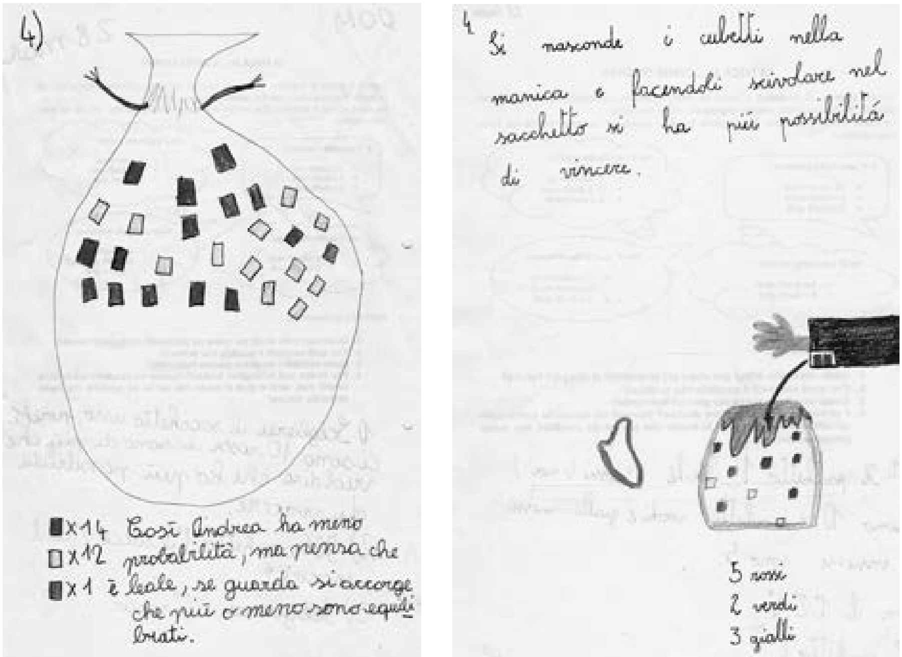
Quarta attività

La situazione in cui si sono trovati a confronto gli alunni, ha attribuito loro un ruolo fondamentalmente esecutivo, mettendo in atto e consolidando quanto appreso nella seconda attività. In tal senso costituisce altresì uno strumento di verifica dell'acquisizione degli obiettivi ad essa associati.

In questa sede sono quindi posti in primo piano i prodotti degli allievi, la cui analisi fa supporre un terreno favorevole al proseguimento dell'itinerario, con l'introduzione di situazioni di incertezza caratterizzate da informazione incompleta.

Più precisamente, quasi la totalità della classe ha risposto con esattezza a tutti e quattro i quesiti posti, dimostrando di padroneggiare le competenze richieste.

L'implicazione degli allievi nella risoluzione dell'esercizio è manifesta specialmente nelle risposte all'ultimo quesito, in cui si domandava di imbrogliare l'avversario pensando a una situazione che consentisse maggiori probabilità di vincita. In quest'occasione, essi hanno escogitato stratagemmi degni di nota, suggerendo di nascondersi alcuni cubetti vincenti nella manica o dando spazio all'inventiva attraverso altro genere di raggiri, come scrive un alunno: «… li ho messi in fondo perché almeno so già dove sono [quando si tratterà di estrarli]».



Esempi di risoluzione dell'esercitazione.

Quinta attività

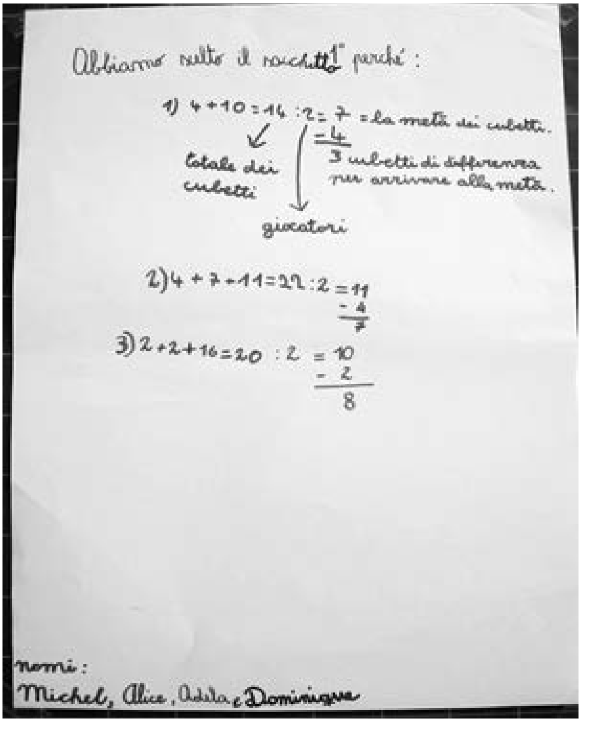
La teoria delle situazioni trova qui piena conferma: è la successione stessa delle quattro categorie proposte a richiedere un atto creativo degli allievi, che si traduce nella *costruzione* della conoscenza che si vuole che essi apprendano.

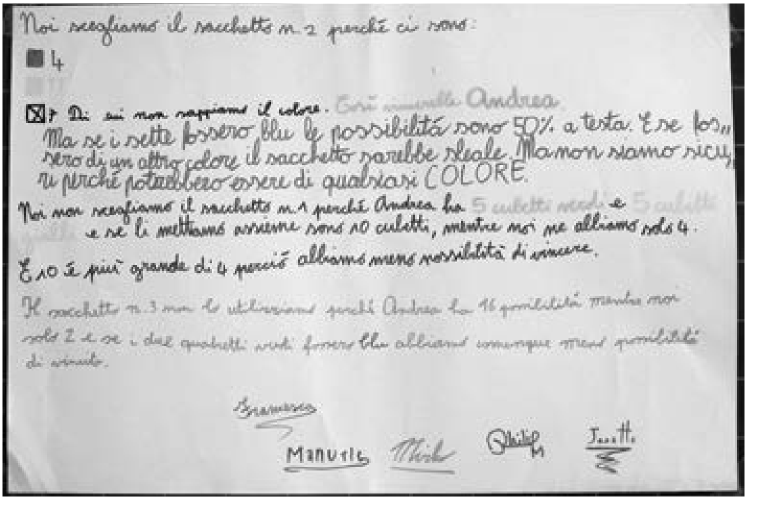
L'accesa fase di discussione delle scelte effettuate, si risolve infatti con la constatazione che un'analisi razionale dei dati non consente una decisione tra i primi due casi, e che quindi soltanto il terzo è escludibile dalla scelta. A sostegno di ciò, addirittura, alcuni alunni osservano che le ragioni di tale considerazione sono associabili a quanto visto nella prima attività, riferendosi alla situazione del «compleanno di Andrea». Si può quindi parlare di una rivisitazione ed evoluzione delle opinioni iniziali, considerando che dopo la prima fase di lavoro a gruppi, ciascuno di essi era concorde nel preferire o la prima o la seconda situazione.

La fase di validazione – che in questa attività si distingue per maggiore interesse – consente inoltre di mettere in luce come nelle posizioni iniziali degli allievi risiedesse anche una dimensione che si distingue dalla trattazione matematica dell'informazione e che potremmo definire *emozionale*.

Si ritrova ad esempio il paradosso di Ellberg di avversione all'ambiguità, nella giustificazione data dai rappresentanti del gruppo che ha preferito la prima soluzione, non conveniente ma in cui tutte le informazioni sono a disposizione: «almeno qui noi sappiamo tutto e che non ci sono imbrogli!». Qualcun altro invece osserva che a questo punto si hanno elementi a sufficienza per conoscere il personaggio fittizio, presente in ognuna delle attività, e per valutare che Andrea non si è certo distinto per la sua onestà. Da qui non si può che concludere che, nei casi di informazione incompleta, i dati non noti saranno a suo favore (e in un certo senso, come dargli torto?).

Per prendere le distanze da tale dimensione e per elaborare in maniera razionale i dati, risulta quindi necessario un processo che faccia vacillare la loro posizione, e che induca a tenere conto di visioni per lo meno in parte conflittuali con la stessa, in modo da pervenire alla definizione di un modello più sofisticato rispetto al precedente.





I cartelloni realizzati da due gruppi.

Sesta attività

Essendo l'ultima attività riservata alla raccolta delle produzioni testuali autonome degli allievi, per un suo commento si rinvia al paragrafo successivo.

Analisi dei dati

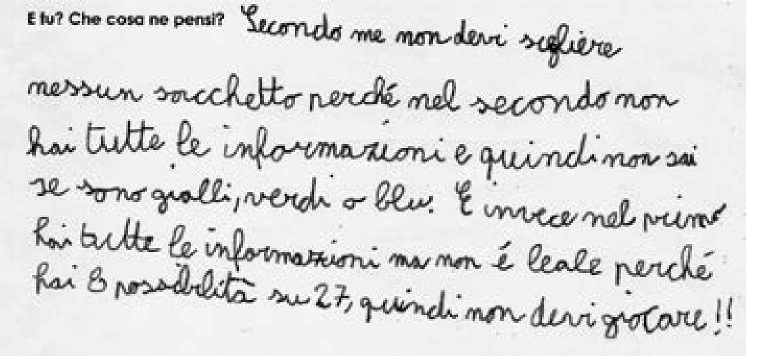
Per sviluppare un'analisi dei TEPs, si è seguita la procedura proposta da D'Amore e Meier (2002), in cui gli scritti vengono classificati in un sistema di categorie.

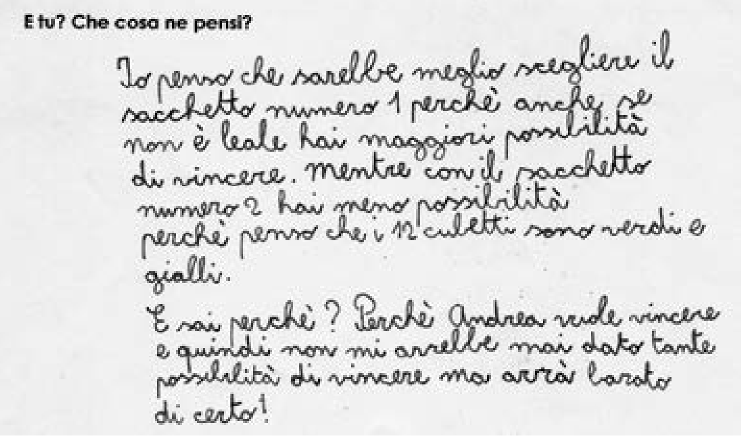
Per questa via appaiono esplicitamente due categorie che confermano a livello individuale quanto emerso in fase di discussione collettiva durante la quinta attività. Per cui, secondo 14 allievi, le informazioni a disposizione non sono sufficienti per effettuare una scelta razionale. Mentre che per 5 alunni è preferibile la situazione in cui tutte le informazioni sono note.

Per quanto concerne la prima e più consistente delle categorie, le idee che gli alunni hanno espresso nei TEPs sono molto simili tra di loro: analizzano un caso alla volta, spiegando al destinatario fittizio della comunicazione come il primo sacchetto di cubetti non sia conveniente e come il secondo non sia valutabile, perché l'intervallo dei risultati possibili è eccessivamente ampio. Concludono quindi che l'elevato grado di ignoranza dell'evento considerato non consente di giungere a una decisione.

Si distinguono all'interno di questa categoria gli scritti di due allievi, i quali pur non prendendo una decisione finale, non dichiarano esplicitamente come ciò sia razionalmente impossibile.

Quanto alla seconda categoria, come riscontrato all'interno della quinta attività, le motivazioni che inducono a preferire la situazione dove non vi sono dati di cui non si è a conoscenza, sono attribuibili: ad avversione verso l'ambiguità (3 allievi); alla convinzione che il personaggio fittizio (Andrea) abbia manipolato i dati sconosciuti a suo favore. Nuovamente, quindi, si osserva come affiori, a lato della trattazione razionale dell'informazione, la dimensione emozionale.


E tu? Che cosa ne pensi? Secondo me non devi scegliere nessun sacchetto perché nel secondo non hai tutte le informazioni e quindi non sai se sono gialli, verdi o blu. E invece nel primo hai tutte le informazzioni ma non é leale perché hai 8 possibilità su 27, quindi non devi giocare!!


E tu? Che cosa ne pensi?

Io penso che sarebbe meglio scegliere il sacchetto numero 1 perchè anche se non è leale hai maggiori possibilità di vincere. mentre con il sacchetto numero 2 hai meno possibilità perchè penso che i 12 cubetti sono verdi e gialli.
E sai perchè? Perchè Andrea vuole vincere e quindi non mi avrebbe mai dato tante possibilità di vincere ma avrà barato di certo!

Esempi di TEPs

Ripresa dell'interrogativo di ricerca

«Quali effetti può produrre il porre l'allievo di V elementare di fronte a situazioni di incertezza e in cui si trattano casi di informazione incompleta?»

In primo luogo si supponeva che gli allievi fossero in grado di confrontarsi con situazioni probabilistiche caratterizzate da informazione incompleta, trattando in maniera razionale i dati a disposizione. La realizzazione pratica del percorso metodologico-didattico, consente di confermare a pieno questa prima ipotesi, pur osservando come in tale contesto siano emerse in più di un'occasione posizioni che si discostano dalla trattazione matematica dell'informazione.

Trova conferma anche la seconda delle ipotesi formulate, secondo cui le situazioni problematiche proposte avrebbero suscitato curiosità e interesse e favorito la motivazione degli allievi. Sebbene sia innegabile l'importanza della dimensione motivazionale, risulta difficile attribuire tale merito esclusivamente alle peculiarità delle situazioni caratterizzate da incertezza e da informazione incompleta. Esse sono sì realistiche e vicine all'esperienza dell'allievo, ma non si può escludere che la scelta dell'approccio metodologico abbia contribuito ad implicare attivamente gli alunni nelle diverse attività. Inoltre non vanno trascurate le grandi opportunità in tal senso che la dimensione ludica offre, specialmente in ambito di scuola primaria. Si tratta dunque di un complesso legato a una molteplicità di fattori, difficilmente scindibili e valutabili singolarmente.

Infine l'ipotesi che le situazioni proposte venissero percepite di difficile risoluzione non trova riscontro nell'esperienza pratica. Si è osservata invece un'effettiva tensione cognitiva che ha sollecitato gli alunni al superamento di quegli ostacoli che impedivano il conseguimento di uno scopo.

Osservazioni conclusive

L'introduzione in classe della probabilità, ha consentito di osservare come essa sia un argomento ben accetto e di grande attrazione, specialmente se proposto attraverso giochi aleatori e sperimentazioni pratiche.

La probabilità imprecisa inoltre – caratterizzata da informazione incompleta – richiedendo di lavorare con intervalli di probabilità o con probabilità minime e massime ha contribuito a suscitare curiosità e interesse. Difficilmente, infatti, situazioni poco credibili, di stampo classico, avrebbero potuto presentarsi con il giusto grado di problematicità, consentendo un effettivo coinvolgimento da parte degli allievi.

Per quanto concerne la realizzazione delle attività, non sono state necessarie scelte didattiche laboriose. Al contrario, pochi e semplici mezzi didattici e materiali hanno consentito alla classe di visualizzare senza difficoltà le situazioni date e i compiti da svolgere, così come di effettuare giochi aleatori.

Le diverse situazioni proposte hanno dimostrato il grande pregio di favorire tutta una serie di operazioni mentali, che vanno dall'inventiva alla capacità di giudizio critico e che consentono di comprendere la realtà nei suoi diversi aspetti.

Del resto, ogni insegnante dovrebbe essere consapevole delle enormi potenzialità formative consistenti nel risvegliare, attraverso situazioni di *problem solving*, la curiosità e il ragionamento originale. Come sostiene George Polya:

> Risolvere problemi significa trovare una strada per uscire da una difficoltà, una strada per aggirare un ostacolo, per raggiungere uno scopo che non sia immediatamente raggiungibile. Risolvere problemi è un'impresa specifica dell'intelligenza e l'intelligenza è il dono specifico del genere umano: si può considerare il risolvere problemi come l'attività più caratteristica del genere umano[1].

Limiti e possibili sviluppi

Che in un'ottica semplicistica, le conclusioni a cui si è pervenuti siano generalizzabili, è lontano da ogni pretesa dell'autrice del presente lavoro. La consapevolezza delle limitate risorse a disposizione ha infatti reso preferibile una ricerca di tipo qualitativo, i cui risultati avrebbero riguardato un numero ristretto di individui. All'origine di tale scelta risiedeva la convinzione che per questa via sarebbe stato possibile raggiungere un grado di approfondimento e di significatività dei risultati maggiore rispetto a una ricerca di tipo quantitativo.

---

1. Polya, G. 1945. *How solve it*. Milano: Feltrinelli. Citato in D'Amore 2001, 110.
2. L'esempio più classico in questo senso, rimane quello del lancio di un dado, in cui le probabilità sono costruite a partire da una considerazione di equiprobabilità.

Per quanto concerne le attività proposte, le circostanze hanno richiesto che si proponessero variazioni, via via più complesse, della stessa situazione di partenza. Sarebbe tuttavia interessante osservare la capacità degli alunni di trasposizione delle conoscenze acquisite a situazioni problematiche nuove.

Infine, si è favorita la trattazione della probabilità imprecisa attraverso situazioni di probabilità aleatoria, che modellizzano situazioni più vicine alla realtà rispetto a quelle classiche[2]. La seconda grande famiglia delle probabilità riguarda invece le probabilità epistemiche. Queste modellano la convinzione parziale, logica o psicologica di un individuo (Piatti 2005, 141-155) e dipendono dall'evidenza a disposizione dell'osservatore[3].

In questa direzione potrebbe idealmente orientarsi uno sviluppo del presente lavoro, giacché più spesso il pensiero di un individuo si riferisce a convinzioni personali e all'evidenza a disposizione, che non esclusivamente a caratteristiche fisiche dei fenomeni osservati.

3. Un esempio di questo tipo di probabilità risiede nello studente che si chiede quali siano le probabilità di superare gli esami, come illustrato da Piatti (2005, 14-155).

Arrigo, G.
Verifica della qualità dell'apprendimento: le produzioni testuali autonome degli allievi (TEPs). *Bollettino dei docenti di matematica*, no. 46 (maggio): 67-72, 2003.

Brousseau, G.
Théorie des situations didactiques. Grenoble: La Pensée sauvage, 42, 1998.

D'Amore, B.
Elementi di didattica della matematica. Bologna: Pitagora Editrice, 102, 1999.

D'Amore, B.
Didattica della matematica. Bologna: Pitagora Editrice, 2001.

D'Amore, B.
Problemi di matematica nella scuola primaria. Bologna: Pitagora Editrice, 2003.

D'Amore, B., & H. Meier.
Produzioni scritte degli studenti su argomenti di matematica e loro utilizzazione grafica. *La matematica e la sua didattica,* no. 2 (aprile): 144-189, 2002.

Di Maria, A. I bambini e la probabilità: studio sulla trattazione di situazioni problematiche caratterizzate da incertezza e informazione incompleta in 5a elementare. Lugano: Università della Svizzera Italiana, 2006.

Divisione della scuola, Ufficio dell'insegnamento primario.
Programmi per la scuola elementare. 2. ed. Bellinzona: Repubblica e Cantone Ticino, Dipartimento dell'istruzione e della cultura, 1997.

Ellsberg, D.
Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms. *Quarterly Journal of Economics* 75: 643-669, 1961.

Gabellino, G., & F. Masi.
I problemi. Roma: Carocci Faber, 2005.

Guidicini, P.
Nuovo manuale della ricerca sociologica. Milano: Franco Angeli Editore, 1985.

Maurin, Claude, & Alberte Johsua
Les structures numériques à l'école primarie. Paris: Ellipses, 1993.

Piatti, A.
Le diverse interpretazioni del concetto di probabilità e le loro implicazioni didattiche. *Bollettino dei docenti di matematica*, no. 49 (dicembre): 105-116, 2004.

Piatti, A.
Elementi di matematica per le scienze della comunicazione. Lugano: Università della Svizzera Italiana, 2005.

Piatti, A., & G. Arrigo
Modellare l'ignoranza in probabilità. Sintesi teorica e riflessione didattica. *Bollettino dei docenti di matematica*, no. 48 (maggio): 53-63, 2004.

Piatti, A., & G. Arrigo
Il senso della probabilità è impreciso. *Bollettino dei docenti di matematica*, no. 50 (maggio): 55-67, 2005.

Piatti, A., & G. Zenoni
Immagini mentali e numeri in seconda media. *Bollettino dei docenti di matematica*, no. 47 (dicembre): 59-65, 2003.

Quivy, R., & L. Van Campenhoudt.
Manuel de recherche en sciences sociales. Paris: Dunod, 1995.

Rossera-Tralamazza, R.
Numero e numerazione con il bambino. Bellinzona: Centro didattico cantonale, 87.

Zani, B., P. Selleri, & D. David.
La comunicazione, 1998, 5.ed. Roma: Carocci, 179, 1997.

3. Attività di pre-analisi: loro importanza ed esempi[1]

Gianfranco Arrigo

Why does the study of the mathematical analysis cause students a lot of trouble? Why should the concepts of integral, derivative and limit be much harder than those of elementary algebra and geometry? Or, why is the mathematical infinite introduced only in the final year of high school, when it is discussed in abstract and formalized way? This article encourages all teachers to bring up in their classes activities concerning the mathematical infinite, starting already at elementary school or in the first years of secondary school.

1. L’analisi matematica è difficile?

È opinione assai diffusa che lo studio dell’analisi matematica crei parecchie difficoltà agli studenti. Si potrebbe pensare che ciò sia dovuto esclusivamente al fatto che concetti come quelli di limite, di derivata e di integrale si rivelano ben più ardui di quelli dell’algebra e della geometria elementari. Essi poggiano infatti su quello di infinità attuale, che comporta ostacoli epistemologici ben conosciuti e che sono stati studiati anche in seno al NRD di Bologna (Arrigo G. - D’Amore B., 1999, 2002)[2]. Ma nelle ricerche citate è subito apparso evidente che l’apprendimento del concetto di infinito è inibito anche dalla presenza di ostacoli didattici. È appunto su questi che voglio porre l’attenzione. Osservo che, ai fini del miglioramento dell’apprendimento, questi ostacoli sono, almeno in parte, rimovibili, a condizione che siano ben conosciuti dall’insegnante e che si riesca a proporre rimedi applicabili in classe. Inoltre faccio notare che, tradizionalmente, le prime immagini mentali di tipo algebrico (per esempio concernenti i numeri e le operazioni) e di tipo geometrico (per esempio relative alle figure geometriche) l’allievo se le può costruire sin dai primi giorni di scuola, mentre le immagini mentali sull’infinito matematico se le può formare solo negli ultimi anni degli studi superiori e, ciò che preoccupa maggiormente, queste immagini devono subito diventare modelli di un certo grado di formalizzazione.

1. Questo articolo è la rielaborazione del testo del seminario per gli insegnanti delle scuole superiori tenuto dall’autore in occasione del Convegno del ventennale svoltosi a Castel San Pietro Terme (Bo) nei giorni 4-6 novembre 2006.
2. La ricerca ha poi conosciuto una terza fase, condotta da Bruno D’Amore, alla quale hanno partecipato ricercatori del NRD di Bologna, dell’ASP di Locarno (Svizzera) e del MESCUD di Bogotà (Colombia). Vedere in particolare il rapporto Il «senso dell’infinito», pubblicato sulla rivista *La matematica e la sua didattica*, n. 2, pp. 46-83.

Algebra e Geometria	Analisi
Prime immagini mentali: già alla scuola dell'infanzia.	Alla scuola dell'infanzia: niente.
Alla scuola primaria: primi raffinamenti.	Alla scuola primaria: niente.
Alla scuola media: prime importanti sistemazioni.	Alla scuola media: niente.
Nelle prime classi superiori: altri accomodamenti, generalizzazioni.	Nelle prime classi superiori: niente.
Nelle classi terminali: formalizzazioni.	Nelle classi terminali: tutto.

Tab. 1 Le diverse situazioni di algebra e geometria da una parte e analisi dall'altra, nell'insegnamento tradizionale.

2. Il caso singolare del concetto di infinito matematico

A partire dalla seconda metà del XIX secolo, grazie soprattutto ai lavori dei matematici tedeschi (da Cantor a Dedekind), il concetto di infinito è stato rigorosamente sistemato e con esso anche tutta la matematica che ne faceva uso esplicito, denominata poi «analisi matematica». Ai giorni nostri non dovrebbe perciò esistere alcun pregiudizio nei suoi confronti. La realtà, almeno quella scolastica che ci interessa direttamente, pare però essere assai diversa. È difficile trovare un insegnante della scuola primaria che si preoccupi di far compiere ai propri alunni esperienze con l'infinito matematico, ma è pure difficile trovarne uno della scuola media che faccia altrettanto e l'osservazione vale addirittura anche nel caso di insegnanti della scuola superiore, se rapportata ai primi anni di quel ciclo di studi. Insomma, sembrerebbe di trovarsi di fronte a una proibizione non esplicitata, ma seguita da tutti, com'era il caso dell'educazione sessuale fino a qualche decennio fa. Eppure non è difficile constatare come le prime immagini spontanee della quantità infinita si trovino già nella mente dei bimbi di 4-5 anni. Ora, si può ben pensare che fra queste immagini, largamente incomplete, ve ne siano alcune che contengono idee matematicamente errate. Sappiamo benissimo che tali immagini, se lasciate sedimentare per anni, si trasformano in misconcezioni e quindi in solidi modelli parassiti (D'Amore B., 1999). Questo fenomeno, a mio avviso, è il principale responsabile delle difficoltà che gli studenti delle superiori incontrano nello studio dell'analisi. Eppure, mi si dirà, tali difficoltà non sono generali, ma limitate a una minoranza di studenti, perché, se si esaminano i testi degli esami di maturità, si può ben concludere che esigono buone conoscenze di analisi, talvolta anche nozioni di una certa raffinatezza. Qui sta uno dei malintesi più grandi a proposito dell'apprendimento della matematica. Si identifica cioè il «saper fare un esercizio» con la «conoscenza» o peggio ancora con la «competenza» in matematica. Per *conoscenza* intendo la rielaborazione autonoma di contenuti appresi allo scopo di raggiungere un certo obiettivo e il risultato di tale elaborazione; per *competenza* intendo quel concetto complesso e dinamico che comprende la padronanza della conoscenza, l'accettazione dello stimolo a farne uso e il desiderio di accrescere la propria conoscenza, dunque di aumentare la competenza stessa (D'Amore, Godino, Arrigo, Fandiño Pinilla, 2003).

Nella ricerca concernente la «robustezza» degli apprendimenti ho potuto indagare proprio su questo punto (Arrigo G., 2004). La ricerca ha coinvolto un gran numero di classi svizzere e italiane, dalla prima primaria al primo anno delle superiori. Le classi hanno svolto un determinato segmento di programma con i loro insegnanti, secondo le abituali modalità didattiche. Alla fine di questa attività è stato somministrato un test a risposte chiuse. Gli allievi che hanno ottenuto i migliori risultati sono stati in seguito sottoposti a un colloquio con lo scopo di rilevare il «grado di robustezza» degli apprendimenti che nel test avevano mostrato di possedere, secondo la scala seguente:

- *livello di robustezza 1*: l'allievo conferma la risposta data nel test, giustificandola;
- *livello di robustezza 2*: l'allievo rifiuta la controproposta del ricercatore, apparentemente corretta, motivando il suo rifiuto;
- *livello di robustezza 3*: l'allievo rifiuta la controproposta, presentata autoritariamente dal ricercatore con argomentazioni che vanno oltre le conoscenze dell'allievo.

Ebbene, un rapido sguardo ai risultati dei colloqui indica che pochi allievi raggiungono i livelli 2 e 3 di robustezza, ma anche che un certo numero di essi non raggiunge nemmeno il livello 1. È bastato dir loro *«Controlla bene la tua risposta, perché non mi convince: se vuoi cambiare, te lo lascio fare subito e non dirò niente al tuo insegnante…»* per far traballare la certezza di aver dato la risposta corretta, che in realtà lo era. L'insicurezza tradisce un apprendimento superficiale. Può essere attribuito a un contratto didattico troppo fortemente vissuto: *«faccio così perché me lo ha detto l'insegnante e così facendo sono sicuro che andrò incontro alle sue aspettative»*. Nel caso di studenti delle superiori, molto spesso, la causa è dovuta a necessità contingenti che spingono lo studente a memorizzare nozioni e procedimenti, rinunciando a capire le ragioni che li determinano: *«per favore, mi dica solo come si fa, il resto non mi interessa»* parrebbe essere la loro richiesta all'insegnante.

Con lo studio dell'analisi matematica avviene la stessa cosa, forse anche in misura maggiore. Riporto, a mo' d'esempio, un episodio vissuto come insegnante liceale. Concerne le serie infinite, in particolare la serie cosiddetta geometrica. Tutti gli allievi imparavano a calcolarne il limite e la cosa era persino divertente. Ci si sbizzarriva a calcolare la lunghezza di spirali, l'area e il volume totale di successioni di figure geometriche iterate e si riusciva a dare persino una spiegazione convincente al famoso paradosso di Achille e della tartaruga, attribuito a Zenone di Elea. Una certa soddisfazione la provavo anch'io, soprattutto perché, di solito, mi si assegnavano le classi più problematiche. Finché un giorno… giunse la clamorosa disillusione. Feci alcuni colloqui clinici ad allievi che nel compito avevano calcolato correttamente il limite della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

che vale 2.

A ciascuno di questi studenti, fra i più brillanti della classe, proposi lo stesso ragionamento:

$$\sum_{n=0}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots$$

calcoliamo a mente anche solo la somma dei primi tre termini; otteniamo 1,75: un valore già molto vicino a 2. Ora attento: potendo continuare, aggiungeremmo ogni volta un numero positivo, cioè aumenteremmo la somma, e ciò, in teoria, un numero infinito di volte. Ti pare credibile che il risultato sia solo 2?

Ebbene, solo uno studente su 6 mi ha detto con una certa sicurezza che la somma è 2, aggiungendo che, anche se infiniti, gli addendi diventano sempre più piccoli, fin quasi ad annullarsi. Gli altri si sono dichiarati sicuri del fatto che, continuando ad aggiungere numeri positivi, si sarebbe superato 10, 100, 1000, insomma che la serie sarebbe stata addirittura divergente.

Questo è uno degli episodi che mi hanno fatto capire come sia illusorio accontentarsi della riuscita negli esercizi. Il vero apprendimento, la conoscenza, la competenza sono ben altra cosa ed è verso questi traguardi che occorre dirigersi.

Constatazioni analoghe si possono fare con ogni concetto di analisi. Per esempio il famoso rapporto incrementale, che gli studenti all'esame di maturità normalmente non sbagliano nella forma generale

$$\frac{\mathrm{f}(x+\Delta x)-\mathrm{f}(\mathrm{x})}{\Delta \mathrm{x}}$$

ma che poi non sanno applicare correttamente, per esempio nel caso f(x)=1/x, arrivando a scrivere

$$\frac{\left(\frac{1}{\mathrm{x}}+\Delta \mathrm{x}\right)-\frac{1}{\mathrm{x}}}{\Delta \mathrm{x}}$$

«Disattenzione, mancanza di concentrazione,…» sono i commenti che di solito fa l'insegnante. In realtà l'errore tradisce un apprendimento superficiale. Molto probabilmente lo studente non ha mai incontrato, negli anni precedenti allo studio dell'analisi, situazioni in cui il rapporto incrementale sia significativo. Manca cioè un'esperienza euristica su cui appoggiarsi.

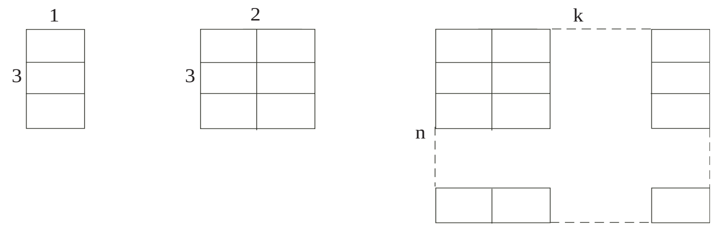
Siamo giunti al punto focale di questo breve intervento, che potrebbe ridursi a un chiaro e caloroso appello a tutti gli insegnanti: curare sin dalla scuola primaria, ma soprattutto nella scuola media e nei primi anni delle superiori, la formazione di immagini mentali corrette sull'infinito (potenziale e attuale), sulla cardinalità degli insiemi infiniti e sulla manipolazione algebrica dell'infinito.

In particolare: si tratta di far prendere coscienza agli allievi, mediante la pratica di opportune situazioni, che con le quantità infinite non valgono molte delle affermazioni che in ambito finito sono corrette e persino ovvie. Ciò significa dare importanza, anche nei documenti programmatici, alle attività di pre-analisi.

3. Alcuni esempi di attività di pre-analisi

3.1. Tabelle…

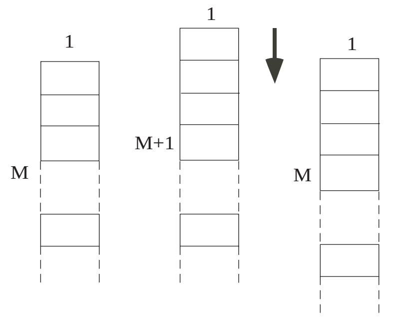
Caso finito



caselle: 1·3 caselle: 2·3 caselle: k·n

Tabella con infinite righe

Siano M il cardinale di un insieme infinito numerabile; n, k numeri naturali.

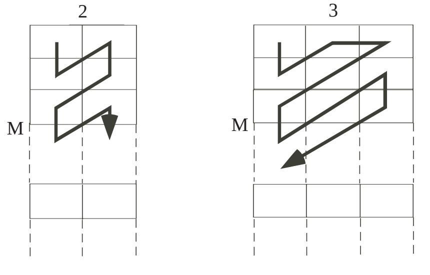


caselle: 1·M caselle: 1·(M+1) caselle: 1·M

Nuovo risultato:

M=M+1 M=M+2 … M=M+k

Tabella con più colonne infinite

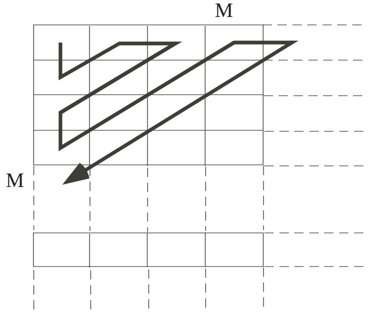


caselle: 2·M caselle: 3·M

I percorsi indicati passano una e una sola volta da ogni casella, quindi queste tabelle possono essere trasformate in tabelle 1xM senza che il numero delle loro caselle cambi. Nuovo risultato:

2·M=M 3·M=M … k·M=M

Tabella con infinite righe e infinite colonne



Anche in questo caso esiste almeno un percorso che passa una e una sola volta da ogni casella; quindi anche queste tabelle possono essere trasformate in tabelle 1xM senza che il numero delle loro caselle cambi. Nuovo risultato:

$M \cdot M = M^2 = M$ $M^3 = M$ … $M^k = M$

Esempio 1: la peculiarità degli insiemi infiniti

Secondo la definizione di Galileo-Dedekind, un insieme si dice infinito se e solo se si può mettere in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria. In questa definizione c'è la forte presenza di Galileo Galilei, che circa tre secoli prima si era posto il problema se vi siano più numeri naturali di numeri quadrati:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 …

L'intuizione superficiale (a volte detta «buon senso») farebbe dire che vi sono molti più numeri naturali che numeri quadrati, ma d'altra parte Galileo si rende conto che si può stabilire un'applicazione biunivoca tra l'insieme **N** dei numeri naturali e **U** dei numeri quadrati:

$$\mathbf{N} \leftrightarrow \mathbf{U}$$
$$n \leftrightarrow n^2$$

ma ciò conduce a concludere che vi sono tanti numeri quadrati quanti numeri naturali.

Nuovo risultato:

Se I è un insieme infinito, possiede almeno una parte propria con la sua stessa cardinalità.

Questo risultato contrasta con l'ottava nozione comune di Euclide: «il tutto è maggiore della parte».

Esempio 2: somma di infiniti addendi

La seguente somma algebrica di infiniti addendi è la cosiddetta serie di Grandi[3] e porta la data del 1703:

$$s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

Vi sono almeno tre modi diversi per calcolarla.

Primo modo:

$s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$

Secondo modo:

$$s = 1 - \left[(1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots\right] = 1 - \left[0 + 0 + 0 + \ldots\right] = 1 + 0 = 1$$

Terzo modo:

$s = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + - \ldots) = 1 - s \Rightarrow 2\,s = 1 \Rightarrow s = \frac{1}{2}$

Tre modi diversi, tre risultati diversi: dove ha origine la contraddizione? Sicuramente nell'uso disinvolto (scorretto) della proprietà associativa, come ebbe a osservare già Jacopo Riccati[4]. Nuovo risultato:

In una somma infinita non si può sempre applicare la proprietà associativa.

Esempio 3: manipolazione algebrica di quantità infinite

Consideriamo la seguente funzione razionale:

$$x \xrightarrow{g} g(x) = \frac{3\,x + 11}{4\,x + 13}$$

Come si comportano i valori g(x) a mano a mano che x diventa sempre più grande?

Proviamo a calcolare un po' di valori con l'aiuto di un computer. Per far crescere più in fretta le ascisse, sostituiamo x con 3^x e poi con 10^x:

3. Luigi Guido Grandi (1671-1742), gesuita, si è occupato dello studio di curve anche non piane. Nel trattato «La versiera di Agnesi» del 1703 (Gaetana Agnesi, una delle poche matematiche italiane dell'epoca), Grandi diffonde in Italia il Calcolo di Leibniz. È in questa occasione che presenta la somma infinita, dando come unica soluzione s=1/2.
4. Jacopo Riccati (1676-1754), matematico veneto, è ricordato soprattutto per l'equazione differenziale che ha preso il suo nome, nella risoluzione della quale presenta un metodo innovativo che permette, mediante un cambiamento di variabile, di ridurre l'equazione dal secondo ordine al primo.

x	3^x	g(3^x)	10^x	g(10^x)
1	3	0.8	10	0.773584906
2	9	0.775510204	100	0.753026634
3	27	0.760330579	1000	0.750311488
4	81	0.753709199	10000	0.75003124
5	243	0.751269036	100000	0.750003125
6	729	0.750426767	1000000	0.750000312
7	2187	0.750142678	10000000	0.750000031
8	6561	0.750047606	100000000	0.750000003
9	19683	0.750015874	1000000000	0.75
10	59049	0.750005292	10000000000	0.75
11	177147	0.750001764	1E+11	0.75
12	531441	0.750000588	1E+12	0.75
13	1594323	0.750000196	1E+13	0.75
14	4782969	0.750000065	1E+14	0.75
15	14348907	0.750000022	1E+15	0.75
16	43046721	0.750000007	1E+16	0.75
17	129140163	0.750000002	1E+17	0.75
18	387420489	0.750000001	1E+18	0.75
19	1162261467	0.75	1E+19	0.75

La tabella ci mostra come, al crescere delle ascisse, i valori g(x) tendono ad avvicinarsi sempre di più a 0,75. L'avvicinamento è tale che la differenza tra questo valore limite e g(x) si fa più piccola di quanto il computer riesca a percepire. Con le potenze di 3 a esponente naturale, il computer «si arrende» a partire dall'esponente 19, con quelle di 10 già da 9.

Dai calcoli eseguiti a macchina possiamo formulare la congettura che, a mano a mano che x diventa sempre più grande, i corrispondenti valori di g(x) si avvicinano indefinitamente a 0,75.

Questo risultato può essere controllato anche teoricamente con un ragionamento che è alla portata anche di allievi di quarta media.

Sia M il cardinale di un insieme infinito.

Operiamo dapprima una semplice trasformazione algebrica:

$$\frac{3x+11}{4x+13}=\frac{3+\frac{11}{x}}{4+\frac{13}{x}}$$

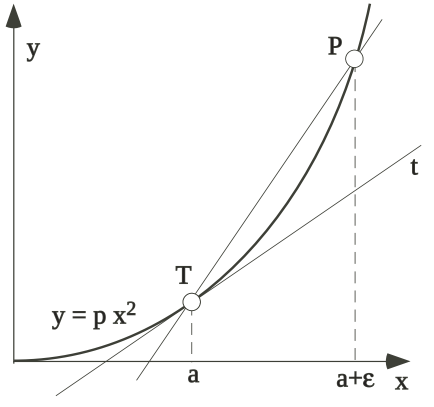
Per x molto grande ($x \to M$), le frazioni $\frac{11}{x}$ e $\frac{13}{x}$ si avvicinano indefinitamente a zero, perciò possiamo scrivere:

$$\frac{3M+11}{4M+13}=\frac{3+\frac{11}{M}}{4+\frac{13}{M}}=\frac{3+0}{4+0}=0,75$$

Nuovo risultato:

Se M è il cardinale di un insieme infinito e k un numero finito, allora $\frac{k}{M}=0$

Esempio 4: retta tangente a una parabola y=p x2 (p>0) in un suo punto T di ascissa a



Con riferimento alla figura, consideriamo un secondo punto della parabola di ascissa a+ε.

Calcoliamo la pendenza m_{PT} della secante PT:

$$m_{PT} = \frac{p\left(a+\varepsilon\right)^2 - p\,a^2}{\varepsilon} = 2\,p\,a + \varepsilon$$

Sia M il cardinale di un insieme infinito:
se, T→P, la secante tende a diventare tangente.

Poniamo $\varepsilon = \frac{1}{M} = 0$, perciò la pendenza della tangente è:

$$m_t = 2\,p\,a + 0 = 2\,p\,a$$

Infine l'equazione della retta tangente è:

$$y = 2\,p\,a\,x - p\,a^2$$

Nuovo risultato:

la tangente a una curva come posizione limite di una secante si traduce algebricamente sostituendo l'ascissa a+ε con

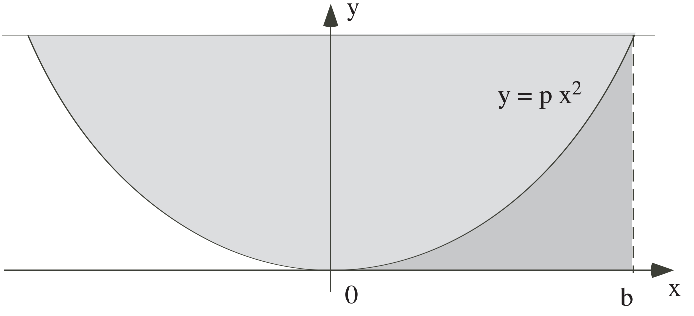
$$\mathbf{a + \frac{1}{M}}$$

Commento:

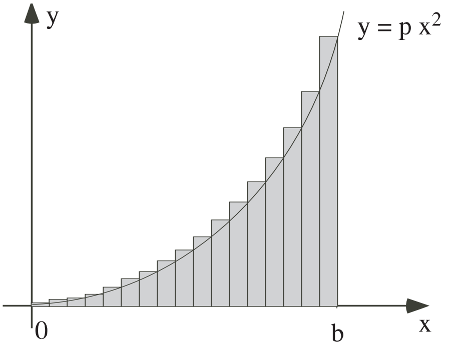
tutto ciò senza alcuna teoria dei limiti, ma lavorando unicamente sull'intuizione. Con ciò non si vuole ottenere alcun rigore matematico (quello giungerà più tardi), ma preparare il terreno che permetterà una fondazione teorica più robusta.

Esempio 5: area del settore parabolico

Consideriamo ancora la parabola $y=p\,x^2$ (p>0) e il settore staccato da una retta parallela all'asse x, come mostra la figura seguente.



Per evidenti ragioni di simmetria, basta trovare l'area della parte (metà esatta) che si trova nel primo quadrante. Essa è la differenza tra quella di un rettangolo e quella del triangolo curvilineo che nella figura appare di un grigio più scuro rispetto a quello del settore parabolico.



La approssimiamo con n rettangoli circoscritti di base b/n. L'altezza di questi rettangoli coincide con il valore massimo di y quando l'ascissa percorre l'intervallo della base; essendo la funzione monotona crescente, questo valore coincide sempre con quello relativo all'estremo destro di ogni intervallo di ampiezza b/n. Possiamo quindi esprimere l'area totale del poligono rettangolo unione di tutti i rettangolini:

$$\frac{b}{n}\left(p\,\frac{b^2}{n^2}+p\,\frac{4\,b^2}{n^2}+p\,\frac{9\,b^2}{n^2}+\ldots+p\,\frac{(n-1)^2\,b^2}{n^2}\right)=\frac{p\,b^3}{n^3}\left[1+4+9+\ldots+(n-1)^2\right]=$$

$$=\frac{p\,b^3}{n^3}\,\frac{(n-1)\,n\,(2\,n-1)}{6}=\frac{p\,b^3}{6}\,\frac{2\,n^3-3\,n^2+n}{n^3}=\frac{p\,b^3}{6}\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

Ora, si intuisce che rimpicciolendo sempre di più le basi dei rettangolini – il che significa aumentare sempre di più il numero n –, questo valore si avvicina indefinitamente all'area del triangolo curvilineo. Questo procedimento fu già applicato da Archimede nel terzo secolo a.C., metodo chiamato «di esaustione»[5], e reinventa-

5. Il nome deriva dal fatto che, quando n assume valori più grandi di qualsiasi numero immaginabile, l'area del poligono rettangolo al di fuori del triangolo curvilineo – quindi l'errore, la differenza fra queste due aree – «si brucia», cioè scompare.

to[6] da Evangelista Torricelli e Bonaventura Cavalieri nella prima metà del XVII secolo e da loro battezzato come «metodo degli indivisibili».

Se, nell'espressione finale dell'area del poligono rettangolo, sostituiamo al numero n il cardinale di un insieme infinito M, otteniamo:

$$\frac{p\,b^3}{6}\left(2-\frac{3}{M}+\frac{1}{M^2}\right)=\frac{p\,b^3}{6}(2-0+0)=\frac{p\,b^3}{3}$$

Nuovo risultato:

la somma delle aree di infiniti rettangolini ridotti a un segmento dà un valore maggiore di zero.

Finalmente, l'area di metà del settore di parabola è:

$$p\,b^3-\frac{p\,b^3}{3}=\frac{2}{3}\cdot p\,b^3$$

Osserviamo che è i due terzi dell'area del rettangolo circoscritto. Questo rapporto si mantiene ovviamente anche se estendiamo il risultato all'intero settore parabolico: riotteniamo così un risultato già raggiunto da Archimede.

Ma c'è di più: nel passaggio da n a M si riconosce l'importante salto dall'infinità potenziale (n supera qualsiasi numero che riusciamo a immaginare…) all'infinità attuale (n=M). Questo passaggio fu chiarito solo a partire dalla seconda metà del secolo XIX, grazie alla sistemazione teorica dell'insieme **R** dei numeri reali e in particolare al postulato della continuità che porta il nome del matematico tedesco Dedekind, pubblicato per la prima volta nel famoso scritto del 1872, *Continuità e numeri irrazionali*, ma abbozzato già nell'autunno del 1858, quando Richard Dedekind iniziava il suo periodo d'insegnamento al Politecnico di Zurigo.

Archimede, da buon «ingegnere-scienziato», vedeva la superficie da calcolare come una sottile lamina di materia e quando immaginava di far crescere il più possibile n, vedeva i rettangolini (striscioline di materia) che tendevano a «segmenti pesanti» come lui li chiamava. Pur restringendosi a segmenti, non dovevano perdere la qualità di massa, perché, sommati, dovevano pur dare un risultato maggiore di zero!

Questa difficoltà è la stessa che incontrano oggi gli studenti che per la prima volta si avvicinano al concetto di limite. Essi vedono che quando n diventa uguale a M, i rettangolini si riducono a un segmento e sanno che l'area di un segmento è nulla; tuttavia sono di fronte al fatto che la somma degli infiniti zeri dà un risultato maggiore di zero. Se si prova ad applicare questo procedimento anche a casi nei quali il risultato è conosciuto, si hanno conferme che la cosa funziona.

In questo senso andrebbe preparato il terreno sul quale più tardi fondare, non solo il concetto di limite, ma anche quelli di derivata e di integrale.

6. Si è trattato veramente di una reinvenzione perché in quel tempo i documenti di Archimede non si conoscevano. Una copia del *Metodo* di Archimede fu trovata solo nel 1909 fra i manoscritti di un monastero di Costantinopoli. Di lui si conoscevano solo traduzioni in latino di alcune opere, diffuse nella seconda metà del XV secolo.

Arrigo G. - D'Amore B.
«Lo vedo, ma non ci credo…» Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale. Lavoro presentato e accolto al CERME 1 (Conference of the European Society for Research in Mathematics Education), Osnabruck (D), 1999.

Arrigo G. - D'Amore B.
«Lo vedo, ma non ci credo…», seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La matematica e la sua didattica*. 1. 4-57, 2002.

Arrigo G.
Rapporto di ricerca: Robustezza degli apprendimenti. Locarno: ASP, 2004.

D'Amore B.
Elementi di didattica della matematica. Bologna: Pitagora. 123-140, 1999.

D'Amore B., Godino J.D., Arrigo G., Fandiño Pinilla M.
Competenze in matematica. Bologna: Pitagora. 19-23, 2003.

4. Sull’insegnamento della matematica in una lingua seconda

Paolo Hägler[1]

At the Scuola Cantonale di Commercio of Bellinzona (SCC), the students have the possibility to follow a bilingual curriculum where some courses, including a mathematics course, are held in French. In this paper, the teacher of the SCC responsible for this particular math course, describes his experience.

1. Introduzione

Da alcuni anni si stanno svolgendo, almeno in Europa, esperienze di insegnamento disciplinare in una lingua seconda, la cosiddetta «immersione». Se si accetta il fatto che l’interazione fra studenti e tra studente e insegnante è un importante veicolo per l’apprendimento della matematica, si può avanzare l’ipotesi che l’insegnamento in una lingua seconda lo favorisca ancor di più. La caratteristica dell’immersione consiste nell’essere non solo un insegnamento *della* lingua seconda, ma *nella* lingua seconda (Gajo L., Serra C., 2000). Secondo Coste (1994), in generale, si può immaginare che, lavorando su due lingue, si favorisce l’analisi del sapere e di conseguenza l’apprendimento del concetto. Inoltre, la problematizzazione della conoscenza è più immediata se si passa attraverso la riformulazione interlinguistica, di decontestualizzazione e di successiva ricontestualizzazione (Gajo, 1996). In particolare il sapere disciplinare permetterebbe di evidenziare i bisogni linguistici propri dell’apprendimento della disciplina stessa.

Nel nostro caso, gli studenti di lingua madre italiana sono tenuti a usare il francese nelle lezioni di matematica. Essi però, almeno in una fase iniziale, pensano in italiano e, quando devono esprimersi di fronte all’insegnante, traducono in francese ciò che hanno pensato. Quando parlano fra di loro, all’inizio ricadono nell’uso della lingua madre, ma poi, a poco a poco, nelle frasi in italiano appaiono termini in francese, soprattutto riferiti a concetti nuovi, appresi dall’insegnante nella lingua seconda; poi alle parole singole si aggiungono pezzi di frasi e via via frasi intere. Si crea così un intreccio linguistico che potrebbe arricchire l’apprendimento concettuale della matematica. Evidentemente si pensa all’apprendimento in situazione, a «comunità di apprendimento» nelle quali gli studenti costruiscono il proprio sapere, basandosi fondamentalmente sul supporto linguistico. L’uso del linguaggio diventa centrale e pone alcuni problemi – per esempio l’articolazione tra linguaggio naturale e linguaggio ma-

1. Docente di matematica presso la SCC di Bellinzona.

tematico (o meta-matematico) – che si dovrebbero perfezionare localmente. Queste attività che si articolano esplicitamente sia su problemi linguistici sia su questioni disciplinari (matematiche) potrebbero favorire l'apprendimento: è l'ipotesi della «teoria della bifocalizzazione» (Bange, 1991).

All'inizio, l'attenzione è centrata sul lessico. La prossimità delle lingue italiana e francese semplificano questo passo, ma occorre fare attenzione alle differenze: anzi sono proprio queste che, come vedremo più avanti, aiutano a capire meglio i concetti.

Il passo successivo concerne le operazioni logico-discorsive che stanno alla base del ragionamento matematico. Gli allievi sono costretti a rivedere certi modi di dire tipicamente matematici dell'italiano, per poi confrontarli con le espressioni relative in francese. Rinforzano così le conoscenze, per esempio, che nell'enunciato di un teorema vi sia fondamentalmente la costruzione «se…, allora…» / *«si…, alors…»*, mentre che le definizioni sono rette dal verbo essere «… è…» / *«… il est…»*. Oppure sono costretti a rivedere il significato che si dà in matematica alle espressioni «almeno», «al massimo» / *«au moins»*, *«au plus»*.

In conclusione si possono avanzare ipotesi di questo tipo:

- l'immersione permette di focalizzare meglio i processi e le strutture linguistiche di livello alto, più vicini al sapere disciplinare;
- rispetto all'insegnamento nella lingua madre, l'immersione fornisce agli insegnanti e agli allievi strumenti migliori per la costruzione delle conoscenze disciplinari; in particolare, permette di evitare false evidenze e di attivare strategie per risolvere problemi di comunicazione, ciò che favorisce gli aspetti costruttivistico e interattivo dell'apprendimento.

2. La mia esperienza alla Scuola Cantonale di Commercio di Bellinzona

Nel mio primo anno d'insegnamento in una scuola media superiore ho ricevuto alcune ore (di matematica) alla Scuola Cantonale di Commercio (SCC) di Bellinzona. Tra le varie classi di quell'anno (2003/2004) mi è capitata pure la 3L. La sua particolarità stava nel fatto che si trattava di una classe bilingue, ossia una classe che seguiva alcune materie del terzo e del quarto anno in una lingua straniera, nella fattispecie il francese. Questa opzione, offerta agli allievi che avevano terminato con successo il secondo anno scolastico, era possibile già da poco più di un lustro alla SCC. I corsi tenuti in francese erano di scienze, storia, geografia ed economia politica nel terzo anno, e nuovamente scienze assieme al progetto interdisciplinare (l'equivalente del lavoro di maturità liceale) durante il quarto anno.

Durante questo anno ho avuto l'opportunità di conoscere meglio il funzionamento dell'insegnamento bilingue soprattutto grazie al docente di classe, poiché si trattava di uno dei colleghi impegnati nell'insegnamento in lingua francese delle scienze naturali. Ho in particolare scoperto che la scuola aveva regolamentato il numero di ore d'insegnamento – minimo e massimo –, ma non le materie interessate. Inoltre, in quell'anno, il numero di ore di francese lambiva la soglia minima e lasciava così spazio all'introduzione di una nuova materia.

Dopo qualche mese di attenta riflessione ho deciso di mettermi a disposizione per arricchire l'offerta del corso bilingue introducendo la matematica tra le materie insegnate in francese, agevolando così ulteriormente gli allievi che avrebbero poi seguito i corsi universitari in francese. Inoltre ritenevo, e continuo a farlo, che la matematica si presta bene a questo tipo di esperienza, poiché i simboli matematici utilizzati sono molto simili nelle diverse lingue, eccezion fatta per qualche termine[2]. Il direttore, prima di avallare la mia richiesta, ha voluto che gli fornissi un elenco dei termini matematici utilizzati durante i quattro anni della SCC con la relativa traduzione in francese, in modo da poter valutare se i termini nuovi da apprendere (senza somiglianze con l'italiano) sarebbero stati tanti oppure no. Questo elenco si è arricchito durante gli ultimi due anni, e ora contiene 147 termini molto simili (ad esempio *décimal*, *limite*, *permutation*), 48 poco simili (ad esempio *impair*, *événement*, *suite*) e 19 realmente differenti (ad esempio *arrangement*, *carré*, *sommet*). Consegno questo elenco (continuamente aggiornato) ogni inizio di anno scolastico agli allievi delle classi bilingui, in modo che possano cercare i termini a loro sconosciuti, e familiarizzarsi con i termini propri della matematica in lingua francese.

Durante i mesi di riflessione, oltre a considerare il mio rapporto con il francese (che non è la mia lingua madre ma è stata la lingua dei miei studi universitari, 4 anni e mezzo trascorsi a Losanna, e di un breve periodo lavorativo, 1 anno e mezzo trascorso a Friborgo), ho avuto modo di discutere parecchio con i docenti già impegnati in questa attività, e con quelli di francese incaricati di seguire queste classi (in effetti, in terza e quarta SCC gli studenti non hanno più lezioni di francese obbligatorie, ma nell'orario delle classi bilingui è introdotta un'ora di appoggio con un docente di francese per aiutare gli studenti in difficoltà con il francese). Ho pure avuto la possibilità (gentilmente concessa dai docenti interessati) di seguire un paio di lezioni di scienze svolte in francese.

E così, nell'anno 2004/2005, ho iniziato l'insegnamento della matematica in francese con la 3L. Durante il mese di agosto avevo già tradotto quasi tutto il materiale (dispense, esercizi e soluzioni) che avevo utilizzato l'anno prima per le terze che avevo avuto, apportando alcune modifiche non necessariamente dettate dall'insegnamento in francese, ma dalla volontà didattica di cambiare alcuni aspetti. La traduzione integrale è richiesta dal contratto dell'insegnamento bilingue, che prevede di utilizzare prevalentemente la lingua francese, dalla presentazione propria e dell'anno durante la prima ora con la classe, fino all'esame di maturità alla fine della quarta, passando evidentemente per i vari lavori scritti, le uscite scolastiche, eccetera.

Tra i primi aspetti interessanti che ho potuto notare durante questa esperienza figura sicuramente il livello raggiunto dagli studenti nella comunicazione in francese dopo il secondo anno della SCC. Va qui precisato che per poter accedere al corso bilingue (visto che il numero di studenti ammessi è limitato tra i 18 ed i 21) sono utilizzati alcuni criteri per l'ammissione, tra cui in primis una nota minima pari a 4,5 in francese al termine del secondo anno. Una mia caratteristica, che nell'insegnamento è un difetto, è quella di parlare abbastanza in fretta, e in francese, essendo una lingua che non mi pone particolari difficoltà di espressione orale, il mio abituale ritmo di co-

2. Per esempio, *arrangement*, indicato dai francesi con A, in italiano è *disposizione* abbreviato con la lettera D; si è deciso di mantenere la lettera D anche in francese, per avere una formalizzazione comune in tutte le classi di maturità, in vista dell'esame scritto.

municazione è lo stesso che in italiano. Questo mio ritmo, se causa difficoltà marginali agli studenti che seguono una mia lezione nella loro lingua madre (o perlomeno nella loro abituale lingua di comunicazione), non era sostenibile (soprattutto nei primi 3-4 mesi) per gli studenti che seguivano una mia lezione in francese. Quindi, affinché gli studenti potessero riuscire a concentrarsi sulle mie parole (e verosimilmente a tradurle in italiano nello stesso tempo poiché a loro è necessario qualche mese prima di automatizzare il processo di comprensione direttamente a partire da un'espressione orale in una lingua straniera), ho dovuto rallentare il mio ritmo di eloquio durante i primi mesi della terza (e continuerò a farlo con le prossime classi).

Un altro aspetto, questa volta tipicamente legato all'insegnamento, è stato quello dell'iniziale difficoltà mia nel trovare diversi modi (in francese) per esprimere lo stesso concetto. I docenti sanno benissimo che non tutti gli allievi sono uguali, e a volte spiegazioni chiare per alcuni non lo sono per altri (forse a causa della diversa padronanza della lingua, forse a causa di qualche nozione sottintesa che alcuni allievi ricollegano al volo e altri no, forse a causa di qualche misconcezione presente in qualche allievo, ecc.). Così ogni docente è tenuto a ricorrere a diverse espressioni (anche scritte, ma soprattutto orali) per spiegare lo stesso concetto. Se ciò può sembrare un semplice giochino di parole in una lingua materna, in una lingua seconda questo esercizio può rivelarsi un po' più complicato, poiché una volta ben assimilata una struttura linguistica di una lingua straniera si tende a privilegiarla rispetto ad altre, e a utilizzarla più di frequente nei discorsi. Ma non necessariamente la struttura privilegiata dal docente è la stessa privilegiata dagli allievi, e quindi la comprensione da parte loro potrebbe risultare più complicata se il docente non si sforza di utilizzare altre parole, altri modi e/o altre espressioni per illustrare gli stessi aspetti di ciò che sta insegnando.

Il secondo aspetto linguistico che ho notato (dopo la comprensione orale degli studenti), è la loro comprensione scritta. Molti allievi, forse per pigrizia, cercano nei testi quelle parole chiavi che ogni tanto a volte risultano utili per ben comprendere il problema, ma che a a volte sviano completamente dalla domanda. Nella classi bilingui avute finora non ho mai riscontrato questa tipologia comportamentale. In effetti, tutti gli allievi di queste classi, si sono sempre sforzati di leggere completamente le consegne. Non so se questo fenomeno sia dovuto al fatto che siano allievi «scelti», oppure al fatto che, trovatisi di fronte a un testo scritto in una lingua seconda, non abbiano ancora gli automatismi e/o la sicurezza di riuscire a capire un testo leggendolo distrattamente, senza troppa attenzione. Di fatto ciò mi ha permesso di verificare la loro buona comprensione scritta già dopo la fine del secondo anno di SCC. In questo ambito le loro difficoltà non erano legate ai termini o alle espressioni tecniche (che hanno facilmente assimilato in parte grazie al contesto delle frasi, in parte grazie al vocabolario tecnico distribuito loro), ma a parole/espressioni francesi dissimili dall'italiano, il cui significato non si poteva ricavare dal contesto, come ad esempio *crèche*, *dresser*, *mijoter*, *ragot*, ecc. Quando gli allievi incontrano un termine che non comprendono, il mio primo tentativo consiste nel cercare di spiegarlo in francese, ma ciò non sempre riesce, e/o a volte lascia dei dubbi; in questi casi il secondo tentativo, poiché si tratta semplicemente di arricchire il vocabolario linguistico (e non tecnico) degli studenti, è quello di lasciare che cerchino la parola sul dizionario (un dizionario francese/francese e un vocabolario francese/italiano e viceversa sono regolarmente presenti sulla mia cattedra), o fornire loro direttamente la traduzione. Qualora uno di questi termini fosse presente in un lavoro scritto (o nell'esame di maturità), poiché gli studenti non hanno il permesso di portarsi un dizionario da casa, e per evitare che tutti vadano a cercare le stesse parole nei volumi sulla cattedra, scrivo direttamente i termini e le loro traduzioni (quella del contesto se ce ne fosse più di una) alla lavagna.

Passiamo ora alle espressioni degli allievi, partendo da quelle orali. Finora, durante il primo mese, pochi allievi hanno avuto il coraggio di esprimersi in francese davanti alla classe, ma chi l'ha fatto ha manifestato buone conoscenze della lingua, e difficoltà unicamente nell'uso di termini tecnici. Nonostante la loro comprensione fosse subito chiara, la loro espressione tardava a diventare un automatismo, e non di rado inizialmente gli studenti si esprimevano utilizzando parole/espressioni quali «radice quadrée», «deux pour trois», eccetera. Tranne gli studenti estremamente timidi che non parlano quasi mai, gli altri impiegano qualche mese per impadronirsi dell'uso dei termini corretti nell'espressione orale. Per evitare di scoraggiare subito chi osa, e tenta di esprimersi, faccio notare gli errori soltanto dopo che ha terminato la frase, e, qualora ci fossero più errori, mi limito ai più importanti.

L'espressione scritta degli allievi, infine, è quella che nell'insegnamento della matematica si nota di meno. In effetti, i loro testi vanno raramente oltre le frasette del tipo «*Silvye nécessite de 3 jours*», «*Marc est grand 1 mètre 82*», ecc. Tuttavia anche in simili frasette si riscontrano errori, di accordi, di ortografia o altro; la presenza di questi errori si è notata pure negli esami di maturità. Questa tendenza può forse essere spiegata grazie a un aneddoto raccolto da un collega. Egli stava osservando una ragazza che scriveva un testo in francese al computer, strapieno di errori di vario genere, e lui, non potendosi trattenere, gliel'ha detto. La risposta dell'allieva è stata quella di non preoccuparsi, poiché durante la stesura si occupava del contenuto, mentre curava la forma in seguito durante la rilettura. Questo stesso metodo potrebbe essere utilizzato dagli allievi anche a matematica, con la differenza che la loro concentrazione è talmente presa dal contenuto, che la rilettura della forma relativa alle poche frasi non è sempre svolta con la dovuta cura. In ogni caso è bene precisare che, per facilitare la comprensione degli errori degli allievi, i docenti che insegnano in francese si sono accordati di segnalare (ed eventualmente correggere) gli errori relativi alla materia con il rosso, e quelli di francese (che non sono evidentemente considerati nel computo della valutazione) con il verde (la loro correzione è lasciata agli studenti stessi, eventualmente con l'aiuto del docente di francese assegnato alla classe).

A questo punto vi domanderete quale sia il risultato finale di questa esperienza bilingue per un allievo. Ebbene, alcuni allievi, a fine quarta, ma a volte anche prima, durante le ore di matematica pensano, ragionano e calcolano in francese, mentre al loro opposto, altri, continuano a considerare uno sforzo eccessivo discutere con i compagni di classe in francese, e cercano di farlo in italiano. Evidentemente il francese utilizzato dai ragazzi non è perfetto, è una sorta di gergo con alcuni italianismi, che però, stando alle parole di chi ha già terminato da qualche anno questa esperienza, durante gli studi universitari in francese scompaiono presto; la maggior parte degli studenti ha ritenuto che l'esperienza bilingue alla SCC li ha parecchio aiutati per poter seguire al meglio, e approfittare da subito, dei corsi universitari in francese.

Vorrei infine segnalare che questa esperienza è stata e continua a essere per me molto arricchente, e che mi ha inoltre permesso di migliorare (e non solo di esercitare) il mio francese. Ciò anche grazie alla collega di francese Anne Rigolini, che, oltre a essere venuta in classe, mi ha corretto tutti i fogli che avrei in seguito distribuito in classe.

La stessa esperienza, per altre materie, è costantemente vissuta anche da altri colleghi alla SCC, ed è un peccato che nei licei nessuno osi provarla. Inoltre, dall'anno 2005/2006, la SCC offre pure l'insegnamento bilingue in tedesco, e tra le varie materie figura ancora la matematica.

Bibliografia

Bange P.
Séquences acquisitionnelles en communication exolingue. In Russier C., Stoffel H., Véronique D. *Intéractions en langue étrangère*. Aix-en-Provence: Publications de l'Université de Provence, 1991.

Coste D.
L'enseignement bilingue dans tous ses états. *Études de linguistique appliquée 96*. 9-22, 1994.

Gajo L., Serra C.
Acquisition des langues et des disciplines dans l'enseignement bilingue: l'exemple des mathématiques. Enseignement bilingue et apprentissage des mathématiques. *Études de linguistique appliquée 120*. 498-508, 2000.

Gajo L.
Décontextualisation et recontextualisation dans l'apprentissage scolaire et non scolaire d'une langue seconde. *Revue de phonétique appliquée 121*. 311-324, 1996.

5. Sperimentazioni didattiche

Egon Conti Rossini[1]

The aim of this article is that of offering to my colleagues teaching in secondary schools some hints about didactic activities I experienced in the last few years as complements or alternatives to usual lessons.

Voglio trattare qui alcuni temi che possono essere inseriti nell'insegnamento della matematica nella Scuola Media, sia come alternativa al metodo classico d'insegnamento, sia come tentativo di apportare miglioramenti nel processo di apprendimento della materia da parte di tutti gli allievi. Si parla spesso dei problemi legati alle difficoltà di apprendimento di alcuni alunni, ma si tralascia altrettanto spesso di affrontare la questione non meno spinosa innescata da chi si dimostra più dotato e ricerca nuovi stimoli. Nelle sperimentazioni che illustrerò qui di seguito ho cercato di appagare i desideri degli allievi più avvantaggiati nella materia, cercando nel contempo di coinvolgere e stimolare l'intera classe. Si tratta inoltre di tentativi che vogliono trovare qualche risposta pratica ad alcune problematiche che vengono sovente sollevate da parecchi colleghi sul modo di gestire una lezione per trarne il massimo profitto.

1. Tutoraggio

Questo primo tema è sicuramente il più conosciuto, anche se non sperimentato, da molti colleghi, per cui mi limiterò ad esporre i risultati della mia esperienza. Come si sa, si tratta di istruire alcuni allievi, particolarmente dotati ed interessati alla materia, sul modo in cui possono spiegarla ad altri compagni che manifestano invece svariate difficoltà. Questo metodo si rivela senz'altro utile nel caso in cui si desideri mettere in secondo piano la lezione frontale, ma è ancora più utile nel caso in cui la classe sia particolarmente numerosa, laddove cioè risulta assai difficile soddisfare in breve tempo le numerose richieste di aiuto di tutti gli allievi.

La scelta e la preparazione dei «maestrini» è semplice e richiede pochi minuti e può essere svolta già dopo poche settimane di insegnamento. Il controllo del funzionamento durante la messa in pratica richiede un paio d'ore-lezione. Il motto è: *Non suggerire la soluzione, ma fare in modo che il compagno la raggiunga ragionando.* I ri-

1. Insegnante alla Scuola media di Losone.

sultati che si possono ottenere con il tutoraggio non si limitano all'anno scolastico in questione, ma sono un investimento per gli anni scolastici successivi e pertanto consiglio vivamente questo sistema didattico già dalla I media. Inoltre non è da escludere l'impiego di maestrini scelti anche fra allievi mediocri che hanno però punti forti in un settore specifico della matematica e che pertanto possono essere indirizzati all'insegnamento di concetti puntuali del programma. In questi casi si riscontra negli allievi una evidente valorizzazione delle capacità e una maggiore empatia nei confronti della matematica.

Nel mio caso il tutoraggio ha dato ottimi risultati nelle I e II medie e solo discreti nelle III e IV medie. Questo è in antitesi rispetto a quanto mi sarei aspettato. Sono rimasto impressionato da come ragazzini di I e II media siano riusciti a fare i maestrini responsabilizzandosi ed immergendosi con grande trasporto nel loro ruolo. In un primo tempo ho pensato ad una riuscita grazie ad una semplice imitazione del ruolo del docente, ma poi ho dovuto ricredermi poiché alcuni di loro si buttavano in una vera e propria ricerca del modo ideale da utilizzare per far passare il messaggio ai compagni.

Ecco un esempio di interazione fra maestrina e compagno di classe in relazione alla spiegazione delle potenze (I media, Faido).

Maestrina: «Cosa fa 2^4»?
Compagno: «8».
Maestrina: «Ma allora $2 \cdot 4$»?
Compagno: «8».
Maestrina: «Ma allora la moltiplicazione e l'elevazione sono la stessa cosa»?
Compagno: «No. (pausa) Mi ricordo che bisogna moltiplicare dei numeri».
Maestrina: «Sì, ma quali? $2 \cdot 4$»?
Compagno: «No, il 2 quattro volte».
Maestrina: «Cioè»?
Compagno: «$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$».

Spesso il supporto che può essere dato ad un compagno che incontra difficoltà non è strettamente finalizzato al raggiungimento di obbiettivi precisi e non è neppure un intervento concreto da parte del maestrino. A volte è sufficiente la presenza fisica del compagno per liberare una via spontanea all'apprendimento e alla ricostruzione della materia trattata senza sentire la pressione psicologica del docente.

I risultati mediocri ottenuti in III e IV media penso siano dovuti alle importanti trasformazioni che subiscono i ragazzi in età adolescenziale: la ricerca di posizioni dominanti all'interno della classe e la relativa concorrenza fra gli allievi hanno a mio parere inibito o scoraggiato sia l'atteggiamento di dare aiuto, sia la disponibilità a riceverlo.

I risultati pratici del tutoraggio possono essere riassunti nei seguenti quattro punti:

- maggiore possibilità di intervento dell'insegnante nei casi più problematici;
- maggiore disponibilità di tempo per svolgere o ripetere gli argomenti o proporre nuove attività;
- motivazione da parte dei maestrini a saper spiegare in modo corretto e quindi a rafforzare ulteriormente la materia acquisita (per spiegare una cosa bisogna averla imparata veramente o, meglio, per essere sicuri di aver imparato veramente una cosa bisogna anche saperla spiegare);

- miglior rapporto con la materia da parte degli allievi più in difficoltà (o semplicemente timorosi) che non se la vedono propinata dall'insegnante, ma da un loro compagno con il quale non sussiste un rapporto gerarchico.

2. Esercizi per i compagni

Ho pensato questo tema prevalentemente per i corsi attitudinali di III e IV media e l'ho quindi sperimentato solo in queste due classi, ma non escludo a priori anche possibili applicazioni nei corsi base oppure in I e II, sebbene nel primo biennio molto spesso manchino ancora le basi teoriche e le capacità di astrazione sufficienti per garantire una corretta riuscita. Il progetto consiste nel far preparare da alcuni allievi volontari, generalmente da coloro che dimostrano particolare interesse ed almeno discrete capacità, alcuni esercizi di ricupero destinati agli allievi che incontrano maggiori difficoltà in determinati punti del programma.

Gli allievi che hanno aderito a questa iniziativa hanno preparato gli esercizi a scuola o a casa e, prima della distribuzione ai compagni, li hanno discussi con il docente a scuola oppure tramite posta elettronica al di fuori dell'orario scolastico. Il tema *posta elettronica* da utilizzare come mezzo didattico per uno scambio di informazioni fra docente e allievo meriterebbe un lungo inciso: in questa sede mi limito ad accennarvi, lasciando solo intendere le molteplici applicazioni che può avere questo strumento, e il suo ruolo, che definirei senz'altro rivoluzionario. Materialmente lo scambio di informazioni tramite posta elettronica è oggi più che mai possibile, dato che la quasi totalità degli allievi dispone a casa di un computer, di un collegamento *internet* e di un proprio *account* già in II media.

Anche in questa sperimentazione l'attività proposta ha coinvolto e motivato in modo positivo tutti gli allievi. Le difficoltà incontrate nel preparare esercizi adatti ai compagni più in difficoltà non sono però state poche. La tendenza riscontrata è stata quella di preparare esercizi particolari o originali, quasi estrosi, ignorando che il loro destinatario era un compagno con difficoltà in matematica. In altri casi mancava inizialmente una visione chiara della progressione delle difficoltà da far superare in un esercizio. Ma, man mano che la stesura degli esercizi progrediva, il mio intervento si è fatto sempre meno importante, in quanto la linea da seguire era ormai stata capita. Alcune volte ho lasciato carta bianca nell'elaborazione degli esercizi, in modo che chi li avesse preparati potesse anche confrontarsi in fase sperimentale con la loro efficacia. Sono stati perciò anche preparati alcuni esercizi che si sono rivelati non idonei, per l'impossibilità o la difficoltà di risolverli, per la mancanza di dati o per la presenza di informazioni contraddittorie. Non li ho volutamente corretti perché nella fase di risoluzione sorgevano interessanti discussioni attorno a tutto il tema.

Questo progetto è stato recepito in modo generalmente positivo da quasi tutti. Alcuni allievi, a cui erano destinati gli esercizi, li hanno percepiti come un aumento della mole di lavoro (beh, anche questo era uno scopo dell'attività proposta!) e talvolta pure come una maggiore e ingiusta valorizzazione degli allievi che preparavano gli esercizi, colpevoli per giunta dell'aumento della mole di lavoro. Credo comunque che queste reazioni istintive siano più che giustificabili, tenuto conto dell'età degli adolescenti.

3. Una lezione alla propria classe

Anche questo tema è stato pensato prevalentemente per le III e IV attitudinali. Si tratta di scegliere alcuni allievi volontari oppure di coinvolgere tutta la classe, invitando ogni allievo singolarmente, a coppie o a gruppi, a presentare alla classe un tema nuovo, di approfondimento, un gioco matematico, un aspetto logico, un aspetto storico ecc.

In alcuni casi la preparazione degli argomenti prima della presentazione in classe è stata svolta con il docente, in altri casi è stata lasciata carta bianca. In ambedue i casi le presentazioni hanno suscitato interessanti discussioni.

Anche qui, oltre alla diversificazione del modo di fare lezione, il livello della motivazione degli allievi che hanno preparato la presentazione e dei compagni che l'hanno seguita è stato molto elevato. Mi preme sottolineare un aspetto di questo progetto: a quell'età gli allievi vivono ancora le esperienze in modo molto emotivo, ragione per cui ho preferito dare un volto ludico a quest'esperienza senza dare nessuna valutazione in termini sommativi per evitare appunto che il fattore emotivo interferisse troppo sulla riuscita e sulla spontaneità della presentazione. Lo scopo ultimo è sempre quello di rendere le lezioni di matematica più interessanti e di fare in modo che l'atteggiamento verso la materia sia improntato a una maggiore disponibilità a migliorare l'apprendimento.

4. Una lezione in un'altra classe

Anche se qui è messo in coda, questo tema è stato il punto centrale delle mie sperimentazioni. Le modalità sono pressoché identiche a quelle del capitoletto precedente; i risultati pratici sono peraltro più importanti e di maggiore impatto. In questo caso gli allievi di III e IV attitudinale preparano una lezione da svolgere rispettivamente in I e II (la differenza d'età di due anni è in questo contesto abbastanza rilevante). Agli allievi interessati a questa attività viene chiesto il massimo impegno e la massima preparazione, poiché queste lezioni potrebbero essere svolte senza la presenza di un docente, ad esempio nel caso di una supplenza interna.

Nella fase di sperimentazione mi sono avvalso di una telecamera che, oltre a fungere da mezzo di documentazione per una successiva discussione in classe, ha assunto un ruolo di sorveglianza, necessario al mantenimento dell'ordine e della disciplina nella classe dove si svolgeva la lezione.

Il successo che ha avuto questa attività è stato duplice: da una parte l'interesse e la motivazione (e anche l'emozione!) degli allievi che hanno preparato e tenuto le lezioni, dall'altra l'intenso coinvolgimento delle classi che hanno ospitato le lezioni. Anche qui, come in altre situazioni, l'introduzione e l'applicazione di situazioni di insegnamento-apprendimento innovative tengono alto l'interesse degli allievi. Si tratta a quell'età, come ben si sa, di uno dei fattori più importanti per permettere la trasmissione e l'acquisizione di messaggi cognitivi.

È implicito che la messa in atto di un progetto simile implichi non poche difficoltà organizzative e che la sua applicabilità sia subordinata ai criteri ed alle esigenze delle singole sedi di Scuola Media. Ma lo svolgimento di tali lezioni in sostituzione delle supplenze interne e senza incorrere in problemi di disciplina o di responsabilità, può concretizzarsi senza alcun rischio se ci si avvale appunto di una telecamera, magari collegata direttamente con la direzione della sede o con i collaboratori di direzione.

Dato l'impatto relativamente importante di queste lezioni, la loro preparazione presuppone una particolare disponibilità da parte degli allievi interessati e del docente al di fuori del normale orario scolastico. Come già esposto in precedenza, non deve trattarsi necessariamente e sempre di un impegno e di una presenza fisici: lo scambio di informazioni tramite posta elettronica può ovviare a questo problema. Occorre riconoscere che si tratta comunque di addossarsi un onere lavorativo straordinario che, in questi tempi di tagli finanziari operati anche sulla Scuola e di deprezzamento del ruolo dei docenti, potrebbe lasciare perplessi parecchi colleghi. Ma i risultati e le soddisfazioni ottenuti con questa sperimentazione sono tali da invogliarmi a ripeterla anche in futuro e ad invitare i colleghi a sperimentarla a loro volta, magari con l'obbiettivo di confrontare un giorno i frutti delle svariate esperienze svolte in tutto il Cantone.

Conclusioni

Credo di interpretare il pensiero di molti colleghi dicendo che molto spesso le difficoltà che incontriamo nel trasmettere il sapere ai nostri allievi risiedono prevalentemente nella loro scarsa motivazione, se non nell'indifferenza. In un tale contesto molto spesso anche i metodi didattici più raffinati non danno i frutti sperati proprio perché manca il fattore primario, cioè la giusta disponibilità ricettiva. È proprio in una simile situazione che deve potersi aprire un varco nel muro che a volte imprigiona la ricettività degli allievi. Non bisogna nemmeno dimenticare che gli allievi di Scuola Media sono in piena età adolescenziale e che il loro approccio alla materia è strettamente legato alla relazione che hanno con il docente. Permettere loro di sperimentare nuovi metodi e nuove situazioni di insegnamento-apprendimento porta spesso ad un miglior rapporto con la materia e con il docente. Per meglio spiegare che cosa intendo, do l'esempio dell'utilizzo del programma informatico *Cabri-Géomètre.*

Vi sono numerose strade per introdurre o spiegare il funzionamento del programma. Ne indico alcune da me seguite negli ultimi anni, con l'aggiunta dei risultati osservati.

1. Spiegazione a grandi linee in classe (lavagna) del tipo di programma; spostamento in aula di informatica; spiegazione del funzionamento dei comandi con l'aiuto del *beamer*; esecuzione di un esercizio collettivo.
2. Spiegazione in classe di che cosa vogliamo fare con il programma, ma rimandando la spiegazione del funzionamento direttamente in aula di informatica senza l'ausilio del *beamer*, bensì con il docente e un maestrino (precedentemente formato o che già conosce il programma) che fanno il giro delle postazioni per rispondere alle domande degli allievi.
3. Nessuna spiegazione di che cos'è e di che cosa si può fare con il programma, ma semplice annuncio che si tratta di una novità e che anche per il docente è cosa del tutto nuova. Gli allievi che hanno poi capito il funzio-

namento del programma sono quindi invitati ad aiutare gli altri e a... spiegarne il funzionamento anche al docente. E il docente naturalmente chiederà: «Ma come si fa a tracciare una perpendicolare?», «Si può calcolare la lunghezza di questo segmento?», «Posso calcolare il numero fisso del pentagono?» ecc.

La differenza fra i tre approcci è rilevante. Nel primo caso, dopo aver eseguito il compito seguendo le indicazioni del docente, gli allievi non sono praticamente più in grado di svolgere un secondo esercizio. Nel secondo caso, quando viene chiesto di svolgere un secondo esercizio, solo gli allievi più abili ottengono risultati autonomamente, mentre quelli meno capaci chiedono costantemente assistenza. Nel terzo caso, a parte rare eccezioni, gli allievi eseguono automaticamente parecchi esercizi senza che se ne rendano conto e, alla richiesta di esecuzione di un nuovo esercizio, la riuscita in modo autonomo è quasi generalizzata.

Il successo del terzo approccio non è dovuto unicamente alla possibilità di sperimentare qualcosa di nuovo, ma al fatto che gli allievi lo vivono da protagonisti, sfidando i compagni ed il maestro nella gara per la comprensione del funzionamento del programma. Si tratta di uno stimolo di carattere ludico che per allievi di II media assume un ruolo ancora molto importante.

Beninteso non ogni sperimentazione dà risultati che possono migliorare il clima di insegnamento-apprendimento e, in caso di fallimento, bisogna essere in grado sia di riconoscere l'insuccesso, sia di trovarne le cause, che possono essere dovute al metodo, all'insegnante o alla classe. Senza sperimentazione non si potrà però avere un metro per valutare l'efficienza dell'insegnamento e dell'apprendimento e vi sarà quindi sempre una possibile lacuna negli strumenti di cui disponiamo per autovalutare l'efficacia del nostro lavoro ed una possibile discrepanza fra gli obbiettivi che ci poniamo e i risultati che otteniamo.

Quiz numero 36

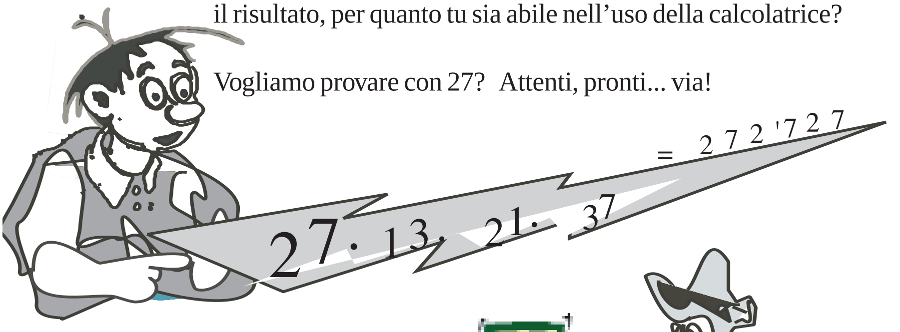
Aldo Frapolli

Caro Joe,

vediamo di tener sveglia la mente con un po' di calcolo mentale, ad esempio con queste «moltiplicazioni lampo».
Prendi un numero naturale di due cifre: moltiplicalo per 13; poi moltiplica ciò che ottieni per 21 e il risultato ancora per 37.

Scommettiamo che io sarò sempre più veloce di te a scrivere il risultato, per quanto tu sia abile nell'uso della calcolatrice?

Vogliamo provare con 27? Attenti, pronti... via!



Dunque...

$$\{[(27 \cdot 13) \cdot 21] \cdot 37\} = 272'727$$

Come fa Archie ad essere veloce come un lampo?
Forse perché basta scrivere il numero tre volte di fila?
Non siete curiosi di capire perché il metodo funziona?

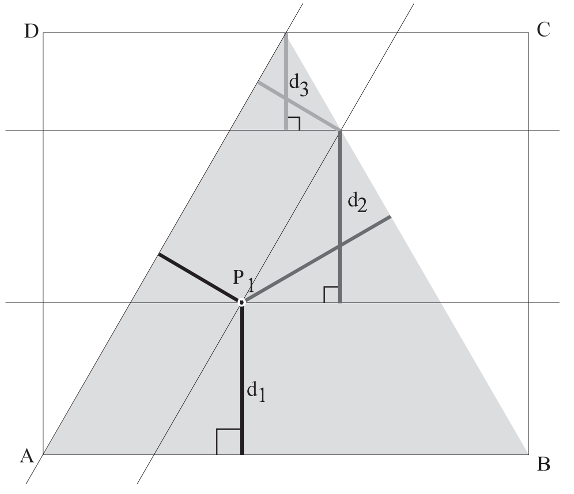
E voi ragazzi che cosa ne pensate?

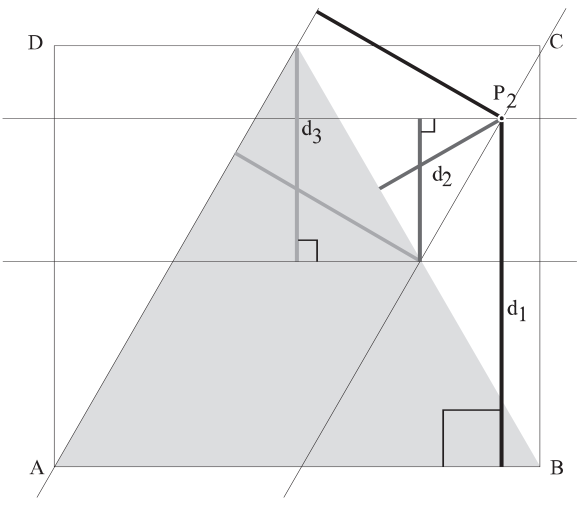
Su che cosa si fonda la velocità di Archie?
Come si potrebbe procedere in modo analogo con un numero di tre cifre?

Come sempre siamo curiosi di sapere a chi andrà il bel libro in palio.

Buon divertimento a tutti!

Soluzione del Quiz numero 35





Osservando le due figure appare evidente che:

*i) quando P è **interno** al triangolo, la somma delle distanze è $d_1+d_2+d_3 = AD$, valore costante, pari all'altezza del triangolo equilatero.*

*ii) quando P è **esterno** al triangolo si nota che la somma $d_1+d_2+d_3$ supera la distanza AD di 2 volte la distanza di P dal lato del triangolo ($d=d_2$), cioè $d_1+d_2+d_3 = AD+2\,d_2$*

Il valore massimo che può dunque assumere la somma delle tre distanze si ha quando P coincide con C (oppure D) e vale 2 AD.

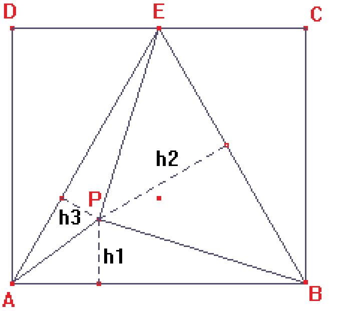
Quella illustrata è la soluzione sintetica, elegantissima, proposta da uno studente di Bellinzona, Giovanni Puricelli, che si è aggiudicato il libro di Colin Bruce, *Sherlock Holmes e le trappole della logica*, R. Cortina editore.

Interessante, come metodo di confronto dagli innumerevoli risvolti didattici, ci è apparsa la soluzione proposta da Luca Bellini di Ligornetto.

Eccola.

Siano h_1, h_2, h_3 le tre distanze di P dalle rette che contengono i lati del triangolo ABE. Sia l il lato del triangolo ABE.

Distinguiamo 2 casi:



– *P è interno al triangolo equilatero ABE. Allora h_1, h_2, h_3 rappresentano le altezze dei tre triangoli in cui può essere decomposto ABE.*
Quindi:
Ma poiché

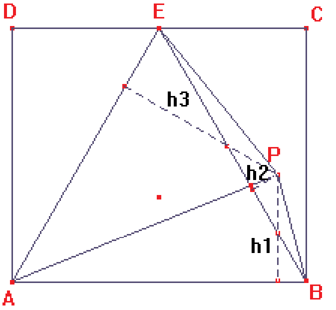
$$A_{ABE} = \frac{l \cdot h_1}{2} + \frac{l \cdot h_2}{2} + \frac{l \cdot h_3}{2} = \frac{l \cdot (h_1 + h_2 + h_3)}{2}$$

si deduce che la somma delle tre distanze è pari all'altezza del triangolo ABE.

$$h_1 + h_2 + h_3 = \frac{2 \cdot A_{ABE}}{l}$$

Inoltre

$$h_1 + h_2 + h_3 = \frac{2 \cdot A_{ABE}}{l} \qquad (1)$$



– *P è esterno al triangolo equilatero ABE*

$$A_{ABE} = A_{ABP} + A_{EAP} - A_{EBP}$$

Allora

$$A_{ABE} = \frac{l \cdot h_1}{2} + \frac{l \cdot h_3}{2} - \frac{l \cdot h_2}{2} = \frac{l \cdot (h_1 + h_3 - h_2)}{2}$$

Ma quindi

$$\frac{2 \cdot A_{ABE}}{l} = h_1 + h_3 - h_2$$

da cui

$$\frac{2 \cdot A_{ABE}}{l} + 2h_2 = h_1 + h_2 + h_3 \quad (2)$$

Da (1) e da (2) si conclude che il percorso formato dalla somma di h_1, h_2, h_3 è maggiore quando P si trova all'esterno del triangolo equilatero.

La differenza tra le lunghezze dei due percorsi è pari alla distanza $2h_2$.

2. P-bam[1] numero 2

Giorgio Mainini

Rovescia e somma

Procedimento

Scegli un qualsiasi numero naturale	
«Rovescialo»	
Somma i due numeri	
Il numero trovato è palindromo?	
Se sì	FINE
Se no	
Ricomincia con il risultato trovato	

Esempio

Scegli un qualsiasi numero naturale		59
«Rovescialo»		95
Somma i due numeri		59 + 95 = 154
Il numero trovato è palindromo? No		
Ricomincia con il risultato trovato		154 + 451 = 605
Il numero trovato è palindromo? No		
Ricomincia con il risultato trovato		605 + 506 = 1111
Il numero trovato è palindromo? Sì	FINE	

La domanda potrebbe essere: si troverà sempre un palindromo, qualunque sia il numero di partenza che si sceglie? Un numero che non genera un palindromo viene chiamato ***lychrel***. La strana parola simil-inglese è stata coniata nel 2002 da Wade VanLandingham, che ha giocato con le lettere del nome della sua ragazza, Cheryl.

1. Con la denominazione p-bam s'intende un problema matematico «che ha la maligna ma stimolante tendenza a scoppiare fra le mani di chi lo tratta». Questa rubrica è aperta a tutti gli appassionati che hanno problemi di questo tipo da proporre. Contattare: bdmpbam@yahoo.it.

Il curioso è che non è stato finora trovato nessun lychrel. Detto meglio: sono stati trovati numeri che non generano palindromi nemmeno dopo un numero enorme di iterazioni, ma di nessuno è stato ***dimostrato*** che non lo genererà mai. Detto ancora meglio: sono stati trovati numeri che, **scritti in base 10**, non generano palindromi nemmeno dopo un numero enorme di iterazioni, ma di nessuno è stato ***dimostrato*** che non lo genererà mai. Un numero di partenza maligno è 89, che genera il palindromo 8813200023188 dopo 24 iterazioni. Nessun altro numero minore di 10'000 è maligno come 89. Uno cattivissimo è 196: Wade VanLandingham, naturalmente con l'aiuto di potenti mezzi informatici, il 21 novembre 2005 aveva trovato, con più di 670 milioni di iterazioni, un numero di più di 280 milioni di cifre ma ancora nessun palindromo. E sta continuando…

Sfida per gli appassionati

Livello 1
Fare esperienze con vari numeri, ai quali applicare il procedimento «Rovescia e somma».

Livello 2
Sono stati trovati infiniti lychrel in base 2: il ventidue è il più piccolo di tutti.
Andare a vedere che cosa capita se si scrive ventidue, e si calcola, in base 2.

Livello 3
Indicando con /xy/ il numero di due cifre, di cui la più a sinistra è x e l'altra y, come si può calcolare la somma di /ab/ con /ba/ senza scrivere /ba/?

Livello 4
Indicando con /xyz/ il numero di tre cifre, di cui la più a sinistra è x, la cifra centrale è y e la più a destra z, come si può calcolare /abc/ + /cba/ senza scrivere /cba/?

Livello 5 e seguenti
Dato un numero di ordine di grandezza k (ad esempio 7 ha k=0, 34 ha k=1, 86490 ha k=4) come si può calcolare la sua somma con il proprio «rovescio» senza scrivere il «rovescio»?
Ad esempio, a partire da 714 (che ha k=2) come si può trovare 1131 senza scrivere 417?
Consiglio:

- preparare una tabella che contenga i coefficienti della somma, per valori crescenti di k;
- trovare la formula che genera i coefficienti;
- dimostrare che la formula è corretta;
- qual è la somma dei coefficienti, per riga?
- preparare un programma per computer che calcoli la successione generata da un generico numero di partenza e che controlli se si raggiunge un palindromo.

1. Bach
Matematica e Musica

Luca Bellini[1]
Sara Cataldi Spinola[2]

Introduzione

Un insegnamento moderno della matematica non può assolutamente ignorare i legami che ci sono fra matematica e realtà, se non vuole ridursi a uno sterile esercizio di abilità formali che al di fuori delle aule scolastiche verrà presto dimenticato. Si deve quindi insegnare a riconoscere la matematica «implicita» nelle diverse situazioni e abituare gli allievi a costruire modelli matematici da valutare di situazione in situazione. In questo senso, l'attività proposta vuole evidenziare alcuni aspetti paralleli fra la matematica e la musica, due discipline intellettuali e creative da sempre in stretta relazione.

L'attività proposta ha come oggetti di studio le trasformazioni geometriche e vuole mostrare come si possa affrontare lo studio delle figure geometriche da un punto di vista diverso da quello della geometria euclidea. In particolare si vuol mettere in risalto l'aspetto interdisciplinare dello studio delle trasformazioni geometriche nei confronti della musica. Un approccio di questo tipo potrebbe essere seguito per introdurre e definire varie trasformazioni geometriche (dalla traslazione, alle simmetrie assiale e centrale) ben presenti nella musica classica, permettendo così agli allievi di riconoscere la presenza implicita della matematica in altre discipline.

Si sa che l'arte e la scienza hanno radici comuni e che un tempo la figura dell'artista si confondeva spesso con quella dello scienziato. Nella produzione artistica, per esempio, la presenza delle simmetrie contribuisce generalmente al valore estetico dell'opera e anzi spesso ne costituisce un elemento essenziale. Tramite l'ausilio della musica, un'attività di questo genere consente non solo di vedere una possibile applicazione delle trasformazioni geometriche, ma anche di ascoltare l'effetto che ciò produce su una melodia. Questo potrebbe essere un modo interessante e divertente di coniugare matematica e musica, due discipline che in realtà hanno molto in comune, più di quanto si pensi.

1. Insegnante di matematica alla Scuola media di Morbio.
2. Insegnante di matematica e scienze alla Scuola media di Minusio.

Prerequisiti

Per affrontare l'attività proposta, gli allievi devono già avere alcune nozioni riguardanti le frazioni, quali:

– cos'è e come si trova una frazione equivalente ad una frazione di partenza;
– come si riduce una frazione ai minimi termini.

Inoltre è auspicabile che gli allievi abbiano già delle nozioni musicali basilari che consentano loro ad esempio di:

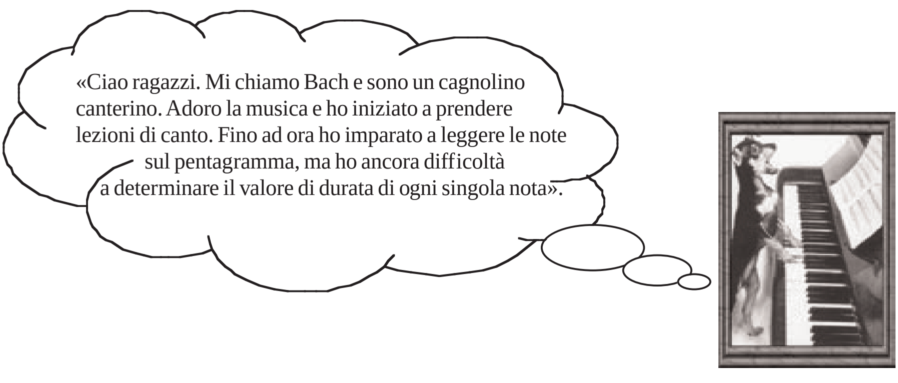
– assegnare il nome alle note scritte sul pentagramma;
– assegnare il valore di durata corretto alle note.

Obiettivi

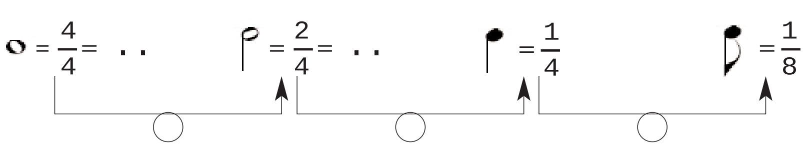
Lo scopo dell'attività è quello di introdurre e di definire la traslazione mediante un tipo di approccio interdisciplinare. Lo studio delle figure geometriche può essere affrontato introducendo il concetto di trasformazione. Le trasformazioni geometriche possono essere caratterizzate facendo emergere quegli elementi che in esse risultano invarianti.

Un approccio simile può essere usato per introdurre i concetti di simmetria assiale e di simmetria centrale, che qui presenteremo solo a titolo d'esempio.

Attività

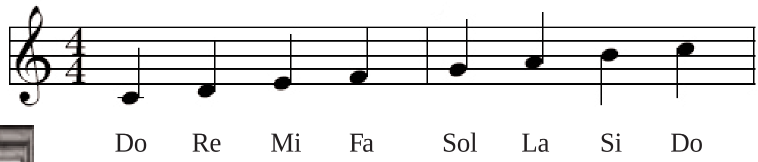


Aiuta Bach a completare il seguente esercizio, riducendo le frazioni ai minimi termini:



Come fai, partendo da $\frac{4}{4}$, a ottenere $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$?

Che cosa implica questo in musica, pensando al valore di durata delle note indicate?



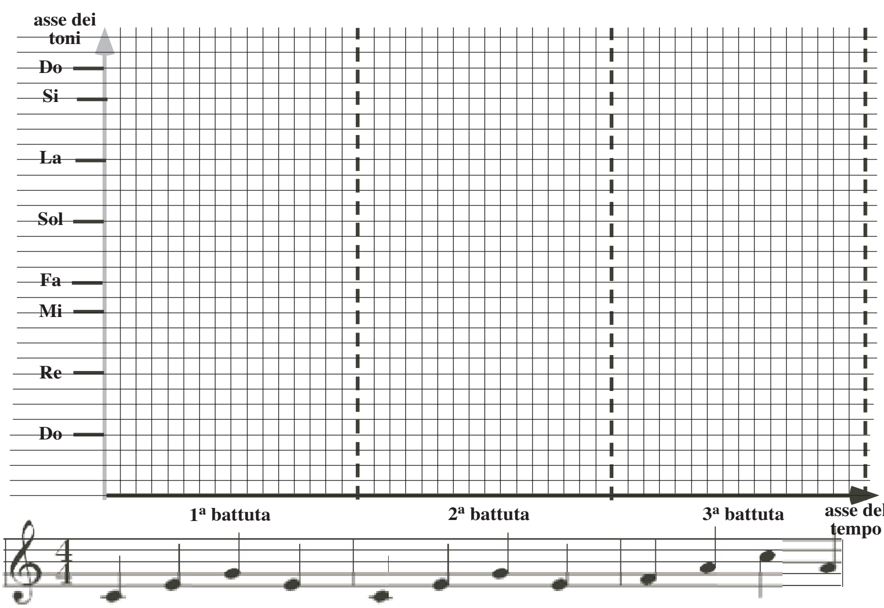
«La maestra di canto mi ha lasciato un compito; devo disegnare uno schema che rappresenti una melodia. Ecco come procedere:

– scrivi sotto ogni nota il suo nome.
– per ogni nota, partendo dal suo nome, traccia un segmento parallelo all'asse del tempo.

Se la nota ha la durata di 1/4, il segmento avrà una lunghezza pari a 4 volte il lato di un quadretto della griglia.

– all'interno di ogni battuta, unisci i segmenti orizzontali relativi a due note successive con un segmento che sia parallelo all'asse dei toni. Ho saputo dal vostro maestro di canto che siete bravi a musica. Mi potete aiutare?

Grazie



La rappresentazione grafica che otterrai indicherà contemporaneamente il **valore di durata dei singoli suoni,** ovvero il loro scorrere nel tempo (asse del tempo), e l'**altezza assoluta di ognuno di essi**, ovvero il tono (asse dei toni)[3].

3. La soluzione è riprodotta alla fine.

a) Dopo aver seguito le indicazioni che ti sono state date, inserisci sui vertici delle tre figure, rappresentanti le tre battute, delle lettere nel seguente modo:
da A ad H: per la figura della 1ª battuta
da A' ad H': per la figura della 2ª battuta
da A'' ad H'': per la figura della 3ª battuta

b) Osserva le figure che hai disegnato per la 1ª battuta, per la 2ª e per la 3ª: come sono fra di loro? Hanno delle caratteristiche in comune?

____
____
____

c) Partendo dalla seconda e dalla terza figura e usando il tuo righello, disegna dei segmenti che uniscano i vertici nel seguente modo: A'A'', B'B'', ..., H'H''.
I segmenti che hai disegnato hanno delle caratteristiche in comune (se sì, quali)?

____
____
____

d) Secondo te, è possibile dalla seconda figura ottenere la terza? In quali modi?
Come si devono spostare A', B', ..., H' per ottenere A'', B'', ..., H'' utilizzando il percorso più breve possibile?

____
____
____

e) Seguendo lo stesso procedimento, è possibile dalla prima figura ottenere la seconda oppure la terza?

____
____
____

La trasformazione geometrica in cui una figura viene spostata in modo tale che:
- la **direzione**
- il **senso** (o verso)
- la **lunghezza**

dello spostamento sia uguale per tutti i suoi punti è detta

____

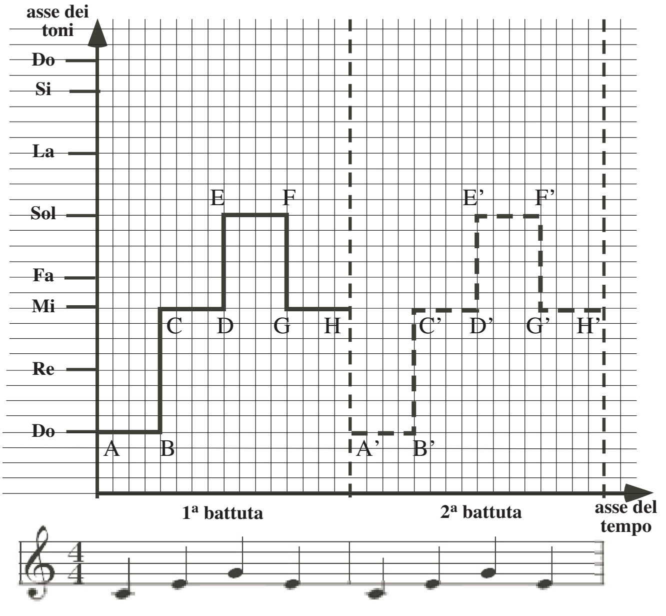
Matematica e Musica: per saperne di più...

In musica si possono riconoscere alcune trasformazioni geometriche. Ad esempio, la **traslazione** in musica corrisponde a una **tecnica compositiva** usata da secoli per sviluppare una melodia polifonicamente (a più voci). Essa è particolarmente presente nel «canone» e nella «fuga», nei quali si ha una melodia (detta tema principale) che inizialmente viene esposta da una sola voce (o strumento) e successivamente viene riproposta dalle altre voci, dopo opportune trasformazioni.

Un importante compositore e organista dell'epoca barocca che rigorosamente ha applicato in molte sue composizioni diverse trasformazioni geometriche, quali la traslazione, è stato J. S. Bach.

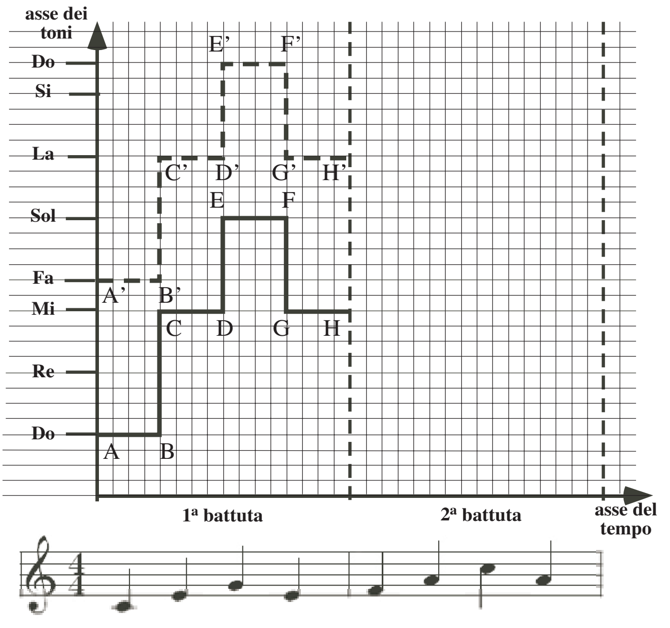
Ulteriori parallelismi fra matematica e musica si possono trovare riconsiderando la melodia utilizzata per l'attività precedente. Questa melodia può essere infatti:

Traslata rispetto all'asse x



La melodia di partenza viene ripetuta una seconda volta con gli stessi toni e la stessa durata.

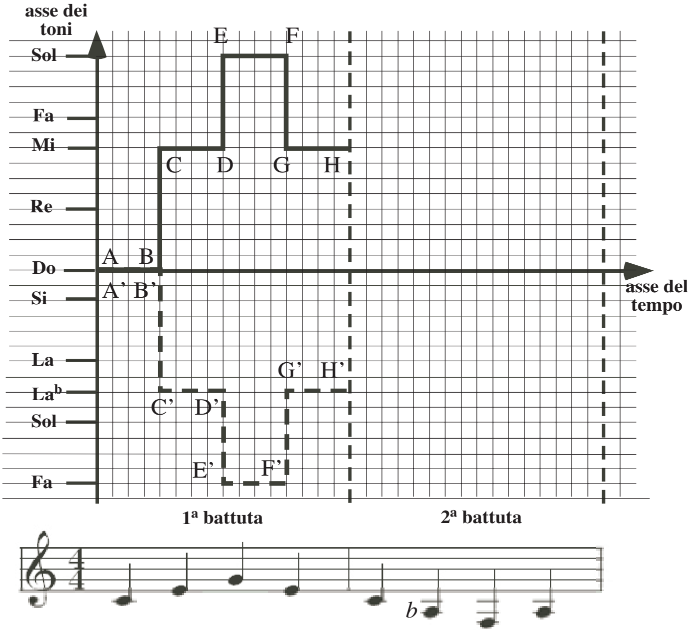
Traslata rispetto all'asse y



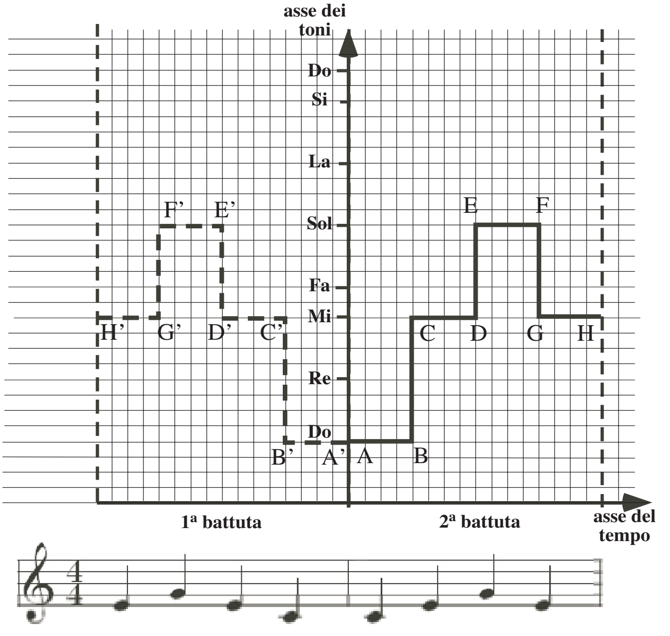
La melodia traslata viene eseguita una quarta sopra: questo significa che ogni singola nota viene innalzata di due toni e un semitono. La melodia non cambia rispetto a quella di partenza ma viene eseguita a un'altezza superiore.

Oltre alla traslazione, alla base delle tecniche compositive per sviluppare una melodia abbiamo altre trasformazioni geometriche. Ad esempio, in seguito mostreremo graficamente altre trasformazioni geometriche e il loro effetto musicale.

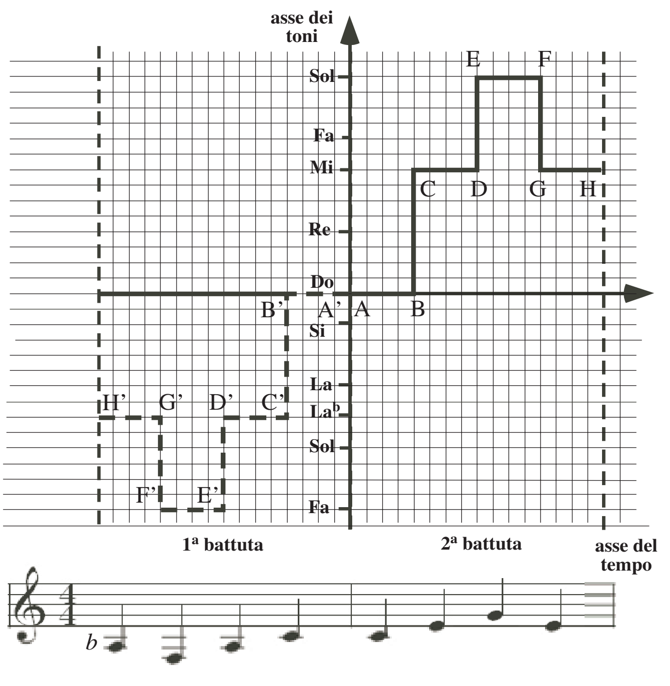
Simmetria assiale rispetto all'asse x



Simmetria assiale rispetto all'asse y



Simmetria centrale rispetto all'origine

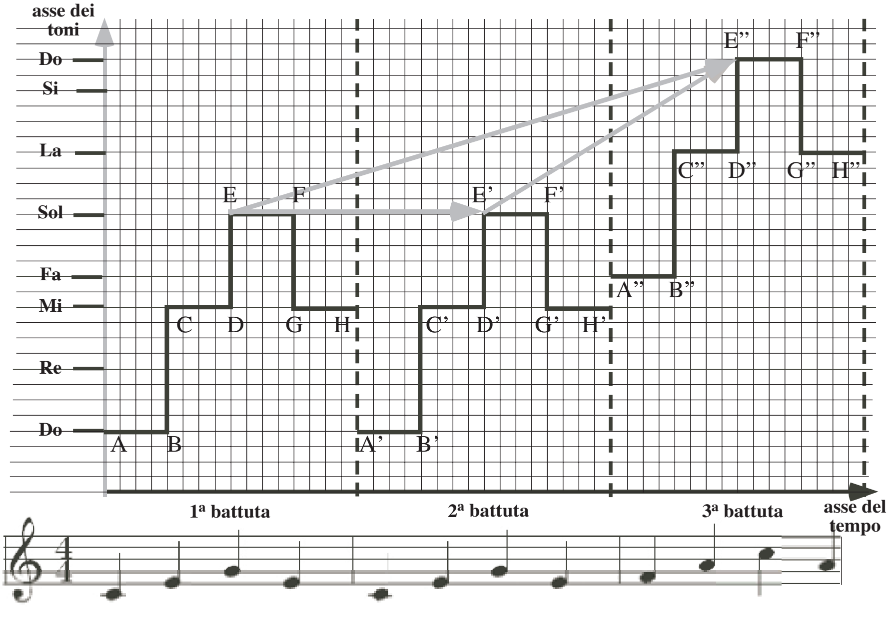


Commenti alle rappresentazioni precedenti

- **Simmetria assiale rispetto all'asse x**: possiamo notare che ogni singolo intervallo fra le note della melodia originale viene rispettato anche nella melodia «riflessa». La differenza sta nel fatto che le note vengono eseguite in senso inverso: se un intervallo è di un tono ascendente nella melodia riflessa diventa di un tono discendente. Si noti che per mantenere inalterata la distanza fra tutte le note si è dovuto alterare il la in la bemolle (*b*). In musica una trasformazione di questo tipo prende il nome di **canone per moto contrario** (oppure **inversione**) e se le due melodie iniziano simultaneamente viene chiamata **canone a specchio**.
- **Simmetria assiale rispetto all'asse y**: si può notare come le due melodie (originale e riflessa) siano costituite dalle stesse note alla stessa altezza. La differenza sta nella sequenza: le note vengono suonate a ritroso partendo dall'ultima nota della melodia originale e terminando con la prima. In musica questo tipo di trasformazione prende il nome di **retrogrado** o **canone a granchio**.
- **Simmetria centrale rispetto all'origine**: è sicuramente la più complessa delle trasformazioni. Essa si compone simultaneamente delle due simmetrie descritte in precedenza e ha l'effetto di eseguire gli intervalli a ritroso e in senso inverso.

Non vi resta che ascoltare gli effetti prodotti dalle trasformazioni summenzionate, ne resterete meravigliati. Alcune trasformazioni modificano profondamente la melodia originale assumendo i più svariati caratteri. Buon ascolto a tutti!

Soluzione



2. Dalla bricolla degli Atolli matematici

Gianfranco Arrigo

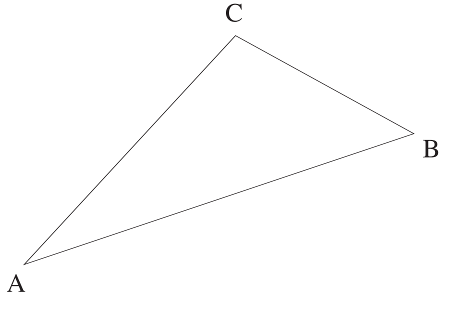
Premessa

La rubrica «Dalla bricolla» prende il nome dal sacco che i contrabbandieri usavano per trasportare a spalla la merce. L'idea di assumere questo termine è stata di Antonio Steiner, docente universitario in pensione e grande amico del Bollettino. In questo spazio si propongono spunti didattici, problemi, curiosità che l'insegnante sicuramente può ritrovare negli scaffali di casa sua nei quali è solito riporre materiali didattici che non usa più, ma che gli rincresce gettare. La rubrica è aperta a tutti coloro che un giorno, in modo del tutto fortuito, si sono ritrovati fra le mani uno di questi documenti e hanno esclamato: «Toh, guarda un po' che belle cose facevo fare ai miei allievi!».

Con questo numero inauguriamo una sezione particolare della bricolla che raccoglie proposte preparate dagli autori della collana «Atolli matematici» e che hanno dovuto essere scartare per ragioni di spazio. Si tratta quindi di materiali già pronti per l'uso nelle classi.

Proposta 1
Rapporto tra lunghezze

1.1. Baricentro di un triangolo



Domanda 1 Nella figura esegui la seguente costruzione:

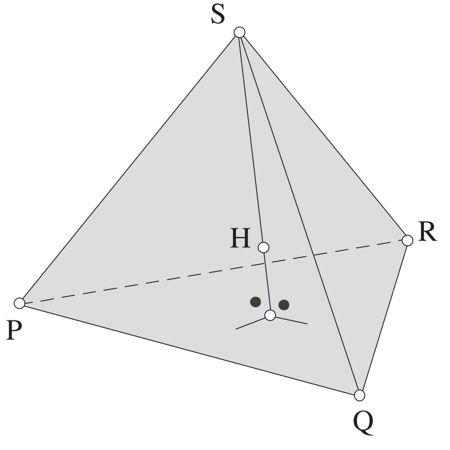
- trova il punto medio di AB e chiamalo M;
- trova il punto medio di AC e chiamalo L;
- disegna le **mediane** CM e BL;
- il punto d'intersezione delle mediane chiamalo H: è il **baricentro** del triangolo.

La mediana CM è lunga 3 cm e la mediana BL è lunga 5,4 cm.
Il baricentro suddivide ogni mediana nel rapporto 1 a 2.

Domanda 2 Calcola le misure dei segmenti CH, HM, BH e HL.

1.2. Baricentro di un tetraedro

Nella figura sottostante è rappresentato un tetraedro regolare PQRS e una sua altezza SK. Il baricentro H suddivide l'altezza nel rapporto 1 a 3. L'altezza è lunga 28 cm.



Domanda 1 A quale distanza si trova il baricentro H dal vertice S?

Proposta 2
Uso della calcolatrice

Giri in bicicletta

Ferdy è un appassionato ciclista. Quando si allena, percorre sempre uno dei quattro giri che si è costruito. È anche diligente e annota ogni volta i chilometri percorsi.

Ecco uno stralcio dal suo diario di allenamento:

3 lug	Giro del Vedeggio	68	2 h 35 min
4 lug	Giro del Malcantone	79	3 h 25 min
6 lug	Giro del Mendrisiotto	88	4 h 5 min
7 lug	Giro del Vedeggio		2 h 40 min
8 lug	Giro del Vedeggio		2 h 37 min
11 lug	Giro del Malcantone		3 h 22 min
12 lug	Giro del Mendrisiotto		4 h 12 min
14 lug	Giro del Malcantone		3 h 28 min
15 lug	Giro del Vedeggio		2 h 33 min
Totale km percorsi			
Totale tempo impiegato in ore (h) e minuti (min)			

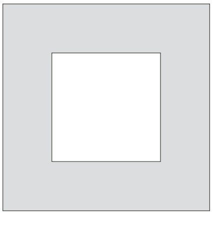
Domanda 1 Scrivi con una sola espressione e nella forma che ti sembra più semplice il calcolo che permette di trovare il totale dei chilometri percorsi in quei giorni.

Domanda 2 Stima il risultato del calcolo precedente e trova il numero esatto di chilometri percorsi.

Domanda 3 Organizza un calcolo che ti permetta di trovare in ore e minuti il totale del tempo impiegato ed esegui le operazioni necessarie con l'aiuto della calcolatrice.

Proposta 3
Lunghezze e aree

3.1. Suddividere un'area



La figura mostra un porta fotografie a forma quadrata.

Il contorno ha il lato di 50 cm. La superficie occupata dalla fotografia dev'essere un terzo di quella della cornice.

Domanda Che dimensione deve avere la fotografia?

3.2. L'aiuola circolare

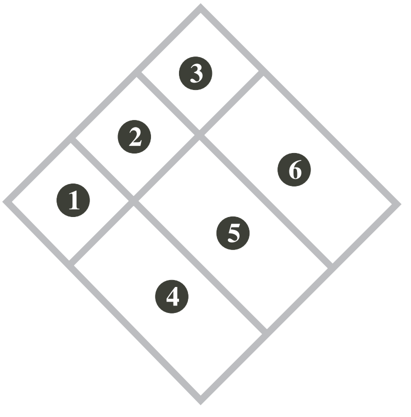
Il giardiniere Didier è incaricato di curare l'aiuola circolare al centro di una rotonda stradale.

Viene pagato un tanto al metro quadrato. Il tecnico comunale gli dice che il diametro dell'aiuola è 14,25 m. Dopo una frazione di secondo, Didier ribatte: *«Allora sono circa 150 m^2».*

Domanda 1 Che calcolo avrà fatto il signor Didier?

Domanda 2 Qual è l'area dell'aiuola approssimata a meno di un dm^2?

3.3. L'orto del signor Verdi



L'orto è un quadrato suddiviso in sei aiuole. Quelle segnate con i numeri 1, 2 e 3 sono quadrati isometrici di perimetro 6,4 m; quelle segnate con i numeri 4, 5 e 6 sono rettangoli isometrici.

D. Scrivi con una sola espressione numerica il calcolo che ti permette di trovare il perimetro dell'aiuola numero 6.

D. Calcola il risultato dell'espressione che hai scritto.

3.4. Le aiuole di Gastone

Gastone possiede un orto del quale si vanta con gli amici. Si compone di 4 aiuole rettangolari e tre circolari. Le misure in metri delle aiuole a forma di rettangolo sono:

(2,25 ; 0,90) (2,28 ; 0,92) (1,45 ; 1,45) (2,10 ; 0,98).

Le misure in centimetri dei diametri delle aiuole a forma di cerchio sono:

160 158,5 160,5

Domanda 1 Calcola le aree delle 7 aiuole e ordinale in senso crescente.

Domanda 2 Rispetto a quale unità di misura pensi sia più opportuno esprimere le aree delle aiuole?

1. La grande festa della matematica del gruppo RSDDM[1] di Bologna

Il 23 settembre 2006 si è svolta a Castel San Pietro Terme (BO) una giornata di festa e di studio per sottolineare i 20 anni del Convegno «*Incontri con la Matematica*», i 20 anni della rivista «*La matematica e la sua didattica*» e i 20 anni del Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica di Bologna.

Nell'occasione sono stati presentati: gli atti di questo convegno (a cura di S. Sbaragli), l'indice analitico dei 21 convegni «Incontri con la matematica» (a cura di A. Borrelli e C. Pellegrino), l'indice analitico dei 20 anni della rivista «La matematica e la sua didattica» (a cura di A. Borrelli e C. Pellegrino), il programma e gli atti di «Incontri con la matematica» n. 20 (a cura di Silvia Sbaragli), il sito del RSDDM di Bologna (allestito da Lorella Campolucci): **http://www.dm.unibo.it/rsddm**, in funzione dal 23 settembre 2006.

Organizzatrice e animatrice della giornata: Silvia Sbaragli.

Fra i numerosi intervenuti, dalle autorità politiche comunali e provinciali, ai rappresentati dell'Università di Bologna e dell'ASP di Locarno, alcuni studiosi di fama internazionale che hanno tenuto interessanti relazioni:

- Athanasios Gagatsis (CY)
  The effects of different modes of representations
  in mathematical problem solving.
- Salvador Llinares (E)
  Aprendiendo a «ver» la enseñanza de las matemáticas.
- Maria Luisa Schubauer Leoni (CH)
  Il matematichese *e altri sistemi semiotici condivisi in classe.*

1. Si tratta di un gruppo appartenente all'Istituto di Matematica dell'Università di Bologna che riunisce insegnanti e ricercatori in didattica della matematica; questi ultimi formano il Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica (NRD). Per maggiori informazioni e per conoscere la produzione del gruppo, consultare il sito: http://www.dm.unibo.it/rsddm; offre anche la possibilità di scaricare articoli di ricerca e di divulgazione in formato pdf.

- Raymond Duval (F)
  Comment analyser le rôle et le fonctionnement des représentations... sémiotiques dans les activités mathématiques?
- Bruno D'Amore (I)
  La matematica e la sua didattica: vent'anni di impegno.

Brevi comunicazioni sono state tenute da Gianfranco Arrigo (CH), Giorgio Casadei (I), Iliada Elia (CY), Franco Frabboni (I), Mario Ferrari (I), Giorgio Bagni (I), Paola Vighi e Igino Aschieri (I), Lorella Campolucci (I), Silvio Maracchia (I), Boris Janner (CH), Carmelo Mammana (I), Franco Eugeni (I), Ivo Mattozzi (I), Martin Dodman (I), Janna Nardi (I), Ennio Peres (I), Domingo Paola (I), Michele Pertichino (I), Anna Maria Benini (I), Luigi Tomasi (I).

Dall'album delle foto…

Gianfranco Arrigo e Bruno D'Amore seguono attentamente le relazioni.

Franco Frabboni impegnato in una discussione con Gianfranco Arrigo.

Ennio Peres a colloquio con Silvia Sbaragli sotto gli occhi divertiti di Gianfranco Arrigo.

Momenti di relax per Bruno D'Amore e Giorgio Mainini.

Bruno D'Amore con Salvador Llinares,
da Alicante (Spagna).

Athanasios Gagatsis e Iliada Elia
sono giunti da Cipro.

La ginevrina Maria Luisa Schubauer Leoni
pronuncia la sua interessante relazione.

Il francese Raymond Duval impegnato nella sua
dotta conferenza.

Progetto grafico
Bruno Monguzzi
Prestampa
Taiana
Stampa
Veladini

Redazione
Laboratorio di didattica della matematica
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera

Telefono
091 814 18 21/22/24
Fax
091 814 18 19
a.bdm@ticino.com

Amministrazione
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera
Fax
091 814 18 19

Esce due volte all'anno
a maggio e a dicembre

Abbonamento annuo
Sfr. 30.–
€ 16

Bollettino dei docenti di matematica
53

In questo numero: due relazioni su temi di storia della matematica presentate da S. Maracchia e da M. Cerasoli; ben cinque lavori di didattica della matematica – di ricerca, di riflessione e di sperimentazione – presentati da F. Capeder, A. Di Maria, G. Arrigo, P. Hägler, E. Conti Rossini; sostanziosi contributi Dalla bricolla di L. Bellini e S. Cataldi Spinola e di G. Arrigo; due aree di gioco per appassionati offerte da A. Frapolli e da G. Mainini; una festosa segnalazione.

ISBN 88-86486-53-7
Fr. 18.–

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport