A cura
del Laboratorio di didattica della matematica

Bollettino dei docenti di matematica

55

Dicembre
2007

Ufficio
dell'insegnamento medio
Centro
didattico cantonale

Bollettino
dei docenti di matematica
55

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport

ISBN 88-86486-55-3

Bollettino dei docenti di matematica 55

Dicembre
2007

Ufficio dell'insegnamento medio
Centro didattico cantonale

Prefazione

Come annunciato nella prefazione del numero 54, questa volta la rivista offre un mosaico di contributi specialistici su Leonhard Euler. Agli autori – matematici, storici, filosofi, epistemologi, didatti e insegnanti – è stata data la consegna di scrivere un testo che testimoniasse come il pensiero del grande matematico svizzero sia ancora presente nelle diverse e svariate attività che concernono la matematica del nostro tempo. Ciascuno ha scelto le tematiche più vicine ai propri interessi professionali, di insegnanti, di ricercatori, o anche semplicemente di cultori della nostra disciplina. A tutti giungano dalla Redazione sinceri complimenti e il più sentito ringraziamento.

Di fronte all'alta qualità dei testi e all'impossibilità evidente di mantenere l'organizzazione abituale del Bollettino, per la redazione è stato difficile ordinare gli articoli. Si è optato per un percorso dal generale al particolare, cioè da articoli che concernono, oltre la matematica, anche riflessioni di natura storica, filosofica, epistemologica o didattico-teorica a contributi matematici specialistici, per poi terminare con proposte più vicine all'ingegneria didattica. Il criterio però non dev'essere interpretato in senso stretto, perché, in realtà, ogni contributo riguarda più tematiche.

Si inizia con l'articolo simpatico e di ampio valore culturale di B. D'Amore e M.I. Fandiño Pinilla. L'opera di Euler «Lettres à une Princesse d'Allemagne» ha affascinato parecchi studiosi: ce ne parla brevemente S.D. Chatterji. In queste pagine Euler presenta anche la famosa rappresentazione grafica degli insiemi, sulla quale fa perno l'intervento di G.T. Bagni, appassionato studioso di storia e filosofia della matematica. Con particolare emozione annunciamo la presenza di uno scritto di J.-C. Pont, matematico e storico delle scienze, compagno di studi di G. Arrigo all'ETH di Zurigo e – come dice lui – di grandi battaglie: il suo scritto è particolarmente destinato agli insegnanti. In queste occasioni è anche bello creare relazioni interpersonali: ecco allora nascere, quasi per caso, uno scritto a tre mani appartenti a due felici pensionati, A. Steiner e G. Arrigo, e a un matematico in attività a Ginevra, M. Gander. I tre presentano una riflessione sui poliedri semiregolari. S. Maracchia ci regala l'articolo che ha scritto a margine della conferenza tenuta a Lugano la scorsa primavera. Un altro pensionato, il bolognese G.C. Barozzi, che dice di non occuparsi più di matematica, ha saputo scrivere un ottimo articolo che ci mostra il forte legame esistente tra alcuni teoremi di teoria dei numeri elaborati da Euler e le moderne tecniche di crittografia.

I due articoli seguenti si situano nella fascia specificamente matematica, dedicata ai nostri lettori più addentro alla teoria matematica e che spesso la nostra pubblicazione dimentica. Il primo è firmato dagli amici milanesi O. D'Antona ed E. Munarini e tratta delle funzioni aritmetiche e serie di Dirichlet e presenta importanti risultati. L'altro è di M. Cerasoli, il quale ce l'ha messa tutta per trovare una relazione significativa tra la matematica di Euler e la moderna teoria probabilistica.

Nell'ultima parte troviamo articoli di varia natura, ma fondamentalmente pensati per l'insegnamento. Il primo contributo è firmato da E. Delucchi e M.D. Froidcoeur ed è stato possibile realizzarlo solo grazie alle moderne tecnologie, se si pensa che i due autori operano uno in Ticino e l'altro negli USA e che il lavoro è stato concluso in tempi brevi. Qualcuno, leggendo il titolo, potrebbe pensare che sia successo un errore informatico: no, è proprio «+&C». Si continua poi con G. Mainini che per l'occasione ha rivestito i panni di eccellente traduttore dal latino e ci presenta, argutamente commentata, la risoluzione di Euler del famoso problema dei ponti di Königsberg. È poi la volta di J. Sesiano, friburghese, che ci illustra l'affascinante problema del percorso del cavallo sulla scacchiera. R. Moresi prende l'ispirazione dai lavori di Euler sulle serie di potenze per rielaborare la teoria delle rendite, uno dei contenuti tipici dell'insegnamento della matematica negli istituti commerciali. Infine M. Impedovo si occupa dell'algoritmo di Eulero per la risoluzione delle equazioni differenziali e dei successivi raffinamenti, mostrando anche come sia possibile proporre agli studenti di applicare queste tecniche di calcolo numerico mediante un foglio elettronico.

Si chiude con il quiz numero 38 di Aldo Frapolli, pure ispirato al grande Leonhard e con una gustosa curiosità.

1. Leonhard Euler, maestro di epistemologia e linguaggio

A 300 anni dalla nascita di Leonhard Euler,
a 246 anni dalle Lettere,
per i 70 anni di Carlos E. Vasco

Bruno D'Amore, Martha Isabel Fandiño Pinilla[1]

In this short paper we want show, by means of three of the famous Lettres of Euler addressed to a … princess, as the swuiss mathematic genius ha… a storng interest about questions connected to that we now name epistemology and to languages thoery; and as actitude of him abous this kinds aren't completely classic, us is normally suggest.

1. Euler

Abbiamo provato a stilare un elenco di tutte le discipline che, in senso moderno, costituiscono la matematica, allo scopo di trovarne una nella quale Euler non si sia mai cimentato, non abbia dato contributi; non l'abbiamo trovata. Tra quelle, poche, nelle quali la sua opera è minima, pesa il ricordo dei numerosissimi manoscritti, ancora non consegnati al tipografo, finiti in cenere nel famoso incendio di S. Pietroburgo del 1771 che vide, tra le vittime, la casa del Nostro.

Abbiamo allora provato a stilare un elenco delle principali discipline non matematiche che costituivano la cultura più elevata di quel secolo XVIII che potremmo definire la «seconda fucina delle idee», dopo il Rinascimento: lingue, teologia, filosofia, fisica, astronomia, idraulica, chimica, linguaggi, scienze naturali, …, allo scopo di trovarne una nella quale Euler non si sia mai cimentato, o non abbia saputo, con la sua superba intuizione, apportare qualche contributo di novità; non l'abbiamo trovata.

Se tutto il mondo è d'accordo da oltre due secoli e mezzo che Euler sia stato uno dei più grandi creatori di tutti i tempi della matematica intesa in senso moderno, è anche vero che il suo spirito curioso, indagatore, sottile e penetrante riuscì ad essere speso a tutto campo, come si suol dire: a 360 gradi.

Ora, tutti sanno della sua enorme produzione matematica, ma una delle sue opere di maggior successo editoriale, non è altro che una raccolta di lettere, forse la più famosa raccolta di lettere del mondo.

Siamo ben consci che si tratta di qualche cosa di secondario, rispetto alle titaniche imprese creatrici che l'hanno visto protagonista assoluto; sappiamo anche che tale opera è ben nota a tutti e che è stata esplorata, chiosata, studiata, da mille ed uno critici di tutto il mondo; ma, tuttavia, è su questa e su alcune sue peculiarità che abbiamo l'ardire di voler ancora indagare, noi, modesti studiosi del 2000, per vedere se

1. NRD, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna (Italia); Università di Bolzano (Italia); Alta Scuola Pedagogica di Locarno (Svizzera); Mescud, Università Distrital di Bogotà (Colombia).damore@dm.unibo.it - www.dm.unibo.it/rsddm

qualche cosa che non s'è mostrata finora, si possa rivelare ora, con la capacità di analisi che ogni giorno cresce e si rinnova.

2. Lettres

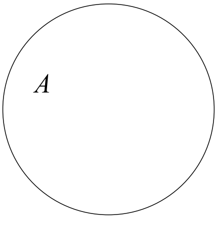
Si tratta delle *Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de Physique & de Philosophie*, una raccolta cronologicamente ordinata di ben 234 lettere tutte datate, scritte da Berlino tra il 1760 ed il 1762 alla giovane figlia del margravio regnante di Brandeburgo-Schwedt, Sophie Friederike Charlotte Leopoldine (che sarebbe poi diventata principessa di Anhalt-Dessau) allo scopo di istruirla in francese, fisica, filosofia, matematica, scienze naturali, astronomia, logica, …

Queste straordinarie lettere, brevi ma sempre molto dense, a parte l'essere uno spettacolo di chiarezza e concisione, toccano tutti i principali problemi scientifici dell'epoca, ma in modo che, realmente, un giovane interessato possa trarne giovamento.

Esse ebbero, dal punto di vista editoriale, una fortuna straordinaria; pubblicate una prima volta nel 1768, lo furono a più riprese in varie lingue e la loro fortuna ancora non si è spenta tanto che, in questo 2007, se ne rinnovano le edizioni e le analisi critiche in tante lingue (anche in italiano: Euler, 1768-2007).

Può essere didatticamente interessante e curioso sapere che in una di esse, la 102, per spiegare alla giovane nobile allieva i sillogismi di Aristotele, per la prima volta in assoluto, stando almeno ai documenti finora noti, Euler usò quelli che oggi si chiamano «diagrammi di Euler-Venn», cioè inserì dentro circoli tracciati direttamente a penna sui fogli manoscritti dei simboli per indicare raccolte o insiemi come si trattasse di un tutto unico.

Per esempio, Euler indica esplicitamente con:



l'insieme di tutti gli uomini. (Diagrammi per alcuni versi simili erano stati utilizzati da G.W. Leibniz, ma sono stati resi pubblici solo all'inizio del XX secolo). Su questo aspetto, si veda Bagni (2007).

Queste lettere rappresentano ancora oggi un esempio straordinario di scrittura scientifica per un lettore non specialista; le scelte stilistiche adottate rivelano una perizia non comune ed un'attenzione davvero notevole per il lettore.

Noi fisseremo brevemente la nostra attenzione solo su due temi, dato che essi sono estremamente dibattuti nella ricerca critica contemporanea, specie nel campo a noi più caro, la didattica della matematica; intendiamo dire: epistemologia e linguaggio.

L'opera citata di Euler è così ricca di suggestioni epistemologiche e linguistiche che lo spazio occorrente per una esauriente analisi richiederebbe ben altro spazio che questo. Dunque, ci limiteremo qui solo ad una minima analisi di tre lettere, scritte *nell'arco di una stessa settimana*, per dare almeno l'idea della complessità dei temi trattati, della accentuazione della loro trattazione (non squisitamente classica, come di solito si ritiene) e della incredibile semplicità linguista ed efficacia dell'esposizione.

3. Epistemologia

Dalla *Lettera* n. 100, 7 febbraio 1761:

> «I sensi ci rappresentano solo oggetti che esistono attualmente fuori di noi, e le idee sensibili si riferiscono tutte a questi oggetti; ma da queste idee sensibili l'anima si forma un gran numero di altre idee che, pur traendo la loro origine dalle prime, non rappresentano però delle cose che esistono realmente. Per esempio, quando vedo la luna piena, se fisso la mia attenzione esclusivamente sul suo contorno, mi formo l'idea della circolarità, ma non potrei dire che la circolarità esiste di per se stessa. La luna è sì rotonda, ma tale forma non esiste separatamente dalla luna. Lo stesso vale per tutte le altre figure (…). Le idee dei numeri hanno un'origine del tutto simile: avendo visto due o tre persone o altri oggetti, l'anima se ne forma l'idea del due o del tre, che non è più legata a quelle persone (…). E per ritornare alle figure, Vostra Altezza può ben formarsi l'idea di un poligono, per esempio, di 1761 lati, quantunque non abbia mai visto un oggetto reale con una simile figura [forma]; e può persino darsi che un oggetto simile non sia mai esistito (…)»

La differenza tra gli oggetti concreti, reali, esistenti al di fuori di noi che cadono sotto i nostri sensi e quelli ottenibili dalla nostra ragione, ricorda molto da vicino la duplice verità parmenidea che distingue *doxa* da *aletheia*, verità sensibile e verità di ragione. Questa distinzione è la base stessa della matematica e della sua specifica realtà. La rotondità della luna non le è specifica e dunque non caratterizza l'oggetto sensibile «luna», ma a sua volta è un'idea di pensiero del quale la nostra ragione si appropria e lo fa diventare oggetto a sua volta, anche se non più sensibile.

Ora, il platonismo classico ha avuto bisogno di creare un universo apposito per questi oggetti di secondo tipo, mentre nel realismo non ingenuo di Euler di questo non v'è traccia. Si può pensare ad una dualità assai più moderna che distingue gli oggetti della matematica opponendoli agli oggetti della realtà, ma in senso molto sofisticato, più di quello platonico. Infatti, gli oggetti matematici esemplificati, come la circolarità ed il due, sono tratti da oggetti concreti nella loro sensibilità evidente, mentre il poligono di 1761 lati è una creazione autonoma del mondo matematico che non ha bisogno dello stesso processo. O, meglio, una volta avviato il processo di reificazione degli oggetti matematici, nato come detto, dal passaggio tra doxa e aletheia, tale processo può proseguire da solo, senza più bisogno dell'appoggio ingenuo del sensibile. Esiste un oggetto reale (nel realismo ingenuo) che ha 1761 lati? Non lo sappiamo, forse no. Ma esso è ugualmente concepibile dalla nostra ragione nel mondo degli oggetti matematici, dunque in tale mondo *esiste*.

Il dibattito attuale su che cosa intendere con «oggetto matematico» è oggi acceso ed ha fatto passi avanti da gigante; in una visione pragmatista delle teorie filosofiche al riguardo: *«Gli oggetti matematici devono essere considerati come simboli di unità culturali, emergenti da un sistema di usi legati alle attività matematiche che realizzano gruppi di persone e che dunque evolvono con il trascorrere del tempo»* (D'Amore, Godino, 2006), dove per *oggetto matematico* va inteso tutto ciò che è indicato, segnalato, nominato quando si costruisce, si comunica o si apprende matematica [l'idea è tratta da Blumer (1969)].

Ora, Euler cita spesso l'anima come quel «luogo» al quale fare riferimento quando si esce dalla sensibilità; noi diciamo ragione, intelletto, o facciamo ricorso ad altri «luoghi». Su questo ci sarebbe ancora parecchio da dire.

Seguito della stessa *Lettera*:

> «(…) L'anima dispiega in ciò una nuova facoltà, chiamata **astrazione**, che si ha quando l'anima fissa la propria attenzione esclusivamente su una quantità o qualità dell'oggetto da cui la separa, considerandola come se non fosse più unita ad esso. (…) Se vedo un abito rosso e fisso la mia attenzione unicamente sul colore, mi formo allora l'idea del rosso, separata dall'abito (…) Tali idee, acquisite per astrazione, sono chiamate **nozioni** per distinguerle dalle idee sensibili che ci rappresentano cose realmente esistenti. (…) Ma vi è ancora un'altra specie di nozioni, che si formano per astrazione e che forniscono all'anima i più importanti soggetti per dispiegarvi le sue forze: sono le idee dei **generi** e delle **specie**. Quando vedo un pero, un ciliegio, un melo, una quercia, un abete eccetera, ho una serie di idee diverse le une dalle altre; tuttavia vi noto molte cose che sono loro comuni, come il tronco, i rami e le radici; io mi soffermo unicamente a quelle cose che le differenti idee hanno in comune e chiamo albero l'oggetto a cui queste qualità convengono. (…)»

Ci sono vari commenti possibili, ma ne faremo due soli.

Il primo. *Astrazione* ha tanti significati, nel linguaggio quotidiano ed in matematica; quello usato da Euler sembra essere vicino al linguaggio quotidiano: vediamo una cosa che ha varie proprietà, un cubo di legno rosso di 10 cm di spigolo, e ci si dice: Questo è un cubo. Abbiamo tutto il diritto, da principianti, di capire che con quella parola, «cubo», si intende denominare tutte le cose rosse. Di per sé, «cubo» non indica questa o quella proprietà, la forma il colore, la misura, il materiale; per astrarre, da questo punto di vista, abbiamo bisogno di più ricorsi all'ostensione, alla deittica; ci si deve mostrare un nuovo cubo, di ferro, nero, con lo spigolo di 20 cm e ci si deve autoritariamente dire nuovamente: Questo è un cubo. A questo punto possiamo creare l'idea astratta di «cubo», indipendente dal colore eccetera. Ma se abbiamo già l'idea di vestito e vediamo un vestito rosso, allora sì… Insomma, la cosa non è così semplice come la delinea Euler perché l'astrazione si presenta sotto diverse forme.

Altro commento riguarda la distinzione tra «idee sensibili», che fanno riferimento agli oggetti che cadono sotto i sensi, e «nozioni», ottenute per astrazione. Possono anche avere lo stesso nome: «rosso» come aggettivo qualificativo riferito ad un oggetto che la visione ci permette di vedere come rosso; «rosso» come nome astratto comune che ci permette di aggregare in un'unica raccolta gli oggetti di colore rosso, restituendoci però una nozione, la nozione di «rosso» che non è rossa. Sono questi ultimi usi che danno luogo a generi e specie, che Euler considera quasi sinonimi.

In matematica, questi due aspetti sono importantissimi per comprendere l'apprendimento concettuale; da un punto di vista attuale, il dibattito sulla costruzione concettuale è oggi violentissimo. Come spunto di partenza, si veda D'Amore (1999) e D'Amore e Fandiño Pinilla (2001, 2007).

4. Linguaggio

Dalla *Lettera* n. 101, 10 febbraio 1761 (tre giorni dopo):

«(…) nelle lingue non abbiamo quasi assolutamente parole il cui significato sia legato a qualche oggetto individuale. Se tutti i ciliegi che si trovano in una contrada avessero ciascuno il proprio nome, e così tutti i peri, e in generale tutti gli altri alberi, qual mostruoso linguaggio non ne verrebbe fuori? (…) Gli uomini hanno originariamente imposto a tutti gli oggetti individuali certi nomi per servirsene come segni; le parole di una lingua significano nozioni generali e solo raramente se ne troverà uno che indichi un solo individuo. Il nome di **Alessandro il Grande** conviene a una sola persona, ma è un nome composto. Vi sono mille Alessandri e l'attributo **grande** si riferisce a un'infinità di cose (…). Gli oggetti dei nostri pensieri non sono tanto le cose stesse, quanto le parole con cui queste cose sono indicate nella lingua. Questo contribuisce molto a facilitare la nostra capacità di pensare. Difatti qual è l'idea che si connette per esempio a queste parole, **virtù**, **libertà**, **bontà** eccetera? Non è certamente un'immagine sensibile; ma l'anima, una volta formatasi le nozioni astratte che corrispondono a queste parole, sostituisce in seguito nei propri pensieri queste parole alle cose che ne sono indicate. (…) Vostra Altezza giudichi ora di quale utilità ci sia la lingua per condurre i nostri propri pensieri: senza una lingua noi stessi non saremmo quasi in grado di pensare».

Solo una piccola chiosa; «triangolo» è un nome generico che indica il carattere comune delle forme triangolari che cadono sotto i nostri sensi, ma diventa nome proprio ottenuto facendo astrazione e facendo riferimento ad uno specifico oggetto della matematica. In questo senso è nome proprio, dato che indica, tra i poligoni, quelli che hanno 3 lati. Ma se desideriamo specificare di quale triangolo stiamo parlando, lo dobbiamo identificare, per esempio dando tre nomi ai vertici: ABC. Il triangolo ABC così determinato è un oggetto specifico, un individuo, o a sua volta un elemento generico? Su questo dibattito si veda Speranza (1997).

Dalla *Lettera* n. 102, 14 febbraio 1761 (quattro giorni dopo, dunque a una settimana dalla n. 100):

«Vostra Altezza ha visto quanto il linguaggio sia necessario agli uomini, non solo per comunicarsi le loro opinioni e i loro pensieri, ma anche per coltivare il loro proprio spirito, e estendere le loro conoscenze. Se Adamo fosse stato lasciato solo nel Paradiso, sarebbe rimasto nella più profonda ignoranza senza il soccorso di una lingua. Il linguaggio gli sarebbe stato necessario, non tanto per indicare con certi segni gli oggetti individuali che avessero colpito i suoi sensi, ma soprattutto per indicare le nozioni generali che ne avrebbe formato per astrazione, affinché tali segni sostituissero nel suo spirito quelle stesse nozioni. (…) Da ciò Vostra Altezza comprende come una lingua possa essere più perfetta di un'altra: una lingua è sempre più perfetta quando è in grado di esprimere un maggior numero di nozioni generali, formate per astrazione. (…)»

Se Adamo fosse stato solo nell'Eden e non avesse avuto bisogno di comunicare con alcun altro essere umano, avrebbe potuto assegnare segni a ciascun oggetto nominabile, senza bisogno di astrazione. Ad ogni oggetto un segno e viceversa in una sorta di nominalizzazione univoca che non prevede raggruppamenti. Perché dire «albero» di fronte ad un pino e ad un ciliegio? A chi comunicare l'idea collettiva ottenuta per astrazione? E che cosa intendere per «segno»? Non certo una parola, né alcun altro oggetto linguistico. Forse solo un toponimo distintivo: questo qua e quello là. Una lingua perfetta, se di lingua abbiamo il coraggio di parlare. Tutto comincia quando sorge una comunità, anche solo due individui (vogliamo proseguire l'esempio iniziato da Euler e dire: Eva?), e comincia l'avventura comunicativa.

Esisterebbe la matematica senza comunicazione, dunque senza linguaggio comunicativo?

Per i realisti sì, per i pragmatisti no (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2001; D'Amore, Godino, 2006).

Sembra, diciamo *sembra*, che anche Euler adotti una visione pragmatista il che, per essere nel pieno del XVIII secolo, sarebbe una posizione assai prematura…

Ma forse questa interpretazione ricade in quelle che, per benevolenza verso gli Autori del passato che amiamo e stimiamo, noi moderni forziamo un po', per dare più autorità alle nostre stesse posizioni.

Bibliografia

Bagni G.T.
Storia della matematica. Vol. 2. Bologna: Pitagora, 1996.

Bagni G.T.
I diagrammi di Eulero: riflessioni didattiche sulla rappresentazione degli insiemi. *Bollettino dei docenti di matematica*. In questo stesso numero 55, 2007.

Bagni G.T., D'Amore B.
A trecento anni dalla nascita di Leonhard Euler. *Scuola Ticinese*. In corso di stampa.

Bell E.T.
I grandi matematici. Firenze: Sansoni. (Prima edizione: 1950), 1990.

Blumer H.
Symbolic interactionism. Perspective and method. Englewood Cliffs NJ: Prentice Hall. Usiamo l'ed. del 1982, 1969.

D'Amore B., Fandiño Pinilla MI.
Concepts et objects mathématiques. In: Gagatsis A. (ed) (2001). *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology*. Atti del Third Intensive Programme Socrates-Erasmus, Nicosia, Università di Cipro, 22 giugno-6 luglio 2001. Nicosia (Cipro): Intercollege. 111-130, 2001.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I.
How the sense of mathematical objects changes when their semiotic representations undergo treatment and conversion. *La matematica e la sua didattica*. Vol. 21, n. 1, pagg. 87-92. Atti del: Joint Meeting of UMI-SIMAI/SMAI-SMF: *Mathematics and its Applications*. Panel on Didactics of Mathematics. Dipartimento di Matematica, Università di Torino. 6 luglio 2006. ISSN: 1120-9968, 2007.

D'Amore B., Godino D.J.
Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*. 1, 9-38, 2006.

D'Amore B., Matteuzzi M.
Dal numero alla struttura. Bologna: Zanichelli, 1975.

Euler L.
Lettere a una principessa tedesca. Torino: Bollati Boringhieri. 2 volumi. Traduzione condotta su: Euler L. (1769). *Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de Physique & de Philosophie*. Lipsia: Mietau et Leipsic, presso Steidel et C. Volumi 1 e 2. Il vol. 3 apparve nel 1773. La I edizione in assoluto delle *Lettres* avvenne (in francese) a cura della Accademia imperiale delle Scienze di Pietroburgo, i primi due volumi del 1768, il terzo nel 1772. Le diverse edizioni, dunque, si incrociarono, ma quella della Accademia russa né oramai introvabile. La I edizione italiana è del 1787 (Napoli: Ferres, a cura dell'abate Oronzo Carnevale), 1768-2007.

Speranza F.
Scritti di epistemologia matematica. Bologna: Pitagora, 1997.

2. Le «Lettres à une Princesse d’Allemagne» di Leonhard Euler

Srishti-D.Chatterji[1]

The “Letters” are a suitable introduction to scientific thought, also for the general public. They are an interesting mixture of easy considerations about the fundamentals of astronomy, physics and logic, and about topics regarding the theory of optics, electricity and magnetism, with frequent philosophical excursions.

Nella gigantesca produzione scientifica di Leonhard Euler, le «Lettere a una Principessa di Germania su diversi temi di fisica e di filosofia (titolo originale: «Lettres à une Princesse d’Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie») occupano un posto molto speciale. È l’unica importante pubblicazione di divulgazione scientifica del grande matematico; scritte durante gli anni 1760-62 a Berlino per una giovane principessa, il cui padre, un parente del re di Prussia Federico il Grande, era amico di Euler, furono pubblicate in tre volumi solo negli anni 1768-1772 a Pietroburgo. Le «Lettere» ebbero subito un grande successo di pubblicazione; furono eseguite parecchie ristampe e traduzioni in diverse lingue (tedesco, russo, inglese, italiano, spagnolo,…), ciò che le rese famose in tutto il mondo. Una traduzione in lingua tedesca (controllata da Euler stesso) è stata pubblicata dalle edizioni Vieweg (Braunschweig,1988); il testo originale francese è stato ripubblicato dalle Presses Polytechniques et Universitaires Romandes (Lausanne, 2003), oltre che, ovviamente, nell’Opera Omnia, curata dalle edizioni Birkhäuser Verlag, volumi 11,12 della serie Tertia.

Ricordiamo brevemente che Euler (1707-1783) nacque a Basilea, fu attivo a Berlino dal 1741 al 1766 e a Pietroburgo dal 1727 al 1741 e dal 1766 al 1783.

Le 234 «Lettere» costituiscono un’interessante miscellanea di considerazioni elementari sui fondamenti dell’astronomia, della fisica e della logica e su questioni riguardanti le teorie dell’ottica, dell’elettricità e del magnetismo, con numerosi sconfinamenti nell’ambito della filosofia. È interessante notare che in esse il grande matematico evita intenzionalmente ogni formula matematica così come ogni considerazione di tipo algebrico; evidentemente voleva risparmiare alla principessa qualsiasi difficoltà matematica.

Le prime lettere (da 1 a 16) sono dedicate al concetto di velocità, alla propagazione del suono e alla teoria della musica; le successive (da 17 a 24) sono sull’ottica; quelle dalla 45 alla 79 sulla gravitazione; le lettere dalla 80 alla 132 su filosofia e logica; le ultime (dalla 133 alla 234) sono anch’esse dedicate alla fisica

1. Professore Emerito di matematica alla Scuola Politecnica Federale di Losanna.

(specialmente elettricità, magnetismo e ottica). Particolarmente interessante è la costruzione didattica di ogni argomento; Euler inizia con i concetti più semplici (per esempio distanza e velocità), per poi farli seguire da idee più complesse come la teoria della propagazione delle onde sonore nell'aria dalla quale ricava una spiegazione della teoria musicale: tutto ciò nelle prime sedici lettere; questa teoria delle onde diventa ben presto un modello della propagazione della luce nell'etere e da essa Euler deduce, nelle lettere dalla 17 alla 44, una descrizione della teoria del colore. A mio giudizio, le prime 79 lettere offrono, anche agli odierni principianti, una descrizione facilmente comprensibile della teoria della musica, dell'ottica e della gravitazione; particolarmente bella è la discussione (lettere 62-67) del fenomeno della bassa e dell'alta marea. Le lettere dall'80 alla 132, di stampo filosofico-polemico, sono di scarso interesse per un giovane lettore moderno; ne riparleremo più avanti. Per ora ci limitiamo a rilevare che nelle lettere dalla 101 alla 108 si trova una presentazione molto chiara della logica classica (che oggi chiameremmo meglio calcolo delle proposizioni) con l'aiuto dei cosiddetti diagrammi di Euler (in alcuni testi scolastici spesso detti diagrammi di Venn, in omaggio del logico inglese John Venn (1834-1923), posteriore a Euler). Con le ultime lettere (dalla 133 alla 234), Euler torna a considerazioni specificamente fisiche; accenniamo qui alle lettere dalla 138 alla 154 sull'elettricità, non solo per la sottile teoria (ovviamente non conforme alla fisica odierna), ma anche per le spiegazioni dei fenomeni del lampo e del tuono. Risulta particolarmente interessante anche ai nostri occhi l'esposizione elementare del problema della determinazione della longitudine e della latitudine (lettere dalla 155 alla 168), cosa molto importante per la navigazione già nel XVIII secolo. Le ultime lettere sono dedicate alla teoria del magnetismo (che oggi ha solo interesse storico) e all'ottica geometrica (con dettagliate descrizioni di lenti, telescopi e microscopi). In queste lettere, come del resto un po' dappertutto, possiamo ammirare le conoscenze tecniche dell'autore.

Le lettere filosofiche di Euler (in particolare quelle dalla 80 alla 132) sono state fortemente criticate da numerosi filosofi, forse anche in parte perché Euler tratta i filosofi con una certa ironia. Citiamo come esempio, dalla lettera 17:

> «Ma Cicerone ha già osservato che non si potrebbe pensare nulla di così assurdo, come ciò che i filosofi affermano».

Nelle parti dell'opera dedicate alla fisica (e in tutti i suoi scritti scientifici) Euler si mostra fine pensatore fondato sulla logica e sull'osservazione, che non si lascia influenzare da alcuna ipotesi di tipo idealistico-religioso. In questo senso Euler è stato uno scienziato moderno; ciò appare tanto più singolare se si pensa che Euler era un fedele credente nella religione riformata di suo padre. Come praticamente tutti i critici filosofici, anch'io trovo che la descrizione che Euler fa della teoria monadica è molto più comprensibile di altre, anche se so che Euler stesso non condivideva tale teoria.

In ultima analisi, le «Lettere» costituiscono anche per l'odierno cittadino medio una buona introduzione nel pensiero scientifico; il meglio sarebbe di distribuire queste lettere in fascicoletti tematici, da scegliere e leggere secondo i propri interessi. Lo stile elegante (soprattutto dell'originale francese) e l'interessante contenuto di queste «Lettere» non possono che procurare un grande piacere intellettuale.

3. I diagrammi di Eulero: riflessioni didattiche sulla rappresentazione degli insiemi

Giorgio T. Bagni[1]

As regards the visual representation of sets, Euler diagrams (1772) were introduced by Leonhard Euler (1707-1783) and reprised (1880-1881) by John Venn (1834-1923) in order to show relationships between sets. The fundamental expressions of Set Theory are rooted in the linguistic structure of subject-predicate, and Euler-Venn diagrams display this structure as points in a closed plane figure: these representations should not be seen as means to replace the meaning of the predicative structure. In this paper we propose and discuss an example in order to show that the traditional representation by Euler diagrams cannot be considered, from the educational viewpoint too, completely equivalent to verbal or symbolic predicative expressions.

1. La celebre rappresentazione euleriana

Nella didattica della teoria elementare degli insiemi si ricorre molto spesso alla rappresentazione mediante una figura chiusa ricondotta a Leonhard Euler (1707-1783) e a John Venn (1834-1923; si veda: Venn, 1880).

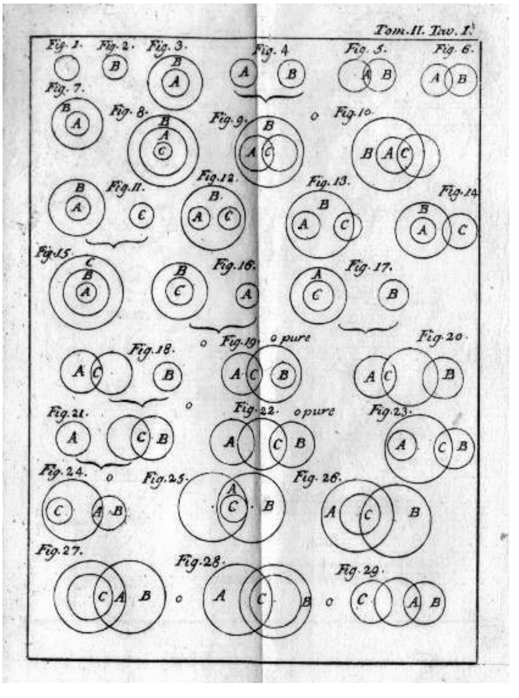


Figura 1

1. Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine (Italia).

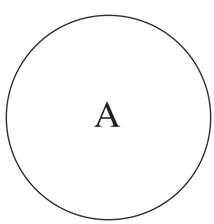
La rappresentazione euleriana per gli insiemi fece la sua comparsa nel 1772: nella Fig. 1 riportiamo una tavola tratta della prima edizione italiana dell'opera di Euler *Lettere ad una Principessa d'Alemagna* (Ferres, Napoli 1787; nella Fig. 2 il frontespizio del lavoro), la seconda edizione dopo quella originale in francese; tale opera riporta i contenuti di alcune lezioni impartite dall'Autore alla principessa di Arnhalt-Dessau, nipote del re di Prussia.


LETTERE
AD UNA
PRINCIPESSA
D'ALEMAGNA
SOPRA DIVERSI SOGGETTI
D I
FISICA E DI FILOSOFIA
SCRITTE DA M.r EULERO,
E TRADOTTE DAL FRANZESE
CON AGGIUNTA DI NOTE
DALL' ABATE
ORONZO CARNEVALE
TOMO PRIMO.
IN NAPOLI
Presso i Fratelli Terres.
Con Licenza de' Superiori.
MDCCLXXXVII.

Figura 2

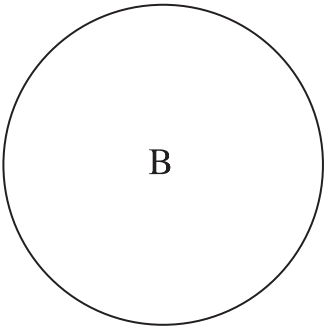
Esaminiamo quanto Euler scrive nella lettera CII (datata 14 febbraio 1761), dopo avere ricordato la classificazione delle proposizioni aristoteliche:

> «Per esprimere sensibilmente la natura di queste […] proposizioni, possiam rappresentarle per mezzo di figure, le quali son di un gran soccorso per ispiegare con somma distinzione qual sia l'esattezza di un raziocinio. E poiché una nozione generale contiene un'infinità di oggetti individuali, si può supporre a guisa di uno spazio, in cui questi oggetti son racchiusi: per esempio si forma uno spazio per la nozione di uomo (Tav. 1. fig. 1.) in cui si suppone che tutti gli uomini sien radunati».



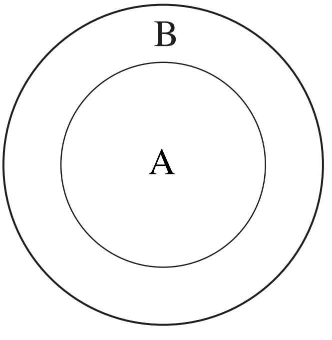
Tav. 1. fig. 1.

Per la nozione di ***mortale*** *se ne forma un altro (Tav. 1. fig. 2.) dove si suppone che sia compreso quanto vi è di mortale.*



Tav. 1. fig. 2.

E quando io pronunzio che ***tutti gli uomini son mortali****, intendo che la prima figura sia contenuta nella seconda.*

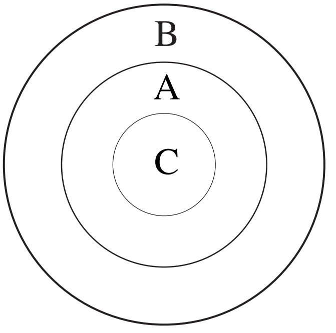


Tav. 1. fig. 3.

Dunque la rappresentazione di una proposizione universale affermativa sarà quella della Tav. 1. fig. 3., in cui lo spazio A che dinota il soggetto della proposizione vien tutto intero racchiuso nello spazio B che è il predicato» (Euler, 1787, II, pp. 111-112).

Nella successiva lettera CIII (datata 17 febbraio 1761) Euler scrive:

«Questi cerchj o sien questi spazj (imperciocché è indifferente qualunque figura lor si dia) son molto a portata per facilitare le nostre riflessioni sopra questa materia, e per metterci in chiaro quanti misteri la logica si vanta di avere, i quali somma pena han costata per poterli dimostrare, mentre coll'ajuto di tai segni in un istante tutto salta agli occhi. […] Quanto sin qui si è detto può essere sufficiente a far capire a Vostra Altezza, che tutte le proposizioni possono essere rappresentate con figure; ma il massimo vantaggio si manifesta ne' raziocinj, i quali qualora si esprimon con parole chiamansi sillogismi, in cui si tratta di tirare una conclusione esatta da alcune date proposizioni. Con tale invenzione noi potremo subito scandagliare le giuste forme di tutti i sillogismi. Cominciamo da una proposizione affermativa universale ogni A è B […] Se la nozione C è contenuta interamente nella nozione A, sarà contenuta anche interamente nello spazio B (Tav. 1. fig. 8.), donde risulta questa forma di sillogismo: Ogni A è B, ma Ogni C è A, dunque Ogni C è B e quest'ultima è la conclusione».



Tav. 1. fig. 8.

Per esempio. Si disegni la nozione A tutti gli alberi, la nozione B tutto ciò che ha radici, e la nozione C tutti i ciriegi, in tale caso il nostro sillogismo sarà il seguente: ***Ogni arbore ha radici****, ma* ***Ogni ciriegio è un arbore****, dunque* ***Ogni ciriegio ha radici****»* (Euler, 1787, II, pp. 113 e 115-116).

2. Da Leonhard Euler a John Venn

La storia dei *diagrammi di Eulero-Venn*, che può essere fatta risalire ad alcune rappresentazioni leibniziane (Baron, 1969; i diagrammi di Leibniz restarono però pressoché sconosciuti fino al 1903), è molto ricca di spunti per i matematici, in particolare per gli studiosi di geometria combinatoria e di teoria dei grafi (indichiamo ad esempio: Grünbaum, 1975, Chilakamarri, Hamburger & Pippert, 1996). Numerose sono le varianti, identificate mediante diverse caratteristiche e denominazioni (come *diagrammi di Johnston*, *diagrammi di Peirce*, *mappe di Karnaugh*…) sulle quali gli stessi addetti ai lavori non sempre si trovano completamente d'accordo. In generale nei diagrammi «di Eulero» si indicano solo le parti (ad esempio le intersezioni) non vuote. Nei diagrammi «di Venn» propriamente detti si rappresentano invece *tutte* le parti; in particolare, si indicano con una × le parti certamente non vuote e con un tratteggio quelle certamente vuote (le parti su cui non si hanno dati si lasciano bianche).

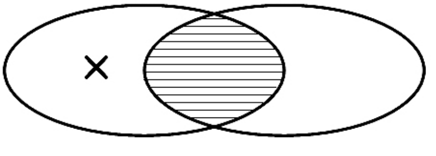


Figura 3

La realizzazione di un diagramma di Venn richiede, come notato, di disegnare una rappresentazione in cui tutte le possibili intersezioni siano presenti. Nello schema seguente è ad esempio illustrata la costruzione dei diagrammi di Venn secondo Edwards, relativamente a 3, 4 e 5 insiemi (Edwards, 2004), in cui è possibile evidenziare il ruolo essenziale di alcune proprietà di simmetria.

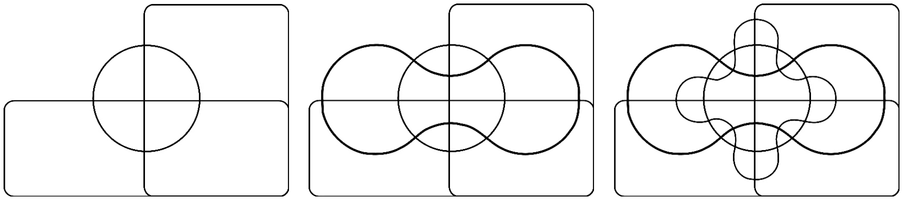


Figura 4

L'analoga costruzione originale proposta da Venn (1880) era invece simile alla seguente, indubbiamente meno chiara:

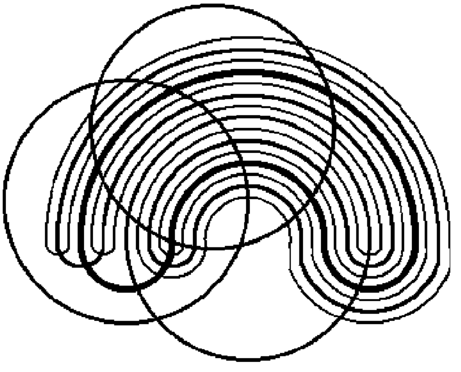


Figura 5

Tutto ciò è certamente molto preciso, ma nella pratica didattica sono i diagrammi di Eulero a risultare più chiari e «intuitivi». Ad esempio il fatto che A sia un sottoinsieme (proprio) di B appare evidente da una rappresentazione come quella a sinistra («di Eulero»), piuttosto che da una come quella a destra («di Venn»).

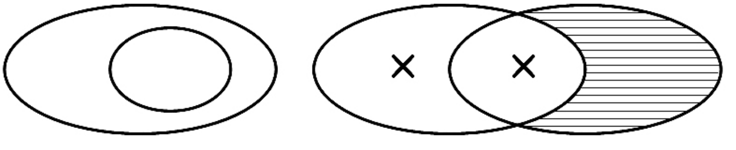


Figura 6

Spesso dunque, didatticamente, con il termine «diagramma di Eulero-Venn» si fa riferimento a una raffigurazione del primo tipo (talvolta con alcune ulteriori convenzioni rappresentative, come l'uso di indicare gli elementi con dei punti all'interno della figura ellittica).

Non ripercorreremo dettagliatamente la storia dei diagrammi di Eulero-Venn; preferiremo proporre un esempio la cui discussione ci porterà a riflettere sulla stessa concezione di «oggetto matematico», nonché sul ruolo e sull'importanza delle sue rappresentazioni.

3. Un diagramma di Eulero «molto difficile»

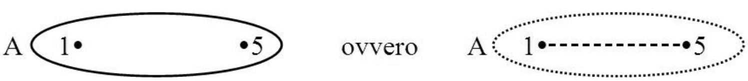
In generale, i diversi sistemi di rappresentazione si collegano all'esperienza (spaziale e temporale) degli studenti in molti modi (Lakoff & Núñez, 2005) e l'uso di una rappresentazione come i diagrammi di Eulero-Venn coinvolge molti aspetti concettuali (Bagni, 2006-a)[2]. Proporremo ora una breve riflessione sulle potenzialità e sui limiti di tale rappresentazione.

Ci baseremo sul seguente esempio (Bagni, in via di pubblicazione):

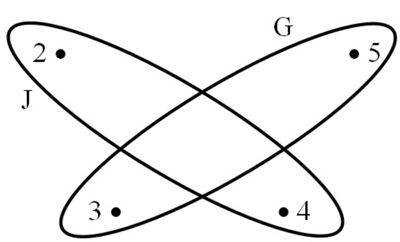
$A = \{1, 5\}$; $B = \{1; 2\}$; $C = \{2; 3\}$; $D = \{3; 4\}$; $E = \{4; 5\}$; $F = \{2; 5\}$;
$G = \{3; 5\}$; $H = \{1; 4\}$; $I = \{1; 3\}$; $J = \{2; 4\}$

Si voglia rappresentare visualmente mediante un diagramma di Eulero-Venn la situazione ora descritta. Premettiamo due osservazioni:

1. le dieci scritture $A = \{1, 5\}$, $B = \{1; 2\}$, $C = \{2; 3\}$, $D = \{3; 4\}$, $E = \{4; 5\}$, $F = \{2; 5\}$, $G = \{3; 5\}$, $H = \{1; 4\}$, $I = \{1; 3\}$, $J = \{2; 4\}$ richiedono di «collegare» ogni elemento di $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ con ciascuno degli altri elementi dello stesso insieme, venendo così a formare i dieci sottoinsiemi ora indicati. Tale collegamento porta, per costruire un diagramma di Eulero, a realizzare una sorta di «connessione» grafica dei due elementi in gioco (in generale un insieme viene rappresentato da una parte connessa di piano):

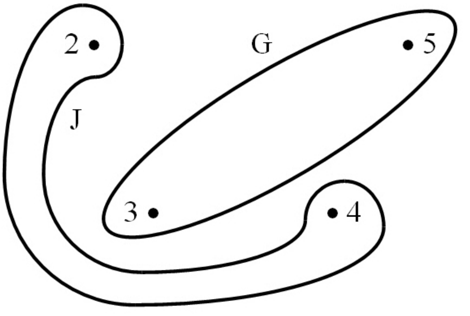


2. naturalmente, per chiarezza e dunque per evitare malintesi ed errori, è opportuno che due insiemi disgiunti non siano rappresentati da parti comuni di piano (come sopra notato, questa caratteristica distinguerebbe i diagrammi «di Eulero» propriamente detti da quelli detti «di Venn»). Consideriamo il caso seguente:

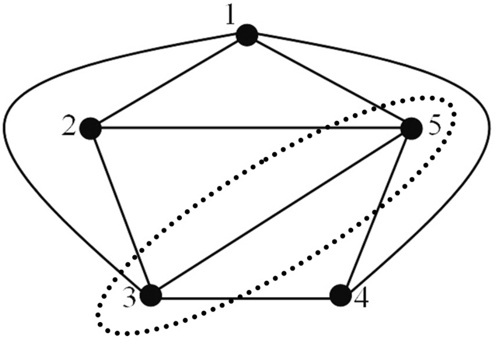


2. Il riferimento ai registri rappresentativi, frequente nella recente ricerca didattica, deve essere precisato: l'impiego di Raymond Duval (1995) del termine «registro» evidenzia il ruolo dei diversi segni e distingue quindi i registri verbali da quelli simbolici o visuali etc.; tale nozione di registro differisce da quella di Michael A.K. Halliday (1985), per il quale un registro è definito come una varietà linguistica basata sull'uso e collega dunque il testo ai sistemi linguistici e sociali (Ferrari, 2004). In questo lavoro al termine «registro» daremo il significato considerato da Duval.

Per rappresentare G={3; 5} e J={2; 4} potremmo ovviamente variare le posizioni dei punti indicanti gli elementi; ma se volessimo mantenere tali posizioni (anche a costo di ricorrere a forme lontane dalla tradizionale ellisse, ad esempio ad insiemi non convessi: del resto lo stesso Eulero nota che *«è indifferente qualunque figura lor si dia»*…), la rappresentazione preferibile sarebbe, nonostante il suo aspetto inusuale:



Torniamo all'esercizio sopra proposto. Si tratterebbe di realizzare un *grafo con cinque nodi completo* (ricordando le caratteristiche del problema) *e planare* (in modo da permettere il disegno dei diagrammi, sulla base della precedente osservaione 1); ma è ben noto che il grafo completo con cinque nodi K_5 (uno dei grafi di Kuratowski) *non* è un grafo planare. Con riferimento alla figura seguente, si realizzino gli insiemi che connettono due elementi collegati da una linea (ad esempio, l'insieme G={3; 5} è quello indicato con il tratteggio).



A questo punto appare impossibile realizzare graficamente l'insieme J = {2; 4} senza rinunciare alla connessione delle rappresentazioni degli insiemi in gioco o senza determinare «sovrapposizioni» che didatticamente comporterebbero la possibilità di malintesi (come la presenza di una qualche intersezione non vuota tra gli insiemi G = {3; 5} e J = {2; 4}: si tenga presente l'osservazione 2, basata sulla differenza tra i diagrammi «di Eulero» e «di Venn»).

In altri termini, la situazione descritta da

A={1, 5}, B={1; 2}, C={2; 3}, D={3; 4}, E={4; 5}, F={2; 5}, G={3; 5}, H={1; 4}, I={1; 3}, J={2; 4} *non può essere espressa mediante un diagramma di Eulero-Venn*, se non a prezzo di scelte grafiche che possiamo ritenere inusuali. Naturalmente non è detto che i diagrammi di Eulero-Venn, in un'ampia accezione didattica, abbiano nella connessione una caratteristica assolutamente irrinunciabile e quindi «non possano» rappresentare certe situazioni; possiamo però rilevare che diventerebbe inevitabile, in certi casi, rinunciare alla connessione (ovvero accettare la presenza «grafica» di intersezioni non vuote, cioè rinunciare a realizzare un diagramma «di Eulero» propriamente detto). E uno studente, a fronte di un insieme rappresentato da due «pezzi staccati» l'uno dall'altro, potrebbe essere indotto a pensare a *due* insiemi distinti.

Quanto ora visto implica che i diagrammi di Eulero-Venn tradizionalmente intesi (dunque con la citata caratteristica di connessione) e in particolare i diagrammi «di Eulero» (con le intersezioni non vuote graficamente non presenti) hanno uno statuto epistemologico diverso da quello della tradizionale scrittura simbolica o dell'espressione verbale riferita alle relazioni di appartenenza? Forse questa conclusione può apparire forzata; ma certamente tali modi di esprimersi hanno caratteristiche diverse, diversa «profondità», diverso contenuto informativo. Ogni tipo di notazione e di rappresentazione può presentare dei vincoli; è molto importante, didatticamente, rendersi conto di questi vincoli e cercare, se possibile, di superarli[3].

4. Considerazioni conclusive

In un recente lavoro (Bagni, 2006-a) si affermava che, da un lato, le relazioni fondamentali della teoria degli insiemi sono di tipo predicativo, mentre i diagrammi di Eulero-Venn le illustrano mediante segni in una figura piana; il punto è che gli studenti sono in generale «affetti» dai segni, nel senso che questi offrono ad essi alcuni percorsi di sviluppo concettuale (Radford, 2002). Quanto abbiamo visto mostra che i diversi registri di rappresentazione semiotica, nella forma tradizionalmente utilizzata nelle aule scolastiche, *non sempre risultano del tutto «equivalenti».* Se è dunque didatticamente importante (seguendo Duval, 1995) controllare e stimolare il coordinamento dei registri rappresentativi, è però anche necessario domandarsi se, in che misura e con quali accorgimenti tale coordinamento sia possibile (Bagni, in via di pubblicazione).

La realizzazione di una rappresentazione mediante i diagrammi di Eulero-Venn (pur con tutte le possibili «varianti» del procedimento originale introdotto da Eulero) è un processo non banale e tale rappresentazione, se considerata in tutte le sue potenzialità, non è «isomorfa» alla rappresentazione simbolico-proposizionale delle singole relazioni di appartenenza dei vari elementi ai vari insiemi. Potremmo dunque essere indotti a chiederci: *che cosa* dunque «rappresentano» queste rappresentazioni così diverse?

Le proposizioni, nota Richard Rorty, non possono più essere pensate (solo) come semplici espressioni dell'esperienza, né come rappresentazioni di una qualche realtà extra-esperienziale, di una realtà al di fuori di noi che dunque si «rispecchia» nella nostra mente; sono piuttosto sequenze di segni e di rumori usate dagli esseri umani nello sviluppo delle pratiche sociali (Rorty, 1994, p. 146) e le stesse rappresentazioni

3. Se in geometria si disegna un quadrato, quella figura può risultare molto utile nell'ambito di un procedimento, della risoluzione di un problema, ma introduce vincoli specifici: ad esempio, non potrò mai disegnare due quadrati nel rapporto 1/1000000, un caso che in teoria non posso certo escludere. In questa situazione si potrà tuttavia introdurre qualche accorgimento per superare la difficoltà.

ad esempio degli «oggetti» della matematica potrebbero essere inquadrate secondo un punto di vista di questo tipo. Ogni modalità mediante la quale noi esprimiamo la matematica ha caratteristiche proprie, può sintetizzare tipi diversi di informazione (abbiamo sopra esaminato le singole relazioni di appartenenza, le inclusioni, le intersezioni etc.) e si collega ai diversi usi, a pratiche sociali (Bagni, 2006-b). Non appare insomma corretto pensare alle varie modalità di espressione della matematica come a dei linguaggi sostanzialmente isomorfi, a forme diverse (in quanto basate su convenzioni diverse) di un preteso, universale «linguaggio matematico» in grado di riflettere docilmente i vari «oggetti» della matematica platonisticamente esistenti.

L'autore ringrazia vivamente Claudio Bernardi dell'Università di Roma «La Sapienza» per i preziosi suggerimenti.

Bagni, G.T.
'Some cognitive difficulties related to the representations of two major concepts of set theory'. *Educational Studies in Mathematics* 62, 3, 259-280*,* 2006-a

Bagni, G.T.
Linguaggio, storia e didattica della matematica. Pitagora, Bologna, 2006-b.

Bagni, G.T.
In via di pubblicazione, *Simboli, parole, artefatti, figure. Rappresentare la matematica.*

Baron, M.E.
'A note on the historical development of logic diagrams: Leibniz, Euler, and Venn'. *Mathematical Gazette* 53, 113-125, 1969.

Chilakamarri, K.B., Hamburger, P. & Pippert, R.E.
'Venn diagrams and planar graphs'. *Geometriae Dedicata* 62, 73-91, 1996.

Duval, R.
Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Lang, Paris, 1995.

Edwards, A.W.F.
Cogwheels of the mind: the story of Venn diagrams, Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 2004.

Euler, L.
Lettere ad una principessa d'Alemagna sopra diversi soggetti di fisica e di filosofia, Ferres, Napoli (prima edizione italiana; seconda edizione dopo quella originale, *Lettres à une princesse d'Allemagne*, 1772), 1787.

Ferrari, P.L.
Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica. Pitagora, Bologna.

Grünbaum, B.
'Venn diagrams and independent families of sets', 1975. *Mathematics Magazine* 48, 12-23, 2004.

Halliday, M.A.K.
An introduction to functional grammar. Arnold, London, 1985.

Lakoff, G. & Núñez, R.
Da dove viene la matematica. Come la mente embodied dà origine alla matematica. Bollati Boringhieri, Torino (*Where mathematics come from? How the embodied mind brings mathematics into being*. Basic Books, New York 2000), 2005.

Radford, L.
'The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge'. *For the Learning of Mathematics* 22, 2, 14-23, 2002.

Rorty, R.
La svolta linguistica. Garzanti, Milano (*Twenty-Five Years After*. The University of Chicago, Chicago 1992), 1994.

Venn, J.
'On the diagrammatic and mechanical representation of propositions and reasonings'. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 9, 1-18, 1880.

4. L'opera pedagogica di Euler in matematica elementare

Jean-Claude Pont[1]

In this paper we present some aspects of the history of elementary mathematics, like for example negative numbers, infinitely small and infinitely large, through the work of the great Basler. Our aim is to show how topics, that today appear to be trivial, have requested a lot of efforts also to great mathematicians.

Introduzione

Vorrei dapprima situare il mio discorso con un'osservazione preliminare e un aneddoto personale, che mi permetteranno di definire la prospettiva nella quale ho scelto di collocarmi.

La difficoltà dello storico che presenta una scoperta, un'opera, è di far capire la sua originalità. Per certe scoperte, la difficoltà risiede nel fatto che, per la loro notorietà o perché insegnate a scuola, sono patrimonio del grande pubblico; le abbiamo bevute nel latte di nostra madre, come avrebbe potuto dire Einstein. Non siamo in grado di apprezzare la meraviglia – o l'indifferenza – che hanno prodotto nei contemporanei. Si dimentica così che il concetto più banale, il termine linguistico più scontato, e persino le cose più semplici, sono nati dopo una lunga evoluzione. Accade spesso che la nuova idea venga allora celata nel contesto empirico dal quale è sorta, in modo tale che non si realizza più che lì dentro c'è un'idea e che il fatto è stato fecondato dall'idea. L'inaudito di ieri è diventato banale, da esso non si può più prescindere. Se per caso ci si interrogasse su di esso, saremmo presi alla sprovvista, perché lo considereremmo intrinseco alla ragione stessa, appartenente al bagaglio della specie. In breve, occorre avere una buona conoscenza dell'epoca per misurare fino a che punto i nostri predecessori sono stati intelligenti! Nella matematica elementare troviamo un grande assortimento di entità e di concetti che si trovano in questa situazione. Se non si è coscienti della storicità dei concetti, ci si meraviglia di apprendere che i grandi si siano occupati di essi e più ancora di costatare quanto abbiano dovuto faticare, errare, i punti di vista che hanno tentato di difendere e che oggi ci fanno sorridere. Per molte ragioni, Euler costituisce un esempio privilegiato:

– ha scritto manuali destinati alla formazione del grande publico; quando si scrivono manuali, non ci si può certo accontentare della tranquillità del proprio spirito, o delle intuizioni sommarie e rapide che assicurano un minimo di rigore ai concetti e alle regole di manipolazione;

1. Professore Emerito di storia e filosofia delle scienze dell'Università di Ginevra.

– questa scelta appare anche azzeccata perché Euler è un autore di grande onestà, che spiega dettagliatamente la via che ha seguito, i tentativi andati male, i percorsi fuorvianti, gli errori da evitare.

Veniamo all'aneddoto. Si riferisce a esperienze apparentemente banali, ma che portano in sé un messaggio forte; hanno illuminato e diretto parte delle mie riflessioni di insegnante. Le ho vissute quando insegnavo matematica, in un istituto nel quale il liceo durava otto anni. All'inizio dell'attività avevo allievi dai 12 ai 15 anni, ai quali insegnavo i rudimenti di ciò che si chiamava «algebra»; in particolare, i numeri (in realtà razionali, anche se non si facevano distinzioni) negativi e il calcolo letterale. Stessa cosa con i numeri complessi. Ogni volta rimanevo impressionato dalle difficoltà che incontravano i miei allievi davanti a cose così semplici. Come potevano essere limitati a tal punto? Fortunatamente c'erano gli allievi «difficili», che esplicitavano la loro incomprensione, che non facevano finta di aver capito, a differenza dei «bravi» allievi, che credevano di aver capito. Spiegando ai deboli, ho capito che, in realtà, non avevo capito bene io stesso e che i migliori, proprio loro, in realtà non avevano capito niente del tutto. Sapevano solo manipolare queste entità, secondo regole mnemoniche. La storia mi ha salvato, insegnandomi che non capendo ero in buonissima compagnia; che nemmeno Descartes, Newton, Euler e d'Alembert non avevano capito che cosa sono i numeri negativi o i numeri complessi. La storia mi insegnava che tali banalità, che propinavo dall'alto del mio sapere, erano prodotti sofisticati di spiriti raffinati. Avere difficoltà di comprensione era un segno di intelligenza e i «peggiori» allievi avevano ragione di ribellarsi!

Abbiamo dunque l'abitudine – cattiva – di esaminare, di descrivere, di pensare un'opera come se fosse stata prodotta a partire dal momento in cui l'abbiamo conosciuta, cioè col nostro spirito carico di ciò chee il fiume ha depositato nel tempo. In questa sede vorrei proporre una presentazione che, al contrario, parte dalla sorgente; ciò che è evidentemente più difficile, meno agevole e più rischioso. Interessiamoci dunque al contesto, cioè ai circa 150 anni che precedono il tempo nel quale Euler entra nella carriera scientifica. È un periodo segnato in matematica da profonde rotture epistemologiche (calcolo letterale, oggetti nuovi – numeri negativi e complessi, polinomi, serie, funzioni, infinito –, geometria analitica), che rivoluzionano fondamentalmente il paesaggio della disciplina. Invece di «matematica», bisognerebbe d'altronde parlare, per essere precisi, del «pensiero geometrico»: fin verso il 1620, non c'è matematica al di fuori della geometria. Si potrebbe dire, credo senza esagerare, che la Geometria è diventata Matematica nel contesto delle grandi rivoluzioni concettuali del XVII secolo. In queste rotture apparentemente anodine si trova la molla che lancerà la geometria verso il suo nuovo destino ed è opportuno che ci si rifletta.

Le rotture

Fino all'inizio del XVII secolo, il pensiero geometrico è retto da esigenze epistemologiche e metafisiche che si rifanno agli antichi Greci. Dal nostro punto di vista, l'epistemologia matematica degli Antichi si rivela alla nostra attenzione per alcuni versi. Il primo concerne il bisogno di essere che il geometra greco esige da ogni sua realizzazione; le grandezze sono correlate in modo naturale al geometrico, che costituisce il basamento dell'insieme delle sue attività matematiche (comprese quelle sui numeri interi). Il geometrico presenta il vantaggio considerevole di appartenere, almeno si crede, al regno visibile, di essere presente sotto i nostri occhi e le nostre mani; sicuramente un malinteso fondamentale, rimasto celato per molto tempo. L'idea di un simbolo puro, senza referente, avrebbe probabilmente scandalizzato i matematici greci. Un paradigma mette le radici e regna sovrano, attraversando tutta la storia fino all'inizio del XVII secolo: la figura e la sua esistenza tangibile garantiscono la solidità dell'edificio. Ciò potrebbe spiegare perché i Greci non siano giunti al calcolo letterale, scacco che rimane uno dei misteri della loro matematica. Come scrive Pierre Boutroux (Boutroux 1955, p. 87):

> «I saggi greci non potevano essere bravi algebristi: pretendevano, infatti, di capire con l'intuizione, cioè attraverso una lente intellettuale diretta, gli oggetti matematici reali quanto o ancor più degli oggetti sensibili».

Il secondo punto che vogliamo richiamare concerne il loro rifiuto dell'infinito, così caratteristico del pensiero metafisico ed estetico greco. Da ciò probabilmente deriva la straordinaria impalcatura del metodo di esaustione, aggiramento acrobatico dei processi all'infinito.

Su questo periodo dalle esigenze ontologiche rigide e tacite, si innesta, anche senza un vero contatto organico, un pensiero più libero, che intrattiene con la «vera» matematica relazioni ambigue. È quella dei *clerici vagantes* del Rinascimento, che hanno audacia intellettuale e giocano liberamente con il materiale fornito dal pensiero greco, liberandosi dai presupposti metafisici che lo sostenevano. A partire dagli anni 1570, si vede sorgere una *armada* di entità, di concetti e notazioni, dalla quale nascerà la matematica classica. L'inizio del XVII secolo, oltre che dal fiorire del calcolo letterale, è segnato dall'apparizione, in sordina, di processi all'infinito in situazioni nelle quali gli Antichi ricorrevano al pericoloso metodo di esaustione (area, rettificazione, volume). Questa duplice serie di catastrofi (nel senso di Thom) interviene su un fondo filosofico in contravvenzione con le cose allora proibite. Le vecchie proibizioni sono morte, la Geometria può diventare Matematica!

Tra parentesi, non è un caso se il centro di gravità temporale di queste rotture, 1610-1630, coincide con il momento nel quale la fisica si libera dalle briglie del pensiero antico.

Mi soffermerò un po' sul calcolo letterale, espressione che interpreterò, per semplificare l'esposizione, in senso lato: calcolo con le lettere, notazioni nuove, nuove famiglie di numeri (negativi e complessi). Ci rimango un po' perché il calcolo letterale è l'agente nascosto, il *deus ex machina* di tutta l'evoluzione futura in matematica; ma la semplicità che ci vediamo oggi, per via di un lungo periodo di pratica, ci impedisce di comprendere fino a che punto *questa scrittura che pensa per noi* non era naturale e persino si opponeva ai canoni dell'epistemologia antica. L'avvento del calcolo letterale appartiene alle rivoluzioni concettuali più importanti chee la scienza abbia vissuto nei tempi moderni, una rivoluzione anonima e silenziosa, come sono d'altronde tutte le rivoluzioni concettuali.

Leggendo l'opera di Florian Cajori (Cajori, 1993), si rimane stupefatti davanti a ciò che l'immaginazione ha prodotto per arrivare finalmente a questa scrittura che oggi ci sembra scontata. Si pensi alla storia della vita, nella quale si vede la natura che costruisce senza pianificare né progettare, tentando tutte le strade, cancellando qui, riprendendo là, abbandonando, senza né legge né metodo, lasciando al più forte la possibilità di sopravvivere e di procreare. Questa storia è piena di *specie perdute*. Dilagante ed esotica, a immagine dell'essere vivente, la storia delle notazioni matematiche è edificante e illumina fortemente la pedagogia di questa disciplina. In questo crescendo di notazioni si osserva un periodo stenografico. Il segno non ha altre virtù se non stenografiche, semplifica il discorso riducendo i termini ripetitivi sostituendoli con un segno (segno di operazione, segno di uguaglianza). Poi vennero due momenti decisivi, correlati l'uno all'altro. Il primo vede la nascita dell'idea di rappresentare le diverse potenze dell'incognita con la stessa lettera – idem più tardi per le grandezze conosciute – accompagnata da un numero – poco importa se messo in alto a destra, tutto è stato provato – che indica il numero di occorrenze dell'incognita in un prodotto; solidale con questa invenzione, la regola fondamentale di ciò che diventerà l'algebra: la regola di addizione degli esponenti, che è la molla di tutta la natura dinamica del calcolo letterale. La rappresentazione di un'incognita con una lettera costituisce una distorsione, ancora innocente, del vecchio principio, inespresso ma efficiente, degli Antichi: la presenza di un referente, o di un essere dietro il segno. L'audace amalgama dell'essere e delle sue diverse potenze sotto un unico nome è di una forza che i fondatori (fra gli altri Viète e Descartes) non sembra abbiano previsto. Certo x, x^2, x^3 sono ancora associati nel pensiero a qualcosa di geometrico: un segmento, una superficie, un solido. Ma ci si abitua progressivamente a considerare il segno da solo, come l'uccellino che volteggia attorno al nido, prima di scomparire nel cielo. Una seconda liberazione sopraggiunge quando, colpo di audacia, ci si azzarda – come suggerito naturalmente dalla nuova scrittura – a trascendere il proibito geometrico lasciando briglia sciolta all'esponente. La lettera si libra nel cielo, gli ormeggi si rompono. Il calcolo letterale non è più semplicemente uno strumento stenografico e passivo. Il suo uso è condotto da un'epistemologia implicita che è rivoluzionaria nel XVII secolo: nessun bisogno di un garante concreto per sorreggere il simbolo, nessun bisogno che questa grandezza abbia una relazione geometrica, come pretendeva tutto il pensiero greco.

La doppia rottura, calcolo letterale e processi all'infinito, implicherà conseguenze importanti: la nascita dell'equazione come entità autonoma e oggettiva e quella di polinomio, di serie, di funzione, oggetti che non si sarebbero potuti pensare senza i nuovi segni che li producono; il segno ha creato l'essere.

Il XVIII secolo

Queste novità, in assenza di fondamento interno, si appoggiano su metafore o sulla casualità di vocaboli che sono serviti a designarli. Lo stesso per le notazioni utilizzate. I matematici del XVIII secolo, Euler in testa, ereditano così un insieme eteroclito di oggetti e di strumenti, dei quali nessuno sa che cosa sono, di regole che sembrano uscite dal cappello di un illusionista e che nessuno sa giustificare (Euler ha appreso la matematica su un libro del cosista[2] Rudolff, rivisitato da Stiefel, il che è tutto dire).

2. Nel XVI secolo, prima dell'avvento del calcolo letterale, si incontrano notazioni che non sono durate nel tempo e che si qualificavano come «cossiste»; il termine ha origine nel fatto che l'incognita si chiamava «cosa».

È stata sostenuta recentemente all'EHESS di Parigi una tesi dal titolo «*Histoire et épistémologie des nombres négatifs de d'Alembert à nos jours*»; conta circa 1300 pagine, ciò che mostra chiaramente l'ampiezza di un problema che i nostri apprendimenti molto tecnici della matematica occultano, impedendo anche all'insegnante di prendere coscienza dell'esistenza di difficoltà serie, laddove tutto parrebbe di una serenità idillica. Il compito che attendeva i matematici di pulire le scuderie di Augia[3] era importante e un secolo non sarà sufficiente.

La gloria imperitura di Euler, i lavori che renderanno immortale il suo nome concernono la matematica superiore e sono stati spesso evocati e analizzati. È per questo che ho preferito occuparmi di un aspetto meno spettacolare, meno *sexy* come si usa dire oggi, dell'opera del grande Basilese. Ho scelto una parte riuscita a metà, dove si vede all'opera un procedere esitante, che si fa largo in un terreno sconosciuto. Il piccolo studio che propongo ha questo di stravagante, che utilizza un grande uomo per mostrare i tentennamenti di un pensiero umano in marcia. È la storia di una lenta digestione che agisce nelle profondità dei tempi. Si può anche paragonare il fenomeno a quello della trasformazione del cibo nel corpo di un animale. Si presenta dapprima in modo informe; in esso vi sono anche diverse sostanze non assimilabili e occorre separare il grano dal loglio. Il buon grano deve ancora essere preparato, condizionato, battuto, amalgamato, sciolto prima di passare nel sangue e di nutrire l'individuo. Tutto ciò finisce per aderire così intimamente al substrato, che nessuno riesce a sapere da dove vengono le cose.

L'opera di Euler è immensa, circa 80 volumi, contenenti in media da 400 a 500 pagine ciascuno, circa 900 trattati, 25 libri; fra essi le quattro opere didattiche seguenti:

1748 *Introductio in Analysin infinitorum*;
1755 *Institutiones Calculi Differentialis*;
1768 *Institutiones Calculi Integralis*;
1770 *Vollständige Anleitung zur Algebra*.

Si può dire di ciascuno di essi ciò che lo storico della matematica W. W Rouse Ball scriveva nel 1908 in *A short Account of the History of Mathematics* (p. 396): «The *Analysis infinitorum* was followed in 1755 by the *Institutiones Calculi Differentialis* (…). This is the first text-book on the differential calculus which has any claim to be regarded as complete, and it may be said that until recently many modern treatises on the subject are based on it.» Quanto alla *Vollständige Anleitung zur Algebra*, essa costituisce uno dei trattati più antichi con l'obiettivo di edificare l'algebra su basi solide. A parte gli *Elementi* di Euclide, poche opere matematiche hanno conosciuto tanta diffusione.

A partire da queste opere di Euler, presento due problemi che sorgono dalla matematica elementare ma che hanno causato parecchio imbarazzo a coloro che ebbero l'incarico di riprendere il testimone del XVII secolo e di tentare di vederci un po' più chiaro: il problema dei numeri negativi e il problema dell'infinito (infinitamente piccolo e infinitamente grande).

3. Immagine mitologica legata alla sesta fatica di Eracle (l'Ercole greco) consistente nel pulire le scuderie del re Augia, i cui splendidi animali vivevano da trent'anni nel letame infetto.

Il problema dei numeri negativi in Vollständige Anleitung zur Algebra

È nella *Vollständige Anleitung zur Algebra* del 1770 che Euler propone una presentazione dettagliata dei numeri negativi. Le citazioni che seguono bastano per mostrare la sua perplessità. Non è necessario commentarle. Precisiamo semplicemente che è qui ciò che si faceva di meglio all'epoca e non sarebbe corretto dire che le debolezze che vi si trovano sono dovute a esigenze di volgarizzazione. Se si dubitasse, sarebbe sufficiente leggere ciò che scriveva il grande d'Alembert, probabilmente la persona più accreditata a parlare di matematica e di filosofia nel XVIII secolo, nell'articolo «Negativo» que aveva scritto per la grande Encyclopédie di Diderot della stessa epoca.

Dalla *Vollständige Anleitung zur Algebra*[4]:

(§ 18)

«Dal momento che i numeri negativi rappresentano debiti, per il fatto che con i positivi si indicano reali averi, possiamo dire che i numeri negativi sono meno di nulla».

§ 19

«Allo stesso modo, perciò, come i numeri positivi sono incontestabilmente maggiori di nulla, i numeri negativi sono minori di nulla».

Notiamo che nei suoi *Opuscules mathématiques* del 1761 d'Alembert scriveva, (punto di vista mantenuto nell'articolo citato sopra):

«Mi si permetta di osservare, quanto è falsa l'idea che si dà talvolta delle quantità negative, dicendo che queste quantità sono sotto lo zero».

Così, due fari dell'epoca hanno opinioni contrarie su questa piccola cosa, in apparenza, che è il numero negativo.

§ 21

«In Algebra è della massima importanza farsi un'idea precisa di queste quantità negative (…).»

§ 31

«Ma dobbiamo esaminare separatamente ciò che la moltiplicazione di +a per –b, e di –a per –b dà come risultato.»

§ 33

(Il caso –a per –b) *«È evidente, a prima vista, osservando le lettere, che il prodotto deve essere ab; ma è dubbioso quale dei segni + o – bisogna anteporre; tutti sanno che bisogna mettere uno o l'altro di questi segni. Ora, affermo che non si può mettere il segno –; dato che –a per +b dà –ab, allora –a per –b non può dare lo stesso risultato di –a per +b; per contro deve dare un risultato opposto, che è +ab; di conseguenza, abbiamo la regola seguente (…).»*

La questione della regola dei segni è stata la *via crucis* dei matematici. I migliori se ne sono occupati nei secoli XVIII e XIX, ma non è uscito alcunché di interessante. Occorre arrendersi all'evidenza: nessun matematico, grande o piccolo, non ha la minima idea dello statuto ontologico dei numeri negativi e dei numeri complessi. La scoperta dei numeri complessi risale agli anni 1540. Utilizzati a sazietà nelle situazioni più diverse, lasciano l'amaro in bocca di «*risultati concepiti nel peccato*», secondo una bella espressione proposta da Glaeser. La loro interpretazione nel piano di Argand-Gauss, all'inizio del XIX secolo, rassicura. Non sono più segni vuoti, retti dall'impianto di regole formali, acquistano l'essere che gli conferisce il geometrico associato. Il filo-

4. Traduzione italiana della Redazione.

sofo della matematica oggi è stupefatto di costatare come questa metafora o gioco di parole abbia potuto servire a fondare l'esistenza dei numeri complessi. Bisogna attendere gli anni 1860 per trovare i primi chiarimenti di questi concetti.

Il problema dell'infinito in Institutiones Calculi Differentialis e in Vollständige Anleitung zur Algebra

L'uso degli infinitesimi nei primi sviluppi del calcolo differenziale e integrale era stato l'oggetto di accese discussioni all'inizio del XVIII secolo. Si pensi in particolare al notevole trattato di Berkeley, *The Analyst*, che mostrava brillantemente le incongruenze che viziavano i fondamenti di questo calcolo. Il calcolo differenziale, a differenza dell'algebra, ricorre sistematicamente all'infinito. Presuppone quindi un esame della nozione di infinito.

Nelle prime righe della prefazione delle *Institutiones Calculi Differentialis*, Euler scrive (p. VII)[5]: *«(…) gli stessi incrementi evanescenti, sebbene siano realmente nulli, sono tuttavia usualmente rappresentati con certi simboli. Non c'è nessuna ragione di non indicare questi segni con dei termini specifici. Questi sono chiamati differenziali, e siccome sono senza quantità, si dice che sono infinitamente piccoli. Per loro natura stessa, possono essere interpretati come il nulla assoluto o considerati uguali a zero».* Ecco la nascita dell'infinitamente piccolo.

La questione dell'infinito è trattata nel capitolo 3 intitolato *«Sull'infinito e sull'infinitamente piccolo»*. L'infinito stesso è presentato in occasione della successione (Euler parla di «serie») dei numeri naturali; questa successione, come la retta, può essere continuata all'infinito, ci dice a pagina 47. Lo studio di Euler si fonda su argomenti intuitivi, formalisti e retorici, argomenti la cui debolezza è stata mostrata in seguito e che conducono a contraddizioni. Questi sviluppi conducono a ciò che si potrebbe chiamare le «formule» fondamentali:

$a : dx = \infty$, $a : \infty = dx = 0$.

La difficoltà –insormontabile allo stato della matematica dell'epoca – sorge al momento in cui si tratta di dividere; quando si calcola una derivata, si è obbligati a un certo momento a dividere per questo infinitesimo, che non dovrebbe dunque essere nullo. Ma, subito dopo, occorre che sia zero. È chiedere troppo a una *cosina* così piccola.

Il paragrafo 84 di questo capitolo 3 mostra a sufficienza l'imbarazzo che sta vivendo Euler:

> *«Siccome abbiamo appena mostrato che una quantità infinitamente piccola è veramente zero, dobbiamo prima di tutto affrontare l'obiezione secondo la quale non si può in nessun modo usare lo stesso simbolo 0 per quantità infinitamente piccole, ma uno speciale. Siccome tutte le nullità sono fra loro uguali, appare superfluo avere segni diversi per designare simili quantità. Sebbene due zeri sono uguali come a ogni altro, nel senso che non c'è differenza fra essi, tuttavia abbiamo due vie per confrontarli, aritmetica o geometrica (…)».*

Questi infiniti – infinito e infinitesimo – senza essere veramente dei numeri, nascono dalla quantità e conviene perciò situarli in rapporto ai numeri. Da qui, le riflessioni dei paragrafi da 98 a 105.

5. Traduzione italiana della Redazione.

L'infinito nella successione dei numeri, alcuni esempi (§ 98-101)

Consideriamo la successione:
…, –4 , –3 , –2 , –1 , +0 , +1 , +2 , +3 , …
Commento: decrescendo continuamente, i numeri approssimano 0, l'infinitamente piccolo; dopo averlo attraversato, passano nei positivi crescenti.

Consideriamo i quadrati di questi numeri:
…, +16 , +9 , +4 , +1 , +0 , +1 , +4 , …
Commento: 0 è la transizione tra i numeri positivi decrescenti e i positivi crescenti.

Consideriamo la successione:
$\ldots, +\sqrt{-3}, +\sqrt{-2}, +\sqrt{-1}, +0, +\sqrt{1}, +\sqrt{2}, +\sqrt{3}, \ldots$
Commento: 0 è una specie di limite tra le quantità reali e le complesse; le complesse sono dunque più piccole di 0.

Consideriamo la successione:
…, –(1/3), –(1/2), –(1/1), +(1/0), +(1/1), +(1/2), +(1/3), …
Commento: così, procedendo da destra a sinistra, una quantità infinita può essere pensata come una specie di limite, attraverso il quale i positivi diventano negativi; per questa ragione molti credono che i negativi sono più grandi dell'infinito.

Ma se consideriamo la successione degli inversi dei quadrati:
…, +(1/4), +(1/1), +(1/0), +(1/1), +(1/4), …
si giunge dall'infinitamente piccolo, si sale verso l'infinito, poi si riparte dai positivi verso l'infinitamente piccolo.

Consideriamo la successione:

$$\ldots, +\left(1:\sqrt{-3}\right), +\left(1:\sqrt{-2}\right), +\left(1:\sqrt{-1}\right), +\left(1:0\right), +\left(1:\sqrt{1}\right), +\left(1:\sqrt{2}\right), +\left(1:\sqrt{3}\right), \ldots$$

Commento: (sempre procedendo da destra a sinistra), si giunge dall'infinitamente piccolo, si sale verso l'infinito e si passa ai complessi, che sono dunque maggiori dell'infinito.

L'infinito nelle serie

La questione dell'infinito in Euler si presenta anche, seppur diversamente, nella teoria delle serie, cioè nei paragrafi da 102 a 108 delle *Institutiones Calculi Differentialis* del 1755 e in quelli dal 292 al 304 della *Vollständige Anleitung zur Algebra* del 1770.

Al paragrafo 102, dopo aver osservato che la somma: 1+1+1+1+… è senza dubbio *«maggiore di ogni numero assegnabile»*, Euler aggiunge: *«Confermiamo ciò considerando che la somma ha origine nell'espansione della frazione:*

$1/(1–x) = 1+x+x^2+x^3+\ldots$. Se poniamo $x = 1$, allora: $1/(1–1) = 1+1+1+\ldots$, di modo che la somma è uguale a $1/(1–1) = 1/0 = \infty$»

È come se la versione formalista nata dalla scrittura letterale era più forte, più persuasiva; Euler parla in effetti di «conferma». Ma è forse solo un'imprecisione di linguaggio.

Il paragrafo 103 analizza posizioni dell'epoca, nelle quali, per esempio, il ricorso alle serie (in casi che noi non considereremmo pertinenti) porterebbe ad affermare che *«i numeri negativi potrebbero anche essere considerati maggiori dell'infinito».*

Altra curiosità edificante del paragrafo 104: *«Se è vero che decrescendo i numeri vanno oltre lo zero e diventano negativi, occorre fare una distinzione tra numeri negativi come –1, –2, –3, … e numeri negativi come +1/–1, +2/–1 , +3/–1, … i primi essendo minori di zero e i secondi maggiori dell'infinito».*

Concludo questo esame sommario del problema dell'infinito in Euler relativo al capitolo sulle serie con un estratto dai paragrafi 298, 299 e 304 della *Vollständige Anleitung*.

Ponendo a=1 nell'uguaglianza $1/(1+a) = 1–a+a^2–a^3+\ldots$, si ottiene:

$1/2 =1–1+1–1+\ldots$ Questo risultato è così commentato dall'autore: *«[uguaglianza] che appare piuttosto contraddittoria; perché, se la fermiamo a –1, la serie dà 0; e se la fermiamo a +1, dà 1; ma questo fatto ci porta a superare la difficoltà; dal momento che dobbiamo andare all'infinito, senza fermarci né a –1 né a +1, è evidente che la somma non può essere né 0 e nemmeno 1, ma che questo risultato deve stare tra questi due, e perciò dev'essere 1/2».*

Al paragrafo 304, Euler ottiene l'uguaglianza:

$1/1–a+ a^2 = 1+a–a^3– a^4+a^6+ a^7\ldots$; per a=1 si ha $1 = 1+1–1–1+1+1\ldots$. e commenta così questo risultato: *«questa serie contiene due volte la serie trovata prima 1–1+1–1+1, &c. Ora, siccome abbiamo trovato che essa vale 1/2, non è straordinario trovare 2/2, cioè 1, per il valore che abbiamo appena determinato».*

Bibliografia

Pierre Boutroux

L'idéal scientifique des mathématiciens, Paris, PUF, 1955.

Florian Cajori

A history of mathematical notations, New York, Dover publications, 1993. (818 p.). Edizione originale 1928-1929.

André-Jean Glière

«Histoire et épistémologie des nombres négatifs de d'Alembert à nos jours», tesi inedita sostenuta all'EHESS (Parigi) nel giugno 2007. (gaj.math@numericable.fr)

5. I poliedri semiregolari

Antonio Steiner, Martin J. Gander[1] e Gianfranco Arrigo

This topologic class consists of 22 types of polyhedron, 5 of which are the regular polyhedra. This class was discovered after having found an easy proof of Euler's formula v–s+f=2.

1. Il teorema di Euler sui poliedri

Enunciato del teorema

Per un poliedro di genere 0 e delimitato da porzioni di superfici semplicemente connesse, posto $S = v - s + f$ si ha $S = v - s + f = 2$ (1)
Le lettere v, s, f indicano ordinatamente il numero di vertici, di spigoli e di facce del poliedro.

Dimostrazione

Sulle ipotesi del teorema, in particolare sul tipo di poliedro considerato, si confrontino le seguenti figure 1 e 2:

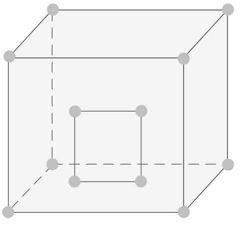


Fig. 1
Poliedro di genere 0
non tutte le facce sono semplicemente connesse
S=12–16+7=3

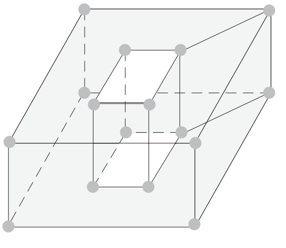


Fig. 2
Poliedro di genere 1
tutte le facce sono semplicemente connesse
S=16–26+10=0

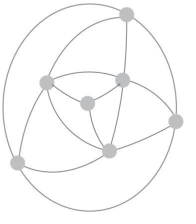


Fig. 3
Rete triangolare piana
S=7–15+9=1

Un poliedro che soddisfa alle ipotesi del teorema, se gonfiato, assume la forma di una sfera. Ogni sua faccia non triangolare può essere triangolata, senza che il valore di S cambi. Se si leva una superficie triangolare, si ottiene una rete triangolare

1. Professore ordinario alla Sezione di matematica dell'Università di Ginevra.

piana, del tipo di quella rappresentata nella figura 3. Basta dimostrare che per una tale rete vale S=1. Ora, per un singolo triangolo, si ha evidentemente S=1. Ma ogni aggiunta o soppressione di triangoli non cambia il valore di S, dunque, per qualunque rete triangolare piana vale S=1 e di conseguenza per i poliedri che soddisfano l'ipotesi del teorema vale S=2.

2. I poliedri regolari

Chiamiamo regolare un poliedro che abbia il genere della sfera, che sia delimitato da facce semplicemente connesse e tale che in ogni vertice confluisca uno stesso numero di spigoli p (p≥3).

Per questi solidi vale il teorema di Euler sui poliedri e inoltre, mantenendo le stesse lettere del punto 1, si ha

$$p \cdot v = 2\,s \qquad (2)$$

Se inoltre si aggiunge la condizione che ogni faccia abbia t lati (t≥3), si ha anche

$$t \cdot f = 2\,s \qquad (3)$$

Le due ultime condizioni supplementari sono tra loro indipendenti, come mostra anche la figura 4.

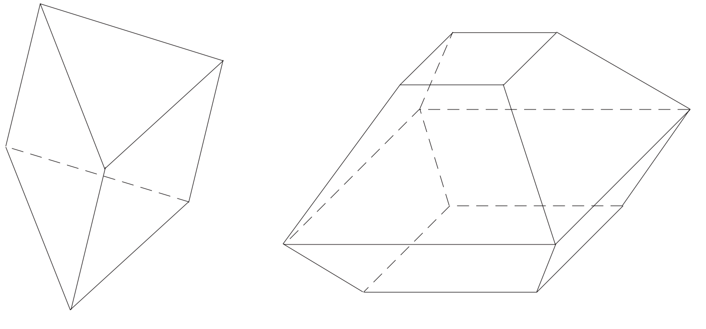


Fig. 4 Stesso numero di spigoli in un vertice e stesso numero di spigoli in una faccia sono condizioni indipendenti.

Possiamo scrivere il seguente sistema di equazioni nelle incognite v, s, f:

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}\begin{cases} v - s + f = 2 \\ p\,v - 2\,s = 0 \\ -2\,s + t\,f = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono

$$v = \frac{4\,t}{n} \qquad s = \frac{2\,p\,t}{n} \qquad f = \frac{4\,p}{n} \qquad (4)$$

inoltre poniamo

$$n := 2\,(p + t) - p\,t$$

Otteniamo così la condizione necessaria dell'esistenza dei 5 possibili poliedri regolari, come mostra la tabella 5.

p	t	n	v	s	f
3	3	3	4	6	4
3	4	2	8	12	16
3	5	1	20	30	12
4	3	2	6	12	8
5	3	1	12	30	20

Tabella 1: poliedri regolari

I poliedri regolari sono ben conosciuti: tetraedro, esaedro (cubo), ottaedro, dodecaedro, icosaedro. Le figure 5 e 6 mostrano uno spaccato degli ultimi due.

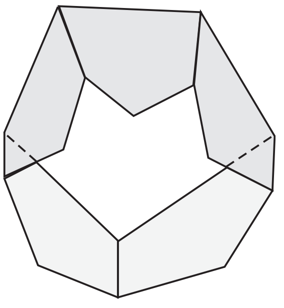


Figura 5: mezzo dodecaedro

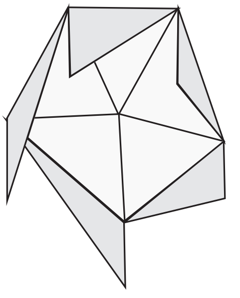


Figura 6: mezzo icosaedro

3. La classe K dei poliedri semiregolari[2]

Si compone dei poliedri che hanno lo stesso genere della sfera, nei quali in ogni vertice confluiscono tre spigoli e le cui facce sono f_3 triangoli, f_4 quadrilateri e f_5 pentagoni.

Per p=3, contando gli spigoli, si ottiene:

$$2\,s = 3\,f_3 + 4\,f_4 + 5\,f_5 = 3\,v$$

Sostituendo i valori

$$\begin{cases} v = \frac{1}{3}\left(3\,f_3 + 4\,f_4 + 5\,f_5\right) \\ s = \frac{1}{2}\left(3\,f_3 + 4\,f_4 + 5\,f_5\right) \\ f = f_3 + f_4 + f_5 \end{cases}$$

in (1) $v - s + f = 2$

si ricava la condizione necessaria per un poliedro semiregolare della classe K

$$3\,f_3 + 2\,f_4 + f_5 = 12 \quad (5)$$

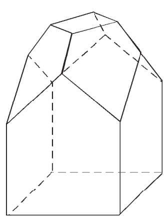
2. Vedere A. Steiner, M. Gander (1999). Avventurandoci nello spazio. *Bollettino dei docenti di matematica, nr. 38*. Bellinzona: UIM-CDC.

Per poliedri semiregolari della classe K, si presentano le 11 possibilità indicate nella tabella 2.

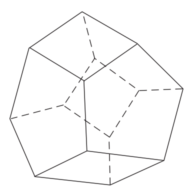
Nr.	f_3	f_4	f_5	$v = \frac{1}{3}(3f_3 + 4f_4 + 5f_5)$	$s = \frac{1}{2}(3f_3 + 4f_4 + 5f_5)$	$f = f_3 + f_4 + f_5$
1	0	0	12	20	30	12
2	0	2	8	16	24	10
3	0	3	6	14	21	9
4	0	4	4	12	18	8
5	0	5	2	10	15	17
6	0	6	0	8	12	6
7	1	3	3	10	15	7
8	2	0	6	12	18	8
9	2	2	2	8	12	6
10	2	3	0	6	9	5
11	4	0	0	4	6	4

Tabella 2 Poliedri semiregolari della classe K.

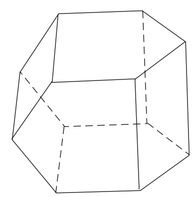
I poliedri dei numeri 1, 5, 6, 10 e 11 sono conosciuti e facilmente rappresentabili: si tratta, nell'ordine, di: dodecaedro a facce pentagonali, prisma pentagonale, cubo, prisma triangolare e tetraedro. Meno noti sono i poliedri dei numeri 2, 3, 4, 7, 8 e 9. Il lettore è invitato a immaginare o realizzare o schizzare un modello di ciascuno di essi: può poi confrontare il proprio risultato con la figura 7.



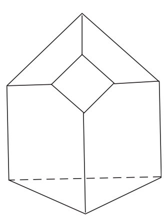
Nr. 2: $\begin{cases} f_3 = 0 \\ f_4 = 2 \\ f_5 = 8 \end{cases}$



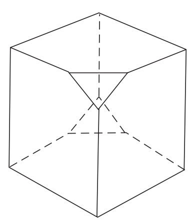
Nr. 3: $\begin{cases} f_3 = 0 \\ f_4 = 3 \\ f_5 = 6 \end{cases}$



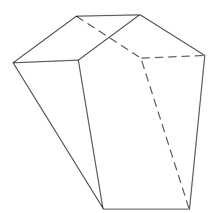
Nr. 4: $\begin{cases} f_3 = 0 \\ f_4 = 4 \\ f_5 = 4 \end{cases}$



Nr. 7: $\begin{cases} f_3 = 1 \\ f_4 = 3 \\ f_5 = 3 \end{cases}$



Nr. 8: $\begin{cases} f_3 = 2 \\ f_4 = 0 \\ f_5 = 6 \end{cases}$



Nr. 9: $\begin{cases} f_3 = 2 \\ f_4 = 2 \\ f_5 = 2 \end{cases}$

Figura 7 p=3; i meno noti poliedri semiregolari della classe K.

4. La classe K’, duale della K, dei poliedri semiregolari

I poliedri della classe K’ sono di genere 0, con tutte le facce triangolari (t=3) e tali che in v_3 vertici confluiscono 3 spigoli, in v_4 vertici confluiscono 4 spigoli e in v_5 vertici confluiscono 5 spigoli.

Contando gli spigoli, si ottiene:

$$2\,s = 3\,v_3 + 4\,v_4 + 5\,v_5 = 3\,f$$

Sostituendo i valori

$$\begin{cases} v = v_3 + v_4 + v_5 \\ s = \frac{1}{2}\left(3\,v_3 + 4\,v_4 + 5\,v_5\right) \\ f = \frac{1}{3}\left(3\,v_3 + 4\,v_4 + 5\,v_5\right) \end{cases}$$

in (1) $v - s + f = 2$

si ricava la condizione necessaria per un poliedro semiregolare della classe K’

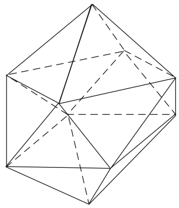
$$3\,v_3 + 2\,v_4 + v_5 = 12 \qquad (6)$$

Nella tabella 3 sono presentati gli 11 possibili poliedri semiregolari della classe K’.

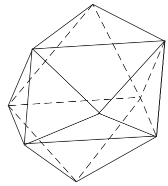
Nr.	v_3	v_4	v_5	$v = v_3 + v_4 + v_5$	$s = \frac{1}{2}\left(3\,v_3 + 4\,v_4 + 5\,v_5\right)$	$f = \frac{1}{3}\left(3\,v_3 + 4\,v_4 + 5\,v_5\right)$
1’	0	0	12	12	30	20
2’	0	2	8	10	24	16
3’	0	3	6	9	21	14
4’	0	4	4	8	18	12
5’	0	5	2	7	15	10
6’	0	6	0	6	12	8
7’	1	3	3	7	15	10
8’	2	0	6	8	18	12
9’	2	2	2	6	12	8
10’	2	3	0	5	9	6
11’	4	0	0	4	6	4

Tabella 3 Poliedri semiregolari della classe K’.

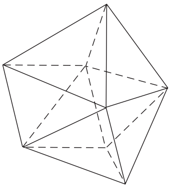
I poliedri dei numeri 1’, 5’, 6’, 10’ e 11’ sono facilmente riconoscibili in (nell’ordine): icosaedro, due piramidi pentagonali con le basi sovrapposte, ottaedro, due tetraedri con due facce sovrapposte e tetraedro. I poliedri dei numeri 2’, 3’, 4’, 7’, 8’ e 9’ sono rappresentati nella figura 8.



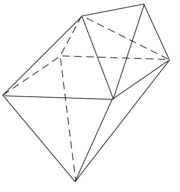
Nr. 2': $\begin{cases} v_3 = 0 \\ v_4 = 2 \\ v_5 = 8 \end{cases}$



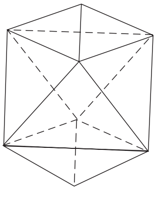
Nr. 3': $\begin{cases} v_3 = 0 \\ v_4 = 3 \\ v_5 = 6 \end{cases}$



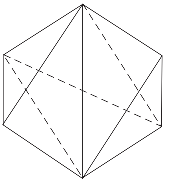
Nr. 4': $\begin{cases} v_3 = 0 \\ v_4 = 4 \\ v_5 = 4 \end{cases}$



Nr. 7': $\begin{cases} v_3 = 1 \\ v_4 = 3 \\ v_5 = 3 \end{cases}$



Nr. 8': $\begin{cases} v_3 = 2 \\ v_4 = 0 \\ v_5 = 6 \end{cases}$



Nr. 9': $\begin{cases} v_3 = 2 \\ v_4 = 2 \\ v_5 = 2 \end{cases}$

Figura 8 t=3; i meno noti poliedri semiregolari della classe K'.

6. Centenario di Leonhard Euler: Basilea 1707 – Pietroburgo 1783

Silvio Maracchia[1]

After a brief reference to the life and the works of Eulero, the present article examines the main point of his contribution to the determination of the number "e" and to the solution of the "Basel problem", both obtained through the use of series (infinite) used with ingenious boldness.

Introduzione e cenni sulla vita di Eulero

Come accade per molti matematici, specialmente per quelli di grande rilievo, la vita di Eulero non presenta molti avvenimenti interessanti o aneddoti significativi; egli non combatté alcuna guerra, non parteggiò per movimenti politici e non fu coinvolto neppure involontariamente da essi. Si può sintetizzare l'intera vita di Eulero affermando che egli si occupò esclusivamente della sua *famiglia*[2] e della *matematica*[3]. Punto.

Osserviamo comunque i primi anni della vita di Eulero che egli stesso dettò al figlio Albrecht[4]

«Io, Leonhard Euler, sono nato nell'anno 1707 il 15 aprile del calendario nuovo a Basilea. Mio padre era Paulus Euler, mia madre si chiamava Margaretha Bruckner. I miei genitori si stabilirono poco dopo nel comune di Riehen, situato a un'ora a piedi da Basilea, dove mio padre era stato nominato parroco. Qui ricevetti i primi rudimenti dell'istruzione da mio padre, che, essendo stato discepolo del famoso Jacob Bernoulli, volle trasmettermi fin da giovanissimo i fondamenti della matematica, usando a tale scopo come testo il manuale di Coss con le annotazioni di Michaels Stiefels (che era il testo di "Algebra" di Christophs Rudolphs del 1525 opportunamente rifatto). Con questo testo mi esercitai per alcuni anni. Più tardi, per poter studiare scienze umane, mi trasferii presso mia nonna a Basilea, dove frequentai il ginnasio e contemporaneamente perfezionai le mie conoscenze matematiche prendendo lezioni private.

Nel 1720 entrai all'Università e ben presto conobbi il famoso professore Johann Bernoulli, che si prodigò per aiutarmi. Non potendo però impartirmi personalmente lezioni private, mi con-

---

1. Università «La Sapienza», Roma.
2. Eulero si sposò due volte (1733; 1776): dalla prima moglie, Katharina Gsell, ebbe tredici figli (dei quali solo cinque sopravvissero) e nessuno dalla seconda, Salomé Abigael Gsell, sua cognata.
3. La produzione matematica di Eulero non si interruppe neppure quando nel 1771 divenne completamente cieco: si limitò a dettare i suoi risultati matematici a suo figlio Johann Albrecht e fu aiutato anche da un giovane collaboratore, come viene ricordato dall'editore degli *Elementa Algebrae* (Venezia 1790).
4. Ho tratto questa autobiografia dal volume *Leonhard Euler tra realtà e finzione* di F. Di Venti e A. Mariatti (Pitagora ed. Bologna, 2000, pp. 23-25).

gliò di leggere e studiare da solo dei testi piuttosto complicati. Poi ogni sabato sera avevo libero accesso alla sua abitazione ed egli in quelle occasioni mi aiutava ad appianare tutte le difficoltà che avevo incontrato durante la settimana di studio. Poiché ogni dubbio eliminato mi permetteva di chiarirne di colpo altri dieci, penso che questo sia stato il metodo migliore per compiere significativi progressi in matematica.

Nel 1723, a un anno e mezzo dal conseguimento della laurea, venni promosso "Magister". Successivamente, spinto dalla mia famiglia, dovetti iscrivermi alla facoltà di teologia e applicarmi anche allo studio delle lingue greca ed ebraica. Non feci tuttavia molti progressi su questo terreno, poiché mi dedicai maggiormente alla matematica, favorito anche dalla fortunata opportunità di poter continuare a frequentare la casa del professore Johann Bernoulli. In quegli anni era stata fondata la nuova Accademia delle Scienze di San Pietroburgo, alla quale furono invitati come insegnanti nel 1725 i figli di Bernoulli, e ciò fece nascere in me il desiderio di recarmi a San Pietroburgo. I Bernoulli mi promisero che avrebbero fatto tutto il possibile per procurarmi un impiego onorevole in quella città e la promessa fu mantenuta, perché mi trovarono un posto che mi avrebbe permesso di applicare le mie conoscenze matematiche alla medicina.

L'allettante proposta mi giunse solo all'inizio dell'inverno del 1726 ma decisi di rinviare la partenza alla primavera successiva. Nel frattempo mi immatricolai alla facoltà di medicina di Basilea e partecipai senza esito anche al concorso per il posto vacante alla cattedra di fisica presentando uno studio sul suono. Giunta la primavera del 1727, lasciai Basilea all'inizio di aprile e arrivai a Lubecca troppo in anticipo per trovare una nave diretta a San Pietroburgo. Presi allora una nave fino a Reval, poi un'altra fino a Cronstadt. Arrivai a destinazione lo stesso giorno della morte della zarina Caterina I e trovai quindi l'Accademia in grande agitazione e costernazione. Ebbi tuttavia il piacere di incontrare, oltre a Daniel Bernoulli (il fratello Nicolaus era nel frattempo morto), il professor Hermann, un lontano mio parente, il quale mi aiutò in tutti i modi. Il mio salario era di 300 rubli ma in compenso ero esentato dal pagare l'abitazione, la legna per il riscaldamento e la luce. Viste la mie specifiche competenze per la matematica, venni nominato aggiunto "Matheseos sublimioris"; in tal modo decadde la iniziale promessa di un insegnamento inerente la medicina. Mi venne offerta nel contempo l'opportunità di partecipare liberamente alle riunioni accademiche ed esporre in quelle occasioni le mie ricerche e i miei studi matematici.

Nel 1730 i professori Hermann e Bilfinger ritornarono nei loro paesi di origine e io venni designato professore di fisica al posto di quest'ultimo. Il contratto fu stipulato per quattro anni con un salario di 400 rubli nel primo biennio e 600 rubli (più 60 rubli per l'alloggio, la legna e la luce) nel secondo. Sposai Catherina Gsell nel Natale del 1733. Siccome in questo stesso periodo anche il professore Daniel Bernoulli aveva fatto ritorno in patria, venni designato pure professore "Matheseos sublimioris" e successivamente assunsi l'incarico di supervisore del dipartimento geografico, assegnatomi dal senato accademico. Per tutte queste incombenze il mio salario fu portato a 1200 rubli.

Nel 1740, dopo la morte dalla zarina Anna, le cose cominciarono a cambiare e a prendere una brutta piega, perché si instaurò un malgoverno che mi spinse ad accettare senza esitazione un incarico a Berlino. Trasferitomi colà, sua Maestà il re di Prussia mi offrì un salario di 1600 talleri. Ciò che accadde dopo è ormai noto a tutti».

Quello che, secondo Eulero, è noto a tutti è il suo ritorno a Pietroburgo nel 1766, la cecità che lo colpisce dal 1771 e la sua tranquilla morte mentre giocava con un nipotino e prendeva il tè. «*La pipa gli sfuggì dalle dita*» scrive Eric Temple Bell[5] «*e, dicendo "Muoio", Eulero cessò di vivere e di calcolare*».

Rari nantes in gurgite vasto

Parlare di Leonhard Euler matematico è facile e difficile nello stesso tempo.

Facile, perché è così numerosa la sua produzione in tutti i campi della matematica che trovare formule e risultati significative a lui dovuti non presenta molte

5. E. T. Bell, *I grandi matematici*, Sansoni Firenze, 1950, p. 153. L'Autore annota di aver preso gli ultimi istanti della vita di Eulero di cui ho riportato solo l'ultima riga, dall'*Elogio* di Condorcet.

difficoltà. Chi non ha sentito nominare ad esempio la formula di Eulero sulla potenza del numero «e» elevato ad un numero complesso

$e^{x+i\,y} = e^x\,(\cos y + i \operatorname{sen} y)$

o la formula «di Eulero» che lega facce (f), vertici (v) e spigoli (s) di un qualsiasi poliedro convesso

$f + v = s + 2$

o il problema dei ponti di Königsberg, la «retta di Eulero» in un triangolo qualsiasi, i «diagrammi di Eulero-Venn»? E questo solo per parlare dei suoi risultati più noti trascurando, ad esempio, la «teoria dei numeri», i suoi risultati nella «geometria analitica» e, principalmente, quelli nell'analisi differenziale.

Difficile, quasi per lo stesso motivo: di fronte a un interesse per la matematica pressoché globale, al cospetto di una produzione di cui ancora non si è completato l'inventario a trecento anni dalla nascita del nostro matematico[6], è assai arduo trovare una collocazione esatta dell'importanza di questo grande matematico, valutare in maniera completa una sua caratteristica precipua, i suoi contributi ai matematici contemporanei e a quelli successivi in ogni caso assai rilevanti: «*Leggete Eulero, leggete Eulero, egli è il maestro di noi tutti*» così si dice che abbia esclamato una volta Laplace[7].

Oggi possiamo dire però che, grazie al contributo di molti matematici che hanno sistemato in maniera rigorosa molte intuizioni di Eulero, le hanno sviluppate e hanno potuto osservare un panorama più vasto montando, come spesso si è detto per vari altri matematici, sulle sue spalle; oggi possiamo dire di aver assorbito quasi tutti i suoi risultati anche se spesso ne ignoriamo le origini.

D'altra parte Eulero stesso si è talvolta servito di risultati ottenuti da altri matematici, ne ha controllato le intuizioni, inserendosi in quel grande fiume dello sviluppo matematico ingrossato da tanti affluenti.

«*È curioso!*», osservò Henri Poincaré[8] «S*e noi rileggiamo le opere degli antichi saremmo tentati di classificarli tutti tra gli intuitivi*». Ma oltre che curioso appare, a mio avviso, significativo: il matematico è sempre dell'avviso di essere rigoroso e convincente, inserito com'è nella sua epoca e nel livello della scienza del tempo. Solo dopo (qualche volta anche ad opera dello stesso matematico o di qualche contemporaneo) si può stabilire, con il rigore più evoluto, ma anch'esso suscettibile di raffinamento!, che in verità alcuni dei suoi passaggi e delle sue conclusioni erano solo intuitive.

6. Non tutti concordano sulle reali dimensioni della produzione di Eulero anche per le varie *Opera «omnia»* che lo riguardano. M. Kline scrive, ad esempio, che «*le opere di Eulero riempiono quasi settanta volumi*» (*Storia del pensiero matematico*, Einaudi, Torino, 1991, vol. I, p. 3); H. Wussing (*Scienziati e tecnologi dalle origini al 1875,* Mondatori, Milano 1975 alla voce «Eulero») parla di 866 titoli e cita più di 70 volumi dell'opera omnia iniziata nel 1911 e 75 ne cita C.C. Boyer, parlando della stessa opera, e 886 i titoli (800 pagine l'anno, aggiunge, tenendo conto dell'intero arco della vita di Eulero! (cfr. *A History of Mathemaics*, Wiley inc., New York, London, Sydney, 1968, p. 482). Nel libro già citato di F. Di Venti e A. Mariatti stampato nel 2000, si afferma esplicitamente (p. 25) che «*Nell'Archivio dell'Accademia di San Pietroburgo giacciono inoltre sepolte ancora migliaia di pagine manoscritte mai pubblicate*».
7. Questa frase si legge in molti lavori dedicati ad Eulero; ad esempio nella frase dedicatoria premessa al capitolo XX dell'opera di Morris Kline citata nella nota precedente (vol. I, p. 508).
8. H. Poincaré, *La Valeur de la Science*, Flammarion, Paris, 1904, 1ª parte cap. II.

Ebbene, in Eulero si trova in massimo grado sia la geniale intuizione e sia, talvolta, il progresso rigoroso notevole per i tempi. La lettura delle opere di Eulero ha proprio questo di affascinante, che pure attraverso passaggi talora arditi si può notare la grande e geniale intuizione e la fiducia nelle conclusioni ottenute. Una conclusione che molto spesso si può ottenere in maniera convincente con pochi accorgimenti dettati da definizioni più precise e da criteri più soddisfacenti dal punto di vista del rigore. Eulero, ad esempio, tratta talvolta le serie in maniera disinvolta ma altre volte dichiara importante stabilirne la convergenza (da cui la possibilità di poterle trattare quasi come somme finite). Osservò giustamente Gauss che quello che nelle opere di Eulero manca non è la sostanza: è forma soltanto[9].

Mostrerò questo attraverso alcuni significativi esempi: nel primo si assisterà alla nascita della indicazione del numero «e» (simbolo introdotto appunto da Eulero pur essendo già noto come opportuna base dei logaritmi e per relazioni determinate dallo stesso Eulero) e dal suo calcolo attraverso uno sviluppo in serie. Vedremo poi la conseguente nascita della «formula di Eulero» che coinvolge anch'essa il numero «e» e che abbiamo già citato e, infine, la soluzione della determinazione della somma della particolare serie numerica data dagli inversi dei quadrati dei numeri interi («problema basilese» così detto perché invano affrontato dai Bernoulli e in particolare da Jacques Bernoulli).

Sul numero «e»: la nascita[10]

Per seguire il ragionamento di Eulero bisogna premettere alcuni risultati già raggiunti da Isaac Newton sia per la conoscenza dello sviluppo della serie binomiale e sia per la possibilità di invertire una data serie di potenze. Il simbolismo non è però quello di Newton dato che, ad esempio, indicare le funzioni goniometriche con *sin* e *cos* (da lui considerati numeri, coordinate, e non più segmenti) è dovuto proprio ad Eulero.

$$(1+z)^n = 1+\frac{n}{1}z+\frac{n(n-1)}{2!}z^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}z^3+\ldots.. \tag{1}$$

$$\sin z = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots. \tag{2}$$

$$\cos z = 1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots. \tag{3}$$

Ciò premesso, sia

$a > 1$ e poiché $a^0 = 1$ ne segue che se si aumenta l'esponente, anche di «pochissimo» [11] $[0 + w]$, il valore della potenza supera 1 di «pochissimo» $[\psi]$.

9. Riportato da D. Gigli, *Numeri complessi a due e più unità,* in *Questioni riguardanti le Matematiche elementari*, raccolte e coordinate da Federigo Enriques, Zanichelli, Firenze, 1983, vol. I, parte 2ª, p. 234.
10. Questa dimostrazione è presa dalla *Introductio in analysin infinitorum*, t. I, cap. VII dal titolo *De quantitatum exponentialium ac Logarithmorum per Series explicatione* (Lausanne, 1748, nn. 114 sgg.). Colgo l'occasione per ringraziare Sergio De Nuccio con il quale ho discusso lungamente molti argomenti qui trattati
11. *Infinite parum cyphram excedat.* Si tenga conto che «Cyphra» è lo «zero» come a suo tempo indicò Leonardo Pisano che lo aveva a sua volta preso dall'arabo: «*Cum hoc signo 0, quod arabice zephirum appellatur»:* scrive all'inizio del suo *Liber Abaci* (1202; 1228) per mostrare come poter scrivere i numeri in forma decimale.

Si ha dunque:
$a^w = 1 + \psi$ (4)
elevando i due membri al numero «i»[12]:
$a^{i\,w} = (1 + \psi)^i$ (5)

Si pone
$\psi = k\,w$ (con k maggiore, minore o uguale ad 1) (6)
e si applica la (1):

$$a^{i\,w} = (1 + kw)^i = 1 + \frac{i}{1} k\,w + \frac{i\,(i-1)}{1 \cdot 2} k^2\,w^2 + \frac{i\,(i-1)\,(i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} k^3\,w^3 + \ldots \qquad (7)$$

Si pone ora
$i = \dfrac{z}{w}$ («i» è dunque infinitamente grande)

da cui
$$i\,w = z \quad e \quad k\,w = \frac{kz}{i} \qquad (8)$$

Sostituendo nella (7):

$$a^z = \left(1 + \frac{k\,z}{i}\right)^i = 1 + \frac{1}{1} k\,z + \frac{i-1}{1 \cdot 2\,i} k^2\,z^2 + \frac{(i-1)\,(i-2)}{1 \cdot 2\,i \cdot 3\,i} k^3\,z^3 + \ldots \qquad (9)$$

uguaglianza vera per «i» infinito (*infinite magnus*) e cioè, scriveremmo noi, al limite per $i \longrightarrow \infty$.

Ma per i infinitamente grande, scrive Eulero, cioè al limite, diremmo noi, si ha anche

$$\frac{i-1}{2\,i} = \frac{1}{2} \;; \qquad \frac{i-2}{3\,i} = \frac{1}{3} \qquad \text{ecc.}$$

per cui la (9) diventa:

$$a^z = \left(1 + \frac{k\,z}{i}\right)^i = 1 + \frac{k\,z}{1} + \frac{k^2\,z^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3\,z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots \qquad (10)$$

Per z = 1 si ha:

$$a = \left(1 + \frac{k}{i}\right)^i = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots \qquad (11)$$

Vi è quindi una relazione tra «a» e «k» ; ebbene, si può scegliere «a» in modo che sia k = 1.

[Eulero sostituisce ora questo valore, si può però osservare che in questo caso con k = 1 si ha dalla (6): $\psi = w$ per cui la (4) si può scrivere:
$a^w = 1 + w$ cioè $a = (1 + w)^{1/w}$

12. Cerco di seguire il più possibile le lettere usate da Eulero (al posto del suo ω ho però posto w per semplicità tipografica); il numero «i» qui posto da Eulero non ha niente a che vedere con l'unità immaginaria che egli indica con $\sqrt{-1}$.

per cui si vede nascere una definizione del nostro numero «e»[13] anzi, come vedremo tra poco, con k = 1 si avrà proprio a = e]

Torniamo a Eulero, operando nella (11) la sostituzione k = 1 indicata, si ottiene:

$$a = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + ...$$

da cui, scrive Eulero, si ha

$$a = 2{,}718281\ldots$$ [14]

e osserva che i logaritmi con tale base sono detti naturali o iperbolici dato che sono utili per la quadratura dell'iperbole. E conclude: «*Per abbreviare questo numero 2,718281… verrà sempre indicato con la lettera "e"* [iniziale dell'esponenziale*?*] *che perciò denoterà la base dei logaritmi naturali o iperbolici e alla quale corrisponderà il valore* 1 *per la lettera k. In altre parole, questa lettera "e,, indicherà anche la somma della serie*

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + ...$$

fino all'infinito [in infinitum]. *Pertanto con tale numero "e,, sopra trovato si ha per sempre* [dalla (10)]

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + ... \text{ »} \qquad (12)$$

Si può anche scrivere pertanto, come era stato già anticipato, sempre dalla (10) e con k = 1 (per cui a = e)

$$e^z = (1 + \frac{z}{i})^i \qquad (13)$$

con «i» infinito.

13. Si ricordi che w è estremamente piccolo. Talvolta i matematici dell'epoca, non avendo a disposizione l'algoritmo del limite, si limitavano a sostituire, nel caso di grandezze tendenti a zero proprio zero al posto della grandezza, riuscendo spesso a giungere al risultato esatto come aveva fatto ad esempio Fermat nelle sue ricerche di massimi e minimi e nella determinazione delle tangenti ad una curva (cfr. S. Maracchia, *La storia della matematica nell'insegnamento medio,* Periodico di Matematiche, 1983 n. 3-4 (pp.16-32)). D'altra parte lo stesso Eulero si serve di questo «principio della trascurabilità e scrive nella premessa della *Introductio* «*Poi bisogna immaginarsi che questi incrementi diventino sempre più piccoli e si ha che il loro rapporto si avvicina sempre di più ad un certo limite che viene però raggiunto solo quando questi incrementi diventano completamente nulli. Questo limite, che nello stesso tempo è anche l'ultimo rapporto di quelli indicati, è il vero oggetto del calcolo differenziale*» (tratto dal testo citato di F. Di Venti e A. Mariatti, p. 112).
14. Eulero è un intrepido calcolatore, e scrive ben 25 cifre decimali esatte.

Sul numero «e»: *la famosa «formula»*[15]

Si vogliono calcolare i logaritmi di quantità immaginarie e per questo Eulero prende le mosse da un numero complesso a + i b ottenendo agevolmente:

$a + i\,b = c\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$[16]

dove φ è «*certo angolo che sarà agevole trovare mediante le tavole….e* c *è un numero positivo*»[17].

Pertanto:

$$\lg(a + i\,b) = \lg c + \lg(\cos\varphi + i\sin\varphi) = C + \lg x \qquad (14)$$

Si tratta di trovare pertanto tutti i logaritmi della quantità immaginaria $x = (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ e questi logaritmi saranno dati dai valori

$$y = \lg x \qquad (15)$$

tali che, scrive Eulero, y risolva l'equazione:

$$(1+\frac{y}{n})^n - x = 0 \qquad (16)$$

con «n» numero infinito.

Per intendere quello che Eulero afferma, teniamo presente che, per n infinito (cioè per n che tende all'infinito), sappiamo dalla (13)

$$(1+\frac{y}{n})^n = e^y \qquad (17)$$

cioè, per la (16)

$$x = e^y \qquad (18)$$

identica alla (15).

15. Tratto da *De la Controverse entre Mrs Leibniz e Bernoulli sur les logarithmes des nombres negatifs et imaginaires* (Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin 1749 ma stampata nel 1751) «Problema 3 *Determinare tutti i logaritmi di una quantità immaginaria qualunque*» (nei due problemi precedenti Eulero aveva considerato i logaritmi di numeri positivi e negativi, preceduti dal *Teorema* di carattere generale) Vedremo in una nota seguente che Eulero aveva già ottenuto in precedenza il risultato finale. Ho voluto mostrare in questa circostanza il legame tra i nostri due paragrafi sul numero «e». Essi si trovano in opere diverse ma sembrano proprio scritte di seguito.
16. Sappiamo che Eulero scrive $\sqrt{-1}$ al posto di i; c'è naturalmente il nostro modulo che Eulero indica con la $\sqrt{aa+bb}$.
17. Con a e b dati, noi sappiamo che $\varphi = \mathrm{arctg}\, b/a + 2k\pi$.

Riassumendo, Eulero ha ottenuto

$$x = \cos\varphi + i\sin\varphi = (1+\frac{y}{n})^n = e^y \qquad (19)$$

ma per stabilire il legame tra y e φ Eulero risolve l'equazione del tipo, scrive, $p^n = q^n$,

cioè, nel nostro caso:

$$(1+\frac{y}{n})^n = (1+\frac{\varphi i}{n})^n \qquad (20)$$

entrambe uguali alla $\cos\varphi + i\sin\varphi$; la prima uguale per quanto ora detto con la (19) e la seconda uguale ad $e^{i\varphi}$ [estensione al campo complesso della (13)], e uguale «*come è stato dimostrato altrove*», scrive, anch'essa a $\cos\varphi + i\sin\varphi$.[18]

Quest'ultima relazione è proprio la «famosa formula» di Eulero che si vuole mostrare nel presente paragrafo. Vediamo però, prima di riprenderla e scriverla in maniera più esplicita, come viene qui dimostrata da Eulero.

Dalla combinazione delle (13) e (12)[19], e successivamente dalle (2) e (3) si ha:

$$e^{i\varphi} = (1+\frac{\varphi\, i}{n})^n = 1 + i\frac{\varphi}{1} - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i\frac{\varphi^5}{5!} - \ldots =$$

$$= 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \ldots. + i(\frac{\varphi}{1} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \ldots.) = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad (21)$$

Abbiamo così ottenuto la famosa «formula di Eulero»

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad (22)$$ [20]

Questa formula può essere completata moltiplicando i due membri per e^x e, sostituendo y al posto della φ, la si trova oggi nei libri di analisi nella forma:

$$e^{x+iy} = e^z = e^x(\cos y + i\sin y) \qquad (23)$$

ma anche, in particolare, sostituendo π al posto della φ, nella formula «magica», forse la più bella formula di tutta la matematica, su cui molto è stato scritto:

$$e^{i\pi} = -1 \qquad (24)$$ [21]

18. Questa formula era stata ottenuta da Eulero già nell'*Introductio* (I,VIII, 138) del 1748 e molto prima nella *Commentatione 61 Eneströmiani* (Berlino 1743) sempre assieme alle formule: $\cos\varphi = (e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})/2e$ $\sin\varphi = (e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})/2i$ e prima ancora egli aveva mostrato la prima formula in una lettera del 1740 a Jean Bernoulli e ancora in una lettera del 1741 a Christian Goldbach. Si noti che, dimostrata la (20), si ottiene dunque: $y = i\varphi$. Cfr. anche l'esposizione che dà all'intero argomento D. Gigli nell'op. cit. pp. 232 sgg.
19. Questa volta è «n» ad essere «infinito» (con il significato che sappiamo) e la (12) è stata estesa anche al numero complesso i, come prima la (13), con la consapevolezza che $i^2=-1$; $i^3=-i$; $i^4=1$ ecc.
20. Si noti che aver considerato (per primo) le funzioni goniometriche come numeri anziché segmenti e loro rapporti porta più facilmente a considerare $\cos\varphi + i\sin\varphi = \cos(\varphi+2k\pi) + i\sin(\varphi+2k\pi)$ e questo comporterà, come vedremo tra poco, che le potenze con esponente immaginario e i logaritmi dei numeri negativi sono uguali ad infiniti numeri immaginari.
21. Si noti che prendendo i logaritmi dei due membri si ottiene $i\pi = \log(-1)$. Noi sappiamo però che è possibile sostituire al radiante π gli infiniti altri archi $\pi + 2k\pi$. In generale si ha infatti, per qualsiasi valore reale o complesso, con una formula dunque riassuntiva: $\log z = \log|z| + i\,\mathrm{Arg.}\,z$.

Il problema basilese[22]

Questo problema consiste nel determinare la somma, sempre che esista, della serie

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+....$$ [23]

La dimostrazione di Eulero prende le mosse dallo sviluppo a noi già noto:

$$\sin z = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+....$$

Per sin z = 0 [cioè per z = π; 2π; 3π; 4π …] si ha:

$$0 = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+.... \qquad (*)$$

[le cui radici sono z = i valori detti]

Dividendo per z e sostituendo w a z^2 si ottiene:

$$0 = 1-\frac{w}{3!}+\frac{w^2}{5!}-\frac{w^3}{7!}+.... \qquad (**)$$

le cui radici sono:

$$z^2 = w = (\pi)^2\ ;\ (2\pi)^2\ ;\ (3\pi)^2\ ;\ (4\pi)^2\ \ldots \qquad (***)$$

A questo punto Eulero considera la (**) come fosse un'equazione finita avente per radici le (***). Ma per un'equazione di grado n:

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \quad + a_1 x + 1 = 0$

avente per radici x_1; x_2; x_3; .. ; x_n e con termine noto uguale a (+1), si ha, per le note formule di Viète-Girard:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+....+\frac{1}{x_n}=\frac{(x_2x_3\cdot...\cdot x_n)+(x_1x_3\cdot...\cdot x_n)+....+(x_1x_2\cdot...\cdot x_{n-1})}{x_1x_2x_3\cdot...\cdot x_n}=$$

$$\frac{-a_1/a_n}{1/a_n}=-a_1$$

22. Come è accaduto già altre volte, Eulero ripete talvolta risultati già acquisiti. Farò riferimento al lavoro presente nel *Journal littéraire d'Allemagne, de Suisse et du Nord,* 1743, t. II, Primière Partie riportato da Paul Stäckel in *Eine vergessene Abhandlung Leonhard Euler's über die Summe der reziproken Quadrate der naturlichen Zahlen («Bibliotheca Matematica»* III, 8, 1907-1908). La dimostrazione si trova anche nella *Introductio*, I, par. 271 sgg.
23. Non è difficile però, oggi, dimostrare la convergenza di questa serie (e questo giustifica varie operazioni seguite nel seguito) poiché, a prescindere dal primo termine «1» essa è minorante della serie convergente $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+....=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+....$ la cui somma parziale è $S_n = 1 - 1/(n+1)$ ed ha quindi per somma S= 1.

Ebbene, nel caso della (**) con le radici (***), si ha «analogamente», dato che in questo caso il coefficiente del termine di primo grado è $-\frac{1}{3!}$:

$$\frac{1}{(\pi)^2}+\frac{1}{(2\pi)^2}+\frac{1}{(3\pi)^2}+....=-(-\frac{1}{3!})=\frac{1}{6}$$

E pertanto «moltiplicando membro a membro» per π^2:

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+....$$

Scrive Carl Boyer a questo proposito[24]:

«Quando Jean Bernoulli apprese il trionfo di Eulero, scrisse: "E così è soddisfatto l'ardente desiderio di mio fratello che, rendendosi conto che la ricerca di tale somma era più difficile di quanto chiunque avrebbe potuto pensare, confessava apertamente che tutti i suoi più ferventi sforzi erano stati vani. Se solo mio fratello fosse vivo ora!"»

Sempre a questo proposito, prima di riportare il brillante risultato di Eulero visto, Jean-Paul Collette scrive[25]:

«Abbiamo già detto che Eulero manipola a volte le serie infinite con errore di previsione particolarmente evidente. Ciononostante, questo non gli ha impedito di contribuire in maniera importante allo studio delle serie infinite con il contributo di risultati originali e sommamente significativi, grazie ad una audacia poco comune ed a un virtuosismo senza paragone».

Genio, audacia e un pizzico di fortuna.

24. C. Boyer, op. cit. 487.
25. Posso citare solo la traduzione spagnola di questo resto di storia della matematica: *Historia de las matemàticas,* Siglo Ventiuno de España Editores, II vol. 1985, p. 200.

(Riprendo sia le varie opere citate via via nel presente articolo e sia alcune opere di carattere generale che sono ugualmente servite per la sua stesura.)

Bagni G. T.
Storia della Matematica, ed. Pitagora, Bologna vol. II.

Bell E. T.
I grandi matematici, Sansoni, Firenze, 1950.

Bottazzini U.
Il calcolo sublime. Storia dell'analisi matematica da Euler a Weiestrass, Boringhieri, Torino, 1981.

Boyer C.
Histotry of Mathematics, Wiley inc., New York, London, Sydney, 1968.

Cajori F.
A History of Mathematical Notations, La Salle, Illinois, 1928, due volumi.

Castelnuovo G.
Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna, Feltrinelli, Milano, 1962.

Collette J-P.
Historia de las matemàticas, Siglo Veintiuno de España Editores, 2º vol. 1985.

Di Venti F., Mariatti A.
Leonhard Euler tra realtà e finzione, e. Pitagora, Bologna, 2000.

Euler L.
Introductio in analysin infinitorum, Lausanne, 1748.

Euler L.
De la controverse entre Mrs. Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres negatifs et imaginaires, Commentatio 168*, Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin,* 1751.

Euler L.
Demonstration de la somme de cette Suite 1+1/4+1/9+… riportato nell'art. di P. Stäckel, *Eine vergessene Abhandlung Leonhard Euler über die Summe der reziproken Quadrate der natürlichen Zahlen,*in *Bibliotheca Mathematica*, Teubner, Leipzig, 1907-1908.

Euler L.
Elementa Algebrae, Tomus primus, Pezzana in Venetiis, 1790.

Ghizzetti A.
Lezioni di Analisi Matematica, Veschi, Roma, Vol. I, 1960-1961

Kline M.
Storia del pensiero matematico, Einaudi, Torino, vol. I, 1991.

Leonardo Pisano
Liber Abbaci, ed. Boncompagni, Roma, 1857.

Loria G.
Storia delle Matematiche, Cisalpino-Goliardica, Modena, 1982.

Maracchia S.
Una formula magica, Liceo scientifico J. F. Kennedy, Roma, tip. Centenari, 1967.

Maracchia S.
La storia della matematica nell'insegnamento medio, in *Periodico delle matematiche, 1983, nn. 3-4.*

Poincaré H.
La Valeur de la Science, Flammarion, Paris, 1904.

Wussing H.
Voce «*Eulero*» in *Scienziati e tecnologi dalle origini al 1875*, Mondadori Milano, vol. I, 1975.

7. Il maestro di tutti noi

Giulio Cesare Barozzi[1]

Three centuries after the birth of the famous Swiss mathematician Leonhard Euler, we single out of his immense mathematical production a true gem: his extension of the so called Little Fermat's Theorem. A prophetic result tha was to deliver its potential more than two centuries later as the starting point of modern cryptographic systems.

Quest'anno 2007 in cui ricorre il terzo centenario della nascita di Leonhard Euler è l'occasione propizia per un ripensamento dell'immane opera del matematico di Basilea; la sua grandezza non sfuggì ai contemporanei e ai matematici delle generazioni successive, tanto da fare esclamare a Laplace: *Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre mâitre a tous!*

Eulero lasciò risultati significativi in tutti i settori della matematica conosciuti nel suo secolo e contribuì ad aprirne dei nuovi. Alcuni suoi risultati hanno un sapore profetico, nel senso che si sono dimostrati fecondi anche a distanza di oltre due secoli. A un particolare risultato di Eulero, che è stato decisivo per lo sviluppo dei cosiddetti codici crittografici a chiave pubblica e ad altri risultati recenti di teoria dei numeri, è dedicata questa breve nota.

Dobbiamo fare un passo indietro e riportarci a un risultato di P. de Fermat (1601-1665). Ricordiamo innanzitutto alcune notazioni, con relativa terminologia, introdotte da C.F. Gauss alla fine del diciottesimo secolo: la scrittura $a \equiv b \pmod{m}$ (dove m è un intero ≤ 2) significa che la differenza $a-b$ è divisibile per m, o, in termini equivalenti, che a e b danno luogo allo stesso resto una volta divisi per m. Si dice che a e b sono *congrui* tra loro modulo m.

La relazione di congruenza modulo m è una relazione di equivalenza nell'anello degli interi $\mathbf{Z}$. Dunque essa induce una partizione di $\mathbf{Z}$ stesso in classi di equivalenza: lo spazio quoziente verrà indicato $\mathbf{Z}_m$: esso consta di m classi di equivalenza: $[0], [1], \ldots, [m-1]$, dove abbiamo indicato col simbolo $[n]$ l'insieme degli interi congrui a n modulo m.

Le operazioni di addizione e moltiplicazione su $\mathbf{Z}$ inducono operazioni analoghe su $\mathbf{Z}_m$. Ci si chiede se $\mathbf{Z}_m$ sia un campo oltre che un anello, cioè se tutti gli elementi distinti da [0] (la classe di equivalenza dello 0) siano invertibili. La risposta è un classico teorema di algebra: $\mathbf{Z}_m$ è un campo se e solo se m è primo. Il lettore interessato può consultare i testi [1], [2], [4] dell'elenco riportato in bibliografia.

1. Professore Emerito dell'Università di Bologna.

Il risultato di Fermat a cui accennavamo poco sopra (noto come *piccolo teorema di Fermat*) è il seguente:

Teorema. Se p è primo, allora $n^p \equiv n \pmod p$ per ogni naturale n.

Il risultato precedente si scrive anche

$$\left[n^p\right]=[n]\left[n^{p-1}\right]=[n];$$

se 1<n<p, [n] è un elemento invertibile di $\mathbf{Z}_p$ e dunque può essere «cancellato»:

$$\left[n^{p-1}\right]=[1] \quad\Leftrightarrow\quad n^{p-1}=n\cdot n^{p-2}\equiv 1 \pmod p\text{, cioè } \left[n^{p-2}\right] \text{ è il reciproco di } [n].$$

Abbiamo dunque un metodo per calcolare i reciproci degli elementi invertibili di $\mathbf{Z}_p$.

Ad esempio, se vogliamo calcolare il reciproco di 5 in $\mathbf{Z}_7$ basta calcolare $5^5 \pmod 7$: si ottiene 3.

Infatti $3 \cdot 5 = 15 \equiv 1 \pmod 7$.

Segnaliamo che esiste un algoritmo alternativo per il calcolo dei reciproci modulo p, basato sulla versione estesa dell'algoritmo euclideo per il calcolo del MCD.

Interessa qui segnalare che il piccolo teorema di Fermat è all'origine dei cosiddetti *test probabilistici* di primalità. Sia p un numero che si sospetta essere primo; se si scopre un intero n per cui n^p non è congruo ad n, allora p è certamente composto.

Dunque il piccolo teorema di Fermat può fornire una condizione sufficiente affinché un numero sia composto, o, in alternativa, una condizione necessaria affinché esso sia primo.

Se $n^p \equiv n \pmod p$ per un assegnato n, si dice che p è *pseudoprimo* in base n.

L'idea più elementare alla base dei test probabilistici di primalità consiste nel sottoporre p (il numero indiziato di essere primo) ad una pluralità di test con differenti valori di n: se uno di tali test fallisce, il numero p è certamente composto; se tutti hanno successo, tanto maggiore è la probabilità che p sia primo quanto più elevato è il numero dei test stessi.

Il lettore interessato potrà utilmente leggere i due recenti articoli di Caire e Cerruti [3].

Quanto abbiamo detto finora si applica al caso in cui si considera la congruenza rispetto a un numero primo. Che cosa accede a $\mathbf{Z}_m$ se m non è primo?

Qui entra in scena Eulero. Se m non è primo sono invertibili in $\mathbf{Z}_m$ tutti (e soltanto) gli elementi relativi a numeri primi rispetto a m. Ad esempio in $\mathbf{Z}_{12}$ sono invertibili le classi relative ai numeri 1, 5, 7, 11 e soltanto esse.

Eulero si propone di contare quanti siano i numeri primi rispetto a m e introduce allo scopo la funzione

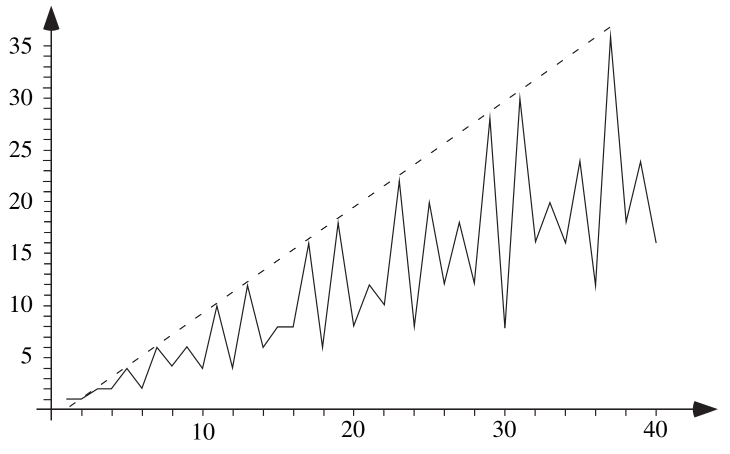
$$\varphi(n) := \mathrm{card}\left\{x \in [0, n-1] \mid \mathrm{MCD}(x, n) = 1\right\} \tag{1}$$

detta talvolta funzione *indicatrice* (in inglese: *totient function*).

Dunque per ogni $m \leq 2$, il numero degli elementi invertibili di $\mathbf{Z}_m$ è $\varphi(m)$. Alcuni valori della funzione φ:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
φ(n)	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4

La figura seguente mostra l'andamento della funzione $n \mapsto \varphi(n)$ per $n \leq 40$. I punti sulla retta tratteggiata hanno come ascissa un numero primo.



Evidentemente, se p è primo, si ha $\varphi(p) = p-1$ (e viceversa). È facile anche calcolare $\varphi(n)$ se $n = p^k$, con k naturale: poiché i numeri minori di n e non primi rispetto ad esso sono

$0, p, 2p, \ldots, p^k - p = p\,(p^{k-1} - 1)$

dunque in numero di p^{k-1}, avremo

$$\varphi(n) = p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p-1) \qquad (2)$$

La proprietà fondamentale della funzione φ è espressa dal teorema seguente: esso ci dice che φ è una funzione «moltiplicativa»:

Teorema. Per ogni coppia di interi positivi a e b primi tra loro si ha

$$\varphi(a\,b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) \qquad (3)$$

Sappiamo che ogni numero positivo ≤ 2 o è primo oppure si può scrivere come prodotto di potenze di numeri primi distinti, cioè può essere *scomposto in fattori primi*:

$$n = \prod_{p|n} p^{\alpha(p)} \qquad (4)$$

dove il prodotto è esteso ai numeri primi che dividono n e gli esponenti ·(p) sono interi positivi. Combinando la (2) con la (3) si ottiene, per ogni n>0,

$$\varphi(n) = \prod_{p|n} p^{\alpha(p)-1}(p-1) = \prod_{p|n} p^{\alpha(p)}\left(1 - \frac{1}{p}\right) = n \prod_{p|n}\left(1 - \frac{1}{p}\right) \qquad (5)$$

La funzione φ è direttamente disponibile nei sistemi Derive, Maple e Mathematica: le denominazioni sono, nell'ordine, EULER PHI(n), phi(n) e EulerPhi[n].

Eulero generalizza il risultato di Fermat mediante il seguente

Teorema. Se m è intero ≤ 2 e a è un intero primo rispetto a m, allora

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m \qquad (6)$$

Abbiamo scritto a al posto della n che abbiamo utili zato nel teorema di Fermat. Dalla (6) si deduce, moltiplicando ambo i membri per a,

$$a^{\varphi(m)+1} \equiv a \pmod m \tag{7}$$

un'uguaglianza a cui siamo molto interessati ai fini di quanto segue. Si osservi che la (6) può essere falsa se a non è primo rispetto a m: ad esempio sia m = 4, quindi φ(m) = 2; per i numeri compresi tra 1 e 3 abbiamo i seguenti risultati:

a	1	2	3
a^2 mod 4	1	0	1
a^3 mod 4	1	0	3

Dunque la (6) è falsa e di conseguenza anche la (7).

Può destare qualche sospetto il fatto che abbiamo scelto come modulo un numero composto con un fattore ripetuto m = 4 = 2 · 2. Ripetiamo lo stesso esperimento scegliendo m = 2 · 3 = 6, quindi ancora φ(m) = 2. Abbiamo i risultati mostrati dalla seguente tabella:

a	1	2	3	4	5
a^2 mod 4	1	4	3	4	1
a^3 mod 4	1	2	3	4	5

Dunque, sebbene la (6) possa essere falsa (e lo è esattamente per i numeri che non sono primi rispetto al modulo 6) la (7) è vera per ogni numero compreso tra 1 e 5 e lo è ovviamente anche per a = 0. La spiegazione sta nel fatto che se un numero a non è primo rispetto uno dei due fattori 2 oppure 3, esso è necessariamente primo rispetto all'altro fattore.

Dunque vale il risultato seguente: sia m = p · q, con p e q numeri primi distinti. Sappiamo che

$$\varphi(m) = (p-1)(q-1)$$

allora per ogni numero naturale a si ha

$$a^{\varphi(m)+1} = a^{(p-1)(q-1)+1} \equiv a \pmod m \tag{8}$$

In particolare per $0 \le a < m$, abbiamo

$$a^{(p-1)(q-1)+1} \bmod m = a \tag{9}$$

A parole: il resto della divisione di $a^{(p-1)(q-1)+1}$ per m restituisce a. Il lettore interessato a una dimostrazione della (9) può consultare [2], esercizio 2.21.

La (9) è il punto di partenza dello sviluppo moderno del metodo RSA per realizzare un sistema di crittografia a chiave pubblica. Nel 1977, tre ricercatori del Massachusetts Institute of Technology, R.L. Rivest, A. Shamir e L.M. Adleman, osservarono che era possibile basare un sistema crittografico a chiave pubblica sulla difficoltà di fattorizzazione di un numero composto molto grande, ad esempio un numero $m = pq$, prodotto di due primi distinti p e q, ciascuno con un centinaio di cifre decimali.

La dizione «a chiave pubblica» che abbiamo usato poco sopra significa che lo strumento per la codifica dei messaggi da trasmettere può essere reso di pubblico dominio, senza pregiudicare la riservatezza del codice; infatti per la decodifica occorre possedere un'informazione aggiuntiva che, ancorché contenuta in linea di principio nelle informazioni necessarie per la codifica, di fatto richiederebbe tempi proibitivamente lunghi per potere essere dedotta da queste ultime: centinaia o forse migliaia di ore con i mezzi di calcolo e con gli algoritmi attualmente a disposizione.

Osserviamo innanzitutto che un qualunque messaggio può essere tradotto in forma numerica: basta stabilire una corrispondenza biunivoca tra le lettere dell'alfabeto, compresi i segni di interpunzione e lo spazio bianco, e opportuni numeri naturali. Si può, ad esempio, utilizzare il codisce ASCII (American Standard Code for Information Interchange). Naturalmente il mittente e il ricevente devono condividere tale codice.

Un qualunque messaggio viene così trasformato in una «stringa» di cifre; se necessario tale stringa può essere suddivisa in sottostringhe in modo tale che ciascuna di esse rappresenti, in forma decimale, un numero naturale non superiore a un massimo prefissato.

Possiamo dunque sempre ridurci al problema di trasmettere una sequenza di messaggi ciascuno rappresentato da un numero naturale non superiore a un assegnato m. Sia $m = p\,q$, con p e q primi distinti; sappiamo dall'estensione di Eulero del teorema di Fermat che, se $0 \leq a \leq n$, risulta

$$a^{(p-1)(q-1)+1} \bmod m = a$$

Ammettiamo per un istante di poter scrivere l'esponente $(p-1)(q-1)+1$ come prodotto di due interi b e c:

$$b\,c = (p-1)(q-1)+1 \quad \Rightarrow \quad a^{b\,c} = a^{(p-1)(q-1)+1}$$

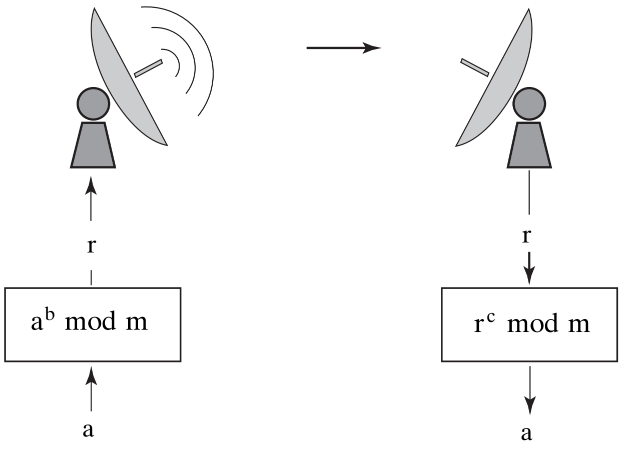
Possiamo usare il seguente codice: per trasmettere l'informazione a, il mittente calcola innanzitutto

$$r \coloneqq a^{b} \bmod m$$

e lo trasmette; il ricevente calcola

$$r^{c} \bmod n = a^{b\,c} \bmod m$$

e ritrova il messaggio originario a, in virtù della (9).



Schema della trasmissione di un messaggio numerico secondo il metodo RSA.

Formalmente: la funzione di codifica è l'applicazione f dell'insieme $\mathbf{N} \cap [0, m-1]$ in sé definita da

$f : a \mapsto a^b \bmod m$

la funzione inversa è
$f^{-1} : r \mapsto r^c \bmod m$

Consideriamo un esempio «giocattolo». Sia $p = 13$, $q = 19$; allora
$(p-1)(q-1)+1 = 217 = 7 \cdot 31$,
quindi possiamo scegliere $b = 7$, $c = 31$, $m = p\,q = 247$.
Per trasmettere il messaggio «3», dobbiamo calcolare $3^7 \bmod 247 = 211$;
il ricevente calcola $211^{31} \bmod 247 = 3$ e ritrova il messaggio originale.

Per codificare è necessario conoscere b (la *chiave pubblica*) e m; per decodificare è necessario conoscere c (la *chiave privata*) e m. Si osservi che
$b\,c = (p-1)(q-1)+1 = m - p - q + 2$
dunque per calcolare c non basta conoscere m e b, ma occorre conoscere i fattori p e q di m.

Come abbiamo già osservato, la fattorizzazione di m può risultare un'impresa virtualmente impossibile se m è «grande», ad esempio possiede più di 200 cifre decimali. Ovviamente, se si trovasse un metodo assai più veloce di quelli attualmente noti per la fattorizzazione degli interi, occorrerebbe utilizzare primi maggiori di quelli attualmente impiegati oppure ricorrere a codici crittografici di concezione interamente nuova.

Segnaliamo il fatto che il calcolo di potenze modulari del tipo $x^n \bmod m$, con x, n e m naturali, può essere eseguito con algoritmi veloci che non richiedono il calcolo esplicito della potenza x^n; nei sistemi di calolo DERIVE, Maple e *Mathematica* tale calcolo si realizza mediante le funzioni POWER_MOD(x,n,m), Power(a,n) mod m e PowerMod[x,n,m] rispettivamente.

La teoria dei numeri, che Gauss aveva definito la regina delle matematiche, è tornata prepotentemente alla ribalta.

[1] Barnabei M., Bonetti F. (2006). *Elementi di aritmetica modulare*. Bologna: Esculapio.

[2] Barozzi G.C. (2006). *Aritmetica: un approccio computazionale.* Milano: Springer Verlag Italia.

[3] Caire, L., Cerruti U. (2006). Questo numero è primo? Sì, forse, dipende ... *La Matematica nella Società e nella cultura*. Bollettino UMI. Vol. IX-A, Dicembre 2006, pp. 449-482.

Numeri primi: la certezza. ibidem, Vol. X-A, Aprile 2007, pp. 85-117.

[4] Childs L. (2000). *A Concrete Introduction to Higher Algebra*, 2nd ed. Springer [una versione italiana della prima edizione: Algebra. Un'introduzione concreta, è stata pubblicata da ETS (Pisa) nel 1989].

[5] Koblitz N. (1994). *A Course in Number Theory and Cryptography*. Springer.

[6] Languasco A., Zaccagnini A. (2004). *Introduzione alla crittografia*, Milano: Manuali Hoepli.

[7] Leonesi S., Toffalori C. (2006). *Numeri e crittografia*. Milano: Springer Italia.

8. Funzioni aritmetiche e serie di Dirichlet

Ottavio M. D'Antona[1], Emanuele Munarini[2]

The aim of this brief note is to commemorate the third centenary of Euler birth presenting the developments of some results he obtained in the theory of numbers. Specifically, we will present the elementare theory of arithmetic functions and formal Dirichlet series, employing it to solve some problems in number theory (Dirichlet convolutions), in linear algebra (Smith determinants) and in enumerative combinatorics (necklace enumeration).

1. Introduzione

Eulero fu un matematico estremamente prolifico che diede numerosi contributi in molteplici campi della scienza e della tecnica. Si occupò di matematica, di ottica, di meccanica, di astronomia, di navigazione, di geografia e persino di musica [4, 10, 19]. Di lui si diceva che calcolasse con la stessa naturalezza con cui gli uomini respirano e le aquile si mantengono in aria e sembra che egli stesso dicesse che la sua penna lo superasse in intelligenza per quanto riusciva a scrivere [4]. Per avere un'idea della sua immensa produzione è sufficiente pensare che la sua opera omnia [10] attualmente consiste di 76 volumi.

In questo lavoro prenderemo in considerazione solo alcuni dei tanti contributi che Eulero diede nell'ambito della teoria dei numeri, inserendoli all'interno di un discorso più generale. L'interesse di Eulero per la teoria dei numeri nasce da alcune affermazioni di Fermat. Una di queste, nota oggi come *piccolo teorema di Fermat*, dice che $a^p - a$ è divisibile per p per ogni numero primo p e per ogni intero a non divisibile per p. In un articolo del 1736 [7] Eulero pubblicò per la prima volta una dimostrazione di questo teorema [4] e della sua generalizzazione, che oggi chiamiamo *teorema di Eulero*, secondo cui $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ per ogni intero positivo n e per ogni intero a primo con n. In questa congruenza compare per la prima volta il numero $\varphi(n)$ definito come il numero degli interi positivi non maggiori di n relativamente primi con n stesso [5, 25, 35]. Si ha così una funzione φ definita su tutti i numeri interi positivi, detta *funzione totient di Eulero* o più semplicemente *funzione di Eulero*[3]. L'importanza della funzione φ deriva dal fatto che essa compare in molti contesti e possiede numerose

1. Università degli Studi di Milano, Dipartimento di Informatica e Comunicazione, Via Comelico 39, 20135 Milano, Italy. (dantona@dico.unimi.it).
2. Politecnico di Milano, Dipartimento di Matematica, Piazza Leonardo da Vinci 32, 20133 Milano, Italy. (emanuele.munarini@polimi.it).
3. Il simbolo $\varphi(n)$ che oggi viene usato abitualmente è stato introdotto da C. F. Gauss mentre il nome di *totient* è stato introdotto da J. J. Sylvester [33].

proprietà [7, 8] [2, 12, 13, 20, 27]. Ad esempio $\varphi(n)$ è l'ordine del gruppo $\mathbb{Z}_n^*$ formato da tutti gli elementi invertibili dell'anello $\mathbb{Z}_n$ delle classi di resti modulo n, è il numero dei generatori di un gruppo ciclico di ordine n e in particolare è il numero delle radici n-esime primitive dell'unità. Inoltre φ è una funzione moltiplicativa, ossia $\varphi(1)=1$ e $\varphi(m\,n)=\varphi(m)\,\varphi(n)$ per ogni $m,n\in\mathbb{N}^*$ relativamente primi, ed è pertanto definita ovunque una volta che sia definita sulle potenze di primi. Poiché $\varphi(p^k)=p^k-p^{k-1}$ per ogni numero primo p e per ogni intero positivo k, se $n=p_1^{m_1}\ldots p_k^{m_k}$ è la scomposizione di n in fattori primi, si ha:

$$\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

Infine, mediante questa identità, si può ottenere la relazione più generale

$$\varphi(m\,n)=\frac{(m,n)\,\varphi(m)\,\varphi(n)}{\varphi((m,n))}$$

valida per ogni $m,n\in\mathbb{N}^*$, dove il simbolo (m,n) indica il massimo comun divisore di m ed n.

La proprietà di moltiplicatività non è propria solo della funzione φ ma è comune a molte altre funzioni che compaiono in modo naturale nella teoria elementare dei numeri. Per questo motivo ci sembra utile considerare lo studio della funzione φ nell'ambito più generale delle *funzioni aritmetiche* e delle *serie formali di Dirichlet* che le rappresentano, ambito nel quale Eulero ha dato altri importanti contributi. Lo scopo di questo breve articolo è pertanto quello di presentare la teoria elementare delle funzioni aritmetiche e di mostrare su alcuni semplici esempi il modo in cui essa può essere utilizzata.

L'interesse nei confronti di questa teoria nasce anche dal fatto che essa è un caso particolare della *teoria delle algebre di incidenza* di un insieme parzialmente ordinato attraverso la quale è possibile dare un fondamento teorico generale per i *teoremi di inversione di Möbius* e per la *teoria delle serie formali* [1, 6, 20, 26, 29, 30, 31, 32].

2. Funzioni aritmetiche

Una *funzione aritmetica* è una funzione $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{C}$ definita sui numeri interi positivi a valori nel campo complesso. L'insieme A(C) di tutte le funzioni aritmetiche può essere munito di una *somma* e di un *prodotto* ponendo:
(f+g)(n) = f(n) + g(n) e (f g)(n) = f(n) g(n) per ogni $f,g\in A(\mathbb{C})$ e per ogni $n\in\mathbb{N}^*$. Inoltre $A(\mathbb{C})$ può essere munito di un secondo prodotto, detto *prodotto di convoluzione di Dirichlet*, definito ponendo

$$(f*g)=\sum_{de=n}f(d)\,g(e)=\sum_{d/n}f(d)\,g(n/d)=\sum_{d/n}f(n/d)\,g(d)$$

per ogni $f,g\in A(\mathbb{C})$ e per ogni $n\in\mathbb{N}^*$. Si dimostra facilmente che questo prodotto è associativo, commutativo e distributivo rispetto alla somma. Inoltre si dimostra che possiede un elemento neutro, dato dalla funzione δ che vale 1 quando $n = 1$ e 0 in ogni altro caso. Si ha così il seguente teorema che risale a un lavoro del 1915 di E. T. Bell [3].

Teorema 1 (Bell, 1915)

L'insieme $A(\mathbb{C})$ *di tutte le funzioni aritmetiche è un anello commutativo rispetto alla somma e al prodotto di convoluzione.*

Ricordiamo che una funzione aritmetica f è invertibile rispetto al prodotto di convoluzione quando esiste un'altra funzione aritmetica, che indicheremo con $\overline{f}$, tale che $f * \overline{f} = \overline{f} * f = \delta$. Le funzioni aritmetiche invertibili rispetto a $*$ possono essere facilmente caratterizzate.

Teorema 2

Una funzione aritmetica f *è invertibile rispetto al prodotto di convoluzione se e solo se* $f(1) \neq 0$.

Un'importante sottoclasse di $A(\mathbb{C})$ è data dall'insieme $M(\mathbb{C})$ di tutte le *funzioni moltiplicative*, ossia dall'insieme di tutte le funzioni aritmetiche f tali che $f(1) = 1$ e $f(m\,n) = f(m)\,f(n)$ per ogni $m, n \in \mathbb{N}^*$ relativamente primi (cioè privi di divisori comuni non banali). Si può dimostrare che il prodotto di convoluzione di due funzioni moltiplicative é ancora una funzione moltiplicativa, che l'identità δ è anch'essa moltiplicativa, che ogni funzione moltiplicativa è invertibile e che l'inversa di una funzione moltiplicativa è anch'essa moltiplicativa. Si ha così il

Teorema 3

L'insieme $M(\mathbb{C})$ *di tutte le funzioni moltiplicative è un gruppo rispetto al prodotto di convoluzione di Dirichlet.*

Inoltre vale la seguente importante proprietà.

Teorema 4

Le funzioni moltiplicative sono completamente definite una volta che siano definite sulle potenze di primi.

Dimostrazione. Sia F una funzione definita sulle potenze di primi. Dobbiamo dimostrare che esiste esattamente una funzione moltiplicativa f che sulle potenze di primi coincide con F. Per il teorema fondamentale dell'aritmetica, ogni numero intero positivo n può sempre essere fattorizzato, sostanzialmente in modo unico, come prodotto di potenze di primi. Quindi, se $n = p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}$, per la moltiplicatività di f si deve avere

$$f(n) = f\left(p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}\right) = f\left(p_1^{m_1}\right) \dots f\left(p_k^{m_k}\right) = F\left(p_1^{m_1}\right) \dots F\left(p_k^{m_k}\right)$$

Di conseguenza f risulta definita in modo unico e ovunque.

Come immediata conseguenza si ha la seguente utile proprietà.

Teorema 5

Due funzioni moltiplicative coincidono se e solo se coincidono sulle potenze di primi.

Si dimostra facilmente che se f e g sono due funzioni moltiplicative anche il prodotto f g ed il quoziente f/g (quando è definito) sono ancora funzioni moltiplicative.

Introduciamo ora alcune delle più note funzioni moltiplicative, rimandando a [2, 13, 14, 20, 27] per molte altre ancora.

1. Funzione zeta e funzione di Möbius

Nell'ambito della teoria delle funzioni aritmetiche gioca un ruolo importante la funzione costante di valore 1, indicata usualmente con ζ. Ad esempio, moltiplicare per la funzione ζ significa sommare su tutti i divisori. Infatti, poiché $\zeta(n)=1$ per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, per ogni $f \in A(\mathbb{C})$ e per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ si ha

$$(\zeta * f)(n) = \sum_{d/n} f(d)$$

Inoltre ζ permette di definire la *funzione di Möbius* μ che, come vedremo, è fondamentale nella formula d'inversione (5). Infatti la funzione μ viene definita come l'inversa di ζ, ossia come l'unica funzione per la quale $\zeta * \mu = \mu * \zeta = \delta$. Questo significa che μ è definita dalla relazione

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sigma(n) \tag{1}$$

valida per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, dalla quale si ottiene la seguente forma esplicita

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & \text{se n è il prodotto di k primi distinti} \\ 0 & \text{in ogni altro caso} \end{cases} \tag{2}$$

La funzione μ è moltiplicativa essendo l'inversa di ζ che è evidentemente moltiplicativa.

2. Funzioni potenza

Per $k \in \mathbb{Z}$, la funzione ε_k è definita ponendo $\varepsilon_k(n) = n^k$ per ogni $n \in \mathbb{N}^*$. Queste funzioni sono *totalmente moltiplicative*, nel senso che $\varepsilon_k(m\,n) = \varepsilon_k(m)\,\varepsilon_k(n)$ per ogni $m, n \in \mathbb{N}^*$. In generale il prodotto di funzioni totalmente moltiplicative e l'inversa di una funzione totalmente moltiplicativa non sono più funzioni di questo tipo. Ad esempio la funzione $\zeta = \varepsilon_0$ è totalmente moltiplicativa ma la sua inversa μ non lo è.

3. Somma delle potenze dei divisori

Per ogni $k \in \mathbb{Z}$, si ha per definizione $\sigma_k = \zeta * \varepsilon_k$, ossia

$$\sigma_k(n) = \sum\nolimits_{d|n} d^k \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}^*.$$

In particolare $\sigma_0(n)=\tau(n)$ è il numero dei divisori di n mentre $\sigma_1(n)=\sigma(n)$ è la somma dei divisori di n. Inoltre per ogni primo *p* e ogni intero naturale n si ha

$$\sigma_k\left(p^n\right)=1+p^k+\left(p^2\right)^k+\ldots+\left(p^n\right)^k.$$

4. Funzioni di Jordan

Per ogni $n\in\mathbb{N}$ e per ogni $k\in\mathbb{N}^*$, $J_k(n)$ è definito come il numero delle *k*-uple $(x_1, \ldots, x_k)$ di interi positivi minori o uguali a n tali che $\mathrm{mcd}(x_1, \ldots, x_k, n) = 1$. In particolare $J_0=\delta$ e $J_1=\varphi$. Si può dimostrare che è sempre una funzione moltiplicativa e che per ogni primo p e ogni intero naturale n si ha

$$J_k\left(p^n\right)=\begin{cases}1 & \text{se } n=0\\ p^{k\,n}-p^{k\,(n-1)} & \text{se } n\geq 1\end{cases} \tag{3}$$

Possiamo estendere la definizione delle funzioni J_k anche ai valori negativi dell'indice k, dicendo che J_k è la funzione moltiplicativa che sulle potenze di primi è definita dalla (3).

5. Funzioni di Dedekind generalizzate

Per ogni $k\in\mathbb{Z}$ e per ogni $n\in\mathbb{N}^*$, si ha per definizione

$$\psi_k(n)=J_{2\,k}(n)/J_k(n)$$

Essendo il quoziente di due funzioni moltiplicative, ψ_k è anch'essa moltiplicativa. Inoltre assume sempre valori interi. Infatti, per ogni primo p e per ogni intero positivo n risulta

$$\psi_k\left(p^n\right)=\frac{J_{2k}\left(p^n\right)}{J_k\left(p^n\right)}=\frac{p^{2\,k\,n}-p^{2\,k\,(n-1)}}{p^{k\,n}-p^{k\,(n-1)}}=p^{k\,n}+p^{k\,(n-1)}$$

Come conseguenza delle proprietà delle funzioni moltiplicative e del fatto che ζ e μ sono entrambe moltiplicative, si ha il

Teorema 6

Una funzione g *è moltiplicativa se e solo se è moltiplicativa la funzione* $f=\zeta*g$.

Dimostrazione. Se g è moltiplicativa allora lo è anche f essendo il prodotto di convoluzione di funzioni moltiplicative. Viceversa, se f è moltiplicativa, allora lo è anche $g=\mu*f$ per il medesimo motivo.

Come abbiamo già osservato, le funzioni ε_k sono moltiplicative. Di conseguenza, per il teorema 6, anche le funzioni $\sigma_k=\zeta*\varepsilon_k$ lo sono.

3. Serie formali di Dirichlet

Nello studio delle funzioni aritmetiche spesso è utile considerare le *serie formali di Dirichlet*, ossia le serie della forma

$$f(t)=\sum_{n\geq 1} f(n)\, n^{-t} \tag{4}$$

In questo ambito le serie hanno sempre un carattere puramente formale, essendo semplicemente un'utile rappresentazione algebrica delle funzioni aritmetiche.

Così, ad esempio, qui non avremo mai problemi di convergenza. Inoltre, per semplicità, faremo la convenzione di indicare la serie di Dirichlet con lo stesso nome della funzione aritmetica che rappresenta, come in (4). Il contesto di solito è sufficiente a chiarire se si sta considerando la serie formale o la funzione aritmetica. L'introduzione delle serie di Dirichlet è giustificata dal seguente

Teorema 7

Siano f *e* g *due funzioni aritmetiche. Allora la serie di Dirichlet che rappresenta il loro prodotto di convoluzione coincide con l'usuale prodotto delle serie di Dirichlet corrispondenti, ossia .*

$$(f*g)(t)=f(t)\,g(t)$$

Inoltre l'inversa $\overline{f}$ *di una funzione aritmetica* f *invertibile è rappresentata dall'inversa della serie di Dirichlet che rappresenta f, ossia*

$$\sum_{n\geq 1}\overline{f}(n)\, n^{-t}=\frac{1}{f(t)}$$

Dimostrazione. Il prodotto delle serie di Dirichlet f(t) e g(t), che rappresentano rispettivamente le funzioni aritmetiche f e g , è dato da

$$f(t)\,g(t)=\sum_{h\geq 1} f(h)\,h^{-t}\sum_{k\geq 1} g(k)\,k^{-t}=\sum_{h,k\geq 1} f(h)\,g(k)\,(h\,k)^{-t}=\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{\substack{h,k\geq 1\\ h\,k=n}} f(h)\,g(k)\,n^{-t}\right)$$

La seconda parte del teorema deriva immediatamente dal fatto che $f*\overline{f}=\delta$ se e solo se $f(t)\,\overline{f}(t)=1$.

La funzione aritmetica è rappresentata dalla serie formale di Dirichlet

$$\zeta(t)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^t}$$

che corrisponde all'usuale *funzione zeta di Riemann*, mentre la funzione di Möbius μ è rappresentata dalla serie inversa

$$\mu(t)=\sum_{n\geq 1}\mu(n)\,n^{-t}=\frac{1}{\zeta(t)}$$

Utilizzando le serie formali di Dirichlet si può dimostrare in modo molto semplice il seguente classico *teorema di inversione di Möbius* [23].

Teorema 8 (Möbius, 1832)

Per ogni funzione aritmetica f *e* g *si ha*

$$f(n)=\sum_{d|n} g(d) \quad \Leftrightarrow \quad g(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\, f(n/d)=\sum_{d|n}\mu(n/d)\, f(d) \qquad (5)$$

Dimostrazione. Passando alle serie di Dirichlet, la (5) corrisponde all'ovvia equivalenza $f(t)=g(t)\zeta(t)$ se e solo se $g(t)=f(t)\zeta(t)^{-1}=f(t)\mu(t)$.

Inoltre si ha il seguente *teorema di Eulero* [8] [2, 12, 14, 20] che permette di rappresentare la serie formale di Dirichlet di una funzione moltiplicativa come un prodotto infinito di serie formali ordinarie (detto *prodotto di Eulero*).

Teorema 9 (Eulero, 1737)

Per ogni funzione moltiplicativa f *si ha l'identità*

$$\sum_{n\geq 1} f(n)\, n^{-t}=\prod_p \sum_{k\geq 0} f\left(p^k\right) p^{-k\,t}$$

dove il prodotto è esteso a tutti i numeri primi.

Dimostrazione. Poiché ogni numero intero positivo può sempre essere decomposto in modo unico in un prodotto di numeri primi, se f è una funzione moltiplicativa si ha

$$\sum_{n\geq 1} f(n)\, n^{-t}=\sum_{m_1,m_2,\ldots\geq 0} f\left(p_1^{m_1}\, p_2^{m_2}\ldots\right)\left(p_1^{m_1}\, p_2^{m_2}\ldots\right)^{-t}=\sum_{m_1,m_2,\ldots\geq 0} f\left(p_1^{m_1}\right)\, f\left(p_2^{m_2}\right)\ldots p_1^{-m_1\,t}\, p_2^{-m_2\,t}\ldots=$$

$$=\sum_{m_1\geq 0} f\left(p_1^{m_1}\right)\, p_1^{-m_1\,t}\sum_{m_2\geq 0} f\left(p_2^{m_2}\right)\, p_2^{-m_2\,t}\ldots=\prod_p \sum_{n\geq 0} f\left(p^n\right)\, p^{-n\,t}$$

Come immediata conseguenza del teorema precedente abbiamo il

Teorema 10 (Eulero, 1737)

La serie ζ(t) *di Riemann possiede la seguente rappresentazione come prodotto di Eulero:*

$$\zeta(t)=\prod_p \frac{1}{1-p^{-t}} \qquad (7)$$

Dimostrazione. Poiché ζ(n)=1 per ogni $n\in\mathbb{N}^*$, la (6) diventa un prodotto di serie geometriche, ossia

$$\zeta(t)=\prod_p \sum_{k\geq 0} p^{-k\,t}=\prod_p \frac{1}{1-p^{-t}}$$

Il teorema di Eulero 9 ed il teorema 10 permettono di determinare una forma chiusa per la serie di Dirichlet di numerose funzioni moltiplicative.

Teorema 11

Le serie di Dirichlet delle funzioni moltiplicative ε_k, σ_k, J_k, ψ_k *possiedono le seguenti forme chiuse in termini della serie zeta di Riemann:*

$$\sum_{n\geq 1}\varepsilon_k(n)\,n^{-t}=\zeta(t-k)\quad ;\quad \sum_{n\geq 1}\sigma_k(n)\,n^{-t}=\zeta(t)\zeta(t-k)$$

$$\sum_{n\geq 1}J_k(n)\,n^{-t}=\frac{\zeta(t-k)}{\zeta(t)}\quad ;\quad \sum_{n\geq 1}\psi_k(n)\,n^{-t}=\frac{\zeta(t)\zeta(t-k)}{\zeta(2\,t)}$$

Dimostrazione. Qui ci limitiamo a dimostrare, a titolo esemplificativo, la terza identità per k=1, ossia per l'usuale funzione φ di Eulero. Le altre identità si ottengono in modo analogo. Poiché $\varphi(1)=1$ e $\varphi(p^k)=p^k-p^{k-1}$ per ogni primo p e per ogni intero positivo k, per il teorema di Eulero si ha

$$\sum_{n\geq 1}\varphi(n)\,n^{-t}=\prod_p\sum_{k\geq 0}\varphi\left(p^k\right)p^{-k\,t}=\prod_p\left(1+\sum_{k\geq 1}\left(p^k-p^{k-1}\right)p^{-k\,t}\right)=$$

$$=\prod_p\left(\sum_{k\geq 0}p^{-k\,(t-1)}-\frac{1}{p}\sum_{k\geq 1}p^{-k\,(t-1)}\right)=\prod_p\left(\frac{1}{1-p^{-(t-1)}}-\frac{p^{-t}}{1-p^{-(t-1)}}\right)$$

e quindi, per l'identità (7), risulta

$$\sum_{n\geq 1}\varphi(n)\,n^{-t}=\prod_p\frac{1-p^{-t}}{1-p^{-(t-1)}}=\frac{\zeta(t-1)}{\zeta(t)}$$

Il teorema di Eulero può anche essere utilizzato al contrario, ossia può essere utilizzato per determinate la forma esplicita di una funzione moltiplicativa, come nel seguente semplice esempio.

Teorema 12

Sia $\mu^{\langle k\rangle}=\mu*\mu\ldots*\mu$ *la funzione che si ottiene dalla convoluzione di k funzioni di Möbius. Allora, per ogni primo p e per ogni* $n\in\mathbb{N}^*$, *si ha*

$$\mu^{\langle k\rangle}\left(p^n\right)=(-1)^n\binom{k}{n}$$

Dimostrazione. Poiché μ è l'inversa di ζ, per la (7) si ha

$$\mu^{\langle k\rangle}(t)=\mu(t)^k=\frac{1}{\zeta(t)^k}=\prod_p\left(1-p^{-t}\right)^k=\prod_p\sum_{n\geq 0}(-1)^n\binom{k}{n}p^{-n\,t}$$

Concludiamo enunciando una semplice proprietà che sarà utile negli esempi che seguiranno.

Teorema 13

Per ogni $k\in\mathbb{Z}$ *e per ogni* $f\in A(\mathbb{C})$, *la serie di Dirichlet che rappresenta la funzione* $\varepsilon_k\cdot f$ è

$$\sum_{n\geq 1}n^k\,f(n)\,n^{-t}=f(t-k)$$

4. Alcune applicazioni

In questo paragrafo finale presenteremo alcuni semplici esempi di problemi che possono essere arrontati e risolti mediante la teoria appena esposta.

4.1 Convoluzioni

Le serie formali di Dirichlet forniscono un utile strumento di calcolo, come accade ad esempio nel problema di una forma chiusa per una convoluzione di funzioni moltiplicative.

Teorema 14
Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ *si hanno le identità*

$$\sum_{d|n} J_k(d) = d^k \quad ; \quad \sum_{d|n} d^k \mu(n/d) = J_k(n) \tag{8}$$

Dimostrazione. La prima relazione è equivalente all'identità $\zeta * J_k = \varepsilon_k$ che può essere dimostrata immediatamente passando alle serie di Dirichlet:

$$(\zeta * J_k)(t) = \zeta(t)\, J_k(t) = \zeta(t)\frac{\zeta(t-k)}{\zeta(t)} = \zeta(t-k) = \varepsilon_k(t)$$

La seconda relazione segue dalla prima mediante l'inversione di Möbius.

Teorema 15
Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ *si hanno le identità*

$$\sum_{d|n} \sigma_h(d)\, J_{h+k}(n/d) = n^h\, \sigma_k(n) \quad ; \quad \sum_{d|n} J_h(d)\, \sigma_{h+k}(n/d) = n^h\, \sigma_k(n)$$

Dimostrazione. La prima identità segue dal fatto che la somma che compare a primo membro è il prodotto di convoluzione $\sigma_h * J_{h+k}$ rappresentato dalla serie di Dirichlet

$$(\sigma_h * J_{h+k})(t) = \sigma_h(t)\, J_{h+k}(t) =$$

$$= \zeta(t-h)\,\zeta(t)\frac{\zeta(t-h-k)}{\zeta(t)} = \zeta(t-h)\,\zeta(t-h-k) = \sigma_k(t-h)$$

La seconda identità segue in modo del tutto analogo.

Teorema 16
Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ *si hanno le identità*

$$\sum_{d|n} d^h\, J_k(d)\, J_h(n/d) = J_{h+k}(n)$$

$$\sum_{d|n} d^h\, J_k(d)\, \sigma_h(n/d) = \sigma_{h+k}(n) \quad ; \quad \sum_{d|n} d^h\, J_k(d)\, \psi_h(n/d) = \psi_{h+k}(n)$$

Dimostrazione. La prima identità si ottiene passando alle serie di Dirichlet ed osservando che

$$J_h(t)\,J_k(t-h)=\frac{\zeta(t-h)}{\zeta(t)}\,\frac{\zeta(t-h-k)}{\zeta(t-h)}=\frac{\zeta(t-h-k)}{\zeta(t)}=J_{h+k}(t)$$

Le altre due identità si dimostrano in modo del tutto analogo.

Come abbiamo visto, spesso le serie di Dirichlet permettono di ottenere delle identità in modo molto semplice. Tuttavia, a volte, è più conveniente usare direttamente le proprietà fondamentali delle funzioni moltiplicative, come accade per le seguenti relazioni che generalizzano l'*identità di Landau* [16].

Teorema 17

Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ *si hanno le identità*

$$\sum_{d|n}\frac{|\mu(d)|}{J_k(d)}=\frac{n^k}{J_k(n)} \quad ; \quad \sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{\psi_k(d)}=\frac{n^k}{\psi_k(n)}$$

Dimostrazione. Consideriamo le funzioni f e g definite da

$$f(n)=\sum_{d|n}\frac{|\mu(d)|}{J_k(d)} \quad \text{e} \quad g(n)=\frac{n^k}{J_k(n)}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}^*$. Esse sono entrambe moltiplicative per il teorema 6 e per il fatto che il quoziente di due funzioni moltiplicative resta una funzione dello stesso tipo. Per la (2) si ha che per ogni primo p e per ogni intero positivo n

$$f(p^n)=\sum_{i=0}^{n}\frac{|\mu(p^i)|}{J_k(p^i)}=\frac{|\mu(1)|}{J_k(1)}+\frac{|\mu(p)|}{J_k(p)}=$$

$$=1+\frac{1}{p^k-1}=\frac{p^k}{p^k-1}=\frac{p^{n\,k}}{p^{k\,n}-p^{k\,(n-1)}}=\frac{(p^n)^k}{J_k(p^n)}=g(p^n)$$

Di conseguenza, coincidendo sulle potenze di primi, per il teorema 5, f e g coincidono ovunque. In modo analogo segue anche la seconda identità.

4.2 Determinanti di Smith

Consideriamo la matrice quadrata $S_n=\left[(i,j)\right]_{i,j=1}^{n}$ di ordine n che ha per elementi i massimi comuni divisori (i;j) degli indici che individuano i posti. Ad esempio

$$S_4=\begin{bmatrix}(1,1)&(1,2)&(1,3)&(1,4)\\(2,1)&(2,2)&(2,3)&(2,4)\\(3,1)&(3,2)&(3,3)&(3,4)\\(4,1)&(4,2)&(4,3)&(4,4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&1&2\\1&1&3&1\\1&2&1&4\end{bmatrix}$$

I determinanti di queste matrici si chiamano *determinanti di Smith* [28] e possono essere facilmente calcolati nel modo seguente [11]. Iniziamo con l'osservare che per k=1 la prima relazione delle (8) diventa $n=\sum_{d|n}\varphi(d)$, e che questa identità permette di scrivere il generico elemento della matrice S_n nel modo seguente[4]

$$(i,j)=\sum_{d|(i,j)}\varphi(d)=\sum_{\substack{d|i\\ d|j}}\varphi(d)=\sum_{d\geq 1}[\![d\mid i]\!]\,\varphi(d)\,[\![d\mid j]\!]=\sum_{h,k\geq 1}[\![h\mid i]\!]\,\varphi(h)\,\delta_{h,k}\,[\![k\mid j]\!]$$

Da questa identità segue subito la decomposizione $S_n = Z_n^T F_n Z_n$ dove $Z_n=\left[[\![i\mid j]\!]\right]_{i,j=1}^n$ e $F_n=\left[\varphi(i)\,\delta_{i,j}\right]_{i,j=1}^n$. Riprendendo l'esempio precedente si ha

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&1&2\\1&1&3&1\\1&2&1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Per il teorema di Binet segue che $\det(S_n)=\det(Z_n)^2\det(F_n)$. Poiché Z_n è una matrice triangolare in cui tutti gli elementi diagonali sono uguali a 1 e poiché F_n è una matrice diagonale, si ha che il determinante di S_n è uguale al prodotto degli elementi diagonali di F_n, ossia

$$\det(S_n)=\varphi(1)\,\varphi(2)\ldots\varphi(n)$$

Questo semplice risultato può essere generalizzato nel modo seguente (e, in realtà, in molti altri modi in contesti più generali).

Teorema 18

Siano $f,g\in\mathcal{A}(\mathbb{C})$ *tali che* $g=\zeta * f$. *Il determinante della matrice* $S_n=\left[g((i,j))\right]_{i,j=1}^n$, *che ha per generico elemento il valore che la funzione g assume nel massimo comune divisore degli indici che ne individuano il posto è dato da* $\det(S_n) = f(1)\, f(2) \ldots f(n)$.

Dimostrazione. Poiché per ipotesi

$$g(n)=\sum_{d|n}f(d),\ \text{per ogni } n\in\mathbb{N}^*,$$

si ha

$$g((i,j))=\sum_{d|(i,j)}f(d)=\sum_{\substack{d|i\\ d|i}}f(d)=\sum_{d\geq 1}[\![d\mid i]\!]\,f(d)\,[\![d\mid j]\!]=\sum_{h,k\geq 1}[\![h\mid i]\!]\,f(h)\,\delta_{h,k}\,[\![k\mid j]\!]$$

4. Il simbolo $[\![P]\!]$ indica la funzione caratteristica della proposizione P, ossia $[\![P]\!]=1$ quando P è vera e $[\![P]\!]=0$ quando P è falsa; $\delta_{hk}=[\![h=k]\!]$ è il simbolo di Kronecker.

Di conseguenza

$$S_n = Z_n^T F_n Z_n, \text{ dove } Z_n = \left[\llbracket i \mid j \rrbracket\right]_{i,j=1}^{n} \text{ e } F_n = \left[f(i)\,\delta_{i,j}\right]_{i,j=1}^{n}$$

da cui segue immediatamente il teorema.

4.3 Il problema delle collane o delle parole circolari

In questo esempio finale affronteremo un problema di tipo enumerativo che risale al colonnello Moreau [17] e che è stato risolto per la prima volta nel 1892 dal maggiore MacMahon. In parole povere il problema consiste nel determinare il numero di tutte le collane che si possono formare con un dato numero di perline colorate.

Iniziamo col riformulare il problema in modo più rigoroso. Una *parola* di lunghezza n su un alfabeto A={a_1; a_2; … ; a_m} è una qualunque successione $x_1x_2\ldots x_n$ di n lettere appartenenti ad A. Ad esempio acaacbab è una parola di lunghezza 8 sull'alfabeto A={a;b;c}. Una *parola circolare* sull'alfabeto A è una parola non vuota in cui le lettere invece di essere scritte linearmente sono disposte su una circonferenza. Per questo motivo le parole circolari sono anche chiamate *collane* e le lettere dell'alfabeto *perline colorate*. Le parole circolari possono essere ottenute mediante un'opportuna relazione di equivalenza sull'insieme A^+ delle parole lineari non vuote. Se $\alpha = x_1x_2\ldots x_n$ è una parola, indichiamo con $S(\alpha)$ la parola che si ottiene spostando ciclicamente a sinistra ogni lettera, ossia $S(\alpha) = x_2\ldots x_nx_1$. Ad esempio S(acaacbab) = caacbaba . Poniamo ora $\alpha \sim \beta$ quando esiste un numero naturale k per cui $\alpha = S^k(\beta)$, ossia quando la parola α può essere ottenuta dalla parola β mediante uno spostamento circolare delle sue lettere. Ad esempio acaacbab~cbabacaa poiché acaacbab=S^4(cbabacaa).

Una parola circolare su A è una qualunque classe di equivalenza rispetto alla relazione ~ appena definita. Ad esempio la parola abbabbabb individua la parola circolare [abbabbabb]={abbabbabb;bbabbabba;babbabbab} . Intuitivamente una collana è definita a meno di rotazioni, nel senso che comunque la si ruoti si ottiene sempre la medesima collana.

Ogni numero naturale k per cui $S^k(\alpha) = \alpha$ è un *periodo* della parola α. Il *periodo primitivo* di α è il suo periodo più piccolo e chiaramente è un divisore della sua lunghezza. Ad esempio la parola acbbacbbacbb di lunghezza12 ha periodo primitivo 3. Una *parola* α di lunghezza n è *primitiva* se tutte le parole α, $S(\alpha)$, …, $S^{n-1}(\alpha)$ sono distinte, o, equivalentemente, quando possiede periodo primitivo uguale a n. Ad esempio la parola abbca è primitiva mentre la parola ababab non lo è. Una *collana* è *aperiodica* quando è generata da una parola primitiva, mentre è *periodica* in caso contrario.

Una collana corrisponde sempre a una classe di equivalenza generata da una parola β^k, con β parola primitiva. Se la collana ha lunghezza n, allora la lunghezza di β deve essere un divisore d di n e k=n/d. Ogni collana è pertanto individuata completamente dalla lunghezza e da una parola primitiva.

Sia $M_m(n)$ il numero di tutte le parole primitive di lunghezza n su A. Ogni parola circolare di lunghezza n individuata da una parola primitiva di lunghezza d corrisponde a una classe di equivalenza contenente esattamente d parole. Quindi, poiché il numero di tutte le parole di lunghezza n sull'alfabeto A è (m n), si ottiene la seguente semplice identità

$$m^n = \sum_{d|n} d\, M_m(d) \tag{9}$$

Utilizzando l'inversione di Möbius (5), dalla (9) si ottiene l'identità

$$n\, M_m(n) = \sum_{d|n} \mu(n/d)\, m^d$$

e quindi la *formula di Moreau* [24]

$$M_m(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(n/d)\, m^d$$

Da questa identità e dal teorema 13, posto $L_m(t) = \sum_{n\geq 1} m^n\, n^{-t}$, si ha che la serie di Dirichlet associata alla funzione M_m è data da

$$M_m(t) = \mu(t+1)\, L_m(t+1) = \frac{L_m(t+1)}{\zeta(t+1)}$$

Indichiamo ora con $N_m(n)$ il numero di tutte le collane (*necklaces*, in inglese) sull'alfabeto *A*. Poiché, come abbiamo già osservato poco sopra, ogni collana è completamente individuata dalla sua lunghezza e da una parola primitiva, si ha

$$N_m(n) = \sum_{d|n} M_m(d)$$

Quindi la corrispondente serie generatrice di Dirichlet è

$$N_m(t) = \zeta(t)\, M_m(t) = \zeta(t) \frac{L_m(t+1)}{\zeta(t+1)} = \frac{\zeta(t)}{\zeta(t+1)} L_m(t+1)$$

ossia

$$N_m(t) = \varphi(t+1)\, L_m(t+1)$$

Da qui si ottiene immediatamente la *formula di MacMahon* [18]:

$$N_m(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d)\, m^{n/d}$$

Concludiamo mostrando l'*identità ciclotomica*

$$\frac{1}{1 - m\, x} = \prod_{n\geq 1} \left(\frac{1}{1 - x^n} \right)^{M_m(n)} \tag{10}$$

Utilizzando l'identità (9) si ha

$$\ln \frac{1}{1 - m\, x} = \sum_{n\geq 1} m^n \frac{x^n}{n} = \sum_{n\geq 1} \sum_{d|n} d\, M_m(d) \frac{x^n}{n}$$

I due indici di sommatoria variano arbitrariamente con l'unica condizione che d divida n o equivalentemente che n sia un multiplo di d, ossia che esista un intero positivo k per cui n = d k. Questa semplice osservazione permette di scambiare l'ordine delle sommatorie e di scrivere

$$\ln\frac{1}{1-m\,x}=\sum_{d\geq1}\sum_{k\geq1} d\,M_m(d)\,\frac{x^{d\,k}}{d\,k}=\sum_{d\geq1}M_m(d)\sum_{k\geq1}\frac{x^{d\,k}}{k}=$$

$$=\sum_{d\geq1}M_m(d)\,\ln\frac{1}{1-x^d}=\sum_{d\geq1}\ln\left(\frac{1}{1-x^d}\right)^{M_m(d)}=\ln\prod_{d\geq1}\left(\frac{1}{1-x^d}\right)^{M_m(d)}$$

da cui segue immediatamente l'identità (10).

Questa dimostrazione ha il pregio di essere semplice ma, per certi aspetti, ha il difetto di essere completamente formale. In realtà l'identità ciclotomica può essere dimostrata anche in modo combinatorio, ossia obiettivo, come è stato fatto in [21, 22].

[1] M. Aigner, *Combinatorial Theory*, Springer-Verlag, New York 1979.
[2] T. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, New York 1976.
[3] E. T. Bell, *An arithmetical theory of certain numerical functions*, University of Washington Publ. in Math. and Phys. Sci. 1 (1915), 1-44.
[4] C. B. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, 1968. Traduzione italiana: *Storia della matematica*, Mondadori, Milano 1982.
[5] L. E. Dickson, *History of the theory of numbers*, Chelsea, New York 1966.
[6] P. Doubilet, G.-C. Rota, R. Stanley, *On the Foundations of Combinatorial Theory (VI): The Idea of Generating Function*, Proceeding of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume II: Probability Theory, 1971. Ristampato in [15].
[7] L. Euler, *Theorematum quorundam ad numeros primos spectantium demonstratio*. Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae 8 (1736), 141-146.
[8] L. Euler, *Variae observationes circa series infinitas*, Commentario Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 9 (1737), 160-188.
[9] L. Euler, *Theorema arithmetica nova methodo demonstrata*, Nov. comm. acad. sci. Petrop. 8 (1763), 74-104.
[10] L. Euler, *Opera Omnia*, Teubner, Lipsia 1911.
[11] G. Frobenius, *Theorie der Linearen Formen mit ganzen Coefficienten*, J. fur reine und angew. Math. 86 (1879), 146{208.
[12] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1989. Traduzione italiana: Matematica Discreta, Hoepli, Milano 1992.
[13] G. H. Hardy, E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford Univ. Press, 1979.
[14] J. Knopfmacher, *Abstract Analytic Number Theory*, Dover, New York 1990.
[15] J. P. S. Kung, *Gian-Carlo Rota on Combinatorics*, Birkhäuser, Boston 1995.
[16] E. Landau, *Über die zahlentheoretische Funktion und ihre Beziehung zum Goldbachschen Satz*, Göttenger Nachrichten (1900), 177-186.
[17] E. Lucas, *Théorie des Nombres*, Gauthiers-Villars, Paris 1891.
[18] P. A. MacMahon, *Application of a theory of permutations in circular procession to the theory of numbers*, Proceedings of the London mathematical Society 23 (1892), 305-313.
[19] The MacTutor History of Mathematics archive, *Leonhard Euler*, http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/Biographies/Euler.html
[20] P. J. McCarthy, *Introduction to arithmetical functions*, Springer-Verlag, New York 1986.
[21] N. Metropolis, G.-C. Rota, *Witt Vectors and the Algebra of Necklaces*, Advances in Mathematics 50 (1983), 95-125.
[22] N. Metropolis, G.-C. Rota, *The Cyclotomic Idenity*, Combinatorics and Algebra, Contemporary Mathematics 34 (1984), 19-27. Ristampato in [15].
[23] A. F. Möbius, *Über eine besondere Art von Umkehrung der Reihen*, J. reine angew. Math. 9 (1832), 105-123.
[24] C. Moreau, *Sur les permutations circulaires distinctes*, Nouv. Ann. Math. 11 (1872), 309-314.
[25] O. Ore, *Number Theory and its History*, McGraw-Hill, New York 1948.
[26] G.-C. Rota, *On the Foundation of Combinatorial Theory I. Theory of Möbius Functions*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 2 (1964), 340-368. Ristampato in [15].
[27] R. Sivaramakrishnan, *Classical theory of arithmetic functions*, Marcel Dekker, New York 1989.
[28] H. J. S. Smith, *On the value of a certain arithmetical determinant*, Proc. London Math. Soc. 7 (1876), 208-212.
[29] D. A. Smith, *Incidence functions as generalized arithmetic functions, I*, Duke Math. J. 34 (1967), 617-634.
[30] D. A. Smith, *Incidence functions as generalized arithmetic functions, II*, Duke Math. J. 36 (1969), 15-30.
[31] D. A. Smith, *Incidence functions as generalized arithmetic functions, III*, Duke Math. J. 36 (1969), 353-367.
[32] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, Volume 1, Cambridge University Press, Cambridge 1997.

[33] J. J. Sylvester, *On the number of fractions contained in any Farey series of which the limiting number is given*, The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, series 5, 15, (1883), 251-257.

[34] R. Vaidyanathaswamy, *The Theory of Multiplicative Arithmetic Functions*, Transactions of the American Mathematical Society 33 (1931), 579-662.

[35] A. Weil, *Number Theory*, Birkhäuser, Boston 1984. Traduzione italiana: *Teoria dei numeri*, Einaudi, Torino 1993.

9. Numeri di Eulero e probabilità

Mauro Cerasoli[1]

In this paper we discuss how the Euler numbers and Euler polynomials are related to the zig-zag permutations. We present several recurrence relations, obtained through the Taylor expansion of the tangent and the secant, and we interpret them from a probabilistic point of view.

1. Numeri e polinomi di Eulero

I contemporanei parlavano di Eulero come l'*Analisi Incarnata*, stando a quel che racconta nel capitolo a lui dedicato Eric Temple Bell in *Men of Mathematics*. Quando si dice Analisi i più pensano alla Infinitesimale o Analisi Matematica, in cui Eulero fu padrone assoluto, ma noi vogliamo ricordare qualcosa di lui che invece appartiene a un'altra Analisi: quella Combinatoria. Perché anche in questo campo Leonhard fu un grande maestro. Precursore della Teoria dei Grafi, con il famoso problema dei ponti di Koenisberg, e quindi della Topologia, il grande matematico di Basilea ha dato contributi alla combinatorica delle permutazioni anche con l'introduzione della *funzione gamma*, generalizzazione del fattoriale. Avremmo voluto parlare della sua *caratteristica* come unica *valutazione invariante* nell'insieme dei *complessi semplici* di un insieme finito (cfr. Klain-Rota) ma vediamo solo due brevi argomenti diversi: i numeri e i polinomi di Eulero.

I numeri di Eulero E_n vengono definiti dalla serie generatrice

$$\sum_{n\geq 0} E_n \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{\cosh t} = \frac{2\,e^t}{1+e^{2t}}$$

I primi valori numerici sono riportati nella seguente tabella

n	0	1	2	4	6	8	10	12
E_n	1	0	–1	5	–61	1385	–50521	2702765

Altri numeri di Eulero a due indici sono

$$A(n,k) = \sum_{0\leq j\leq k} (-1)^j \binom{n+1}{j} (k-j)^n$$

1. Professore Emerito dell'Università dell'Aquila; attivo ancora in Basilicata e Roma 3.

Questi soddisfano l'identità di Worpitzky

$$\sum_{1\le k\le n} A(n,k)\binom{x+k-1}{n} = x^n$$

e possiedono una interessante interpretazione combinatoria: A(n,k+1) è il numero di permutazioni su n elementi che hanno k salite nel grafico della permutazione (Comtet, pag. 242). Non dimostreremo questo risultato ma altri più semplici. Allo scopo conviene ricordare i polinomi di Eulero così definiti:

$$A_n(t) = \sum_{1\le k\le n} A(n,k)\, t^k$$

Frobenius ha dimostrato che

$$A_n(t) = n\sum_{1\le k\le n} k!\, S(n,k)\,(t-1)^{n-k}$$

dove S(n,k) sono i numeri di Stirling di seconda specie. L'origine dei polinomi di Eulero è dovuta al fatto che per ogni naturale n risulta

$$\sum_{k\ge 0} k^n\, t^k = A_n(t)(1-t)^{-1-n}$$

2. Le permutazioni alternanti

La permutazione $\sigma = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n$ dell'insieme $n^\wedge = \{1,2,\ldots,n\}$ è detta *alternante* o *zig zag* se le differenze $\sigma_2-\sigma_1, \sigma_3-\sigma_2,\ldots,\sigma_n-\sigma_{n-1}$ hanno segni alterni.

Ad esempio, 1324, 1423, 2314, 2413, 3412, 4231, 4132, 3241, 3142, 2143 sono le permutazioni zig zag di $4^\wedge$.

È naturale chiedersi quante sono le permutazioni alternanti di *n* elementi. Per rispondere alla domanda conviene osservare che a ogni permutazione zig zag $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n$ tale che $\sigma_1 < \sigma_2$ è possibile associare l'altra permutazione zig zag σ' definita mediante l'involuzione $\sigma_i' = n+1-\sigma_i$, per ogni $i \in n^\wedge$, tale che $\sigma_1' > \sigma_2'$. Da questa osservazione si deduce che se A_n è il numero di permutazioni zig zag su $n^\wedge$ tali che $\sigma_1 < \sigma_2$ allora le permutazoni zig zag sono in tutto $2A_n$. Detto ciò, possiamo dimostrare il seguente

Teorema di André (1881)

Sia per definizione $A_0 = 1$; *i numeri* A_n *soddisfano la ricorrenza*

$$2A_n = \sum_{k\ge 0}\binom{n}{k} A_k\, A_{n-k} \quad , \quad n>0$$

Il numero di permutazioni zig zag di n+1 elementi è $2A_{n+1}$. Supponiamo che in una di queste permutazioni σ l'elemento 1 sia nella (k+1)-esima posizione:

$$\sigma = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{k-1}\sigma_k 1\tau_1\tau_2\ldots\tau_{n-k}$$

Allora $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{k-1}\sigma_k$ è una permutazione zig zag di k elementi con $\sigma_{k-1} < \sigma_k$ mentre $\tau_1\tau_2\ldots\tau_{n-k}$ è una permutazione zig zag di n–k elementi con $\tau_1 > \tau_2$. Poiché i primi k elementi di σ possono essere scelti tra n (quelli diversi da 1) in $\binom{n}{k}$ modi, si può affermare che $\binom{n}{k} A_k\, A_{n-k}$ è il numero di permutazioni zig zag aventi 1 in (k+1)-esima posizione. Sommando su tutti i possibili valori di k da 0 a n si ottiene la formula di sopra.

Si osservi che $A_n/n!$ è la probabilità che scelta a caso una permutazione di n elementi essa sia zig zag. Per determinare tali probabilità, ovvero i numeri A_n, bisogna introdurre la loro funzione generatrice

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} A_n \frac{x^n}{n!}$$

Moltiplichiamo poi per $x^n/n!$ la relazione su dimostrata e sommiamo su $n \geq 0$. Al primo membro si ottiene il doppio della derivata di A(x). A destra, essendo A(0) = 1, si ottiene 1 più il quadrato di A(x) in virtù del prodotto di convoluzione tra successioni. Si arriva così alla seguente equazione differenziale

$$2\,A'(x) = 1 + A(x)^2$$

che, una volta risolta, fornisce

$$A(x) = \tan x + \frac{1}{\cos x}$$

Poiché lo sviluppo di Taylor della secante ha solo potenze pari e quello della tangente ha solo potenze dispari, abbiamo il seguente risultato

$$\sum_{n\geq 0} A_{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{\cos x} \quad \sum_{n\geq 0} A_{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \tan x$$

I numeri A_{2n} sono chiamati *numeri della secante* e A_{2n+1} sono chiamati *numeri della tangente*.

3. Formule per i numeri della secante e della tangente

Possiamo ricavare formule per i numeri A_n partendo dall'identità goniometrica

$$\frac{1}{\cos x} = \left[1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]^{-1} = \sum_{k\geq 0} 2^k \sin^{2k}\left(\frac{x}{2}\right)$$

Scopriamo così che per conoscere i coefficienti della secante bisogna avere un'espressione per le potenze pari del seno. Allora dalla formula di Eulero che dà la funzione seno mediante gli esponenziali possiamo scrivere per il teorema binomiale

$$\sin^{2k} x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^{2k} = (-1)^k \, 2^{-2k} \sum\nolimits_{k\geq 0} \binom{2k}{r} e^{irx} (-1)^{2k-r} e^{-(2k-r)ix} =$$

$$= 4^{-k} \sum\nolimits_{-k\leq j\leq k} \binom{2k}{k-j} (-1)^j \cos(2jx)$$

Semplificando ancora otteniamo la seguente identità

$$\sin^{2k} x = 4^{-k} \binom{2k}{k} + \sum\nolimits_{1\leq j\leq k} (-1)^j \, 2^{1-2k} \binom{2k}{k-j} \cos(2jx)$$

Pertanto dalla prima identità, sostituendo le potenze del seno, otteniamo

$$\frac{1}{\cos x} = \sum\nolimits_{k\geq 0} 2^k \left[4^{-k} \binom{2k}{k} + \sum\nolimits_{1\leq j\leq k} (-1)^j \, 2^{1-2k} \binom{2k}{k-j} \cos(jx) \right] =$$

$$= \sum\nolimits_{k\geq 0} \left[2^{-k} \binom{2k}{k} + \sum\nolimits_{1\leq j\leq k} (-1)^j \, 2^{1-k} \binom{2k}{k-j} \sum\nolimits_{n\geq 0} (-1)^n \, j^{2n} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \right]$$

E quindi il coefficiente di $x^{2n}/(2n)!$ in $1/\cos x$ è

$$A_{2n} = \sum\nolimits_{1\leq j\leq k\leq n} (-1)^{j+n} \, j^{2n} \, 2^{1-k} \binom{2k}{k-j}$$

Come afferma Comtet a pag. 259 risulta $A_{2n} = |E_{2n}|$ e così abbiamo il significato probabilistico dei numeri di Eulero.

Per avere i coefficienti della tangente consideriamo che

$$D\tan x = \cos^{-2} x = \left[1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]^{-2} = \sum\nolimits_{k\geq 0} \binom{-2}{k} \left[-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]^k = \sum\nolimits_{k\geq 0} (k+1) \, 2^k \sin^{2k}\left(\frac{x}{2}\right) =$$

$$= \sum\nolimits_{k\geq 0} (k+1) \left[2^{-k} \binom{2k}{k} + \sum\nolimits_{1\leq j\leq k} (-1)^j \, 2^{1-k} \binom{2k}{k-j} \sum\nolimits_{n\geq 0} (-1)^n \, j^{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right]$$

Integrando ambo i membri otteniamo lo sviluppo di Taylor della tangente

$$\tan x = \sum\nolimits_{n\geq 0} \left[\sum\nolimits_{1\leq j\leq k\leq n} (-1)^{j+n} (k+1) \, j^{2n} \, 2^{1-k} \binom{2k}{k-j} \right] \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

e quindi

$$A_{2n+1} = \sum\nolimits_{1\leq j\leq k\leq n} (-1)^{j+n} (k+1) \, j^{2n} \, 2^{1-k} \binom{2k}{k-j}$$

I primi valori dei coefficienti della tangente sono riportati di seguito.

n	0	1	2	3	4	5	6
A_{2n+1}	1	2	16	272	7936	353792	22368256

Si può dimostrare che $A_{2n+1} = A_{2n+1}(-1)$ fornendo una interpretazione probabilistica dei polinomi di Eulero.

4. Relazioni di ricorrenza per i numeri A_n

Dalla formula

$$\sum_{n\geq 0} A_n \frac{x^n}{n!} = \tan x + \frac{1}{\cos x}$$

possiamo ricavare altre interessanti e nuove proprietà dei numeri A_n scrivendola nel modo seguente

$$\cos x \sum_{n\geq 0} A_n \frac{x^n}{n!} = 1 + \sin x$$

Per la regola del prodotto di Cauchy abbiamo quindi

$$\sum_{0\leq k\leq n} \binom{n}{k} D^{(n-k)} \cos x_{|x=0}\ A_n = D^n \sin x_{|x=0}$$

ma sappiamo che

$$D^{(n)} \cos x_{|x=0} = \cos\left(\frac{n\,\pi}{2}\right) \qquad D^{(n)} \sin x_{|x=0} = \sin\left(\frac{n\,\pi}{2}\right)$$

Pertanto i numeri A_n soddisfano la seguente relazione di ricorrenza

$$\sum_{0\leq k\leq n} \binom{n}{k} A_k \cos\left[\frac{(n-k)\,\pi}{2}\right] = \sin \frac{n\,\pi}{2}$$

Si noti che questa relazione è più semplice di quella del teorema di André e può essere semplificata analizzando la parità di n. Infatti, se n è pari, ovvero se lo sostituiamo con 2n, il secondo membro si annulla. Inoltre $\cos[(2n-k)\pi/2]$ vale 0 se k è dispari e vale $(-1)^{n-k}$ se k è pari. Quindi, sostituendo anche k con 2k, si ha l'identità

$$\sum_{0\leq k\leq n} (-1)^{n-k} \binom{2\,n}{2\,k} A_k \ = 0$$

che è equivalente a

$$A_{2\,n} = \sum_{0\leq k\leq n-1} (-1)^{n-k+1} \binom{2\,n}{2\,k} A_k \quad , \quad n > 0$$

Se invece n è dispari, ovvero se lo sostituiamo con 2n+1, il secondo membro della relazione su menzionata, diventa $(-1)^n$. Inoltre, se k è pari, $\cos[(2n+1-k)\pi/2]$ vale 0 mentre se k è dispari, diciamo 2k+1, vale $(-1)^{n-k}$. In tal caso otteniamo

$$\sum_{0\leq k\leq n} (-1)^{n-k} \binom{2\,n+1}{2\,k+1} A_{2\,k+1} \ = (-1)^n$$

da cui si ricava la ricorrenza

$$A_{2n+1} = (-1)^n - \sum_{0 \le k \le n-1} (-1)^{n-k} \binom{2n+1}{2k+1} A_{2k+1}$$

Queste relazioni trovate esprimono i numeri A_n di indice pari con quelli sempre di indice pari e quelli di indice dispari con gli analoghi di indice dispari. Possiamo però trovare una relazione di ricorrenza che esprime quelli di indice dispari mediante quelli di indice pari. Infatti dalla ovvia identità goniometrica

$$\tan x = \sin x \left(\frac{1}{\cos x} \right)$$

sapendo ormai che $A_{2n+1}/(2n+1)!$ è il coefficiente di tan *x*, che $A_{2n}/(2n)!$ è il coefficiente di 1/cos *x*, si trae l'identità

$$A_{2n+1} = \sum_{0 \le k \le n} (-1)^{n-k} \binom{2n+1}{2k} A_{2k} \quad , \quad n > 0$$

Infine, derivando l'equazione differenziale iniziale, si può facilmente ricavare l'identità

$$A_{n+2} = \sum_{0 \le k \le n} \binom{n}{k} A_{k+1} A_{n-k}$$

Sarebbe interessante darne una interpretazione probabilistica.

È possibile ricavare altre espressioni per i coefficienti A_n in termini di determinanti di particolari matrici (Cfr. Cerasoli, 1995) che per brevità qui non riportiamo.

Bibliografia

André, D.
Sur les permutations alternées, *J. Math. Pures appl.*, *7* (1881) p. 167-184.

Cerasoli, M. Eugeni, F., Protasi, M.
Elementi di Matematica Discreta, Zanichelli, 1988, p. 277.

Cerasoli, M.
Sul significato probabilistico dei coefficienti di sec*x* e tan*x*, *Induzioni*, 11(1995) p. 171-181.

Comtet, L.
Advanced Combinatorics, 1974, D. Reidel P.C.

Klain, D. A., Rota, G. C.
Introduction to Geometric Probability, 1997, Cambridge University Press.

10. «+&C»

Emanuele Delucchi[1], Maurice D. Froidcoeur

We take Euler's proof of the pentagonal number theorem as a starting point for presenting some didactical activities aimed at different school levels.

Introduzione

Il nostro piccolo omaggio a Euler ruota attorno a un tema ricorrente nella sua opera matematica: il cosiddetto «teorema dei numeri pentagonali». Oltre alla predilezione che Euler stesso mostrò nei confronti dei numeri pentagonali, siamo stati spinti a considerare questo argomento per i tanti spunti che offre: dai bastoncini di Cuisenaire agli sviluppi in serie di Taylor-MacLaurin, ce n'è per tutti i gusti!

Seguiremo quindi con molta libertà la dimostrazione di Euler, di tanto in tanto sospendendone il flusso per segnalare alcune idee possibili per il lavoro in classe. Mossi dallo stesso interesse per l'applicazione didattica, ci siamo presi anche la licenza di deviare in un punto dal metodo originale di Euler, molto algebrico, seguendone uno più visivo e combinatorio.

Infine varrà anche la pena di sbirciare nella corrispondenza di Euler, per vedere i suoi dubbi, le sue precauzioni e la sua crescente destrezza nel manipolare le serie (formali) di potenze, che lui usa già come funzioni generatrici, consegnando così ai posteri quello che è oggi uno strumento fondamentale dell'analisi combinatoria. Vedremo infatti che la preoccupazione più grande di Euler non fu quella di convincersi della validità del suo risultato, ma di riuscire a trovare un argomento rigoroso per mostrare l'uguaglianza di due serie formali infinite senza fermarsi all'*induzione*, pur protratta abbastanza a lungo da non lasciare nessun dubbio.

Si può quindi ben dire che Euler, nelle serie di potenze che utilizzava con tanta frequenza, badava forse meno ai sommandi scritti davanti a sé che a quelli che doveva per forza riassumere nel simbolo «&c.»

1. The Mathematical Sciences Research Institute, 17 Gauss Way, Berkeley, CA 94720-5070 (USA).

I. Leonhard Euler

1. La domanda

San Pietroburgo, 1740. Preoccupato dall'inquietudine del paese, Euler sta già soppesando l'idea di lasciare la Russia. Lo raggiunge una lettera di Philippe Naudé, un insegnante di un ginnasio di Berlino, guarda caso, proprio la città dove Euler si trasferirà meno di un anno dopo. La lettera contiene due domande di carattere enumerativo circa i numeri naturali. Naudé chiede, per ogni numero naturale n, di determinare in quanti modi si possa scomporre n in una somma di al più m numeri interi, per m generico. Inoltre si richiede di determinare tale numero sia nel caso generale, sia specificando che i sommandi siano tutti distinti fra loro.

Euler riduce i due problemi di Naudé alla seguente questione fondamentale.

Domanda

In quanti modi si può scomporre un numero n in una somma di numeri interi positivi?

> *I bastoncini di Cuisenaire*
> Mezzo secolo fa la domanda sarebbe forse stata concretizzata con i bastoncini di Georges Cuisenaire [4, 17, 18], chiedendo di contare i «trenini» che formano il numero dato n, magari senza distinguere trenini che differiscono solo per la «direzione di marcia», oppure ancora di vedere quali sono le scomposizioni di n in tre numeri che possano essere lati di un triangolo… (5-8 anni).

2. La risposta di Euler

Malgrado l'apparenza inoffensiva della domanda di Naudé, essa occupò Euler a più riprese prima che egli, dopo 10 anni di tentativi e perfezionamenti, pubblicasse il risultato delle sue ricerche nell'articolo *De partitione numerorum* [10]. Questo tema sarà poi la materia per l'omonimo capitolo XVI dell'*Introductio in analysin infinitorum* [7].

Vediamo qui che Euler chiama «*partitio*» una scomposizione di un numero in una somma di numeri interi positivi. In realtà quindi si tratta di una «partizione» di una collezione di elementi identici. Siccome questo è troppo diverso dall'uso comune odierno della parola riferito agli insiemi, preferiamo d'ora in avanti parlare di *ripartizioni* di numeri.

2.1. Una somma, un prodotto e una prima soluzione

L'argomento di Euler comincia ponendo mano alla «cassetta degli attrezzi matematici» che lui stesso aveva approntato durante gli anni. L'arnese che ne estrae è l'uguaglianza

$$\frac{1}{1-x^k} = 1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + x^{4k} + \&c. = \sum_{i \in \mathbb{N}} x^{ik}$$

Sviluppi in serie... o forse no
È una formula che al liceo si incontra studiando gli sviluppi in serie di Taylor-MacLaurin. Ma, seguendo un suggerimento di Polya, si può ricavare la stessa formula anche provando a eseguire la divisione di polinomi «1/(1 – x)», avendo cura di scrivere il divisore in ordine di esponenti crescenti. In tal modo tra l'altro l'algoritmo della divisione fornisce anche a ogni passo il resto, ovvero la stima dell'errore. E, in più, tutto ciò ricorda anche i numeri decimali periodici... (13-16 anni).

Questo sviluppo è la base per calcolare il prodotto

$$\prod_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{1-x^k}$$

che quindi per Euler diventa

$$\left(1+x+x^2+\&c.\right)\left(1+x^2+x^4+\&c.\right)\left(1+x^3+x^6+\&c.\right)\&\,c.$$

Svolgendo la moltiplicazione si vede che c'è un modo solo per ottenere un termine di grado zero (che sarà quindi 1), un modo solo per ottenerne uno di primo grado (che sarà quindi x), ma due modi per ottenere x^2 (il termine di secondo grado sarà quindi 2 x^2).

Insomma, il coefficiente di x^n corrisponde al numero di modi diversi di scrivere n come somma $k_1 + 2\,k_2 + 3\,k_3 + \&c.$ con tutti i k_i –0. Ogni somma del genere può essere riletta come una ripartizione di n:

$$n = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{k_1\ \text{volte}} + \underbrace{2+2+\ldots+2}_{k_2\ \text{volte}} + \ldots + \underbrace{m+m+\ldots+m}_{k_m\ \text{volte}} + \&c.$$

Il trenino di Cuisenaire comincerebbe in questo caso con k_1 vagoni unitari (bianchi), seguiti da k_2 vagoni di lunghezza due (rossi), e così via. Ogni ripartizione del numero n può essere effettivamente scritta in questo modo «ordinato», ovvero raggruppando i sommandi 1, poi i 2 e così via.

In questo modo, e chiamando R(n) il numero delle ripartizioni di n, Euler ottiene

$$\prod_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{1-x^k} = \sum_{n\in\mathbb{N}} R(n)\,x^n$$

Oggi diremmo che aveva scoperto la *funzione generatrice* dei numeri R(n), e quindi in principio risolto il problema. Resta, per conoscere esplicitamente il valore dei numeri R(n), da svolgere il prodotto...

2.2. Un'idea «ricorsiva»

Euler cerca di rendere più efficiente il suo risultato cercando un'espressione ricorsiva che renda più agevole il calcolo dei numeri R(n).

L'idea è di basarsi sulla «evidente» identità

$$\prod_{k\in\mathbb{N}}\left(1-x^k\right)\prod_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{1-x^k}=1 \qquad (1)$$

e di sfruttare l'osservazione seguente:
quando due serie formali di potenze

$$A(x)=a_0+a_1\,x+a_2\,x^2+\&c. \quad e \quad B(x)=b_0+b_1\,x+b_2\,x^2+\&c.$$

soddisfano A(x) B(x) = 1, allora i coefficienti dell'una si possono ricavare ricorsivamente da quelli dell'altra.

Infatti, espandendo il prodotto e tenendo conto del fatto che a destra non vi sono termini di grado strettamente positivo, si ottiene

$$a_0\,b_0=1 \quad , \quad a_0\,b_1+a_1\,b_0=0 \quad , \quad \ldots$$

$$a_0\,b_n+a_1\,b_{n-1}+\ldots+a_n\,b_0=0$$

Supponendo per esempio i coefficienti di A(x) noti, si può risolvere la k-esima riga in funzione di b_{k+1} e sostituire le righe precedenti per gli altri coefficienti b_i: in tal modo i b_k sono determinati ricorsivamente.

Naturalmente per utilizzare questa idea Euler deve ancora scoprire i coefficienti del prodotto.

$$\prod_{k\in\mathbb{N}}\left(1-x^k\right)$$

In altre parole, si tratta di determinare i numeri q(n) tali che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}q(n)\,x^n=\prod_{k\in\mathbb{N}}\left(1-x^k\right)$$

Questa è forse la parte che più ha tediato Euler: sebbene ne avesse «indovinato» la soluzione calcolandone molti termini, nella sua corrispondenza con diversi altri matematici (si veda [3]) riconosceva (e si lamentava) di non averne una dimostrazione sufficientemente rigorosa (vedi la nostra sezione 3). Infine, in una lettera diretta a Goldbach [8] espone una dimostrazione rigorosa della sua soluzione.

Il metodo seguito da Euler è un susseguirsi di acrobazie algebriche e di sostituzioni che conduce infine al risultato sperato.

2.3. Un'idea combinatoria

Come direbbe Euler, «*aggrediamur ergo hanc primum quaestionem*» [11, par. 8].

Dapprima proviamo a espandere il prodotto in questione, e cioè

$(1 - x)\ (1 - x^2)\ (1 - x^3)\ (1 - x^4)$ &c.

Anche qui c'è un modo solo per ottenere termini di grado zero, ovvero scegliendo il fattore '1' in ogni parentesi: $q(0)=1$. Nello stesso modo si vede anche che $q(1)=q(2)=-1$. Il primo caso interessante è quello dell'esponente 3. I sommandi del termine di terzo grado sono: $-x^3$ ('usando' solo la terza parentesi) e $(-x^2)(-x)=+x^3$ (usando le prime due): quindi $q(3) = 0$.

Ogni termine è ottenuto moltiplicando unità o potenze diverse di x. In generale abbiamo quindi che q(n) si ottiene considerando le ripartizioni di n in parti diverse (... ma non è la seconda parte del problema di Naudé? Che egli ne avesse intuito l'interesse?). Ogni ripartizione con un numero pari di parti contribuisce con +1 al valore di q(n), le altre con –1.

Malgrado la citazione originale che apre il paragrafo, ci allontaniamo ora come annunciato dal metodo usato da Euler per illustrare una tecnica più «visiva» che permette di ottenere lo stesso risultato.

Utilizziamo un artificio schematico per rappresentare le ripartizioni. Per ogni addendo della ripartizione disegnamo una «barra» orizzontale con un numero corrispondente di quadretti, disponendo le righe più lunghe in alto e allineando le righe a sinistra. I diagrammi così ottenuti sono detti comunemente diagrammi di Ferrers, in omaggio a Norman McLeod Ferrers (1829-1903), che però non li usò mai nelle sue pubblicazioni. Infatti la paternità di queste rappresentazioni gli fu attribuita da J. J. Sylvester in [15], citando una comunicazione personale di Ferrers. Curiosamente, Sylvester annota a margine che Ferrers stesso diceva di aver scoperto questi diagrammi nella soluzione di un esame consegnata da uno studente di nome John C. Adams a Cambridge nel 1847 [13]. L'uso di questi diagrammi per studiare il prodotto notevole che ci interessa è dovuto però a un matematico americano, F. Franklin, che nel 1881 pubblicò una nota dedicata esclusivamente a questo argomento [12]. Oggi questi diagrammi sono uno strumento tipico nello studio delle ripartizioni.

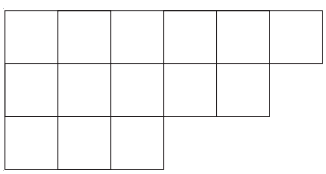


Figura 1

Il diagramma di Ferrers della ripartizione 14=6+5+3.

I diagrammi di Ferrers delle ripartizioni che ci interessano per calcolare i q(n) si distinguono per non avere mai due righe della stessa lunghezza.

L'idea chiave è ora di cercare di appaiare i diagrammi delle ripartizioni in parti distinte, in modo che in ogni paio ce ne sia una con un numero pari e un'altra con un numero dispari di parti. Per tutti i numeri n che permettono questo appaiamento avremo q(n) = 0, mentre per gli altri dovremo contare quante ripartizioni ‘avanzano’.

Ecco come si fa. Consideriamo il diagramma di una ripartizione in parti distinte e evidenziamo l’ultima riga e la diagonale che scende «a 45 gradi» dall’ultimo elemento in alto a destra, come nella figura 2.

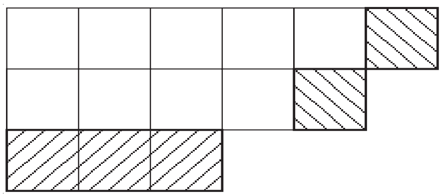


Figura 2

Se la diagonale è più corta dell’ultima riga, si spostano i quadratini della diagonale in modo da formare una nuova ultima riga. Nel caso contrario si spostano i quadretti dell’ultima riga aggiungendoli alle prime righe, uno per riga, in modo da creare una nuova diagonale. Un disegno vale più di mille parole:

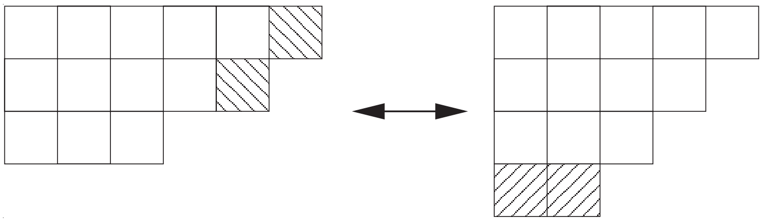


Figura 3

Siccome il numero di righe aumenta o diminuisce di uno, queste operazioni cambiano la parità del numero di parti della ripartizione. Il punto è che applicando due volte questa operazione si ritorna al diagramma di partenza: ecco quindi l’«appaiamento» desiderato!

Le ripartizioni che restano spaiate sono quelle a cui non si possono applicare le due operazioni, ovvero, quelle da cui con le trasformazioni indicate non si ottiene più una ripartizione in parti distinte. Questo avviene quando la lunghezza dell’ultima riga eguaglia o supera di un’unità la lunghezza della diagonale.

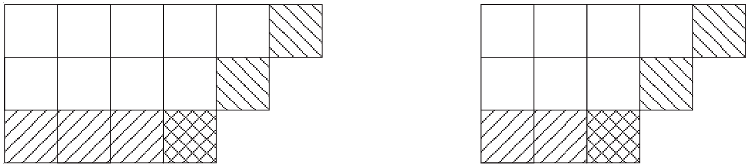


Figura 4. Le due configurazioni «eccezionali» possibili per un diagramma a 3 righe.

Dato n, al più una di queste configurazioni può apparire. Sappiamo quindi già che q(n) assume solo i valori –1, +1 e 0. Dobbiamo ora capire quali n ammettono le configurazioni «eccezionali», e come determinarne la «parità».

2.4. Numeri poligonali

Anche noi adesso mettiamo mano alla nostra scatola degli attrezzi: ricordiamo che i numeri poligonali sono quelli che si possono rappresentare arrangiando alcuni elementi (di solito pallini) in forme, appunto, poligonali «regolari». Ecco per esempio i primi 4 numeri triangolari e i primi 4 numeri quadrati.

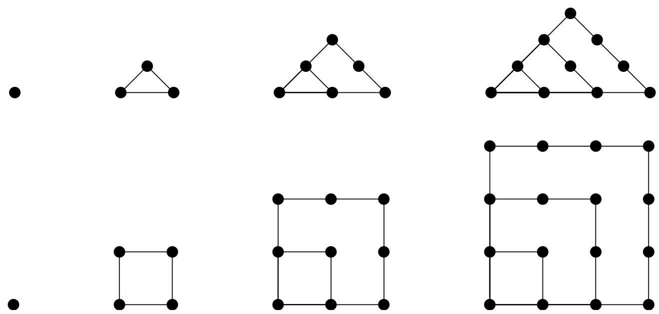


Figura 5

Ora vediamo bene che in ogni configurazione eccezionale il numero n deve essere la somma di un numero quadrato e un numero triangolare, come illustriamo nella figura 6.

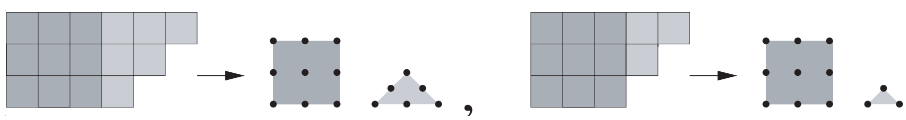


Figura 6. La metamorfosi di una configurazione «eccezionale».

Ora, scomposto così il diagramma, possiamo provare a deformare il quadrato in un rombo finché il lato verticale diventi parallelo a quello del triangolino. Si vede che in entrambi i possibili casi eccezionali tre coppie rombo-triangolo possono essere assemblate a formare un triangolo grande (figura 7).

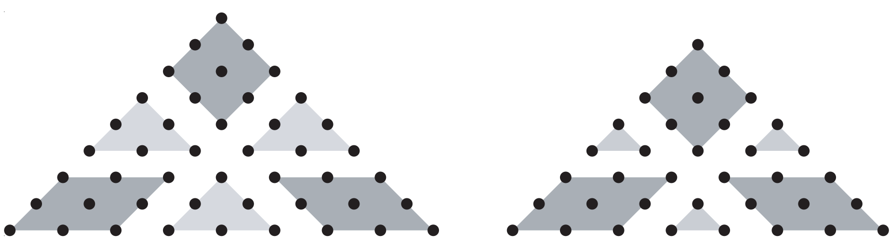


Figura 7. Ogni configurazione eccezionale è un terzo di un numero triangolare.

Inversamente, per ragioni di simmetria, si vede che un numero triangolare è divisibile per 3 solo se il baricentro del triangolo non è occupato da un elemento (figura 8). Fra l'altro, se il baricentro è «libero», i tre elementi più vicini a esso possono essere disposti come un triangolino con la punta in alto (che unirà i tre rombi) o con la punta in basso (e allora il triangolino unirà i tre triangoli).

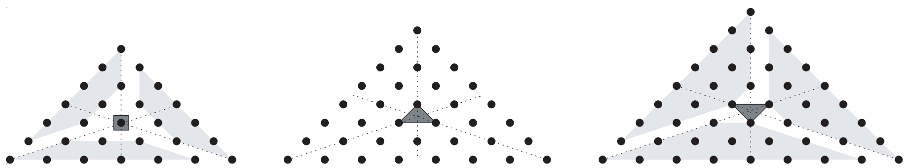


Figura 8. Tripartizione di un numero triangolare.

Insomma, $q(n)\neq 0$ quando n è pari a un terzo di un numero triangolare.

Resta da risolvere la questione del segno, ovvero della parità del numero delle parti (che è il numero di righe nel diagramma). Abbiamo visto che, fissato il numero delle parti (chiamiamolo k), ci sono esattamente due «configurazioni eccezionali» possibili (Figura 4). Esse danno adito a due numeri triangolari consecutivi (uno di lato $k+(k-1)+k$ e uno di lato $k+k+k$) che si ottengono usando gli stessi rombi e aggiungendo una riga di k elementi a ognuno dei triangolini (Figura 9).

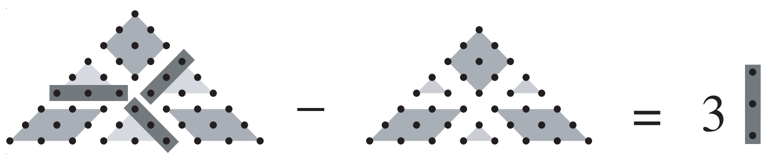


Figura 9. La differenza tra due numeri triangolari multipli di 3 consecutivi.

Ovviamente, se k è pari, la differenza tra i due numeri triangolari consecutivi è pari, e viceversa. Notiamo pure che il numero triangolare che segue o precede ognuna di queste coppie non può essere multiplo di 3 (ha il baricentro «occupato»!).

Ecco quindi che i numeri triangolari multipli di 3 si presentano naturalmente a coppie, e possiamo dire che: $q(n) = 1$ *se* 3 n *è un numero triangolare che fa parte di una coppia con uguale parità*, $q(n) = -1$ *se* 3 n *fa parte di una coppia di numeri triangolari con parità diverse, e* $q(n) = 0$ *altrimenti.*

2.5. La sorpresa

Proprio per come è disegnato, il numero triangolare di lato m è uguale alla somma dei numeri interi da 1 a m.

Ricordando la formula per la somma delle successioni aritmetiche e la lunghezza del lato dei numeri triangolari associati alle configurazioni eccezionali con k righe otteniamo i valori

$$T_a(k) = \frac{3k(3k-1)}{2} \quad ; \quad T_b(k) = \frac{3k(3k+1)}{2}$$

per la coppia di numeri triangolari associata. Siccome $T_a(-k) = T_b(k)$, possiamo economizzare la notazione e scrivere semplicemente $P(k) := T_a(k)$, cosicché automaticamente $T_b(k) = P(-k)$.

Il risultato che Euler trovò per via algebrica fu infatti

$$q(n) = \begin{cases} (-1)^k & \text{se } n = P(k) \text{ per un } k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{2}$$

Euler non nasconde il suo stupore nel ritrovare qui i *numeri pentagonali* di Diofanto, seppur nella loro forma cosiddetta «generalizzata». Per ottenere i numeri pentagonali *strictu sensu* dobbiamo supporre k>0: in tal caso P(k) è esattamente la forma generale dei numeri che si ottengono disponendo gli elementi su pentagoni di lato crescente.

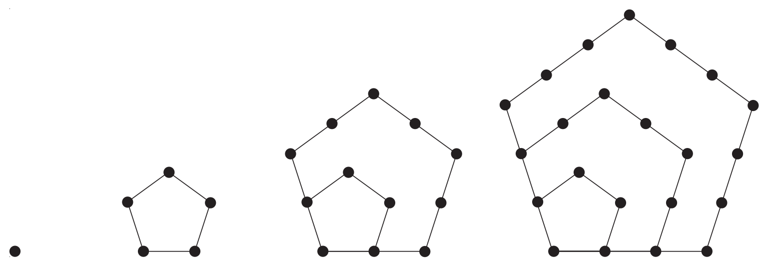


Figura 10. I numeri pentagonali, da P(1) a P(4).

Per noi, abituati a giocare con rombi, quadrati e triangoli, la cosa non desta particolare sorpresa. Senza sprofondare nelle formule, consideriamo le configurazioni eccezionali dove il lato del triangolo è minore di quello del quadrato. Vediamo che passando da una tale configurazione 'alla prossima' il numero totale di elementi incrementa di tre volte il lato del triangolo più un'unità, e il paragone con l'incremento tra un numero pentagonale e l'altro è presto fatto!

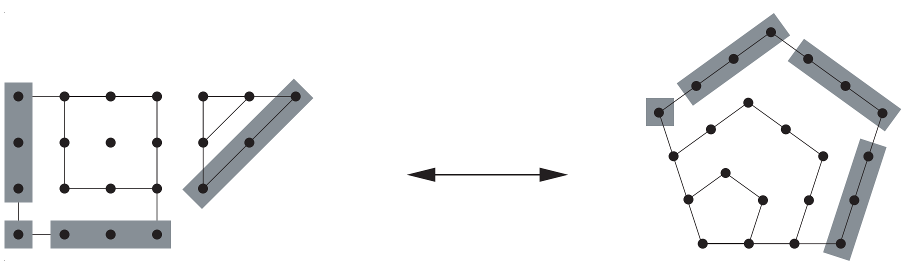
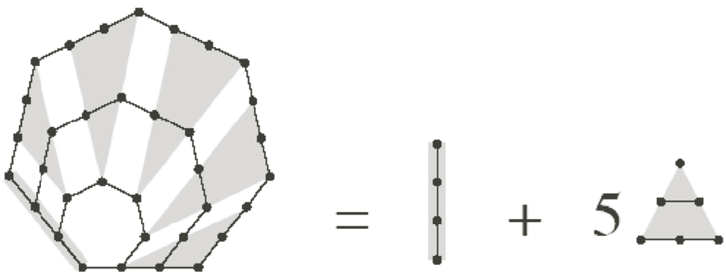


Figura 11. L'incremento dei numeri pentagonali confrontato con l'incremento tra due configurazioni eccezionali con «triangoli piccoli».

Se questa sarabanda di figure, numeri e diagrammi vi ha fatto girare la testa, confrontatela con Euler [10,7,3] ... e vedrete!

Numeri figurati
Un *numero figurato* è un numero che può essere rappresentato con una disposizione geometrica 'regolare' di punti, nel piano o nello spazio. Il più celebre (e arduo) risultato è forse il fatto che ogni numero naturale può essere espresso come la somma di al più n numeri n-agonali (Gauss per n = 3, Lagrange per n = 4, Cauchy in generale [5]).
I numeri figurati sono però una miniera di interessanti proprietà 'numerico-geometriche' che si ottengono semplicemente giocando con le figure. Per esempio, se T_n è l'n-esimo numero triangolare, allora l'n-esimo numero k-gonale è uguale a $n+(k–2)T_{n–1}$.
La dimostrazione sta tutta in una figura (dove k=7, n=4):



Per un repertorio più ampio di questi 'giochetti' rinviamo al libro di Conway e Guy [6] (ad esempio: che dire dei numeri 'piramidali' rispetto ai numeri 'tetraedrici'?). (9-12 anni).

2.6. Conclusione

A questo punto ritorniamo con Euler. Conosciamo infine i coefficienti q(n) di una serie che, moltiplicata per la serie generatrice dei numeri R(n), dà 1. Confrontando come sopra i coefficienti dei termini di grado uguale, e usando i valori ottenuti in (2), Eulero ottiene la seguente ricorsione:

$$R(n) = q(1)\,R(n-1) + q(2)\,R(n-2) + \&c. = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ P(k)\le n}} (-1)^k\, R\big(n-P(k)\big)$$

che utilizza quindi tutti i pentagonali minori o uguali a n. Questo tipo di risposta avrebbe però difficilmente entusiasmato il buon Naudé, e quindi Euler conclude compilando una tabella dove nell'm-esima riga, n-esima colonna, troviamo il numero di modi di scomporre n utilizzando solo i numeri 1, 2, . . . , m. All'inizio dell'ultima riga troviamo un'altra invenzione di Euler: «∞». Porre m = «∞» significa non porre nessuna restrizione alla partizione; nella n-esima colonna, ultima riga troviamo quindi $n^{(\infty)}$, ovvero il modo in cui Euler chiama il nostro R(n).

Tabula indicans, quot variis modis quilibet numerus n ex numeris 1, 2, 3, 4, - - - - m per additionem produci possit, seu exhibens valores formulae $n^{(m)}$.

Num. m.	Valores numeri n. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12
3	1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24	27	30	33	37	40	44	48	52
4	1	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23	27	34	39	47	54	64	72	84	94	108	120	136
5	1	1	2	3	5	7	10	13	18	23	30	37	47	57	70	84	101	119	141	164	192	221	255
6	1	1	2	3	5	7	11	14	20	26	35	44	58	71	90	110	136	163	199	235	282	331	391
7	1	1	2	3	5	7	11	15	21	28	38	49	65	82	105	131	164	201	248	300	364	436	522
8	1	1	2	3	5	7	11	15	22	29	40	52	70	89	116	146	186	230	288	352	434	525	638
9	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	41	54	73	94	123	157	201	252	318	393	488	598	732
10	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	55	75	97	128	164	212	267	340	423	530	653	807
11	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	76	99	131	169	219	278	355	445	560	695	863
12	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	100	133	172	224	285	366	460	582	725	905
13	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	134	174	227	290	373	471	597	747	935
14	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	175	229	293	378	478	608	762	957
15	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	230	295	381	483	615	773	972
16	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	296	383	486	620	780	983
17	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	384	488	623	785	990
18	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	489	625	788	995
19	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	490	626	790	998
20	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	490	627	791	1000
∞	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	490	627	792	1002

X 3 m. 23

Figura 12. Pagina 165 di [10]. Euler calcola tutti i valori fino a n = 59 (corrispondenti ad altre 4 pagine di tabella), ovvero fino a R(59) = = 831820(!)

Buona parte di *De partitione numerorum* è in effetti dedicata a sviscerare la tabella, della quale la Figura 12 mostra la prima pagina. Euler illustra un vasto repertorio di artifici per ricavare, opportunamente sommando o sottraendo i valori riportati, la soluzione di diverse varianti del problema delle ripartizioni. In particolare, risponde anche ai due quesiti originali di Naudé.

In ogni caso Euler dà moltissima importanza alla praticità di calcolo, e rileva come la tabella in effetti si 'autorigeneri' tramite semplici somme. È a illustrare questo processo di autoriproduzione che servono i numerini più piccoli scritti in alto a certi campi della tabella. Vogliamo illustrare brevemente come.

Si nota subito che la sequenza orizzontale di numerini della m-esima riga riproduce la sequenza dei numeri principali della stessa riga, ma è 'spostata a destra' di m posti. Euler sta sfruttando il fatto che

$$n^{(m)} = n^{(m-1)} + (n-m)^{(m)}$$

Una ripartizione di n in parti non superiori a m può essere infatti solo di due tipi: o nessuna parte vale effettivamente m (e tutte queste sono contate dal primo sommando), oppure almeno una parte è uguale a m. Queste ultime ripartizioni di n con una parte uguale a m sono esattamente tante quante le ripartizioni di (n–m) in parti non superiori a m, e di queste ce ne sono appunto $(n–m)^{(m)}$.

Una volta scritti i primi m termini della riga m (che sono, tra l'altro, necessariamente uguali a quelli della riga superiore), Euler li trascrive, spostati, come numerini piccoli. Egli ottiene quindi il numero 'grande' di ogni campo sommando il numerino che ha già messo in quel campo ($(n-m)^{(m)}$) con il numero 'grande' del campo appena sopra ($n^{(m-1)}$).

Qualcuno si sarà già chiesto a che cosa corrispondono i numerini nell'ultima riga, quella con $m=\infty$. Chiaramente il ragionamento non funziona più, ma si vede che, di nuovo, i numerini dell'ultima riga sono l'incremento tra i numeri delle ultime due righe (... anche lungo le ulteriori 4 pagine della tabella [10, pp. 166-169]). Il fatto è che Euler riesce a esprimere anche questi incrementi tramite i valori della tabella già costruita: con tale metodo, avendo a disposizione i valori fino a m = 20 Euler mostra di essere in grado di calcolare velocemente $n^{(\infty)}$ fino a un n «*valde magnus*» [10, §43]. Ma questa è un'altra storia, nella quale adesso non conviene addentrarsi: la si può trovare in [10, §42 e segg.].

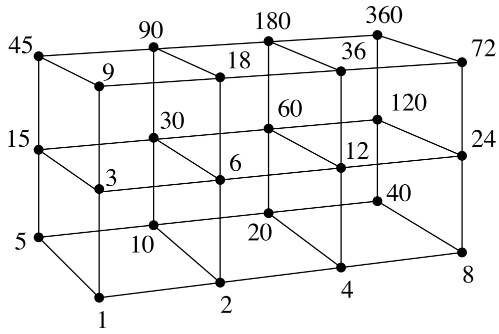
Anche dopo aver risposto completamente alla domanda di Naudé, Euler ebbe occasione di sfruttare ancora questi risultati. Ad esempio in un articolo dal titolo *Demonstratio theorematis circa ordinem in summis divisorum observatum* [9]. È questa, stando a [3], la prima volta che Euler pubblica la dimostrazione del 'teorema dei numeri pentagonali' dopo che l'aveva comunicata privatamente a Goldbach [8].

In questo lavoro Euler ritrova i numeri pentagonali in una formula ricorsiva per determinare la somma S(n) dei divisori di un numero naturale, tra l'altro *senza doverlo scomporre in fattori*! Il prezzo per poter riscrivere la sua cara ricorsione pentagonale anche per S(n) è dover porre «d'ufficio» la somma dei divisori di 0 uguale a n, secondo il caso [3, Sezione 4], [11, Par. 4].

Diagrammi di Hasse

Quando la scomposizione in fattori primi $n = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots$ del numero in questione è disponibile, con i diagrammi di Hasse (ovvero considerando il 'reticolo dei divisori', come nell'esempio per $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$) si può provare a dimostrare che per la somma dei divisori di n vale

$$\sum_{d|n} d = \left(\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \cdot \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \ \&\text{c.} \right)$$



E che dire, più semplicemente ancora, del *numero* e del *prodotto* dei divisori di n? (15-17 anni).

3. I dubbi di Euler

Il lungo lasso di tempo trascorso dalla domanda originale di Naudé alla risposta «definitiva» di Euler [10] è dovuto alla circospezione del matematico e al suo disagio nel manipolare serie o prodotti infiniti: insomma le espressioni che lui terminava con &c., principalmente a causa dei problemi legati all'induzione.

In particolare, per quanto riguarda il teorema di cui ci occupiamo, Euler credeva già da molto tempo almeno che q(n) fosse diverso da 0 solo per i numeri $k\left(3k \pm 1\right)/2$ e giustificava questo fatto con l'aver sviluppato il prodotto per così tanti termini che non poteva più sussistere nessun ragionevole dubbio; dice: *«..., habe ich auch nur per inductionem geschlossen, welche ich zwar so weit fortgesetzt, dass ich die Sach für völlig wahr halten kann; allein ich wäre sehr begierig davon eine demonstrationem directam zu sehen,...»*[8].

Infatti Euler non cessa di menzionare il teorema dei numeri pentagonali nelle sue corrispondenze, manifestando la sua insoddisfazione per non avere una prova rigorosa dell'enunciato, e chiedendo all'interlocutore di turno (Goldbach, Daniel I Bernoulli, Niklaus I Bernoulli, d'Alembert [3, Sezione 2]) che vi si dedicasse e provasse a risolvere il problema. Ma da queste lettere non scaturiscono risultati utili e d'Alembert addirittura si arrende dicendo *«Au reste personne n'est plus profond et plus versé sur ces matières que vous»* [1].

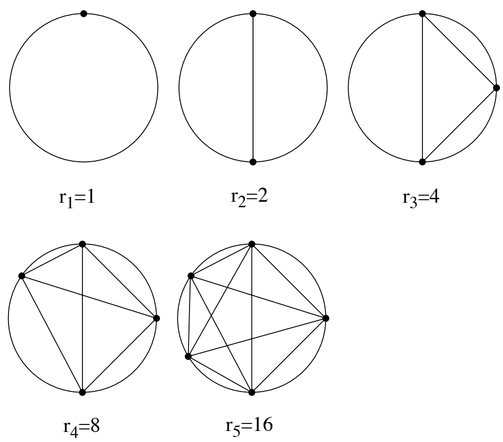
Au reste, è lo stesso Euler che riesce a dimostrare il teorema argomentando per ricorsione. La prima stesura di questa dimostrazione, come detto, sembra essere in una lettera del 1747 a Goldbach ([3, sezione 3],[8]).

3.1. E perché no?

Riguardo alla diffidenza verso l'«induzione», una precisazione dei termini si impone. Naturalmente Euler intende induzione in senso propriamente logico: a partire da un numero finito di casi indurre, appunto, una regola generale. Non si intende qui il metodo di dimostrazione rigoroso che si ancora a un caso iniziale e procede mostrando la validità dell'enunciato per il successore di ogni numero per cui esso sia già provato. Tale tecnica è propriamente chiamata ricorsiva.

Un tranello induttivo

Un problema utile per illustrare i tranelli dell'induzione è quello di determinare il numero rn di regioni determinate all'interno di un cerchio dalle corde tese tra n punti in posizione generica sulla circonferenza. I primi termini della successione sono i seguenti.



Da questi valori si è condotti a indurre un principio che si rivelerà arduo da dimostrare... infatti il sesto termine della successione è $r_6 = 31$ (provare per credere)! E allora diventa tanto più stuzzicante cercare, e dimostrare, la formula corretta. (15-17 anni).

3.2. Oggi: serie formali di potenze

Abbiamo visto come Euler usi quelle che noi oggi chiameremmo funzioni generatrici per determinare i numeri q(n), ovvero, cerca lo «sviluppo in serie» di un'ipotetica funzione dove il coefficiente di x^n sia esattamente q(n). Sebbene all'inizio queste serie infinite provengano da sviluppi «onesti» (per esempio quello di 1/(1–x)), esse non sono assolutamente trattate come oggetti analitici. Euler si serve di questi «polinomi infiniti» semplicemente come oggetti combinatori per manipolare liste infinite di numeri, esattamente come oggi si usa una funziona generatrice che, per dirla con Wilf, «*is a clothesline on which we hang up a sequence of numbers for display*» [16, p. 1]. Il problema diventa spinoso quando si pretende comunque di manipolare queste serie come oggetti algebrici, scrivendo quindi uguaglianze come la (1), che sta alla base dell'argomento di Euler. Era anche questa consapevolezza a rendere Euler particolarmente timido nell'esporre il suo ragionamento.

Oggi la questione è sistemata dalla teoria delle serie formali di potenze, dove si precisano le regole di calcolo e si introduce una nozione di 'convergenza formale' per queste serie. Per chi fosse interessato a saperne di più segnaliamo alcune referenze: Guinot [14] spiega lo stretto necessario per rendere rigoroso l'argomento di Euler, mentre Wilf [16] tratta il tema dal punto di vista delle funzioni generatrici. Concludiamo segnalando il recente articolo di Andrews [2] che mostra come Euler, indagando altri tipi di ripartizioni, avesse già utilizzato serie di Laurent formali, ammettendo quindi anche esponenti negativi, e trattando espressioni che in senso analitico non convergono per nessun valore della variabile!

Bibliografia

Osservazione: I testi originali di Euler sono liberamente disponibili in rete sul sito dell'università di Dartmouth. Per le pubblicazioni scientifiche, divise per argomento e classificate con l'«indice Eneström» (della forma Exyz), si veda:
http://www.math.dartmouth.edu/~euler/publications/.
I carteggi di Euler sono invece catalogati per nome del corrispondente e con un codice di 5 caratteri (OOxyz). Si veda:
http://www.math.dartmouth.edu/~euler/correspondence/.

[1] J. L.-R. d'Alembert. Lettera a Euler del 20 gennaio 1748. (Lettera n. 12 del carteggio Euler-d'Alembert, 0024). Leonhardi Euleri Opera Omnia, Ser. IV, vol. 5. Birkhäuser, Basel. pp. 276-278.

[2] G. Andrews. Euler's «De Partitio Numerorum». Bull. Amer. Math. Soc. 44 (2007), pp. 561-573.

[3] J. Bell. Euler and the pentagonal number theorem. Arxiv:math/0510054.

[4] G. Cuisenaire, C. Gattegno. Les nombres en couleurs. Delachaux et Niestle, Neuchâtel, 1956.

[5] A. L. Cauchy. Démonstration du théorème général de Fermat sur les nombres polygones. In Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy, Vol. VI (II Srie), pp. 320-353. Gauthier-Villars, Paris 1905.

[6] J. H. Conway, R. K. Guy. The Book of Numbers. Springer-Verlag, New York, 1996. (Edizione italiana: Il libro dei numeri. Hoepli, Milano, 1999.)

[7] L. Euler. Introductio in analysin infinitorum (E 101). Ristampa anastatica della traduzione di Lagrange. ACL-Editions, Paris, 1987.

[8] L. Euler. Lettera a Goldbach del 9 giugno 1750 (Lettera n. 144 del carteggio Euler-Goldbach, OO858).

[9] L. Euler. Demonstratio theorematis circa ordinem in summis divisorum observatum. (E244) Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Volume 5 (1760). pp. 75-83.

[10] L. Euler. De partitione numerorum. (E 191) Novi Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae, Volume 3 (1753), pp. 125-169.

[11] L. Euler. De mirabilibus proprietatibus numerorum pentagonalium. (E542) Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae, Volume I (1780) pp. 56-76.

[12] F. Franklin. Sur le développement du produit infini (1 – x)(1 – x2)(1 – x3)(1 – x4). C. R. Acad. Sci. Paris, 92 (1881), pp. 448-450.

[13] C. Kimberling. The origin of Ferrers graphs. The Mathematical Gazette, vol. 83, 497 (1999), pp. 194-198.

[14] M. Guinot. Ce diable d'homme d'Euler. Aléas, Lyon, 1994.

[15] J. J. Sylvester. On Mr. Cayley's impromptu demonstration of the rule for determining at sight the degree of any symmetrical function of the roots of an equation expressed in terns of the coefficients. Philosophical Magazine 5 (1853) pp. 199-202.

[16] H. Wilf. Generatingfunctionology, 2a edizione. Academic Press, New York, 1994. In rete: http://www.math.upenn.edu/~wilf/gfology2.pdf

[17] http://en.wikipedia.org/wiki/Cuisenaire rods

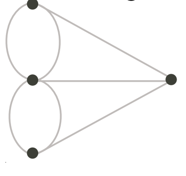
[18] http://teachertech.rice.edu/Participants/silha/Lessons/cuisen2.html

11. I ponti di Königsberg *à la* Euler

Giorgio Mainini

In this paper, the author translates and comments, from a methodological and didactical point of view, the work Solutio problematis ad Geometriam situs pertinentis, in which Euler addresses and solves the problem of the bridges of Königsberg in its specific and general form.

È frequente l'abitudine, quando si vuole introdurre il discorso sui grafi, di partire dal «Problema dei ponti di Königsberg». Il metodo al quale «classicamente» si fa capo è quello di disegnare il seguente grafo



che, in qualche modo, schematizza la situazione geografica reale nel XVIII secolo; di mostrare che, se il numero di vertici di ordine dispari è maggiore di due, il grafo, «senza alzare la matita dal foglio», non è percorribile alle condizioni imposte; di contare i vertici di ordine dispari del grafo di Königsberg e di arrivare infine alla conclusione che il problema è irrisolvibile. Si cita poi Leonhard Euler (che latinizzò il proprio cognome in Eulerus, italianizzato in Eulero), che ebbe la geniale idea di «inventare» i grafi e di fondare così la topologia. Si incorre così in due imprecisioni:

Euler non ricorse ai grafi, ma seguì un'altra linea di ragionamento. Qui per «grafo» si intende «un insieme di punti e di linee che collega un qualche loro sottoinsieme (eventualmente vuoto)». (Vedi http://mathworld.wolfram.com/Graph.html)

Euler non fu il primo ad occuparsi di problemi topologici.

Il primo paragrafo del suo lavoro *Solutio problematis ad Geometriam situs pertinentis*[1], pubblicato per la prima volta nei *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*[2] 8, 1741, pagine 128-140, comincia con queste parole:

1. Il documento, in formato .pdf, cui ho fatto capo è scaricabile da Internet seguendo la seguente procedura:
   – andare al sito http://www.math.dartmouth.edu/~euler/
   – nella colonna blu a sinistra, cliccare su Subject
   – nella tabella Mathematics: cliccare su Combinatorics & Probability
   – nella nuova tabella cliccare su 53
   – al titolo Documents Available: cliccare su E053
2. Petropolitanus significa «di San Pietroburgo».

§ 1.

Praeter illam Geometriae partem, quae circa quantitates versatur, et omni tempore summo studio est exculta, alterius partis etiamnum admodum ignotae primus mentionem fecit Leibnitzius, quam Geometriam situs vocavit[3].

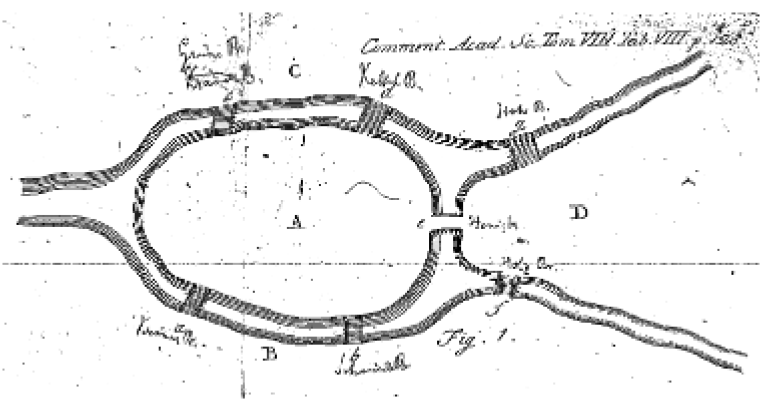
Tali parole rendono evidente l'imprecisione citata per seconda.

Qui, invece, mi interessa mostrare la linea di ragionamento di Euler. Farò poco più, in sostanza, che tradurre in italiano, qua e là *ad sensum*, il lavoro citato sopra[4].

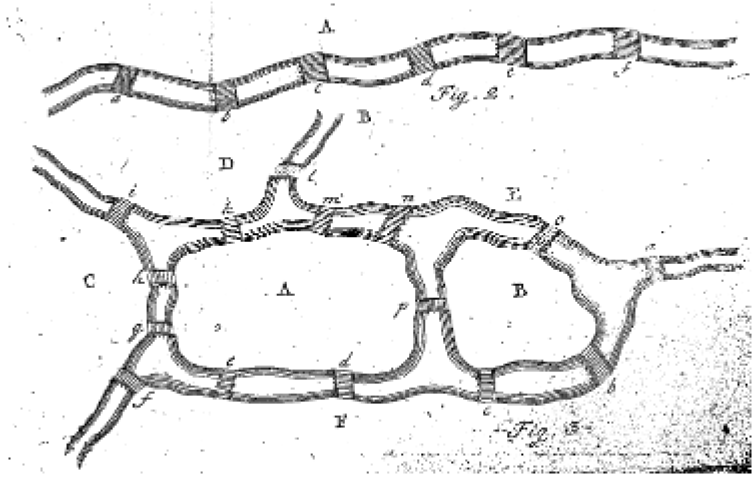
Il problema dei ponti di Königsberg

Dopo la parte trascritta sopra, e tradotta in nota[5], il § 1. continua così.

Questa parte si occupa solo del luogo in sé stesso e delle proprietà che se ne possono ricavare; in questo modo di fare geometria non si considerano le quantità e non si deve fare alcun calcolo[5]. In quale maniera i problemi appartengano a questa «Geometria situs», e con quali metodi si debbano risolvere, non è sufficientemente chiaro. Perciò, siccome ultimamente è stata fatta menzione di un problema che sembra appartenere ad essa, o perlomeno ad essa vicino, poiché non richiede né determinazione di quantità, né è da risolvere in forza di calcoli di quantità, non ho avuto il minimo dubbio che appartenesse proprio alla «Geometria situs»: prima di tutto perché nella sua soluzione si deve prendere in considerazione solo il luogo, poi perché non si deve fare alcun calcolo. Ho dunque inventato un mio metodo per risolvere questo genere di problemi, che voglio esporre qui come esempio di «Geometria situs».



3. «Oltre che di quella parte della Geometria, che si occupa delle quantità, e che da sempre è stata coltivata con grandissimo zelo, di un'altra parte finora del tutto sconosciuta per primo fece menzione Leibnitz [più comunemente scritto Leibniz], che la chiamò Geometria del luogo» [e topologia significa proprio studio del luogo].
4. Ringrazio gli amici e colleghi Giancarlo Quadri e Giancarlo Reggi, che hanno sciolto qualche mio dubbio.
5. Qui Euler proprio non è stato profetico: vedesse un testo moderno di topologia…



§ 2. Il problema, che mi era stato presentato come abbastanza noto, era il seguente: a Regiomonte [latinizzazione di Königsberg], in Prussia[6] c'è un'isola, detta «Der Kneiphof», circondata dai due rami di un fiume, nel modo mostrato in figura. Le regioni determinate dal fiume sono congiunte da sette ponti, indicati con a, b, c, d, e, f , g. Il problema consiste nel sapere se si può passare una volta e soltanto una volta su tutti i ponti. Mi venne detto che alcuni rispondevano che non si può, altri che non lo sapevano: nessuno rispose che si poteva. Io mi posi il problema generale: «qualunque sia la forma del fiume e delle sue ramificazioni, e per qualsiasi numero di ponti, si può stabilire se sia possibile o no passare su tutti i ponti una e una sola volta?»

§ 3. Per quanto riguarda il problema regiomontano dei sette ponti, si sarebbe potuto procedere con l'elencazione completa di tutti i percorsi: da questa si potrebbe allora ricavare qual sia il percorso o se non ve ne sia alcuno. Ma questo metodo, da un canto non è praticabile e per l'eccessivo numero di combinazioni e perché troppo difficile e stancante, dall'altro non condurrebbe alla soluzione di problemi analoghi con altri numeri di ponti. Inoltre, anche se il metodo conducesse a buon fine, vi si intravedono troppe cose senza relazione con il problema. Perciò, abbandonato questo metodo, ne ho cercato un altro che non uscisse dal seminato, ma che mostrasse se il percorso esista oppure no. Ho difatti congetturato che tale metodo sarebbe stato molto più semplice.

§ 4. Il mio metodo si fonda su un modo idoneo di descrivere i cammini. Ho cominciato con l'indicare con A, B, C, D le singole regioni descritte, determinate dal corso del fiume. Così, se qualcuno va da A a B, attraversando o il ponte a oppure il ponte b, indico questo percorso con AB. Se poi il viaggiatore si recherà in D attraverso il ponte f, rappresenterò questo percorso con BD, e indicherò il tragitto completo soltanto con ABD, perché la lettera di mezzo, B, designa sia la regione di arrivo del primo sia quella di partenza del secondo tragitto.

6. Borussia, … anche se Dortmund è nella Renania settentrionale-Vestfalia, come Mönchengladbach, e Neunkirchen è nella Saar…

§ 5. Allo stesso modo, se poi il viaggiatore dalla regione D si reca in C attraverso il ponte g, indicherò il tutto con ABDC. Dalle quattro lettere ABDC si capisce che il viaggiatore, che era nella regione A, è passato alla regione B, di qui è passato nella regione D, dalla quale è poi proseguito in C. Siccome queste regioni sono separate dal fiume, si capisce anche che il viaggiatore ha necessariamente attraversato tre ponti. Così, se saranno stati attraversati quattro ponti, il percorso deve essere descritto con cinque lettere. In generale, la passeggiata del viaggiatore che attraversa un certo numero di ponti deve essere descritta da un numero di lettere che superi di uno il numero dei ponti. Di conseguenza, se si attraversano sette ponti, sono necessarie otto lettere.

§ 6. In questo modo di rappresentare non tengo conto di quale ponte sia stato attraversato ma solo in quale regione si arrivi, perché, se si può andare dall'una all'altra attraverso più ponti, non ha importanza quale di essi sia stato scelto ma soltanto in quale regione si sia arrivati. Da ciò si comprende che, se esiste un percorso attraverso i sette ponti che rispetti le condizioni imposte, esso deve essere descritto con otto lettere, e che le lettere A e B devono essere vicine due volte, poiché tra A e B ci sono i due ponti a e b che le congiungono. Allo stesso modo devono susseguirsi due volte le lettere A e C nella serie di otto lettere; la successione delle lettere A e D deve occorrere una sola volta, come le successioni delle lettere B e D, e delle lettere C e D.

§ 7. La domanda allora si riduce a questo: «è possibile costruire una serie di otto lettere composta dalle lettere A, B, C e D nella quale ogni successione si presenti tante volte quanto è richiesto?» Prima di cercare una tale disposizione, conviene dimostrare se le lettere possono essere disposte in tal modo o no. Difatti, se si potesse dimostrare che una tale disposizione non è realizzabile, sarebbe inutile qualunque fatica volta a trovarla. Perciò ho cercato una regola in forza della quale si potesse decidere se una disposizione come quella cercata esista o no, sia per il problema in questione sia per altri simili.

§ 8. Per cercarla, ho immaginato che esista una sola regione A, alla quale conduca un certo numero di ponti a, b, c, d, ecc. Di questi ponti comincio con il pensarne uno, diciamo a. Ora, sia che un viaggiatore vi sia transitato per arrivare in A oppure per uscirne, secondo il modo stabilito sopra di descrivere il percorso, è necessario che la lettera A appaia una sola volta. Se ad A fanno capo tre ponti, a, b e c, e un viaggiatore passa su tutti e tre una sola volta, allora nella descrizione del suo migrare la lettera A apparirà due volte, indipendentemente dal fatto che da A sia partito o ad A sia arrivato. Allo stesso modo, se i ponti fossero cinque, nella descrizione del viaggio la lettera A deve apparire tre volte. Insomma, per qualunque numero dispari di ponti, la lettera A apparirà tante volte quanto è la metà del numero aumentato di uno[7].

§ 9. Nel caso di Königsberg, dunque, poiché l'isola A è congiunta alle altre regioni con i cinque ponti a, b, c, d, e, è necessario che, nella descrizione del percorso attraverso questi ponti, la lettera A appaia tre volte. Per lo stesso motivo, la lettera B deve apparire due volte, poiché tre ponti conducono alla regione B; allo stesso modo devono

7. Attenzione al genere dell'aggettivo: se i ponti sono n dispari, la lettera A apparirà (n+1)/2 volte, non n/2+1.

apparire due volte sia la lettera C sia la D. Dunque nella serie di otto lettere che deve descrivere il percorso per sette ponti, la lettera A deve apparire tre volte, e la B, la C e la D due volte ciascuna: cosa che, in una serie di otto lettere, sarà assolutamente impossibile realizzare. Diventa pertanto evidente che la passeggiata sui sette ponti regiomontani non può essere fatta.

Inserto di costume

Immagina un mainini qualunque che, nel 1741, fosse arrivato alla conclusione appena scritta. Probabilmente si sarebbe rivolto ai *mass media* dell'epoca e l'avrebbe fatta pubblicare con la debita pompa. In effetti, avrebbe pur sempre risolto un problema che avevano affrontato senza successo varie generazioni di regiomontani e chissà quanti viaggiatori passati per di là. Nessuna meraviglia: gli attuali *mass media* sono spesso portatori di «scoperte» ben minori, dal raro zigomiceto scovato sotto una felce in Bedrina, al cinquantesimo genere di *Bernardinia pulcherrima L.*, caratterizzata da una micromacula purpurea nel soprassella. Euler, invece, no. Come preannunciato, generalizza, prima di pubblicare sui prestigiosi *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*.

Generalizzazione

§ 10. Allo stesso modo, in ogni altro caso, in cui il numero di ponti che conducono ad ogni regione è dispari, si può stabilire se, alle solite condizioni, il passaggio sui singoli ponti può essere effettuato. Se infatti capita che la somma di tutti i posti nei quali devono apparire le lettere [*le occorrenze delle lettere*] è uguale al numero dei ponti aumentato di uno, la passeggiata è possibile; se invece, come avviene nel nostro esempio, la somma di tutti i posti è maggiore del numero dei ponti aumentato di uno, allora la passeggiata è impossibile[8]. Inoltre, la regola che ho dato per trovare le occorrenze di A a partire dal numero di ponti che conducono alla regione A vale sempre; sia se tutti i ponti portano ad una sola regione B, come in Fig. 2, sia se conducono a regioni diverse; considero quindi una sola regione A e ricerco quante debbano essere le occorrenze della lettera A.

§ 11. Se invece il numero di ponti che conducono alla regione A fosse pari, allora bisogna distinguere se il viaggiatore comincia il suo andare da A o no. Se i ponti che conducono ad A sono due e il viaggiatore parte da A, allora la lettera A deve apparire due volte, una volta per designare l'uscita da A per uno dei due ponti, e una volta per designare il ritorno in A dall'altro. Se invece il cammino comincia in un'altra regione, allora la lettera A deve occorrere una sola volta, che valga per l'entrata in essa e anche per l'uscita, considerato come ho stabilito di descrivere i cammini.

§ 12. Si pensi adesso che siano quattro i ponti che conducono ad A e che il viaggiatore parta da A: allora nella descrizione di tutto il percorso la lettera A dovrà apparire tre volte, se passerà una volta su ogni ponte; se invece comincerà il suo cammino in un'altra regione, allora la lettera A dovrà apparire soltanto due volte. Se i ponti

8. Qui, bisogna pur dirlo, Euler non si è espresso benissimo. Evidentemente ritiene che il ragionamento fatto sopra, con quella somma $3+2+2+2=9>7+1$, sia sufficientemente esplicativo.

fossero sei e il viaggiatore partisse da A, allora la lettera A occorrerà quattro volte; se partisse da un'altra regione, apparirebbe solo tre volte. Perciò, in generale, se il numero dei ponti è pari, la metà di tale numero indica quante volte la lettera A occorrerà se il viaggiatore non parte da A; se invece parte da A, le occorrenze saranno la metà del numero di ponti aumentata[9] di uno.

§ 13. Poiché il viaggio non può che partire da una sola regione, definisco così il numero delle occorrenze di ogni lettera: esso è la metà del numero di ponti aumentato di uno, se il numero è dispari; o la metà del numero dei ponti, se il numero è pari. Infine, se il numero totale delle occorrenze di tutte le lettere è uguale al numero di tutti ponti aumentato di uno, allora la passeggiata è possibile se si comincia in una regione nella quale conduce un numero dispari di ponti. Se invece il numero totale di occorrenze fosse minore del numero dei ponti aumentato di uno, allora la passeggiata è possibile se si comincia in una regione alla quale conduce un numero pari di ponti, perché in questo modo il numero delle occorrenze deve essere aumentato di uno.

§ 14. Per applicare la regola appena enunciata, nel caso di un numero qualunque di ponti e di regioni comunque definite dai rami del fiume, eseguo le seguenti operazioni. Per prima cosa indico con le lettere A, B, C, ecc. le varie regioni separate dai rami del fiume. In secondo luogo conto quanti sono i ponti che conducono alle singole regioni, li sommo e aumento il risultato di uno: questo numero me lo segno per bene, perché mi servirà in seguito. In terzo luogo ad ogni lettera A, B, C, ecc. assegno come indice il numero di ponti che conducono alla regione corrispondente. In quarto, segno con un asterisco le lettere con indice pari. In quinto, scrivo le metà di tutti i numeri pari e le metà dei numeri dispari aumentati di uno. In sesto, sommo tutti i numeri calcolati nella quinta operazione: se questa somma è minore di una unità oppure uguale al numero che mi sono segnato prima (che è il numero dei ponti aumentato di uno) allora concludo che la passeggiata può essere realizzata. Bisogna però tener presente che se la somma trovata è minore di una unità rispetto al numero segnato, allora la passeggiata deve iniziare in una delle regioni contrassegnate con l'asterisco, mentre deve cominciare in una non contrassegnata con l'asterisco se la somma è uguale al numero segnato.

Ecco che cosa ottengo nel caso dei ponti regiomontani:

Numero dei ponti: → 7 → lo aumento di uno → mi segno **8**

A	5	3
B	3	2
C	3	2
D	3	2

La somma dei numeri dell'ultima colonna è maggiore di 8, e di conseguenza la passeggiata è impossibile.

9. Attenzione al genere dell'aggettivo: è la metà che deve essere aumentata di uno. Se il numero di ponti è n pari, A occorrerà n/2.

§ 15. Si consideri ora la Fig. 3: in essa si vedono alcune regioni, di cui due sono isole, unite fra di loro da quindici ponti, a, b, c, d, ecc. Si chiede se è possibile attraversare tutti i ponti, ciascuno una sola volta. Per prima cosa designo con le lettere A, B, C, D, E, F le regioni distinte fra di loro e così si capisce che le regioni sono sei. Poi aumento di uno il numero dei ponti, ottenendo 16: questo numero me lo segno per bene.

Procedendo come indicato ottengo lo schema

		16
A *	8	4
B *	4	2
C *	4	2
D	3	2
E	5	3
F *	6	3
		16

Poiché la somma, 16, è uguale al numero segnato, **16**, ne discende che la passeggiata può essere realizzata nel modo desiderato soltanto se si parte o dalla regione D o dalla E, le cui lettere non sono contrassegnate con l'asterisco. La passeggiata potrebbe essere la seguente EaFbBcFdAeFfCgAbCiDkAmEnApBoElD, dove tra le lettere maiuscole ho interposto i ponti per i quali transitare.

§ 16. Con il metodo descritto sarà dunque facile, anche in casi molto complessi, stabilire se la passeggiata sia possibile o no. Tuttavia da questo stesso metodo è possibile ricavarne senza difficoltà un altro, molto più semplice, se si osserva quanto segue. Per prima cosa osservo che la somma di tutti i numeri di ponti assegnati alle singole lettere A, B, C è uguale al doppio del numero dei ponti. La ragione di ciò consiste nel fatto che ogni ponte viene contato due volte: una volta per la regione di partenza e una per la regione di arrivo.

§ 17. Da questa osservazione consegue che la somma di tutti i numeri di ponti assegnati ad ogni regione è un numero pari, perché la sua metà è proprio il numero dei ponti. È dunque impossibile che ci sia un solo numero dispari assegnato ad una regione, e nemmeno che siano tre, o cinque, ecc. Per la qual cosa, se esistono numeri assegnati dispari, il loro numero deve essere pari, come nell'esempio regiomontano, dove erano quattro (vedi § 14.); anche nell'esempio del § 15. sono due, assegnati alle lettere D e E.

§ 18. Siccome la somma di tutti i numeri assegnati alle lettere A, B, C, ecc. è il doppio del numero dei ponti, è chiaro che, se le si aggiunge due e si divide il risultato per 2, si ottiene il numero che mi sono segnato per bene[10]. Se dunque tutti i numeri assegnati alle lettere A, B, C ecc. fossero pari; se si prendessero le loro metà, e di queste metà si facesse la somma per ottenere i numeri della terza colonna, la loro somma sarebbe minore di una unità rispetto al numero ben segnato. Di conseguenza,

10. Vedi § 14 .

in questi casi la passeggiata sarebbe sempre possibile. Difatti, qualunque sia la regione da cui inizia il tragitto, ad essa condurrebbe un numero pari di ponti, come è richiesto. Così, nell'esempio regiomontano, se qualcuno volesse passare due volte su ogni ponte (come se ogni ponte fosse composto di due ponti) potrebbe partire da dove vuole e raggiungere il suo scopo.

§ 19. Inoltre se soltanto due fra i numeri assegnati alle lettere A, B, C ecc. fossero dispari, e tutti gli altri pari, allora il cammino sarebbe sempre possibile, se soltanto si ha l'avvertenza di partire da una delle regioni alle quali è assegnato un numero dispari. Difatti se si dimezzano i numeri pari e i dispari vengono prima aumentati di uno e poi divisi per due, come prescritto, la somma di queste metà risulterà minore di una unità rispetto al numero dei ponti, e perciò uguale al numero ben segnato. Quindi si capisce che se i numeri dispari assegnati alle regioni fossero quattro o sei o otto ecc., allora la somma dei numeri della terza colonna sarebbe maggiore del numero ben segnato, e lo supererebbe di una unità, o di due, o di tre, ecc. e quindi la passeggiata sarebbe impossibile.

§ 20. Dato dunque un qualunque caso, si può immediatamente e facilissimamente concludere se, alle solite condizioni, la passeggiata è possibile o no, in forza della seguente regola. Se le regioni alle quali conduce un numero dispari di ponti sono più di due, allora si può affermare con certezza che la passeggiata è impossibile. Se sono solo due le regioni alle quale conduce un numero dispari di ponti, allora la passeggiata è possibile, a condizione che si parta da una di esse. Se infine a nessuna regione porta un numero dispari di ponti, allora la passeggiata è possibile, qualunque sia la regione dalla quale si parte. E questa regola è del tutto soddisfacente, qualunque sia il problema posto.

§ 21. Una volta stabilito che la passeggiata è realizzabile, resta tuttavia la domanda in quale modo realizzarla. Per rispondere, faccio capo a questa regola: con il pensiero si eliminino tutte le coppie di ponti che congiungono una regione con un'altra: con ciò si riduce drasticamente il numero di ponti; poi ci si chieda, e a questo punto è facile, quale sia il percorso sui ponti rimasti; trovatolo, i ponti eliminati con il pensiero non disturberanno più di tanto, se appena si sta un pochino attenti. E, per la forza stessa della regola, non reputo si debbano dare ulteriori e più ampie indicazioni per costruire i percorsi.

Qualche osservazione

L'aspetto del lavoro: se un lettore non sapesse che si tratta di matematica, potrebbe pensare di trovarsi di fronte ad un racconto. L'assenza totale di formule è impressionante. Lo si confronti con quello di un qualsiasi testo contemporaneo, anche scolastico.

La capacità espositiva dell'Autore è esemplare. Ad esempio, visto che indica sia le regioni sia i loro nomi con lettere maiuscole, alle stesse fa sempre riferimento precisando se sono regioni o lettere. Noi, forse, avremmo avuto la tentazione di indicare con A, B, C ecc. le regioni e con n(A), n(B), n(C) ecc. le lettere che le designano. Avremmo, sempre forse, guadagnato in «chiarezza» ma avremmo perso in concisione e «pesantezza» dello scritto. Un altro esempio è dato dai §§ 4. e 5., dove spiega in lungo e in largo, correndo un certo qual rischio di pignoleria, come descriverà i percorsi.

Euler, più di una volta, «tira via», fidandosi dell'evidenza. Ad esempio, dopo aver descritto ciò che avviene se i ponti che conducono ad una regione sono uno, o tre, o cinque, generalizza a tutti i numeri dispari. Come si dice: «La dimostrazione, ovvia, è lasciata per esercizio»… Dal punto di vista della prassi insegnante, il procedimento è da tenere in seria considerazione: perché dimostrare (*sive* appesantire con dimostrazioni) ciò che è accettato senza discussione? Non sto sostenendo che le dimostrazioni sono inutili: sto sostenendo che, se si fanno, devono esserci «buoni» motivi, tra i quali non pongo il richiederla in un «espe».

Anche quando ha trovato la regola per stabilire se la passeggiata è possibile, enunciata nel § 13. ed esemplificata nei §§ 14. e 15., Euler non si accontenta. Ci ragiona su nei §§ 16-19. e ne ricava un'altra, ben più semplice, nel § 20. E qui ci pare di essere a casa, perché è proprio la regola alla quale si arriva, «classicamente», con il modo più frequente di introdurre i grafi. Anche qui Euler ci dice che cosa fa (deve fare, dovrebbe fare) il buon insegnante: non accontentarsi del risultato raggiunto, ma «rilanciare», per vedere se non si possa ricavare qualcosa di meglio. In questo senso, il § 21. è un piccolo capolavoro a sé.

Si rilegga il § 6.: in esso compare un'osservazione su certe sequenze di lettere che devono ripetersi. L'osservazione è corretta, ma Euler non se ne serve nel seguito del ragionamento. Vien da pensare che l'Autore stesse trovando la soluzione mentre dettava il suo articolo. Possiamo dire che Euler è stato l'inventore dei TEP's[11]?

Si osservi che il lavoro segue un modo di pensare decisamente combinatorio: e giustamente è così classificato nel sito del Dartmouth College (v. nota[2]). La matematica sembra fatta di atolli sparsi nell'oceano, ma poi si scoprono ponti (è proprio il caso di dirlo!) che, quando meno te lo aspetti, li congiungono. Gli «specialisti» se lo tengano per detto.

Una mia curiosità

È ben vero che Euler si è occupato di una quantità spaventosa di argomenti, dalla teoria dei numeri ai movimenti del sole e della luna, dalle serie infinite alla scienza navale, dal comportamento dei corpi elastici al modo migliore di costruire lenti, e di altro ancora, «libri di testo» compresi: ma chi gliel'ha fatto fare di occuparsi di un giochino al quale si abbandonavano, la domenica pomeriggio, i bravi regiomontani con mogli, figli e ospiti vari? Vista la grandezza del personaggio, mi piace credere che abbia presentito che, oltre due secoli dopo, qualcuno avrebbe dovuto organizzare i sistemi viari di metropoli al limite del collasso o costruire oggettini microscopici da mettere nei cellulari o nelle sonde spaziali. Mah?

11. TEP: indipendent textual productions by the pupils. Si veda ad esempio: Gianfranco Arrigo, Verifica della qualità dell'apprendimento: le produzioni autonome degli allievi (TEPs), BDM 46, maggio 2003.

12. Eulero e il percorso del cavallo

Jacques Sesiano[1]

The problem of the knight's tour on the chessboard is roughly a thousand years old. But Leonhard Euler was the first to give a rule by means of which knight's tours can be constructed *à volonté*. This is the subject of his *Solution of a curious question which does not seem to be subject to any analysis* (1759).

1. Introduzione

Il problema del cavallo sulla scacchiera, ha in comune con quello famoso dei ponti di Königsberg di esser nato da un anedotto, di esser trattato con un metodo sicuro e di esser stato generalizzato per la prima volta da Eulero. Si propone di occupare successivamente tutte le caselle della scacchiera col salto di cavallo (movendosi dunque di due caselle in una direzione parallela ad un lato ed una casa perpendicolarmente, o al contrario), passando come per i ponti una volta soltanto su ogni casella.

Come detto, anche lui risale a un anedotto. Eulero si trovava una serata in società, e uno dei partecipanti suggerì agli altri di trovare tale percorso. I loro sforzi rimasero vani. Dopodiché il partecipante che aveva proposto il gioco fece coprire la scacchiera con gettoni e, progredendo col suddetto salto, rimosse uno dopo l'altro i gettoni. Non si ricordava Eulero se avesse il solutore scelto il punto di partenza o se fu imposto dagli altri. Aveva però assicurato di poter partire da qualsiasi casella.

L'articolo di Eulero fu presentato all'Accademia di Berlino nel 1759[2]. Le due prime figure di Eulero sono esempi di due vie. La prima (fig. 1) è *aperta*, e dà soltanto le due possibilità di partire da 1 e arrivare a 64 o viceversa. L'altra via (fig. 2) è *chiusa*, o rientrante, cioè consente di passare dalla casella iniziale, di 1, a l'ultima con un salto di cavallo. Con essa si può partire da qualsiasi casella e coprire tutta la scacchiera (sarà dunque un percorso di tal tipo che aveva imparato a memoria il solutore).

---

1. Dipartimento di matematica, Politecnico federale di Losanna, St. 8, 1015 Lausanne.
2. «Solution d'une question curieuse qui ne paroit soumise a aucune analyse», *Mémoires de l'Académie des sciences et belles-lettres de Berlin*, 15 (1759; pubblicato 1766), pp. 310-337. Oppure *Opera*, ser. prima, VII (1923), pp. 26-56

42	59	44	9	40	21	46	7
61	10	41	58	45	8	39	20
12	43	60	55	22	57	6	47
53	62	11	30	25	28	19	38
32	13	54	27	56	23	48	5
63	52	31	24	29	26	37	18
14	33	2	51	16	35	4	49
1	64	15	34	3	50	17	36

Figura 1

42	57	44	9	40	21	46	7
55	10	41	58	45	8	39	20
12	43	56	61	22	59	6	47
63	54	11	30	25	28	19	38
32	13	62	27	60	23	48	5
53	64	31	24	29	26	37	18
14	33	2	51	16	35	4	49
1	52	15	34	3	50	17	36

Figura 2

Che Eulero si fosse interessato già qualche tempo prima a questo problema appare da due altre fonti. La prima è una lettera dal 26 aprile 1757 a Christian Goldbach, segretario dell'Accademia di Pietroburgo e lui stesso matematico. Eulero ci dice che recentemente (*neulich*) se ne sia occupato, e ne fa vedere l'esempio della figura 3, dove il circuito è non solo chiuso, ma anche simmetrico, nel senso che due caselle diagonalmente opposte contengono numeri con una differenza fissa di 32[3]. La seconda fonte copre una decina di cartelle, scritte alcuni mesi prima della lettera a Goldbach, nel sesto degli *Notizbücher* di Eulero, ora conservati presso l'Accademia delle scienze di Pietroburgo, dove si trovano diversi esempi di tal percorsi[4]. Si vede che

3. La lettera fu pubblicata per la prima volta da P.-H. Fuss, *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII*ème *siècle* (Pietroburgo 1843), I, pp. 654-655.
4. J. Sesiano, *Euler et le parcours du cavalier sur l'échiquier* (Losanna, esce 2008).

già a questo tempo Eulero aveva trovato la soluzione dei casi sopraddetti ed anche la possibilità di costruire un percorso chiuso partendo da una mezza scacchiera. La figura 4 ne presenta un esempio. Osserviamo che la mezza scacchiera è riempita dai numeri da 1 a 32 in modo che se 1 si trova alla distanza δ da un lato, allora l'ultima, con 32, è alla distanza δ+2 dell'altro. Aggiungendo allora 32 a ogni numero in un'altra mezza scacchiera e spostando il rettangolo così ottenuto sull'altro, otterremo un percorso chiuso nel quale la disposizione dei numeri nelle caselle è di nuovo simmetrica. La considerazione delle mezze scacchiere suggerì a Eulero la generalizzazione del problema ad altre figure (quadrati di lato ≠ 8, rettangoli, croci, rombi).

54	49	40	35	56	47	42	33
39	36	55	48	41	34	59	46
50	53	38	57	62	45	32	43
37	12	29	52	31	58	19	60
28	51	26	63	20	61	44	5
11	64	13	30	25	6	21	18
14	27	2	9	16	23	4	7
1	10	15	24	3	8	17	22

Figura 3

37	62	43	56	35	60	41	50
44	55	36	61	42	49	34	59
63	38	53	46	57	40	51	48
54	45	64	39	52	47	58	33
1	26	15	20	7	32	13	22
16	19	8	25	14	21	6	31
27	2	17	10	29	4	23	12
18	9	28	3	24	11	30	5

Figura 4

Si deve però dire che il problema stesso non nacque con Eulero. Percorsi aperti o chiusi, alcuni dei quali ottenuti usando la mezza scacchiera, si trovano già nei paesi islamici, in India, o nel medioevo cristiano[5]. In nessuno degli esempi, però, è spiegata o si indovina una vera regola che sicuramente permetterebbe di arrivare al risultato. Si può immaginare che per la maggior parte questi percorsi furono ottenuti faticosamente: nonostante l'esistenza di più di un miliardo di soluzioni, ogni tentativo percorso si concluderà quasi sempre con alcune caselle vuote. Da parte sua Eulero usò, come unico aiuto, una regola semplice, uscita da una osservazione anodina a lui fatta dal Ginevrino Louis Bertrand, lui stesso a Berlino durante gli anni 1750. Questa osservazione è la seguente (fig. 5): sia un percorso qualunque, parziale o completo, aperto o chiuso:

$$1, 2, \ldots, m\ ;$$

se da una casella interna x ($x \neq m - 1$) si può passare alla casella finale m (cioè, come diremo, se x comunica con m), allora

$$1, 2, \ldots, x, m, m - 1, \ldots, x + 1$$

è un nuovo percorso che passa sulle stesse caselle pur finendo in una casella differente.

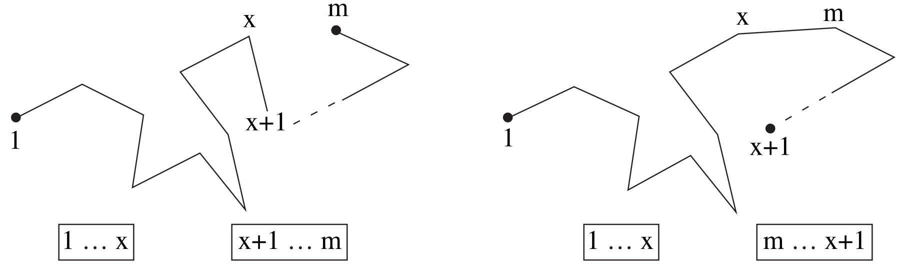


Figura 5

L'utilità di questa regola è ovvia: quando ci troviamo fermati alla casella finale del percorso parziale, la, o le diverse caselle $x + 1$ daranno la possibilità o di arrivare direttamente a una casella ancora vuota o, ripetendo l'applicazione della regola, di arrivare a un'altra casella finale $x' + 1$ che offrirà questa possibilità. Questo è l'unico mezzo usato da Eulero per raggiungere il suo scopo. Come scrive (articolo, §9): *Je m'en vai* (*sic*) *donc expliquer une méthode certaine, qui nous conduira infailliblement au but proposé, & par le moyen de laquelle on sera en état de découvrir autant de routes satisfaisantes qu'on voudra*. Possiamo inoltre già osservare che una casella finale può comunicare al minimo con altre due (se si trova in un angolo) o al massimo, e questo è il caso più favorevole, con otto (se si trova nel quadrato interno 4x4 della scacchiera).

5. J. Sesiano, *Les carrés magiques dans les pays islamiques* (Losanna 2004), pp. 240-242; J. Sesiano, «Vorläufer Eulers bei der Rösselsprungaufgabe», Леонард Эйлер и современная наука, (Pietroburgo 2007), pp. 222-231.

2. Costruzione di un percorso completo.

L'esempio che segue, preso dal *Notizbuch*, è abbastanza lungo ma permetterà di familiarizzarsi con la regola e applicarla a qualsiasi caso. Supponiamo che si cominci a muovere il cavallo finché non si possa più spostarlo, lasciando vuote ad esempio 12 caselle, che designiamo con le lettere *a* - *l* (fig. 7). In questo caso osserviamo che le caselle vuote possono dividersi in cinque gruppi di caselle poiché alcune si riuniscono già tramite il salto di cavallo: *a* - *b*, *c* - *e*, *f* - *i*, *j* (isolata), *k* - *l*.

Esaminiamo adesso l'integrazione di ognuno di questi gruppi.

1) Integrazione di *a* - *b*.

Consideriamo con quale casella la fine 52 comunica. A tale scopo scriviamo davanti a 52 i nostri x e mettiamo disotto i numeri $x + 1$ che dovrebbero essere collegati con una casella vuota:

$$\begin{array}{l|rrrr} 52 & 17 & 37 & 9 & 51 \\ \hline & 18 & 38 & 10 & 52 \\ \hline a & 10 & 18 & b & \end{array}$$

Ci sono due possibilità. Scegliamo (con Eulero) la prima (con 17). Applicando al percorso iniziale 1, …, 52 la regola, otterremo il percorso adesso esteso alle caselle *a*, *b*:

1, …, 17, 52, …, 18, *a*, *b*.

34	*j*	*b*	51	*f*	31	20	7
a	52	35	32	19	8	*g*	30
36	33	18	9	50	29	6	21
17	10	37	28	5	22	49	*h*
44	27	*e*	11	38	*i*	4	23
d	16	45	26	3	12	39	48
l	43	2	15	46	41	24	13
1	*c*	*k*	42	25	14	47	40

Figura 6

39	*j*	57	22	*f*	42	53	12
56	21	38	41	54	11	*g*	43
37	40	55	10	23	44	13	52
20	9	36	45	14	51	24	*h*
29	46	1	8	35	*i*	15	50
2	19	28	47	16	7	34	25
l	30	17	4	27	32	49	6
18	3	*k*	31	48	5	26	33

Figura 7

2) Integrazione di *c* - *e*.
Siccome 1 è più vicino di *c*, prendiamo il percorso contrario:
b, *a*, 18, …, 52, 17, …, 1.
In questo caso abbiamo per i vicini di 1 e loro seguenti (secondo la disposizione del percorso scelta)

1	16	2
	15	1

mentre, per la casella *c*,

c	*d*	45	15

Prendendo 15 come ultimo termine, possiamo aggiungere il secondo gruppo di lettere:

b, *a*, 18, …, 52, 17, 16, 1, …, 15, *c*, *d*, *e*.

Rinumerando il percorso preso all'inverso, avremo il circuito della figura 7, il quale comprende adesso 57 caselle.

3) Integrazione di *f* - *i*.
Consideriamo il percorso 57, …, 1. Siccome

1	10	14	16	4	30	2	20	40
	9	13	15	3	29	1	19	39

mentre, per la casella *i* (prossima di 1)

i	13	*h*	25	49	27	47	45	23

c’è anche qui una possibilità diretta, quella di aggiungere il gruppo alla casella del 13:

f, *g*, *h*, *i*, 13, …, 1, 14, …, 57.

4) Integrazione di *j*.

57	54	*h*	25	49	27	47	45	23

57	54	10	40	56
	55	9	41	57
j	41	55	37	

Scegliamo, delle due possibilità, la prima:
f, *g*, *h*, *i*, 13, …, 1, 14, …, 54, 57, …, 55, *j*

Rinumerando da 1 a 62, avremo il percorso della figura 8.

43	<u>62</u>	59	26	<u>1</u>	46	57	6
60	25	42	45	58	7	2	47
41	44	61	8	27	48	5	56
24	9	40	49	18	55	28	3
33	50	17	10	39	4	19	54
16	23	32	51	20	11	38	29
l	34	21	14	31	36	53	12
22	15	*k*	35	52	13	30	37

Figura 8

35	64	61	8	33	38	59	28
62	9	34	37	60	27	32	39
51	36	63	26	7	40	29	58
10	25	50	41	16	57	6	31
43	52	17	24	49	30	15	56
18	11	42	53	14	23	48	5
1	44	13	20	3	46	55	22
12	19	2	45	54	21	4	47

Figura 9

5) Integrazione di k - l.

Siccome, in 1, …, 62,

62	45	61	41	
	46	62	42	
1	42	8	48	2
	43	9	49	3

mentre

l	50	32	k	
k	l	23	51	31

una possibilità diretta non esiste. Eulero in questo caso prende all'inizio (considerando che in 1, …, 41, 42, …, 62 la casella 1 comunica con la casella 42)

41, …, 1, 42, …, 62,

dopodiché due trasformazioni lo conducono allo scopo (poichè 41 | 50, rispettivamente 49 | 32):

49, …, 42, 1, …, 41, 50, …, 62

31, …, 1, 42, …, 49, 32, …, 41, 50, …, 62

e davanti a 31 si possono mettere le due lettere k e l. Il percorso finale, dopo esser rinumerato, è quello rappresentato nella figura 9.

N.B. In questo caso particolare Eulero poteva ridurre il suo lavoro alla prima trasformazione: essendo il percorso da 41 a 62 fortuitamente chiuso (41 comunica con 62), si poteva aggiungere direttamente *l* e *k* al percorso tagliato, ad esempio, in 31, evitando così entrambi i passagi seguenti e ottenendo direttamente un circuito chiuso:

41, …, 32, *l*, *k*, 31, …, 1, 42, …, 62.

6) Finalmente, Eulero spiega il modo di chiudere il circuito della figura 9, sempre con la stessa regola. Siccome 64 comunica con 51 (62 e 41 del *N.B.*) mentre il suo successore 52 con 1, prenderemo

1, …, 51, 64, …, 52.

Eulero sceglie di mantenere la casella finale in 64, prendendo la sequenza 51, …, 1, 52, …, 64; il circuito rinumerato si vede nella figura 10.

3. Costruzione di un percorso simmetrico

Come già detto, due numeri di caselle opposte devono avere la differenza di 32. Seguiremo Eulero nella costruzione del suo esempio (fig. 11; articolo, §§ 25-27). Si cominci col collocare 1, 2, …, e, allo stesso tempo, si metta 33, 34, … nelle caselle opposte. Così Eulero riesce a scrivere 1, 2, …, 19 e 33, 34, …, 51. Ma, siccome si puo in questo caso continuare da 1 con 64, 63, …, e, simultaneamente, da 33 con 32, 31, …, otterremo alla fine le due serie continue

58, …, 64, 1, …, 19

26, …, 32, 33, …, 51.

17	<u>64</u>	61	44	19	14	59	24
62	43	18	15	60	25	20	13
<u>1</u>	16	63	26	45	12	23	58
42	27	2	11	36	57	46	21
9	52	35	28	3	22	37	56
34	41	10	53	38	29	4	47
51	8	39	32	49	6	55	30
40	33	50	7	54	31	48	5

Figura 10

10	29	48	35	8	31	46	33
49	36	9	30	47	34	7	58
28	11	*A*	*C*	*f*	45	32	19
37	50	*B*	*D*	*e*	6	59	44
12	27	38	*E*	*d*	*b*	18	5
51	64	13	*F*	*c*	*a*	43	60
26	39	2	15	62	41	4	17
1	14	63	40	3	16	61	42

Figura 11

Rimangono dodici caselle vuote che si dividono in due gruppi di sei caselle opposte che designiamo, come fa Eulero, con le lettere *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* ed *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*.

La fine 19 comunica con 46, 34, 6, 18, tra i quali 6 e 18 appartengono alla stessa serie, però soltanto 6 può essere usato (mentre il 18 rovescia il circuito). Dunque avremo

58, …, 64, 1, …, 6, 19, …, 7

e così si puo prolungare la serie:

58, …, 64, 1, …, 6, 19, …, 7, *f*, *B*, *d*, *C*.

L'altra serie è, *ipso facto*, determinata dalla simmetria:

26, …, 32, 33, …, 38, 51, …, 39, *F*, *b*, *D*, *c*.

Così, Eulero rileva per il lettore, basta considerare una serie per le trasformazioni. Ma in questo caso, continua Eulero, l'estenzione fatta non servirà: delle caselle in comunicazione con *C* soltanto *d*, 6, 8 appartengono alla stessa serie, e nessuno dei numeri seguenti nella serie, cioè *C*, 19, 7 puo aiutarci. Di fatto, prosegue, non abbiamo bisogno di integrare tutte e quattro le caselle in una volta. Tralasciamo dunque le due ultime lettere e facciamo finire la serie con *B*. Siccome *B* comunica con 12, che è seguito da 11, comunicando lui stesso con *D*, prenderemo

58, …, 64, 1, …, 6, 19, …, 12, *B*, *f*, 7, …, 11, *D*, *c*.

Siccome d'altronde *c* comunica con 16, seguito nella serie da 15, che comunica con *a*, avremo

58, …, 64, 1, …, 6, 19, …, 16, *c*, *D*, 11, …, 7, *f*, *B*, 12, …, 15, *a*, *E*.

Sei lettere sono adesso incluse, sicchè le due serie sono complete, e l'altra sarà

26, …, 32, 33, …, 38, 51, …, 48, *C*, *d*, 43, …, 39, *F*, *b*, 44, …, 47, *A*, *e*.

Bisogna ancora unire le due serie per farne una sola. Cioè, bisogna che una serie finisca dove l'altra inizia. Considerando che

E	64	2	62	*a*	6	*f*	*A*	50
26	27	13	63					

e che 62 è seguito da 63, prenderemo per la prima serie

58, …, 62, *E*, *a*, 15, …, 12, *B*, *f*, 7, …, 11, *D*, *c*, 16,…, 19, 6, …, 1, 64, 63

che venga accollata alla seconda serie, pur lei stessa modificata analogamente:

26, …, 30, *e*, *A*, 47, …, 44, *b*, *F*, 39, …, 43, *d*, *C*, 48, …, 51, 38, …, 33, 32, 31.

17	36	53	60	15	64	41	62
54	59	16	37	40	61	14	1
35	18	39	52	13	42	63	24
58	55	12	19	38	25	2	43
11	34	57	6	51	44	23	26
56	31	10	45	20	7	50	3
33	46	29	8	5	48	27	22
30	9	32	47	28	21	4	49

Figura 12

14	59	42	35	16	31	54	33
41	36	15	58	55	34	17	30
60	13	56	43	18	53	32	7
37	40	19	12	57	6	29	52
20	61	38	25	44	51	8	5
39	64	21	50	11	24	45	28
62	49	2	23	26	47	4	9
1	22	63	48	3	10	27	46

Figura 13

Il risultato si vede nella figura 12. Siccome 58, il primo termine, era ad un salto di cavallo da 31, l'ultimo, il circuito è chiuso e può cominciare da qualsiasi casella. Tenendo fissi i punti di partenza ed arrivo iniziali (fig. 11), e considerando dunque la serie 30, 29, …, otteremo la figura 13.

4. Costruzione mediante la mezza scacchiera

Si riempa prima il rettangolo della mezza scacchiera con i numeri da 1 a 32. A tal scopo sia 1 in qualsiasi casella (di conseguenza la casella di 33 sarà determinata dalla simmetria). Come di solito, cominciamo con l'iscrizione dei numeri finche siamo bloccati. In tal maniera Eulero arriva fino a 28, lasciando conseguentemente quattro caselle *a*, *b*, *c*, *d* vuote, che si dividono in questo caso in due gruppi *a*, *c*, *d* e *b* (fig. 14). Con la solita regola, consideriamo che 28 comunica con 27 da parte, 9, 25, 11, 17, da cui si derivano i percorsi

1, …, 25, 28, …, 26
1, …, 11, 28, …, 12
1, …, 17, 28, …, 18.

Di questi nessuno è conveniente, dunque dobbiamo proseguire. Scegliamo il terzo. Essendo 18 comunicante con 19, 17, 21, seguiti respettivamente da 18, 28, 20, la scelta è ovvia. Così avremo

1, …, 17, 28, …, 21, 18, …, 20, *b*.

Di nuovo, dalla comunicazione di *b* con 20, 22, 2, 24, seguiti da *b*, 21, 3, 23, si scelga ad esempio 24. Così avremo

1, …, 17, 28, …, 24, *b*, 20, …, 18, 21, …, 23.

1	*a*	*b*	28	7	14	19	16
24	27	8	*c*	20	17	6	13
9	2	25	22	11	4	15	18
26	23	10	3	*d*	21	12	5

Figura 14

1	26	15	20	7	32	13	22
16	19	8	25	14	21	6	31
27	2	17	10	29	4	23	12
18	9	28	3	24	11	30	5

Figura 15

Siccome l'ultimo comunica con 24, 8, 22, che sono seguiti da *b*, 9, 23, troviamo soltanto una possibilità, che è la soluzione cercata:

1, …, 8, 23, …, 21, 18, …, 20, *b*, 24, …, 28, 17, …, 9, *a*, *c*, *d*.

Adesso dobbiamo, come già detto nell'introduzione, spostare l'ultima casella in modo che si possa passare a quella di 33 (rimanendo 1 fisso). Cioè, la casella di 14 dovrà essere la fine del percorso. Si vede immediatamente che *d* comunica con 15 che da parte sua comunica con 14. Dunque prenderemo

1, …, 8, 23, …, 21, 18, …, 20, *b*, 24, …, 28, 17, …, 15, *d*, *c*, *a*, 9, …, 14.

Rinumerando, otterremo per la mezza scacchiera la figura 15 e per il totale, dove i numeri della metà superiore sono determinati (v. punto 1), la figura 4 già vista all'inizio. Siccome il percorso è chiuso, si può cominciare da qualsiasi casella e, spostando la fine con la regola, ottenerne nuovi, aperti o no, e, applicando di nuovo la regola, chiudere i primi.

La potenza della regola appare ancora dalla generalizzazione di Eulero ad altre scacchiere. In fatto, per le scacchiere quadrate, determinò che i percorsi saranno sempre possibili se il lato n del quadrato è uguale o superiore a 5, chiusi soltanto se n è pari poichè il numero delle caselle deve essere pari. Come dice Eulero (§36 del articolo): il est impossible de trouver une route rentrante en elle-même dans le carré de 25, ni dans aucune figure, qui contient un nombre impair de cases. Per le scacchiere rettangolari di dimensioni m, n (m < n), i percorsi sono sempre possibili per m, n≥ 5, chiusi se m·n è pari.

Casi particolari: se m = 3, percorsi possibili sono per n = 4 e n ≥ 7 (chiusi soltanto se n ≥ 10); se m = 4, percorsi possibili sono per n ≥ 5, però sempre aperti. Una unica possibilità è sfuggita ad Eulero: è la possibilità di chiusura che abbiamo indicato tra parentesi. Il fatto che si dovette aspettare due secoli per scoprire questo fatto porta un merito maggiore ad Eulero piuttosto che un demerito.

13. Una teoria semplificata delle rendite

Remo Moresi[1]

We make a review of the classical theory of rent (where all amounts are supposed to be invested at compound interest). Instead of a dozen of traditional formulas we propose only one formula, whose application to typical problems (such as annuity or loan calculation) reduces, in each step, to the solution of a polynomial or exponential equation.

1. Introduzione

Come si sa, un modo semplice per scoprire il famoso numero di Eulero è quello che fa capo al montante di una somma investita in regime di capitalizzazione composta. Parlare di matematica finanziaria può quindi essere un modo più che legittimo per ricordare il grande Leonhard nel trecentesimo anniversario della sua nascita. Si propone qui una significativa semplificazione della teoria tradizionale delle rendite, che usualmente viene presentata tramite una dozzina di formule, appesantite da una notazione non particolarmente gradevole (Gallo, 1999). Si discuteranno soprattutto rendite normali (cioè essenzialmente quelle a rate costanti), identificando cinque variabili essenziali. Si vedrà che queste possono essere connesse in un'unica formula, in grado di risolvere tutti i problemi tipici. Strategicamente la relazione in questione dà origine a cinque tipi di problemi diversi, a dipendenza di quale variabile viene identificata come incognita. È interessante osservare che appaiono equazioni polinomiali di qualsiasi grado ed equazioni esponenziali, da cui si capisce la ricchezza didattica del tema. Tale ricchezza è poi confermata dall'apparizione naturale del concetto di limite, che si lega all'analisi. Tutto ciò rende il tema attrattivo e interessante per ogni insegnante delle scuole superiori.

2. Rendite normali

Definizione

Un **capitale** è una terna $\mathcal{C} = (C, t_0, r)$, dove C, t_0 e r sono numeri reali, il primo e l'ultimo dei quali sono sempre supposti positivi. C si chiama **valore di riferimento** di $\mathcal{C}$; t_0 si chiama **istante di riferimento**; r si chiama **tasso**. Il **valore relativo** di $\mathcal{C}$ all'istante t è definito come segue:

$$V(t) := C\,(1+r)^{t-t_0}$$

1. Istituto cantonale di economia e commercio di Bellinzona.

Osservazione

Questa definizione sottolinea il fatto che un capitale non è semplicemente una somma di denaro (o un suo equivalente), bensì una somma investita in un determinato momento, a un certo tasso di interesse, il cui valore cambia in funzione del tempo. È inoltre opportuno notare che il concetto di valore relativo riassume i concetti tradizionali di «montante» e «valore attuale».

La formula data sottintende che il regime di capitalizzazione è composto.

Definizione

Una **rendita** è un insieme finito di capitali. La somma dei loro valori relativi si chiama **valore relativo** della rendita (in un certo istante).

Osservazione

Possiamo tradurre questa definizione in linguaggio matematico come segue: se $R := \{(C_i, t_i, r_i) \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ è la rendita data, allora per il suo valore relativo S(t) si avrà

$$S(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i (1 + r_i)^{t - t_i}$$

In realtà questa definizione è molto generale. Le rendite considerate in pratica vengono classificate da leggi di normalizzazione, come per esempio il tasso fisso. Per questo imponiamo la seguente

Ipotesi generale

Tutte le rendite considerate d'ora innanzi avranno tasso fisso e scadenze regolari.

Più precisamente supporremo per ogni rendita $R = \{(C_i, t_i, r_i) \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$:

$$r_i = r \quad \wedge \quad t_{i+1} - t_i = 1$$

Per semplificare ulteriormente la nostra trattazione ci limiteremo inoltre alla considerazione delle cosiddette rendite **normali**, cioè quelle dove i valori di riferimento dei capitali investiti sono costanti.

Una tale rendita si potrà quindi elegantemente denotare con la quaterna $R = (C, t_1, r, n)$, dove C è il valore di riferimento dei capitali investiti, t_1 il primo istante di riferimento, r il tasso e n il numero di capitali. Quale sarà il valore relativo di una rendita normale in funzione dei dati appena enunciati? Risponde il seguente

Teorema

Sia (C, t_1, r, n) una rendita normale. Poniamo $v := (1 + r)^{-1}$. Allora si ha

$$S(t) = C \frac{1 - v^n}{1 - v} v^{t_1 - t}$$

Dimostrazione

$$S(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \left(1+r_i\right)^{t-t_i} = \sum_{i=1}^{n} C\left(1+r\right)^{t-t_1+t_1-t_i} = C\left(1+r\right)^{t-t_1} \sum_{i=1}^{n}\left(1+r\right)^{-\left(t_i-t_1\right)} =$$

$$= C\left(1+r\right)^{-\left(t_1-t\right)} \sum_{i=0}^{n-1}\left(1+r\right)^{-i} = C\, v^{t_1-t}\, \frac{v^n-1}{v-1} = C\, \frac{1-v^n}{1-v}\, v^{t_1-t}$$

Criterio di applicazione

Nell'applicazione pratica di questa formula basta identificare nel problema dato (o in un suo sottoproblema opportunamente individuato) i 5 parametri S, C, v, n, $t_1 - t$, uno dei quali è l'incognita. Vi sono dunque a priori 5 casi: nei primi due ci si trova di fronte un'equazione di primo grado; negli ultimi due bisogna risolvere un'equazione esponenziale, mentre nel terzo si ha a che fare con un'equazione polinomiale di grado n. Ricordiamo a questo proposito che la risoluzione di un'equazione polinomiale di grado ≤5 richiede forzatamente metodi numerici, presenti solo su certi calcolatori, attualmente ancora poco diffusi nelle scuole. Siccome la conoscenza delle formule per risolvere equazioni di grado 3 o 4 è altrettanto poco diffusa; la stessa situazione si presenta già con le equazioni di grado 3. In questi casi ci accontenteremo quindi di una soluzione algebrica del problema corrispondente.

Rendite illimitate

Sono rendite per le quali non è specificato un termine. Quando ha senso, il loro valore relativo viene definito come il limite del valore relativo di una rendita con n quote per n che tende all'infinito.

Dal teorema precedente risulta allora il seguente **Corollario** (valore relativo di una rendita normale illimitata)

$$S(t) = C\, \frac{1}{1-v}\, v^{t_1-t}$$

Rendite frazionate

Nella pratica corrente l'unità temporale è l'anno. Se la frequenza dei versamenti aumenta, facendo intervenire frazioni dell'unità, allora risulta indispensabile conoscere la relazione fra il tasso annuale e quello corrispondente a 1/m di anno $\left(m \in \mathbb{N}, m \geq 2\right)$. A questo proposito esistono due concetti di tasso annuale: quello **effettivo** e quello **nominale**. Chiamando i il primo, j_m il secondo e i_m il tasso periodale, basta spiegare che fra essi esistono le seguenti relazioni:

$$(1)\ j_m = m\, i_m$$

$$(2)\ i = \left(1+i_m\right)^m - 1$$

La prima relazione vale per definizione, mentre la seconda è basata sul principio di equivalenza dei capitali in considerazione e si deduce dall'uguaglianza

$$(1+i)^{t} = (1+i_m)^{t_m}$$

Osservazioni sulla terminologia

1. L'importo costante di una rendita normale viene chiamato usualmente quota o rata.

2. Spesso si parla di rendita **anticipata** e **posticipata**: in questo caso si sottintende che il numero dei suoi periodi è uguale al numero delle sue quote e che ognuna di queste viene versata rispettivamente all'inizio e alla fine del periodo corrispondente. In particolare il suo montante sarà allora valutato agli istanti $t=t_1+n$ e $t=t_1+n-1$, mentre il suo valore attuale sarà valutato agli istanti $t=t_1$ e $t=t_1-1$. Se una rendita anticipata o posticipata viene valutata in un istante diverso da quelli indicati, si parla anche di rendita differita.

L'insegnamento tradizionale presenta una formula per ogni tipo di rendita e calcolo, complicando inutilmente l'apprendimento.

La formula data dal teorema del paragrafo 3 riassume tutti i casi possibili e permette di risolvere elegantemente tutti i problemi classici seguendo le istruzioni suggerite dal criterio di applicazione.

Esempi

Calcolare il montante di 40 semestralità posticipate di 2'000 Fr depositate al tasso del 6% annuo convertibile semestralmente.

Risoluzione

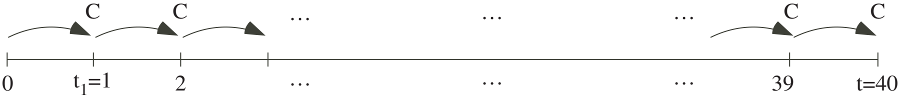
Notiamo dapprima che il tasso annuo del 6% convertibile semestralmente corrisponde al tasso del 3% semestrale. Per trovare quanto richiesto basta ora sostituire i valori (valuta in migliaia di franchi).

$$x := t_1 - t = -39 \quad ; \quad C = 2 \quad ; \quad v = 1{,}03^{-1} \quad ; \quad n = 40$$

nella formula

$$S = C\, v^{x}\, \frac{1-v^{n}}{1-v}$$

Con l'aiuto di un calcolatore si trova S = 150,802519. La soluzione può essere visualizzata con una semplice rappresentazione grafica:



Versiamo ogni semestre, in un conto fruttifero al 6% annuo nominale convertibile semestralmente, la somma di 2'400 Fr per 8 semestri consecutivi. Due anni dopo l'ultimo versamento ritiriamo il montante accumulato e lo versiamo in acconto di un debito di 50'000 Fr che scade dopo 5 anni. Quanto si dovrà versare alla scadenza per estinguere il debito, se il computo avviene al tasso del 7% annuo?

Risoluzione

Calcoliamo dapprima la somma accumulata nel deposito fruttifero due anni dopo l'ultimo versamento: se sostituiamo i valori $x=-11$; $C=2{,}4$; $v=1{,}03^{-1}$; $n=8$ nella formula nota, troviamo $S=24{,}020166$. Determiniamo in seguito l'ammontare del debito restante: $50 - 24{,}020166 = 25{,}979834$.

Computiamo finalmente l'importo da versare per il saldo del debito: sostituiamo i valori $x=-5$; $C=25{,}979834$; $v= 1.07^{-1}$, $n = 1$ nella formula conosciuta e troviamo $S = 36{,}438060$.

3. Altri tipi di rendite

Per onore di completezza aggiungiamo ora il risultato analogo sul calcolo del valore relativo di una rendita aritmetica e di una geometrica. Ovviamente una rendita è chiamata aritmetica (geometrica) se le sue quote sono in progressione aritmetica (geometrica). Supporremo che C sia la prima quota e t_1 il suo istante di investimento. Come prima, poniamo $v := (1+r)^{-1}$.

Teorema

1. Per una rendita aritmetica di ragione δ si ha

$$S(t)=(1-v)^{-2}\, v^{t_1-t}\, F(v)$$

dove F(v) è l'immagine di v rispetto alla seguente funzione polinomiale

$$F(x):=\left[C+(n-1)\,\delta\right]x^{n+1}-(C+n\,\delta)\,x^{n}-(C-\delta)\,x+C$$

2. Per una rendita geometrica di ragione ρ si ha

$$S(t)=C\,\frac{(\rho\, v)^{n}-1}{\rho\, v-1}\, v^{t_1-t}$$

Dimostrazione

$$1.\ S(t)=\sum_{i=1}^{n} C_i\,(1+r_i)^{t-t_i}=\sum_{i=0}^{n-1} C_i\,(C+i\,\delta)(1+r)^{t-t_{i+1}}=$$

$$=C\sum_{i=0}^{n-1}(1+r)^{t-t_1+t_1-t_{i+1}}+\delta\sum_{i=0}^{n-1}(1+r)^{t-t_1+t_1-t_{i+1}}=$$

$$=(1+r)^{t-t_1}\left[C\sum_{i=0}^{n-1}C_i\,(1+r)^{t_1-t_{i+1}}+\delta\sum_{i=0}^{n-1}i\,(1+r)^{t_1-t_{i+1}}\right]=$$

$$= v^{t_1 - t}\left[C\sum_{i=0}^{n-1} v^i + \delta\sum_{i=0}^{n-1} i\,v^i\right] = v^{t_1 - t}\left[C\,\frac{1-v^n}{1-v} + \delta\,\frac{v - n\,v^n + (n-1)\,v^{n+1}}{(1-v)^2}\right] =$$

$$= v^{t_1 - t}\,\frac{C\left(1-v^n\right)(1-v) + \delta\left[v - n\,v^n + (n-1)\,v^{n+1}\right]}{(1-v)^2} =$$

$$= v^{t_1 - t}\,\frac{C - C\,v - C\,v^n + C\,v^{n+1} + \delta\,v - n\,\delta\,v^n + (n-1)\delta\,v^{n+1}}{(1-v)^2} =$$

$$= (1-v)^{-2}\,v^{t_1 - t}\left\{\left[C + (n-1)\,\delta\right]v^{n+1} - (C + n\,\delta)\,v^n\right.$$

$$= (1-v)^{-2}\,v^{t_1 - t}\,F(v)$$

2. $$S(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i\,(1+r_i)^{t-t_i} = \sum_{i=1}^{n} C\,\rho^i\,(1+r)^{t-t_{i+1}} =$$

$$= C\sum_{i=0}^{n-1} \rho^i\,(1+r)^{t-t_1+t_1-t_{i+1}} = (1+r)^{t-t_1}\,C\sum_{i=0}^{n-1}\rho^i\,(1+r)^{t_1-t_{i+1}} =$$

$$= v^{t_1-t}\,C\sum_{i=0}^{n-1}\rho^i\,v^i = C\,\frac{(\rho\,v)^n - 1}{\rho\,v - 1}\,v^{t_1-t}$$

Bibliografia

Gallo E. *Esercizi di matematica finanziaria e attuariale*. Milano: Vallardi. 1999.

14. Equazioni differenziali: l'algoritmo di Eulero con il foglio elettronico

Michele Impedovo[1]

Solving a differential equation is perhaps the most important and natural application of Calculus. But there are a few equations that have symbolic solutions. The only way to solve a differential equation is often to adopt a numerical method. This paper illustrates the Euler and Runge-Kutta algorithms for solving differential equations and systems, the implementation by Excel and the classic predator-prey growth model.

1. Introduzione

In un certo senso la risoluzione di un'equazione differenziale è la naturale e più importante applicazione del calcolo differenziale.

Innanzitutto dal punto di vista storico, perché sulle soluzioni di equazioni differenziali è nata la cosmologia moderna, attraverso l'analisi newtoniana del moto dei pianeti soggetti alla forza centrale di attrazione gravitazionale del Sole.

Ma è importante anche dal punto di vista didattico, perché risalire dalla relazione tra una funzione e le sue derivate al comportamento della funzione stessa fa comprendere in modo solido e ricco la magica danza tra derivate e integrali.

Le equazioni differenziali che ammettono una soluzione simbolica sono assai poche: nella gran parte dei casi occorre un algoritmo per approssimare la soluzione.

Molti degli algoritmi nati per questo scopo hanno la stessa struttura: supponiamo che x(t) sia la funzione incognita, nella variabile t, dell'equazione differenziale

$$x'(t) = g(t, x(t))$$

e che

$$x(t_0) = x_0$$

sia la condizione iniziale. Supponiamo inoltre di voler stimare $x(t)$ nell'intervallo $[t_0, T]$; si stabiliscono un *passo* $\Delta t = \frac{T - t_0}{n}$, la sequenza di tempi equispaziati

1. Università Bocconi, Milano.

t_0, $t_1 = t_0+\Delta t$, $t_2 = t_1+\Delta t$, ..., $t_n = t_{n-1}+\Delta t = T$

e si cerca, in modo ricorsivo, di approssimare i valori

$x(t_0)$, $x(t_1)$, ..., $x(t_n)$

della funzione incognita.

In generale, tanto più Δt è piccolo, tanto migliore è l'approssimazione.

L'algoritmo di Eulero è il più semplice e intuitivo degli algoritmi di questa famiglia; l'algoritmo di Runge-Kutta ne è un naturale e potente raffinamento, utile in particolare per trattare i sistemi di equazioni differenziali.

In questo articolo parleremo di:

- algoritmo di Eulero;
- algoritmo di Runge-Kutta;
- applicazione dei due algoritmi a equazioni e sistemi di equazioni differenziali;
- implementazione dei due algoritmi in un foglio Excel;
- applicazione al classico modello bidimensionale *preda-predatore*.

2. Algoritmo di Eulero

Una delle grandi conquiste del calcolo differenziale (e una sue delle motivazioni più profonde) è la possibilità di approssimare i valori che una funzione assume vicino ad un punto in cui essa è nota: è sufficiente sommare, a tale valore noto, il *differenziale primo*.

Un esempio banale: per approssimare $\sqrt{10}$, consideriamo la funzione $f(x)=\sqrt{x}$, la cui derivata prima è $f'(x)=1/2\sqrt{x}$, e il punto $x_0 = 9$, in cui risulta $f(9) = 3$, $f'(9) = 1/6$.

Se x è vicino a 9:

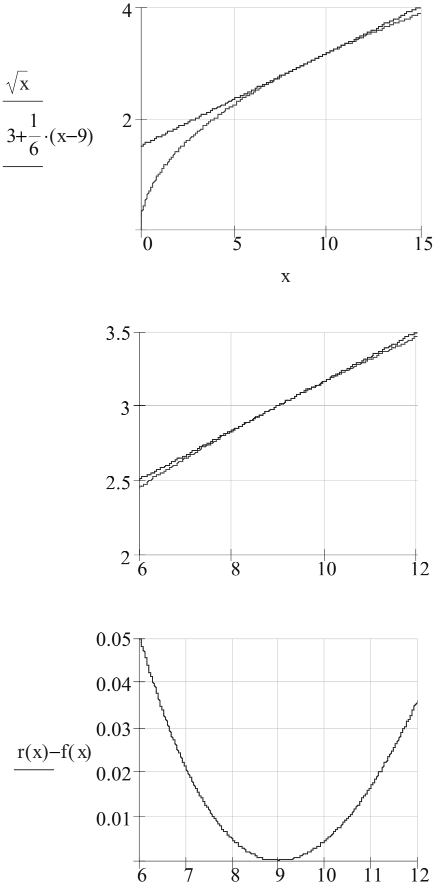
$$\sqrt{x} = f(x) \approx f(9) + f'(9)(x-9) \quad ; \quad f(x) \approx 3 + \frac{1}{6}(x-9)$$

Dunque, per esempio:

$$\sqrt{10} = f(10) \approx 3 + \frac{1}{6} \approx 3.167.$$

I grafici seguenti mostrano:

- $f(x)$ e la retta tangente $r(x) = 3+\frac{1}{6}(x-9)$ nell'intervallo [0, 15];
- $f(x)$ e $r(x)$ nell'intervallo [6, 12];
- la curva d'errore $r(x)-f(x)$ nell'intervallo [6, 12].



Sull'ultimo grafico leggiamo che l'errore per la stima di $\sqrt{10}$ è circa 0.005, mentre per la stima di $\sqrt{12}$ è 0.035.

Torniamo all'equazione differenziale x'(t) = g(t, x(t)) e alla funzione incognita x(t) che vogliamo approssimare nei punti $t_0, t_1, \ldots, t_n$.

Se t_k e t_{k+1} sono abbastanza vicini, possiamo ben approssimare $x(t_{k+1})$ mediante la somma tra $x(t_k)$ e il differenziale primo:

$x(t_{k+1}) \approx x(t_k) + x'(t_k)\Delta t$;

d'altra parte dall'equazione differenziale ricaviamo

$x'(t_k) = g(t_k, x(t_k))$

e dunque l'algoritmo di Eulero è sintetizzato dalla seguente relazione ricorsiva:

$x(t_{k+1}) \approx x(t_k) + g(t_k, x(t_k))\Delta t$.

Applichiamo l'algoritmo di Eulero alla classica equazione differenziale x'=x, con la condizione iniziale x(0) = 1, la cui soluzione è $x(t) = e^t$.

Cerchiamo la soluzione nell'intervallo [0, 1] e poniamo $\Delta t = 1/n$. Risulta:

$$x(0) = 1$$

$$x\left(\frac{1}{n}\right) \approx x(0) + x'(0)\frac{1}{n} = x(0) + x(0)\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

$$x\left(\frac{2}{n}\right) \approx x\frac{1}{n} + x'\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} = x\frac{1}{n} + x\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right) + \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

$$x\left(\frac{3}{n}\right) \approx x\frac{2}{n} + x'\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n} = x\frac{2}{n} + x\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + \left(1+\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{n} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^3$$

$$\ldots$$

$$x\left(\frac{n}{n}\right) = x(1) \approx \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Si ritrova così un risultato ben noto, che ci fa attribuire ad Eulero la piena coscienza del ruolo del numero e nel calcolo infinitesimale: al tendere di n a infinito la successione

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

tende al numero *di Eulero*: e.

Svolgiamo ora un esempio significativo dell'algoritmo di Eulero. Supponiamo di voler risolvere l'equazione differenziale nella funzione incognita x(t)

$$x' = \frac{x-t}{x+t}$$

con la condizione iniziale

$$x(0) = 1$$

nell'intervallo $t \in [0, 4]$.

Si tratta di un'equazione differenziale che ammette un'unica soluzione, che però non si può scrivere esplicitamente in forma simbolica. Se chiediamo a MAPLE la soluzione simbolica, otteniamo la funzione incognita definita implicitamente da un'equazione in t, x.

```
dsolve({diff(x(t), t) = (x(t) - t) / (x(t) + t), x(0) = 1}, x(t));
```

$$x(t) = \mathrm{RootOf}\left(\ln\left(\frac{t^2 + \_Z^2}{t^2}\right) + 2\arctan\left(\frac{\_Z}{t}\right) + 2\ln(t) - \pi\right)$$

Dunque non ci resta che percorrere la strada dell'approssimazione.

Fissiamo un passo di approssimazione, per esempio $\Delta t = 0.1$; in questo modo l'algoritmo di Eulero fornirà le approssimazioni dei valori

x(0.1), x(0.2), …, x(4).

Conosciamo, della funzione incognita x(t), la condizione iniziale x(0) = 1, e dunque il punto da cui parte: è il punto (0;1); ma l'equazione differenziale ci fornisce anche, in tale punto, la derivata x'(0). Infatti sostituendo 0 a t e 1 a x nell'equazione differenziale, otteniamo.

$$x'(0) = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

Mediante il differenziale primo (l'algoritmo di Eulero è tutto qui), possiamo approssimare x(0.1):

$$x(t_1) \approx x(t_0) + x'(t_0)\Delta t$$

Nel nostro esempio

$$x(0.1) \approx x(0) + x'(0)\cdot 0.1 = 1+1\cdot 0.1 = 1.1.$$

Con l'approssimazione di x(0.1) possiamo approssimare x'(0.1): sostituendo nell'equazione differenziale t = 0.1 e x = 1.1 otteniamo

$$x'(0.1) \approx \frac{1.1-0.1}{1.1+0.1} \approx 0.83$$

Possiamo ora nello stesso modo approssimare x(0.2):

$$x(0.2) \approx x(0.1) + x'(0.1)\cdot 0.1 \approx 1.1 + 0.83\cdot 0.1 \approx 1.183$$

Proseguiamo così fino a $t_{40} = 4$.

3. Algoritmo di Eulero e foglio elettronico

Vediamo ora come implementare questo algoritmo con Excel.

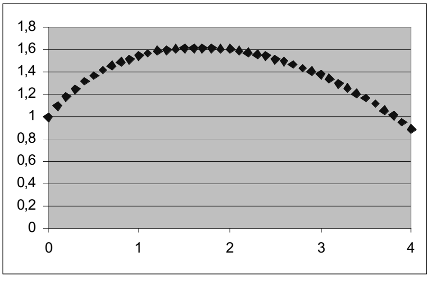
Scriviamo:

- in A2 il passo dell'approssimazione;
- in B2 il valore iniziale t_0, cioè 0;
- in C2 la condizione iniziale x(0), cioè 1
- in D2 scriviamo la formula =(C2−B2)/(C2+B2), che traduce l'equazione differenziale;

- in B3 la formula =B2+$A$2, che fa passare da t a t+Δt;
- in C3 il vero e proprio algoritmo di Eulero: =C2+D2*$A$2;
- copiamo D2 in D3.

Ora selezioniamo le celle B3:D3 e copiamo verso il basso, fino al valore di t desiderato. Nella figura seguente sono mostrate le prime e le ultime celle della tabella, e il grafico nell'intervallo [0, 4].

	A	B	C	D
1	**dt**	**t**	**x(t)**	**x'(t)**
2	0.1	0	1	1
3		0.1	1.1	0.833333
4		0.2	1.183333	0.710843
5		0.3	1.254418	0.614003
6		0.4	1.315818	0.53375
7		0.5	1.369193	0.46501
8		0.6	1.415694	0.404672
9		0.7	1.456161	0.350698
10		0.8	1.491231	0.301685
11		0.9	1.521399	0.256628
12		1	1.547062	0.214782



	A	B	C	D
39		3.7	1.063622	-0.55344
40		3.8	1.008278	-0.580608
41		3.9	0.950217	-0.608175
42		4	0.889399	-0.636193

Con Δt = 0.1 si ottengono le approssimazioni x(1) = 1.547 e x(4) = 0.8894. Un software professionale di matematica fornisce

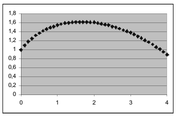
x(1) = 1.49828…

x(4) = 0.686569…

L'errore relativo nella stima di x(t) è circa il 3% in *t* = 1, e addirittura il 30% in t = 4.

Diminuendo Δt, per esempio Δt = 0.01, l'approssimazione migliora. È sufficiente, allo scopo, modificare il parametro nella cella A2 e copiare le celle B3:D3 fino ad ottenere 4 nella colonna B (quindi occorre copiare fino alla riga 402).

	A	B	C	D
1	**dt**	**t**	**x(t)**	**x'(t)**
2	0.01	0	1	1
3		0.01	1.01	0.980392
4		0.02	1.019804	0.961531
5		0.03	1.029419	0.943365
6		0.04	1.038853	0.925847



	A	B	C	D
101		0.99	1.501052	0.205155
102		1	1.503104	0.200992
103		1.01	1.505114	0.196855

	A	B	C	D
399		3.97	0.728314	-0.689968
400		3.98	0.721414	-0.693108
401		3.99	0.714483	-0.696254
402		4	0.70752	-0.699408

Risulta ora x(1) = 1.503 e x(4) = 0.707; l'approssimazione è migliorata circa di un fattore 10: l'errore relativo è 0.3% in t = 1 e 3% in t = 4.

Si dimostra che l'errore locale è proporzionale a Δt; ma a mano a mano che t si allontana da t_0 l'errore si accumula e l'approssimazione si deteriora.

Per comprendere meglio la propagazione dell'errore nell'algoritmo di Eulero, risolviamo la classica equazione differenziale del secondo ordine

$$x'' = -x$$

con le condizioni iniziali

$$x(0) = 0,\ x'(0) = 1,$$

la cui soluzione, come è noto, è

$$x(t) = \sin(t).$$

Un'equazione differenziale del 2° ordine può essere trasformata in un sistema di 2 equazioni differenziali del 1° ordine. Se poniamo

$$x' = y$$

e di conseguenza

$$x'' = y',$$

otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$

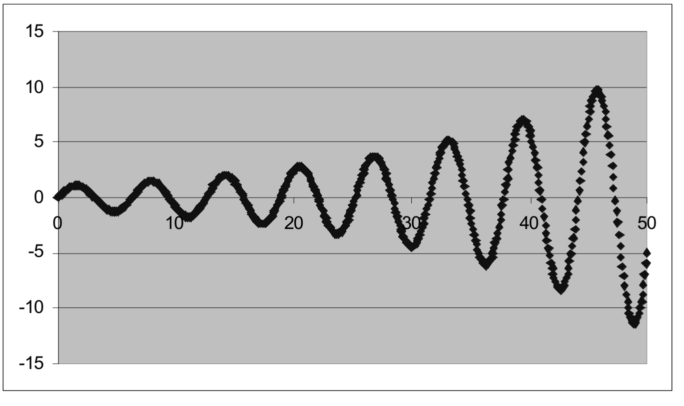
Fissiamo ancora $\Delta t = 0.1$. Scriviamo:

- in A2 il passo dell'approssimazione
- in B2 il valore iniziale t_0, cioè 0
- in C2 la condizione iniziale $x(0) = 0$
- in D2 la condizione iniziale $y(0) = 1$
- in E2 la formula =D2
- in F2 la formula = −C2
- in B3 la formula =B2+$A$2, che fa passare da t a t+Δt
- in C3 la formula =C2+E2*$A$2
- in D3 la formula =D2+F2*$A$2
- copiamo le celle D2:E2 in D3:E3.

Ora selezioniamo le celle B3:F3 e copiamo verso il basso, fino $t = 50$ (circa 16π, in modo da osservare $x(t)$ sull'intervallo di tempo di 8 periodi). Nella figura seguente sono mostrate le prime righe della tabella.

	A	B	C	D	E	F
1	**dt**	**t**	**x(t)**	**y(t)**	**x'(t)**	**y'(t)**
2	0.1	0	0	1	1	0
3		0.1	0.1	1	1	-0.1
4		0.2	0.2	0.99	0.99	-0.2
5		0.3	0.299	0.97	0.97	-0.299
6		0.4	0.396	0.9401	0.9401	-0.396
7		0.5	0.49001	0.9005	0.9005	-0.49001
8		0.6	0.58006	0.851499	0.851499	-0.58006
9		0.7	0.66521	0.793493	0.793493	-0.66521
10		0.8	0.744559	0.726972	0.726972	-0.744559
11		0.9	0.817256	0.652516	0.652516	-0.817256
12		1	0.882508	0.57079	0.57079	-0.882508

La figura seguente mostra il grafico nell'intervallo [0, 50]. Come si vede, la periodicità è andata perduta: anziché oscillare tra −1 e 1 la soluzione di Eulero ha un'ampiezza crescente, addirittura maggiore di 10 dopo solo 8 periodi. Si può dimostrare che allontanandosi da t_0 l'errore è proporzionale a $e^{t_i - t_0}$.



La morale è che l'algoritmo di Eulero non è adatto se si vuole approssimare la soluzione in un intervallo troppo ampio. Occorre un algoritmo più sofisticato, che vedremo fra poco.

4. Algoritmo di Runge-Kutta

Con l'algoritmo di Eulero l'approssimazione di $x(t_{k+1})$ consiste nel sommare a $x(t_k)$ il differenziale primo $x'(t_k)\Delta t$:

$$x(t_{k+1}) \approx x(t_k) + x'(t_k)\Delta t$$

Il teorema di Lagrange (o teorema del valor medio) consente di trasformare questa approssimazione in un'uguaglianza: infatti, se $x(t)$ è derivabile in $[t_k, t_{k+1}]$, esiste un punto $c \in (t_k, t_{k+1})$ tale che

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + x'(c)\Delta t$$

Non sappiamo dove sia c, ma se Δt è *piccolo*, possiamo ipotizzare che scegliendo c come punto medio dell'intervallo $[t_k, t_{k+1}]$ l'approssimazione possa migliorare:

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + x'\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t$$

dove

$$x'\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}\right) = g\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}, x\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}\right)\right)$$

L'*algoritmo di Runge-Kutta* (Carle Runge, 1856-1927, Martin Kutta, 1867-1944) è sintetizzato dalla seguente relazione ricorsiva:

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + g\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}, x\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}\right)\right)\Delta t$$

Riprendiamo l'esempio precedente $f(x) = \sqrt{x}$ e $x_0 = 9$; con il differenziale primo avevamo ottenuto l'approssimazione $\sqrt{10} \approx 3.167$, con un errore relativo pari a 0.1%. Utilizzando il teorema di Lagrange nel punto medio tra 9 e 10 otteniamo

$$\sqrt{10} \approx f(3)+f'(9.5)\cdot 1 = 3.16222\ldots$$

In realtà risulta

$$\sqrt{10} = 3.16227\ldots$$

e l'errore relativo è ora 0.002%.

Applichiamo l'algoritmo di Runge-Kutta di nuovo l'equazione differenziale

$$x' = \frac{x-t}{x+t}$$

con la condizione iniziale x(0) = 1. Poniamo ancora $\Delta t = 0.1$; approssimando x(0.1) con l'algoritmo di Eulero avevamo ottenuto:

$$x(0.1) \approx x(0) + x'(0) \cdot 0.1 = 1 + 1 \cdot 0.1 = 1.1$$

Con l'algoritmo di Runge-Kutta risulta:

$$x(0.1) \approx x(0) + x'(0.05) \cdot 0.1$$

Il compito ulteriore, rispetto all'algoritmo di Eulero, è quello di stimare x'(0.05); dall'equazione differenziale risulta

$$x'(0.05) = \frac{x(0.05) - 0.05}{x(0.05) + 0.05}$$

Per approssimare x'(0.05) occorre dunque approssimare x(0.05); per fare questo ricorriamo ancora al differenziale primo dell'algoritmo di Eulero:

$$x(0.05) \approx x(0) + x'(0) \cdot 0.05 = 1 + 1 \cdot 0.05 = 1.05.$$

Sostituendo:

$$x'(0.05) \approx \frac{1.05 - 0.05}{1.05 + 0.05} \approx 0.909$$

e finalmente

$$x(0.1) \approx x(0) + x'(0.05) \cdot 0.1 = 1 + 0.909 \cdot 0.1 = 1.0909.$$

Si prosegue poi nello stesso modo:

$$x(0.2) \approx x(0.1) + x'(0.15) \cdot 0.1$$

e così via, con passo Δt, fino a 4.

5. Algoritmo di Runge-Kutta e folglio elettronico

Vediamo ora l'implementazione dell'algoritmo di Runge-Kutta con Excel.

Le prime quattro colonne A, B, C, D sono le stesse dell'algoritmo di Eulero. Ci servono due nuove colonne E e F, in cui calcolare prima $x(t+\Delta t/2)$ con il differenziale primo, e poi $x'(t+\Delta t/2)$ mediante l'equazione differenziale.

In E2 immettiamo la formula

=C2+D2*$A$2/2

In F2 immettiamo la formula

=(E2-B2-$A$2/2)/(E2+B2+$A$2/2)

Passiamo alla riga 3: in B3 scriviamo la formula
=B2+$A$2

In C3 immettiamo la formula che rappresenta il cuore dell'algoritmo di Runge-Kutta:
=C2+F2*$A$2

Copiamo le celle D2:F2 in D3:F3, poi selezioniamo l'intervallo B2:F2 e copiamo verso il basso, fino alla riga 42 (cioè fino a t = 4).

	A	B	C	D	E	F
1	**dt**	**t**	**x(t)**	**x'(t)**	**x(t+dt/2)**	**x'(t+dt/2)**
2	0.1	0	1	1	1.05	0.909091
3		0.1	1.090909	0.832061	1.132512	0.766084
4		0.2	1.167517	0.707499	1.202892	0.655859
5		0.3	1.233103	0.608637	1.263535	0.56617
6		0.4	1.28972	0.526549	1.316048	0.490388
7		0.5	1.338759	0.456155	1.361567	0.424556
8		0.6	1.381215	0.394311	1.40093	0.366141
9		0.7	1.417829	0.338946	1.434776	0.313431
10		0.8	1.449172	0.288627	1.463603	0.265215
11		0.9	1.475693	0.242326	1.48781	0.220612
12		1	1.497755	0.199281	1.507719	0.178956

	A	B	C	D	E	F
39		3.7	0.883745	-0.6144	0.853025	-0.629363
40		3.8	0.820809	-0.644734	0.788572	-0.659994
41		3.9	0.754809	-0.675686	0.721025	-0.691278
42		4	0.685681	-0.707329	0.650315	-0.723289

Con $\Delta t = 0.1$ l'algoritmo di Runge-Kutta fornisce una stima di x(t) con un errore relativo pari a 0.03% in t = 1 e 0.1% in t = 4.
Con $\Delta t = 0.01$ l'errore è praticamente nullo. Si dimostra che l'errore locale è proporzionale a Δt^2.

Proviamo a controllare se con l'algoritmo di Runge-Kutta riusciamo a migliorare l'approssimazione della soluzione dell'equazione differenziale x" = −x, che trasformiamo nel sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$

con le condizioni iniziali x(0) = 0, x'(0) = 1. Le prime righe della tabella sono le seguenti.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**dt**	**t**	**x(t)**	**y(t)**	**x'(t)**	**y'(t)**	**x(t+dt/2)**	**y(t+dt/2)**	**x'(t+dt/2)**	**y'(t+dt/2)**
2	0.1	0	0	1	1	0	0.05	1	1	-0.05
3		0.1	0.1	0.995	0.995	-0.1	0.14975	0.99	0.99	-0.14975
4		0.2	0.199	0.980025	0.980025	-0.199	0.248001	0.970075	0.970075	-0.248001
5		0.3	0.296008	0.955225	0.955225	-0.296008	0.343769	0.940425	0.940425	-0.343769
6		0.4	0.39005	0.920848	0.920848	-0.39005	0.436092	0.901346	0.901346	-0.436092
7		0.5	0.480185	0.877239	0.877239	-0.480185	0.524046	0.85323	0.85323	-0.524046
8		0.6	0.565507	0.824834	0.824834	-0.565507	0.606749	0.796559	0.796559	-0.606749
9		0.7	0.645163	0.764159	0.764159	-0.645163	0.683371	0.731901	0.731901	-0.683371
10		0.8	0.718353	0.695822	0.695822	-0.718353	0.753145	0.659904	0.659904	-0.753145
11		0.9	0.784344	0.620508	0.620508	-0.784344	0.815369	0.58129	0.58129	-0.815369
12		1	0.842473	0.538971	0.538971	-0.842473	0.869421	0.496847	0.496847	-0.869421

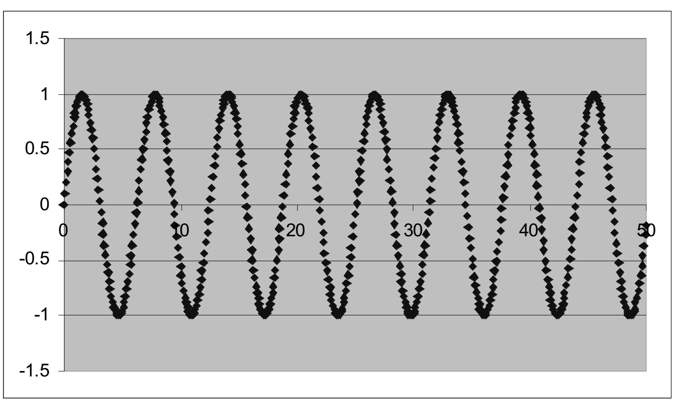
La tabella è stata così costruita:

- in C2: 0
- in D2: 1 (le condizioni iniziali)
- in E2: =D2
- in F2: = –C2 (le due equazioni differenziali.
- in G2: =C2+E2*$A$2/2
- in H2: =D2+F2*$A$2/2

  (approssimazione di x(0.05) e y(0.05) mediante il differenziale primo)
- in I2: =H2
- in J2: = –G2 (approssimazione di x'(0.05) e y'(0.05))
- in C3: =C2+I2*$A$2
- in D3: =D2+J2*$A$2 (il vero e proprio algoritmo di Runge-Kutta)

Copiamo le celle E2:J2 in E3:J3, poi le celle B3:J3 verso il basso, fino a t = 50 (riga 502).

Ecco il grafico.



La periodicità è mantenuta, anche a notevole distanza da t_0: l'algoritmo di Runge-Kutta riesce a controllare l'errore globale.

6. Il modello preda-predatore di Lotka-Volterra

Possiamo facilmente adattare l'algoritmo di Runge-Kutta per approssimare la soluzione di un sistema di equazioni differenziali.

Supponiamo di voler descrivere la soluzione del seguente sistema di equazioni differenziali nelle funzioni incognite x(t), y(t).

$$\begin{cases} x' = x - 0.2\,x\,y \\ y' = -y + 0.2\,x\,y \end{cases}$$

con le condizioni iniziali x(0) = 10, y(0) = 2. Vogliamo analizzare le funzioni incognite nell'intervallo di tempo [0, 8].

Si tratta del celebre modello *preda-predatore* formulato da Vito Volterra e Alfred Lotka. In un ambiente circoscritto convivono due specie, una delle quali (i predatori) si ciba dell'altra (le prede). Le funzioni incognite rappresentano:

- x(t): il numero di prede al tempo t
- y(t): il numero di predatori al tempo t

In assenza di predatori le prede crescerebbero con tasso di crescita costante a: x' = a x. La presenza dei predatori fa sì che il tasso di crescita a non sia costante, ma decrescente (per esempio linearmente) con il numero y di predatori:

$$x' = (a - b\,y)\,x$$

I predatori, in assenza di prede, si estinguerebbero con tasso di mortalità costante c: y' = –c y. La presenza delle prede fa sì che il tasso di decrescita –c dei predatori cresca (per esempio linearmente) con il numero delle prede:

$$y' = (-c + d\,x)\,y$$

Nell'esempio proposto i parametri sono così scelti: a = c = 1, b = d = 0.2; inizialmente le prede sono 5 volte più numerose dei predatori.

Scegliamo il passo $\Delta t = 0.1$. Per approssimare x(0.1), y(0.1) calcoliamo

$$x(0.1) \approx x(0) + x'(0.05) \cdot 0.1$$

$$y(0.1) \approx y(0) + y'(0.05) \cdot 0.1$$

Dunque ci serve calcolare x(0.05) e y(0.05), che approssimiamo mediante il differenziale primo:

$$x(0.05) \approx x(0) + x'(0) \cdot 0.05$$

$$y(0.05) \approx y(0) + y'(0) \cdot 0.05$$

Dopodiché si prosegue nello stesso modo per t = 0.2, 0.3, …, 8.

Vediamo ora l'implementazione in Excel.

Scriviamo:
- in A2 il passo utilizzato, per esempio 0.1;
- in B2 il valore iniziale di t, cioè 0;
- in C2 il valore iniziale x(0), cioè 10;
- in D2 il valore iniziale y(0), cioè 2;
- in E2 il valore di x’(0), cioè la formula =C2–0.2*C2*D2;
- in F2 il valore di y’(0), cioè la formula = –D2+0.2*C2*D2;
- in G2 l’approssimazione di x(0.05), cioè la formula =C2+E2*$A$2/2;
- in H2 l’approssimazione di y(0.05), cioè la formula =D2+F2*$A$2/2;
- in I2 l’approssimazione di x’(0.05), cioè la formula =G2–0,2*G2*H2;
- in J2 l’approssimazione di y’(0.05), cioè la formula = –H2+0,2*G2*H2;
- in B3 aggiorniamo la variabile tempo incrementandola di 0.1;

Finalmente in C3 e D3 il vero e proprio algoritmo:

=C2+I2*$A$2

=D2+J2*$A$2

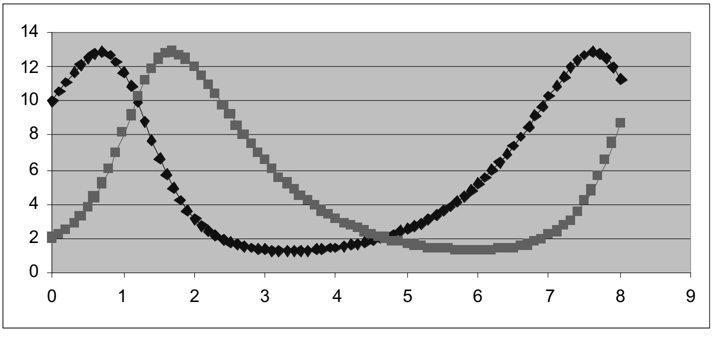
Si selezionano ora le celle E2:J2 e si copiano in E3:J3. Poi si seleziona tutta la riga B3:J3 e si copia verso il basso, fino alla riga 82.

La figura seguente mostra le prime e le ultime righe.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**dt**	**t**	**x(t)**	**y(t)**	**x'(t)**	**y'(t)**	**x(t+dt/2)**	**y(t+dt/2)**	**x'(t+dt/2)**	**y'(t+dt/2)**
2	0,1	0	10	2	6	2	10,3	2,1	5,974	2,226
3		0,1	10,60	2,22	5,89	2,49	10,89	2,35	5,78	2,77
4		0,2	11,18	2,50	5,59	3,09	11,45	2,65	5,38	3,43
5		0,3	11,71	2,84	5,06	3,82	11,97	3,03	4,71	4,22
6		0,4	12,18	3,26	4,23	4,69	12,40	3,50	3,72	5,17
7		0,5	12,56	3,78	3,06	5,71	12,71	4,07	2,37	6,27

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
78		7,6	12,85	4,80	0,52	7,53	12,88	5,17	-0,45	8,15
79		7,7	12,81	5,61	-1,57	8,76	12,73	6,05	-2,67	9,35
80		7,8	12,54	6,55	-3,88	9,87	12,35	7,04	-5,04	10,34
81		7,9	12,04	7,58	-6,21	10,67	11,72	8,11	-7,30	10,91
82		8	11,31	8,67	-8,30	10,94	10,89	9,22	-9,19	10,86

I grafici di x(t) e y(t) mostrano l’evoluzione periodica delle due specie.



Quiz numero 38

Aldo Frapolli

Caro Archie,

quella che vedi è la foto del modellino scheletrato di un poliedro con 9 vertici e 18 spigoli.
Mi sono divertito a costruirlo usando 9 palline di polistirolo per i vertici e 18 stuzzicadenti di varia lunghezza per gli spigoli.
Per le facce pensaci tu! Eulero insegna…
Tieni presente però che le facce sono tutte dei rettangoli congruenti oppure dei trapezi congruenti e che, per comodità, mi sono immaginato rettangoli e trapezi di uguale altezza.

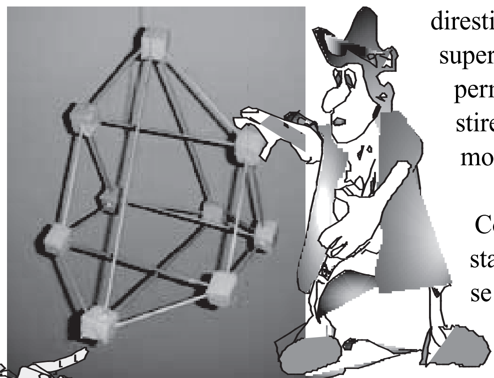
Riguardo al numero di facce
non dovrebbero esserci problemi, Joe!
Se lo indichiamo con f,
secondo Eulero dovrebbe valere che…

$9 - 18 + f = 2$

Quindi sarebbero … 11.
Giusto?!

Non avere troppa fretta!
Visto che tu sei molto più bravo di me nei lavoretti manuali, che ne diresti di costruire la superficie che permette di «rivestire» il mio modellino?

Così potrai stabilire da solo se è corretto o no.



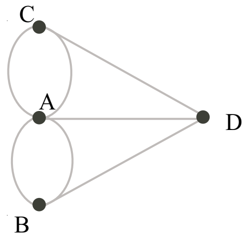
Ho capito!
Vuoi che ti costruisca lo sviluppo della superficie del solido che hai immaginato?
Buona idea, così con il modellino potremo verificare anche il numero di facce.
Lasciami prendere carta, penna e strumenti!

Bravo Archie! E bravi anche tutti voi che vorrete accettare la sfida lanciata da Joe!
Riuscirà il nostro a realizzare il solido immaginato da Joe? Avrà davvero 11 facce?
Vi aspettiamo numerosi con il modellino del poliedro in gioco, munito della superficie.
Potete spedircelo o, se preferite, mandarci una sua foto. Il tutto accompagnato da vostre considerazioni sul numero di facce e sulla formula di Eulero utilizzata per calcolarlo.

Il miglior prodotto verrà premiato con un bel libro riguardante Archimede e parte dei suoi prodigiosi lavori.

Soluzione del Quiz numero 37

Ci sono solo due possibilità di eliminare uno dei sette ponti classici di Königsberg, per fare in modo che esista almeno una passeggiata attraverso tutti i ponti restanti, con meta l'isolotto della gelateria (A).



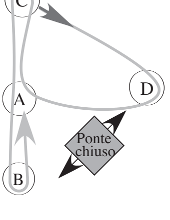
Si tratta dei due ponti che congiungono C con D e B con D. Perché?

Ragioniamo – insieme a Eulero – sulle quattro regioni A, B, C, D viste come vertici con i rispettivi gradi (numeri di spigoli) 5, 3, 3, 3.
Ricordiamo che una passeggiata che tocca una sola volta tutti i vertici (regioni) passando per tutti gli spigoli (ponti), esiste solo a condizione che ci siano al massimo due vertici di ordine dispari.
Siccome possiamo eliminare un solo ponte – e dunque abbassare di uno il grado di due vertici soltanto – non potremo mai avere tutti i vertici di grado pari. Di conseguenza non ci saranno passeggiate con partenza e arrivo in A. Potremo invece avere esattamente due vertici di ordine pari. La condizione di dover arrivare in A impone di lasciare dispari il suo numero di vertici e di intervenire sugli altri tre. Dal momento che non esistono ponti che uniscono B e C non resta che intervenire, come detto, sui due ponti da C a D oppure da B a D.
Così otteniamo i vertici A, B, C, D con i rispettivi gradi 5, 3, 2, 2 (nel caso di soppressione del ponte da C a D) oppure 5, 2, 3, 2 (soppressione del ponte da B a D). Potremo quindi arrivare in A partendo da B nel primo caso e da C nel secondo.

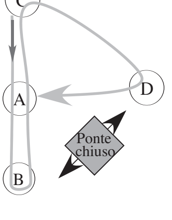
E quante e quali sono le passeggiate possibili?
Se non teniamo conto – là dove c'è più di un ponte che permette di andare da una regione all'altra – delle differenze di tragitto generate dalla scelta del ponte, esistono 12 passeggiate diverse, 6 per ognuno dei due casi. Come mai?

Ragioniamo ad esempio sul secondo caso: soppressione del ponte che unisce B con D.
Sappiamo che una passeggiata deve iniziare in C per concludersi in A.

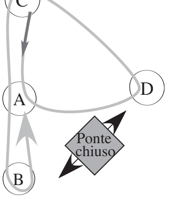
Ecco alcune passeggiate ottenute per tentativi:



CDACABA



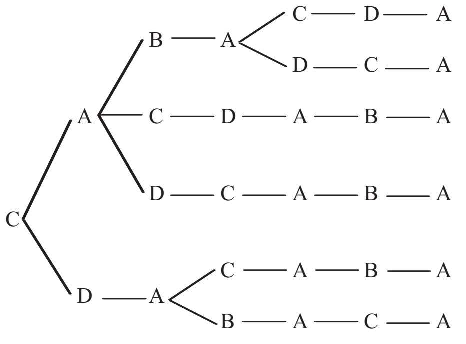
CDACABA



CDACABA

Ci accorgiamo che ogni passeggiata corrisponde esattamente ad una parola di 7 lettere, nella quale ci devono essere 3 volte la A , 2 volte la C e una volta ciascuno la B e la D. Siccome devono iniziare con C e terminare con A possiamo concentrarci sulle parole di 5 lettere contenenti 2 volte la A e una volta ciascuno B, C e D.

Con un diagramma ad albero riusciamo ad illustrale tutte con facilità:



Ci sono quindi 6 passeggiate accettabili, a partire da C. Per motivi di simmetria ne esistono altrettante a partire da B che sono: BABDACA, BACABDA, BACADBA, BADCABA, BDACABA, BDABACA
Ecco quindi spiegato il 12 riferito in precedenza.

Potremmo però considerare diverse due passeggiate che toccano le medesime località nell'ordine, ma realizzate passando per ponti diversi. Ad esempio – in CABACDA – il primo passaggio CA può essere effettuato in due modi diversi, a seconda se si sceglie il primo o il secondo ponte che congiunge C ad A. Giunto in A ci sono nuovamente due possibilità per raggiungere B, poi tutto il resto è senza alternative.
Facendo questa analisi ad ogni diramazione giungiamo a contare 16 passeggiate per ognuno dei due casi iniziali, con un totale di 32.

1. Attenti ai traduttori

Redazionale

«Traduttore traditore», recita un adagio.

Un piccolo mistero…

Nel 1823 fu pubblicata una terza edizione inglese delle «Lettres à une Princesse d'Allemagne…» (originariamente pubblicata in volume nel 1768[1]), tradotta dal Rev. Dr. Henry Hunter, presso W. & C. Tait di Edimburgo, curata da David Brewster.

Nella prima lettera, «Sulla grandezza, o estensione» si legge (traduzione nostra):

> Oltre alla **Terra**, ci sono altri dieci simili corpi, chiamati pianeti, che ruotano intorno al sole: due di essi a minori distanze [dal sole], cioè **Mercurio** e **Venere**; e otto a maggiori distanze, cioè **Marte**, **Cerere**, **Pallade**, **Giunone**, **Vesta**, **Giove**, **Saturno**, e il **Georgium Sidus**.

Noi sappiamo oggi che Cerere, Pallade, Giunone e Vesta sono asteroidi[2].

D'altro canto, Georgium Sidus, chiamato anche Herschel, non è altro che Urano.

Il piccolo mistero è questo:

la lettera di Euler è datata Berlino, **19 aprile 1760**. D'altra parte,

- Urano è stato scoperto da William Herschel il **13 marzo 1781**;
- Cerere fu il primo asteroide ad essere scoperto, dall'abate Giuseppe Piazzi, dell'osservatorio di Palermo, il **1 gennaio 1801**. Pallade, Giunone e Vesta furono scoperti poco dopo, entro il 1807.

Che Euler, a bordo di una DeLorean, sia andato e tornato dal suo futuro?

1. Non conosciamo la versione originale, in francese, delle «Lettres».
2. Cerere è stato ridefinito «pianeta nano» dalla International Astronomical Union nel 2006.

…svelato

Nella prima traduzione italiana, curata dall'abate Oronzo Carnevale e pubblicata a Napoli nel 1787[3], presso i fratelli Terres («con licenza de' superiori»), si legge:

> Oltre alla Terra vi sono altri cinque corpi simili detti Pianeti che girano intorno al Sole; alcuni in distanze più piccole che non è la Terra, e sono Mercurio e Venere; altri in distanze più grandi cioè Marte Giove e Saturno.

Insomma, il Rev. Dr. Hunter non si è limitato a tradurre la lettera di Euler, ma, dal suo punto di vista, l'ha migliorata e completata.

Conclusione

Attenzione alle traduzioni! Specialmente se, nella Prefazione, il curatore scrive: *«In questa terza edizione la traduzione ha avuto miglioramenti veramente essenziali».*

3. Ringraziamo l'amico Giorgio Tomaso Bagni, fortunato possessore di una copia, che gentilmente ce ne ha fornito un estratto, svelando così il mistero.

Progetto grafico
Bruno Monguzzi
Prestampa
Taiana
Stampa
Veladini

Redazione
Laboratorio di didattica della matematica
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera

Telefono
091 814 18 21/22/24
Fax
091 814 18 19
gianfranco.arrigo@span.ch

Amministrazione
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera
Fax
091 814 18 19

Esce due volte all'anno
a maggio e a dicembre

Abbonamento annuo
SFR 30
€ 16

Bollettino dei docenti di matematica
55

In questo numero: tutti contributi su Leonhard Euler. Di carattere generale firmati dalla coppia B. D'Amore e M.I. Fandiño Pinilla, da S.D. Chatterji, G.T. Bagni, J.-C. Pont, dalla terna M. Gander, A. Steiner e G. Arrigo, da S. Maracchia e G.C. Barozzi. Di natura strettamente matematica scritti dalla coppia O. D'Antona ed E. Munarini e da M. Cerasoli. Di impostazione prevalentemente didattica offerti dalla coppia E. Delucchi e M.D. Froidcoeur, da G. Mainini, da J. Sesiano, da R. Moresi e da M. Impedovo. Si chiude con il quiz di A. Frapolli e una curiosità redazionale.

ISBN 88-86486-55-3
Fr. 18.–

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport