A cura
del Laboratorio di didattica della matematica

Bollettino dei docenti di matematica

54

Maggio
2007

Ufficio
dell'insegnamento medio
Centro
didattico cantonale

Bollettino
dei docenti di matematica
54

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport

ISBN 88-86486-62-6

Bollettino dei docenti di matematica 54

Maggio
2007

Ufficio dell'insegnamento medio
Centro didattico cantonale

Indice

Prefazione 7

I. La Bottega di Eulero

1. Una raccolta di situazioni matematiche ispirate all'opera di Leonhard Euler nel trecentesimo dalla nascita
Gianfranco Arrigo, Giorgio Mainini 9

2. Le frazioni e le operazioni con le frazioni 19

3. Euler e i quadrati 33

4. La retta di Euler 41

5. Il problema dei ponti di Königsberg: soluzione di Euler 47

6. I primordi della topologia 51

7. I numeri primi 57

8. Le somme di infiniti addendi 69

II. Didattica

1. Il grafico orario per capire meglio il concetto di funzione
Ottavia Foà Häusermann 77

III. Giochi

1. Quiz numero 37
Aldo Frapolli 95

2. Il Kangourou della matematica
Andrea Pellegrinelli 97

IV. Dalla bricolla

1. L'equilibrio della leva reso palese
Antonio Steiner 103

2. Il biliardo: non solo abilità...
Luca Bellini 105

V. Segnalazioni

1. Convegno nazionale n. 21: *Incontri con la Matematica* 113

2. Primo convegno di Forlì.
Didattica della matematica ieri, oggi e domani 121

3. Recensioni 123
Gianfranco Arrigo

Prefazione

15 aprile 1707: nasce a Basilea Leonhard Euler (italianizzato: Eulero), il più grande matematico svizzero e uno dei maggiori matematici che la storia ricordi, insignito, come Carl Friedrich Gauss, del titolo di *Princeps Mathematicorum*. Il Bollettino dei Docenti di matematica intende dare risalto a questa ricorrenza a modo suo: con serietà, nell'ottica matematica e didattica, facendo capo a numerosi specialisti svizzeri e esteri.

Il numero 54 presenta la Bottega di Eulero di Gianfranco Arrigo e Giorgio Mainini: una raccolta di situazioni didattiche direttamente derivate dall'immensa opera matematica di Euler. Queste pagine sono dedicate agli insegnanti e vogliono fornire numerosi spunti a partire dai quali costruire attività adatte alle singole classi, sia di scuola media sia delle superiori. A un patto, però: che non siano esaminate con l'occhio dell'insegnante ligio al programma, ma di chi è ben cosciente dell'importanza di un insegnamento che metta in risalto anche gli aspetti storici, filosofici e culturali della matematica.

Sarà poi la volta del numero 55, che presenterà una rassegna di articoli specialistici su Euler: agli autori abbiamo chiesto di trattare un argomento legato all'opera di Euler che lo ha particolarmente colpito, sia per interesse generale sia perché attinente alla propria specializzazione. Ne dovrebbe uscire una sorta di mosaico che mostrerà Euler in modo originale.

Sul numero 54 si trovano inoltre alcuni contributi che fanno da complemento alla Bottega di Eulero. Iniziamo col presentare l'articolo di Ottavia Foà-Häusermann sulla possibilità di utilizzare il grafico orario per meglio capire il concetto di funzione: una rielaborazione del suo ottimo lavoro di diploma all'ASP di Locarno.

Andrea Pellegrinelli ci stimola presentando il concorso matematico Kangourou: un'altra ghiotta possibilità per spingere gli allievi verso una matematica più… genuina di quella scolastica.

Nella Bricolla troviamo due spunti notevoli: il primo, di Antonio Steiner, presenta una sintesi della teoria della leva di Archimede, sulla base dell'articolo dello storico della matematica Jean Dhombres apparso sul numero 44 del Bollettino; il secondo è firmato da Luca Bellini, che sta diventando ormai il nostro specialista di matematica e sport (questa volta lo sport chiamato in causa è il biliardo).

È sempre presente anche il quiz di Aldo Frapolli, questa volta di sapore euleriano.

Ricca è anche la parte riservata alle segnalazioni e alle recensioni.

1. Una raccolta di situazioni matematiche ispirate all'opera di Leonhard Euler nel trecentesimo dalla nascita

Gianfranco Arrigo, Giorgio Mainini

This article is a collection of mathematical situations inspired by the work of Leonhard Euler, to celebrate the third centenary of the great Swiss mathematician's birth. The collection is aimed at teachers, who, in turn, have to tailor the materials to secondary school or high school students' needs.

1. Introduzione

L'occasione dei trecento anni dalla nascita di Leonhard Euler (italianizzato: Eulero) ci è sembrata propizia per creare una raccolta di situazioni matematiche ispirata all'opera, invero colossale, di questo nostro matematico (svizzero di Basilea), che si è guadagnato tanta fama in ambito internazionale da essere insignito del titolo di *Princeps mathematicorum*, al pari di Carl Friedrich Gauss.

Oggi più che mai gli insegnanti hanno bisogno di idee, di materiali didattici, o anche solo di spunti per poter rinnovare e variare continuamente l'attività in classe, soprattutto nei momenti di costruzione dei concetti. Sappiamo come l'apprendimento concettuale nasca e si sviluppi attraverso il continuo adattamento di immagini mentali: un processo delicato che porta alla formazione del modello mentale. Siamo pure coscienti dell'importanza della rappresentazione dei concetti, della necessità di operare trattamenti all'interno di uno stesso registro semiotico e conversioni in un altro registro. Operazioni, queste, che permettono al soggetto da una parte di riconoscere e rinforzare gli elementi invarianti (quelli che resistono ai trattamenti e alle conversioni e che, alla fine, costituiranno il modello matematico adeguato del concetto) e dall'altra di eliminare a poco a poco gli elementi varianti (quelli legati alle situazioni contingenti, ai casi particolari, quelli che variano da una rappresentazione all'altra, da un registro all'altro e che non devono far parte del modello matematico).

Per poter lavorare con successo nella costruzione dei concetti occorre quindi disporre di una raccolta sempre aperta e rinnovabile di situazioni didattiche. La Bottega di Eulero è un grande contenitore di situazioni con una caratteristica in più: l'importanza data all'aspetto storico-culturale. Come capita a chiunque visiti musei dedicati agli usi e ai costumi di un tempo, di sentire l'odore dell'epoca, così anche chi si avvicina alle situazioni della Bottega non può non avvertire sensazioni del XVIII secolo: una frase autenticamente scritta da Euler, un modo inconfondibile di proporre e di spiegare la matematica, immagini fantasiose della casa di San Pietroburgo o della corte berlinese di Federico II.

La mole di materiale da noi raccolto supera di gran lunga la capacità della nostra rivista. Per questo stiamo allestendo un CD che metteremo a disposizione degli insegnanti ticinesi dopo la pausa estiva.

Auspichiamo che gli insegnanti trovino, fra l'importante offerta di questa «Bottega di Eulero», qualche spunto per svolgere attività in classe che aiuti gli allievi a capire che la matematica è una disciplina dall'alto valore storico e culturale, costruita dall'uomo nel corso di alcuni millenni, grazie a innumerevoli sforzi, sbagliando molto di più di quel che si crede. Una disciplina che a scuola dovrebbe essere costruita e non subita da ogni allievo. Quindi una disciplina umana, fortemente soggettiva e non solo oggettiva, ben diversa dall'arida immagine che troppo spesso viene sbandierata con colpevole disprezzo.

2. Qualche data della vita di Leonhard Euler

1707 15 aprile: nasce a Basilea, da Paul Euler, pastore protestante, che era stato allievo di Jakob Bernoulli, e da Margaret Bruckner, figlia di un pastore.

1720 entra all'Università di Basilea, dove Johann Bernoulli scopre subito il talento matematico del giovane e gli dà lezioni private di matematica.

1723 ottiene il Master in filosofia con un lavoro su Cartesio e Newton. Nello stesso anno comincia gli studi di teologia, senza particolare entusiasmo. Passa quindi a matematica, grazie anche all'intervento di Johann Bernoulli presso il padre Paul.

1726 completa gli studi all'Università di Basilea, con un lavoro su, tra gli altri, Cartesio, Newton, Galileo, Jakob Bernoulli, Taylor e Wallis. Pubblica il suo primo articolo, sulle curve isocrone in un mezzo resistente.

1727 partecipa al gran Premio dell'Accademia di Parigi, che non vince, arrivando secondo, ottimo risultato per giovane laureato. Nello stesso anno lascia Basilea per San Pietroburgo, dove arriva il 17 maggio. Lavorerà all'Accademia delle Scienze, fondata due anni prima dalla zarina Caterina I, moglie di Pietro il Grande, nel dipartimento di fisica e matematica.

1730 diventa professore di fisica all'Accademia, di cui diventa membro a tutti gli effetti.

1733 diventa senior della cattedra di matematica.

1734 sposa Katharina Gsell, di famiglia svizzera, dalla quale avrà tredici figli. Solo cinque, però, sopravviveranno oltre l'infanzia.

1735 cominciano i suoi problemi di salute. Una fortissima febbre mette in pericolo la sua vita.

1736-37 pubblica *Mechanica*, nel quale, per la prima volta, la dinamica newtoniana viene presentata in termini di analisi matematica.

1740 la sua reputazione in campo scientifica è già altissima, anche perché, sia nel 1738 sia nel 1740, vince il Gran Premio dell'Accademia di Parigi.

1741 lascia San Pietroburgo per Berlino, all'Accademia delle Scienze, invitatovi da Federico il Grande. Continua però a ricevere una parte di stipendio dalla Russia, per la quale scrive libri e compie ricerche. Durante la sua permanenza a Berlino scrive circa 380 articoli e libri sul calcolo delle variazioni, sui moti planetari, su artiglieria e balistica, sull'analisi, sulla navigazione e costruzione di navi, sul moto della Luna, sul calcolo differenziale e le *Lettere ad una principessa tedesca*.

1759 dopo la morte di Maupertuis assume la direzione dell'Accademia di Berlino, ma senza il titolo di presidente. In effetti, i suoi rapporti con Federico il Grande non erano felicissimi. La presidenza fu offerta nel 1763 a D'Alembert, che la rifiutò.

1766 ritorna a San Pietroburgo. Poco dopo diventa quasi totalmente cieco.

1771 nonostante un'operazione alla cataratta, diventa del tutto cieco, ma, grazie alla sua notevole memoria, può continuare i suoi lavori sull'ottica, sull'algebra e i movimenti della Luna. Stranamente, se si tien conto che i migliori lavori un matematico li svolge prima dei quarant'anni, è dopo il ritorno in Russia che Euler produce circa la metà di tutta la sua opera, nonostante la cecità. Molto importante fu l'aiuto che gli diedero i figli Johann Albrecht, della cattedra di fisica dell'Accademia di San Pietroburgo, e Christoph.

1773 muore la moglie Katharina.

1776 sposa la sorellastra di Katharina, Salome Gsell.

1783 18 settembre: muore a San Pietroburgo. Quel giorno diede lezioni di matematica a un suo nipotino, fece qualche calcolo alla lavagna sui movimenti dei palloni, discusse con due suoi collaboratori, Lexell e Fuss, su Urano, pianeta appena scoperto. Verso le cinque di sera, colpito da un'emorragia cerebrale, disse «Sto morendo», poi perse conoscenza. Fu sepolto a San Pietroburgo. L'Accademia di San Pietroburgo continuò a pubblicare opere di Euler per circa cinquant'anni ancora.

3. Date di pubblicazione delle opere

Come messo in nota più volte nelle schede che seguono, l'elenco delle opere di Euler è stato redatto dal matematico, e storico della matematica, Gustav Eneström. L'elenco cronologico completo comprende 866 titoli, siglati da E001, *Constructio linearum isochronarum in medio quocunque* del 1726, a E856, *Fragmentum ex adversariis mathematicis depromtum*, del 1862, più altri 63 titoli di cui non si conosce la data di pubblicazione.

Qui diamo la data solo delle opere citate nelle schede.

1738 E017 *Rechenkunst*

1738 E020 *De summatione innumerabilium progressionum*

1738 E026 *Observationes de theoremate quodam Fermatiano aliisque ad numeros primos spectantibus*

1740 E041 *De summis serierum reciprocarum*

1741 E053 *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*

1744 E072 *Variae observationes circa series infinitas*

1748 E101 *Introductio in analysin infinitorum, Tomus I* (in part. il capitolo 7: *De quantitatum exponentialium ac Logarithmorum per Series explicatione*)

1750 E134 *Theoremata circa divisores numerorum*
1758 E230 *Elementa doctrinae solidorum*
1758 E231 *Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita*
1764 E283 *De numeris primis valde magnis*
1759 E309 *Solution d'une question curieuse que ne paroit soumise à aucune analyse*
1767 E325 *Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum*
1772 E461 *Extrait d'un lettre de M. Euler le père a M. Bernoulli concernant le memoire imprimé parmi ceux de 1771 p 318*
1782 E530 *Recherches sur un nouvelle espèce de quarrés magiques*
1802 E715 *De variis modis numeros praegrandes examinandi, utrum sint primi nec ne?*
1805 E718 *Facillima methodus plurimos numeros primos praemagnos inveniendi*
1805 E719 *Methodus generalior numeros quosvis satis grandes perscrutandi utrum sint primi nec ne?*
1849 E795 *De quadratis magicis*

3. Letture

Autobiografia di Leonhard Euler

«Io, Leonhard Euler, sono nato nell'anno 1707 il 15 aprile del calendario nuovo a Basilea. Mio padre era Paulus Euler, mia madre si chiamava Margaretha Bruckner. I miei genitori si stabilirono poco dopo nel comune di Riehen, situato a un'ora a piedi da Basilea, dove mio padre era stato nominato parroco. Qui ricevetti i primi rudimenti dell'istruzione da mio padre, che, essendo stato discepolo del famoso Jacob Bernoulli, volle trasmettermi fin da giovanissimo i fondamenti della matematica, usando a tale scopo come testo il manuale di Coss con le annotazioni di Michaels Stiefels (che era il testo di "Algebra" di Christophs Rudolphs del 1525 opportunamente rifatto). Con questo testo mi esercitai per alcuni anni. Più tardi, per poter studiare scienze umane, mi trasferii presso mia nonna a Basilea, dove frequentai il ginnasio e contemporaneamente perfezionai le mie conoscenze matematiche prendendo lezioni private.

Nel 1720 entrai all'Università e ben presto conobbi il famoso professore Johann Bernoulli, che si prodigò per aiutarmi. Non potendo però impartirmi personalmente lezioni private, mi consigliò di leggere e studiare da solo dei testi piuttosto complicati. Poi ogni sabato sera avevo libero accesso alla sua abitazione ed egli in quelle occasioni mi aiutava ad appianare tutte le difficoltà che avevo incontrato durante la settimana di studio. Poiché ogni dubbio eliminato mi permetteva di chiarirne di colpo altri dieci, penso che questo sia stato il metodo migliore per compiere significativi progressi in matematica.

Nel 1723, a un anno e mezzo dal conseguimento della laurea, venni promosso «Magister». Successivamente, spinto dalla mia famiglia, dovetti iscrivermi alla facoltà di teologia e applicarmi anche allo studio delle lingue greca ed ebraica. Non feci tuttavia molti progressi su questo terreno, poiché mi dedicai maggiormente alla matematica, favorito anche dalla fortunata opportunità di poter continuare a frequentare la casa del professore Johann Bernoulli. In quegli anni era stata fondata la nuova Accademia delle Scienze di San Pietroburgo, alla quale furono invitati come insegnanti nel 1725 i figli di Bernoulli, e ciò fece nascere in me il desiderio di recarmi a San Pietroburgo. I Bernoulli mi promisero che avrebbero fatto tutto il possibile per procurarmi un impiego onorevole in quella città e la promessa fu mantenuta, perché mi trovarono un posto che mi avrebbe permesso di applicare le mie conoscenze matematiche alla medicina.

L'allettante proposta mi giunse solo all'inizio dell'inverno del 1726 ma decisi di rinviare la partenza alla primavera successiva. Nel frattempo mi immatricolai alla facoltà di medicina di Basilea e partecipai senza esito anche al concorso per il posto vacante alla cattedra di fisica presentando uno studio sul suono. Giunta la primavera del 1727, lasciai Basilea all'inizio di aprile e arrivai a Lubecca troppo in anticipo per trovare una nave diretta a San Pietroburgo. Presi allora una nave fino a Reval, poi un'altra fino a Cronstadt. Arrivai a destinazione lo stesso giorno della morte della zarina Caterina I e trovai quindi l'Accademia in grande agitazione e costernazione. Ebbi tuttavia il piacere di incontrare, oltre a Daniel Bernoulli (il fratello Nicolaus era nel frattempo morto), il professor Hermann, un lontano mio parente, il quale mi aiutò in tutti i modi. Il mio salario era di 300 rubli ma in compenso ero esentato dal pagare l'abitazione, la legna per il riscaldamento e la luce. Viste la mie specifiche competenze per la matematica, venni nominato aggiunto «Matheseos sublimioris»; in tal modo decadde la iniziale promessa di un insegnamento inerente la medicina. Mi venne offerta nel contempo l'opportunità di partecipare liberamente alle riunioni accademiche ed esporre in quelle occasioni le mie ricerche e i miei studi matematici.

Nel 1730 i professori Hermann e Bilfinger ritornarono nei loro paesi di origine e io venni designato professore di fisica al posto di quest'ultimo. Il contratto fu stipulato per quattro anni con un salario di 400 rubli nel primo biennio e 600 rubli (più 60 rubli per l'alloggio, la legna e la luce) nel secondo. Sposai Catherina Gsell nel Natale del 1733. Siccome in questo stesso periodo anche il professore Daniel Bernoulli aveva fatto ritorno in patria, venni designato pure professore «Matheseos sublimioris» e successivamente assunsi l'incarico di supervisore del dipartimento geografico, assegnatomi dal senato accademico. Per tutte queste incombenze il mio salario fu portato a 1200 rubli.

Nel 1740, dopo la morte dalla zarina Anna, le cose cominciarono a cambiare e a prendere una brutta piega, perché si instaurò un malgoverno che mi spinse ad accettare senza esitazione un incarico a Berlino. Trasferitomi colà, sua Maestà il re di Prussia mi offrì un salario di 1600 talleri. Ciò che accadde dopo è ormai noto a tutti».

Qualche notizia complementare[1]

Euler con la sua famiglia arrivò a Berlino il 25 luglio del 1741. Il lavoro di Euler a Berlino fu molto tranquillo, se paragonato a quello di San Pietroburgo, dove era stato costretto a svolgere numerosissime attività collaterali all'insegnamento.

1. Queste notizie sono tratte dal libro di F. Di Venti, A. Mariatti, *Leonhard Euler tra realtà e finzione*, Bologna: Pitagora, 2000.

Quando Federico II salì al trono, il 30 maggio 1740, tentò di ridare nuova vita alla vecchia Accademia Reale accendendo speranze negli animi dei letterati, degli artisti e degli scienziati di tutta l'Europa e in particolare anche nell'animo di Euler, che prese molto sul serio il progetto della nuova Accademia e iniziò a eleborare idee, sentendosi a buon diritto all'altezza del compito.

Divennero nuovi membri dell'Accademia, fra gli altri, il medico T. Eller, il botanico G. Gledtsch, i chimici S. Marggraf e H. Pott, il filosofo Julien Offrey de Lamettrie, che si integrarono con membri esterni fra i quali i ricercatori A. Celsius e R. Ferchault de Réaumur, il filosofo Wolff e il poeta C. Gottsched, e i francesi Voltaire, d'Alembert e Maupertuis.

Nel 1753, Euler riuscì ad acquistare a Charlottenburg (Berlino) per soli 6000 talleri un grande appezzamento di terreno, la cui coltivazione servì al fabbisogno della sua numerosa famiglia e gli permise, quindi, di ridurre della metà i costi dell'economia domestica.

Tutto sommato, i 25 anni di soggiorno a Berlino, Euler li trascorse serenamente e si poté dedicare completamente alle sue pubblicazioni.

Federico II ed Euler furono due uomini di carattere, di inclinazione e di opinioni diversi. Il primo aveva uno spiccato senso dell'estetica, era un convinto spirito libero, ma tendeva a considerare i suoi sudditi, compreso Euler, dei servi, e pretendeva da loro un'obbedienza cieca. Euler si distingueva nettamente per la sua personalità di scienziato borghese di ispirazione liberale, dal carattere buono e socievole e dalle convinzioni cristiane molto radicate. Inoltre, Federico II non aveva un buon rapporto con la matematica, soprattutto con quella branca della matematica denominata «Analisi». Il rapporto tra i due si deteriorò lentamente fino al punto che Federico II licenziò Euler: era il maggio 1766.

Il 1. giugno 1766, assieme alla sua famiglia composta di 18 persone (tra cui quattro domestici), Euler partì di nuovo per San Pietroburgo. Prima di partire si era però adoperato affinché si consolidasse l'opinione dell'alto livello raggiunto dall'Accademia di Berlino.

Euler arrivò a San Pietroburgo il 28 luglio 1766 dove ricevette un'accoglienza trionfale. Caterina II accolse personalmente lui e la sua numerosa famiglia con tutti gli onori. Non ottenne la vice presidenza dell'Accademia, ma quasi tutte le sue richieste furono soddisfatte. Ricevette un salario annuo di 3000 rubli, una casa lontano dai quartieri militari (dove invece era stato obbligato a vivere durante la sua prima permanenza), riscaldamento gratuito, esenzione da dazi per il suo bagaglio, rimborso delle spese di viaggio e una buona sistemazione per i suoi tre figli. Ricevette, inoltre, subito 10'800 rubli per l'acquisto di una bella casa spaziosa e disposta su due piani, nelle vicinanze dell'Accademia, lungo la Neva.

Questo secondo soggiorno a San Pietroburgo fu però contraddistinto da un susseguirsi di episodi sfortunati, iniziatisi con la perdita parziale del bagaglio durante il trasferimento. Ma la sventura più grave fu una cataratta all'occhio sinistro, quello sano, che lo rese praticamente cieco. Sostenuto però da una incrollabile fede, riuscì a continuare nella sua attività di matematico, sorretto anche dalla sua portentosa memoria e da una incredibile capacità di rappresentazione mentale, tanto che la metà di tutti i suoi lavori furono prodotti proprio dopo che era divenuto cieco. Per scrivere era indispensabile però un aiutante e molti furono i giovani che si misero a sua disposizione. Tra questi un discepolo di Daniel Bernoulli, il basilese N. Fuss, divenne per Euler un prezioso collaboratore.

Nel maggio 1771 scoppiò un incendio che distrusse circa 500 case, tra cui anche quella di Euler. Nella confusione generale egli, data la sua cecità, sarebbe senz'altro caduto vittima dell'evento se non fosse stato per l'operaio basilese J. Grimm che, a rischio della propria vita, riuscì a strapparlo alle fiamme. Anche se i 6000 rubli versati dalla zarina furono sufficienti a compensare le perdite, finirono però in cenere tantissimi manoscritti, tra cui il trattato, premiato a Parigi, sulla teoria lunare, che dovette essere riscritto. Ma la cosa peggiore fu che l'anziano cieco fu costretto a riabituarsi a una nuova casa.

Anche gli altri componenti della famiglia di Euler furono colpiti dalla mala sorte. Nel 1773 morì sua moglie e il vecchio cieco, bisognoso di cure e di assistenza, sposò nel 1776 la sorellastra della defunta, Salomè Gsell. Successivamente tra il 1780 e il 1781 assistette alla morte delle sue due figlie.

Il 5 giugno 1783 si era innalzata la prima mongolfiera e la notizia aveva interessato subito Euler, che si era messo all'opera per il calcolo del tempo e della velocità di ascesa, problema che ancora oggi è rilevante in meteorologia.

Il 17 settembre Euler ricevette la visita del parroco e insegnante di matematica A. Burja che lo trovò affabile e allegro come al solito, sebbene si lamentasse di giramenti di capo, e al quale confidò che ultimamente, quando pensava al proprio stato di salute, gli sembrava di sentirsi a disagio in famiglia. Il giorno seguente Euler passò la mattinata come al solito facendo lezione a un suo nipote ed eseguendo poi alcuni calcoli alla lavagna. Discusse, durante l'ora di pranzo, con i suoi aiutanti Fuss e Lexell riguardo alla scoperta del pianeta Urano, avvenuta due anni prima. Verso le cinque del pomeriggio andò dal nipote, al quale aveva fatto lezione la mattina, per giocare un po' con lui. Si sedette sul sofà a fumare, ma la pipa che teneva in bocca improvvisamente gli cadde. «La mia pipa!» esclamò Euler piegandosi in avanti. Si rialzò, ma senza pipa, si picchiò la fronte con entrambi le mani dicendo: «Sto morendo!».

Euler da quel momento rimase incosciente e l'agonia si protrasse sino alle 11 di sera. Poi «... smise di vivere e far di calcolo» (Condorcet). Egli «terminò il suo cammino all'età di 76 anni, cinque mesi e tre giorni», disse Fuss nel suo toccante elogio funebre per il maestro.

Prefazione al manuale:
«L'arte del calcolo» (Vorbericht zur Rechenkunst)[2]

Il numero di libri di aritmetica che vengono pubblicati sia in Germania che in altri paesi è talmente alto da far pensare a molti che questo lavoro sia del tutto inutile e superfluo. Poiché un decreto imperiale esige che alla gioventù russa si insegnino convenientemente sia l'aritmetica che la geometria, si è pensato a questo scopo di dover far capo a manuali di altri paesi, ma sono sorte grandi difficoltà.

Inoltre, poiché si richiedono un numero sufficiente di libri idonei anche in lingua russa, sarebbe di non poco disagio e di scarso vantaggio ordinarne in altri paesi un così gran numero di esemplari, più di quelli effettivamente necessari: stampare e tra-

2. Dobbiamo la traduzione di questo Vorbericht alla gentilezza della collega e amica Gabriella Soldini.

durre in russo un'opera redatta e stampata altrove, è risultato per molte ragioni problematico.

Inoltre nella maggior parte dei libri di aritmetica stranieri ci sono talmente tante lacune a cui si deve assolutamente porre rimedio[3].

Infatti vi si enunciano unicamente le semplici regole accompagnate da un gran numero di esempi; della ragione però e delle cause su cui si basano le regole non si dice assolutamente niente: oppure le spiegazioni si basano sul vero fondamento dell'aritmetica, ma vengono presentate in modo tale che non se ne possono trovare facilmente altre da quelle a cui si è abituati nell'insegnare la matematica; e oltretutto in queste dissertazioni non ci si preoccupa abbastanza dei vantaggi e dei metodi per mezzo dei quali si ottengono abilità e velocità nel calcolo, ma ci si accontenta di indicarne la ragione solo brevemente.

Poiché l'apprendimento dell'arte del calcolo senza qualche ragione non è né sufficiente a risolvere tutti i casi che si presentano, né affina l'intelletto, pur avendone l'intenzione, allora ci si è sforzati nella presente introduzione di esporre e spiegare la ragione di tutte le regole e operazioni in modo tale da essere capite anche da quelle persone che non sono ancora esercitate in accurate trattazioni: nel far questo però si sono descritti esaurientemente, e spiegati con sufficienti esempi, sia le regole che i vantaggi che possono presentarsi di volta in volta nel calcolo. In tal modo si spera di ottenere che i giovani, oltre all'indispensabile abilità nel calcolo, abbiano sempre presente la necessità di conoscere la vera ragione di qualsiasi operazione e in tal modo vengano gradatamente abituati a riflettere a fondo.

Poi, quando si arrivi a comprendere non solo le regole ma ci si renda conto chiaramente anche della ragione e dell'origine delle stesse, si è allora in certa misura in grado di trovare da sé nuove regole e per il loro tramite risolvere quei compiti per cui le abituali regole non sono sufficienti. Non si deve assolutamente temere che questo implichi nell'apprendimento dell'aritmetica maggiori difficoltà e più tempo che non quando si utilizzano semplici regole senza che ne sia data la ragione.

Poiché ogni uomo capisce e memorizza molto più facilmente ciò di cui si conosce chiaramente ragione e origine; ed è anche in grado di utilizzarlo molto meglio in tutti i casi che gli si presentano. Inoltre chi impara dalle basi una qualsiasi arte e scienza, vede da sé anche senza istruzione molte cose che in assenza delle basi devono essere insegnate con grande fatica.

In particolar modo una tale fondamentale guida all'aritmetica nell'insegnamento ai giovani è tanto più utile e necessaria in quanto la stessa viene insegnata per un periodo relativamente lungo nelle lingue e in altre materie, in cui peraltro non si impartisce neppure un accurato insegnamento, e nel far questo non viene assolutamente richiesto di riflettere a fondo su una cosa; per cui non si incontrano assolutamente ostacoli.

Non si può ovviare a questo errore che insegnando ai giovani in modo adeguato l'aritmetica e così abituarli a ben riflettere. A questo scopo nessuno studio è più adatto della matematica: in essa tutto si ricava nel modo più intelligibile dai principi primi delle nostre conoscenze e viene dimostrato nel modo più completo, mentre

3. Alla parte che segue abbiamo attribuito il *corsivo* perché ci pare che contenga affermazioni a tutt'oggi molto significative e delle quali tenere conto nella prassi insegnante.

nelle altre scienze vengono trasmesse cose ancora molto poco chiare e scorrette, spesso persino assolutamente false.

A causa di ciò nella presente trattazione si sono ricavate regole e operazioni aritmetiche dalla natura dei numeri e dal modo di rappresentarli, così che qualsiasi persona, anche senza una particolare istruzione, può sia comprendere le operazioni e raggiungere una certa abilità che capirne la ragione.

A questo fine, in tutto il manuale, le regole e ciò che serve alla loro comprensione sono presentate in modo chiaro e sintetico. Inoltre spiegazioni esaurienti chiariscono sufficientemente ogni cosa e ne enunciano la ragione: e per finire a ogni operazione si sono affiancati alcuni esempi da cui se ne può dedurre uso e utilità.

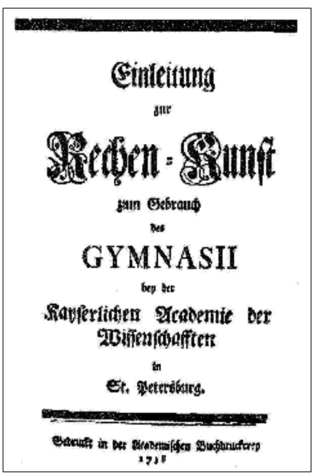
Per quel che concerne l'ordine e la disposizione di tutta l'opera, si è deciso di trattare unicamente quello che comunemente si usa insegnare da parte dei maestri del calcolo e che nella vita comune è indispensabile.

A ciò segue poi quella parte dell'aritmetica necessaria alla geometria e alla restante parte della matematica, e che include il calcolo decimale[4] accanto all'estrazione delle radici, e da ultimo anche la teoria dei logaritmi e la spiegazione dell'uso della stessa. L'aritmetica comune viene suddivisa in due parti; di cui la prima tratta le cosiddette «species»[5] dei numeri interi e delle frazioni, e poi le loro applicazioni a monete, misure, pesi e simili. Nella seconda parte verranno spiegate le diverse regole dell'aritmetica, che possono servire alla soluzione di vari problemi che sorgono nella vita comune, e sono la «Regula de tri», sia diretta che inversa, la «Regula Quinque», le regole «Societatis», «Alligationis», e consimili[6]. Infine la terza parte, come già comunicato, conterrà quelle operazioni dell'aritmetica che sono necessarie ai calcoli geometrici e di altra natura matematica.

4. Qui, come in altre parti, ci siamo attenuti il più possibile al modo di esprimersi di Euler, anche se ciò comporta qualche differenza rispetto al linguaggio odierno.
5. Noi oggi diciamo «teorie».
6. Si tratta di particolari regole che oggi rientrano nel capitolo delle funzioni.

2. Le frazioni e le operazioni con le frazioni

Estratti dalla ***Rechenkunst*** [E17][1] di Leonhard Euler, pubblicata originariamente con il titolo *Einleitung zur Rechen-Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserlichen Academie der Wissenschafften in St. Petersburg. Gedruckt in der Academischen Buchdruckerey 1738*[2].



Einleitung
zur
Rechen-Kunst
zum Gebrauch
des
GYMNASII
bey der
Kayserlichen Academie der
Wissenschafften
in
St. Petersburg.

Gedruckt in der Academischen Buchdruckerey
1738

1. Le opere di Euler sono elencate per ordine cronologico secondo la lista redatta dal matematico svedese Gustav Eneström (1852-1923). Ad ogni opera è quindi assegnata una sigla composta da una «E» seguita da un numero.
2. Il testo dell'intera opera è scaricabile da Internet con la seguente procedura:
   – andare al sito http://www.math.dartmouth.edu/~euler/;
   – nella colonna blu a sinistra, cliccare su *Index Number*;
   – cliccare su *Enestrom Index*;
   – cliccare su *001-099*;
   – cliccare su *17*;
   – cliccare, nell'ultima riga, su *Rechenkunst*;
   – scegliere il link che interessa.

Nei primi cinque capitoli Euler tratta i seguenti argomenti, che qui non ci è sembrato il caso di prendere in considerazione:

1. Dell'aritmetica o arte di calcolare
2. Dell'addizione come prima operazione aritmetica
3. Della sottrazione come seconda operazione aritmetica
4. Della moltiplicazione come terza operazione aritmetica
5. Della divisione come quarta operazione aritmetica

Le parti in corsivo che seguono sono esempi di «titoli»[3] dei paragrafi in cui i capitoli sono suddivisi: ad ognuno dei «titoli» Euler fa seguire una dettagliata spiegazione e, quando lo ritiene necessario, uno o più esempi.

Per non appesantire troppo lo scritto, abbiamo lasciato solo alcuni «titoli» originali, tanto per mostrare il tedesco dell'epoca. Ogni punto presentato è seguito da una o più domande che si possono porre agli studenti.

Capitel 6
Von den Brüchen und der Natur derselben Berhaupt

Capitolo 6
Delle frazioni e della loro natura in genere

1. Wann in der Division der Divisor und der Dividendus so beschaffen sind, dass die Operation ohne Rest nicht vollzogen werden kann, so wird der Quotient, welcher anzeigt, wie viel mal der Divisor in dem Dividendo enthalten ist, ein Bruch genannt.

1. Quando nella divisione il divisore e il dividendo sono così fatti, che la divisione non può essere eseguita senza resto, allora il quoziente, che mostra quante volte il divisore sta nel dividendo, si chiama frazione.

Domanda. Fa un esempio di una frazione che corrisponde alla definizione di Euler e di un'altra che non corrisponde.

2. [Omissis]

3. Um einen Bruch mit den ganzen Zahlen besser zu vergleichen, so ist zu merken dass, wann die Unität oder ein ganzes in so viel gleiche Theile zertheilet wird, als die unter der Linie stehende Zahl ausweist, alsdann der Bruch so viel Theile enthalte, als die obere Zahl anzeige.

3. Li abbiamo chiamati «titoli» solo perché stanno in testa ad ogni paragrafo: in realtà sono la sintesi di ciò che viene ricavato e/o esemplificato nel paragrafo stesso.

3. Per confrontare al meglio una frazione con i numeri interi, è da osservare che, quando l'unità, o l'intero, è diviso in un certo numero di parti uguali quante ne mostra il numero sotto la linea, allora la frazione contiene tante di quelle parti quante ne indica il numero sopra.

Domanda. Fa un esempio di confronto tra due frazioni aventi lo stesso denominatore.

4. Wann ein Bruch auf vorbesagte Art geschrieben ist, so wird die über der Linie stehende Zahl der Zähler, die untere aber der Nenner genannt. Ein jeder Bruch aber wird also ausgesprochen: erstlich nennt man den Zähler und darauf den Nenner mit Hinzusetzung des Worts Theil. Als dieser Bruch $\frac{5}{12}$ wird ausgesprochen: fünf zwölfte Theil.

4. Quando una frazione è scritta nel modo descritto prima, il numero che sta sopra la linea si chiama numeratore, quello sotto, invece, denominatore. Una tale frazione la si legge così: prima si dice il numeratore seguito dal denominatore [trasformato in ordinale] con l'aggiunta della parola parti. Questa frazione $\frac{5}{12}$ si legge: cinque dodicesime parti.

Domanda. Che differenza c'è tra il modo di leggere una frazione usato da Euler e quello odierno? Quale dei due ti sembra più chiaro?

5. Ist in einem Bruch der Zähler kleiner als der Nenner, so ist auch der Bruch selber kleiner als ein ganzes oder als 1. Ist aber der Zähler grösser als der Nenner, so ist auch der Inhalt des Bruchs grösser als 1. Ein Bruch aber, da der Zähler dem Nenner gleich ist, hält just ein ganzes.

5. Se in una frazione il numeratore è minore del denominatore, allora anche la frazione è minore dell'intero o di 1. Se invece il numeratore è maggiore del denominatore, allora anche la frazione è maggiore dell'intero o di 1. Se, invece, in una frazione il numeratore è uguale al denominatore, allora essa vale esattamente un intero.

Domanda. Ciò che ha scritto Euler in questo punto corrisponde a quello che hai imparato sulle frazioni?

6. Ein Bruch, welcher grösser ist als 1, oder in welchem der Zähler grösser ist als der Nenner, kann folgendergestalt in zwei Glieder zerleget werden, davon eines eine ganze Zahl, das andere aber ein Bruch ist, welcher kleiner als ein ganzes. Nämlich man dividirt den Zähler durch den Nenner auf die in der Division beschriebene Art, und da gibt der Quotus das eine Glied, nämlich die ganze Zahl, der Rest aber gibt für das zweite, gebrochene Glied den Zähler, wozu der vorige Nenner genommen wird.

6. Una frazione maggiore di 1, o nella quale il numeratore è maggiore del denominatore, può essere suddivisa nel seguente modo in due membri, dei quali uno è un numero intero e l'altro una frazione minore dell'intero. Più precisamente, si divide

il numeratore per il denominatore nel modo solito di eseguire una divisione, e il quoto dà il primo membro, cioè il numero intero, e il resto dà il numeratore del secondo membro, frazionario, al quale si attribuisce il denominatore precedente.

Domanda. Fa un esempio che spieghi chiaramente ciò che Euler ha esposto in questo punto.

7. Eine ganze Zahl nebst einem Bruch wird in einen einzelen Bruch verwandelt, wann man die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruchs multiplicirt und zum Product den Zähler des Bruchs addirt, da dann diese Summe den Zähler des gesuchten einzelen Bruchs, der vorige Nenner aber den Nenner abgibt.

7. Un numero intero seguito da una frazione si trasforma in una sola frazione se si moltiplica il numero intero per il denominatore della frazione e al prodotto si aggiunge il numeratore della frazione e poi a questa somma, che sarà il numeratore della frazione cercata, il denominatore, si attribuisce come denominatore il denominatore della frazione precedente.

Domanda. Fa un esempio che spieghi chiaramente ciò che Euler ha esposto in questo punto.

8. Ein Bruch bleibt seinem Werth nach unverändert, wann man sowohl den Nenner als den Zähler durch eine beliebige Zahl multiplicirt. Und gleichergestalt behält auch ein Bruch seinen vorigen Werth, wann man beides, den Zähler und Nenner, durch eine beliebige Zahl dividirt. Woraus also erhellet, dass ein jeglicher Bruch, ohne seinen Werth zu veränderen, auf unendlich vielerlei Arten vorgestellet werden könne.

8. Il valore di una frazione non cambia, se si moltiplicano sia il numeratore sia il denominatore per un qualunque numero. Allo stesso modo il valore non cambia se si dividono sia il numeratore sia il denominatore per un qualunque numero. Risulta dunque chiaro che una qualsiasi frazione può essere rappresentata in infiniti modi senza che il suo valore cambi.

Domanda. Qual è la relazione che lega le frazioni delle quali Euler parla in questo punto?

9. [In questo paragrafo tratta dei criteri di divisibilità per 2, 4, 8, 5, 10, 3, 9 e 6]

D. Enuncia tu questi criteri.

D. A proposito del criterio di divisibilità per 7, Euler dice che conviene eseguire la divisione e vedere se c'è resto zero: sei d'accordo con lui o conosci un modo più semplice per stabilire se un dato numero è divisibile per 7?

10. Ein gemeiner Theiler von zweien Zahlen ist eine solche Zahl, dadurch sich beide Zahlen theilen lassen; und der grösste gemeine Theiler ist die grösste Zahl, *durch welche sich beide Zahlen zugleich theilen lassen. Um aber von zweien gegebenen Zahlen den grössten gemeinen Theiler zu finden, hat man diese Regel: Man dividirt die grössere Zahl durch die kleinere, oder setzt die kleinere zum Divisore, die grössere aber zum Dividendo; hierauf dividirt man den Divisorem durch den übergebliebenen Rest, das ist, man macht nach der ersten Division die zweite, in welcher der gefundene Rest zum Divisor, der vorige Divisor aber zum Dividendo gesetzet wird; und also fahret man mit solchen Divisionen fort, indem man immer den Rest der vorigen Division zum Divisor der folgenden, und den Divisor der vorigen zum Dividendo der folgenden setzt, bis man zu einer Division kommt, welche ohne Rest absolvirt wird. Und da ist der Divisor dieser letzten Division der grösste gemeine Theiler der zwei vorgegebenen Zahlen.*

10. Un divisore comune di due numeri è un numero per il quale si possono dividere entrambi i numeri; e il massimo comune divisore è il più grande numero per il quale si possono dividere entrambi i numeri. Per trovare il massimo comune divisore di due dati numeri c'è questa regola: si divide il numero maggiore per il minore, il che equivale a dire che si pone il minore per divisore e il maggiore per dividendo; poi si divide il divisore per il resto trovato, cioè dopo la prima divisione si esegue la seconda, nella quale si pone come divisore il resto trovato nella prima, e il divisore della prima come dividendo; si continua con queste divisioni, nelle quali si pone sempre il resto della divisione precedente come divisore della successiva e il divisore della precedente come dividendo della successiva, fin quando si arriva a una divisione che non dia più resto. E qui, il divisore di quest'ultima divisione è il massimo comune divisore dei due numeri dati[4].

Domanda. Prova a trovare il massimo comune divisore di 147 e 630 col metodo descritto da Euler in questo punto e controlla facendo capo a un altro modo.

Domanda. Quale metodo trovi più comodo?

11. Um von einem vorgegebenen Bruche zu urtheilen, ob derselbe durch kleinere Zahlen ausgedrückt werden könne oder nicht, so muss man von dem Zähler und Nenner desselben den grössten gemeinen Theiler suchen. Findet man nun 1 für den grössten gemeinen Theiler, so ist dasselbe ein Anzeigen, dass der Bruch durch kleinere Zahlen nicht ausgedrückt werden könne. Kommt aber ein anderer grösserer gemeiner Theiler heraus, so kann der vorgegebene Bruch in kleinere Zahlen gebracht werden, wann man nämlich den Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs durch den gefundenen grössten gemeinen Theiler dividirt, wobei noch dieses zu merken ist, dass der Bruch, welchen man auf diese Weise erhält, nicht weiter verkleinert oder aufgehoben werden könne, und dadurch folglich der vorgelegte Bruch in den kleinesten Zahlen ausgedrücket werde.

11. Per decidere se una certa frazione può essere rappresentata con numeri più piccoli, o no, si deve cercare il massimo comune divisore del suo numeratore e del suo denominatore. Se si trova 1 come massimo comune divisore, è segno che non si può rappresentare la frazione con numeri più piccoli. Se invece si trova come massimo comune divisore un numero maggiore, allora la frazione può essere rappresentata con numeri più piccoli, se si dividono sia il numeratore sia il denominatore della frazione

4. Si riconoscerà, in questa macchinosa descrizione, l'algoritmo di Euclide.

data per il massimo comune divisore trovato. Qui si deve osservare che la frazione trovata in tal modo non può più essere ridotta, e di conseguenza la frazione è rappresentata con i più piccoli numeri.

Domanda. Controlla se quanto detto da Euler in questo punto è corretto. (Considera ad esempio la frazione 147/630).

Capitel 7
Von der Addition und Subtraction der gebrochenen Zahlen

Capitolo 7
Dell'addizione e sottrazione dei numeri frazionari

1. Wann zu einer ganzen Zahl ein Bruch addirt werden soll, so hat man nur den Bruch hinter die ganze Zahl zu schreiben. Gleichergestalt, wann zu einer ganzen Zahl eine ganze Zahl samt einem Bruche addirt werden soll, so addirt man die ganzen Zahlen zusammen, und an die Summe hängt man noch den Bruch an. Hingegen wann man von einer ganzen Zahl samt einem Bruche eine andere, kleinere, ganze Zahl abziehen soll, so wird die kleinere Zahl von der grösseren ganzen Zahl subtrahirt und an den Rest noch der Bruch gehängt.

1. Se si deve addizionare una frazione a un numero intero, si deve solo scrivere la frazione dopo il numero intero. Allo stesso modo, se si vuole addizionare ad un numero intero un altro intero seguito da una frazione, si sommano insieme i due numeri interi e poi alla somma si accosta la frazione. Viceversa, se ad un numero intero seguito da una frazione si vuole sottrarre un numero intero minore, si sottrae il numero minore dal numero intero maggiore e al resto si accosta la frazione.

Domanda. Controlla con qualche esempio se ciò che ha scritto Euler in questo punto è corretto.

2. Wann zwei oder mehr Brüche, welche zusammen addirt werden sollen, einerlei Nenner haben, so addirt man die Zähler zusammen, und unter die Summe als einen Zähler setzt man den gemeinen Nenner; da dann dieser Bruch die wahre Summe der vorgelegten Brüche sein wird. Bei diesem gefundenen Bruche können ferner die oben gegebenen Regeln von Reducirung der Brüche in die einfältigste Form angebracht werden.

2. Se si vogliono addizionare due o più frazioni che hanno lo stesso denominatore, si sommano i numeratori e sotto la somma si mette come unico denominatore il denominatore comune, così questa frazione sarà la vera somma delle frazioni date. A questa frazione si possono poi applicare le regole di riduzione delle frazioni alla forma più semplice date sopra.

Domanda. Fa un esempio che illustri pienamente ciò che Euler spiega in questo punto.

3. Wann von zweien Brüchen, welche gleiche Nenner haben, der kleinere von dem grösseren subtrahirt werden soll, so zieht man den kleineren Zähler von dem grösseren ab und setzt unter den Rest den gemeinen Nenner, welcher Bruch sodann den gesuchten Rest ausmacht. Soll aber von einer ganzen Zahl nebst einem Bruche eine andere ganze Zahl nebst einem Bruche, dessen Nenner des vorigen Bruchs Nenner gleich ist, subtrahirt werden, so wird der Bruch der kleineren Zahl von dem Bruche der grösseren, und die ganze kleinere Zahl von der ganzen grösseren subtrahirt, wann der Bruch der grössern Zahl grösser ist als der Bruch der kleineren Zahl. Ist aber der Bruch der grösseren Zahl kleiner als der Bruch der kleineren Zahl, so wird ein ganzes von der ganzen grösseren Zahl genommen und zu dem Bruche geschlagen, damit die Subtraction geschehen könne, hierauf aber entweder die ganze Zahl der grösseren um eins kleiner oder die ganze Zahl der kleineren um eins grösser angesehen.

3. Se sono date due frazioni con lo stesso denominatore e dalla maggiore si vuole sottrarre la minore, allora si sottrae il numeratore minore dal maggiore e si scrive sotto il resto il denominatore comune, e questa frazione fornisce il resto cercato. Se da un numero intero seguito da una frazione si deve sottrarre un altro numero intero minore seguito da una frazione con lo stesso denominatore della frazione precedente, allora, nel caso in cui la frazione del numero maggiore è maggiore della frazione del numero minore, si sottrae la frazione del numero minore da quella del numero maggiore e si sottrae il numero intero minore dal maggiore. Se invece la frazione del numero maggiore è minore della frazione del numero minore, allora si prende un intero del numero maggiore e lo si aggiunge alla sua frazione affinché la sottrazione possa avvenire; qui però si deve considerare o il numero intero maggiore diminuito di uno o il numero intero minore aumentato di uno.

Domanda. Fa un esempio per ciascuno dei casi esaminati da Euler in questo punto.

4. Eine gemeine theilbare Zahl (communis dividuus) von zweien oder mehr gegebenen Zahlen ist eine solche Zahl, welche sich durch eine jegliche der gegebenen Zahlen ohne Rest theilen lässt. Wann nun zwei oder mehr Zahlen gegeben sind, so wird eine solche gemeine theilbare Zahl gefunden, wann man die gegebenen Zahlen mit einander multiplicirt. Mehr dergleichen gemeine theilbare Zahlen werden gefunden, wann man die erst gefundene mit einer jeglichen beliebigen Zahl multiplicirt; woraus folget, dass von zwei oder mehr gegebenen Zahlen unendlich viel gemeine theilbare Zahlen gefunden werden können.

4. Un multiplo comune (*communis dividuus*) di due o più numeri dati è un numero tale che può essere diviso senza resto da ognuno dei numeri dati. Se sono dati due o più numeri, si trova un loro multiplo comune se si moltiplicano fra loro i numeri dati. Si possono trovare molti altri multipli comuni se si moltiplica per qualsiasi numero il primo che si è trovato. Segue quindi che, di due o più numeri, si possono trovare infiniti multipli comuni.

Domanda. Sono veramente infiniti i multipli comuni a due numeri?

5. Die kleinste gemeine theilbare Zahl (Minimus communis dividuus) von zweien Zahlen wird gefunden, wann man erstlich den grössten gemeinen Theiler davon sucht, und hernach das Product der beiden Zahlen dadurch dividirt; oder welches gleich viel: man dividirt die eine Zahl durch den gefundenen grössten gemeinen Theiler, und mit dem Quoto multiplicirt man die andere Zahl, da dann das Product die kleinste gemeine theilbare Zahl sein wird. Sind aber mehr als zwei Zahlen vorgegeben, so sucht man erstlich von zweien davon die kleinste gemeine theilbare Zahl; hernach nimmt man diese und die dritte der gegebenen Zahlen zusammen und sucht davon wiederum die kleinste [gemeine] theilbare Zahl; ferner wiederum von dieser und der vierten gegebenen Zahl, und fährt also fort, bis man alle gegebenen Zahlen durchgegangen: da dann die letzt gefundene Zahl die kleinste gemeine theilbare Zahl aller gegebenen sein wird.

5. Il minore dei multipli comuni (*Minimus communis dividuus*) di due numeri si trova così: prima se ne cerca il massimo comune divisore, poi si divide il prodotto dei due numeri per questo: oppure, il che fa lo stesso, si divide un numero per il massimo comune divisore e si moltiplica per il quoto l'altro numero; così il prodotto sarà il minimo comune multiplo. Se sono dati più di due numeri, allora prima si cerca il minimo comune multiplo di due di loro, poi si cerca il minimo comune multiplo di questo numero e del terzo numero dato; poi si continua con questo numero e il quarto, e si va avanti fin che si sono presi in considerazione tutti i numeri dati: a questo punto l'ultimo numero trovato sarà il minimo comune multiplo di tutti i numeri dati.

Domanda. Controlla mediante esempi se quanto scritto da Euler in questo punto è corretto.

6. Zwei oder mehr Brüche, welche ungleiche Nenner haben, werden folgendergestalt in andere gleiches Inhalts verwandelt, deren Nenner gleich sind. Erstlich nimmt man alle Nenner der gegebenen Brüche und sucht davon die kleinste gemeine theilbare Zahl, welche für den gemeinen Nenner aller Brüche, in welche die gegebenen Brüche verwandelt werden sollen, angenommen wird. Hernach dividirt man diesen gemeinen Nenner der gegebenen Brüche, und mit den Quotis multiplicirt man die dahin gehörigen Zähler; so geben diese Producte die Zähler der gesuchten Brüche. Auf diese Art verwandelt man also die gegebenen Brüche in andere, welche den gegebenen dem Werthe nach gleich sind und dabei gleiche Nenner haben.

6. Due o più frazioni che hanno diverso denominatore vengono trasformate in altre con lo stesso valore ma con lo stesso denominatore nel seguente modo. Prima si prendono tutti i denominatori e si cerca il loro minimo comune multiplo, che si assumerà come denominatore comune di tutte le frazioni nelle quali si trasformeranno le frazioni date. Poi si divide questo denominatore comune per i denominatori delle frazioni date, e per questi quoti si moltiplicano i corrispondenti numeratori: questi prodotti danno i numeratori delle frazioni cercate. In questo modo si trasformano dunque le frazioni date in altre che ne hanno lo stesso valore, ma che hanno però lo stesso denominatore.

Domanda. Controlla mediante esempi se quanto scritto da Euler in questo punto è corretto.

Domanda. Di solito, tu fai così? Se no, come fai?

7. Wann sowohl einzelne Brüche als ganze Zahlen samt Brüchen entweder zusammen addirt oder von einander subtrahirt werden sollen, so werden vor allen Dingen die Brüche zu gleichen Nenneren gebracht oder in andere verwandelt, so gleiche Nenner haben. Hernach wird die Addition oder Subtraction verrichtet, wie schon oben ist gelehret worden mit Brüchen, deren Nenner gleich sind. Nämlich bei der Addition werden die Zähler der gefundenen Brüche zusammen addirt, und unter die Summe als einen Zähler der gemeine Nenner geschrieben, welcher Bruch die Summe der Brüche anzeiget. Ist nun dieser Bruch grösser als ein ganzes, so werden die ganzen daraus gezogen, und so noch ganze Zahlen zu addiren da sind, mit zu derselben Summe geschlagen. In der Subtraction aber wird der Zähler des unteren Bruchs von dem Zähler des oberen Bruchs subtrahirt, wofern derselbe kleiner ist; sollte der untere Zähler aber grösser sein, so wird der obere Bruch um ein ganzes vermehret und sodann die Subtraction vollzogen.

7. Sia che si voglia sommare o sottrarre singole frazioni o numeri interi seguiti da frazioni, per prima cosa si devono trasformare le frazioni in altre con lo stesso denominatore, cioè si trasformano in altre così che abbiano lo stesso denominatore. Poi si eseguono le addizioni e le sottrazioni nel modo descritto sopra per frazioni con lo stesso denominatore. Cioè, per l'addizione si sommano tutti numeratori delle frazioni trasformate e sotto la somma si scrive, come unico denominatore, il denominatore comune, e questa frazione è la somma delle frazioni date.

Domanda. Controlla mediante esempi se quanto scritto da Euler in questo punto è corretto.

[Seguono cinque esercizi svolti di addizioni e cinque di sottrazioni, che omettiamo]

Capitel 8
Von der Multiplication mit gebrochenen Zahlen

Capitolo 8
Della moltiplicazione con numeri frazionari

1. Wann ein Bruch durch eine ganze Zahl multiplicirt werden soll, so multiplicirt man nur den Zähler mit der ganzen Zahl und lässt den Nenner unverändert. Gleichergestalt, wann eine ganze Zahl samt einem Bruche durch eine ganze Zahl multiplicirt werden soll, so multiplicirt man dadurch die ganze Zahl und auch den Bruch insbesondere; da dann diese beiden Producte zusammen das gesuchte Product ausmachen. Bei dem gefundenen Bruche hat man aber ferner zu sehen, ob derselbe mehr als ein Ganzes enthalte, oder auch, ob derselbe verkleinert werden könne, als in welchen Fällen es dienlich ist, den Bruch in der leichtesten Form auszudrücken.

1. Quando si deve moltiplicare una frazione per un numero intero, si moltiplica solo il numeratore per il numero intero e si lascia invariato il denominatore. Allo

stesso modo, quando si deve moltiplicare un numero intero accanto ad una frazione per un numero intero, si moltiplica per quest'ultimo il numero intero e anche la frazione: in questo modo questi due prodotti insieme forniscono il prodotto cercato. A questo punto si deve guardare se la frazione contiene più di un intero, o anche se lo si può ridurre, perché in simili casi conviene esprimere la frazione nella sua forma più leggera.

Domanda. Controlla mediante esempi se quanto scritto da Euler in questo punto è corretto.

Domanda. Quale importante proprietà della moltiplicazione viene usata?

2. Wann ein Bruch mit einer ganzen Zahl, welche dem Nenner desselben gleich ist, multiplicirt wird, so wird das Product eine ganze Zahl sein, welche dem Zähler desselben Bruchs gleich ist. Oder wann ein Bruch mit seinem Nenner multiplicirt wird, so ist der Zähler desselben das Product, welches herauskommt. Ist aber die ganze Zahl, mit welcher ein Bruch multiplicirt wird, zwei mal so gross als der Nenner, so ist auch das Product zwei mal so gross als der Zähler; und so viel mal dieselbe Zahl, mit welcher ein Bruch multiplicirt wird, grösser ist als der Nenner des Bruchs, eben so viel mal wird auch das Product grösser sein als der Zähler desselben Bruchs.

2. Quando si deve moltiplicare una frazione per un numero intero, che è uguale al denominatore, il prodotto sarà un numero intero, che è uguale al numeratore della frazione. In altre parole, quando una frazione è moltiplicata per il proprio denominatore, il prodotto che ne esce è il numeratore della frazione stessa. Inoltre, se il numero intero per il quale si deve moltiplicare una frazione è il doppio del denominatore, anche il prodotto è il doppio del numeratore; in generale, se il numero intero, per il quale deve essere moltiplicata la frazione, è un certo numero di volte maggiore del denominatore della frazione, anche il prodotto sarà altrettante volte maggiore del numeratore della frazione stessa.

Domanda. Controlla mediante esempi se quanto scritto da Euler in questo punto è corretto.

3. Wann zwei oder mehr Brüche mit einander multiplicirt werden sollen, so wird das Product folgendergestalt gefunden: man multiplicirt die Zähler mit einander, und was herauskommt ist der Zähler des Products; gleichergestalt multiplicirt man auch die Nenner mit einander, und was herauskommt ist der Nenner des gesuchten Products. Das Product zweier oder mehr Brüche wird also ein Bruch sein, dessen Zähler das Product der Zähler, der Nenner aber das Product der Nenner ist.

3. Quando si devono moltiplicare due o più frazioni fra di loro, il prodotto si troverà nel seguente modo: si moltiplicano fra loro tutti i numeratori, e ciò che si ottiene è il numeratore del prodotto; allo stesso modo si moltiplicano fra di loro tutti i denominatori, e ciò che si ottiene è il denominatore del prodotto cercato. Il prodotto di due o più frazioni sarà dunque una frazione, il cui numeratore è il prodotto dei numeratori, ma il denominatore il prodotto dei denominatori.

Domanda. Di solito, tu fai così? Se no, come fai?

4. Damit man, wann zwei oder mehr Brüche mit einander multiplicirt werden sollen, gleich das gesuchte Product in den kleinsten möglichen Zahlen ausgedrückt bekomme, so muss man sehen, ob irgend ein Zähler mit einem Nenner einen gemeinen Theiler habe, und alsdann beide durch ihren grössten gemeinen Theiler dividiren, und die Quotos an derselben Stelle setzen. Auf diese Art verfährt man mit einem jeglichen Zähler und Nenner, und wann man alle so viel [als] möglich gegen einander aufgehoben, so multiplicirt man nach der vorigen Regel die Zähler und Nenner, oder vielmehr die Zahlen, welche nach geschehener Aufhebung an derselben Stelle gesetzt worden sind, mit einander, und bekommt also auf diese Art das gesuchte Product in den kleinsten möglichen Zahlen ausgedrückt.

4. Quando si devono moltiplicare fra di loro due o più frazioni, e si vuole che il prodotto sia espresso con i minimi numeri possibili, si deve vedere se qualche numeratore ha un divisore comune con un denominatore, e se del caso, dividere entrambi per il loro massimo comune divisore, e mettere i loro quoti nello stesso posto. Si procede così per ogni numeratore e denominatore, e, quando si saranno semplificati tutti quelli possibili, si moltiplicano secondo la precedente regola fra di loro i numeratori e i denominatori, o i numeri che si sono ottenuti semplificando come detto prima, e si ottiene così il prodotto cercato espresso con i più piccoli numeri possibili.

Domanda. Di solito, tu fai così? Se no, come fai?

5. Wann die Zahlen, welche mit einander multiplicirt werden sollten, keine einzelen Brüche, sondern aus Ganzen und Brüchen zusammengesetzt sind, so kann man entweder dieselben in die Form einzeler Brüche bringen, wie oben ist gelehret worden, und alsdann die Multiplication wie vorher vollziehen. Oder man kann auch ohne diese Reduction einen jeglichen Theil einer Zahl mit einem jeglichen Theil der anderen Zahl multipliciren und alle diese besonderen Producte zusammen addiren, da dann die Summe das gesuchte Product sein wird.

5. Quando i numeri da moltiplicare fra di loro non sono singole frazioni, ma interi con accanto frazioni, si può o trasformarli in forma di frazioni singole, come si è spiegato sopra, e poi eseguire la moltiplicazione. Oppure si può procedere senza questa riduzione, moltiplicando ogni parte di un numero per ogni parte degli altri numeri e sommare tutti questi prodotti, e allora la somma sarà il prodotto cercato.

Domanda. Controlla mediante esempi se quanto scritto da Euler in questo punto è corretto.

Domanda. Quale importante proprietà della moltiplicazione viene usata?

Capitel 9
Von der Division mit gebrochenen Zahlen

Capitolo 9
Della divisione con numeri frazionari

1. Wann von zweien Brüchen, welche gleiche Nenner haben, einer durch den andern dividirt werden soll, so wird der Quotus gefunden, wann man den Zähler des Dividendi durch den Zähler des Divisoris dividirt. Der Quotus wird also ein Bruch sein, dessen Zähler der Zähler des Dividendi, der Nenner aber der Zähler des Divisoris ist.

1. Quando si devono dividere fra loro due frazioni che hanno lo stesso denominatore, si troverà il quoto dividendo il numeratore del dividendo per il numeratore del divisore. Il quoto sarà dunque una frazione il cui numeratore è il numeratore del dividendo ma il cui denominatore è il numeratore del divisore.

Domanda. Ciò che spiega Euler in questo punto corrisponde a quanto hai imparato?

2. Wann also die Brüche, davon einer durch den anderen dividirt werden soll, nicht gleiche Nenner haben, so darf man nur dieselben auf gleiche Benennungen bringen, und alsdann die Division wie gelehret worden verrichten. Hieraus folget nun diese Regel: man multiplicirt den Zähler des Dividendi mit dem Nenner des Divisoris; ingleichem auch den Nenner des Dividendi mit dem Zähler des Divisoris, so gibt das erstere Product den Zähler des Quoti, das letztere aber den Nenner.

2. Quando si devono dividere fra di loro due frazioni che non hanno lo stesso denominatore, si può ridurle allo stesso denominatore e poi eseguire la divisione come si è insegnato. Da ciò segue questa regola: si moltiplica il numeratore del dividendo per il denominatore del divisore e anche il denominatore del dividendo per il numeratore del divisore: in tal modo il primo prodotto dà il numeratore del quoto, e l'ultimo il suo denominatore.

Domanda. Ciò che spiega Euler in questo punto corrisponde a quanto hai imparato? Se no, come faresti? Che cosa puoi dire del metodo indicato da Euler?

3. Die Division der gebrochenen Zahlen kann in eine blosse Multiplication verwandelt werden, wann man den Divisorem umkehrt und damit hernach multipliciret. Ein Bruch wird aber umgekehret, wann man den Zähler und Nenner verwechselt und einen an des anderen Stelle setzt. Wann nun solchergestalt die Division in eine Multiplication ist verwandelt worden, so kann man auch dabei alle diejenigen Vortheile anbringen, welche im vorigen Capitel bei der Multiplication sind gelehret worden, wodurch gleichfalls die Operation so kann abgekürzet werden, dass man gleich den Quotum in seiner kleinsten Form bekommt, und darnach keiner weiteren Reduction mehr bedarf.

3. La divisione dei numeri frazionari può essere trasformata in una semplice moltiplicazione, se si capovolge il divisore e lo si moltiplica per il dividendo. Una frazione viene capovolta se si scambia il numeratore con il denominatore, mettendo l'uno al posto dell'altro. Quando si è così trasformata una divisione in una moltiplicazione, si possono sfruttare tutti i vantaggi che si sono imparati nel precedente capitolo sulla moltiplicazione, tra i quali l'accorciamento dell'operazione così da ottenere il quoto nella sua forma ridotta, senza dover procedere a ulteriori riduzioni.

Domanda. Ciò che spiega Euler in questo punto corrisponde a quanto hai imparato?

4. Wann eine aus Ganzen und einem Bruche zusammengesetzte Zahl durch einen Bruch dividirt werden soll, so kann man entweder die ganze Zahl und den Bruch insbesondere durch den Divisorem dividiren und die Quotos zusammen addiren; oder man kann den zusammengesetzten Dividendum in einen einzelen Bruch bringen, und sodann die Division wie oben gelehret verrichten. Ist aber der Divisor eine zusammengesetzte Zahl, so muss derselbe unumgänglich in die Form eines einzelen Bruchs gebracht werden.

4. Quando si deve dividere un numero composto di un intero e di una frazione per una frazione, si può o dividere il numero intero e la frazione per il divisore e sommare insieme i due quoti, o si può trasformare il dividendo composto in una frazione singola e poi eseguire la divisione come si è insegnato. Se però il divisore è un numero composto [di un intero e di una frazione] è imprescindibile trasformarlo nella forma di singola frazione.

Domanda. Ciò che spiega Euler in questo punto corrisponde a quanto hai imparato?

Domanda. Quale importante proprietà della moltiplicazione viene usata?

3. Euler e i quadrati[1]

1. L'identità dei quattro quadrati

Nella lettera a Goldbach del 12 aprile 1749[2] (lettera CXXV [E852][3]) Euler scrisse la seguente identità:

$$\left(p^2+q^2+r^2+s^2\right)\cdot\left(x^2+y^2+z^2+v^2\right)=$$
$$=(px+qy+rz+sv)^2+(py-qx\pm rv\mp sz)^2+(pz\mp qv-rx\pm sy)^2+(pv\pm qz\mp ry-sx)^2$$

che, detta in parole, suona così:

il prodotto di due numeri, ognuno dei quali esprimibile come somma di *quattro* quadrati, si può scrivere come somma di *quattro* quadrati.

Per allievi dalla quarta media in avanti la verifica di questa formula è un buon esercizio di calcolo letterale[4]. Agli altri, si può proporre di verificare l'uguaglianza assegnando alle lettere determinati valori: è comunque un buon esercizio di sostituzione e di calcolo numerico.

L'Identità dei quattro quadrati non va confusa con il Teorema dei quattro quadrati, congetturato da Bachet e dimostrato da Lagrange nel 1770.

Teorema dei quattro quadrati

Ogni numero naturale può essere espresso come somma di al massimo quattro quadrati perfetti.

1. Si veda la scheda **Numeri primi** per la dimostrazione di Euler che ogni numero primo della forma 4n+1 può essere scomposto nella somma di due quadrati.
2. Stranamente, dappertutto questa lettera è citata come datata 14 o 15 aprile 1750: qualcuno si è sbagliato una volta e gli altri hanno copiato…
3. Le opere di Euler sono elencate per ordine cronologico secondo la lista redatta dal matematico svedese Gustav Eneström (1852-1923). Ad ogni opera è quindi assegnata una sigla composta da una «E» seguita da un numero.
4. Pensiamo a un esercizio guidato, perché è necessario ricorrere ad alcuni artifizi che gli allievi difficilmente troverebbero.

Facciamo seguire alcune fra le domande che si possono porre agli allievi in merito a questo teorema.

- Verifica il teorema con qualche numero naturale scelto a caso.
- Qual è il minor numero che non può essere scomposto in meno di quattro quadrati?
- Qual è il minor numero che può essere scomposto in esattamente quattro quadrati diversi?
- Qual è il massimo numero minore di 100 che non può essere scomposto in meno di quattro quadrati?
- Qual è il massimo numero minore di 1000 che non può essere scomposto in meno di quattro quadrati?
- Che cosa si può dire di un numero che sia la somma dei quadrati di quattro numeri consecutivi?

Consiglio. Per la scomposizione in somme di quadrati è di grande utilità il sito http://www.alpertron.com.ar/ECM.HTM

2. Quadrati latini e quadrati greco-latini

Consideriamo il seguente schema

C	B	A
A	C	B
B	A	C

Osserviamo che ogni lettera compare una sola volta in ogni riga e in ogni colonna: lo schema viene detto quadrato latino di ordine 3.

In generale, un **quadrato latino di ordine n** è uno schema quadrato di n^2 celle in cui sono rappresentati n simboli diversi, in modo tale che ogni simbolo appare una sola volta in ogni riga e in ogni colonna.

In classe si possono proporre le seguenti situazioni.

Situazione 1

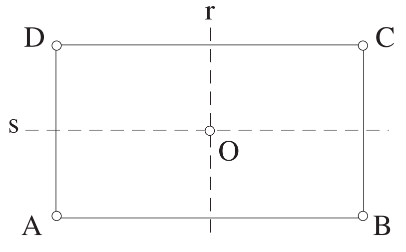
In un orologio sono rappresentate, nelle solite posizioni, solo le 12, le 3, le 6 e le 9 ed è progettato in modo che la sua lancetta delle ore scatti solo ogni 3 ore.

Ed ecco un paio di domande che si possono porre agli allievi:

Se la lancetta segna le 6, dopo 9 ore che ora segna? E se segnasse le 9, dopo 9 ore che ora segnerebbe?

Rappresenta tutte le possibilità con una tabella: che cosa si ottiene?

Situazione 2
Un rettangolo può essere sottoposto a quattro trasformazioni che lo sovrappongono globalmente a se stesso:
S_s : simmetria assiale di asse s
S_r : simmetria assiale di asse r
S_O : simmetria centrale di centro O
I : identità



Ed ecco alcune domande che si possono porre agli allievi:
- Che tabella si ottiene se si sottopone il rettangolo a due trasformazioni successive in tutti i modi possibili?
- Se il rettangolo fosse un quadrato, ci sarebbero altre due trasformazioni possibili: quali?
- Che tabella si ottiene se si sottopone il quadrato a due trasformazioni successive in tutti i modi possibili?

Ora ci si può concentrare sulle proprietà dei quadrati latini, facendo dapprima costruire agli allievi qualche quadrato latino di ordine 4, 5, 6, ...
In seguito si possono porre domande del tipo:
- Quanti sono i quadrati latini di ordine 3?
- Che cosa capita a un quadrato latino se si scambiano di posto due righe?
- Che cosa capita a un quadrato latino se si scambiano di posto due colonne?

Le risposte alle due domande precedenti rendono opportuna la seguente definizione:
– un quadrato latino è **normalizzato** (o ridotto, o è in forma standard) se sia nella prima riga sia nella prima colonna i simboli si susseguono nell'ordine naturale.
Esempio:
il quadrato latino di ordine 3 normalizzato è il seguente:

A	B	C
B	C	A
C	A	B

C'è allora la possibilità di rilanciare agli allievi domande come le seguenti.

- Quanti sono i quadrati latini di ordine 3 normalizzati?
- Quanti sono i quadrati latini di ordine 4 normalizzati?
- Trova qualcuno dei 56 quadrati latini di ordine 5 normalizzati.
- Trova qualcuno dei 9408 quadrati latini di ordine 6 normalizzati.
- Il Sudoku è un quadrato latino?

Consideriamo ora i due seguenti quadrati latini di ordine 4:

A	B	C	D
B	A	D	C
C	D	A	B
D	C	B	A

α	β	γ	δ
γ	δ	α	β
δ	γ	β	α
β	α	δ	γ

Se si sovrappongono si ottiene lo schema:

A α	B β	C γ	D δ
B γ	A δ	D α	C β
C δ	D γ	A β	B α
D β	C α	B δ	A γ

nel quale ogni lettera latina si accoppia esattamente una volta con una lettera greca.

Un simile schema si chiama **quadrato greco-latino di ordine 4**, che, tra l'altro, risolve il problema dei quattro ufficiali dei quattro reggimenti (equivalente a quello di disporre i quattro fanti, le quattro regine, i quattro re e i quattro assi di un mazzo di carte) in modo che ogni riga e ogni colonna contenga un ufficiale (una carta) di ciascun grado (di ciascun valore) e di ciascun reggimento (di ciascun seme).

A questo punto si possono invitare gli allievi a produrre

- almeno un quadrato greco-latino di ordine 2;
- almeno un quadrato greco-latino di ordine 3;
- un quadrato greco-latino di ordine 4 diverso da quello precedente;
- almeno un quadrato greco-latino di ordine 5.

Inoltre si possono lanciare gli allievi alla ricerca[5] di:

- un quadrato greco-latino di ordine 6;
- un quadrato greco-latino di ordine 10.

5. Intendiamo: «ricerca» su libri o altrove.

3. Quadrati magici

Consideriamo il seguente schema:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

La somma dei numeri di ogni riga, di ogni colonna e di ogni diagonale è 15: un simile schema è chiamato quadrato magico di ordine 3.

In generale, un **quadrato magico di ordine n** è uno schema quadrato di nxn celle contenente tutti i numeri naturali da 1 a n^2 disposti in modo tale che la somma dei numeri di ogni riga, ogni colonna e ogni diagonale sia sempre la stessa. Tale somma si chiama **costante magica** del quadrato.

C'è una bella leggenda cinese nella quale si narra del quadrato magico di ordine 3: vale la pena raccontarla agli allievi o invitarli a cercarla su libri o in Internet.

Nel lavoro *De quadratis magicis* [E795], presentato all'Accademia di San Pietroburgo il 17 ottobre 1776, e pubblicato per la prima volta nelle *Commentationes arithmeticae* 2, 1849, pp. 593-602, Euler comincia con il definire che cosa è un quadrato magico, poi subito ne calcola la costante magica.

Si può quindi chiedere agli allievi, per esempio:

· Qual è la costante magica di un quadrato 4x4? O 5x5? O 17x17?

· Qual è la costante magica di un quadrato nxn?

Poi Euler, con un metodo che si rifà ai quadrati greco-latini, trova i quadrati magici 3x3, 4x4, 5x5 e 6x6, precisando che, variando le attribuzioni dei valori alle lettere latine e greche, si possono ottenere quadrati magici diversi. Seguendo il suo stile, esemplifica. Purtroppo commette un errore nella costruzione del quadrato 6x6, perché non applica correttamente il suo metodo…

A questo punto, si possono proporre agli allievi domande del tipo:

Trova qualche quadrato magico di ordine 4, 5, …

Cerca qualche metodo di produzione di quadrati magici.

Informati sull'opera Melancholia 1 di Albrecht Dürer e sulla presenza di quadrati magici nell'arte.

Euler si occupò dei quadrati greco-latini con il lavoro *Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques*[6] [E530][7], presentato sempre all'Accademia di San Pietroburgo l'8 marzo 1779 e pubblicato per la prima volta in *Verhandelingen uitgegeven door het zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen te Vlissingen*[8] 9, Middelburg 1782, pp. 85-239.

6. Qui, come in seguito, si troveranno parole scritte nel francese dell'epoca.
7. Le opere di Euler sono elencate per ordine cronologico secondo la lista redatta dal matematico svedese Gustav Eneström (1852-1923). Ad ogni opera è quindi assegnata una sigla composta da una «E» seguita da un numero.
8. *Memorie pubblicate dalla Società zelandese delle Scienze di Flessinga*.

In questo lavoro Euler elaborò metodi per costruire quadrati greco-latini di ordine dispari o multipli di 4. Secondo le sue abitudini, egli comincia dicendo che cosa lo stimolò a risolvere il problema: fu il problema dei sei ufficiali e dei sei reggimenti, versione maligna di quello dei quattro ufficiali e dei quattro reggimenti citato sopra. Non essendo riuscito a trovare un quadrato greco-latino di ordine 6, e nemmeno uno di ordine 10, emise la **congettura** secondo la quale **non esistono quadrati greco-latini di ordine 4n+2**[9].

Anche i grandi sbagliano

La congettura di Euler è clamorosamente falsa: esistono quadrati greco-latini di qualsiasi ordine, esclusi gli ordini 2 e 6!

Un quadrato magico di tutt'altro genere è il cosiddetto ***latercolo pompeiano***. Eccolo:

S	A	T	O	R
A	R	E	P	O
T	E	N	E	T
O	P	E	R	A
R	Q	T	A	S

Con gli allievi ci si può divertire a cercare le sue «magie».

4. Il giro del cavallo

Il cavallo è l'irresponsabile buffone della scacchiera.
(Henry Ernest Dudeney)

Il giro del cavallo è un classico problema di matematica ricreativa: si tratta di far sì che, in 64 mosse, un cavallo tocchi tutte le caselle di una scacchiera normale, cioè una tabella 8x8 (o di ordine 8).

Può essere interessante far cercare agli allievi un giro del cavallo su scacchiere di ordine minore (3, 4, …). Si cerchi di scoprire per quali ordini il giro è possibile e per quali no.

Il grande matematico inglese Godfrey Harold Hardy (1887-1966) nel suo *Apologia di un matematico* sostiene che «La migliore matematica non solo è bella, ma anche *seria*» e si sforza di spiegare che cosa intende con questi due aggettivi. In parti-

9. «… je n'ai pas hésité d'en conclure qu'on ne sauroit produire aucun quarré complet de 36 cases, et que la même impossibilité s'étend aux cas de n=10, n=14 et en général à tous les nombres impairement pairs…». Per «impairement pair» Euler intende numeri «pari non divisibili per 4».

colare scrive «Un problema di scacchi è matematica autentica, ma, in un certo senso, è matematica "banale"». La citazione lascia perplessi, perché Hardy stesso, tra i «veri» matematici che fanno la «vera» matematica, cita anche Euler[10]. Ci pare, invece, che il lavoro di Euler *Solution d'une question curieuse que ne paroit soumise à aucune analyse* [E309], presentato all'Accademia di Berlino il 2 marzo 1758, e pubblicato per la prima volta nelle *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres, Année 1759*, vol.15, pp.310-337, Berlin 1766, sia un bell'esempio del contrario[11].

Tecnicamente, il giro del cavallo è un esempio di cammino hamiltoniano, se il cavallo finisce il giro in una casella dalla quale non può raggiungere la casella di partenza, o di ciclo hamiltoniano se invece può[12].

Si può proporre agli allievi di cercare su una scacchiera ridotta (4x4, 5x5,…)

- almeno un giro del cavallo di tipo cammino;
- almeno un giro del cavallo di tipo ciclo.

Euler comincia con il mostrare un giro qualunque e poi indaga i possibili modi di produzione di giri del cavallo. Un piccolo capolavoro è costituito dal giro ciclico, nel quale il cavallo prima percorre le 32 caselle "basse" della scacchiera e poi le altre 32. Se si esamina attentamente il ciclo, si noterà una specie di simmetria centrale legata al numero 32.

Martin Gardner, in *Show di magia matematica*, del 1965, afferma «Nessuno sa quanti viaggi del cavallo differenti esistono sulla scacchiera 8x8; …».

Oggi se ne sa ben di più: può essere interessante invitare gli allievi a cercare su libri o su Internet.

10. Le virgolette sono di Hardy, come il corsivo precedente
11. Non è, quella citata sopra, l'unica affermazione di Hardy che lascia perplessi. Nel paragrafo 28, sostenendo l'innocuità della matematica, scrive «Nessuno ha ancora scoperto un uso bellico della teoria dei numeri o della relatività, e sembra molto improbabile che se ne scopra uno ancora per molti anni». L'*Apologia di un matematico* è del 1940: nello stesso anno, Alan Turing, a Bletchley Park, cominciava a decifrare i messaggi di Enigma, macchina cifrante usata dalle forze armate del Reich millenario, facendo capo anche alla teoria dei numeri, e qualche anno dopo, a Los Alamos, sotto la direzione scientifica di Julius Robert Oppenheimer, veniva progettata e costruita la prima bomba atomica, ordigno che produce energia facendo scomparire un po' di massa, secondo la ben nota formula $E=mc^2$. Come scritto altrove, anche i grandi sbagliano.
12. Si veda la scheda **I primordi della topologia**.

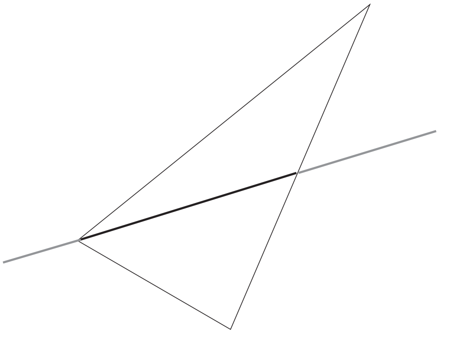
4. La retta di Euler

1. Definizioni preliminari

Mediana relativa a un lato di un triangolo

È il segmento che congiunge il punto medio di un lato con il vertice opposto a quel lato.

Talvolta si indica con mediana anche la retta che contiene il segmento.

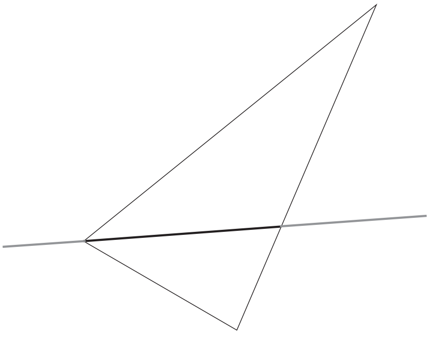


Siccome i lati di un triangolo sono tre, anche le mediane sono tre.

Bisettrice di un angolo di un triangolo

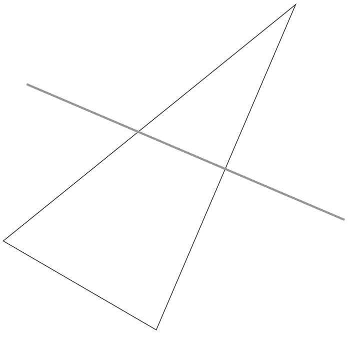
È la semiretta che esce dal vertice dell'angolo e che divide l'angolo in due parti isometriche.

Talvolta si indica con bisettrice anche la retta che contiene la semiretta.



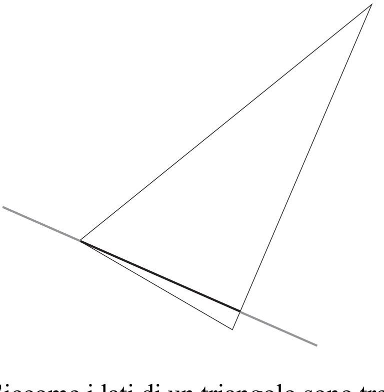
Siccome gli angoli di un triangolo sono tre, anche le bisettrici sono tre.

Asse relativo a un lato di un triangolo
È la retta perpendicolare al lato passante per il punto medio del lato.



Siccome i lati di un triangolo sono tre, anche gli assi sono tre.

Altezza relativa a un lato di un triangolo
L'altezza relativa a un lato prefissato è la distanza del vertice opposto dal lato stesso. In casi particolari, per altezza (o segmento-altezza) si intende anche il segmento-distanza che unisce un vertice con la retta sulla quale giace il lato opposto. Infine ancora per altezza si può intendere la retta che contiene il segmento-altezza.



Siccome i lati di un triangolo sono tre, anche le altezze sono tre.

2. Punti notevoli di un triangolo

Attenzione. Le seguenti ricerche, devono essere svolte con l'impiego di un programma di geometria dinamica.

Prima ricerca
Si chiede agli allievi di disegnare un qualsiasi triangolo e le sue tre mediane.

Domande possibili
Che cosa osservi?
Trascina un vertice del triangolo e osserva di nuovo.
Completa:
In ogni triangolo, le tre mediane si intersecano

____

____

Quell'unico punto si chiama **baricentro** del triangolo.

Altre domande possibili
Può capitare che il baricentro sia esterno al triangolo?
Se sì, per quale tipo di triangolo?
Può capitare che il baricentro sia sul contorno del triangolo?
Se sì, per quale tipo di triangolo?

Seconda ricerca
Si chiede agli allievi di disegnare un qualsiasi triangolo e le sue tre bisettrici.

Domande possibili
Che cosa osservi?
Trascina un vertice del triangolo e osserva di nuovo.
Completa:
In ogni triangolo, le tre bisettrici si intersecano

____

____

Quell'unico punto si chiama **incentro** del triangolo.

Osservazione e altre domande possibili
Esiste una circonferenza «speciale» col centro nell'incentro del triangolo: trovala e descrivila.
Può capitare che l'incentro sia esterno al triangolo?
Se sì, per quale tipo di triangolo?

Può capitare che l'incentro sia sul contorno del triangolo?
Se sì, per quale tipo di triangolo?

Terza ricerca
Si chiede agli allievi di disegnare un qualsiasi triangolo e i suoi tre assi.

Domande possibili
Che cosa osservi?
Trascina un vertice del triangolo e osserva di nuovo.
Completa:
In ogni triangolo, i tre assi si intersecano

____

____

Quell'unico punto si chiama **circocentro** del triangolo.

Osservazione e altre domande possibili
Esiste una circonferenza «speciale» col centro nel circocentro del triangolo: trovala e descrivila.
Può capitare che il circocentro sia esterno al triangolo?
Se sì, per quale tipo di triangolo?
Può capitare che il circocentro sia sul contorno del triangolo?
Se sì, per quale tipo di triangolo?

Quarta ricerca
Si chiede agli allievi di disegnare un qualsiasi triangolo e le sue tre altezze.

Domande possibili
Che cosa osservi?
Trascina un vertice del triangolo e osserva di nuovo.
Completa:
In ogni triangolo, le tre altezze si intersecano

____

____

Quell'unico punto si chiama **ortocentro** del triangolo.

Altre domande possibili
Può capitare che l'ortocentro sia esterno al triangolo?
Se sì, per quale tipo di triangolo?
Può capitare che l'ortocentro sia sul contorno del triangolo?
Se sì, per quale tipo di triangolo?

Quinta ricerca
Disegnare un qualsiasi triangolo e trovare il suo baricentro, il suo incentro, il suo circocentro e il suo ortocentro.

Consiglio: si dovrà utilizzare parecchio la possibilità di nascondere gli elementi del disegno, per non restare sommersi da rette e punti che non lasceranno vedere l'essenziale.

Osservazione e altre domande possibili
Trascina più volte un vertice del triangolo e osserva che tre dei quattro punti notevoli si dispongono in un certo modo.
Quali tre e in che modo?
Se avrai lavorato bene, troverai la **retta di Euler**: descrivila.
La retta di Euler è quella che contiene

____

____

3. Alcuni approfondimenti

Domande possibili
Che cosa capita ai punti notevoli e alla retta di Euler se il triangolo è isoscele?
E se il triangolo è equilatero?
La retta di Euler contiene anche un altro punto: il centro della ***circonferenza dei nove punti***.

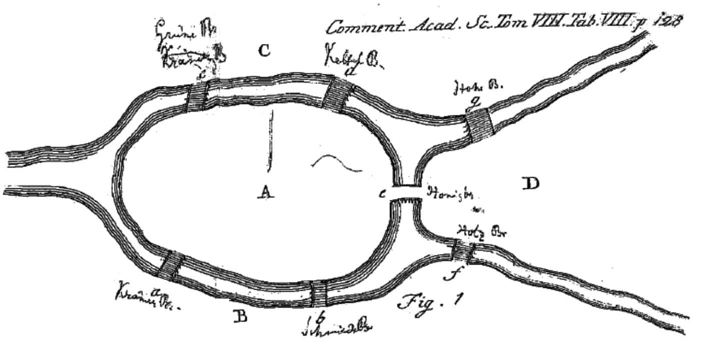
Altre domande possibili
Cerca su libri o in Internet che cosa è la circonferenza dei nove punti.
Che cosa capita alla circonferenza dei nove punti se il triangolo è rettangolo?
Che cosa capita alla circonferenza dei nove punti se il triangolo è ottusangolo?
La risposta alle ultime due domande dipenderà da come avrai definito le altezze. Se le avrai definite come segmenti, osserva che un triangolo può essere ottusangolo in tre modi diversi.

Della retta dei tre punti Euler tratta nel lavoro *Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum*[1] [E325], presentato all'Accademia di san Pietroburgo il 12 dicembre 1763 e pubblicato per la prima volta nei *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 11, 1767, pp. 103-123.

1. Soluzione facile di alcuni problemi geometrici difficilissimi.

5. Il problema dei ponti di Königsberg: soluzione di Euler

A Königsberg nella Prussia orientale, oggi Kaliningrad in Russia, il fiume Pregel con i suoi rami divide la città in quattro regioni, di cui una è un'isola. Nel XVIII secolo la situazione era quella rappresentata nella seguente cartina:



Come si vede, le quattro parti della città erano unite da sette ponti. Si dice che gli abitanti usassero invitare gli stranieri di passaggio a passeggiare per la città seguendo un percorso che li facesse transitare su tutti i ponti una sola volta. Del problema venne a sapere Euler che lo affrontò, scrive, come se fosse un esempio di *Geometria situs*, un nuovo ramo della geometria di cui si era occupato Leibniz. Oggi noi quel ramo lo chiamiamo topologia. Si può dunque affermare che il Problema dei ponti di Königsberg è uno dei primi, se non il primo, problemi topologici affrontati e risolti.

È interessante vedere quale fu il metodo adottato da Euler[1].

Leonhard scrive che si potrebbe cominciare con l'elencare tutte le passeggiate possibili: dall'elenco si vedrebbe qual è, o quali sono, quella/e che risolve, o

1. Il documento, in formato .pdf, è scaricabile da Internet seguendo la seguente procedura:
   – andare al sito http://www.math.dartmouth.edu/~euler/
   – nella colonna blu a sinistra, cliccare su **Subject**
   – nella tabella **Mathematics:** cliccare su **Combinatorics & Probability**
   – nella nuova tabella cliccare su **53**
   – al titolo **Documents Available:** cliccare su **E053**

risolvono, il problema oppure che tale passeggiata non esiste. Ma subito esclude quel metodo, per due motivi.

Primo, perché i percorsi possibili sono un numero enorme, e la loro elencazione creerebbe difficoltà che nulla hanno a che vedere con la natura del problema.

Secondo, perché, così facendo, si risolverebbe sì il problema specifico, che resterebbe però aperto per altre disposizioni delle regioni, per il loro numero e per il numero dei ponti.

Allora inventa un altro metodo, che si basa essenzialmente su un modo idoneo di rappresentare i percorsi. Comincia con l'indicare con A, B, C e D le quattro regioni, come si vede nella cartina precedente. Già che c'è, indica con a, b, c, d, e, f, g i sette ponti, ma delle lettere minuscole farà un uso estremamente ridotto.

Scrive Euler[2]:

> Se il viaggiatore dovesse partire dalla regione A e, attraverso non importa quale dei ponti a e b, si reca in B, indicherò il suo percorso con AB; se poi si recasse in D, il nuovo tratto lo indicherei con BD e tutto il tragitto con ABD. E se poi andasse da D a C, allora indicherei il percorso complessivo con ABDC[3]. Le quattro lettere ABDC dicono non solo qual è stato il percorso, ma dicono anche che sono stati attraversati tre ponti. In generale, il numero di ponti attraversati è di uno minore del numero di lettere della parola-percorso. Viceversa, se si transita su un certo numero di ponti, allora il numero di lettere della parola-percorso sarà di uno maggiore di tale numero. Ecco allora la prima considerazione cruciale: il percorso cercato dovrà essere descritto da una parola-percorso di otto lettere – perché i ponti, sui quali si deve passare una sola volta, sono sette – scritta usando solo le lettere A, B, C e D. Quindi, risolvere il problema si riduce a trovare la parola giusta: se la parola non esistesse, sarebbe inutile cercare il percorso, perché non esisterebbe.

Euler prosegue analizzando che cosa può capitare alla lettera A.

> Se la regione A fosse collegata a un'altra regione con un solo ponte, allora la parola conterrebbe una sola volta la lettera A, sia che si parta da A sia che si parta da un'altra regione. Se la regione A fosse collegata con altre regioni con tre ponti, allora la parola conterrebbe due volte la lettera A, sia che si parta da A sia che si parta da un'altra regione (provare per credere). Se la regione A fosse collegata con altre regioni con cinque ponti, allora la parola conterrebbe tre volte la lettera A, sia che si parta da A sia che si parta da un'altra regione (riprovare per credere). In generale, se una regione è collegata ad altre con un numero dispari di ponti, la sua lettera apparirà tante volte quanto è la metà di quel numero aumentato di uno[4]. E questa considerazione è, anche lei, cruciale. Difatti, poiché A è collegata alle altre regioni con cinque ponti, la lettera A dovrà apparire tre volte nella parola; poiché la regione B è collegata alle altre con tre ponti, la lettera B dovrà apparire due volte, come, per lo stesso motivo, le lettere C e D. In totale, nella parola di otto lettere (prima considerazione), dovranno apparire tre A, due B, due C e due D (seconda considerazione): ma 3+2+2+2=9, e quindi non c'è niente da fare.

Di conseguenza, gli ospiti dei regiomontani (così Euler chiama gli abitanti di Königsberg, di cui ha latinizzato il nome in Regiomons) non potranno in nessun modo passeggiare come richiesto.

2. Queste citazioni sono contenute nei primi nove paragrafi del lavoro *Solutio problematis ad Geometriam situs pertinentis*[3] [E053], presentato all'Accademia di San Pietroburgo il 26 agosto 1735 e pubblicato per la prima volta nei *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 8, pagg. 128-140 nel 1741, da dove abbiamo ripreso la cartina. La traduzione è nostra.
3. Non si creda che si vogliano prendere i lettori per duri di comprendonio: Euler scrive proprio così.
4. Attenzione al genere dell'aggettivo: se i ponti sono n dispari, la lettera A apparirà (n+1)/2 volte, **non** n/2+1.

La soluzione del problema dei ponti di Königsberg viene spesso considerata come la nascita della teoria dei grafi[5]. Vediamo come. La cartina della città, mostrata sopra, può essere completata come illustrato nella figura 1.

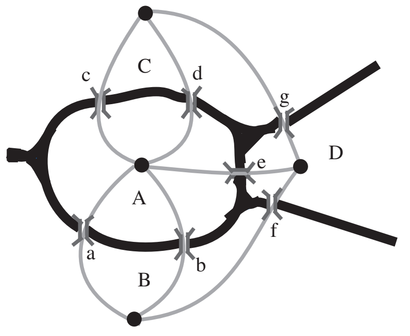


Fig. 1

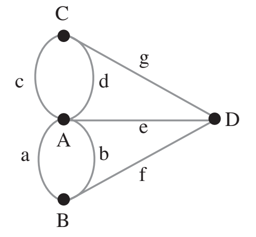


Fig. 2

L'idea è questa: se si parte dalla regione A, non ha alcuna importanza da quale suo punto preciso si parta. Quindi si può «contrarre» tutta la regione in un solo punto. Allo stesso modo si può contrarre in un solo punto anche ognuna delle altre tre regioni, e si possono poi rappresentare i vari tratti di cammino con curve che vanno da un punto ad un altro. Ora si può cancellare la cartina e lasciare solo i punti e le curve: si ottiene qualcosa del genere che appare nella figura 2.

La forma delle curve non ha alcuna importanza: importante, invece, è che gli allievi uniscano correttamente i quattro punti: occorrono due curve da A a C, due da A a B, una da A a D, una da B a D e una da C a D. Ci si può dunque divertire a rappresentare la situazione con «disegnini» diversi che, però, rappresentino la stessa situazione.

Un «disegnino» come quello sopra si chiama **grafo**; le curve (che possono essere anche segmenti di retta) si chiamano **archi**, i punti si chiamano **vertici**; il numero di archi che incidono in un vertice si chiama **ordine** di quel vertice; se si formano delle zone racchiuse da archi, quelle zone si chiamano **facce**.

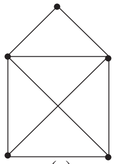
Un grafo come quello che rappresenta la situazione di Königsberg non può essere tracciato interamente senza alzare la matita dal foglio (far provare, può essere una strategia per convincere tutta la classe): è, questo, un altro modo di dire che la passeggiata di Königsberg non è possibile.

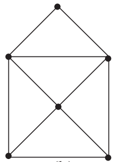
È allora interessante vedere quali caratteristiche hanno i grafi tracciabili senza alzare la matita dal foglio: un tale grafo si chiama grafo **euleriano**.

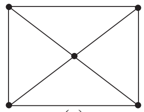
Esempio di attività da svolgere in classe

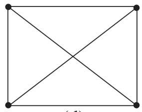
Esamina i seguenti grafi, completa la tabella e formula un criterio per stabilire se un grafo è euleriano o no.

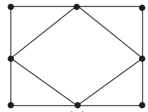
5. Quanto scritto sopra mostra però di tutta evidenza che Euler non ha per niente fatto capo ai grafi.

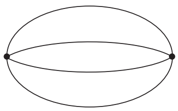

(a)

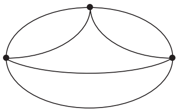

(b)

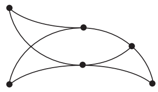

(c)

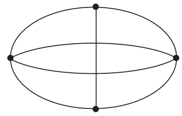

(d)


(e)


(f)


(g)


(h)


(i)

Grafo	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)
Vertici di ordine pari									
Vertici di ordine dispari									
È grafo euleriano?									

Un grafo è euleriano se e solo se

Risolto, nel paragrafo 9, il problema dei ponti di Königsberg, Euler prosegue la trattazione, generalizzando il problema, come preannunciato, a un numero qualunque di regioni, comunque definite dai rami del fiume, per un numero qualunque di ponti. Nel paragrafo 15 enuncia una prima regola in sei punti per stabilire se la passeggiata generalizzata è possibile o no. Ma non si accontenta: ci ragiona su nei paragrafi 16-19 e ne ricava un'altra, ben più semplice, nel paragrafo 20. Eccola, con le sue stesse parole, ancora nella nostra traduzione:

> Dato dunque un qualunque caso, si può immediatamente e facilissimamente riconoscere se la passeggiata, alle solite condizioni, è possibile o no, in forza della seguente regola. Se sono più di due le regioni alle quali conducono un numero dispari di ponti, allora si può affermare con certezza che la passeggiata è impossibile. Se sono solo due le regioni alle quale conducono un numero dispari di ponti, allora la passeggiata è possibile, a condizione che si parta da una di esse. Se infine a nessuna regione giunge un numero dispari di ponti, allora la passeggiata è possibile, qualunque sia la regione dalla quale si parte. E questa regola è del tutto soddisfacente, qualunque sia il problema posto.

Il testo può essere sottoposto agli studenti, chiedendo loro se non ritrovano qualche cosa di già visto.

Resta il paragrafo 21, nel quale Leonhard si chiede: va bene, possiamo facilissimamente stabilire se la passeggiata è possibile o no. Ma, una volta stabilito che c'è, come facciamo a trovarla?

Naturalmente risponde alla domanda, proponendo un metodo veramente semplice ed efficace, che lasciamo scoprire dal curioso lettore.

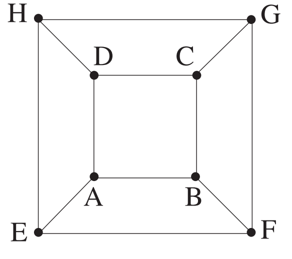
6. I primordi della topologia

1. I grafi[1]

Per questo lavoro si richiede dagli allievi un po' (un *bel* po') di immaginazione.

Si immagini di avere una scatola cubica fatta di gomma. Se è una scatola, allora «dentro» non c'è gomma: solo le pareti sono di gomma.

Si immagini poi di tagliar via una faccia e di stendere su un tavolo ciò che rimane. Siccome la scatola è di gomma, la cosa è (almeno teoricamente) fattibile. Sul tavolo si vedrà una cosa del genere:



Quello che si è ottenuto si chiama *grafo del cubo*.

Vi si vedono:

- 8 vertici,
- 12 spigoli,
- 5 facce.

Agli allievi si può rilanciare: 5 facce? Ma un cubo non ne ha 6?

Certo, ma una è stata tagliata via! Per «vederne» 6, bisogna chiamare faccia anche tutta la parte di piano esterna al grafo. Il conto torna.

1. Attività ricavata dal testo: Arrigo G., Beretta C., Mainini G., Tartini R. (2005). *Atolli matematici 4*. Lugano: Giampiero Casagrande, pagina 228. Si veda anche la scheda «Il problema dei ponti di Königsberg: soluzione di Euler».

2. La formula di Euler per i poliedri

Ecco un elenco di possibile domande da porre agli allievi:

- Pensa ad una scatola di gomma a forma di piramide a base quadrata: taglia via la base e rifai tutto il lavoro che hai fatto con la scatola cubica: che grafo ottieni?
- Ora taglia via una faccia triangolare e rifai tutto il lavoro: che grafo ottieni?
- I due grafi sono uguali fra loro o diversi? Certo, bisogna mettersi d'accordo su che cosa significa «uguali fra loro o diversi». Ma non dimenticare che il disegno è fatto su gomma.
- Come è fatto il grafo di una piramide a base quadrata?
- Come è fatto il grafo di un tetraedro?

Ad allievi abituati a ricercare informazioni, si può proporre di informarsi sui solidi platonici e sui loro grafi: di qualcuno si possono disegnare abbastanza facilmente, di altri…

A questo punto, dopo aver disegnato (o osservato) un bel po' di grafi di poliedri, si può riempire senza troppa fatica la tabella che segue (nella colonna (F) non si dimentichi la faccia esterna)

Poliedro	**Numero di facce (F)**	**Numero di vertici (V)**	**Numero di spigoli (S)**
Parallelepipedo			
Piramide a base:			
quadrangolare			
triangolare			
pentagonale			
esagonale			
Prisma a base:			
quadrangolare			
triangolare			
pentagonale			
esagonale			
Solido platonico a:			
...... facce			
...... facce			
...... facce			
...... facce			
...... facce			

Altre domande possibili

- C'è una relazione che lega fra loro F, V e S, ed è la medesima per tutti i poliedri considerati: qual è la relazione?
- La relazione vale solo per i poliedri considerati o anche per altri?
- Se vale anche per altri poliedri, vale per tutti i poliedri?
- Se vale per tutti i poliedri, vale per tutti i solidi a facce piane?

Consiglio: metti una scatoletta di fiammiferi su una scatola di scarpe: la relazione vale per il solido che ottieni? Prova a mettere due, poi tre, poi n scatolette di fiammiferi sulla scatola di scarpe, in modo che le scatolette non si tocchino fra loro: che cosa capita alla relazione?

- Da un cubo togli un parallelepipedo che lo attraversi tutto (un cubo col buco, insomma): che cosa capita alla relazione?
- Stessa domanda della precedente, ma con due, tre, n buchi a parallelepipedo che non si intersechino fra loro.

È questo il momento di far cercare informazioni su Antoine-Jean Lhuilier (1750-1840) e sulla relazione «base» appena trovata.

Euler ha trattato una prima volta il problema nel lavoro *Elementa doctrinae solidorum* [E230] [2], presentato il 26 novembre 1750 all'Accademia di Berlino, e pubblicato per la prima volta nei *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 4, 1758, pp. 109-140, e l'ha continuato, approfondendolo, in *Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita*[3] [E231], presentato il 6 aprile 1752 all'Accademia di San Pietroburgo e pubblicato la prima volta nei *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 4, 1758, pp. 140-160.

3. Grafi duali

A questo punto si può continuare facendo disegnare (idealmente su un foglio di gomma) con un colore (sia il nero) un grafo qualunque.

Con un altro colore, diciamo il rosso, si fa eseguire il seguente disegno:

- in ogni faccia del grafo nero si segna un punto rosso (senza dimenticare la faccia esterna);
- se due facce del grafo nero confinano (cioè hanno uno spigolo in comune), si congiunge in rosso i corrispondenti punti rossi con un arco che intersechi lo spigolo comune.

Il grafo rosso si chiama **grafo duale** del grafo nero.

(Per semplificarsi la vita, può essere conveniente disegnare il grafo rosso su un foglio trasparente sovrapposto al grafo nero).

A questo punto il grafo rosso avrà quasi sicuramente gli spigoli curvi (non per niente si chiamano anche archi!). Siccome però il tutto è disegnato su un foglio di gomma, è possibile «stirare» il grafo fin che tutti gli spigoli diventano segmenti rettilinei.

Altre domande

- Disegna i grafi duali dei grafi dei poliedri platonici e «stirali».
- Che cosa osservi?

2. Le opere di Euler sono elencate per ordine cronologico secondo la lista redatta dal matematico svedese Gustav Eneström (1852-1923). Ad ogni opera è quindi assegnata una sigla composta da una «E» seguita da un numero.
3. Dimostrazione di qualche notevole proprietà di solidi delimitati da piani.

4. Colorazione di grafi

Ecco ora un problema che ha rotto la testa a generazioni di matematici e risolto solo qualche anno fa.

Una carta geografica può benissimo essere considerata un grafo: si pensi, ad esempio alla carta geografica del Ticino sulla quale siano rappresentati i distretti, o alla carta della Svizzera con i Cantoni, o a una carta completamente di fantasia.

Si tratta di colorare i distretti, i Cantoni, insomma le sue zone, in modo che due zone adiacenti non abbiano lo stesso colore (se due zone hanno in comune un solo punto possono avere lo stesso colore).

Domande possibili

- Quanti colori servono, al massimo? Sperimenta e risperimenta.
- Il problema ha un nome (che non ti diciamo, perché contiene la risposta alla domanda precedente): che nome ha? Quando è stato risolto? Da chi? Con che metodo? Il metodo adottato ti convince?

Il problema di colorare, con il numero minimo di colori, una carta qualunque è decisamente difficile.

Esiste però una sua variante molto meno maligna. Eccola.

Si dia agli allievi la seguente consegna:

1. disegna una curva chiusa che rappresenti tutta la «nazione»;
2. disegna una qualunque linea che cominci e finisca sul bordo, con una condizione: la linea può autointersecarsi, ma non può autointersecarsi dove si è già intersecata;
3. disegna una qualunque altra linea come la precedente, evitando le intersezioni multiple;
4. ripeti il punto 3 tutte le volte che vuoi.

Domande possibili

- Una carta come quella che hai ottenuto può sempre essere colorata con due colori? Prova parecchie volte.
- Riesci a trovare un ragionamento che ti convinca che due colori bastano sempre?

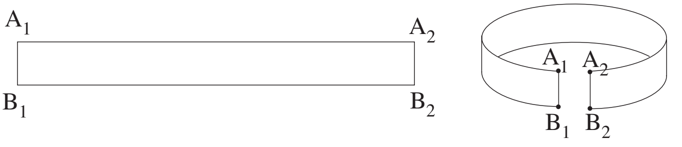
5. Nastro di Möbius

Prima esperienza

Ogni allievo immagina una superficie sferica sulla quale camminano due formiche: una fuori della sfera, l'altra dentro: capirà senz'altro che le due formiche non potranno mai toccarsi, a meno che una delle due perfori la superficie. Se le due formiche fossero poste una dentro e l'altra fuori da una camera d'aria di bicicletta (senza valvola), potrebbero toccarsi? Un po' diversa è la situazione di due formiche poste una sopra e l'altra sotto un foglio: potrebbero incontrarsi, senza perforare il foglio, ma una dovrebbe attraversare il bordo del foglio.

Seconda esperienza

Ogni allievo si procura un nastro di carta e lo incolla come nel disegno che segue:



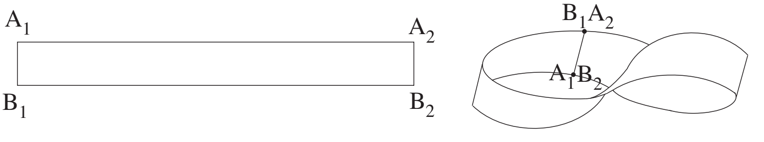
ottenendo un anello: le due formiche, una dentro l'anello l'altra fuori, potrebbero incontrarsi?

Riassumendo: la superficie sferica e la camera d'aria senza valvola hanno due facce e nessun bordo, il foglio di carta ha due facce e un bordo e l'anello ha due facce e due bordi.

Si invitano gli allievi a trovare altre superfici con due facce e nessun bordo, altre con due facce e un bordo e altre con due facce e due bordi.

Una bella domanda: ne esistono con più di due facce e/o più di due bordi?

Ora si fa costruire un altro anello con un nastro ma, prima di incollarlo, si dà al nastro una mezza torsione, così:



L'oggetto ottenuto si chiama **striscia di Möbius**. Gli allievi immaginano ora di mettere le due formiche una «dentro» e l'altra «fuori»: le due formiche possono incontrarsi?

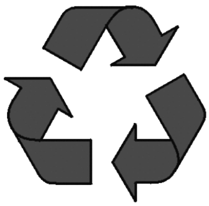
Quante facce e quanti bordi ha una striscia di Möbius?

Gran finale

- Si fa tracciare agli allievi una linea che si mantenga equidistante dal bordo e si fa tagliare la striscia lunga la linea: che cosa si ottiene?
- Si fa tracciare agli allievi una linea in modo che la sua distanza da «un» bordo sia doppia della distanza dall'«altro» e poi si fa tagliare la striscia lungo la linea: che cosa si ottiene?
- Si lascino liberi gli allievi di costruire oggetti simili, dando due, tre, quattro, cinque, … mezze torsioni al nastro prima di incollare e di rispondere alle domande precedenti. Le risposte sono uguali o diverse? Che cosa si può indurre?

Ancora domande

- Perché può essere conveniente che una cinghia di trasmissione abbia la forma di striscia di Möbius?
- Hai già visto un logo simile al seguente? Che cosa sta a rappresentare?



Si può concludere in bellezza facendo cercare informazioni sulla striscia di Möbius (e su August Ferdinand Möbius), nella variante «classica» ad una sola torsione. Essa ha ispirato vari artisti, tra i quali Maurits Cornelis Escher e Max Bill. Al centro della rotatoria di Melide più vicina all'entrata dell'autostrada c'è un'opera dell'architetto e artista ticinese Gianfranco Rossi: merita una visita.

7. I numeri primi

1. Quanti sono i numeri primi?

Agli allievi presentiamo una tabella come quella che segue, recante tutti i numeri primi minori di 1000:

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101
103	107	109	113	127	131	137	139	149	151	157	163	167
173	179	181	191	193	197	199	211	223	227	229	233	239
241	251	257	263	269	271	277	281	283	293	307	311	313
317	331	337	347	349	353	359	367	373	379	383	389	397
401	409	419	421	431	433	439	443	449	457	461	463	467
479	487	491	499	503	509	521	523	541	547	557	563	569
571	577	587	593	599	601	607	613	617	619	631	641	643
647	653	659	661	673	677	683	691	701	709	719	727	733
739	743	751	757	761	769	773	787	797	809	811	821	823
827	829	839	853	857	859	863	877	881	883	887	907	911
919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997	

Domande possibili

- Quanti sono i numeri primi minori di 50? Sono 15, e $\frac{15}{50} = 0{,}3$;
- Quanti sono i numeri primi minori di 100? Sono 25, e $\frac{25}{100}$ ……;
- Quanti sono i numeri primi minori di 150? Sono ……, e ……;
- Quanti sono i numeri primi minori di 1000? Sono ……, e ……

Grazie ai computer si è potuta stilare questa tabella, dove π(n) indica il numero di numeri primi minori di n. Si può chiedere agli allievi di riempire la colonna a destra.

n	**π(n)**	**π(n)/n**
10˙000	1˙229	
100˙000	9˙592	
1˙000˙000	78˙498	
10˙000˙000	664˙579	
100˙000˙000	5˙761˙455	
1˙000˙000˙000	50˙847˙534	
10˙000˙000˙000	455˙052˙511	
100˙000˙000˙000	4˙118˙054˙813	
100˙000˙000˙000˙000	3˙204˙941˙750˙802	
1˙000˙000˙000˙000˙000	29˙844˙570˙422˙669	
10˙000˙000˙000˙000˙000	279˙238˙341˙033˙925	
100˙000˙000˙000˙000˙000	2˙623˙557˙157˙654˙233	
1˙000˙000˙000˙000˙000˙000	24˙739˙954˙287˙740˙860	
10˙000˙000˙000˙000˙000˙000	234˙057˙667˙276˙344˙607	
100˙000˙000˙000˙000˙000˙000	2˙220˙819˙602˙560˙918˙840	
1˙000˙000˙000˙000˙000˙000˙000	21˙127˙269˙486˙018˙731˙928	
10˙000˙000˙000˙000˙000˙000˙000	201˙467˙286˙689˙315˙906˙290	

Osservazione possibile

I valori della colonna a destra diminuiscono costantemente, tanto da far venire il dubbio che, a forza di diventare sempre più rari, a partire da qualche punto di numeri primi non ce ne siano più.

Euclide di Alessandria (Ευκλείδης), nato ad Alessandria d'Egitto intorno al 365 a.C. e ivi morto intorno al 275 a.C., non solo si pose anche lui la domanda, ma trovò la risposta: i numeri primi non finiscono mai, o, detto in altre parole, **di numeri primi ce n'è un'infinità**.

Naturalmente, una domanda ha senso se è ben in chiaro il significato dei termini che si usano. È bene ricordare agli allievi che:

1. **un numero primo è un numero naturale che ha esattamente due divisori** (cioè 1 e il numero stesso), e
2. «ce n'è una infinità» vuol dire che **non esiste il numero primo più grande di tutti**.

La dimostrazione che di numeri primi ce n'è un'infinità è un bellissimo esempio di **dimostrazione per assurdo**, che può essere proposta in classe nel primo biennio liceale.

Ecco una traccia della dimostrazione di Euclide:

1. voglio dimostrare che di numeri primi ce n'è un'infinità;
2. suppongo che ce ne sia solo un numero finito;
3. se ce n'è solo un numero finito, ci sarà il più grande di tutti: lo chiamo P. Considero il numero $Q = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot P + 1$, cioè il prodotto, aumentato di 1, di **tutti** i numeri primi fino a P compreso. Ora, i casi sono due:
   – Q è un numero primo: contraddizione, perché Q>P, e io avevo supposto che P fosse il maggiore di tutti;
   – Q non è un numero primo. Ma Q:2 dà resto 1, Q:3 dà resto 1, Q:5 dà resto 1, …, Q:P dà resto 1. Cioè Q non è divisibile per alcun numero primo compreso tra 2 e P. Ma se Q non è primo, come sto supponendo,

per qualche numero primo deve essere divisibile, diciamo per S. Ma S non è compreso tra 2 e P, quindi deve essere S>P: contraddizione, perché io avevo supposto che P fosse il maggiore di tutti.
4. ho trovato una contraddizione in ognuno dei due casi: ciò significa che è falso che ci sia solo un numero finito di numeri primi;
5. allora di numeri primi ce n'è un'infinità.

Può essere questa la buona occasione per chiedere agli allievi di cercare informazioni su Euclide.

2. Scomposizione in fattori primi

Capita di leggere che i numeri primi sono i mattoni con i quali si possono costruire tutti i numeri. Il senso della frase è questo: se un numero non è primo, cioè è composto[1], allora si può esprimere come prodotto di numeri primi, eventualmente elevati a potenza.

Domande possibili

- Scomponi 6, 35, 42, 50 in fattori primi in almeno due modi diversi.
- Scomponi altri numeri in fattori primi in più modi.
- È possibile trovare due scomposizioni diverse dello stesso numero?
- Completa:
  La scomposizione in fattori primi di un dato numero è

  ____

Questo è il «Teorema fondamentale dell'aritmetica». Dal Teorema si capisce perché non è opportuno considerare 1 un numero primo.

Fin che i numeri da scomporre sono «ragionevolmente» piccoli, la scomposizione può essere fatta semplicemente per tentativi. Quando invece il numero è grande, eventualmente molto grande, di qualche centinaio di cifre, la sua scomposizione può diventare veramente problematica: si pensi alla scomposizione di Euler (v. in seguito in questa scheda) o anche «soltanto» ai seguenti esempi:

50˙000˙000˙001= …
1˙234˙567˙654˙321 = …
7˙070˙707˙070˙707 = …

Per la scomposizione in fattori primi di numeri grandi è molto utile il sito
http://www.alpertron.com.ar/ECM.HTM

Sulla difficoltà di scomporre in fattori primi un numero molto grande si fondano alcuni sistemi di crittografia a chiave pubblica, oggetto sul quale è bene informarsi, visto che la sicurezza delle trasmissioni di dati fa capo a sistemi crittografici del genere[2].

---

1. I numeri 0 e 1 sono considerati né primi né composti.
2. Un'attività sulla crittografia per allievi di quarta media si trova sul testo: Arrigo G., Beretta C., Mainini G., Tartini R. (2005). *Atolli matematici 4*. Lugano: Giampiero Casagrande, a pagina 220.

3. Il crivello di Eratostene

Eratostene di Cirene (Ερατοσθένης) (Cirene/Shahat, Libia, 276 a.C. circa - Alessandria d'Egitto, 194 a.C. circa), matematico, astronomo, geografo e poeta, ha inventato un procedimento per trovare tutti i numeri primi tra 2 e un certo numero prefissato, n.

Si può proporre agli allievi di costruire un loro crivello, seguendo il procedimento:

1. si scrivono in una tabella tutti i numeri naturali da 2 a n compresi;
2. si cancellano tutti i multipli di 2 escluso il 2;
3. si guarda qual è il primo numero non cancellato e si cancellano tutti i suoi multipli, il numero escluso, che non siano già stati cancellati in precedenza;
4. si ritorna al punto 3. fin che non c'è più nessun numero da cancellare;
5. i numeri non cancellati sono i primi cercati.

Ecco un mini-crivello di Eratostene:

2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	32	33
34	35	36	37	38	39	40	41
42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57
58	59	60	61	62	63	64	65
66	67	68	69	70	71	72	73
74	75	76	77	78	79	80	81
82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97

Procedimento
Prime cancellazioni: i multipli di 2, escluso il 2;
Seconde cancellazioni: i multipli di 3, escluso il 3;
Terze cancellazioni: i multipli di 5, escluso il 5;
Quarte cancellazioni: i multipli di 7, escluso il 7;
Fine: non c'è più alcun numero da cancellare (non ci sono multipli di 11 «liberi»).
I numeri non cancellati (nelle celle bianche) sono tutti primi (si può confrontare con la prima tabella).

Osservazioni possibili

il primo multiplo di 2 (maggiore di 2) cancellato è 4
il primo multiplo di 3 (maggiore di 3) cancellato è 9
il primo multiplo di 5 (maggiore di 5) cancellato è 25
il primo multiplo di 7 (maggiore di 7) cancellato è 49

Domande possibili

- Se la tabella fosse più grande, ad esempio fino a 1000, quale sarebbe il primo multiplo di 11 cancellato? Quale sarebbe il primo multiplo di 13 cancellato? Quale sarebbe il primo multiplo di 17 cancellato?
- Secondo te, il crivello di Eratostene raggiunge la sua massima efficienza quando si cercano numeri primi da 2 a ……… (completa).
- Perché il procedimento di Eratostene si chiama crivello?

Di nuovo abbiamo un'occasione propizia per chiedere agli allievi di cercare informazioni su Eratostene.

4. Strisce prive di numeri primi

Chiamiamo ***striscia*** di numeri un qualunque insieme di numeri naturali consecutivi (per comodità supposti ordinati dal minore al maggiore).

Esempi:

7 , 8 , 9 , 10 , 11 è una striscia

12 , 13 , 14 , 16 , 17 non è una striscia perché manca il 15

Si è osservato sopra che i numeri primi diventano via via più rari. Allora ci si può chiedere: esiste una striscia di 8, o 17, o 100, o 1000, o 1˙000˙000˙000, in generale di k numeri, priva di numeri primi?

Chiameremo una tale striscia SPP(k), dove k è il numero di numeri che la compongono.

Fin che k è «ragionevolmente» piccolo si può cercare la striscia semplicemente scorrendo un elenco di numeri primi, ma già cercare una striscia di una ventina di numeri è operazione al limite del fattibile.

Ad esempio, dall'ultima tabella si vede che la più lunga SPP nell'intervallo [2 ; 97] è lunga sette (90, 91, 92, 93, 94, 95, 96).

Esiste però una bella procedura che consente di trovare una SPP(k) per il k che si desidera.

Esempio:

Vogliamo trovare una SPP(7).

Calcoliamo dapprima $(7+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40˙320$

Allora

di 40˙320 + 1 non si può dire niente (si può verificare che $40˙321 = 61 \cdot 661$);

di 40˙320 + 2 si può dire che è multiplo di 2; perché?____________________

di 40˙320 + 3 si può dire che è multiplo di 3; perché?____________________

di 40˙320 + 4 si può dire che è multiplo di 4; perché?____________________

di 40˙320 + 5 si può dire che è multiplo di 5; perché?____________________

di 40˙320 + 6 si può dire che è multiplo di 6; perché?____________________

di 40˙320 + 7 si può dire che è multiplo di 7; perché?____________________

di 40˙320 + 8 si può dire che è multiplo di 8; perché?____________________

di 40˙320 + 9 non si può dire niente (si può verificare che $40˙329 = 3^2 \cdot 4481$)

Senza contare il primo e l'ultimo numero, che, per caso, non sono primi, si è trovata una SPP(7): non è quella con i numeri più piccoli, ma siamo certi che almeno una c'è!

A questo punto, si può proporre agli allievi di generalizzare la situazione e di trovare qualche SPP(k).

Osservazione

Del primo numero, (k+1)!+1, in genere non si può dire niente.
Ad esempio

3!+1 = 7	primo
4!+1 = 25	non primo

Dell'ultimo numero, (k+1)!+k+1, in genere non si può dire niente.
Ad esempio

3!+4 = 10	non primo
4!+5 = 29	primo

5. Fermat: anche i grandi sbagliano

Marin Mersenne (1588-1648), un monaco francese, si dedicò allo studio dei numeri primi con la speranza di trovare una formula che generasse tutti e soltanto i numeri primi. Come tutti gli altri che si dedicarono a tale ricerca, fallì, ma scoprì che la formula $n = 2^h - 1$è particolarmente interessante.

Difatti, se n è primo, allora anche h lo è.

Questa affermazione può essere verificata con qualche esempio.

Mersenne si chiese: è vero anche l'inverso?

Cioè: se h è primo, è primo anche n?

Ecco i primi casi (che possono essere verificati dagli allievi):

$2^2 - 1 = 3$	primo
$2^3 - 1 = 7$	primo
$2^5 - 1 = 31$	primo
$2^7 - 1 = 127$	primo
$2^{11} - 1 = 2047 = 23\ 89$	ahi ahi!
$2^{13} - 1 = 8191$	primo

Insomma, gli allievi si possono rendere conto che la formula non genera solo numeri primi, ma qualcuno sì.

Come continua la successione: si trovano tanti primi o no? Ecco alcune informazioni che potrebbero interessare anche gli allievi.

I numeri della forma $M_h = 2^h - 1$ si chiamano **numeri di Mersenne**, e, se sono primi, si chiamano **primi di Mersenne**. Come esemplificato sopra con $M_{11} = 2^{11} - 1$, non tutti i numeri di Mersenne sono primi, ma *possono* essere primi solo se h è primo. Nel 1732 Euler dimostrò che M_{31} è primo, trovando con ciò anche il 31-esimo numero perfetto. M_{31} mantenne per circa un secolo il primato di maggior numero primo conosciuto: il record fu battuto da Lucas con

M_{127} = 170˙141˙183˙460˙469˙231˙731˙687˙303˙715˙884˙105˙727

Oggi la gara a cercare il più grande primo di Mersenne si svolge in rete, al sito http://www.mersenne.org/

L'attuale record (settembre 2006) è $M_{32˙582˙657}$, un numero di 9˙808˙358 cifre, che è il 44-esimo numero primo di Mersenne.

Mersenne, abbastanza soddisfatto della propria scoperta, ne scrisse a Pierre de Fermat (1601-1665). Fermat ci mise del suo e, in una lettera a Mersenne, emise la seguente congettura:

«I numeri della forma $2^{\left(2^n\right)}+1$ sono primi».

Fermat calcolò per n = 0 , 1 , 2 , 3 , 4 e, in effetti, i risultati sono tutti numeri primi.

Tali numeri primi sono chiamati **primi di Fermat** e si indicano con F_n, dove n è l'esponente dell'esponente.

Può essere educativo stimolare gli allievi a verificare i calcoli di Fermat, ricordando loro che non aveva a disposizione calcolatrici!

Se non che, il 1. dicembre 1729, Christian Goldbach (1690-1764) in una lettera (lettera II [E716][3]), chiese a Euler se era al corrente della congettura di Fermat. Non si sa esattamente quando, ma prima del 1732 Euler dimostrò che la congettura di Fermat era falsa: se si pone n=5, si ottiene un numero non primo. Questo fatto può essere verificato dagli allievi, se si avvalgono degli strumenti precedentemente citati.

Notizie utili

Nel 1732, nel lavoro *Observationes de theoremate quodam Fermatiano aliisque ad numeros primos spectantibus*[4] [E026], presentato all'Accademia di San Pietroburgo il 26 settembre 1732 e pubblicato nei *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 6, 1738, pp. 103-107, Euler mostra semplicemente che

$$2^{\left(2^5\right)}+1$$

non è primo facendone vedere la scomposizione, ma non dice come ha fatto a scomporlo. Solo in seguito, nel lavoro *Theoremata circa divisores numerorum* [E134], presentato alla stessa Accademia il 2 settembre 1748 e pubblicato nei *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 1, 1750, pp. 20-48, spiega come sia giunto a trovare la scomposizione, ma le competenze matematiche richieste per capire la spiegazione sono di livello piuttosto alto[5].

Oggi si ha il fondato sospetto che gli unici primi di Fermat sono solo quelli trovati dallo stesso Fermat: in effetti, nemmeno avendo implementato efficienti algoritmi su velocissimi supercomputer, se ne sono trovati altri: sì, anche i grandi sbagliano.

3. Le opere di Euler sono elencate per ordine cronologico secondo la lista redatta dal matematico svedese Gustav Eneström (1852-1923). Ad ogni opera è quindi assegnata una sigla composta da una «E» seguita da un numero.
4. *Osservazioni su un certo teorema di Fermat e su altri relativi ai numeri primi*
5. Euler mostra che $2^{32}+1$ è divisibile per 641, che è un numero primo della forma 64n+1. A sua volta, che i divisori debbano essere primi della forma 64n+1 deriva da un teorema che dimostra nello stesso lavoro. Ora, i primi della forma 64n+1 che, teoricamente, avrebbero potuto essere divisori di $2^{32}+1$ sono 209, e 641 è il quinto di essi: quando si dice la fortuna! Vedi alla fine della scheda.

6. Una curiosità

$F_{10} = 2^{\left(2^{10}\right)} + 1 = 2^{1024} + 1 =$

= 179 769313 486231 590772 930519 078902 473361 797697 894230
657273 430081 157732 675805 500963 132708 477322 407536 021120
113879 871393 357658 789768 814416 622492 847430 639474 124377
767893 424865 485276 302219 601246 094119 453082 952085 005768
838150 682342 462881 473913 110540 827237 163350 510684 586298
239947 245938 479716 304835 356329 624224 137217 =

= 45 592577 x

x 6487 031809 x

x 4659 775785 220018 543264 560743 076778 192897 x

x 130439 874405 488189 727484 768796 509903 946608 530841 611892
186895 295776 832416 251471 863574 140227 977573 104895 898783
928842 923844 831149 032913 798729 088601 617946 094119 449010
595906 710130 531906 171018 354491 609619 193912 488538 116080
712299 672322 806217 820753 127014 424577

Fermat e Euler «si incontrarono» anche in un'altra occasione.

Fermat sapeva bene che tutti i numeri primi, escluso il 2, possono essere raggruppati in due insiemi distinti:

$$P^{+} = \{p : p = 4n + 1,\ n \in \mathbb{N}^*\} \quad \text{e} \quad P^{-} = \{p : p = 4n - 1,\ n \in \mathbb{N}^*\}$$

e aveva osservato che tutti e solo gli elementi di P^{+} potevano essere espressi, in un unico modo (a meno della commutatività), come somma di due quadrati. Gli elementi di P^{-}, invece, non possono essere espressi come somma di due quadrati. Del fatto, però, non aveva saputo dare la dimostrazione. La trovò invece Euler nel 1747 (lettera CV a Goldbach, del 6 maggio 1747 [E00829]), e la perfezionò nel 1749 (lettera CXXV a Goldbach, del 12 aprile 1749 [E00852]).

Una proposta interessante per gli allievi potrebbe essere questa:

- Scomponi come somma di due quadrati un po' di numeri primi dell'insieme P^{+}, non troppo piccoli, e prova a scomporne qualcuno dell'insieme P^{-}.

Dei numeri primi Euler si occupò anche in altri lavori. Ad esempio in *De numeris primis valde magnis* [E283], presentato all'Accademia di San Pietroburgo il 1. dicembre 1760 e pubblicato per la prima volta nei *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 9, 1764, pp. 99-153 e in

De variis modis numeros praegrandes examinandi, utrum sint primi nec ne? [E715], pubblicato per la prima volta nei *Nova Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitanae* 13, 1802, pp. 14-44.

Infine questo può essere il buon momento per chiedere agli allievi di cercare informazioni su Mersenne, Fermat, Goldbach e Lucas.

7. Generatrici di numeri primi

La pura esperienza mostra che i numeri primi sono distribuiti si direbbe a casaccio fra i numeri naturali. Molti matematici hanno dunque cercato, tutti senza successo (almeno finora: non si sa mai, ma le speranze sono poche), di trovare formule che generano numeri primi; nella migliore delle ipotesi, tutti e soltanto numeri primi.

Le più note, sono le seguenti:

$p(n) = n^2 + n + 11$

$p(n) = 232\, n^2 + 1$ **Euler 1**

$p(n) = n^2 - n + 41$ **Euler 2**

$p(n) = 1848\, n^2 + 197$ **Euler 3**

$p(n) = n^2 - 79\, n + 1601$

Altre generatrici si possono vedere al sito

http://mathworld.wolfram.com/Prime-GeneratingPolynomial.html

Tutte, però, hanno qualche difetto.

Questa situazione può essere sfruttata molto bene in classe. Si può proporre agli allievi di trovare i difetti di ogni formula e di elaborare un criterio di confronto fra di esse, per stabilire qual è la più efficiente, dopo aver chiaramente definito che cosa si intende con «più efficiente».

Notizia su **Euler 1**

Questa formula si trova in *Facillima methodus plurimos numeros primos praemagnos inveniendi* [E718], pubblicato per la prima volta nei *Nova Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitanae* 14, 1805, pp. 3-10.

Notizia su **Euler 2**

Questa formula si trova in una lettera a Bernoulli del 1771 [E461]. Nella lettera non è specificato a quale Bernoulli Euler stia scrivendo: probabilmente è Johann III, che negli anni 1771-1773 stava pubblicando *Sur les fractions décimales périodiques. Suivi de: Recherches sur les diviseurs de quelques nombres très grands compris dans la somme de la progression géométrique* $1 + 10^1 + 10^2 + 10^3 + \ldots 10^T = S$, in *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, III, pp. 273-317 & 318-337.

Notizia su **Euler 3**

Si trova questa formula in *Methodus generalior numeros quosvis satis grandes perscrutandi utrum sint primi nec ne?* [E719] pubblicato per la prima volta nei *Nova Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitanae* 14, 1805, pp. 11-51.

8. Problemi irrisolti

Nonostante i numeri primi siano studiati da millenni, molti problemi sono tuttora irrisolti.

Il brutto, o il bello, sta nel fatto che gli enunciati di alcuni di loro sono comprensibili da chiunque, mentre le soluzioni sono, appunto, tuttora ignote.

Eccone qualcuno:

La congettura di Goldbach

Formulazione di Goldbach

- Ogni numero maggiore di 5 può essere espresso come somma di 3 numeri primi.

Anche gli allievi più giovani della scuola media sono in grado di capire la congettura: per loro, un buon esercizio può essere quello di mettere alla prova l'affermazione, provando con qualche numero, anche un po' più grande degli usuali.

La congettura si trova nella lettera XLIII [E00765], datata Mosca 7 giugno 1742, scaricabile dal sito: http://www.math.dartmouth.edu/~euler/[6].

Si legga la pagina 127: chi riconosce la congettura come siamo abituati a leggerla è bravo!

Formulazione di Euler

- Ogni numero pari [*maggiore di 2*] può essere espresso come somma di due numeri primi [*eventualmente in più modi*].

Questa formulazione è contenuta nella lettera XLIV [E00766], datata Berlino 30 giugno 1742, scaricabile con la procedura descritta in nota, cliccando però su Copy of 00766.

Si legga la pagina 135: Euler considera la congettura *«ein ganz gewisses theorema, ungeachtet ich dasselbe nicht demonstriren kann»*[7].

La congettura dei numeri primi gemelli

Si dicono numeri primi gemelli due numeri primi la cui differenza è 2.

Le coppie di numeri gemelli sono in numero infinito.

Un buon esercizio consiste nel far cercare agli allievi alcune coppie di numeri primi gemelli.

Altri problemi, senza nome

- Ci sono infiniti primi del tipo $n^2 + 1$?
  Ad esempio $1^2 + 1, 2^2 + 1, 4^2 + 1, \ldots, 20^2 + 1, \ldots, 1004^2 + 1$ sono primi.
- C'è sempre un primo tra n^2 e $(n + 1)^2$?
  Esperito qualche tentativo, la domanda può sembrare sciocca, ma si pensi a quanto visto in precedenza a proposito di SPP.
  Il fatto che c'è sempre un primo tra n e 2n era noto come Congettura di Bertrand e venne provato da Chebyshev.
- Ci sono progressioni aritmetiche infinite di numeri primi?
  Ad esempio 251, 257, 263, 269 è una progressione di primi di lunghezza quattro.

6. Procedere così:
   – nella colonna blu a sinistra cliccare su Keyword Search;
   – nella finestrina inserire Goldbach;
   – scegliere: Euler's Correspondence with Christian Goldbach, 167 letters from the Euler-Goldbach Correspondence …
   – cliccare su Copy of 00765.
7. Si tratta di tedesco dell'epoca.

L'esempio più lungo finora noto ha lunghezza sette.

- Ci sono infinite terne di primi consecutivi che siano in progressione aritmetica?
  La risposta è sì se non si richiede che siano consecutivi, ma solo in progressione.
- $n^2 + n + 41$ è primo per n compreso tra 0 e 39 compresi. Ci sono infiniti primi di questo tipo?
- $n^2 - 79\,n + 1601$ è primo per n compreso tra 0 e 79 compresi. Ci sono infiniti primi di questo tipo?
- Ci sono infiniti primi del tipo $\langle 13\rangle+1$? (dove $\langle n\rangle$ indica il prodotto di tutti i primi minori o uguali a n).
  Ad esempio $\langle n\rangle+1$ è primo per $n\in [2 ; 12]$, mentre $\langle 13\rangle+1$ non lo è.
- Ci sono infiniti primi del tipo $\langle n\rangle-1$?
  Ad esempio $\langle n\rangle-1$ è primo per n = 3, 5, 11, 13, 41, … e non lo è per n = 7, 17, 19, 23, …

- Ci sono infiniti primi del tipo n!+1? (dove n! indica il prodotto di tutti i numeri naturali da 1 a n compresi, con l'aggiunta che 0! = 1! = 1).
  Ad esempio, 2!+1, 3!+1, 11!+1 e 27!+1 sono primi.
- Ci sono infiniti primi del tipo n!–1?
  Ad esempio, 3!–1, 4!–1, 6!–1, 7!–1, 12!–1, 14!–1 e 30!–1 sono primi.
  La successione di Fibonacci contiene infiniti primi?
  La successione di Fibonacci è così definita: il primo e il secondo termine sono uguali a 1; tutti i seguenti sono la somma dei due che li precedono.
  1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; …
- Ci sono infiniti primi di Mersenne?

Numeri primi della forma 64n+1,
«candidati divisori» di $2^{32}+1$=4˙294˙967˙297

193	257	449	577	641	769	1153	1217	1409
1601	2113	2689	2753	3137	3329	3457	4289	4481
4673	4801	4993	5441	5569	5953	6337	6529	6977
7297	7489	7681	7873	7937	8513	8641	9281	9473
9601	9857	10177	10369	10433	10753	11329	11393	11777
11969	12097	12161	12289	13121	13249	13313	13441	13633
13697	14081	14401	14593	14657	15233	15361	15809	15937
16001	16193	17729	17921	18049	18433	19009	19073	19457
19777	19841	20161	20353	20929	21121	21313	21377	21569
22273	22721	23041	23297	23873	24001	25153	25409	25537
25601	25793	26113	26177	26497	26561	26881	27073	27329
27457	28097	28289	29569	29633	29761	30529	30593	30977
31489	31873	32257	32321	32833	33409	33601	33857	34369
35201	35393	35521	35969	36097	36161	36353	36929	37057
37313	37441	37633	37889	38273	38593	38977	39041	39233
39937	40129	40193	40577	40897	40961	41281	41729	42433
42689	43201	43457	43649	43777	43969	44417	45121	45377
45569	45697	45953	46273	46337	47041	47297	47681	47809
48193	48449	49409	49537	49921	50177	50497	50753	51137
51329	51521	51713	52289	52609	52673	53377	53441	53569
53633	54401	54721	55681	56897	57089	57601	57793	58049
58369	59009	59393	60161	60289	60353	60737	61057	61121
61441	62017	62081	62273	62401	63361	63617	63809	64513
64577	65089							

È interessante osservare che
4˙294˙967˙297 : 641 = 6˙700˙417
e che 6˙700˙417 è primo!

8. Le somme di infiniti addendi

1. Due famosi paradossi

Circa 2400 anni fa, il filosofo greco Zenone di Elea, per sostenere certe sue idee (che non interessano qui), propose quattro paradossi contro il movimento, dei quali prendiamo in considerazione solo due. Chi fosse interessato, può informarsi sugli altri due (il paradosso della freccia e il paradosso delle due masse nello stadio).

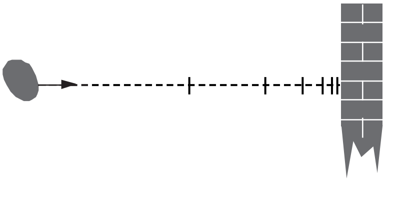
Il paradosso della traiettoria (o della dicotomia)

Dice Zenone: *se si scaglia un sasso contro un muro con sufficiente forza, i nostri sensi ci dicono che il sasso colpirà il muro. Ma non è vero, il sasso non raggiungerà mai il muro. I nostri sensi ci ingannano*.

Come fa Zenone a sostenere che il sasso non raggiungerà mai il muro? Ecco una spiegazione ad uso degli allievi.

Supponiamo che inizialmente il sasso si trovi a un metro di distanza dal muro: dopo un po' ne disterà mezzo metro, quindi gli resta da percorrere la metà della distanza iniziale. Dopo un po' avrà dimezzato questa distanza, ma gliene resterà ancora un pezzo. Quando avrà dimezzato questo pezzo, gli resterà la metà di questo pezzo, diciamo un pezzettino. Quando avrà dimezzato questo pezzettino, gli resterà la metà di questo pezzettino, diciamo un pezzettuccio. Quando avrà dimezzato questo pezzettuccio, gli resterà la metà di questo pezzettuccio, diciamo un pezzettinino. E così via: gli resterà sempre la metà dell'ultimo pezz…ino. Si conclude dunque che il sasso non raggiungerà mai il muro.

Nel seguente disegno è rappresentata una parte del ragionamento di Zenone:



Il ragionamento di Zenone può essere rappresentato numericamente con una tabella, come quella che facciamo seguire, e che gli allievi possono completare.

«Fotografie»	**Distanza percorsa tra le due «fotografie»**	**Distanza percorsa dal sasso**	**Distanza rimanente**
«Zeresima»		0	1
Prima	$\frac{1}{2}(1)=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$
Seconda	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$	$1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$
Terza	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$	$1-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}$
Quarta	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$	$1-\frac{15}{16}=\frac{1}{16}$
Quinta	???	???	???
…	…	…	…
n-esima	???	???	???
…	…	…	…

Si può far notare agli allievi che, anche prolungando la tabella a piacimento (per esempio grazie all'impiego di un foglio elettronico), la distanza rimanente non è mai zero.

Non è quindi fuori posto concludere che il sasso non raggiunge mai il muro!

La conclusione contrasta però con la realtà. È importante far capire agli allievi che qualcosa nel ragionamento non quadra e lasciare la questione in sospeso.

Il paradosso di Achille e la tartaruga

Achille, l'eroe omerico dell'Iliade, era detto il «piéveloce», perché imbattibile nelle gare di corsa.

Dice Zenone: *se una tartaruga sfidasse nella corsa il piéveloce, Achille perderebbe la gara, se appena lasciasse un piccolo vantaggio iniziale alla tartaruga. I nostri sensi ci dicono che Achille vince, ma non è vero: i nostri sensi ci ingannano.*

Come fa Zenone a sostenere che Achille perderebbe la gara contro la tartaruga? Ecco una spiegazione ad uso degli allievi.

Immaginiamo che Achille sia dieci volte più veloce della tartaruga, che la gara sia sui 100 m e che la tartaruga abbia un vantaggio iniziale di 10 m. Quando Achille avrà percorso i primi 10 m (dove si trovava la tartaruga allo sparo di partenza), la tartaruga, dieci volte più lenta, avrà percorso 1 m e quindi sarà ancora 1 m davanti ad Achille. Mentre Achille percorre quel metro, la tartaruga, dieci volte più lenta, avrà percorso 10 cm = 1/10 (1 m), e quindi sarà ancora 10 cm davanti ad Achille. Quando Achille avrà percorso quei 10 cm la tartaruga avrà percorso 1 cm e sarà ancora davanti ad Achille. Insomma, Achille non raggiungerà mai la tartaruga, che avrà sempre un vantaggio, via via più piccolo, su Achille. Siccome, lemme lemme, la tartaruga arriverà al traguardo avendo sempre un piccolissimo vantaggio su Achille, ecco che la tartaruga vincerà la gara.

Nel seguente disegno è rappresentata una parte del ragionamento di Zenone:

Anche questo ragionamento può essere rappresentato numericamente con una tabella, come quella che facciamo seguire, e che gli allievi possono completare.

«Fotografie»	**Percorso di Achille fra due «fotografie»**	**Distanza di Achille dallo start**	**Percorso della tartaruga fra due «fotografie»**	**Distanza della dellatartaruga dallo start**	**Vantaggio della tartaruga su Achille**
Alla partenza		0		10	$10-0=10$
Prima fase	10	10	$\frac{1}{10}(10)=1$	$10+1=11$	$11-10=1$
Seconda fase	1	$10+1=11$	$\frac{1}{10}(1)=\frac{1}{10}$	$10+1+\frac{1}{10}=\frac{111}{10}$	$\frac{111}{10}-11=\frac{1}{10}$
Terza fase	??? …	??? …	??? …	??? …	??? …
n-esima fase	??? …	??? …	??? …	??? …	??? …

Di nuovo, si può far notare agli allievi che, anche prolungando la tabella a piacimento (per esempio grazie all'impiego di un foglio elettronico), il vantaggio della tartaruga non è mai zero.

Non è quindi fuori posto concludere che Achille non raggiungerà mai la tartaruga!

La conclusione contrasta però con la realtà sperimentale. È importante far capire agli allievi che qualcosa nel ragionamento non quadra e lasciare la questione… ancora in sospeso.

I paradossi di Zenone hanno resistito per oltre due millenni. In definitiva, si può dire che solo con Agustin Cauchy (1789-1857) e Karl Weierstrass (1815-1897) si arriva alla fondazione del concetto di limite.

Un allievo di scuola media può farsi una prima immagine forte del concetto di limite? Crediamo che l'immagine mentale possa proprio essere questa:

una somma di infiniti addendi può essere finita.

È possibile che un allievo di scuola media possa rinforzare questa immagine anche con giustificazioni tecniche?

Il primo paradosso di Zenone porta a considerare la somma degli infiniti addendi:

$$S_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+...+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+...$$

mentre il secondo sottintende la somma degli infiniti addendi:

$$S_2 = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \ldots + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{n+1}} + \ldots$$

Per riuscire a calcolare le due somme di infiniti addendi, basta saper calcolare la somma:

$$S = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + q^n + \ldots$$

alla condizione: $0<q<1$.

Questo passo non è impossibile da compiere per allievi della fascia 14-16 anni.

La prima parte non comporta alcun ragionamento con l'infinito. Si vuol calcolare la somma S_n dei primi n addendi della somma S.

Il calcolo può essere così schematizzato:

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1}$$
$$q \cdot S_n = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + q^n$$

$$S_n - q \cdot S_n = 1 - q^n$$

e quindi

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$$

(infatti nella sottrazione si elidono vicendevolmente i termini q, q^2, q^3, …, q^{n-1}).

A questo punto entra in scena l'infinito. Occorre portare l'allievo alla convinzione che, aumentando l'esponente n, la potenza q^n non solo diventa sempre più piccola, ma il suo valore diventa talmente piccolo che, da un certo punto in poi, non è più distinguibile da zero. Un buon foglio elettronico può aiutare. Il computer si dà da fare, ma le forme scientifiche dei risultati ben presto assumono esponenti negativi con tre cifre: numeri piccoli inimmaginabili.

Se poi si assume che n diventi infinito, quindi che S_n diventi S, non c'è più alcun ostacolo nel capire che q^n diventa veramente zero.

Quindi l'allievo può scrivere con buona convinzione:

$$S = \frac{1}{1-q}$$

e dunque, nel caso del primo paradosso:

$$S_1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1$$

che è proprio la distanza che il sasso deve percorrere per arrivare al muro. Siamo tranquilli: il sasso lo raggiunge, il muro, e i nostri sensi non ci hanno ingannato. Con buona pace di Zenone…

Nel caso del secondo paradosso può scrivere:

$$S_2 = 10 + \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 10 + \frac{10}{9} = \frac{100}{9} = 11,\overline{1}$$

Il che significa che dopo 11,111111… metri Achille raggiunge la tartaruga. Il vantaggio della tartaruga è scomparso: è come se la gara cominciasse in quel punto senza più alcun *handicap*. In queste condizioni, è ovvio che Achille vince la gara. Di nuovo con buona pace di Zenone.

È bene far notare che nelle ultime scritture ci sono segni =, non ≅.

2. Le serie infinite

Agli allievi più interessati si può poi dire che una somma di infiniti addendi, nella quale ogni addendo è uguale al precedente moltiplicato per un numero, diciamo r, si chiama **serie geometrica**, r si chiama **ragione** della serie e ogni addendo si chiama **termine** della serie.

Se una serie ha una somma finita, diciamo S, si dice che è una serie **convergente** o che converge verso S.

Esempi

$1+3+9+27+81+243+...$ è una serie geometrica di ragione 3;

$4+\frac{16}{3}+\frac{64}{9}+\frac{256}{27}+\frac{1024}{81}+...$ è una serie geometrica di ragione $\frac{4}{3}$;

$10+6+\frac{18}{5}+\frac{54}{25}+\frac{162}{125}+\frac{486}{625}+...$ è una serie geometrica di ragione $\frac{3}{5}$.

A questo punto sorgerebbero due interrogativi:

1. se i termini diventano via via più piccoli, la serie è sicuramente convergente?
2. se la serie è convergente, come si fa a sapere verso quale valore converge?

Ad 1)

Se si trova anche un solo esempio di serie, con i termini via via più piccoli, che non converge, allora la risposta è NO.

Uno di questi esempi è dato dalla serie **armonica**:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{17}+...$$

È ragionevole pensare che un allievo di 14-16 anni possa capire che la serie armonica non è convergente? Potrebbe provare con un foglio elettronico, ma l'esperimento è destinato a fallire. La lentezza con cui la serie cresce e la limitatezza della macchina possono anche far credere l'opposto…

Ecco una bella situazione per dimostrare come in matematica, più che la potenza di calcolo, può servire la finezza del ragionamento.

Con gli allievi si potrebbe seguire questo percorso:

- riscriviamo la somma di infiniti addendi operando le associazioni seguenti

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{17}+\ldots$$

- osserviamo che

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}>\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$$

Se si associano i successivi addendi in un gruppo di 16, poi i successivi in un gruppo di 32 e così via, si vede che si potrà aggiungere un'infinità di volte un numero maggiore di 1/2: la somma quindi assumerà valori sempre maggiori, e dunque sarà infinita.

L'allievo che è giunto sin qui capisce che la condizione che i termini diventino sempre più piccoli non è sufficiente per la convergenza di una serie, il che è un ottimo risultato.

Ad 2)

Il problema è molto più complicato del precedente: ci accontiamo del risultato ottenuto in precedenza, cioè:

$$1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n+\ldots=\frac{1}{1-q}$$

che può essere ampliato al caso generale

$$t+t\,q+t\,q^2+t\,q^3+\ldots+t\,q^n+\ldots=\frac{t}{1-q}$$

3. Approfondimenti e ricerche

Non tutte le serie sono geometriche: qui ne mostriamo qualcuna, con l'invito a cercare le loro somme parziali e a determinare se sono convergenti o no.

Attenzione: in qualche caso determinare se la serie converge o no è un lavoro da specialisti. Un foglio di calcolo aiuta molto, ma non bisogna lasciarsi ingannare dalle apparenze!

$A = 1+2+3+4+5+6+7+\dots$	Elementi di $\mathbb{N}^*$
$B = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\dots$	Reciproci dei pari
$C = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\dots$	Reciproci dei dispari
$D = \frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+\frac{2}{4\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 6}+\frac{2}{6\cdot 7}+\dots$	Reciproci dei numeri triangolari
$E = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\dots$	Reciproci dei fattoriali: **Euler 1)**
$F = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+\dots$	Reciproci dei quadrati: **Euler 2)**
$G = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{23}+\dots$	Reciproci dei numeri primi: **Euler 3)**
$H = \dots$	Inventi l'allievo

Consigli

- È raccomandabile far rappresentare graficamente dagli allievi le somme parziali;
- per A: suggerire di trovare con $S_{10}, S_{58}, \dots, S_n$;
- per B e C: richiamare il ragionamento fatto per la serie armonica;
- per D: è interessante notare che l'ennesimo termine può essere così scomposto:

$$2\cdot\frac{1}{n(n+1)} = 2\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

e quindi si ha (anche se in modo non del tutto rigoroso):

$$D = 2\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\dots\right) = 2\cdot\frac{1}{1} = 2$$

- per **Euler 1)**: ricordare che il fattoriale di n, $n \in \mathbb{N}$, indicato con n!, è definito come il prodotto di tutti gli elementi di $\mathbb{N}$ da 1 a n compresi e che si completa la definizione ponendo $0! = 1! = 1$;
- per **Euler 2)**: moltiplicare ogni somma parziale per 6 ed estrarre la radice quadrata del risultato; sommare almeno fino a ...+1/1000;

- per **Euler 3)**: raccomandare pazienza, pazienza e ancora pazienza: ma anche così non si va lontano; bellissimo esempio di «la teoria batte la pratica».

Notizia su Euler 1)

È proprio con questa serie che Euler definisce la costante e, di cui dà il valore 2,71828182845904523536028, le cui cifre sono tutte esatte. Eh, sì: Euler fu anche un grande calcolatore! Si veda *De quantitatum exponentialium ac Logarithmorum per Series explicatione*[1], Capitolo VII di *Introductio in analysin infinitorum, Tomus primus* [E101][2], pubblicato per la prima volta a Losanna nel 1748.

Notizia su Euler 2)

Euler ha trovato la somma dopo che per circa un secolo parecchi matematici ci si erano rotti la testa senza venirne a capo[3]. Già che c'era, ha trovato anche la somma dei reciproci delle quarte, seste, …, dodicesime potenze. Lui non aveva fogli di calcolo, noi sì… Il lavoro che tratta questo problema è *De summis serierum reciprocarum* [E041], letto all'Accademia di San Pietroburgo il 5 dicembre 1735 e pubblicato per la prima volta nei *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 7, 1740, pp. 123-134. Però, già in *De summatione innumerabilium progressionum* [E020], presentato alla stessa Accademia i 5 marzo 1731 e pubblicato per la prima volta nei *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 5, 1738, pp. 91-105, Euler aveva trovato che la somma infinita ammontava a circa 1,644934. «Se tuttavia qualcuno volesse determinare la somma di questa serie cominciando dai primi termini, dovrebbe sommare più di mille termini, per trovare infine il numero che noi abbiamo trovato».

Notizia su Euler 3)

Euler è riuscito a dimostrare che la serie non è convergente ma che diverge con una lentezza esasperante («La somma … è infinitamente grande, ma infinite volte minore della somma della serie armonica …»). C'è chi ha valutato che se si sommassero i reciproci di tutti i numeri primi che sono oggi noti, il totale sarebbe circa 4... La divergenza è asserita e dimostrata nel Teorema 19 del lavoro *Variae observationes circa series infinitas* [E072] presentato alla solita Accademia di San Pietroburgo il 25 aprile 1727 e pubblicato per la prima volta nei *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 9, 1744, pp. 160-188, dove si legge l'affermazione virgolettata sopra tra parentesi.

Si può confrontare la «velocità di convergenza» delle tre serie di Euler.

---

1. *Sulla spiegazione delle quantità esponenziali e dei logaritmi per mezzo delle serie*.
2. Le opere di Euler sono elencate per ordine cronologico secondo la lista redatta dal matematico svedese Gustav Eneström (1852-1923). Ad ogni opera è quindi assegnata una sigla composta da una «E» seguita da un numero.
3. Il problema di trovare la somma infinita dei reciproci dei quadrati, noto anche come «Problema di Basilea», fu posto da Pietro Mengoli nel 1644 e divenne famoso quando ne scrisse Jakob Bernouilli nel 1689. Jakob era fratello di Johann, maestro di Euler, e fu probabilmente quest'ultimo che lo sottopose al Nostro.

1. Il grafico orario per capire meglio il concetto di funzione

Ottavia Foà Häusermann[1]

One of the useful features offered by the new technologies has been exploited in introducing the study of *distance versus time* graphs at Middle School level. The approach here described, in which a position sensor and a graph calculator have been employed, has proved a valuable one to enhance pupils' positive response. As in regard to Math teaching, it may represent an effective tool to help pupils in their first steps into an early building of the concept of function.

1. Introduzione

La ricerca didattica in matematica e fisica ha evidenziato che a tutti i livelli di età e tipi di scuole, compreso quello universitario, nell'interpretazione dei grafici orari si riscontrano le stesse difficoltà che portano a fraintendimenti, tra cui i più comuni sono la confusione fra traiettoria e grafico orario, tra «altezza» del grafico e velocità, tra variazione di una grandezza e rapidità di variazione della stessa [7].

La rappresentazione grafica di un fenomeno rende conto visivamente e con grande immediatezza della sua evoluzione. Per questo motivo quasi ogni giorno televisione e giornali si servono di rappresentazioni grafiche per proporre notizie di vario genere, che riguardano ad esempio l'andamento del dollaro, l'evoluzione del prezzo di un barile di petrolio, del tasso di disoccupazione o dei livelli di inquinamento dell'aria. Si ha la possibilità di ricostruire dal grafico i singoli dati e, soprattutto, si ha la visione d'insieme del fenomeno. In una situazione concreta, in generale, si vuole sapere se c'è aumento o diminuzione del valore di una grandezza, e se queste variazioni sono forti o deboli. Spesso, inoltre, interessa capire «la tendenza» dell'andamento di un fenomeno: ad esempio se si è di fronte a una crescita con ritmo costante o variabile. La capacità di lettura e di interpretazione dei grafici quindi fa parte, o dovrebbe far parte, della formazione culturale di ogni cittadino. Nella scuola media il concetto matematico di funzione viene introdotto proprio a partire dalle rappresentazioni grafiche di fenomeni reali. Le attività di lettura e interpretazione dei grafici nello studio del moto costituiscono perciò un'ottima occasione di didattica interdisciplinare.

Già con le prime esperienze di introduzione nella pratica didattica dei moderni metodi di acquisizione dei dati è stato compreso che l'apprendimento dei concetti può essere facilitato per mezzo di strumenti di misura in tempo reale, semplici da

1. Docente di matematica e scienze naturali alla Scuola Media di Locarno 2; docente di matematica al Liceo Cantonale di Bellinzona. Ha conseguito il master pedagogico presso l'ASP di Locarno nell'anno scolastico 2004-05. L'articolo è una sintesi del suo lavoro di diploma.

usare, che offrono agli allievi un feedback immediato [9]. Una delle maggiori potenzialità di questi sistemi, infatti, è quella di rendere l'allievo attivo nella costruzione della propria conoscenza, favorendo anche, attraverso la mediazione della tecnologia, l'interazione tra compagni di classe [10]. La possibilità di studiare il moto rettilineo di oggetti e persone utilizzando un sonar (sensore di posizione) collegato ad un elaboratore elettronico, e di visualizzare in tempo reale i grafici della posizione (o della velocità, o della accelerazione) in funzione degli istanti di tempo, è stata, nell'ultimo decennio, oggetto di indagine della ricerca didattica e al centro di numerose esperienze didattiche in tutti gli ordini di scuole[2]. In generale questa metodologia di lavoro è stata utilizzata, dopo aver introdotto i concetti di base della cinematica, per rafforzare il loro apprendimento, in particolare per quanto riguarda l'interpretazione di un grafico orario. In altri contesti l'uso del sonar ha permesso di introdurre i concetti matematici coinvolti nella lettura di un grafico, favorendo l'acquisizione da parte degli allievi del «senso del grafico» [6], [7].

Durante il periodo di pratica professionale nella scuola media ho avuto l'occasione di introdurre lo studio del moto in due classi terze. Mi sono proposta di sperimentare in questo contesto un sistema di acquisizione costituito da un sonar collegato a una calcolatrice grafica su cui è installato un opportuno software, con l'obiettivo di verificare in quale misura tale sussidio didattico possa contribuire a migliorare l'efficacia del processo di insegnamento/apprendimento. Partendo dalla convinzione che ogni sussidio didattico non abbia valore in sé ma lo acquisti quando è opportunamente integrato nella progettazione didattica, ho scelto di proporre due percorsi, uno per ogni classe, non differenziati per quanto riguarda gli obiettivi generali, in cui però l'uso del sonar è introdotto in fasi diverse e assume perciò «ruoli strategici» diversi.

2. I due percorsi didattici

Gli allievi hanno una ricca esperienza personale relativa al movimento (non solo rettilineo) e hanno familiarità con i vocaboli che il linguaggio comune utilizza per la sua descrizione: spazio percorso, lunghezza del cammino percorso, velocità massima, minima, costante, accelerazione. Spazio percorso, velocità e accelerazione in questo contesto sono grandezze positive. In particolare la velocità ha il significato di *andatura*, esprime cioè quanto cammino viene percorso in un intervallo di tempo. Ritengo che già dalle prime fasi dello studio del moto sia importante fare attenzione ad alcuni aspetti del linguaggio, ma che sarebbe didatticamente poco efficace non utilizzare come punto di partenza le conoscenze degli allievi, imponendo loro una terminologia in contraddizione con il senso comune. Ho fatto quindi la scelta di non introdurre la «velocità con segno» e di non parlare di accelerazione ma solo di aumento o diminuzione della velocità. Ho considerato invece irrinunciabili i concetti di posizione (legato a quello di sistema di riferimento), di istante di tempo e di intervallo di tempo (che devono essere ben distinti nella mente degli allievi). Come sottolinea Arons, «il modo più semplice e realistico per far capire agli studenti i concetti cinematici è quello di partire con le idee di *posizione* e *istante di tempo*» [1]. Questo è proprio il modo naturale di

2. Fra la copiosa letteratura su questo argomento, segnalo: [2], [3], [4], [5], [8], [11], [12].

procedere quando si analizzano grafici orari. Bisogna tener presente, però, che in generale gli allievi non mettono in relazione tali grafici con moti reali e visualizzabili, a meno che non siano condotti a farlo.

Nell'elaborazione di entrambi i percorsi ho cercato di mediare tra diverse esigenze: da una parte quella di realizzare una ricerca didattica sui contributi della tecnologia alla costruzione dei concetti, dall'altra le indicazioni del piano di formazione di scienze naturali e il tempo limitato a mia disposizione. Sono convinta della necessità di utilizzare strategie didattiche che siano motivanti e favoriscano l'acquisizione di saperi (conoscenze, capacità e atteggiamenti) e un approccio scientifico da parte degli allievi: ho previsto che i nodi principali dei percorsi fossero affrontati dagli allievi durante lavori di gruppo, in cui a ciascun gruppo è richiesto di elaborare la propria strategia risolutiva, senza trascurare l'importanza della successiva condivisione delle strategie e della discussione per arrivare a una sintesi di quanto costruito; la progettazione delle attività sperimentali, lasciata il più possibile ai singoli gruppi, dovrebbe nascere dalla presentazione (meglio se dalla individuazione da parte degli allievi) di un problema e dalla formulazione di congetture di cui controllare la validità.

Entrambi i percorsi prevedono di alternare attività di tipo tradizionale (per non trascurare la costruzione di grafici da parte degli allievi né l'uso di metro e cronometro) con alcune acquisizioni con il sonar di dati relativi al moto, anche non uniforme, di semplici oggetti. Ciò che differenzia un percorso dall'altro è il ruolo assegnato ai grafici orari ottenuti con l'ausilio del sonar. In uno dei due, infatti, essi vogliono rappresentare, almeno nella prima fase, il problema da risolvere per iniziare la costruzione dei concetti, invece di costituire un aiuto alla migliore comprensione di concetti già introdotti (percorso A). Più esplicitamente, quelli che in generale costituiscono i prerequisiti necessari per affrontare l'analisi di un grafico orario (i concetti di sistema di riferimento, posizione, spostamento, la definizione di velocità) sono in questo caso obiettivi specifici dell'attività (insieme a saper interpretare un grafico orario, saper realizzare concretamente un moto rettilineo avente caratteristiche predefinite, saper rappresentare il moto rettilineo in un grafico cartesiano posizione-tempo). L'altro percorso prevede l'utilizzo del sonar solo nella seconda parte dell'unità didattica, con obiettivi di consolidamento e approfondimento di quanto già appreso dagli allievi (percorso B). Il percorso A è senz'altro più innovativo, e per questo motivo viene presentato più in dettaglio in questo lavoro, il percorso B è più simile ad altre esperienze già svolte nella scuola media.

3. Sviluppo dell'attività

Nelle tabelle ho riassunto le modalità di svolgimento dei due percorsi, in modo da offrire la possibilità di un confronto immediato e fornire informazioni sui tempi dedicati alle varie fasi. Ciascun percorso è stato svolto in 4 lezioni (di due ore), con cadenza settimanale.

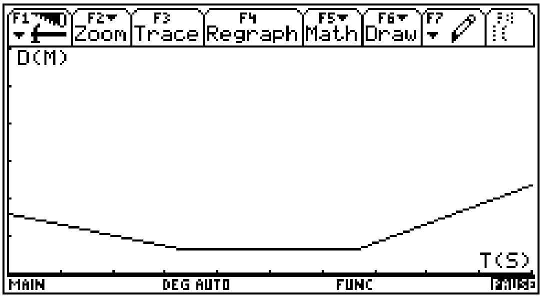
Percorso A
1 Gioco *Sfida sulla... distanza!* (vedi appendice) e inizio del lavoro di gruppo sulla scheda di riflessione.
2 Fine del lavoro di gruppo, correzione e discussione. Lezione dialogata: osservazione e descrizione del moto di caduta di un pirottino[3] e di una pila di pirottini. Lavoro individuale: previsione sul grafico orario di un pirottino. Lezione dialogata: progettazione e realizzazione dell'acquisizione dei dati con il sonar; primi commenti sui grafici ottenuti.
3 Lezione dialogata: lettura puntuale e globale di due grafici orari, analogie e differenze. Lavoro di gruppo: progettazione e realizzazione delle misure necessarie per rappresentare il grafico orario di un giocattolo.
4 Lavoro di gruppo: disegno dei grafici orari. Lezione dialogata: condivisione dei risultati. Lezione dialogata: uso del sonar per lo studio del moto dei giocattoli; confronto con i grafici orari ottenuti dagli allievi; discussione.

Percorso B
1 Lezione dialogata: la descrizione del moto. Lavoro di gruppo: misure con metro e cronometro per studiare il moto di un giocattolo; come possiamo decidere se la velocità è costante?
2 Lezione dialogata: messa in comune delle strategie utilizzate e dei risultati ottenuti dai gruppi. Lavoro di gruppo: lettura e interpretazione di un grafico orario. Lezione dialogata: condivisione dei risultati. Lavoro di gruppo: progettazione delle misure necessarie per ottenere un grafico orario.
3 Lavoro di gruppo: realizzazione delle misure e disegno dei grafici orari. Lezione frontale: presentazione del sensore di distanza e cenni al suo funzionamento. Lezione dialogata: correzione dei grafici orari utilizzando il sonar.
4 Gioco *Sfida sulla... distanza!* e lavoro di gruppo sulla scheda di riflessione.

3. Cestino di carta per dolci.

Il percorso A

Il gioco «Sfida… sulla distanza»



La prima esperienza di questo percorso consiste nel cercare di riprodurre con il moto del proprio corpo, tenendo il sonar in mano e orientato verso una parete o uno schermo, un grafico, proposto dal software, della posizione (distanza dalla parete) in funzione degli istanti di tempo. Osservando il grafico proiettato sullo schermo è possibile stabilire quale deve essere la posizione iniziale: il valore dell'ordinata del punto corrispondente all'istante $t = 0$ fornisce la distanza dalla parete in metri (l'unità di misura utilizzata sull'asse delle ordinate è 1 m, quella sull'asse delle ascisse è 1 s). Inoltre è possibile decidere in quali intervalli di tempo stare fermi, avvicinarsi o allontanarsi dalla parete; a questo punto si può dare inizio alle misure; mentre il sonar è in funzione emette un ticchettio e sullo schermo compaiono i punti che rappresentano le distanze del sonar dalla parete nei successivi istanti di tempo. Il software permette di ripetere la prova con lo stesso grafico il numero di volte desiderato, oppure genera un altro grafico orario da riprodurre.

Ma come proporre questa attività ad allievi di terza media, nel modo più coinvolgente possibile e in modo che il maggior numero di loro provino effettivamente? La scelta di proporre un gioco [3], con le modalità indicate in appendice (scheda distribuita agli allievi), deriva dalle seguenti riflessioni:

a) nella gara diventano essenziali l'interazione tra gli allievi per costruire una strategia comune e la comunicazione tra pari (lavoro di gruppo);
b) i momenti dialogati sono ridotti al minimo, in un'attività che dura più di un'ora di lezione[4];
c) l'estrazione a sorte dei concorrenti massimizza fin dall'inizio il coinvolgimento e l'impegno di tutti i gruppi e di tutti i componenti dei gruppi;
d) l'assegnazione dei punteggi, indispensabile in una gara, viene effettuata coinvolgendo gli allievi: scelta obbligata se si vuole stimolarli alla riflessione sui grafici orari dei propri compagni;
e) ovviamente, non è stimolare la competitività tra gli allievi che interessa, bensì la sfida contro il grafico da riprodurre[5].

4. Tra una fase e l'altra del gioco vengono inseriti alcuni momenti dialogati, per stimolare la riflessione prima dell'assegnazione dei punteggi.
5. Che la sfida sia davvero tra la classe e i grafici da riprodurre sarà evidenziato, nel corso dello svolgimento, dagli applausi per la performance di un «avversario», o dalla delusione di tutti per un'occasione sprecata.

Il gioco ha inizio con il grafico 1; durante la prima occasione di confronto all'interno dei gruppi, osservo che gli allievi discutono su come dovrebbero muoversi (stare fermi, avvicinarsi alla parete o allontanarsi da essa), ma non si preoccupano di quella che potrebbe essere la posizione iniziale, o quella finale, o di quanto debba durare un certo tipo di moto. Tutti gli allievi rimangono seduti. Viene estratto il primo giocatore, che prende posizione (a caso? o valutando a occhio la distanza?) di fronte alla parete.

Docente: *Hai deciso come muoverti?*
Allievo: Sì, sto fermo e poi mi avvicino.

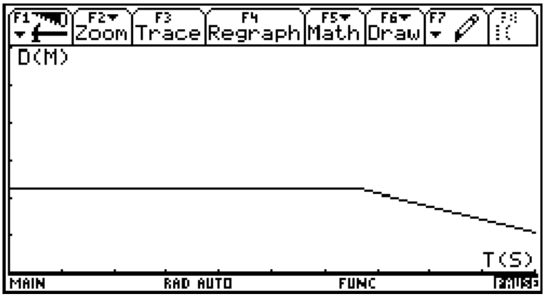


Grafico 1

Nascerebbero spontanee le domande: stare fermo dove? Per quanto tempo? Iniziare ad avvicinarsi in quale istante? Avvicinarsi lentamente o velocemente? Ma è importante che queste domande nascano dagli allievi, e il gioco è appena cominciato: bisogna avere pazienza! Durante l'acquisizione l'allievo si accorge, già dai primi punti che vengono via via tracciati, di non trovarsi alla distanza giusta dalla parete, quindi si sposta cercando per tentativi di far coincidere il grafico orario del proprio movimento con quello proiettato. Il grafico ottenuto non ha un buon accordo con quello da riprodurre. Prima di assegnare il punteggio chiedo alla classe che cosa pensa della prestazione del compagno.

Docente: *Cosa si nota di interessante dal confronto tra il grafico ottenuto e il grafico proiettato?*
Allievi: Non è stato fermo all'inizio, quando avrebbe dovuto stare fermo.
Poi si è avvicinato alla parete, ma i grafici non coincidono!
Docente: *Ma l'idea di avvicinarsi era giusta?*
(Gli allievi hanno opinioni discordi.)

Seguono altri 3 giocatori che si confrontano con lo stesso grafico. Gli errori sono dovuti alla posizione iniziale errata, o a poca coordinazione nel movimento, o a entrambe le cause. Unica osservazione di rilievo: da un certo punto in poi il giocatore estratto non gareggia da solo, ma si fa aiutare dai compagni di gruppo che assumono il ruolo di «navigatori» e suggeriscono. Viene proiettato il secondo grafico. Questa volta un gruppo si avvicina al grafico proiettato, prova a muoversi davanti alla parete osservando attentamente il grafico. Mi chiedono quale sia la scala sull'asse delle distanze.

Docente: *Secondo voi?*
Allievo: Potrebbe essere che la prima tacca corrisponda a un metro?
Docente: *Provate!*

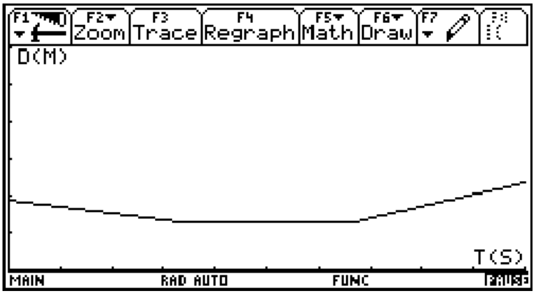


Grafico 2

Viene estratto un concorrente di questo gruppo, che si posiziona correttamente e riproduce quasi perfettamente il grafico 2 mentre i compagni gli danno indicazioni su come muoversi. La sua squadra guadagna 4 punti e si cambia grafico. Avverto che d'ora in poi i punteggi saranno stabiliti in modo autonomo dagli allievi per alzata di mano. A questo punto anche altri gruppi si attivano, chiedono un metro per misurare le distanze, provano a muoversi, discutono. I grafici 3 e 4 vengono riproposti rispettivamente 5 e 4 volte, in parte a causa dell'assegnazione di punteggi eccessivamente severi, in parte a causa della maggiore difficoltà tecnica rispetto ai precedenti: le velocità maggiori[6] creano più problemi, non si fa in tempo ad adattare il proprio moto man mano che compaiono i punti sullo schermo. Per sbloccare la situazione si rende necessario un salto di qualità, che consiste nel valutare in modo più preciso le velocità durante la fase di preparazione. I «navigatori» non consigliano più al concorrente solo quando muoversi in avanti o indietro e quando fermarsi, ma aggiungono indicazioni sull'andatura: ad esempio indietro in fretta, o avanti lentamente. Si passa quindi da una fase in cui gli allievi si limitano ad associare «avanti» a pendenze negative, «indietro» a pendenze positive e «fermo» a pendenza nulla[7], a una fase in cui viene esplicitato anche che un segmento più ripido corrisponde a una velocità maggiore. Dal grafico 5 al 7 tutto procede senza intoppi e il gioco ha termine perché una squadra ha raggiunto i 10 punti.

6. Si ricordi che in questo contesto velocità ha il significato di andatura.
7. Gli allievi non parlano ancora di pendenza, utilizzano gesti per descrivere la forma del grafico oppure dicono che se «il grafico va in su» devono allontanarsi dalla parete, se «va in giù» si devono avvicinare, se «la linea è orizzontale» devono restare fermi.

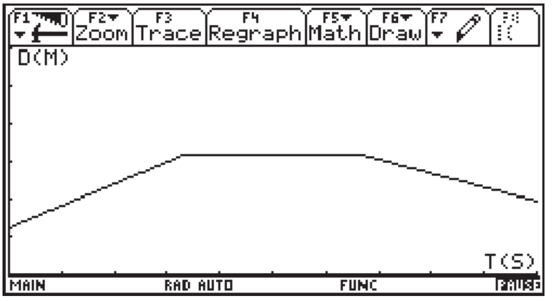


Grafico 3

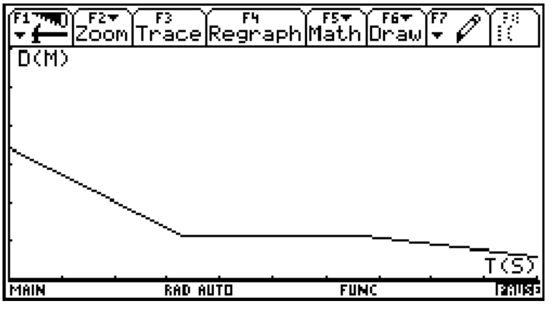


Grafico 4

È indispensabile, dopo il gioco, un momento di riflessione e di riepilogo. A ciascun gruppo viene distribuita una scheda che ha lo scopo di fissare l'attenzione degli allievi sulle caratteristiche dei grafici che hanno utilizzato. Al lavoro di gruppo segue una discussione, con l'obiettivo di esplicitare le osservazioni che hanno portato gli allievi a elaborare strategie durante il gioco: perché un segmento orizzontale nel grafico orario corrisponde al sonar fermo? Come hanno capito che un segmento «in salita» corrisponde al sonar che si allontana dalla parete e viceversa un segmento «in discesa» corrisponde al sonar che si avvicina alla parete? Come mai a pendenze maggiori corrispondono velocità maggiori?

Girando tra i banchi durante il lavoro di gruppo ricevo da tutti le stesse richieste di aiuto: gli allievi sono messi in crisi dal linguaggio di alcuni quesiti, ad esempio:

1. La traiettoria di un oggetto è la linea che l'oggetto descrive muovendosi nello spazio. Che tipo di traiettoria era descritta dal sonar durante il gioco?

Chiedo agli allievi di osservare il movimento della punta di una matita che faccio muovere nello spazio. Una volta chiarito che cosa sia la traiettoria, non hanno problemi a rispondere.

5. Quale dovrebbe essere la posizione iniziale del sonar per fare in modo che il primo punto rappresentato nel grafico coincida con l'origine del sistema cartesiano?

Allievo 1: Non abbiamo capito!
Docente: Qual è l'origine di un sistema cartesiano?
Allievo 2: L'incrocio degli assi.
Docente: E quali coordinate ha?
Allievo 1: zero e zero!
Allievo 3: Ah, allora bisogna mettersi attaccati alla parete!

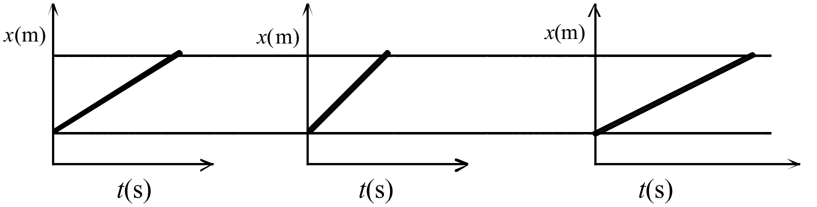
Nella fase di correzione comune, proietto i quesiti sullo schermo con il retroproiettore. Ci soffermiamo sugli ultimi due quesiti.

6. Associa nel modo corretto le caratteristiche del grafico al corrispondente moto del sonar:

Andamento del diagramma orario	Moto del sonar
1) Un segmento orizzontale, cioè parallelo all'asse dei tempi	a) Il sonar si allontana dalla parete
2) Un segmento che forma un angolo acuto con l'asse dei tempi	b) Il sonar è fermo
3) Un segmento che forma un angolo ottuso con l'asse dei tempi	c) Il sonar si avvicina alla parete

Chiedo a un allievo di giustificare l'associazione (corretta) della caratteristica *3* con il moto *c*. L'allievo tenta una spiegazione a gesti, lo invito a disegnare alla lavagna. Con il disegno davanti è tutto più semplice.
Allievo: Si vede che il tempo passa e la distanza dalla parete diminuisce.

7. I tre grafici seguenti rappresentano il moto di un oggetto che si è mosso ogni volta a una velocità diversa, $v_1 > v_2 > v_3$. Associa ad ogni grafico la velocità corrispondente:



La risposta fornita da uno dei gruppi è parzialmente errata. I compagni protestano (quasi tutti avevano indicato la risposta corretta).

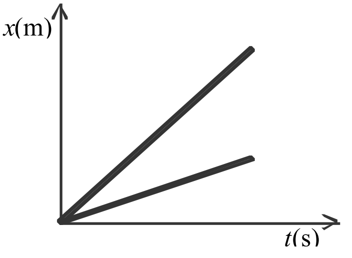
Docente: Come possiamo fare per decidere chi ha ragione?
Allievo: Guardiamo quanta strada fa nello stesso tempo.

Questa indicazione non è comoda per decidere guardando i grafici, mi aspettavo che pensassero piuttosto al tempo impiegato a percorrere lo stesso tratto. I miei interventi successivi sono una forzatura, avrei dovuto richiedere altri interventi degli allievi prima di indirizzarli.

Docente: *L'intervallo di tempo in cui è rappresentato il moto nei tre grafici è lo stesso?*
Allievi: No.
Docente: *Il cammino percorso è lo stesso?*
Allievi: Sì.
Docente: *Se percorre lo stesso tratto, che cosa si può guardare per decidere?*
Allievo: La pendenza.
Docente: *A parità di cammino percorso, va più veloce quello che ci mette più tempo o quello che ci mette di meno?*

Coro di risposte da parte degli allievi… rilancio:
Docente: *K. ha detto che avreste potuto decidere guardando la pendenza. Cosa intendete per pendenza?*
Allievi: Guardiamo quale è più inclinato.
Se la pendenza è maggiore è più veloce[8].
Quando è meno inclinato è più lento.
Docente: *Siete tutti d'accordo? A parità di spostamento, se la pendenza è maggiore ci mette più o meno tempo?*

Guardano i grafici, esitano. Credono che stia mettendo in dubbio la validità delle loro risposte, mentre invece vorrei solo convincerli che parlare di pendenza è un modo diverso di dire la stessa cosa! Insisto disegnando alla lavagna due grafici orari nello stesso riferimento cartesiano. Chiedo quale segmento ha pendenza maggiore. Chiedo se, a parità di intervallo di tempo, l'oggetto il cui grafico orario ha pendenza maggiore si sposta di più o di meno. Rispondono correttamente, senza esitazioni, a entrambe le domande. Quindi quale è più veloce? Alcuni esitano e non si uniscono al coro di risposte corrette. Si tranquillizzano solo dopo un esempio più concreto (che però avrei dovuto fare inventare agli allievi!): se un'automobile in un'ora percorre 50 km e un'altra in un'ora ne percorre 80, quale è più veloce?



Complessivamente sono abbastanza soddisfatta di come è stato svolto il lavoro sulla scheda, ma ritengo che sia possibile migliorare l'efficacia dell'attività aggiungendo ai quesiti la richiesta di spiegare e/o di giustificare le proprie scelte e/o di fare degli esempi. In questo modo risulterebbe stimolata la discussione all'interno dei gruppi e anche la fase di messa in comune sarebbe risultata più coinvolgente per gli allievi.

8. Anche per la pendenza sembra valere quello che è stato detto per la velocità: gli allievi considerano solo il valore assoluto della pendenza.

L'osservazione e la descrizione del moto

Nella prima fase è stato richiesto agli allievi di ricavare da alcuni grafici orari le informazioni necessarie per poterli riprodurre con il moto del proprio corpo. Si tratta ora di operare il processo inverso, cioè di partire dall'osservazione del movimento di un oggetto per darne una descrizione, dapprima verbale, cominciando ad utilizzare la terminologia appropriata, e in seguito per mezzo di un grafico orario. Conviene proporre agli allievi l'osservazione di due oggetti, il cui moto presenti qualche caratteristica comune e qualche differenza: trovare differenze e, soprattutto, analogie aiuta nella costruzione dei concetti.

Lascio cadere un pirottino da un'altezza di circa due metri, dopo aver chiesto di osservare come si muove. Lo lascio cadere di nuovo e chiedo agli allievi una descrizione (scrivo alla lavagna le loro osservazioni).

Allievi: Si muove in linea retta.
Cadeva lentamente.
Cadeva perpendicolarmente al pavimento.
Docente: Queste informazioni bastano per descrivere come si muove?
Allievi: Si deve dire da dove parte e dove arriva.
Parte da circa 2 metri da terra.

Scrivo che misuriamo le posizioni dal pavimento. La posizione iniziale è la distanza iniziale dal pavimento, cioè circa 2 m.

Docente: E la posizione finale?
Allievo: Sul pavimento.
Docente: Quindi a che distanza dal pavimento?
Allievi: Zero!

Lo scrivo e chiedo se possiamo dire qualcos'altro. Gli allievi tacciono. Allora propongo di confrontare il movimento osservato precedentemente con un altro, ottenuto lasciando cadere alcuni pirottini impilati l'uno dentro l'altro. Lascio cadere contemporaneamente il singolo pirottino e la pila di pirottini dalla stessa altezza.

Allievi: Quello da solo è arrivato dopo!
Docente: Quindi cosa possiamo aggiungere nella descrizione?
Allievi: Il tempo impiegato.

Chiedo di valutare quanto tempo impiega un solo pirottino a cadere a terra. Le loro stime variano tra 2 e 4 secondi, chi prova a misurare si accorda su circa 2 s. Scrivo alla lavagna che l'intervallo di tempo impiegato è di circa 2 s[9].

Docente: Supponiamo di aver fatto delle misure precise, e che impieghi due secondi a percorrere due metri… qualcuno sa dirmi qual è la sua velocità?
Allievi: Due metri in due secondi.
Un metro al secondo!

9. In realtà Δt è sovrastimato, ma avranno modo di accorgersene in seguito.

Docente: *Siete d'accordo? Se percorre due metri in due secondi possiamo dire che percorre un metro al secondo?*

Allievi: Sì.

No, non è detto.

Dipende…

Docente: *Da che cosa dipende?*

Allievo: Che magari fa un pezzo più veloce e uno meno veloce.

Docente: *Se la velocità del pirottino non variasse durante il moto, potremmo dire che si muove con la velocità di 1 m/s?*

Allievi: Sì.

Docente: *Ma non siamo sicuri che la velocità non varia, non siamo neanche sicuri dei valori della posizione iniziale e del tempo impiegato ad arrivare a terra…riprenderemo il discorso dopo aver fatto uno studio più accurato di come si muove, usando il sonar.*

Prima però propongo un'altra attività, questa volta individuale: chiedo di tracciare su un foglio una previsione del grafico orario che otterremo lasciando cadere sotto il sonar un pirottino e ritiro i fogli. Supponendo, cosa che in effetti ho potuto verificare, che gli allievi sappiano di dover tracciare il grafico della posizione in funzione degli istanti di tempo, i problemi connessi a questa richiesta sono di due ordini diversi, entrambi a mio parere rilevanti dal punto di vista concettuale. Da una parte quello della forma del grafico, che dipende (dovrebbe dipendere) dall'ipotesi sull'andamento della velocità, dall'altra quello del sistema di riferimento.

I grafici prodotti dagli allievi si possono dividere in tre categorie:

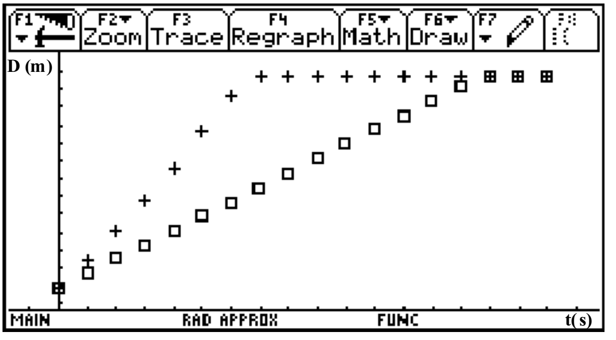
a) confusione tra traiettoria e grafico orario che porta a tracciare una linea verticale (solo due allievi);
b) sistema di riferimento «del sonar», in cui la posizione $x = 0$ corrisponde all'istante iniziale (altezza da terra massima) e il valore finale della posizione è $x = 2$ m (solo due allievi);
c) sistema di riferimento «naturale», in cui la posizione corrisponde all'altezza da terra (tutti gli altri allievi).

Nei casi b) e c) i grafici sono sempre costituiti da linee rette.

Leggere un grafico orario

Gli allievi collaborano alla progettazione dell'acquisizione dei dati relativa ai moti osservati, ottenendo sul display della calcolatrice, proiettato sullo schermo in modo che tutti possano seguire, i corrispondenti grafici orari. La lettura puntuale dei grafici permette di individuare le coppie (istante di tempo, posizione corrispondente), di calcolare lo spazio percorso in un dato intervallo di tempo e l'intervallo di tempo impiegato a percorrere una data distanza. La lettura globale permette di riconoscere l'andamento del fenomeno. La descrizione verbale del movimento dopo questo processo può essere molto più ricca e dettagliata, le differenze e le analogie possono essere individuate con maggiore precisione. Nella scheda distribuita agli allievi sono raffigurati i due grafici, ma il lavoro di analisi viene svolto solo in parte sulla figura. Muovendo il cursore della calcolatrice grafica è possibile infatti spostarsi da un punto all'altro del diagramma e contemporaneamente leggere le coordinate dei punti. Inoltre se lo si desidera è possibile ingrandire una parte del grafico. Ritengo che questo tipo di esplorazione (esplorazione dinamica) possa essere molto più efficace, oltre che meno noiosa, di quella su carta.

Nel grafico sono rappresentati i dati sperimentali relativi ai moti di caduta di un pirottino (□) e di una pila di sei pirottini (+).



Docente: *Cosa possiamo dire sulle analogie e sulle differenze dei due moti rappresentati nei grafici? Cominciamo dalle analogie.*

Allievi: La posizione iniziale e finale.
Partono insieme.
Il primo punto e gli ultimi punti del grafico coincidono.

Docente: *Altro?*

Allievo: I sei pirottini arrivano più in fretta a terra!

Docente: *Questa è una differenza… Come si potrebbe dire in un altro modo?*

Allievo: La velocità dei 6 pirottini è maggiore

Docente: *Posso dire che la velocità dei 6 pirottini è sempre maggiore di quella di un pirottino solo?*

Allievi: No, alla fine sono fermi entrambi.
Finché si stanno muovendo sì.

Docente: *Come potete esserne sicuri?*

Allievi: Si vede dal grafico.
Si può controllare quanto si sposta in ogni intervallo di tempo.
Ogni 0,05 secondi i sei pirottini si spostano di più rispetto al pirottino solo.

Docente: *Possiamo dire qualcosa sulla forma dei grafici?*

Allievi: La distanza aumenta in modo regolare.
Con velocità costante.

Docente: *In entrambi i grafici? Come sono disposti i punti?*

Allievi: Su una retta.
(si controlla con i righelli per quanto riguarda il grafico di un pirottino)

Docente: *E nell'altro grafico? Controllate.*

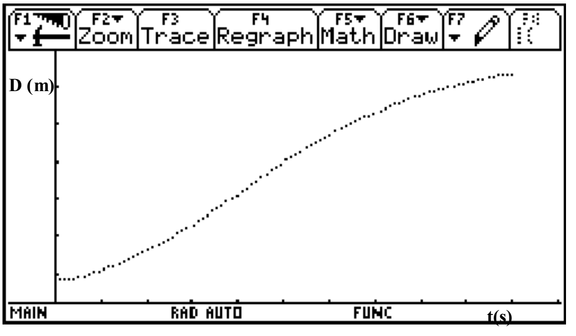
Alla fine scriviamo: i punti del grafico di un pirottino in movimento sono allineati. Per 6 pirottini in movimento i punti descrivono una linea curva. Rimandiamo a quando avranno svolto le misure con i giocattoli il discorso sulla velocità costante o variabile.

Misure con metro e cronometro per studiare il moto

Nella fase successiva ogni gruppo progetta e realizza le misure necessarie per poter rappresentare il grafico orario di un giocattolo che si muove di moto rettilineo (non necessariamente uniforme). Questa fase prevede cinque momenti distinti:

a) individuazione del materiale necessario e delle modalità con cui effettuare le misure;
b) esecuzione delle misure e compilazione di una tabella oraria;
c) rappresentazione grafica di tale tabella su carta millimetrata;
d) condivisione dei risultati;
e) acquisizione, utilizzando il sonar, dei dati relativi al moto dei giocattoli studiati e confronto tra i grafici orari ottenuti e quelli realizzati dagli allievi.

Proietto sullo schermo il grafico orario dell'ambulanza a molla ottenuto usando il sonar. Chiedo di descrivere il moto dell'ambulanza ricavando le informazioni dal grafico.



Allievo: All'inizio è ferma.
Docente: Dove?
Allievi: A circa 40 cm dal sonar.
Poi accelera.
Si muove lentamente e pian piano si muove più veloce.
Docente: Cosa vuol dire accelera?
Allievo: La velocità aumenta.
Docente: Da che cosa si capisce?
Allievo: Da quanto tempo impiega a fare una data distanza.
Docente: Quindi era ferma, poi la velocità aumenta. E poi?
Allievi: Per un po' la velocità è costante.
Poi inizia a rallentare
Docente: Da che cosa si capisce?
Allievo: Perché è una curva.
Docente: Anche prima era una curva e avete detto che la velocità aumentava… Il fatto che sia una curva cosa ci assicura?
Allievi: La velocità non è costante.
Rallenta perché la linea va sempre più giù.
Ma no, la linea va su!
Ha una pendenza che diminuisce.

Docente: *Ma come faccio a dire che la pendenza diminuisce?*
(Fanno con la mano dei segni.)
Come faccio a parlare di pendenza per una linea curva? Mi dite: qui la pendenza sta aumentando, e qui sta diminuendo… Ma se non diciamo cos'è la pendenza… Vorrei essere sicura che intendiamo la stessa cosa.
Prendo in mano una riga e chiedo se qualcuno vuole provare a spiegare. Un allievo usa la riga e mostra ai compagni, spostando la riga mantenendola tangente alla curva.

Allievo: Si vede come varia l'inclinazione: prima cresce, poi decresce.

4. Conclusioni e possibili sviluppi

Facendo riferimento agli obiettivi di questo lavoro, a conclusione delle attività mi sento di affermare che, nel corso della mia esperienza con le due classi, l'uso del sonar abbia contribuito in modo significativo allo sviluppo del processo di apprendimento, permettendo agli allievi di costruirsi rappresentazioni corrette di che cosa sia un grafico orario e di come sia possibile interpretarlo.

Per quanto riguarda l'esito della sperimentazione dei due percorsi, mi è difficile, a causa della notevole diversità delle due classi coinvolte, stabilire quale si sia rivelato il più efficace. In entrambi i casi è stato posto l'accento su un caso particolare di rappresentazione grafica, il diagramma posizione-tempo, con modalità che hanno portato gli allievi a familiarizzare con concetti importanti sia dal punto di vista della fisica (posizione, istante di tempo, velocità e variazione di velocità) sia da quello della matematica (sistema di riferimento, rappresentazione grafica di una funzione, pendenza di una retta e idea della pendenza di una curva).

Per quanto riguarda la fisica, anche se il tempo a mia disposizione non mi ha permesso di affrontare questo aspetto, ritengo che, una volta che gli allievi si siano impadroniti degli strumenti concettuali per la lettura e l'interpretazione dei grafici orari, sarebbe opportuno offrire l'occasione di reinvestire le competenze da loro acquisite per mettere in relazione lo studio del moto con gli altri temi ad esso correlati[10], ad esempio in applicazioni legate allo studio qualitativo delle forze, in particolare della forza peso (moto di una palla che cade), o della resistenza dell'aria (moto dei pirottini), o della legge di Hooke (moto di una massa appesa ad una molla). Altri collegamenti possono essere stabiliti con lo studio dei flussi di energia durante il movimento di un oggetto (ad esempio pallina da ping pong che rimbalza, macchinina a molla o a pile).

Per quanto riguarda la matematica, pur non avendo avuto la possibilità di effettuare verifiche mirate, i percorsi proposti hanno avuto sicuramente ricadute positive sulla comprensione del concetto di funzione. La situazione nella quale gli allievi si sono trovati ad agire è ben diversa da quelle che solitamente vengono proposte dall'insegnante di matematica e anche solo questo fatto contribuisce ad arricchire le immagini mentali in formazione, riguardanti il concetto di funzione[11]. Inoltre, le prime

10. Fermo restando che le occasioni per reinvestire le competenze acquisite sono numerose anche al di fuori dello studio delle scienze naturali.
11. La mia convinzione si fonda sui risultati della ricerca didattica già citati e anche sull'esperienza personale di insegnamento al liceo.

idee di pendenza della tangente e di variazione della pendenza della tangente arricchiscono in modo importante le capacità di leggere un grafico, capacità che si riveleranno basilari nello studio della variazione di una funzione e, più tardi (ma non troppo), del concetto di funzione derivata. È opportuno coordinare con il docente di matematica i tempi degli interventi didattici e il livello di approfondimento con cui affrontare questi delicati argomenti.

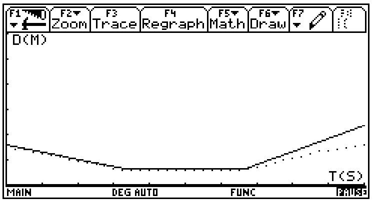
Qui ci allacciamo anche al discorso sull'introduzione precoce di attività di pre-analisi [13]. È opinione diffusa che per assicurare in una certa misura l'apprendimento di concetti relativi allo studio delle funzioni si debba iniziare con attività introduttive e stimolanti già nella scuola media. È inoltre necessario familiarizzare gli allievi con questi concetti mettendoli a confronto con più situazioni presentate con registri semiotici diversi. Non esclusivamente diagrammi orari, quindi, ma anche, ad esempio, la variazione del costo totale in funzione del costo unitario (o della quantità acquistata), la variazione dell'area (o del volume) in funzione di una lunghezza (o di un'area), la variazione della velocità media in funzione del tempo (o dello spazio). In tutti questi esempi si possono considerare intervalli, secanti, tangenti, ecc. Giocando su questi concetti sia operando conversioni da un registro semiotico a un altro, sia producendo trattamenti all'interno di un determinato registro semiotico [14], si aiutano gli allievi a costruirsi immagini mentali successive sempre più complete, il più possibile ripulite dagli elementi parassiti di solito molto presenti nelle prime immagini intuitive. Questo modo di procedere dovrebbe da un lato impedire la cristallizzazione di modelli non adeguati in misconcezioni difficilmente eliminabili nelle classi superiori (i modelli parassiti) e dall'altro permettere la formazione di un terreno ricco di elementi corretti sui quali poi si potranno costruire i concetti di funzione, variazione, pendenza, fino ad arrivare in modo molto naturale a quello di funzione derivata.

Appendice

Sfida… sulla distanza!

Scopo del gioco

Il grafico proiettato rappresenta come varia nel tempo la distanza di un oggetto da una parete. Lo scopo del gioco è di riprodurre tale grafico, muovendosi di fronte alla parete tenendo in mano, rivolto verso di essa, un sensore di distanza (sonar).



Svolgimento del gioco

1. Si formano 5 squadre composte da 3-4 persone, seguendo le indicazioni della docente.
2. Ogni squadra prepara dei bigliettini (di colore diverso per ogni squadra) con i nomi dei giocatori e li consegna alla docente.
3. Ogni squadra studia (sottovoce per non farsi sentire dalle altre) per 5 minuti al massimo il grafico proposto ed elabora una strategia per ottenere un grafico il più possibile uguale muovendosi con il sonar di fronte a una parete.
4. Viene sorteggiato un giudice di gara che aiuta la docente nella conduzione della gara.
5. Viene sorteggiato un giocatore che dovrà provare a riprodurre il grafico proiettato. I suoi compagni di squadra possono aiutarlo fornendo indicazioni, i giocatori delle altre squadre osservano come si muove senza disturbare: ogni disturbo viene penalizzato con un punto in meno.
6. A giudizio della docente e delle squadre avversarie vengono assegnati da 1 a 4 punti, in base alla somiglianza del grafico realizzato con quello proposto (1 punto: nessuna somiglianza; 2 punti: somiglianza in alcune caratteristiche; 3 punti: somiglianza in quasi tutte le caratteristiche; 4 punti: sovrapposizione quasi perfetta).
7. Se il punteggio assegnato è di 3 o 4 punti si cambia grafico e le squadre hanno a disposizione 5 minuti per lo studio del nuovo grafico, altrimenti si continua con lo stesso grafico.
8. Vengono sorteggiati un nuovo giudice di gara e un nuovo giocatore (necessariamente di un'altra squadra se il grafico è lo stesso e anche se una squadra ha giocato due volte più di altre) e così via… fino a quando una squadra non raggiunge 10 punti oppure fino a quando finisce il tempo a disposizione.

Alcuni consigli

Osserva attentamente il grafico proiettato sulla parete. Stabilisci quale deve essere la tua posizione iniziale e quali saranno i movimenti che dovrai eseguire: in quali intervalli di tempo ti devi avvicinare alla parete, in quali ti devi allontanare, in quali intervalli di tempo devi stare fermo.

È importante che tutti i giocatori di una squadra collaborino nella fase di studio perché non si sa chi sarà chiamato a giocare!

[1] Arons A. B., *Guida all'insegnamento della fisica*, Zanichelli, Bologna, 1992, 23-61.
[2] Balzano E. (responsabile), Progetto LES - Realizzazione di Laboratori per l'Educazione alla Scienza, http://www.les.unina.it/.
[3] Iacuzzi A., Papoff M. G., Rettaroli R., «Abbiamo disegnato il movimento», in Arpinati A.M., Giacometti G., Masi M.G., *La calcolatrice grafica TI-73 per l'insegnamento di Matematica e Scienze nel triennio della Scuola Media*, http://www.fardiconto.it/calcolatrici/ti73/.
[4] Paola, D., «Cinematica e nuove tecnologie», *Didattica delle Scienze*, 2002, n. 218, 41-46.
[5] Pecori B., Turra M., Salami G., «Un percorso didattico con CBR», in Arpinati A.M., Giacometti G., Masi M.G., *La calcolatrice grafica TI-73 per l'insegnamento di Matematica e Scienze nel triennio della Scuola Media*, http://www.fardiconto.it/calcolatrici/ti73/.
[6] Robutti O., «È possibile avviare gli studenti al senso del grafico con calcolatrice e sensore?», *Ipotesi*, 2001, n. 3, 10-14.
[7] Robutti O., «Il senso del grafico con la mediazione delle tecnologie: metafore attivate e significati costruiti», *La matematica e la sua didattica*, 2003, n. 2, 173-195.
[8] Robutti O., «Apprendimento percettivo-motorio dalla scuola dell'infanzia alla scuola superiore», in D'Amore B. e Sbaragli S., *La didattica della matematica: una scienza per la scuola, Atti del Convegno di Castel S. Pietro Terme*, 2004, 29-38.
[9] Thornton, R.K., «Tools for Scientific Thinking: Microcomputer Based Laboratories for Physics Teaching», *Phys. Ed.*, 1987, n. 22, 230-238.
[10] Thornton R. K., «L'uso del microelaboratore nel laboratorio di fisica per migliorare la comprensione dei concetti», *La fisica nella scuola,* 1990*,* vol. 23, 81-92.
[11] Turra M., «Una ricerca sull'introduzione dell'uso delle calcolatrici grafiche nell'insegnamento della fisica nella scuola secondaria superiore», *Tesi di laurea in Fisica*, Università di Bologna, 1999.
[12] Urban-Woldron H., «Diagramme verstehen lernen», *Naturwissenschaften im Unterricht Physik*, 2004, n. 83, 29-31
[13] Arrigo G. Attività di pre-analisi: loro importanza ed esempi. *Bollettino dei docenti di matematica,* 2006, n. 53. Bellinzona: UIM-CDC. pp. 59-70.
[14] D'Amore B. *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*, 2003. Bologna: Pitagora. pp. 50-61.

Quiz numero 37

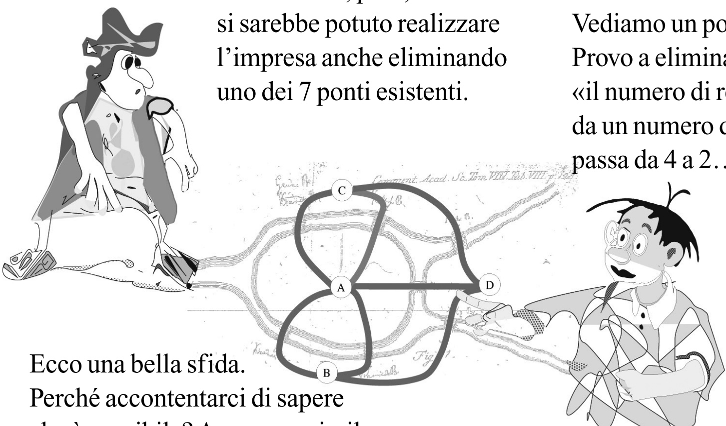
Aldo Frapolli

Caro Archie,

quando Eulero nel 1735, dimostrò finalmente che non era possibile «*fare una passeggiata per Königsberg, toccando tutte le regioni della città dopo aver attraversato esattamente una volta ognuno dei 7 ponti presenti*», qualcuno immaginò di costruire un nuovo ponte. Sarebbe stato l'ottavo per la città, e avrebbe reso possibile l'impresa tentata invano da molti. Infatti, in base alla semplice «regola» formulata da Eulero stesso e che puoi leggere su questa rivista a pagina 47, in qualsiasi posto fosse stato costruito si sarebbero avverate le condizioni necessarie.
Poi si pensò anche ad un nono e perfino ad un decimo ponte, legati ad interessanti aneddoti.

Secondo me, però,
si sarebbe potuto realizzare
l'impresa anche eliminando
uno dei 7 ponti esistenti.

Non ci avevo mai pensato.
Vediamo un po' se è vero!
Provo a eliminare questo..., così
«il numero di regioni servite
da un numero dispari di ponti»
passa da 4 a 2…



Quindi la passeggiata attraverso i 6 ponti restanti dovrebbe essere possibile.

Ecco una bella sfida.
Perché accontentarci di sapere
che è possibile? A me, una simile
passeggiata, piacerebbe provarla!

Guarda che… probabilmente
ci sarà più di una possibilità.

È vero!
Allora facciamo così: siccome mi hanno detto che oggi sull'«isola» c'è un'ottima gelateria, non sarebbe male immaginare di cimentarci nella passeggiata e di concludere la fatica gustandoci un bel cono alla salute di Eulero. Ti propongo quindi di *trovare quale dei 7 ponti occorrerebbe sopprimere per far sì che ci sia almeno una passeggiata che termina sull'«isolotto» e descrivere poi tutti i tragitti possibili*.

Chi vuole aiutare Archie?
Vi aspettiamo numerosi con delle proposte giustificate a proposito di quale ponte eliminare, accompagnate da una descrizione delle passeggiate che portano alla famosa gelateria situata sull'isolotto. La passeremo a Joe.

Come sempre, per la soluzione migliore è in palio un bel libro.

Soluzione del Quiz numero 36

$$
\begin{aligned}
& 27 \cdot (13 \cdot 21 \cdot 37) \\
= \; & 27 \cdot 10'101 \\
= \; & 27 \cdot 10'000 + 27 \cdot 100 + 27 \cdot 1 \\
= \; & 270'000 + 2700 + 27 \\
= \; & 272'727
\end{aligned}
$$

Per ottenere il risultato è sufficiente allineare tre volte di fila le cifre che compongono il numero, senza eseguire alcun calcolo.

Il segreto delle «moltiplicazioni lampo» è dunque tutto qui. Nessuna abilità di calcolo particolare.

Questo vale in generale. Infatti, per calcolare il risultato della moltiplicazione di un numero di due cifre $c_1c_2 = c_1 \cdot 10 + c_2$ *per il numero* $(13 \cdot 21 \cdot 37) = 10101$*, vale:*

$$
\begin{aligned}
& c_1c_2 \cdot 10101 \\
= \; & (c_1 \cdot 10 + c_2) \cdot (10^5 + 10^2 + 1) \\
= \; & c_1 \cdot 10^6 + c_2 \cdot 10^5 + c_1 \cdot 10^4 + c_2 \cdot 10^3 + c_1 \cdot 10^2 + c_2 \cdot 10 \\
= \; & c_1c_2c_1c_2c_1c_2
\end{aligned}
$$

La chiave del problema risiede quindi nel riconoscere ed applicare il significato della scrittura posizionale in base 10 di un numero. La semplice esecuzione del calcolo, applicando la proprietà distributiva, chiarisce il resto.

Il quiz 36 non ha suscitato grande interesse. Magari è stato giudicato troppo banale, visto che non ci sono giunte soluzioni. Ma non potrebbe essere questo uno spunto carino per dare senso a qualche attività di calcolo letterale?

Per poter procedere analogamente con numeri di tre cifre occorre moltiplicare per il numero 1001001.
Volendo contare sulla meraviglia e far credere che alla base ci sia una grande abilità di calcolo mentale, sarebbe utile scomporre tale numero in un prodotto. In questo caso però non esistono molte possibilità, siccome 1001001 possiede solo i due fattori primi 3 e 333667.

2. Il Kangourou della matematica

Andrea Pellegrinelli

Brevissima storia

Il Concorso nasce in Australia nel 1978 per opera di Peter O'Halloran, professore all'Università di Camberra. Attualmente i partecipanti in questo continente sono oltre 500˙000 (per un paese di 14 milioni di abitanti, non è male!) suddivisi in tre livelli: per ragazzi e ragazze di 13-14 anni, per quelli di 15-16 anni e per quelli di 17-18 anni.

Nel 1991 il Concorso viene esportato in Francia per merito dei professori André Deledicq e Jean Pierre Boudine, e ottiene uno straordinario successo: al primo anno i soli partecipanti delle scuole medie sono 120˙000. In Francia i livelli vengono portati a 5 e precisamente: un livello per allievi di quarta e quinta elementare (**écolier**), uno per quelli di prima e seconda media (**benjamin**), uno per quelli di terza e quarta media[1] (**cadet**), uno per i liceali (**junior**) e uno a livello maturandi (**student**).

Nell'anno 2000 si sono iscritti alla competizione in Francia 58˙000 studenti delle elementari, 365˙000 delle medie e 48˙000 dei licei.

Gli stessi professori francesi decidono poi di estendere in più paesi europei la competizione facendo nascere l'Associazione Kangourou senza frontiere con sede in Francia.

L'Italia è stata tra i paesi che subito hanno aderito (il riferimento era la Scuola Normale Superiore di Pisa); nel 1999 è subentrato come riferimento il Dipartimento di Matematica «F. Enriquez» dell'Università degli Studi di Milano.

Nel Ticino la competizione si è svolta per la prima volta nel 2006 a cura della Commissione Matematica della Svizzera Italiana, su proposta e in collaborazione con l'Università degli Studi di Milano.

1. In Francia la scuola media dura 4 anni come da noi.

Che cos'è il gioco-concorso?

Si tratta di una competizione individuale che ha l'obiettivo di sviluppare lo «spirito matematico» degli allievi attraverso la pratica di problemi matematici stimolanti e impegnativi, che possono anche essere utilizzati per migliorare l'insegnamento e l'apprendimento della matematica.

Il gioco-concorso comporta una sola prova che viene disputata nel mese di marzo, lo stesso giorno e alla stessa ora, e consiste in un questionario a scelta multipla di 30 domande di difficoltà crescente, per ciascuna delle quali sono proposte 5 risposte. La competizione viene svolta nella lingua del Paese. Ogni Istituto scolastico che abbia un minimo di 15 concorrenti organizza la prova sotto la responsabilità di un docente che ne assicura la regolarità dello svolgimento. Se vi fosse un numero di allievi inferiore che è intenzionato a iscriversi, basta prendere contatto con la persona di riferimento indicata in coda all'articolo. È senz'altro possibile trovare soluzioni interessanti accorpando due sedi (senza che sia forzatamente necessario spostare gli allievi). Le correzioni e l'attribuzione dei punteggi avviene comunque in modo centralizzato (per la zona italofona a Milano presso l'Università degli Studi). I migliori classificati possono partecipare a una finale italiana a Mirabilandia che si svolge nel corso del mese di maggio. Il costo per la partecipazione al gioco-concorso per le due scorse edizioni ammontava a 5 fr. La quota serve a coprire tutti i costi organizzativi.

Altre attività

L'Associazione Kangourou ha per scopo la diffusione della cultura matematica: sotto il nome Kangourou viene diffuso presso tutti i concorrenti diverso materiale e libri di giochi, di cultura e di divulgazione matematica. In questo quadro, l'Associazione si sforza di promuovere scambi tra i Paesi membri. A questo titolo delle coedizioni e delle traduzioni reciproche di opere potranno essere realizzate. Ogni anno sono organizzati nei differenti Paesi dei soggiorni estivi per i vincitori dei concorsi.

Commenti autorevoli

Paul Halmos, matematico americano: «*(…) le domande sono intelligenti, ben poste e hanno la proprietà di essere stimolanti e interessanti (…) le domande hanno un enunciato chiaro e mettono bene in luce il problema da risolvere*».

Gustave Choquet matematico, membro dell'Accademia francese delle scienze: «*Bravi! Il Kangourou non si indebolisce mai. Le prove sono sempre varie e appassionanti. Felicitazioni agli organizzatori. Mi sono state presentate le pubblicazioni del Kangourou e devo dire che le ammiro molto. Quale ricchezza! Si trovano certo elementi per far appassionare alla matematica i ragazzi delle elementari, delle medie e delle superiori*».

Henri Cartan matematico, membro dell'Accademia francese delle scienze: «*Come potranno gli allievi non amare la bella matematica che i libri del Kangourou mostrano ed insegnano loro?*».

Il presidente mondiale di Kangourou, prof. André Deledicq, è stato insignito del premio D'Alembert e all'ultimo ICME del premio Erdös.

Informazioni

Sul sito http://www.kangourou.it si possono trovare tutte le prove dal 2000 in avanti, complete di soluzioni. Si trovano anche le pubblicazioni di Kangourou in italiano e diverse altre informazioni. Docenti interessati a organizzare la prova in Ticino possono rivolgersi direttamente alla persona di contatto della Commissione di Matematica della Svizzera Italiana, Andrea Pellegrinelli, 6955 Cagiallo, apellegrinelli@ticino.com.

Esempi di problemi tratti dall'edizione 2007

Categoria écolier

5. Fra sei ore e mezza saranno esattamente le quattro del mattino. Che ore sono?

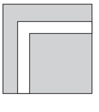
A) 21:30 B) 04:00 C) 20:00
D) 02:30 E) 10:30

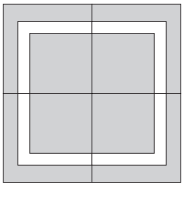
10. Elisa, che è più giovane di suo fratello Matteo di un anno e un giorno, è nata il 1. gennaio 2002. Qual è la data di nascita di Matteo?

A) 2 gennaio 2003 B) 2 gennaio 2001 C) 31 dicembre 2000
D) 31 dicembre 2001 E) 30 dicembre 2000

23. Anna dispone di una grande quantità di carte di forma quadrata come quella sotto. Accostando opportunamente quattro di queste carte può costruire un circuito chiuso (in bianco nella seconda figura). Anna vuole costruire un circuito più grande: qual è il minimo numero di carte che le consente di attuare il suo progetto?

A) 8 B) 10 C) 9
D) 16 E) 12





Categoria benjamin

4. Elisa ha tanti cubetti di lato 1 cm. Usandoli tutti, potrebbe costruire un cubo di volume 1 dm^3. Se invece volesse costruire una torre mettendoli uno sopra l'altro, quanti metri sarebbe alta la torre?

A) 1 B) 5 C) 10 D) 100 E) un valore diverso dai precedenti

19. La collezione di numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 viene suddivisa in due gruppi che hanno lo stesso numero di elementi. Sai che la somma degli elementi è la stessa nei due gruppi. Se i numeri 1 e 3 sono in uno stesso gruppo, allora tale gruppo deve necessariamente contenere il numero

A) 2 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Categoria cadet

5. Si vuol fare una coltura di ninfee in uno stagno. Ogni giorno la coltura raddoppia la sua estensione e se si mette a dimora una sola ninfea, dopo 12 giorni lo stagno è pieno. Dopo quanti giorni sarà pieno lo stagno se si mettono a dimora 4 ninfee?

A) 3 B) 4 C) 8 D) 10 E) 6

21. Una calcolatrice mal funzionante non mostra mai la cifra 1. Ad esempio se si digita 3131 compare solo il numero 33, senza spazi. Marco ha digitato un numero di 6 cifre, ma è comparso solo il numero 2007: quanti numeri devo elencare per essere certo di dire il numero digitato da Marco?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

Categoria junior

4. Sia ABC un triangolo di area 96. Siano D il punto medio del lato AB, E il punto medio del segmento DB, F il punto medio del lato BC. Quanto vale l'area del triangolo AEF ?

A) 16 B) 24 C) 32 D) 36 E) 48

14. Una classe ha affrontato uno dei problemi di Kangourou. Il numero dei ragazzi che hanno risolto il problema coincide con il numero delle ragazze che non l'hanno risolto.
È maggiore il numero di coloro (ragazzi e ragazze) che hanno risolto il problema o il numero complessivo delle ragazze?
A) La situazione non può verificarsi.
B) I dati non sono sufficienti per rispondere.

C) Il numero delle ragazze.
D) Il numero di coloro che hanno risolto il problema
E) I due numeri sono uguali.

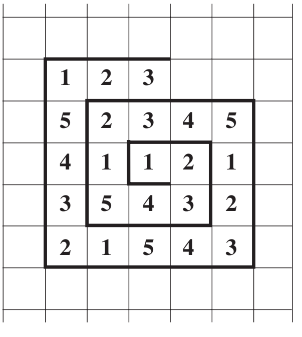
Categoria student

3. A un esame di ammissione all'Università, uno studente deve rispondere correttamente ad almeno l'80% delle domande di un questionario. Per adesso, Pietro ha esaminato 15 domande: non ha risposto a 5 di esse, ma è sicuro di aver risposto esattamente alle altre 10. Se risponde correttamente a tutte le domande rimanenti, raggiungerà esattamente l'80% di risposte giuste. Quante sono le domande nel questionario?

A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 40

27. Le cifre della successione 1234512345123451 ... riempiono le celle su un foglio con una legge del tipo a spirale, partendo dalla cella segnata (v. figura).
Quale cifra si viene a trovare sulla cella che sta esattamente 100 celle sopra quella ombreggiata?

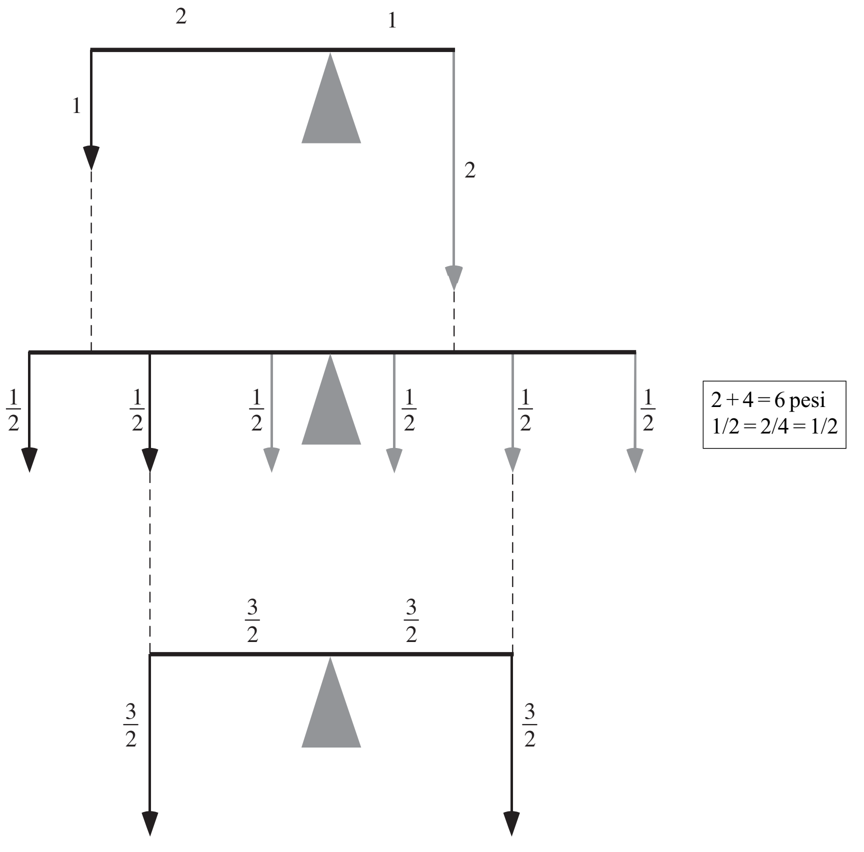
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5



IV. Dalla bricolla

1. L'equilibrio della leva reso palese[1]

Antonio Steiner



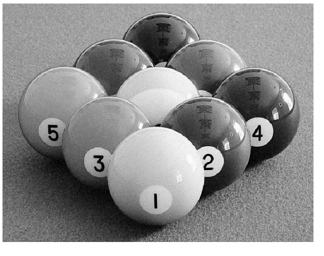
Senza parole.

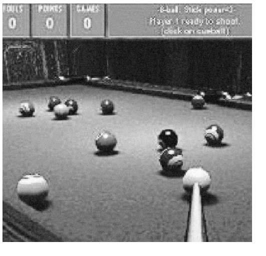
1. L'idea è stata dedotta dall'articolo di Jean Dhombres, La legge della leva e le proporzioni, *Bollettino dei Docenti di Matematica*, n. 44, 2002.

2. Il biliardo: non solo abilità...

Luca Bellini

Cari ragazzi, a qualcuno di voi sarà capitato di assistere a una gara di biliardo e senza dubbio di rimanere incantato nel vedere con quale abilità i giocatori mettono a segno colpi apparentemente impossibili. Certamente la loro bravura nasce da anni di esperienza e dal fatto che hanno provato e riprovato i colpi per migliaia di volte. Per chi li guarda non resta che provare ammirazione e un po' di invidia ma, forse, conoscere la matematica vi permetterà di mettere a segno qualche colpo da maestro.

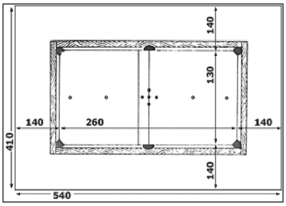




Descrizione dei tavoli e delle specialità del biliardo

Il biliardo consiste in una tavola rettangolare, in marmo od ardesia, perfettamente piana e ricoperta da un panno. Ai quattro lati è fiancheggiata da sponde imbottite, denominate *mattonelle*, la cui altezza tra il bordo superiore ed il piano del biliardo è di 4 cm. Le dimensioni della tavola rettangolare variano ma le proporzioni sono costanti in quanto la lunghezza è il doppio della larghezza misurata all'interno delle mattonelle. Per poter giocare a biliardo occorrono inoltre le stecche, le palle ed i birilli.

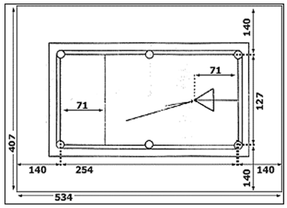
Biliardo all'italiana



Dimensioni possibili
- 260 cm x 130 cm •
- 270 cm x 135 cm
- 280 cm x 140 cm

Specialità consentite
- Stecca italiana «5 birilli»
- Stecca Goriziana «9 birilli»
- Boccette «5 birilli»
- 8 e 15

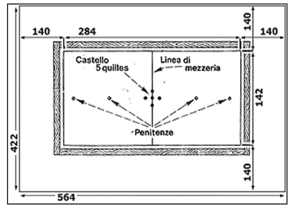
Biliardo all'americana



Dimensioni
254 cm x 127 cm

Specialità consentite
- Palla 8
- Palla 9
- Continous 14.1

Biliardo internazionale



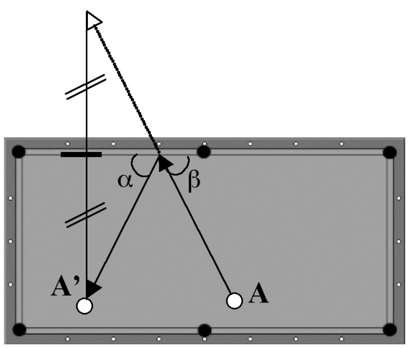
Dimensioni
- 284 cm x 142 cm

Specialità consentite
- Stecca internazionale «5 quilles»
- Boccette «5 quilles»
- Carambola
- 8 e 15

Come puoi facilmente osservare esistono diverse tipologie di tavolo e svariate discipline. Lo scopo delle attività che affronteremo non è quello di conoscere i dettagli delle varie discipline ma quello di capire in che modo, con l'ausilio di conoscenze matematiche, è possibile sferrare alcuni colpi vincenti.

Attività introduttiva

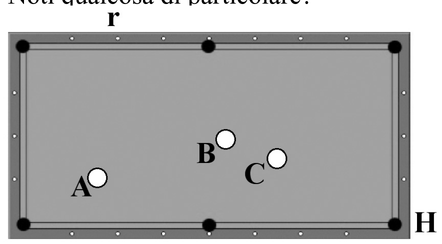
In linea di principio una bilia che tocca una sponda rimbalza in modo che l'angolo di incidenza (α) sia isometrico all'angolo di riflessione (β).



Le sponde riflettono le traiettorie di incidenza con delle traiettorie di riflessione, proprio come uno specchio rifletterebbe un fascio di luce. In assenza di effetti particolari, se una biglia fosse un punto materiale e non ruotasse su se stessa scivolando sul panno determinerebbe delle traiettorie in uscita esattamente simmetriche a quelle di entrata, stabilendo così un principio della fisica ottica, criterio che per comodità nel biliardo prende il nome di ***teoria del triangolo isoscele***.

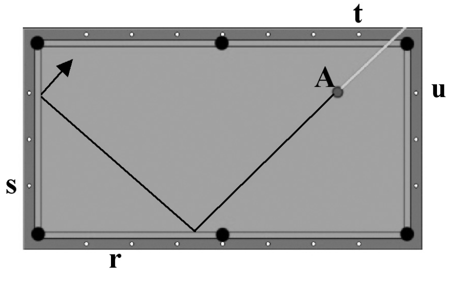
Attività A

a) Nell'immagine sotto costruisci le traiettorie delle bilie A, B e C che, colpendo la sponda r, terminano il loro percorso nella buca H.
b) Noti qualcosa di particolare?

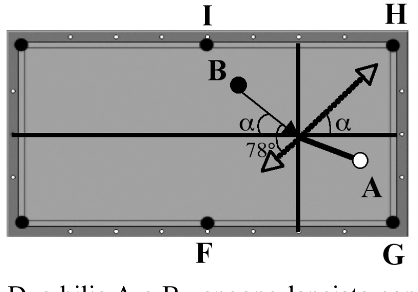


Prolungando le traiettorie all'esterno del tavolo da biliardo notiamo che si intersecano in un punto ben preciso, perfettamente simmetrico al vertice di arrivo rispetto alla sponda d'impatto della bilia. Anche se piuttosto banale, questo risultato evidenzia un concetto piuttosto importante: le traiettorie sul biliardo vanno cercate fuori dal biliardo. Infatti partendo da qualunque posizione del biliardo e mirando sempre nello stesso punto esterno al biliardo otterrai, simmetricamente rispetto alla sponda d'impatto, sempre lo stesso arrivo geometrico.

Attività B



a) La bilia A colpisce la sponda r con un angolo di incidenza di 40°. Con quale angolo la stessa bilia impatterà con la sponda s?
b) E con quale angolo di incidenza colpirà la sponda t?
c) Quale considerazione puoi fare a proposito delle traiettorie successive?

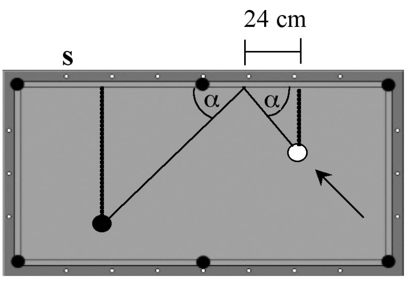


Due bilie A e B vengono lanciate contemporaneamente e si scontrano esattamente al centro del quadrato individuato dalle buche F, G, H, I.

Dopo lo scontro, la bilia A entra nella buca H.
La bilia B riuscirà ad entrare nella buca F?
Motiva la risposta.

Attività C

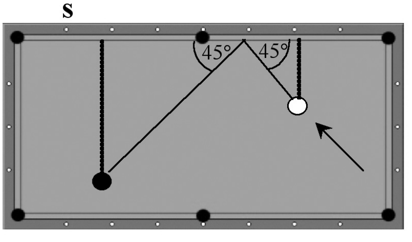
- La bilia bianca colpisce la bilia nera dopo un rimbalzo sulla sponda s.



Le distanze della bilia bianca e della bilia nera dalla sponda s sono rispettivamente di 32 cm e 44 cm.

a) Calcola la distanza percorsa dalla bilia bianca prima di colpire la bilia nera.
b) Calcola la distanza tra le due bilie prima della giocata.

- La bilia bianca colpisce la bilia nera dopo un rimbalzo sulla sponda s.



Le distanze della bilia bianca e della bilia nera dalla sponda s sono rispettivamente di 40 cm e 80 cm.

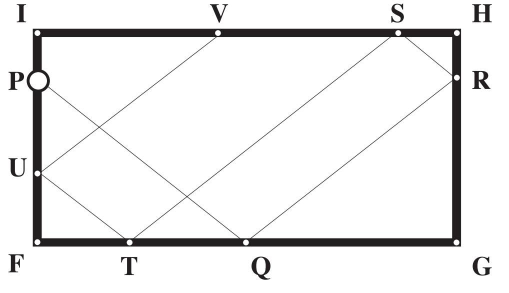
a) Calcola la distanza percorsa dalla bilia bianca prima di colpire la bilia nera.
b) Calcola la distanza tra le due bilie prima della giocata.

Rispondi alle stesse domande considerando un angolo di incidenza di 60° oppure di 30°.

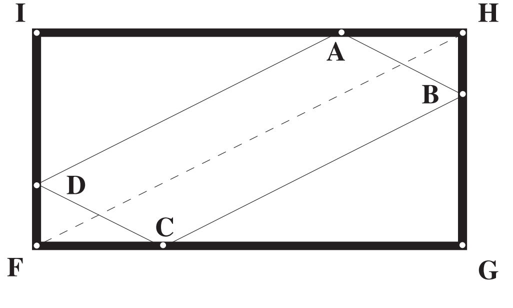
D'ora in poi indicheremo il tavolo da biliardo semplicemente con un rettangolo.

Attività D

Calcola la lunghezza totale che percorre la bilia che da parte da P e si ferma in V.
$\overline{FI} = 140\ cm$
$\overline{FU} = 35\ cm$
$\overline{FG} = 280\ cm$
Q è il punto medio di $\overline{FG}$



Calcola la lunghezza totale che percorre una bilia con un tiro a traiettoria chiusa.
$\overline{FG} = 270\ cm$
$\overline{FI} = 135\ cm$
$\overline{FC} = 90\ cm$
$\overline{FD} = 45\ cm$



Attività E

Un tiro a traiettoria chiusa è difficile da effettuare. Billy è un vero appassionato del gioco.

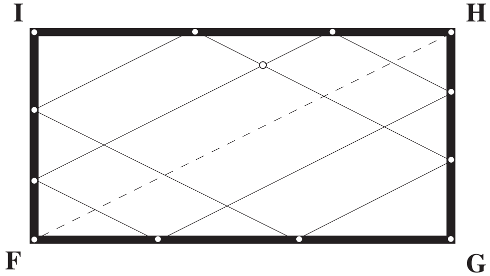
Dopo aver provato decine di volte senza successo, decide di fermarsi un attimo e ragionarci sopra.

Sei d'accordo con le affermazioni di Billy? Aiutalo a convincere la sua amica Ardel.

La retta riflessa di AB (cioè BC) si ottiene non solo dalla simmetria rispetto alla perpendicolare alla sponda ma anche dalla simmetria rispetto alla sponda interessata (GH). La costruzione viene ripetuta 4 volte con simmetrie assiali rispetto alle 4 sponde del biliardo ottenendo così le rette AB, BC, CD, DA. Per l'ortogonalità degli assi, la composizione delle prime due simmetrie assiali dà luogo a una simmetria centrale avente come centro il punto G, la composizione delle altre due dà luogo alla simmetria centrale di centro I. Quindi, la composizione delle quattro simmetrie assiali è equivalente alla composizione delle due simmetrie centrali di centri G e I. A loro volta, queste due simmetrie centrali danno luogo a una traslazione avente come direzione la retta congiungente G con I, cioè la diagonale GI del rettangolo di gioco.

La direzione della bilia, affinché dopo quattro riflessioni torni al punto di partenza è quella della diagonale GI. Si ottiene lo stesso risultato lanciando nella direzione della diagonale FH.

Attività F



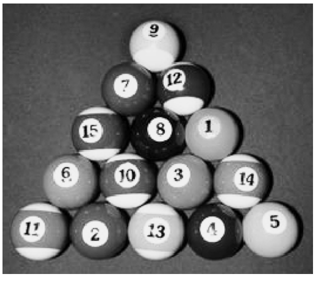
Come avrà fatto Ardel ad accorgersi di questa particolarità? Analizza attentamente la figura precedente, alcune matite colorate saranno sufficienti a mostrare che Ardel ha proprio ragione.

A cosa corrisponde la lunghezza di tutte le traiettorie chiuse?

I giocatori di biliardo non effettuano calcoli macchinosi ma conoscono bene i principi geometrici del gioco. Per facilitare le operazioni di mira, ai bordi del tavolo da biliardo sono posizionati dei rombi (detti *diamanti*) che suddividono le varie sponde in parti uguali tra loro. Ogni parte è composta da 10 punti immaginari. Ad ogni diamante viene poi attribuito un sistema di numerazione che permette di trovare le traiettorie con maggior facilità. Se i principi del gioco ti hanno appassionato puoi approfondire personalmente le tecniche di mira usate dai veri campioni!

Inoltre devi considerare che, oltre a leggi geometriche, il tavolo da biliardo è soggetto a leggi fisiche. Fattori come la forza del tiro, l'usura del panno, le condizioni ambientali, l'elasticità della sponda, gli effetti rotatori..., non sono stati presi in considerazione. Continua a coltivare la tua passione per il biliardo e per la matematica; con alcune nozioni di fisica potrai così capire e giustificare tutti questi fenomeni.

Attività G



Billy e Ardel hanno imparato in fretta come indirizzare le proprie bilie. Decidono quindi di rendere la sfida ancor più avvincente ed inventano un nuovo gioco.

Le bilie sono numerate da 1 a 15. Ad ogni bilia imbucata verrà attribuito un punteggio pari al numero indicato sulla bilia. Vince chi totalizza il maggior numero di punti.

a) Quanti punti è possibile totalizzare?
b) Quanti punti è necessario totalizzare per essere sicuri di aggiudicarsi la partita?

Billy non è ancora soddisfatto e decide di «numerare» le bilie utilizzando solamente i numeri dispari.

c) Quanti punti è ora possibile totalizzare?
d) Quanti punti sono ora necessari per essere sicuri di aggiudicarsi la partita?

Ardel non vuole essere da meno e propone una nuova variante: «giochiamo con più bilie»!

e) Quanti punti è possibile totalizzare giocando con 21 bilie?
f) E con n bilie?
g) E con n bilie «numerate» con soli numeri dispari?
h) Come varia il totale dei punti disponibili utilizzando i due diversi tipi di numerazione?

Attività H

Alberto, Bruno, Carlo, Dario, Emanuele e Fabrizio hanno imbucato 2 bilie ciascuno. Sul tavolo rimangono le ultime 3 bilie.
A questo punto decidono di calcolare i punteggi ottenuti:

Alberto 11 punti	Carlo 7 punti
Emanuele 16 punti	Dario 29 punti
Bruno 4 punti	Fabrizio 19 punti

Quali bilie ha imbucato ciascuno di loro? Quali bilie sono rimaste sul tavolo da gioco?

V. Segnalazioni

1. Allievi, insegnanti, sapere: la sfida della didattica della matematica

Convegno Nazionale n. 21: ***Incontri con la Matematica***
Castel San Pietro Terme (Bologna)
2-3-4 novembre 2007

Conferenze

Venerdì 2 novembre, Centro Congressi (Hotel Castello)

Tutti gli ordini scolastici

14.30-15.30 **Inaugurazione** alla presenza delle Autorità del mondo politico ed accademico. Saluto del Sindaco di Castel San Pietro Terme
15.30-16.15 **Maria L. Schubauer-Leoni** (Università di Ginevra, Svizzera): Un approccio clinico/sperimentale delle pratiche didattiche ordinarie
16.15-17.00 **Giorgio Bolondi** (Università di Bologna): Il pensiero matematico tra intuizione e meccanismi logici
17.00-17.30 Intervallo
Gérard Vergnaud (Università Paris 8): La concettualizzazione nell'attività degli allievi e nelle pratiche degli insegnanti
18.15-19.00 **Martin Dodman** (Università di Bolzano): Competenze linguistico-comunicative nella costruzione del sapere matematico

Sabato 3 novembre, Salone delle Terme (Albergo delle Terme)

Scuola dell'Infanzia

15.00-15.45 **Bruno D'Amore** (Università di Bologna): I bambini e lo zero
15.45-16.30 **Michele Pertichino, Antonella Montone** (Università di Bari): La matematica nella scuola dell'infanzia: cose da grandi
16.30-17.00 Intervallo
17.00-17.45 **Maria L. Schubauer-Leoni** (Università di Ginevra, Svizzera): La condivisione di un codice di designazione di oggetti nella scuola dell'infanzia

17.45-18.30 **Irene Foresti** (RSDDM, Bologna):
Misuriamo la realtà con gli occhi della Matematica

Sabato 3 novembre, Centro Congressi (Hotel Castello)

Scuola Primaria, Secondaria di primo e di secondo grado

15.00-15.45 **Ivan Trencansky** (Università di Bratislava),
Filippo Spagnolo (Università di Palermo):
Attività sperimentale in classe in un progetto di cooperazione europea per futuri insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore

15.45-16.30 **Ferdinando Arzarello** (Università di Torino):
TI-Nspire come ambiente di apprendimento multimodale

16.30-17.00 Intervallo ed attività ludiche[1]

17.00-17.45 **Carlos E. Vasco** (Università Distrital di Bogotà – Università del Valle, Cali – Colombia):
La topologia e la cronologia: matematica dello spazio-tempo prima della metrica

17.45-18.30 **Roberto Tortora** (Università di Napoli):
La modellizzazione nell'Educazione matematica e le Scienze della mente

18.30-19.15 **Consolato Pellegrino** (Università di Modena - Reggio Emilia):
I magnifici sette: tangram & matematica

Seminari

Sabato 3 novembre, Aula Magna (Istituto Alberghiero)

Seminari per la Scuola dell'Infanzia

9.00-09.45 **I. Foresti** (RSDDM, Bologna): Storie per misurare

9.45-10.30 **A. Montanari Lughi** (RSDDM, Bologna):
Alice e la logica, la probabilità e il calcolo combinatorio

10.30-11.15 **S. Caliari, S. Rensi, A. Ulicka** (Museo Tridentino di Scienze Naturali):
Spiegazione della mostra interattiva «Nel Regno di Matelandia»

Sabato 3 novembre, Centro Congressi (Hotel Castello)

Seminari per la Scuola Primaria e Secondaria di primo grado

9.00-09.45 **Mathesis Pesaro**: Modelli dinamici e Cabri nello studio dei quadrilateri

9.45-10.30 **M. Dodman** (Università di Bolzano):
Modi di pensare, modi di parlare: significazione e argomentazione nella matematica

10.30-10.45 Intervallo

1. Estrazione a sorte omaggi Media Direct e Texas Instruments.

10.45-11.30	**P. Guidoni** (Università di Napoli): Cosa si conta quando si conta, cosa si moltiplica/divide quando si moltiplica/divide: strategie cognitive fra discreto e continuo
11.30-11.50	**S. Merlo** (SP Copernico, Corsico, Milano): Il bambino autore. Comunicare e cooperare tra scuole

Sabato 3 novembre, Salone delle Terme (Albergo delle Terme)

Seminari della Sezione «Disagio nei processi di apprendimento»

9.00-09.45	**R. Zan** (Università di Pisa): Miti e pratiche del recupero: alcune riflessioni
9.45-10.30	**L. Dozza** (Università di Bolzano): Co-costruzione del sapere come condizione di ben-essere in classe
10.30-10.45	Intervallo
10.45-11.30	**M. Santi** (Università di Padova): Attività + Partecipazione = – Disagio. Un'operazione didattica per la risoluzione di un problema aperto?
11.30-11.50	**S. Locatello**, **G. Meloni** (NRD, Bologna): Didattica della Matematica ed allievi con bisogni educativi e didattici speciali

Sabato 3 novembre, Sala Giardino (Hotel delle Terme)

Seminari per la Scuola Secondaria di secondo grado

9.00-09.45	**F. Spagnolo** (Università di Palermo): Il laboratorio di Didattica dell'Analisi nei corsi di Specializzazione per futuri insegnanti
9.45-10.30	**N. Nolli** (L.S. G. Aselli,Cremona): Dalla velocità alla derivata, dall'area alle primitive: nuove tecnologie al servizio della «costruzione» del significato degli «oggetti» matematici
10.30-11.15	**M. Pertichino**, **M.L. La Forgia**, **L. Faggiano**, **E Faggiano**, **A. Montone** (Università di Bari): Saperi matematici e cittadinanza attiva

Sabato 3 novembre, Cinema Jolly (Centro Storico)

Per tutti i livelli scolastici

13.30-14.15	**Teatro**: IC Bazzano-Monteveglio (BO), SP A.Venturi: Il telegiornale matematico, coordinato da S. Sbaragli

Domenica 4 novembre, Aula Magna (Istituto Alberghiero)

Seminari per la Scuola dell'Infanzia

8.30-09.15 **E. Dal Corso** (RSDDM, Bologna):
L'importanza della geometria nella scuola dell'infanzia

9.15-10.00 **C. Bortolato** (Treviso):
Come sviluppare la genialità di ognuno con il metodo analogico

10.00-10.45 **D. Razzari** (ICS di Basiglio, Milano)
S. Merlo (SP Copernico, Corsico, Milano):
Il Bambino autore, confrontare il proprio punto di vista
con quello degli altri

Domenica 4 novembre, Centro Congressi (Hotel Castello)

Seminari per la Scuola Primaria

8.30-08.50 **S. Simoncini** (S.M. Gamerra-Mazzini, Livorno):
Microcorsi per classi: attività di e-learning per gruppi classe dai 4
ai 10 anni sull'uso del software Micromondi e del linguaggio LOGO

8.50-09.10 **M.R. Gambuli** (IC D. Cimarosa Aversa, CE): Una Palestra per la mente

9.10-09.30 **M. Caldara** (IC Copernico, Corsico, Milano):
Piccole e grandi domande. Facciamo filosofia nella scuola primaria

9.30-10.15 **I. Marazzani** (NRD, Bologna):
Rappresentazioni semiotiche, bambini, matematica: teoria e prassi

10.15-11.00 **M.R. Ardizzone** (SVT, Università di Roma 3),
S. Lasaponara, **S. Nichelini** (Roma):
Discutendo si impara la matematica

Domenica 4 novembre, Sala Giardino (Albergo delle Terme)

Seminari per la Scuola Secondaria di primo grado

8.30-09.15 **M.R. Laganà** (Università di Pisa): La didattica con i robot e l'informatica

9.15-10.00 **V. Bussi**, **M. Candeago**, **A. Ferretti** (IC Pray Biellese):
Pensare con le mani: il laboratorio di matematica come momento
di esperienza e riflessione per insegnanti e alunni.

10.00-10.45 **C.M. Mazzanti** (IC Banti, S. Croce sull'Arno, Pisa):
Atteggiamento degli allievi verso la matematica.
Uno strumento d'osservazione: il questionario

Domenica 4 novembre, Salone delle Terme (Albergo delle Terme)

Seminari per la Scuola Secondaria di secondo grado

8.30-09.15 **M. Pivetti** (LS Manfredo Fanti, Carpi):
Matematica: anima segreta dell'arte

9.15-10.00	**P. Di Martino** (Università di Pisa), **M. Maracci** (Università di Siena): Dai Precorsi al Progetto PORTA: lavori in corso sul problema del raccordo scuola superiore – università
10.00-10.15	Intervallo
10.15-11.00	**L. Tomasi** (LS G. Galilei, Adria – SSIS, Ferrara): Alla scoperta delle proprietà dei poliedri con CABRI 3D
11.00-11.45	**S. Rossetto** (IT Mazzotti, Treviso): Se faccio capisco. Una tecnologia per la matematica per tutti: proposte per motivare anche allievi distratti allo studio della matematica

Domenica 4 novembre, Centro Congressi (Hotel Castello)

Per tutti i livelli scolastici

12.15-12.30 **Manifestazione di chiusura del convegno presso il Centro Congressi: saluto delle autorità, consegna degli attestati, interventi ludici**

Mostre e Laboratori (in contemporanea e dopo i seminari)
(a cura di Ines Marazzani e Silvia Sbaragli)

Presso l'Istituto Alberghiero
Sabato 3 novembre dalle 9.00 alle 14.00
e domenica 4 novembre dalle 9.00 alle 12.00

Scuola dell'infanzia
- **A. Angeli** e **M. Di Nunzio (**SI G. Marconi, Montecarlo, LU): Un viaggio corto, lungo... infinito
- **A. Donadel**, **E. Fabian**, **M. Masciovecchio** (SI Giovanni Paolo I, Marghera, Venezia): Matematica in galleria
- **M.G. Bluma**, **V. Graglia** (SP II Circolo, Domodossola): Le favole di Esopo e di Fedro e... la misura
- **C. Bortolato** (Treviso): Strategie per l'apprendimento non concettuale della matematica
- **S. Merlo** (SP Copernico, Corsico, Milano): Il bambino autore. Comunicare e cooperare tra scuole
- **Scuole dell'Infanzia Comune di Rimini** con la collaborazione di **L. Campolucci e D. Maori**: Il gioco come strumento di pensiero

Scuola primaria
- Forlìmatica, coordinata da **S. Fattori**, **E. Casadei**, **P. Ricci**, **A. Siboni** (Forlì): Matematica e dintorni: laboratori interdisciplinari
- **S. Iula** (Roma): La *paura* della matematica
- **O. Guidi** (Roma): Laboratorio: Matematica in equilibrio: la bilancia e «Mister X»
- **S. Franceschilli** (Roma): La successione di Fibonacci

- **Mathesis Pesaro**: Geometria: una visione dinamica. Mostra di modelli
- **S. Merlo** (SP Copernico, Corsico, Milano):
  Il bambino autore. Comunicare e cooperare tra scuole
- **M.G. Bluma**, **V. Graglia** (SP II Circolo, Domodossola):
  Le favole di Esopo e di Fedro e… la misura
- **C. Bortolato** (Trento):
  Strategie per l'apprendimento non concettuale della matematica
- **Fondazione POST**. Perugia Officina della Scienza e della Tecnologia:
  Dieciallamenonove. Laboratorio: sabato 3 (ore 11-12),
  domenica 4 (ore 10-11): Misuriamo. Confrontare lunghezze, volumi
  e tempi senza dover utilizzare il metro, la bilancia o l'orologio
- **L. Bardone** (NRD, Pavia). Laboratorio:
  sabato 3 (ore 9.30-10.30; 10.30-11.30; 11.30-12.30),
  domenica 4 (ore 9.30-10.30; 10.30-11.30): Cabri II Plus
- **Media Direct**. Geoforme ed altri strumenti didattici per l'insegnamento
  della matematica
- **E. Dal Corso** (IC 16 Valpantena, VR – RSDDM, Bologna),
  R. Fusinato (IC 18 Veronetta Porto VR - RSDDM, Bologna):
  Un problema, tante soluzioni
- gruppo studenti **Alta Scuola Pedagogica** di Locarno (Svizzera):
  Matematica: che storia!

Scuola secondaria di primo grado

- **Mathesis Pesaro**: Geometria: una visione dinamica. Mostra di modelli
- **B. Finato** (SM, Parabiago, MI), **M. Reggiani** (Università Pavia):
  Laboratorio: Attività di laboratorio di matematica con CABRI:
  il ruolo della lavagna interattiva multimediale
- **S. Merlo** (SP Copernico, Corsico, Milano):
  Il bambino autore. Comunicare e cooperare tra scuole
- **N. Garuti**, **M. Pivetti**, **E. Quattrini**, **D. Tettamanzi**
  (LS Manfredo Fanti, Carpi): Matematica: anima segreta dell'arte
- **Fondazione POST**. Perugia Officina della Scienza e della Tecnologia:
  Dieciallamenonove. Laboratorio: sabato 3 (ore 11-12),
  domenica 4 (ore 10-11): Misuriamo. Confrontare lunghezze, volumi
  e tempi senza dover utilizzare il metro, la bilancia o l'orologio
- **Fondazione POST**. Perugia Officina della Scienza e della Tecnologia:
  Dieciallamenonove. Laboratorio: sabato 3 (ore 10-11),
  domenica 4 (ore 9-10): Micro-macromondi. Dalla lente, al microscopio
  elettronico passando per il microscopio ottico
- **S. Simoncini** (SM Gamerra-Mazzini, Livorno). Laboratorio:
  sabato 3 (ore 10-11; 11-12),
  domenica 4 (ore 9.30-10.30; 10.30-11.30): MicroMondi
- **Media Direct**. L'uso della robotica nella scuole secondaria di primo grado
- **G. Baldi**, **A. Ferrini**, **A. Leonardi**, **S. Traquandi** (SS I° grado Marconi -
  SS 2° grado Giovanni da San Giovanni, S. Giovanni Valdarno, AR):
  Matematica e Arte

Scuola secondaria di secondo grado

- **N. Garuti**, **M. Pivetti**, **E. Quattrini**, **D. Tettamanzi** (LS Manfredo Fanti, Carpi): Matematica: anima segreta dell'arte
- **Fondazione POST.** Perugia Officina della Scienza e della Tecnologia: Dieciallamenonove. Laboratorio: sabato 3 dalle 10 alle 11, domenica 4 dalle 9 alle 10: Micro-macromondi. Dalla lente, al microscopio elettronico passando per il microscopio ottico
- **G. Baldi**, **A. Ferrini**, **A. Leonardi**, **S. Traquandi** (SS I° grado Marconi - SS 2° grado Giovanni da San Giovanni, S. Giovanni Valdarno, AR): Matematica e Arte

Informazioni utili

È riconosciuto **l'esonero dal servizio** per la partecipazione al **Convegno** (per insegnanti di ogni ordine e grado, per il personale direttivo ed ispettivo) ai sensi dell'art. 62 del CCNL/2003 in quanto l'Università, ai sensi dell'art. 1 della Direttiva Ministeriale n. 90 del 1 dicembre 2003, è Ente riconosciuto dal MIUR per la formazione dei docenti. Verrà rilasciato un attestato per n. 20 ore di **Aggiornamento**, in base alla CM 376, prot. 15218, del 23 12 1995 e successive modifiche. In caso di frequenza parziale al Convegno, verrà comunque rilasciato un attestato per il numero di ore di presenza effettive.

Per avere ulteriori **informazioni**, ci si può rivolgere a:
Maria Rita Baroncini
Ufficio Cultura e Turismo
Comune di Castel San Pietro Terme
Piazza XX Settembre 3
40024 Castel San Pietro Terme BO
Tel. 051 6954198 Fax 051 6954180 feriali ore 9 - 13.30
e-mail: ufficioturismo@cspietro.provincia.bo.it
cultura@cspietro.provincia.bo.it
http://www.dm.unibo.it
http://www.comune.castelsanpietroterme.bo.it
http://www.dm.unibo.it/rsddm

Il Convegno è **aperto a tutti,** non essendo a numero chiuso, qualsiasi sia il giorno d'arrivo. L'**iscrizione** avviene direttamente durante il Convegno. **Non** si accettano **pre-iscrizioni.** La **segreteria organizzativa centrale** addetta alle iscrizioni avrà sede presso l'Albergo delle Terme, viale delle Terme 1113; sarà aperta venerdì 2 novembre dalle ore 11 alle ore 18 e sabato 3 novembre dalle ore 8 alle ore 18. Si consigliano i Convegnisti di effettuare se possibile le iscrizioni venerdì 2 novembre tra le ore 11 e le 13 per evitare code. **Prima delle ore 11 del 3 novembre non verranno accettate iscrizioni**. Al momento dell'iscrizione viene consegnata al Convegnista una cartella contenente vario materiale. A ciascun partecipante viene richiesto un contributo alle spese di organizzazione di 50 Euro (studenti e specializzandi con libretto 25 Euro).

La Pro Loco sarà a disposizione per **assistenza turistica** gratuita ai Convegnisti ed ai loro Accompagnatori e fornirà ogni indicazione relativa ad orari di aerei, treni e bus. È assicurata **l'assistenza medica** per tutta la durata del Convegno. Per tutta la durata del Convegno saranno attivi **servizi di trasporto gratuito** tra la sede della segreteria e le stazioni dei bus e ferroviaria di Castel San Pietro. Gli **Atti**, pubblicati da Pitagora Ed. Bologna, saranno disponibili fin dal giorno della inaugurazione. I Convegnisti dovranno provvedere per conto proprio alla **prenotazione alberghiera**. Poiché si prevede un afflusso notevole, si consiglia di provvedere al più presto. La segreteria declina ogni responsabilità per mancato alloggiamento.

Ricettività Alberghiera nel territorio di Castel San Pietro Terme

★★★★ Anusca Palace Hotel, viale Terme 1058, tel. 051 948824
★★★★ Castello, viale Terme 1010/b, tel. 051 940138
★★★★ Gloria, Toscanella, via Emilia 46, tel. 0542 672702
★★★ Delle Terme, viale Terme 1113, tel. 051 941140
★★★ Nuova Italia, via Cavour 73, tel. 051 941932
★★★ Parigi, viale Terme 860, tel. 051 943585
★★★ Park Hotel, viale Terme 1010, tel. 051 941101
★★★ Il Gallo, via Repubblica 34, tel. 051 941114
★★★ Arlecchino, via Repubblica 23, tel. 051 941835
★★ Due Portoni, via Mazzini 141, tel. 051 941190
★★ Terantiga, via De Iani 11, tel. 051 6957234
★ Maraz Sole e Mare, P.zza Vittorio Veneto 1, tel. 051 941236

Altre strutture ricettive

Antico Convento Cappuccini, via Viara 10, tel. 051 6951471
Ippocampus, via Mori 2300, tel. 051 946831

Agriturismo

Colombara, via Emilia Levante 2866, tel. 051 942095
Rio Rosso, via Cà Venturoli 1948, tel. 051 6957043
Rio Soglia, via Montecalderaro 575/g, tel. 051 6957097
S. Martino, via Tanari 7493, tel. 051 949766
Villaggio della Salute Più, loc. S.Clemente, tel. 051 929791
Vinea Regum Via Croce Conta, 1520 - tel. 051 940707

Bed & Breakfast

B&B Borro di Sopra, via Paniga 1870, tel. 051 942444
B&B di Laura Pulga, via Repubblica 69, tel. 051 941166
B&B Il Borgo, via Liano 4231, tel. 051 6942042
B&B La Corte degli Struzzi, via Corlo 120, tel. 051 944191
B&B Le Betulle, via San Giovanni 5900, tel. 051 949454
B&B La Fratta, via Scorticheto 2901/b, tel. 051 940158
B&B Casa Clara Via Berlinguer, 101 tel. 051 948851
B&B Ca' Priva Via Ca' Priva 53, tel. 051 944334

2. Primo convegno «Didattica della matematica ieri, oggi e domani»

Per insegnanti di tutti gli ordini scolastici

Comune di Forlì, Assessorato alle Politiche Educative e Formative,
Ufficio Scolastico Regionale per l'Emilia Romagna
Ufficio Scolastico Provinciale di Forlì e Cesena,
Centro Documentazione Apprendimenti

In collaborazione con il *Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica* del Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna

Forlì, Sabato 22 settembre 2007
Ingresso gratuito

Programma

8.45-9.00	Accoglienza convegnisti
9.00-9.30	**Saluto delle Autorità e Apertura dei lavori - Hotel della Città** **Loretta Lega**, Assessore alle Politiche Educative e Formative **Gian Luigi Spada**, Dirigente USP Forlì-Cesena **Anna Maria Benini**, Ufficio Scolastico Regionale per l'Emilia-Romagna **Graziana Neri**, Dirigente Scolastico 4º Circolo di Forlì (coordinatore del convegno)
9.30-9.45	**Gruppo «Forlìmatica»** «Le motivazioni a monte di questa scelta»
9.45-10.30	**Bruno D'Amore**, Docente di Didattica della Matematica, Università di Bologna, Bogotà, Bressanone e ASP di Locarno «Didattica della matematica ieri, oggi e domani»
10.30-11.15	**Martha Isabel Fandiño Pinilla**, Docente di Didattica della Matematica, Università di Bressanone, Bologna e ASP di Locarno «Basi etiche per la storia della matematica»
11.15 -11.30	pausa caffé
11.30-12.00	**Ines Marazzani**, NRD Bologna, SVT Università di Bologna «Interrelazioni nel sistema didattico»
12.00-12.30	**Lorella Campolucci e Danila Maori**, Gruppo «Matematica in rete», Corinaldo (AN), NRD Bologna «Dall'infanzia alla scuola secondaria di primo grado: esperienze in continuità»
12.30	Pausa pranzo

13.30-15.00	Visita guidata alla mostra «Matematica e dintorni» – Palazzo Albertini[2]
15.15-15.45	Hotel della Città **George Santi,** NRD Bologna «Sistemi di rappresentazione e apprendimento della matematica»
15.45-16.30	**Silvia Sbaragli,** Docente di Didattica della Matematica, Università di Bressanone, Bologna e ASP di Locarno «Il delicato processo di insegnamento-apprendimento della matematica»
16.30-17.15	**Gianfranco Arrigo,** NRD Bologna, ASP di Locarno «Perché educare da subito al pensiero probabilistico?»
17.15-17.30	pausa caffé
17.30-17.50	Intervento teatrale
17.50-18.00	Chiusura dei lavori da parte delle Autorità
18.15	Incontro con l'Autore. Aperto a tutta la cittadinanza – Sala Auditorium Bruno D'Amore: «Leonardo e la matematica»

Informazioni e preiscrizioni

È gradita la prenotazione via fax al numero: 0543 458861 (Segreteria 4º Circolo Didattico, Forlì) o tramite email: diego.fabbri4@virgilio.it.

Sarà possibile iscriversi anche la mattina del convegno, dalle 8.45 alle 9.00, presso la segreteria del convegno - sala dell'Hotel della Città et de la Ville.

Indirizzi delle sedi del convegno

Ubicate nel centro storico della città vicino alla stazione ferroviaria.

Conferenze: Hotel della Città et de la Ville, corso della Repubblica n. 117/119. **Mostre**: Palazzo Albertini, Piazza Saffi n. 50. Le mostre rimarranno aperte il 22 settembre dalle 13.30 alle 18.00 e dal 24 al 26 settembre nel seguente orario: 9.00-12.00; 15.00-18.00. **Incontro con Bruno D'Amore**: sala Auditorium via Flavio Biondo n. 16

Sponsor della manifestazione

- Comune di Forlì, Assessorato alle Politiche Educative e Formative
- Ufficio Scolastico Regionale per l'Emilia Romagna
- Ufficio Scolastico Provinciale di Forlì e Cesena
- Fondazione Cassa di Risparmio di Forlì
- Centro Documentazione Apprendimenti
- Centro Didattico Romagnolo
- Oreficeria: "Il Crogiolo". Arte orafa.
- Casa Editrice: Tecnodid di Napoli
- Litografia Filograf

2. La mostra è stata realizzata dalle seguenti scuole di Forlì: 1º, 2º, 6º Circolo Didattico; Scuole Secondarie di primo grado: «Zangheri», «Maroncelli», «Palmezzano»; Istituti Comprensivi di Rocca San Casciano e Castrocaro, coordinate dal 4º Circolo Didattico e con la supervisione di Silvia Sbaragli.

3. Recensioni

Gianfranco Arrigo

Martha Isabel Fandiño Pinilla e Bruno D'Amore – Area e perimetro. Aspetti concettuali e didattici – Erikson, Gardolo (TN), 2006, pp. 112, 18 €

Il libro nasce da una ricerca condotta dagli autori negli anni 2004 e 2005 e pubblicata sotto forma di articolo dapprima in italiano sulla rivista *La matematica e la sua didattica* e in seguito in spagnolo su *Relime*.

La ricerca è stata condotta presso il Nucleo di Ricerca in Didattica del Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna, nell'ambito del Programma di Ricerca finanziato dall'Università di Bologna: «Aspetti metodologici (teorici ed empirici) della formazione iniziale e in servizio degli insegnanti di matematica di ogni livello scolastico». Hanno collaborato numerosi ricercatori del nucleo bolognese, tutti citati nella prefazione. Si è costatato che alcuni insegnanti (e dunque molti studenti) hanno serie difficoltà a concettualizzare le relazioni esistenti tra area e perimetro. La cosa ha quasi dell'incredibile, perché si tratta di temi che normalmente vengono studiati già a partire dalla scuola primaria. Gli autori fanno notare che *finché si tratta di dire che il perimetro di una figura si misura in unità lineari, per esempio in cm, mentre l'area si misura in unità superficiali, per esempio in cm^2, non c'è problema; finché, si tratta di applicare formule per la determinazione di tali misure, pure, non c'è problema... ma, non appena le cose si complicano o se si tratta di mettere in relazione perimetro e area di una stessa figura, allora si va incontro a sorprese; se poi le figure sono in evoluzione o su di esse si devono compiere trasformazioni, allora la cosa può diventare di una complessità imprevista.*

Questi risultati hanno stimolato una lunga riflessione di carattere concettuale, della quale il libro riporta alcuni elementi iniziali. In sostanza si mette in risalto il fatto che il classico triangolo della didattica – sapere (accademico), insegnante, allievo – non è più pertinente se l'insegnante non possiede il sapere accademico, cioè se, come, purtroppo accade con una certa frequenza, la competenza scientifica dell'insegnante arriva solo fino al livello al quale deve portare l'allievo. In queste condizioni, l'insegnante non trasforma il sapere accademico in un sapere da insegnare (o da far apprendere), ma insegna tutto ciò che sa. Una conseguenza importante di questo fenomeno è che occorre rivedere tutto l'impianto di formazione iniziale degli insegnanti e prevedere ampi spazi di apprendimento disciplinare. Finora si è presupposto che tale formazione fosse già posseduta dagli studenti che si avviano a diventare insegnanti.

Queste poche righe dovrebbero bastare per far capire ai nostri lettori l'importanza che assume tale opera. Essa va ben al di là del problema descritto delle relazioni tra area e perimetro.

Giorgio T. Bagni – Linguaggio, Storia e Didattica della Matematica – Pitagora, Bologna, 2006, pp. 295, 22 €

Secondo il filosofo illuminista tedesco Christian Wolff (1679-1754) i gradi della conoscenza matematica sono tre: comprensione e accettazione di una «verità» enunciata da altri (definizioni, enunciati dei teoremi,…), conoscenza critica e argomentata (studio delle dimostrazioni), aspetto creativo. Chi si riconosce in questa descrizione farà bene a leggere l'opera di Bagni, perché potrà intraprendere una nuova riflessione, che lo porterà lontano dalla visione del filosofo tedesco.

Secondo Sitia, la didattica della matematica è una disciplina specifica, caratterizzata da notevole complessità, che può essere impostata teoricamente e interpretata con riferimento a diversi aspetti. Nel 1980, William Higginson ha proposto un modello schematico, che mostra l'influenza delle varie componenti culturali nella didattica della matematica; in particolare, in base a questo modello, le domande fondamentali che gli insegnanti di matematica devono porsi sono: che cosa si insegna (riflessione sulla matematica), perché si insegna (riflessione filosofica), a chi e dove si insegna (riflessione psicologica), quando e come si insegna (riflessione sociologica).

Da allora, lo sappiamo, si è fatta tanta strada: la didattica della matematica è esplosa: per dirla con D'Amore, da una didattica A (*ars docendi*) centrata sull'insegnamento, si è passati a una didattica B (epistemologia dell'apprendimento) e da poco si è iniziata una nuova fase di ricerca didattica (epistemologia dell'insegnante), detta didattica C.

L'autore ci fa presente l'importanza di uno sfondo storico. La posizione storicistica, afferma l'autore, non deve però essere assolutizzata. Un'apertura di questo genere coinvolge certamente l'epistemologia, uno dei grandi temi della riflessione filosofica moderna e contemporanea: quando si parla di didattica, dunque dei processi di insegnamento-apprendimento, ci si può riferire all'acquisizione della conoscenza e di conseguenza all'epistemologia. L'autore si allinea all'interpretazione anglo-americana del termine «epistemologia», quale sinonimo di «gnoseologia» e quindi nel senso di *Erkenntnistheorie*, distanziandosi dall'interpretazione spesso usata in italiano di «filosofia della scienza».

La riflessione sviluppata dall'autore mira a evidenziare alcuni dei collegamenti che importanti posizioni filosofiche (ad esempio l'ermeneutica, definita da G. Vattimo «come quella filosofia che si sviluppa lungo l'asse Heidegger Gadamer») hanno con la didattica della matematica e a proporre agli studiosi di didattica un panorama stimolante di idee e di considerazioni. Qui sta l'alto valore culturale della nuova fatica editoriale di Giorgio T. Bagni.

Rosetta Zan – Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire – Springer Verlag Italia, Milano, 2007, pp. 306, 22.95 €

Nessun altro libro potrebbe caratterizzare l'autore come questo. Rosetta Zan si è sempre dedicata alle problematiche inerenti alla difficoltà in matematica. L'autrice si rivolge a chi insegna matematica, dalle elementari all'università: anche questo è un segnale importante e un monito a chi crede che nelle scuole superiori e all'università non ci si deve preoccupare dell'apprendimento e men che meno delle sue problematiche.

L'autrice, che è ricercatrice, sottolinea l'importanza del ruolo di ricercatore, che gode di opportunità che in genere non ha l'insegnante: soprattutto tempo e risorse per cercare soluzioni ai vari problemi. Alla Zan va dato il merito di essere riuscita a spingere la riflessione sulle difficoltà verso una generalizzazione che le permette di render conto contemporaneamente di una varietà di fenomeni.

Le ricerche specifiche settoriali (aritmetica, algebra, analisi, geometria, probabilità) come pure quelle relative a certe abilità trasversali (dimostrazione, problem solving, ...) appaiono in genere poco interessate a spiegare alcuni comportamenti degli allievi – peraltro diffusi – quali rispondere a caso o rinunciare a rispondere, considerati poco significativi dal punto di vista della matematica. Invece è proprio davanti a questi comportamenti che l'insegnante si sente maggiormente disarmato e frustrato. In questo lavoro l'autrice si è proposta di riorganizzare in un unico discorso, fortemente ancorato alla pratica dell'insegnamento della matematica, le risposte che via via ha trovato o costruito nel percorso personale di ricerca, così da poter condividere con altri idee e strumenti che nella sua esperienza ha trovato efficaci.

Ciò che espone è certamente un punto di vista parziale: può quindi completare, e non sostituire, altri punti di vista. Quello delle difficoltà in matematica, e più in generale dell'apprendimento, è infatti un problema complesso: non ha come oggetto di studio un fenomeno fisico circoscritto, ma persone (allievi, insegnanti) che interagiscono in un contesto.

Il tema trattato è indirizzato in primo luogo agli insegnanti e agli allievi, che sono i protagonisti dell'apprendimento, e che più di ogni altro possono agire per modificare certe situazioni di difficoltà. Più in generale può interessare chiunque abbia a che fare con l'insegnamento e l'apprendimento della matematica, come ricercatori e formatori; il modo in cui il tema viene trattato poi può dare spunti di riflessione anche a insegnanti o formatori di discipline diverse. La lettura è sicuramente impegnativa, ma stimolante e arricchente: per qualcuno potrebbe significare un punto di svolta della propria filosofia didattica. Il libro andrebbe letto con calma e serenità: per esempio durante le vacanze estive.

Nando Geronimi (a cura di) – Giochi matematici del medioevo – Paravia Bruno Mondadori, Milano, 2006, pp. 148, 12.50 €

È un simpaticissimo libretto tascabile, che propone una raccolta di 145 problemi matematici medievali… molto gustosi, tutti tratti dal *Liber Abaci* di Leonardo Pisano, pazientemente scelti da Nando Geronimi, responsabile delle attività legate ai Giochi matematici del Centro Pristem dell'Università Luigi Bocconi di Milano. Molto interessante risulta anche la lettura della Prefazione di Pietro Nastasi, che colloca l'attività matematica medievale in un contesto storico universale. Mentre l'Europa viveva i secoli bui, Indiani e Arabi coltivavano la scienza. Ma, al sorgere dei comuni e della grande attività commerciale che questi hanno esercitato mettendosi in relazione con i popoli di tutto il mondo conosciuto, sono stati soprattutto i mercanti italiani a portare in patria da terre lontane, con le droghe e l'oro, anche le idee migliori di tutti i popoli. Uno di questi «importatori di cultura» fu appunto Leonardo Pisano, detto il Fibonacci, considerato uno dei più grandi matematici medievali. A questo punto, non c'è più nulla da aggiungere: gli insegnanti sensibili agli aspetti storici e culturali della matematica hanno la possibilità, acquistando questo libretto, di arricchire la propria raccolta di spunti didattici, di far provare ai propri allievi lo spirito di quei tempi e, perché no, di infondere qualche nuova passione.

Progetto grafico
Bruno Monguzzi
Prestampa
Taiana
Stampa
Veladini

Redazione
Laboratorio di didattica della matematica
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera

Telefono
091 814 18 21/22/24
Fax
091 814 18 19
a.bdm@ticino.com

Amministrazione
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera
Fax
091 814 18 19

Esce due volte all'anno
a maggio e a dicembre

Abbonamento annuo
Sfr. 30.–
€ 16

Bollettino dei docenti di matematica
54

In questo numero: la Bottega di Eulero, di G. Arrigo e G. Mainini, una rassegna di situazioni matematiche ispirate all'opera del grande matematico svizzero; un contributo didattico di O. Foà-Häusermann; la presentazione del concorso matematico Kangourou; nella bricolla, due contributi di A. Steiner e di L. Bellini; il quiz di A. Frapolli; segnalazioni e recensioni.

ISBN 88-86486-62-6
Fr. 18.–

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport