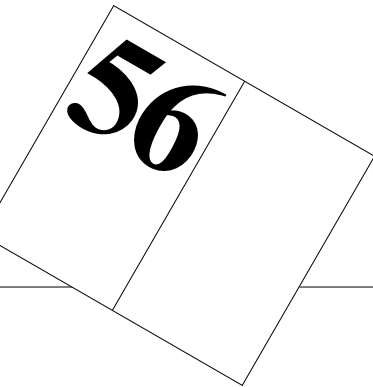


A cura
del Laboratorio di didattica della matematica

Bollettino dei docenti di matematica



Maggio
2008

Ufficio
dell'insegnamento medio
Centro
didattico cantonale

Bollettino
dei docenti di matematica
56

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport

© 2008
Divisione della Scuola
Centro didattico cantonale

ISBN 88-86486-56-1

Bollettino dei docenti di matematica 56

Maggio
2008

Ufficio dell'insegnamento medio
Centro didattico cantonale

	Prefazione	7
--	------------	---

I.	Varia	
----	-------	--

1.	La rete stradale più breve che collega le città Martin J. Gander, Kévin Santugini e Antonio Steiner	9
----	--	---

2.	Impostazione algebrica dell'Analisi matematica Mauro Cerasoli	21
----	--	----

3.	Ricordando Richard Rorty (1931-2007) matematica ironica o matematica metafisica? Giorgio T. Bagni	31
----	---	----

II.	Didattica	
-----	-----------	--

1.	Robustezza degli apprendimenti Un contributo alla valutazione della competenza Sintesi del rapporto di ricerca Gianfranco Arrigo	35
----	---	----

2.	Un teorema geniale e divertente anche per la scuola elementare Lorella Maurizi	51
----	--	----

III.	Passeggiate matematiche	
------	-------------------------	--

1.	Problemi di massimo e minimo Antonio Steiner e Gianfranco Arrigo	57
----	---	----

IV.	Laboratorio matematico	
-----	------------------------	--

1.	Proposte di laboratorio di geometria piana per la scuola media Claudio Beretta	63
----	--	----

V.	Giochi	
----	--------	--

1.	Quiz numero 39: il rettangolo a pezzetti Aldo Frapolli	67
----	---	----

2.	P-bam numero 3 Giorgio Mainini	71
----	-----------------------------------	----

VI.	La voce degli studenti	
1.	Su alcune proprietà dei fasci di parabole Daniele Sorini	75
2.	Alcune osservazioni sul teorema di Rouché-Capelli Miriam Ferrara	87
VII.	Segnalazioni	
1.	Didattica della Matematica 2008	91
2.	La storia della matematica: un percorso affascinante per uno scopo didattico	95
3.	Didattica della matematica e azioni d'aula	97
4.	Recensioni	105

Prefazione

Dopo l'anno celebrativo in onore di Leonhard Euler, il Bollettino torna nella sua veste normale, dà ampio spazio agli autori nostrani e anche a due studenti liceali. I vari articoli si rivolgono a più ordini scolastici – dalla scuola elementare alle superiori – così da interessare sempre più insegnanti alla matematica e alla sua didattica.

Come d'abitudine il numero 56 inizia con la rubrica Varia, composta di tre pezzi di grande qualità: Martin J. Gander, Kévin Santugini e il nostro carissimo Antonio Steiner ci offrono un ottimo lavoro concernente le reti stradali minime, Mauro Cerasoli ritorna alla carica con una pungente e costruttiva critica ai contenuti di matematica degli attuali corsi liceali e infine Giorgio T. Bagni ci ricorda un grande filosofo recentemente scomparso.

Nella sezione Didattica si trovano due articoli: una sintesi del rapporto relativo alla ricerca «Robustezza degli apprendimenti», effettuata da Gianfranco Arrigo nell'ambito del NRD di Bologna e dell'ASP di Locarno con la collaborazione di numerosi insegnanti ticinesi e italiani di tutti i settori scolastici, e una preziosa testimonianza didattica di Lorella Maurizi, insegnante verbanese, che ci mostra che anche un teorema di una certa difficoltà, come quello di Pick sul calcolo dell'area di figure piane inserite in un geopiano, può diventare una bellissima avventura in una classe di scuola elementare.

Antonio Steiner, con la collaborazione di Gianfranco Arrigo, apre una nuova rubrica battezzata Passeggiate matematiche, nella quale si potranno trovare problemi di matematica pensati per gli studenti delle superiori: questa è la volta di alcuni problemi di massimo e minimo.

Con piacere salutiamo il ritorno di Claudio Beretta che ci propone un saggio di laboratorio di geometria piana per la scuola media.

Sulla nostra rivista si gioca, eccome: ci pensano Aldo Frapolli col suo tradizionale quiz, giunto al numero 39, e Giorgio Mainini che continua la sua sequenza di problemi da lui chiamati P-bam, per la loro peculiarità di apparire semplici, ma di scoppiare poi nelle mani del malcapitato che si lascia ammaliare.

Ecco giunti alla nuova rubrica La voce degli studenti, che vuole dare la

possibilità ai giovani particolarmente interessati alla matematica di mostrare i propri lavori. Ci rivolgiamo quindi a tutti gli insegnanti, affinché passino l'informazione, aiutino gli studenti e li incoraggino a scrivere. Tutti gli allievi delle nostre scuole ed anche quelli di oltre confine possono partecipare: dalla prima classe delle elementari fino alle superiori. Tengono a battesimo la rubrica due giovani liceali: Daniele Sorini del Liceo Scientifico Galilei di Trieste, con un ottimo saggio su alcune proprietà dei fasci di parabole, e Miriam Ferrara del Liceo Scientifico B. Rescigno di Salerno che propone una valida osservazione sullo studio dei sistemi lineari quando si passa dal caso arcinoto 2×2 al caso 3×3 .

Seguono le segnalazioni di tre importanti avvenimenti da non perdere: il terzo Convegno internazionale di didattica della matematica che si terrà in agosto all'ASP di Locarno – una passerella di alcuni fra i più quotati studiosi di didattica della matematica –, la due giorni di storia della matematica che si terrà a Castel San Pietro Terme (BO) in settembre, per finire con il tradizionale «Convegnone» di novembre che ha la sua sede in questa bellissima cittadina situata sulle colline bolognesi e che suscita un interesse sempre più grande anche fra i giovani insegnanti ticinesi.

Anche le Recensioni sono particolarmente interessanti. Bruno D'Amore ci regala una dotta presentazione della serie di manuali per la scuola media «Atolli matematici 1, 2, 3, 4».

Inoltre gli insegnanti più sensibili al problema delle difficoltà in matematica (dalle elementari alle superiori) trovano la presentazione del nuovo testo prodotto dal Nucleo di Ricerca in Didattica della matematica (NRD) di Bologna.

Gli ultimi due testi recensiti sono interessanti soprattutto per gli insegnanti che sentono il bisogno di fondare il proprio insegnamento su basi storiche ed epistemologiche, ma non riescono a trovare il tempo per documentarsi adeguatamente.

1. La rete stradale più breve che collega le città

Martin J. Gander, Kévin Santugini e Antonio Steiner

The problem of finding the shortest road network is very old, the first written record goes back to a letter of Gauss replying to a question posed by Schumacher. After a historical review, we study the minimal road network problem using elementary mathematics, and show solutions for several examples.

1. Introduzione

Il problema di trovare la rete stradale più breve che collega le città può essere fatto risalire a una corrispondenza tra Schumacher e Gauss nel 1836. In una prima lettera (Schumacher H.C., 1836a) questi propone a Gauss un problema apparentemente semplice (vedere figura 1):

«Mir ist neulich ein Paradox vorgekommen, das ich so frei bin Ihnen vorzulegen. Bekanntlich ist, wenn man bei einem Vierecke ABCD einen Punct sucht, von dem die Summe der an die Winkelpuncte gezogenen Linien ein Minimum sey, der gesuchte Punct der Durchschnittspunct der Diagonalen E. Lässt man nun die Punkte A, B in den Linien DA, BC immer mehr hinaufrücken, bis sie am Ende in F zusammenfallen, so fällt auch E zugleich in F, das Viereck verwandelt sich in das Dreieck DFC, und man hätte den Punct F als denjenigen, von dem die Summe der an die Winkelpuncte F, C, D des Dreiecks gezogenen Linien ein Minimum sey. Das ist aber bekanntlich nur wahr, wenn der Winkel $F > 120^\circ$ ».

Traduzione:

«Mi sono trovato di fronte a un nuovo paradosso, che mi permetto di presentarle. Sai sa che, dato un quadrilatero ABCD, se si considera un suo punto e lo si congiunge con i vertici mediante tre segmenti, la somma delle loro lunghezze è minima quando il punto coincide con l'intersezione E delle diagonali. Ora, se si prolungano i lati DA e CB fino a incontrarsi in un punto F, anche il punto E va a coincidere con F, il quadrilatero si trasforma nel triangolo DFC e il punto F dovrebbe essere quello per il quale la somma delle sue distanze dai vertici F, C, D del triangolo è minima. Notoriamente ciò è però vero solo se l'ampiezza dell'angolo in F è maggiore o uguale a 120° ».

Solo due giorni dopo, Gauss risponde adducendo la seguente spiegazione (Schumacher H.C., 1836b):

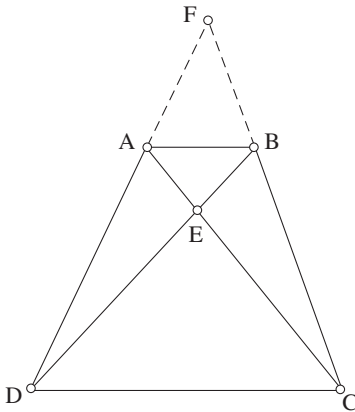


Figura 1 Esempio inviato da Gauss a Schumacher nel 1836.

«Was Ihr Viereck betrifft, so heisst doch die Aufgabe so: Vier Punkte a, b, c, d sind gegeben, man soll einen 5ten x finden, so dass $ax+bx+cx+dx$ ein Minimum wird, und das ist von den 3 Durchschnittspunkten ab mit cd , ac mit bd , ad mit bc der eine, wo man für die Auswahl die Bedingung entweder leicht auf Anschauung reduciren, oder analytisch einkleiden könnte. Lassen Sie nun a, b, c fest sein, und d dem c immer näher rücken, so bleibt diese Auflösung noch immer so lange richtig, als Sie nicht c mit d zusammenfallen lassen. Fällt aber c mit d zusammen, so erfordert Geist und Buchstabe der mathematischen Aufgabe, als solcher, dass Sie dann c zweimahl zählen, also in dem Dreieck abc $ax + bx + 2cx$ zu einem Minimum machen, wo sich die allgemeine Auflösung noch immer als richtig ausweist».

Traduzione:

«Per quanto concerne il Suo quadrilatero, il problema è il seguente: Dati quattro punti a, b, c, d , si deve trovarne un quinto x tale che la somma $ax+bx+cx+dx$ sia minima, e questo dovrebbe essere uno dei tre punti di intersezione di ab con cd , ac con bd , ad con bc , la cui scelta può essere fatta semplicemente guardando la figura oppure inquadrata analiticamente. Se ora lascia fissi a, b, c e spinge d sempre più vicino a c , la soluzione rimane sempre la stessa fin quando d non coincide con c . Se però d coincide con c , allora la situazione matematica esige che c venga contato due volte, quindi nel triangolo abc dev'essere minima l'espressione $ax+bx+2cx$ e ciò rende valida la soluzione anche in questo caso».

Il problema di Schumacher è interessante perché richiede di trovare un punto che sia connesso a un dato insieme di punti in modo che la rete di connessione abbia lunghezza minima ed è ancora attuale benché risalga al 1638, quando Descartes chiede a Fermat di studiare curve i cui punti abbiano la somma minima delle loro distanze da quattro punti dati. Interessato da questa domanda, Fermat nel 1643 riduce il problema alla ricerca della somma minima delle distanze da tre punti dati (Fermat P. de, 1891) e Torricelli è il primo a risolvere questo caso (Torricelli, 1919), per cui il problema dei tre punti è detto «Problema di Fermat-Torricelli». La soluzione del caso di quattro punti è data da G.F. Fagnano (1776), mentre la generalizzazione a n punti è dimostrata indipendentemente da P. Tédénat (1810) e da S. Lhuilier (1810) nel periodo

di insegnamento della matematica all'accademia imperiale di Ginevra. Anche se è possibile costruire la soluzione con riga e compasso in casi con più di quattro punti, è stato dimostrato con l'impiego della teoria di Galois che per più di quattro punti in posizione generale una tale soluzione non è possibile.

Nella lettera di risposta a Schumacher (1836b), Gauss propone un problema diverso, ma correlato, concernente la rete di connessione minima:

«Ist bei einem 4 Eck nicht von der stricten mathematischen Aufgabe, wie sie oben ausgesprochen ist, sondern von dem kürzesten Verbindungssystem die Rede, so werden mehrere einzelne Fälle von einander unterschieden werden müssen, und es bildet sich so eine recht interessante mathematische Aufgabe, die mir nicht fremd ist, vielmehr habe ich bei Gelegenheit einer Eisenbahnverbindung zwischen Harburg, Bremen, Hannover, Braunschweig sie in Erwägung genommen und bin selbst auf den Gedanken gekommen, dass sie eine ganz schickliche Preisfrage für unsere Studenten bei Gelegenheit abgeben könnte. Die Möglichkeit verschiedener Fälle erläutern wohl hinreichend folgende Figuren, wo in der dritten Figur die Verbindung von c nach d direct gehen muss (was wirklich bei obigem Beispiel der Fall wird)».

Traduzione:

«A proposito di un quadrilatero, se non si restringe il discorso al problema particolare di cui mi ha parlato, ma lo si allarga alla ricerca del più corto sistema di reti, si può distinguere fra più casi particolari e nasce quindi un interessante problema matematico, che non mi è sconosciuto, avendo avuto già più volte l'occasione di rifletterci a proposito della linea ferroviaria Harburg, Bremen, Hannover, Braunschweig e sono dell'opinione che ciò sia anche una ricca situazione didattica da proporre ai nostri studenti. L'esistenza di diversi casi è spiegata in modo sufficiente dalle seguenti figure, dove nella terza la connessione da c e d dev'essere diretta (che è il caso proposto sopra)».

Osserviamo che Gauss ha lavorato su questo problema per delle ragioni pratiche concernenti la rete ferroviaria più breve fra quattro importanti città tedesche. Questo tipo di problema appare in diverse applicazioni, in particolare nella progettazione di circuiti elettrici e nel disegno di reti, e oggi è conosciuto con la denominazione «problema dell'albero di Steiner» (Hwang F.K., Richards D.S. e Winter P., 1992), (Cieslik D., 1999), anche se non è chiaro in quale misura abbia contribuito alla risoluzione di questo problema l'eminente matematico Jakob Steiner (nato a Utzenstorf (Be), Svizzera, nel 1796). Il problema basilare dell'albero di Steiner consiste nel trovare la rete più corta che connette un insieme di punti del piano. Per ogni insieme di punti, aggiungendo un punto intersezione chiamato «punto di Steiner» è possibile ridurre la lunghezza della rete di connessione. Du e Wang (1992) dimostrano che con l'aggiunta di un punto intersezione non si può ridurre la lunghezza della rete di un fattore maggiore di $1 - \sqrt{3}/2$, circa il 13%, con l'impiego di un triangolo equilatero il cui centro fa da punto intersezione. Nel 1977, Graham, Garey e Johnson dimostrano che nel caso generale il problema della scelta ottimale dei punti intersezione è del tipo NP-completo¹ (Kolata G., 1990).

1. Denominazione informatica che indica i più difficili problemi problemi «non deterministici a tempo polinomiale», per i quali, cioè, non esiste un algoritmo in grado di risolverli velocemente (cioè in tempo polinomiale).

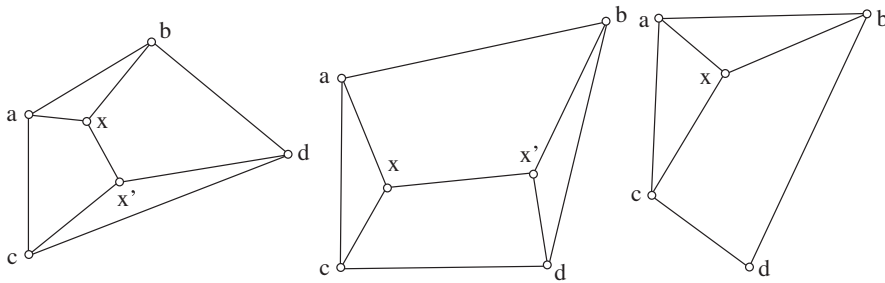


Figura 2 Illustrazione del problema delle reti minime fatta da Gauss.

In questo articolo studiamo, con mezzi matematici elementari, il problema di trovare la rete più corta che connette n città in uno spazio bi-dimensionale. In tutto l'articolo chiamiamo:

- Una **città**: un punto dell'insieme inizialmente dato.
- Un **punto di Steiner**: un punto in una rete che non è una città e che connette due o più strade (che non formino un angolo piatto).
- Un **nodo**: sia un punto di Steiner sia una città.

2. Un limite per il numero dei punti di Steiner

Nel piano la linea di lunghezza minima che congiunge due punti è la retta. Di conseguenza la rete di lunghezza minima è un'unione di segmenti e otteniamo una prima relazione fra il numero di strade e il numero di nodi:

Lemma 2.1. Consideriamo n città e una rete di lunghezza minima che le connette. Se p è il numero dei punti di Steiner e r quello delle strade, allora

$$r = p + n - 1$$

Dimostrazione. Una rete di lunghezza minima fatta di una collezione di segmenti non può contenere un ciclo. Se ne contenesse uno, si potrebbe togliere una strada dal ciclo e ottenere così una rete più corta. Una rete connessa senza cicli è un albero e il numero di strade r in un albero è uguale al numero di nodi meno 1.

Il prossimo lemma mostra che i punti di Steiner sono delle reali intersezioni, cioè connettono più di due strade.

Lemma 2.2. In una rete di lunghezza minima che connette n città, ogni punto di Steiner è connesso con almeno tre strade.

Dimostrazione. Se un punto P di Steiner fosse connesso con sole due strade, allora potremmo toglierlo e connettere direttamente i due nodi che erano connessi con P , ottenendo così una rete di lunghezza minima o al massimo uguale.

Lemma 2.3. Consideriamo n città e una rete di lunghezza minima che le connette. Se p è il numero dei punti di Steiner e r quello delle strade, vale la disuguaglianza

$$r \geq \frac{3p + n}{2}$$

Dimostrazione. Contiamo le strade connesse a ogni nodo. Ogni città è connessa con almeno una strada e ogni punto di Steiner con almeno tre strade. Sommiamo secondo i nodi e siccome ogni strada è contata due volte (una per ogni estremità della strada), otteniamo $r \geq (3p + n)/2$.

Vogliamo infine perfezionare questo risultato che abbiamo studiato nel caso di una rete di lunghezza minima per tre città. Applicando il lemma precedente, possiamo trovare un estremo superiore per il numero di punti di Steiner.

Teorema 2.4. Consideriamo n città e una rete di lunghezza minima che le connette. Sia p il numero dei punti di Steiner. Allora vale la disuguaglianza

$$p \leq n - 2$$

Dimostrazione. Questo risultato si ottiene combinando i risultati dei lemmi 2.1 e 2.3.

3. Rete minima che connette tre città

È utile studiare il caso particolare di tre città, perché si ottiene una informazione geometrica sulla struttura della rete in prossimità dei punti di Steiner.

Proposizione 3.1. Consideriamo tre città A, B e C. Allora si hanno due possibilità:

1. Se un angolo del triangolo ha l'ampiezza maggiore di 120° , allora la rete di lunghezza minima non contiene punti di Steiner ed è composta di due strade connesse all'angolo ottuso.
2. Altrimenti, la rete di lunghezza minima è quella che connette le tre città con l'unico punto O di Steiner, che si trova all'interno del triangolo ABC, ed è tale che gli angoli

$$(\angle OA, OB) = (\angle OB, OC) = (\angle OC, OA) = \pm 120^\circ$$

Dimostrazione. Sia O il punto di Steiner connesso direttamente con A, B, C. La lunghezza della rete associata con O è

$$l(O) = |OA| + |OB| + |OC|$$

Per trovare una posizione ottimale del punto O, dobbiamo conoscere la variazione di $l(O)$ al variare di O, cioè dobbiamo calcolare la derivata prima della lunghezza della rete quando O si muove nella direzione \vec{h}

$$\frac{d l(O + t \vec{h})}{dt} = \left(\frac{\vec{OA}}{|OA|}, \vec{h} \right) + \left(\frac{\vec{OB}}{|OB|}, \vec{h} \right) + \left(\frac{\vec{OC}}{|OC|}, \vec{h} \right)$$

E perciò

$$\frac{\vec{OA}}{|OA|} + \frac{\vec{OB}}{|OB|} + \frac{\vec{OC}}{|OC|} = \vec{0}$$

Questo può accadere solo se i vettori \vec{OA} , \vec{OB} e \vec{OC} formano fra loro angoli di 120° . Se il triangolo ABC ha un angolo di ampiezza superiore a 120° , allora O non può esistere e la rete minima non ha punti di Steiner. Se nessun angolo ha ampiezza

maggiore di 120° , esiste un solo punto O che soddisfa la (1), che può essere costruito disegnando tre archi di cerchio, ciascuno sopra ogni lato del triangolo (vedere la figura 3), che contiene tutti i punti interni del triangolo ABC tali che l'angolo con i due estremi dell'arco sia di 120° . Il raggio di ciascun arco è $2\sqrt{3}/3$ volte la lunghezza del lato. Il punto O di Steiner si trova all'intersezione dei tre archi di cerchio (vedere la figura 3).

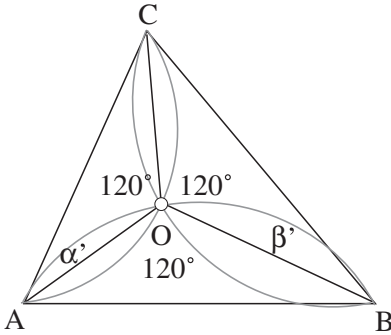


Figura 3 Costruzione del punto di Steiner ottimale per un triangolo.

La lunghezza della rete passante per O può così essere calcolata:

se indichiamo con $\alpha' = (\vec{AO}, \vec{AC})$ e $\beta' = (\vec{BC}, \vec{BO})$ allora

$$|AO| = \frac{\sin(60^\circ - \alpha')}{\sin 120^\circ} \cdot |AC|$$

$$|BO| = \frac{\sin(60^\circ - \beta')}{\sin 120^\circ} \cdot |BC|$$

$$|CO| = \frac{\sin \alpha'}{\sin 120^\circ} \cdot |AC|$$

$$|CO| = \frac{\sin \beta'}{\sin 120^\circ} \cdot |BC|$$

Di conseguenza

$$|AO| + |BO| + |CO| = \cos \alpha' \cdot |AC| + \cos \beta' \cdot |BC|$$

La rete con un punto di Steiner in O è quindi più corta di ciascuna delle tre reti senza punto di Steiner.

4. Alcuni risultati concernenti le reti minime nel caso generale

Dal caso delle tre città deduciamo interessanti proprietà che deve avere la rete minima per n città.

Proposizione 4.1. La rete minima che connette n città ha le seguenti proprietà:

1. Due strade che connettono uno stesso nodo formano un angolo maggiore o uguale a 120° .
2. Nessun nodo è connesso con più di tre strade.
3. Tre strade che connettono uno stesso nodo formano a due a due un angolo di 120° .
4. Tutti i punti di Steiner sono connessi con sole tre strade.

Dimostrazione. Se due strade che connettono tre nodi A, B, C formano un angolo minore di 120° nel nodo B, allora, per la Proposizione 3.1, è possibile costruire un altro punto O di Steiner tale che $|OA|+|OB|+|OC|$ sia più corta di $|AB|+|BC|$.

Siccome l'angolo giro ha ampiezza 360° , se un nodo N connesso con 4 o più strade, ci sarebbero almeno due strade che formano un angolo minore di 120° . Per la stessa ragione, se un nodo è connesso con tre strade, non vi possono essere due strade che formano un angolo maggiore di 120° : se fosse il caso, almeno uno degli altri angoli avrebbe l'ampiezza minore di 120° .

Per il lemma 2.2 un punto di Steiner è connesso con almeno tre strade. Abbiamo appena dimostrato che un nodo non può essere connesso con più di tre strade. Di conseguenza un punto di Steiner è sempre connesso con esattamente tre strade.

Possiamo ora enunciare il seguente:

Teorema 4.2.

Consideriamo n città e una rete di lunghezza minima che le connette. Sia p il numero dei punti di Steiner, r il numero delle strade e sia N il numero di connessioni fra le città (una strada che connette due città è contata due volte). Allora si ha

$$N \geq n \quad e \quad r = \frac{3p + N}{2} \quad e \quad p = 2n - N - 2$$

Caso particolare, se tutte le città sono connesse con una sola strada: $p = n - 2$

5. Esempi

In questo paragrafo diamo esempi di reti di lunghezza minima.

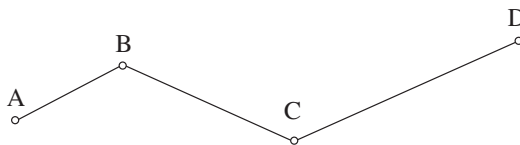


Figura 4 Una rete lineare

5.1. Rete minima per il quadrilatero

Per il teorema 2.4, possono esistere solo 0, 1 oppure 2 punti di Steiner. Enumeriamo tutte le possibilità di rete minima:

- **Nessun punto di Steiner, caso degenere.** Una città giace esattamente in un punto di Steiner delle altre tre città. Congiungendo questa città con le altre tre si ottiene la rete minima.

- **Nessun punto di Steiner, caso normale.** Due città sono connesse con due strade e le altre due città sono connesse con una sola strada. In questo caso la rete è una successione lineare di strade (vedere la figura 4).
- **Un punto di Steiner.** Il punto di Steiner è connesso con tre città. L'altra città è direttamente connessa con una delle prime tre città (vedere per esempio il terzo disegno di Gauss nella figura 2).
- **Due punti di Steiner.** Ogni punto di Steiner è connesso con due città e con l'altro punto di Steiner (vedere il primo e il secondo disegno di Gauss nella figura 2).

Consideriamo i quattro vertici di un quadrato e cerchiamo la rete minima. Sia a la lunghezza dei lati. Senza punti di Steiner, la lunghezza minima della rete è $3a$.

Con un punto di Steiner, questo è connesso con tre città e la lunghezza della rete è

$$\frac{a}{2} (2 + \sqrt{6} + \sqrt{2}) \approx 2,93 a$$

Con due punti di Steiner, ciascuno è connesso con l'altro e con due città e la lunghezza della rete è

$$(\sqrt{3} + 1) \cdot a \approx 2,73 a \text{ (vedere la figura 5)}$$

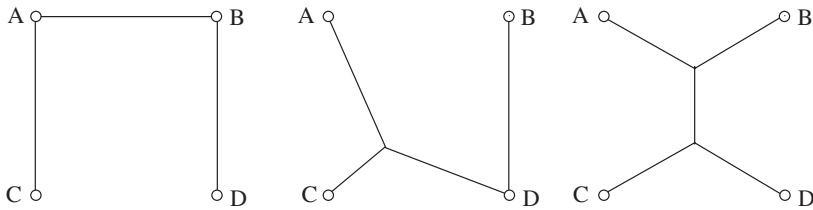


Figura 5 Rete minima per un quadrato.

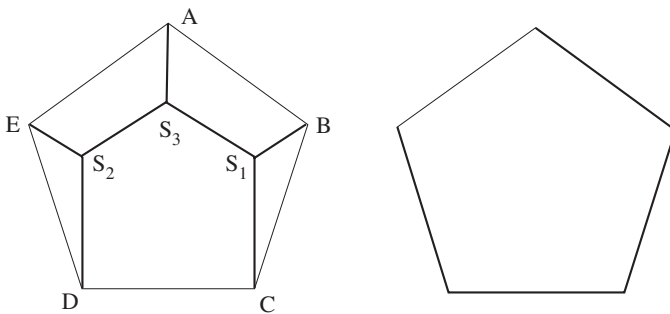


Figura 6 Reti con tre punti di Steiner e con nessuno punto di Steiner per il pentagono regolare.

5.2. Rete minima per il pentagono regolare

Calcoliamo la lunghezza della rete minima per il pentagono regolare con il numero massimo di punti di Steiner: tre. Due città non possono essere connesse direttamente se il numero di punti di Steiner è massimo. Così ogni città è connessa con un punto di Steiner. A sua volta, un punto di Steiner non può essere connesso con tre città, senza che la rete diventi sconnessa. Così abbiamo due punti di Steiner S_1 e S_2 connessi con due città e un punto di Steiner S_3 connesso con una sola città e con gli altri due punti di Steiner (vedere figura 5.2). Indichiamo con R la distanza fra il centro del pentagono e un suo vertice. La lunghezza di ogni strada di questa rete può essere così calcolata

$$|CS_1| = |DS_2| = 2R \frac{\sin 36^\circ \cdot \sin 42^\circ}{\sin 120^\circ} \approx 0,9083 R$$

$$|BS_1| = |ES_2| = 2R \frac{\sin 36^\circ \cdot \sin 18^\circ}{\sin 120^\circ} \approx 0,4195 R$$

$$|S_2S_3| = |S_1S_3| = 2R \sin 36^\circ \approx 0,6787 R$$

$$|AS_3| = (1 + \cos 36^\circ)R - |CS_1| - R \sin 36^\circ / \sqrt{3} \approx 0,5614 R$$

La lunghezza totale della rete è quindi

$$2|CS_1| + 2|BS_1| + 2|S_2S_3| + |AS_3| = 4,5743 R$$

La rete senza punti di Steiner non può essere più corta perché l'angolo tra due lati adiacenti è $112^\circ < 120^\circ$. Infatti la sua lunghezza è $8 \cdot \sin 36^\circ \cdot R = 4,5743 R$. La rete senza punti di Steiner non può essere più corta, perché l'angolo tra due lati adiacenti è $112^\circ < 120^\circ$. In realtà la lunghezza è $8 \cdot \sin 36^\circ \cdot R = 4,7022 R$.

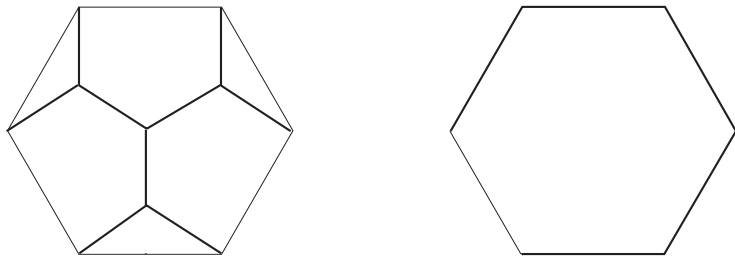


Figura 7 Reti con quattro punti di Steiner e senza punti di Steiner per l'esagono regolare.

5.3. La rete minima per l'esagono regolare

Calcoliamo la rete minima per un esagono regolare con il numero massimo di punti di Steiner: quattro. Il modo intuitivo immediato è di aggiungere tre punti di Steiner, ciascuno dei quali è connesso con due città adiacenti. Poi connettiamo que-

sti tre punti di Steiner con il quarto punto di Steiner collocato al centro dell'esagono (vedere figura 7). Se ogni lato ha lunghezza R , allora la lunghezza di ogni strada connessa con una città è $\sqrt{3}/3 \cdot R$. La lunghezza di una strada che connette il punto di Steiner al centro dell'esagono con un altro punto di Steiner è

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) R = \frac{\sqrt{3}}{3} R$$

Di conseguenza la lunghezza totale della rete è $3\sqrt{3} R = 5,196 R$. Questa è più lunga della rete senza punti di Steiner, di lunghezza $5R$.

5.4. Rete minima per il poligono regolare avente $3 \cdot 2^n$ vertici

Consideriamo solo reti minime con il massimo numero di punti di Steiner e ci occupiamo dello strato esterno di punti di Steiner. Se $n > 1$, due città del poligono sono sempre connesse con un punto di Steiner. Fissiamo il punto di Steiner S che connette due città adiacenti A e B in modo che $|AS| = |BS|$ e

$$(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}) = 120^\circ.$$

Allora esistono $3 \cdot 2^{n-1}$ punti di Steiner: essi formano un poligono regolare, possiamo considerarli come città di un'altra rete e connetterli per mezzo di altri punti di Steiner. Per induzione, questo ci permette di calcolare la lunghezza di una tale rete.

Numero di vertici	Lunghezza della rete
3	3
6	5,19615
12	7,82894
24	10,7892
48	13,9837
96	17,3390

Tabella 1 Lunghezza di una rete con il massimo numero di punti di Steiner per un poligono regolare.

Sia R la distanza del centro del poligono da ogni città (collocata nei vertici del poligono regolare). Per prima cosa calcoliamo la distanza dei punti esterni dal centro del poligono. Questa distanza è

$$R \cos\left(\frac{180^\circ}{N}\right) - R \frac{\sin\left(\frac{180^\circ}{N}\right)}{\tan 60^\circ} \quad \text{con } N = 3 \cdot 2^n$$

La lunghezza di una strada che connette un punto di Steiner con una città è

$$R \cdot \frac{\sin\left(\frac{180^\circ}{N}\right)}{\sin 60^\circ}$$

Perciò, se chiamiamo l_n la lunghezza di una tale rete (per $R=1$), allora otteniamo la relazione

$$l_{n+1} = \frac{N \sin\left(\frac{180^\circ}{N}\right)}{\sin 60^\circ} + \left(\cos\left(\frac{180^\circ}{N}\right) - \frac{\sin\left(\frac{180^\circ}{N}\right)}{\tan 60^\circ} \right) \cdot l_n \quad \text{e} \quad l_0=3.$$

Questa configurazione può essere una rete minima? Proprio no! Per un triangolo otteniamo una rete di lunghezza 3, per un esagono otteniamo la lunghezza 5,196 e per un decagono 7,83 che è maggiore di 2π : la lunghezza della circonferenza. Ciò significa che, per il dodecagono e per tutti i poligoni regolari aventi un numero maggiore di vertici la lunghezza, la rete senza punti di Steiner è la più corta (vedere la tabella 5.4).

6. Conclusione

Per concludere, usiamo i risultati ottenuti nella risoluzione del problema dei tre punti di Gauss, illustrato nella lettera a Schumacher (Schumacher H.C., 1836b). Nella figura 8 mostriamo la rete più corta ottenibile e l'ottimizzazione topologica della rete indicata da Gauss che risulta però più lunga della prima. Nel primo caso le due reti hanno lunghezza 11,6 cm e 12,6 cm (valori approssimati al millimetro); nel secondo disegno la prima rete è lunga 15,5 cm, mentre l'altra non è definita; nel terzo caso, le reti misurano nell'ordine 12,39 cm e 12,44 cm.

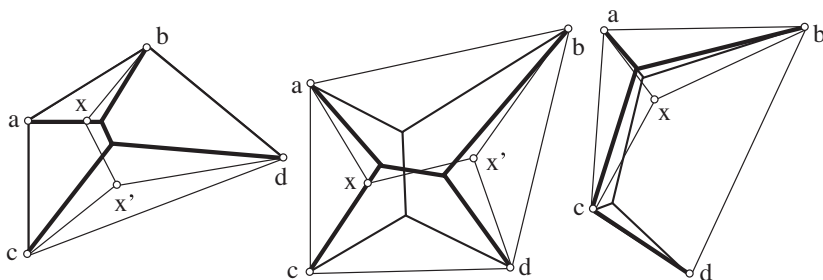


Figura 8 Le soluzioni corrette presentate da Gauss (linea di spessore 1) e quelle ottimizzate disegnate da Gauss (linea di spessore 2), più lunghe delle prime.

Bibliografia

- Schumacher H.C. Schumacher an Gauss, Altona , 19. März 1836. In *Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher III*. Altona: Gustav Esch, p. 7-8, 1836.
- Gauss C.F. Antwort von Gauss an Schumacher, Altona 21. März 1836. In *Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher III*. Altona: Gustav Esch, p. 13-14, 1836.
- Fermat P. de *Oeuvres, I*. Paris: Tannery. Supplément: Paris 1922, 1891.
- Torricelli E. *Opere, I/2*. Faenza: Loria e Vassura, p. 90-97, 1919.
- Fagnano G.F. Problemata quaedam ad methodum maximorum et minimorum spectantia. In *Nova Acta Eruditorum*, anni 1776.
- Tédenat P. Questions résolues. Solution du premier des deux problèmes proposés à la page 196 de ce volume. In *Annales de mathématiques pures et appliquées*. Nîmes: Gergonne 1, p. 285-291, 1811.
- Lhuillier S. Questions résolues. Solution du premier des deux problèmes proposés à la page 196 de ce volume. In *Annales de mathématiques pures et appliquées*. Nîmes: Gergonne 1, p. 297-301, 1811.
- Hwang F.K., Winter P. *The Steiner Tree Problem*. In *Annals of Discrete Mathematics*, vol. 53. Amsterdam: Elsevier North-Holland, 1992.

2. Impostazione algebrica dell'Analisi matematica

Mauro Cerasoli¹

A new approach to teach the differential and integral calculus, starting from polynomials and Taylor's formula, is presented.

1. Premessa

Continuare a insegnare l'Analisi Matematica, ovvero ciò che gli anglosassoni chiamano Calculus, così come si faceva nel '900, senza tener conto dei computer e dei software come *TI-nspire* e simili, assomiglia a certi comportamenti sociali che *il politicamente corretto* evita di esplicitare, se non si vuole essere presi per maleducati. Una pubblicità della Microsoft faceva vedere gli impiegati Dino e Saura, con la faccia da animali preistorici, invitandoli ad aggiornarsi. Noi ci stiamo provando da circa dieci anni con i docenti di matematica a ogni livello, purtroppo i risultati sono deludenti.

Il termine *matematica da rottamare*, coniato nel 1997 e riportato in (Cerasoli, 1998), sembra sia stato allegramente ignorato dai sacerdoti del sapere e accettato solo per alcuni argomenti ovvii. Ad esempio, quasi tutti hanno rottamato l'algoritmo per calcolare le radici quadrate e i procedimenti lunghi e noiosi che servivano a calcolare logaritmi, seni, coseni e tangenti con le antiche tavole. Oggi *quasi* tutti i docenti di matematica, e sottolineo ancora quasi, ritengono che tali *calcoli*, possano essere effettuati con le calcolatrici. Scientifiche però, nel senso che altri calcoli, come quelli di espressioni algebriche, limiti, derivate e integrali sono vietati all'esame di stato con l'uso delle calcolatrici CAS (Computer Algebra Sistem). Molti però continuano allegramente a perdere mesi sul calcolo di radicali, espressioni a sette piani, limiti, derivate, integrali o nella risoluzione di quelli che Gian Carlo Rota chiamava *word problems*.

Chiedersi il perché di questi divieti, dopo più di un ventennio dall'avvento di formidabili software come *Derive* e *Mathematica*, è ormai solo una perdita di fiato e di tempo. Tra l'altro non vale più la pena di preoccuparsi della cosa, visto il crollo dell'interesse da parte dei giovani nei confronti delle discipline scientifiche, in particolare della matematica. Con amarezza torna alla mente il proverbio *è inutile chiudere la stalla quando i buoi sono scappati*.

1. Indirizzo di posta elettronica: mauro.cerasoli@alice.it; vedere anche il sito Internet: www.webalice.it/mauro.cerasoli.

La matematica viene ancora insegnata, ma fra qualche anno sarà facoltativa anche al Liceo Scientifico e alle Facoltà di Ingegneria, ci scommetto, visto che sta già scappando dalle Facoltà di Economia e di Architettura. Più precisamente, verrà ancora insegnata, ma più che del teorema di Pitagora, o della distanza euclidea, della formula per la risoluzione dell'equazione di terzo grado, della teoria dei gruppi finiti, si parlerà del fatto che Pitagora odiava le fave, che Tartaglia tartagliava, cioè era balbuziente per una sciabolata, che Galois morì ucciso in duello per difendere l'onore di una donna (o di una sguadrina?) e di altre questioni interessanti, culturali, storiche, diciamo *letterarie*, futili, ma sicuramente *non-matematiche*.

Per coloro invece che ancora credono in un insegnamento vero e utile della matematica, che si aspettano argomenti e contenuti nuovi che ancora sono tenuti fuori dall'aula per motivi corporativi, baronali, libreschi, per coloro insomma che vogliono sentir parlare di matematica e non soltanto di cognitivo e metacognitivo, ho immaginato un modo diverso di introdurre l'Analisi Matematica alla luce di questi software così potenti e a basso costo.

Supponiamo pertanto che i nostri studenti abbiano la possibilità di utilizzarli e che abbiano studiato e appreso tutti i termini di cui non darò una definizione nel testo a seguire. Gli argomenti di cui tratterò possono essere svolti a partire dalla Scuola Media Superiore e collocati nello spazio e nel tempo a seconda della classe e del docente. In altri termini, non mi pongo il problema di quando presentare gli argomenti successivi ma solo il modo con cui presentarli.

Un ultimo avvertimento: se non si vuole perdere anche la stalla, oltre ai buoi, conviene che i docenti matematici rigorosi rinuncino alle pretese assurde che *tutto* debba essere dimostrato e presentato in modo rigoroso e preciso. Questo è un mito, o pregiudizio ideologico, che nei licei conviene abbandonare per sempre. Al riguardo si consiglia la lettura di (Cerasoli, 1995).

2. I polinomi in una variabile sono i mattoni del nuovo edificio

Gli allievi negli anni precedenti vengono a conoscenza di espressioni come $ax+b$ oppure ax^2+bx+c almeno perché hanno risolto equazioni di 1° e 2° grado. Prima o poi è bene che qualcuno dica loro quanto segue. Prendiamo un qualunque numero naturale, ad esempio il numero 1.945 in base 10, che si scrive nella forma

$$1945 = 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5$$

Se al posto di 10 scriviamo una lettera, per esempio x , il secondo membro diventa

$$x^3 + 9x^2 + 4x + 5$$

che è meglio scrivere in ordine inverso

$$5 + 4x + 9x^2 + x^3$$

Questa espressione, in cui leggiamo nell'ordine 5, 4, 9 e 1 sarebbe stata quella che avrebbe scritto un cittadino arabo o israelita, dato che loro scrivono da destra verso sinistra. Analogamente, il numero 18.074 dà luogo all'espressione algebrica

$$4 + 7x + 8x^3 + x^4$$

e 2.007 dà origine a

$$7 + 2x^3.$$

Se invece della lettera x ne avessimo usato un'altra, ad esempio la t , avremmo scritto

$$5 + 4t + 9t^2 + t^3 \quad 4 + 7t + 8t^3 + t^4 \quad 7 + 2t^3$$

Tutte queste scritte, o *espressioni algebriche*, in cui compare la lettera x (o la t), sono chiamate *polinomi (polynomials) nella variabile (variable) x*. Un po' d'inglese non guasta mai per poi navigare su Internet e apprendere, gratis, altra matematica. Ad esempio, cercando *secretary problem*. La x è chiamata *variabile* perché al suo posto, invece di 10, può essere messo un qualsiasi altro numero, come 3, ottenendo un altro risultato numerico. Per il polinomio $5+4x+9x^2+x^3$ avremmo, sostituendo 3 alla x :

$$5 + 4 \cdot 3 + 9 \cdot 3^2 + 3^3 = 5+12+81+27 = 125$$

A questo punto, si definiscono i concetti di: *grado (degree)*, *primo coefficiente (leading coefficient)*, *zeri (zeros)* ecc. È ovvio che tutta la parte riguardante le espressioni algebriche intere e fratte, con più di due variabili, comprese le scomposizioni e gli sviluppi, possono essere tranquillamente buttate nella spazzatura o eseguite con *TI-nspire*. Per ora non servono a niente, o meglio, servono a fare la gioia dei nemici della Matematica.

In Geometria vengono studiati i poligoni ma prima di tutto si studiano triangoli, quadrati, rettangoli, trapezi, rombi, il pentagono regolare, l'esagono regolare. Cioè i poligoni più importanti che servono per fare mattonelle e altre cose utili. Per analogia, o per una *par condicio mathematica*, bisogna far vedere prima chi sono i *polinomi più importanti*. Il buon senso, l'esperienza e le loro innumerevoli applicazioni suggeriscono i seguenti, messi secondo le mie preferenze, ma che chiunque altro può alterare o sostituire a suo piacere, purché dotati di interessanti applicazioni:

1. il monomio x^n per $n = 0, 1, 2, \dots$. Si definisce $x^0 = 1$ per $x = 0$;
2. il polinomio *geometrico* $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$;
3. la potenza del binomio $(1+x)^n$.

Soffermarsi sul fatto che quest'ultimi due sono utili in Matematica Finanziaria e Attuariale, ora che i calcoli vengono svolti dal computer, dicendo ad esempio che $(1+x)^n$ è il montante di un capitale unitario al tasso composto x dopo n anni, o analoghi significati pratici per epidemie, utili a studenti di medicina o farmacia, fa sicuramente più bene che dire soltanto che Newton fu fatto baronetto o che era inglese.

4. Il polinomio *fattoriale decrescente (falling factorial)* di grado r :
 $x(x-1)(x-2)\dots(x-r+1)$ indicato spesso con la notazione di Po-chammer $(x)_r$.
5. Questo polinomio è importante per tre motivi:
 - a. Il primo combinatorio: uguaglia il numero di disposizioni (*permutations*) semplici di x oggetti presi r alla volta. *TI-nspire* lo calcola con il comando $npr(x,r)$.

- b. Il secondo ancora combinatorio: diviso per $r!$ dà il numero di combinazioni di x oggetti presi r alla volta. TI-*nspire* lo calcola con il comando $\text{ncr}(x,r)$.
- c. Il terzo algebrico: è il polinomio che ha gli zeri più semplici, cioè i numeri naturali $0, 1, 2, 3, \dots, r-1$.
6. Il *fattoriale crescente* (*increasing factorial*) di grado r :
 $x(x+1)(x+2)\dots(x+r-1)$
 che corrisponde al fattoriale decrescente $(x+r-1)_r$.
7. Il polinomio *beta* di parametri naturali α e β positivi:
 $x^\alpha(1-x)^\beta$
 di notevole importanza per $0 \leq x \leq 1$. Conviene anche dire che un polinomio generico
 $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n$
 è spesso indicato con l'abbreviazione $p_n(x)$ ad indicare che l'espressione, fissati i coefficienti a_k , dipende dalla variabile x e che in seguito si parlerà di funzioni (se non si è già fatto).

Dati i due polinomi $a(x)$ e $b(x)$, si definiscono le operazioni di *addizione* e *moltiplicazione* ovvero i polinomi *somma* e *prodotto*:

$$a(x) + b(x) \quad \text{e} \quad a(x) \cdot b(x)$$

dicendo che il coefficiente di x^n :

$$\text{nella } \textit{somma} \text{ è } a_n + b_n$$

$$\text{nel } \textit{prodotto} \text{ è } \sum_{0 \leq k \leq n} a_k b_{n-k}$$

Ognuna di queste operazioni, come per le quattro elementari tra numeri reali o le radici quadrate o cubiche, o il calcolo dei logaritmi, dei seni e coseni, della tangente, viene effettuata con calcolatrici. Far eseguire a mano somme e prodotti di polinomi di grado elevato (per non parlare di frazioni algebriche) oggi dovrebbe essere considerato un reato da battezzarsi *misopedia*, punibile con il carcere, come il suo analogo chiamato *pedofilia*.

Analogamente si introduce il rapporto $a(x)/b(x)$ di due polinomi facendo notare che, come per le frazioni di numeri naturali, può non essere un polinomio e che prenderà il nome di *funzione razionale*, ecc. ecc.

Il tempo risparmiato a non fare calcoli a mano potrebbe essere sfruttato per parlare del *significato probabilistico* del prodotto di polinomi come illustrato in (Cerasoli, 2005, pag. 120). Un po' più difficile è parlare della *composizione* di polinomi, ma ora ne abbiamo il tempo, e far vedere che non è *commutativa*:

$$a(b(x)) \neq b(a(x)).$$

C'è anche tempo per parlare del suo significato probabilistico.

3. La derivata di un polinomio

Per i polinomi le derivate si possono introdurre subito, prima ancora di trattare le funzioni e i loro limiti. Ci vuole poco a dare la seguente troppo facile

Definizione

Si chiama derivata del monomio $(c x^n)$ rispetto a x il nuovo monomio $(n c x^{n-1})$. La derivata di un polinomio è il polinomio ottenuto facendo la derivata di ciascuno dei suoi monomi. A parole, la derivata $(n c x^{n-1})$ del monomio $(c x^n)$ si ottiene moltiplicando il coefficiente c per l'esponente n della variabile x e diminuendo n di 1. La derivata di una costante c è uguale a 0.

Dato il polinomio

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

la sua derivata è quindi il nuovo polinomio

$$a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1}.$$

Per esprimere ciò in forma più compatta, ovvero per scrivere che il secondo polinomio è il polinomio derivata (si dovrebbe dire derivato) del primo, si introduce il simbolo D dell'operazione di *derivazione*, ovvero l'*operatore derivata* D , e si scrive

$$D(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n) = a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1}.$$

Ad esempio,

$$D(5 + 4 x + 9 x^2 + x^3) = 4 + 18 x + 3 x^2.$$

Due semplici casi particolari sono molto importanti:

- a. $D(a x + b) = a$
- b. $D(a x^2 + b x + c) = 2 a x + b$.

Qual è il significato di questa nuova *operazione unaria* per i polinomi? Per rispondere bisogna fare qualche passo indietro. Se i due polinomi sono sposati alla variabile y nel senso che gli studenti sanno cosa significa scrivere

$$y = a x + b \quad \text{oppure} \quad y = a x^2 + b x + c$$

in termini di funzioni, allora è possibile introdurre i grafici dei polinomi, ovvero delle funzioni

$$y = a x + b \quad \text{e} \quad y = a x^2 + b x + c$$

perché con TI-*nspire* disegnare grafici è facile come calcolare $\sqrt{2}$ con una calcolatrice scientifica: basta sapere come si fa. Una volta che si è fatto vedere, si suppone al biennio, che a queste scritture corrispondono nel piano cartesiano *rette* e *parabole*, allora si può dare anche il *significato geometrico* di derivata in un punto prefissato. Gli studenti sono in grado di controllare algebricamente questa affermazione. Per la retta è banalmente ovvio. Per la parabola è solo un esercizio dimostrare che il *coefficiente angolare* della retta tangente alla parabola di equazione $y=ax^2+bx+c$ nel punto di ascissa x_0 è $(2 a x_0 + b)$.

È facile inoltre far vedere che il polinomio derivata di $f(x)$ è ottenuto anche calcolando prima il *rapporto incrementale*

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

e, dopo aver semplificato o eliminato h al denominatore, ponendo $h=0$.

Il significato geometrico di tale operazione può essere illustrato facilmente. Allo studente si può dire subito che, fissato un punto di ascissa c , la derivata di $f(x)$ valutata in c , ovvero il numero reale

$$Df(x) \Big|_{x=c}$$

uguaglia il *coefficiente angolare* della *retta tangente* alla *curva* di equazione $y=f(x)$ nel punto $(c;f(c))$. Qui, per i polinomi, non ci sono ancora le complicazioni che nascono quando si parla in generale di funzioni, perché con i polinomi non esistono forme indeterminate del tipo $0/0$, né punti in cui la funzione non è definita o non è derivabile.

Il significato fisico di derivata ora è alla portata di tutti, specie per le leggi di Galileo sulla caduta dei gravi: i polinomi in questione sono solo di 1° e 2° grado, cioè i più semplici come quelli citati all'inizio. Anche il calcolo delle derivate si effettua con calcolatrici CAS e farlo fare a mano dovrebbe significare il buscarsi un'altra denuncia di misopedia. Anche rette tangenti e figure varie sono facili da ottenere con TI-*nspire*.

4. Derivate successive e regole di derivazione

L'operazione di derivazione può essere iterata, come per le potenze. Ovvero si può fare la derivata della derivata, cioè la *derivata seconda*, e così via. Le derivate successive si indicano con D^2 , D^3 , ecc. I seguenti passaggi illustrano il concetto per le derivate successive del polinomio $5 + 4x + 9x^2 + x^3$:

$$D(5 + 4x + 9x^2 + x^3) = 4 + 18x + 3x^2$$

$$D^2(5 + 4x + 9x^2 + x^3) = D(4 + 18x + 3x^2) = 18 + 6x$$

$$D^3(5 + 4x + 9x^2 + x^3) = D(18 + 6x) = 6$$

$$D^4(5 + 4x + 9x^2 + x^3) = D(6) = 0.$$

Da questo esempio si deduce che la derivata $(n+1)$ -esima di un polinomio di grado n è uguale a 0 e così le derivate successive.

Tra il coefficiente generico a_k di un polinomio e le sue derivate successive vale la formula di Mac Laurin (*sizigia*):

$$a_k = D^k f(x) / k! \Big|_{x=0}$$

di facile dimostrazione e di fondamentale importanza per le applicazioni, soprattutto all'interno della matematica.

L'operazione di derivazione gode di alcune proprietà formali che bisogna conoscere. Esse si riferiscono alla derivata della somma, della differenza, del prodotto, del quoziente e della composizione di polinomi $f(x)$ e $g(x)$. Le esprimiamo nelle ben note formule:

$$D(f(x) + g(x)) = Df(x) + Dg(x) \qquad D(f(x) - g(x)) = Df(x) - Dg(x)$$

$$D(f(x) \cdot g(x)) = f(x) \cdot Dg(x) + g(x) \cdot Df(x)$$

$$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f(x) \cdot Dg(x) - Df(x) \cdot g(x)}{g(x)^2}$$

La dimostrazione di queste formule è un semplice esercizio di algebra.

5. Le funzioni analitiche

Introducendo la quaterna $+\dots$ costituita da un segno $+$ e da tre puntini, si passa semplicemente dai polinomi alle *serie di potenze*. Infatti che differenza c'è tra il polinomio

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

e la serie di potenze corrispondente, ovvero la somma di infiniti termini,

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots ?$$

Soltanto un $+$ e tre puntini. È chiaro che per $n = 1.000.000.000!$, sì, proprio *un miliardo fattoriale*, la differenza tra i due termini è davvero trascurabile. Ad esempio che differenza c'è tra il polinomio

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{1.000.000.000!-1} + x^{1.000.000.000!}$$

e la corrispondente serie geometrica ottenuta aggiungendo $+\dots$ alla fine?

Ci vuole poco a far notare che quando si scrivono i tre puntini, cioè si dice eccetera, eccetera, la somma di infiniti termini può creare dei problemi nel senso che può essere infinita o indeterminata. Basta dare qualche esempio. Ci sono dei casi però, quelli che ci interessano in modo particolare, in cui questi problemi non si presentano. Esistono dei polinomi con infiniti termini, detti appunto *serie di potenze*, che hanno una somma finita. È una verità che viene assunta come assioma in virtù del proverbio che dice: *una bugia a fin di bene vale più di mille verità*. I polinomi infiniti che maggiormente interessano sono i seguenti. Per ciascuno è scritta l'espressione, o *funzione*, con cui vengono indicati in tutto il mondo e l'intervallo della variabile x per cui la somma è finita.

Definizioni

a. la funzione *serie binomiale*

$$\sum_{k \geq 0} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots = (1+x)^\alpha$$

α numero reale qualsiasi, $|x| < 1$.

b. La funzione *esponenziale*

$$\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots = \exp(x) = e^x$$

c. La funzione *logaritmo*

$$\sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \ln(1+x)$$

con $|x| < 1$.

d. La funzione *coseno*

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots = \cos x$$

e. La funzione *seno*

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots = \sin x$$

Poiché sulle calcolatrici c'è la funzione tangente, tanto vale dare anche la sua definizione come rapporto:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

con l'avvertenza che $\cos x$ deve essere diverso da 0.

È facile convincere gli studenti della verità di tali definizioni perché possono controllarle con la calcolatrice. Ad esempio, per $\alpha=1/2$ e per $x=1/3$, la serie binomiale dà $2/\sqrt{3}$. Con TI-*nspire* viene il valore numerico approssimato 1,15470053838 sia se facciamo calcolare $2/\sqrt{3}$ direttamente e sia con

$$\sum_{0 \leq k \leq 100} \binom{1/2}{k} 3^{-k}$$

cioè la somma parziale della serie binomiale arrestata al 100° termine.

Si introducono poi le funzioni $f(x)$ a partire dalle sei fondamentali su definite combinate con le quattro operazioni aritmetiche elementari, la composizione e l'inversione. Anche per le funzioni fondamentali si può parlare di derivata.

Definizione

La derivata $Df(x)$ di ciascuna delle funzioni $f(x)$ su definite è la nuova serie di potenze ottenuta derivando ognuno dei termini che la compongono. Pertanto:

$$D(1+x)^\alpha = \alpha (1+x)^{\alpha-1}$$

$$De^x = e^x$$

$$D \ln(x) = 1/x$$

$$D \cos(x) = -\sin(x)$$

$$D \sin(x) = \cos(x).$$

6. Il calcolo integrale

Per i polinomi il calcolo integrale diventa una banalità, ad eccezione delle funzioni razionali, cioè dei rapporti di polinomi. Dato il polinomio

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad (1)$$

esiste sempre un polinomio di cui esso è la derivata. Basta dividere ciascun termine del polinomio dato per l'esponente della x aumentato di 1 e aumentare l'esponente di 1:

$$a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Si scopre però che ne esistono *infiniti* di polinomi che hanno per derivata quello dato: si ottengono aggiungendo una costante arbitraria c a quello trovato. Tutti questi polinomi

$$c + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

sono chiamati *polinomi integrali* di (1). Il polinomio integrale di $f(x)$ viene indicato con la scrittura

$$\int f(x) dx$$

Ad esempio

$$\int (5 + 4x + 9x^2 + x^3) dx = 5x + 2x^2 + 3x^3 + \frac{x^4}{4}$$

a meno della costante c omessa per brevità.

Anche l'integrale di un polinomio viene fornito dal computer con l'apposito tasto. Ma quale è il significato dell'operazione di integrazione? A questo punto, dato il polinomio $f(x)$, si può prendere il grafico della funzione $y=f(x)$ compreso tra un punto di ascissa a prefissato e un altro a destra variabile di ascissa x , per ipotesi (ovviamente non restrittiva, cioè senza perdere in generalità) al disopra dell'asse orizzontale. L'area compresa tra la curva $y=f(x)$, l'asse delle ascisse e le rette passanti per i punti di ascissa a (con $x>a$) è una funzione $F(x)$ del punto x . Se fissiamo un $h>0$, l'area compresa tra la curva, l'asse delle ascisse e le rette passanti per i punti di ascissa x e $x+h$ vale $F(x+h)-F(x)$. Se h è piccolo a piacere, per esempio $1/1.000.000.000$, questa area può dirsi anche quasi uguale al prodotto ($h f(x)$) che è l'area del rettangolo di base h e altezza $f(x)$. Ma allora si può scrivere che

$$F(x+h) - F(x) \approx h f(x)$$

e quindi

$$f(x) \approx \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

Quando si prende h sempre più piccolo, tendente a 0, il secondo membro diventa la derivata di $F(x)$, ovvero $F(x)$ è l'integrale del polinomio $f(x)$.

A questo punto si possono fare i limiti per spiegare che cosa vuol dire che h tende a 0, utilizzando le serie di Taylor. Si vede subito, ad esempio, che vale 1 quando x è 0 oppure che vale $1/2$, sempre per $x=0$. Con Taylor è facile. L'unico prezzo da pagare è accettare senza dimostrazione le definizioni-formule a)-e) del paragrafo precedente.

L'idea di presentare le derivate, gli integrali e le funzioni, partendo dai polinomi, riprende quella di *Edmund Landau* che in (Landau, 1950) presenta così le funzioni goniometriche \sin e \cos . La stessa storia della matematica ci insegna che tutto il calcolo differenziale e integrale fu sviluppato prima per i polinomi e poi per le funzioni. Perché non lo facciamo anche noi in classe?

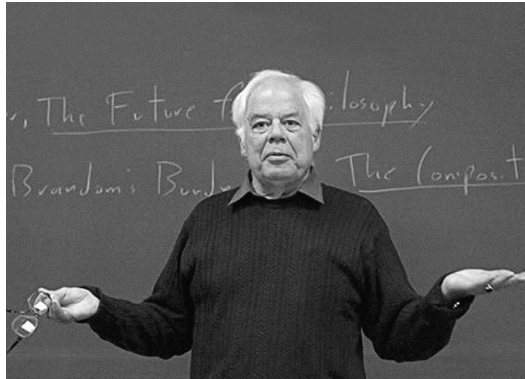
Bibliografia

- Cerasoli M. Lettera ad un collega a proposito del rigore e delle dimostrazioni nell'insegnamento della matematica. *La Matematica e la sua Didattica*. Bologna: Pitagora, p. 463-469 (ri-preso sul *Bollettino dei Docenti di Matematica*, 31. Bellinzona: UIM-CDC, p. 39-46, 1996.
- Cerasoli M. Riga, compasso e computer. *Bollettino dei Docenti di Matematica*, 36. Bellinzona: UIM-CDC, p. 63-74, 1998.
- Cerasoli M. Esempi di bufale nell'insegnamento della matematica. *Bollettino dei Docenti di Matematica*, 39. Bellinzona: UIM-CDC, p. 69-81, 1999.
- Cerasoli M. Un nuovo Syllabus di matematica. *Atti del Convegno ADT: «Nuovi obiettivi, curricoli e metodologie nella didattica della matematica e delle scienze»*. Monopoli (BA), pp. 63-69, 2002.
- Cerasoli M. *Elementi di Probabilità*. Costabile Ed., p. 208, 2005.
- Landau E. *Differential and Integral Calculus*. Chelsea P.C., 1950.

3. Ricordando Richard Rorty (1931-2007) matematica ironica o matematica metafisica?

Giorgio T. Bagni¹

Richard Rorty, one of the most important American philosophers and intellectuals, passed away on June 8, 2007 at 75. His philosophical approach can be very important for the reflection in the field of mathematics education.



Richard Rorty, uno dei più importanti, profondi e stimolanti pensatori del nostro tempo, si è spento l'8 giugno 2007, all'età di 75 anni. Rorty era Professor Emeritus of Comparative Literature and Philosophy presso la Stanford University; le sue numerose opere sono conosciute ed apprezzate in tutto il mondo: ci limitiamo a ricordare le fondamentali *La filosofia e lo specchio della natura* (*Philosophy and the mirror of nature*, 1979; Rorty, 2004), *La filosofia dopo la filosofia* (*Contingency, irony, and solidarity*, 1989; Rorty, 2003-a) e *Verità e progresso. Scritti filosofici* (*Truth and progress. Philosophical papers III*, 1998; Rorty, 2003-b). L'eredità del grande filosofo statunitense è senza dubbio ricca di spunti preziosi per gli studiosi di didattica della matematica: ripercorreremo brevemente alcuni elementi che hanno caratterizzato la sua riflessione.

Nel volume *La filosofia dopo la filosofia* (Rorty, 2003-a; la pubblicazione originale, del 1989, si intitola *Contingency, irony, and solidarity*), Rorty riprende il problema della fondazione della conoscenza, già affrontato in *La filosofia e lo specchio della natura* del 1979 (Rorty, 2004): la legittimazione di un enunciato sulla base di un

1. Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine (Italia).

rapporto diretto con il suo referente «là fuori», legittimazione che secondo alcuni sarebbe indipendente dai nostri sistemi simbolici, viene sostituita, nota Aldo G. Gargani (Prefazione a: Rorty, 2003-a, p. xv), da «un nuovo modo di guardare ai nostri discorsi che non devono essere legittimati rispetto a principi o a fondamenti già predisposti, ma in relazione a ciò che riteniamo migliore, più utile, più bello da fare e da pensare nell'ambito di una comunità sociale di valori condivisi e partecipati».

Tutto ciò si collega alla revisione del concetto di verità: per Rorty (2003-a, p. 84) «una società liberale è tale in quanto si contenta di chiamare «vero» (o «corretto», oppure «giusto») l'esito di una comunicazione non distorta, qualunque esso sia, cioè qualunque punto di vista che risulti vincitore da uno scontro libero e aperto. Con questa sostituzione si è abbandonata l'idea di un'armonia prestabilita tra il soggetto umano e l'oggetto del conoscere, e quindi la problematica epistemologico-metafisica tradizionale». È importante sottolineare che quando si dice che «la verità non è là fuori» (Rorty, 2003-a, p. 11) non si intende in alcun modo negare l'esistenza di qualcosa di «vero». Soltanto un enunciato può tuttavia essere considerato vero oppure falso; ma un enunciato, evidentemente, non può trovarsi «là fuori»: esso è comunque un'espressione in un linguaggio (anche matematico, senza dubbio) che a sua volta è una creazione umana: «il mondo è là fuori, ma le descrizioni del mondo non lo sono. Solo le descrizioni del mondo possono essere vere o false. Il mondo di per sé – a prescindere dalle attività descrittive degli uomini – non può esserlo» (Rorty, 2003-a, p. 11).

È ora necessario precisare brevemente il significato di un'importante espressione rortiana: «tutti gli uomini dispongono di un certo numero di parole di cui si servono per giustificare le proprie azioni, le proprie convinzioni e la propria vita»; tali termini «formano quello che chiamerò «vocabolario decisivo» di un individuo. Esso è decisivo nel senso che se queste parole vengono messe in dubbio chi le usa non può difenderle senza cadere in un circolo vizioso» (Rorty, 2003-a, p. 89). Il vocabolario decisivo, dunque, è un elemento chiave del bagaglio culturale e della stessa individualità di ciascun uomo. Rispetto ad esso è possibile assumere atteggiamenti diversi, addirittura opposti. Viene ad esempio descritto il comportamento di colui che Rorty (2003-a, pp. 89-90) chiama «ironico»:

«ironico è colui che 1. nutre continuamente profondi dubbi sul suo attuale vocabolario decisivo perché è stato colpito da altri vocabolari, vocabolari decisivi per persone o libri che ha conosciuto; 2. è consapevole del fatto che i suoi dubbi non possono essere né confermati né sciolti da argomenti formulati nel suo attuale vocabolario; 3. nel caso che filosofeggi sulla sua situazione, non ritiene che il proprio vocabolario sia più vicino alla realtà degli altri, in contatto con un'autorità esterna. [...] Il contrario dell'ironia è il senso comune. Questa infatti è la parola d'ordine di chi, per parlare delle cose di una certa importanza, usa inconsciamente il vocabolario decisivo a cui è abituato e che parlano quelli intorno a lui».

Per molti versi opposto è invece l'atteggiamento di quello che Rorty (2003-a, p. 91) chiama «metafisico»: egli infatti «presuppone che se una parola si trova nel suo vocabolario decisivo questo basta a garantire che essa si riferisce a qualcosa che *ha* un'essenza», mentre «l'ironico, al contrario, è nominalista e storicista. Per lui niente ha una natura intrinseca, un'essenza. Perciò non crede che la presenza di termini come «giusto», «scientifico» o «razionale» nel vocabolario decisivo del momento sia una buona ragione per pensare che la ricerca socratica dell'essenza della giustizia, della scienza o della razionalità potrà portare molto oltre i giochi linguistici del tempo».

La prospettiva descritta da Rorty comporta sempre, nell'ironico, la presenza di dubbi sulla stessa essenza del sistema di concetti che sta alla base del proprio vocabolario decisivo. Chiaramente questo atteggiamento può determinare situazioni imbarazzanti ad esempio dal punto di vista educativo. Rorty (2003-a, p. 107) è il primo a riconoscere ciò, e afferma: «non riesco a immaginare una cultura che educi la sua gioventù in modo tale da farle continuamente dubitare dell'educazione che sta ricevendo. L'ironia sembra essere qualcosa di intrinsecamente privato». Questo è un punto importante: secondo noi, tuttavia, la possibilità di tener conto di una sorta di ironia anche in ambito didattico non è da trascurare.

Non si dimentichi che qualche tensione verso un punto di vista assoluto è chiaramente presente in alcune fasi della storia della matematica, ad esempio nella posizione di coloro i quali non nascondono di mirare a una sistemazione definitiva di un sapere stabile e codificato. Non si tratterebbe, è ovvio, di una sistemazione «totale», in quanto sarebbe improponibile, da parte di un matematico assennato (anche ammesso di abbracciare una prospettiva platonistica), ogni pretesa di raggiungere *la* «conoscenza completa» della matematica; ma potrebbe trattarsi del tentativo di ottenere una (ovvero «la») sistemazione «definitiva» di un qualche argomento, di qualche settore particolare. Non vogliamo negare che alcune opere, nella storia della matematica, abbiano effettivamente avuto ruoli primari per l'inquadramento organico di certi settori della disciplina; ma ogni sistemazione, per quanto geniale, perfezionata e «in assoluto» apprezzabile, è sempre relativa ad esempio al particolare momento storico; ma sosteniamo che la didattica disciplinare può (e deve) contribuire a superare le ricordate «tentazioni», anche mediante l'adozione di una corretta prospettiva storica.

La possibilità di instaurare un dialogo (quello che Rorty chiama «conversazione») diventa ora essenziale: «l'ironico – colui che dubita del proprio vocabolario decisivo [...] – ha un bisogno disperato di *parlare* con gli altri [...] perché solo la conversazione gli permette di sopportare quei dubbi, di mantenersi saldo, di conservare al proprio tessuto di credenze e desideri la coerenza necessaria per agire» (Rorty, 2003-a, p. 213). Gli «altri», ovviamente, sono coloro i quali hanno vocabolari decisivi diversi dai nostri: uno sguardo alla storia della cultura (delle culture) ci porterebbe a considerare numerosi esempi.

Non è difficile riscontrare l'influenza di quanto rilevato anche nella pratica didattica: ad esempio, un senso di appartenenza può influenzare in termini positivi la devoluzione e favorire l'efficacia dei processi di insegnamento-apprendimento; lo studente che si sente parte di un gruppo, di una comunità, può sviluppare, a volte consapevolmente, la volontà di ottenere dei risultati tali da valorizzare tale appartenenza. Tutto ciò suscita comunque anche una riflessione critica, riassunto nella seguente (ovvia) domanda: il senso di appartenenza a una comunità, fondato sulla condivisione di valori, di concetti, di punti di vista, di interpretazioni del mondo, può ostacolare il dialogo con chi, non appartenendo alla nostra stessa comunità, ha vocabolari decisivi diversi dai nostri?

Rorty non ha difficoltà ad ammettere che la mancanza di «principi generali» condivisi possa portare a situazioni di incommensurabilità; ma sottolinea anche che «l'incommensurabilità comporta irriducibilità, ma non incompatibilità» (Rorty, 2004, p. 777). Un'eventuale situazione di incommensurabilità non implica conseguenze disastrose: porta semplicemente all'uso di vocabolari diversi (di diverse enciclope-

die, diremmo con Umberto Eco), i quali, però, non sono necessariamente incompatibili. Alcuni oggetti possono «coesistere» se trattati correttamente ciascuno mediante il proprio vocabolario, e non sarebbe proponibile il tentativo di «omologare» tali contenuti mediante l'uso di una razionalità (ad esempio «scientifica») con pretese di assolutezza, espressa da un super-vocabolario unico ed unificante.

Una didattica della matematica che tenga conto di queste posizioni, dunque una didattica della matematica «ironica» e non «metafisica», secondo la quale «giungere alla comprensione somigli più al far la conoscenza con una persona che al seguire una dimostrazione» (Rorty, 2004, p. 639) costituirebbe la realizzazione di un sogno per molti insegnanti e per molti studenti.

Bibliografia

- Rorty, R. *La filosofia dopo la filosofia*. Laterza, Roma-Bari (*Contingency, irony, and solidarity*. Cambridge University Press, Cambridge 1989), 2003a.
- Rorty, R. *Verità e progresso. Scritti filosofici*. Saggio introduttivo di A.G. Gargani, De-divinizing. La sdivinizzazione della verità. Feltrinelli, Milano (*Truth and progress. Philosophical papers III*. Cambridge University Press, Cambridge 1998), 2003b.
- Rorty, R. *La filosofia e lo specchio della natura*. Nota introduttiva di D. Marconi & G. Vattimo. Bompiani, Milano (*Philosophy and the mirror of nature*. Princeton University Press, Princeton 1979), 2004.

1. Robustezza degli apprendimenti¹

Un contributo alla valutazione della competenza

Sintesi del rapporto di ricerca

Gianfranco Arrigo

The concept of «robust learning» characterizes a learning that allows the subject to resist objections on the part of a third influential person (researcher, teacher...). The basic question we tried to answer is the following: if a pupil answers correctly all the questions of a written test, has he automatically acquired a robust learning? In many cases the answer is negative. In order to determine the level of robustness of learning we have put through particularly studied interviews pupils that answered correctly all the questions of a written test and we noticed that a part of them, other than negligible, answered for reasons that have little in common with the teacher's expectations. We also believe that the robustness of learning brings the pupil near to competence. In this sense tests of robustness are available as an interesting instrument for the assessment of competence.

1. Introduzione

Questa ricerca ha preso lo spunto da una situazione, per certi versi drammatica, molto diffusa nelle scuole svizzere (e probabilmente anche di altri paesi). Si tratta del sistema di valutazione adottato a partire dalla scuola media, consistente nell'effettuare un certo numero di prove scritte (in taluni casi questo numero è persino fissato dal Regolamento di istituto), nel valutare ogni elaborato con una nota numerica e infine nel calcolare la media aritmetica delle note così ottenute da ciascun allievo, che, approssimata al mezzo punto, diventa la nota finale.

La ricerca vuole mettere in dubbio l'attendibilità della prova scritta, soprattutto se adottata come unico mezzo di valutazione. Per raggiungere questo scopo si è pensato di sottoporre a un colloquio con il ricercatore un certo numero di studenti che hanno raggiunto risultati brillanti nella prova scritta.

2. Quadro teorico di riferimento

Con l'aggettivo *robusto* si qualifica un apprendimento che il soggetto ha costruito fino ad assumere piena convinzione della sua correttezza, ciò che gli conferisce atteggiamento e capacità di controbattere a obiezioni avanzate da una terza persona autorevole (insegnante, ricercatore,...). Il problema che qui si vuole affrontare consiste nel cercare di valutare quanto sia *robusto* un apprendimento (di tipo matematico) apparentemente avvenuto, cioè che si rivela raggiunto in una prova oggettiva. Questo atto valutativo rientra nella *valutazione per competenze* (M.I. Fandiño Pinilla, 2002), e perciò va oltre la valutazione per comprensione, abilità, capacità, contenuto, conoscenza.

1. Ricerca effettuata nell'ambito dell'Alta Scuola Pedagogica di Locarno con l'appoggio del NRD di Bologna. Il rapporto completo è apparso sulla rivista *La Matematica e la sua Didattica*, 2007/4 (Bologna: Pitagora) ed è stato accolto da tutti e tre i referee internazionali che lo hanno esaminato.

La letteratura internazionale sul concetto di competenza è cospicua e variegata, e perciò in questa sede si preferisce restringere il campo alle riflessioni raccolte nel volume di D'Amore, Godino, Arrigo, Fandiño Pinilla, (2003), relative all'apprendimento della matematica, testo che chiameremo in seguito «di riferimento».

Nell'opera citata si presentano i diversi aspetti di una competenza specifica. Essa dev'essere senza dubbio l'obiettivo di chi costruisce il proprio sapere. Riprendiamo la descrizione del concetto di competenza proposta da D'Amore (2000, 2003):

«Competenza è concetto complesso e dinamico:

- **complesso**: si tratta dell'insieme di due componenti:
 - uso (esogeno)
 - padronanza (endogena)
 anche elaborativi, interpretativi e creativi, di conoscenze che collegano diversi contenuti diversi
- **dinamico**: l'uso e la padronanza non sono l'unica espressione della competenza; la competenza racchiude in sé come oggetto non solo le conoscenze chiamate in causa, ma fattori metacognitivi: l'accettazione dello stimolo a farne uso, il desiderio di farlo, il desiderio di completare le conoscenze (...), e dunque lo stesso desiderio di aumentare la propria competenza».

Sempre nell'opera di riferimento, Martha Fandiño Pinilla ribadisce che la *competenza* è oggi da tutti riconosciuta come qualche cosa di più che una *conoscenza*, ben di più che un *saper fare in un dato contesto*; essa implica anche un *voler fare*, dunque chiama immediatamente in causa fatti affettivi, come, appunto, *volizione* e *atteggiamento*. La stessa autrice propone un'interessante distinzione tra *competenza in matematica* e *competenza matematica*.

La *competenza in matematica* si centra nella disciplina matematica, riconosciuta come scienza costituita, come oggetto specifico di conoscenza e fa parte dello specifico ambito scolastico.

La *competenza matematica* è un abito mentale che si riconosce in un individuo che vede, interpreta e si comporta nel mondo in senso matematico.

Ambidue gli aspetti ci paiono importanti e inscindibili: il primo, da solo, non porta a una vera competenza, mentre il secondo non può svilupparsi senza il contributo del primo.

Da quanto abbiamo appena detto, appare immediatamente chiaro che la competenza è un fenomeno strettamente legato al soggetto che apprende. All'insegnante spetta il compito – tutt'altro che facile e secondario – di mettere gli allievi in condizione (nella situazione) di acquisire la migliore competenza possibile. Il fatto che la competenza debba svilupparsi ed esplicitarsi in una determinata situazione è messo bene in evidenza da Rogiers (2000). Egli azzarda la seguente «definizione» di competenza:

«La possibilità, per un individuo, di mobilitare in modo interiorizzato un insieme integrato di risorse allo scopo di risolvere una situazione significativa (di carattere disciplinare) appartenente a una famiglia data di situazioni-problema».

Innanzitutto, come fa notare D'Amore (2003b), si parla di «possibilità» e dunque di uno stato latente e potenziale e non attuale, più vicino dunque ad un atteggiamento che non a un fare. Con l'espressione «*mobilitazione di un insieme articolato di risorse*» s'intende l'atto di operare una scelta opportuna, fra le conoscenze acquisite, in

funzione dei bisogni del momento; per «*famiglia di situazioni-problema*» s'intende un insieme di situazioni² concernenti uno stesso contenuto disciplinare, uno stesso *nucleo fondante*³ (D'Amore, 2000), e che fundamentalmente stimolino le stesse abilità mentali.

Infine, in Arzarello e Robutti (2002) si afferma che le competenze «*devono costituire un bagaglio (non tanto di nozioni, quanto delle abilità di risolvere situazioni problematiche, sapendo scegliere risorse, strategie e ragionamenti) per il cittadino*».

Per noi è importante ritenere che nel concetto di robustezza rientra anche l'insieme di atteggiamenti (di volizione, di gusto, di desiderio) che permettono al soggetto di contestare, con forza e cognizione di causa, qualsiasi obiezione che metta in forse la correttezza dell'apprendimento.

In questo lavoro non si entra nel merito delle varie metodologie didattiche che dovrebbero permettere all'allievo di costruirsi una determinata competenza. Ci si concentra invece sul problema altrettanto difficile e delicato della **valutazione della competenza**, più particolarmente del livello di competenza (M.I. Fandiño Pinilla, 2002, p. 138-139) raggiunto da un singolo allievo, successivamente a una determinata fase di apprendimento. Tutti gli autori sono concordi nel ritenere che non si può valutare la competenza avvalendosi unicamente di un test scritto.

Riferendoci alla classificazione dei modelli di valutazione (M.I. Fandiño Pinilla, 2002), possiamo dire che, pur concernendo obiettivi e comportamenti attesi, la valutazione di un livello di robustezza va ben oltre l'aspetto *comportamentista* e convenzionale. Rientra invece perfettamente nel *modello critico* e abbraccia tutte e tre le fasi citate da M.I. Fandiño Pinilla, cioè: azione, analisi e riflessione.

La domanda che sta alla base di tutta la ricerca si può porre in questi termini: se un allievo ha risposto in modo corretto a tutte le domande, consegue il massimo voto; ma si può allora dire che un tale allievo ha raggiunto la robustezza relativa? Più in generale: si può dire che un tale allievo è più vicino al raggiungimento della competenza di un altro che non ha risposto correttamente a tutte le domande?

Il problema si era già presentato nel corso di ricerche precedenti (in particolare nelle tre citate seguenti: D'Amore B. Arrigo G. (1999) e (2002) e in D'Amore et altri (2004)), quando, durante i colloqui clinici, una parte non trascurabile di allievi, di fronte a obiezioni mosse dal ricercatore, aveva cambiato opinione, considerando errata la risposta corretta data nel test. Questa constatazione, in gran parte inattesa, ha dato origine al concetto **di robustezza dell'apprendimento**, che verrà dettagliatamente spiegato nel seguito. Per ora può bastare l'idea che:

1. se un allievo risponde con successo alle domande di un test scritto, non è detto che abbia veramente appreso la materia oggetto di valutazione;
2. un allievo, che ha risposto con successo alle domande di un test scritto e che, nel corso di un colloquio nel quale si muovono obiezioni alle sue risposte (corrette), le sa giustificare e si sa difendere, ha acquisito un apprendimento robusto.

2. In questo lavoro si preferisce usare il termine «situazione», piuttosto che «situazione-problema». La situazione può anche non proporre esplicitamente un problema; in questo caso è l'allievo stesso che costruisce il problema (o i problemi) suggeriti dalla situazione stessa. Vedere (Brousseau G., 1998).

3. In D'Amore (2000) si afferma che: «Per nucleo fondante di una data disciplina potremmo intendere dei contenuti-chiave per la struttura stessa della disciplina, non tanto sul piano meramente didattico, quanto sul piano fondazionale, epistemologico».

3. Domande di ricerca

Gli insegnanti, di solito, ritengono completamente assimilata una conoscenza quando il soggetto sa descriverla correttamente, sa parlarla in relazione con altre e sa applicarla opportunamente in situazioni note. L'accertamento di questo stato dell'apprendimento viene fatto quasi esclusivamente mediante un test scritto. Questa situazione molto diffusa ci suggerisce le seguenti domande:

D1. Si può ritenere acquisita una conoscenza (insieme coeso di nozioni e procedure) quando si è constatato, mediante una prova scritta, che il soggetto sa descriverla correttamente, sa relazionarla con altre e sa applicarla opportunamente a contesti conosciuti?

D2. Se uno studente ha risposto correttamente al test scritto, ha giustificato la sua risposta e, di fronte a obiezioni avanzate dal ricercatore, l'ha difesa aggrappandosi al solo fatto che «è ciò che ho imparato a scuola» e si è mostrato aperto ad accettare anche soluzioni diverse (a sua insaputa errate), si può parlare di competenza raggiunta?

D3. Se uno studente ha risposto correttamente al test scritto, ha giustificato la sua risposta, l'ha difesa correttamente con parole sue, ha rifiutato tutte le soluzioni diverse (errate) proposte dal ricercatore, producendo controesempi, diciamo che il suo apprendimento è robusto. Se uno studente ha raggiunto la robustezza nell'apprendimento di tutte le conoscenze che concorrono al raggiungimento di una competenza, ha raggiunto la competenza?

D4. Se uno studente ha soddisfatto tutte le condizioni della domanda D3, che cosa gli mancherebbe per raggiungere la competenza relativa?

4. Ipotesi di ricerca

In relazione alle domande poste, si avanzano le seguenti ipotesi di ricerca.

I1. L'ipotesi di fondo è che se ci si è limitati a verificare, mediante una prova scritta, che il soggetto sa descrivere correttamente una data conoscenza, sa parlarla in relazione con altre e sa applicarla opportunamente in situazioni note, non si può concludere con sicurezza che lo stesso abbia raggiunto un livello di competenza. La riuscita nel test scritto può essere stata indotta da un forte contratto didattico o, più in generale, dal «mestiere di studente» che fa fare e dire al soggetto – per convenienza – cose delle quali non è affatto convinto. Si allude per esempio a quegli allievi che alla domanda «perché hai fatto così e non così?», si limitano a rispondere con frasi del tipo «perché ce l'ha insegnato così», «perché l'abbiamo scritto sul quaderno», «perché sta sul libro di testo». In particolare, non si ritiene per nulla scontato che un simile apprendimento sia tale da portare al raggiungimento di una competenza.

Ipotizziamo che la valutazione del grado di robustezza costituisca un passo importante verso la valutazione della competenza.

I2. Se uno studente ha risposto correttamente al test scritto, ha giustificato la sua risposta come ha imparato a fare in classe, e, di fronte a obiezioni avanzate dal ricercatore, si limita a dire «è così che ho imparato a scuola» e si dichiara aperto ad accettare anche soluzioni diverse (a sua insaputa errate), non ci sentiamo di affermare che ha raggiunto un livello di competenza.

I3. Se uno studente ha acquisito la robustezza nell'apprendimento di tutte le conoscenze che concorrono al raggiungimento di una competenza, riteniamo che ha compiuto un passo decisivo verso l'acquisizione della relativa competenza, ma che non l'ha necessariamente raggiunta. Potrebbe rientrare in questa categoria lo studente che ha appreso molto bene i saperi, che li sa applicare ogni volta che è spinto dalle circostanze a farlo, ma che non possiede l'intraprendenza, la carica emotiva, l'abito mentale, la predisposizione alla curiosità, qualità insite nel concetto di competenza.

I4. Per raggiungere un livello di competenza, uno studente, oltre ad aver acquisito un apprendimento robusto in tutte le conoscenze che rientrano in essa, dovrebbe anche avere la capacità di agire in vari contesti anche sconosciuti, applicando autonomamente e opportunamente le conoscenze acquisite, adattandole, estendendole, riconoscendone le potenzialità e i limiti. Questi aspetti potrebbero essere valutati meglio mediante un'osservazione mirata fatta in situazioni a-didattiche, o anche in ambiti non didattici.

5. Metodologia di ricerca e popolazione di riferimento

La raccolta dei dati sperimentali è stata condotta in tutti gli ordini di scuola interessati seguendo lo schema seguente:

1. Si è stabilito un insieme di obiettivi (che concorrono in una data situazione di apprendimento, in un'unità didattica, in un problema, soprattutto nel raggiungimento di un dato livello di competenza).
2. Gli insegnanti sperimentatori hanno svolto la fase di insegnamento-apprendimento in modo usuale (ciascuno secondo le proprie abitudini didattiche).
3. Si è costruito un test di verifica dell'apprendimento.
4. Si sono selezionati gli allievi che hanno avuto maggior successo e li si è sottoposti a colloqui clinici intesi a sondare le reali ragioni che li hanno portati alla risposta corretta e la loro capacità di difenderla di fronte a obiezioni avanzate da una terza persona autorevole (insegnante, ricercatore,...).

L'aspetto più delicato – e per di più centrale – della ricerca è costituito dai colloqui, lo strumento usato per determinare la robustezza degli apprendimenti. Per prima cosa si è cercato di eliminare gli effetti del contratto didattico: i colloqui hanno avuto luogo fuori dall'aula di classe e l'insegnante non ha assistito. Si è poi cercato di attutire il più possibile le influenze del contratto sperimentale, curando in modo particolare i gesti e il tono di voce: la figura del ricercatore è stata piuttosto quella di un amico che si interessa di ciò che l'allievo ha fatto in classe. Ma la preoccupazione più presente era di evitare i comportamenti dell'allievo rintracciabili nelle metapratiche (D'Amore, 2005). Per limitare queste influenze, che avrebbero potuto stravolgere il risultato stesso dei colloqui, il ricercatore ha cercato di tessere una relazione di complicità con il soggetto: a tutti è stato detto che in quella sede avrebbero potuto correggere le risposte date nel test che sembravano loro errate; all'insegnante, che non aveva ancora visto gli elaborati, non si sarebbe detto nulla.

Prima di effettuare i colloqui il ricercatore era anche preoccupato dall'incognita relativa alle reazioni che avrebbero potuto avere i soggetti di fronte alle sue obiezioni (in particolare: avrebbero mostrato di possedere le competenze necessarie per controbattere?). Per questo si è anche fatto capo a una specialista⁴. Si può comunque affermare che *a posteriori* questa preoccupazione si è rivelata meno importante di quello che si pensava.

Si sono definiti tre **livelli di robustezza**

Primo livello: l'allievo conferma la risposta data, giustificandola. Per valutare il suo raggiungimento, si chiede al soggetto di confermare e giustificare il proprio operato.

Secondo livello: l'allievo resiste a un'obiezione che riesce a contrastare con le sue conoscenze. Per valutare il suo raggiungimento, ci si avvale di solito di un paralogismo in modo da avanzare un'obiezione formalmente errata, ma apparentemente corretta.

Terzo livello: l'allievo resiste anche a obiezioni che non è in grado di verificare nei dettagli, producendo controesempi o ribattendo con obiezioni giustificate; oppure è in grado di generalizzare il risultato ottenuto, eventualmente anche con piccoli aiuti dati dal ricercatore.

Per valutare il suo raggiungimento si interviene con una obiezione autoritaria, oppure, quando l'argomento si presta, si spinge il soggetto verso generalizzazioni non richieste nel test.

Durante il primo anno (2002-2003) si è sondata la robustezza dell'apprendimento di nozioni e procedure. Sono stati coinvolti i seguenti insegnanti sperimentatori⁵ delle scuole medie ticinesi:

Prima media (Barbengo, Biasca, Pregassona: Azzurra Marchio, Lores Gianotti, Lara Zamboni)

Seconda media (Bellinzona, Viganello: Vittoria Bollini, Giovanna Corrent, Grazia Lavezzo)

Terza media (Castione: Flavia Butti, Claudia Mattei, Paolo Hägler)

Quarta media (Breganzona, Tesserete: Manuela Gerber, Marcello Duchini, Fausta Alberti, Claudio Poma)

Durante il secondo anno (2003-2004) si è sondata la robustezza degli apprendimenti relativi al «problem solving». Sono stati coinvolti i seguenti insegnanti sperimentatori sia svizzeri (ticinesi), sia italiani:

Prima elementare (Verbania: Lorella Maurizi, Tiziana Minazzi)

Quarta e quinta elementare (Arezzo: Margherita Francini, Annalisa Cini, Gabriella Pacciani)

4. La specialista che ha operato insieme al ricercatore è la prof. Magda Ramadan, docente di sostegno pedagogico alla Scuola Media di Chiasso e collaboratrice dell'ASP di Lorcarno.

5. Gli item proposti nelle diverse classi sono in possesso dell'autore; in questo rapporto ne sono riportati solo alcuni, più che sufficienti per permettere una corretta interpretazione dei risultati.

Prima media (Viganello, Bellinzona: Grazia Lavezzo, Giovanna Corrent; Terranuova Bracciolini, Laterina: Paola Nannicini, Giampiero Ceccherini)

Seconda media (Tesserete: Fausta Alberti, Claudio Poma; Terranuova Bracciolini, Laterina: Paola Nannicini, Giampiero Ceccherini)

Terza media (Pregassona: Lara Zamboni; Terranuova Bracciolini, Laterina: Paola Nannicini, Giampiero Ceccherini)

Quarta media (Pregassona: Lara Zamboni, Ambrogio Galvanone)

Prima superiore, indirizzo commerciale (Bellinzona: Paolo Hägler)

6. Descrizione e interpretazione dei risultati

6.1. Anno di sperimentazione 2002-2003

Oggetto della valutazione sono state diverse conoscenze specifiche relative ai programmi di matematica dei quattro anni della scuola media ticinese. In particolare sono state testate le seguenti conoscenze (nozioni e procedure):

In prima media: perimetri e aree di figure piane, additività dell'area.

In seconda media: frazione come operatore su grandezze, equivalenza di frazioni, addizione e sottrazione di frazioni, confronto di frazioni.

In terza media: applicazione del teorema di Pitagora ai solidi.

In quarta media: equazioni in \mathbb{R} (di primo grado, fratte, di secondo grado incomplete), applicazione della similitudine fra figure piane.

In questa sintesi riportiamo soltanto l'esempio relativo alla quarta media.

La robustezza dell'apprendimento relativa alla risoluzione di equazioni

Uno degli item assegnati in quarta media è il seguente:

«Risolvi in \mathbb{R} l'equazione $x^2 + 25 = 0$ »

Primo livello di robustezza

Gli allievi riconoscono il binomio inscindibile in \mathbb{R} e rispondono correttamente che l'equazione è impossibile.

Secondo livello di robustezza

L'allievo resiste all'obiezione (errata) del ricercatore che gli fa notare come non abbia visto che

$x^2+25 = (x+5)(x+5)$ e che, di conseguenza,

l'equazione ha la soluzione $x=-5$.

Terzo livello di robustezza

L'allievo resiste alla seguente obiezione (errata) del ricercatore:

«In realtà l'equazione si può risolvere in \mathbb{R} , a condizione di sapere un po' più di matematica. Infatti l'equazione può essere scritta così: $x^2 = -25$ e facendo la radice quadrata si ottengono le due soluzioni $x=+5$ e $x=-5$. Verifica: $x^2 = x \cdot x = (+5) \cdot (-5) = -25$ ».

L'allievo mostra piena robustezza se contesta il fatto che in una stessa espressione una lettera (la x) non può assumere valori diversi.

6.1.6. Sintesi dei risultati dei colloqui clinici

Sono stati sottoposti al colloquio solo gli allievi che hanno avuto la migliore riuscita nel test scritto (72 alunni di prima media, 59 di seconda, 120 di terza e 138 di quarta). Ciò spiega perché tutti hanno superato il primo livello. Buona parte dei colloqui sono stati eseguiti dal ricercatore; gli altri sono stati fatti dagli insegnanti sperimentatori, sulla base di un documento-guida preparato dal ricercatore. Nessun insegnante ha effettuato colloqui con propri allievi. L'elaborazione completa di questi risultati è in possesso dell'autore: in questa sede ci si limita a mostrarne una sintesi.

A mano a mano che gli allievi cedono, si conclude il colloquio. Le percentuali dei livelli I e II sono calcolate sul numero di allievi ammessi a quei livelli.

Prima media: perimetri e aree

I livello		II livello		III livello		Totale	
conferma	cede	resiste	cede	resiste	cede	resiste	
72	14	58	19	39	33	39	
100.0%	19.4%	80.6%	32.8%	67.2%	45.8%	54.2%	

Seconda media: equivalenza di frazioni

I livello		II livello		III livello		Totale	
conferma	cede	resiste	cede	resiste	cede	resiste	
59	7	52	5	47	12	47	
100.0%	11.9%	88.1%	9.6%	90.4%	20.3%	79.7%	

Terza media: applicazione del teorema di Pitagora ai solidi

I livello		II livello		III livello		Totale	
conferma	cede	resiste	cede	resiste	cede	resiste	
120	13	107	23	84	36	84	
100.0%	10.8%	89.2%	21.5%	78.5%	30.0%	70.0%	

Quarta media: risoluzione di equazioni

I livello		II livello		III livello		Totale	
conferma	cede	resiste	cede	resiste	cede	resiste	
48	0	48	14	34	14	34	
100.0%	0.0%	100.0%	29.2%	70.8%	29.2%	70.8%	

Quarta media: similitudine nel piano

I livello		II livello		III livello		Totale	
conferma	cede	resiste	cede	resiste	cede	resiste	
90	13	77	24	53	37	53	
100.0%	14.4%	85.6%	31.6%	68.4%	41.1%	58.9%	

La tabella relativa all'esempio scelto – risoluzione di equazioni in quarta media – ci conferma l'importanza del concetto di robustezza. I 48 allievi sottoposti al colloquio hanno confermato la loro soluzione corretta e l'hanno difesa con successo di fronte all'obiezione del secondo livello di robustezza, il che farebbe contenti e rassicurerebbe non pochi insegnanti, ma, di fronte all'obiezione del terzo livello, 14 su 48 cadono, ritrattano e trasformano la loro risposta iniziale corretta in una risposta completamente errata.

6.2. Anno di sperimentazione 2003-2004

L'attenzione è stata concentrata sugli apprendimenti che concorrono all'acquisizione di livelli di competenza nella risoluzione di problemi. Questa è stata sicuramente la parte più problematica della ricerca. Eravamo coscienti sin dall'inizio che non sarebbe stato possibile collocare la generica «capacità di risolvere problemi» – obiettivo peraltro dichiarato molto frequentemente e presente in tanti programmi scolastici – nel discorso della robustezza. Eppure avevamo un'intuizione che ci portava a credere che, in determinati contesti ben circoscritti, si sarebbe potuto distinguere tra una riuscita cosciente e sicura nel risolvere problemi, determinata da un certo numero di apprendimenti robusti del tipo «saper fare strategici» (Arrigo, Ghisla, 2004), e una riuscita in buona parte dovuta a fattori di casualità o di riproduzione. Nessuno degli studenti presi in considerazione non aveva mai seguito un insegnamento sistematico negli ambiti interessati dai problemi assegnati nel test (questo vale in modo particolare per l'ambito combinatorio, che per noi è quello di maggior interesse). Nel corso dei colloqui abbiamo osservato come anche una «capacità robusta» di risolvere problemi, pur circoscritti in un dato ambito, è un apprendimento che collocheremmo – per dirla con Vygotsky – nell'area di sviluppo potenziale.

Si sono determinati alcuni livelli di competenza concernenti le capacità di affrontare situazioni combinatorie e altre che richiedono l'impiego di semplici strategie operative, sia nel campo numerico che in quello geometrico figurale.

Le classi della scuola elementare si sono concentrate principalmente sui problemi numerici, incluse le prime conoscenze sulle frazioni.

Esempio. La robustezza dell'apprendimento relativa a situazioni combinatorie

Per dare un'idea di come si è proceduto, ci aiutiamo con un esempio. Uno dei problemi combinatori consisteva nel trovare quanti diversi coni di gelato a tre palline si possono confezionare avendo a disposizione 5 gusti diversi.

Primo livello di robustezza

Gli allievi, al primo impatto, tentano di elencare i casi possibili. Quando a un certo punto non riescono a trovarne di nuovi, concludono di averli elencati tutti e li contano. Una tale prestazione si colloca nel gradino più basso della robustezza. L'elenco prodotto è l'unica giustificazione avanzata dall'allievo. Alla provocazione del ricercatore «ne hai dimenticato uno» non sanno controbattere con un ragionamento che mostri la completezza del loro elenco, ma si difendono con la richiesta: «dimmi quale!».

Secondo livello di robustezza

Questo livello viene raggiunto da chi ha ideato un metodo sistematico che dà la sicurezza di produrre un elenco completo (per esempio iniziare ad elencare tutti i casi di tre gusti diversi, poi di due gusti, poi di un solo gusto e all'interno di ciascun caso stabilire un criterio di elencazione che dia la sicurezza della completezza). In questo modo giustificano il fatto che non ce ne possono essere altri.

Terzo livello di robustezza

Il gradino più alto viene raggiunto dagli allievi che sanno giustificare fino in fondo la correttezza del proprio metodo, mostrano di saperlo applicare anche con altri dati numerici e, compatibilmente con la loro età, riescono a raggiungere un grado di generalizzazione. Per esempio, di fronte a una successione numerica, nel gradino più basso gli allievi ne intuiscano la legge di composizione, ma la esprimono in linguaggio naturale e in modo approssimativo; nei gradini successivi usano un gergo misto di linguaggio naturale ed espressione matematica, che si avvicina progressivamente all'espressione matematica pura; nel gradino più alto, gli allievi costruiscono la formula del termine n -esimo.

Gli allievi che cedono a questo livello sanno, sì, giustificare il proprio risultato, ma cadono di fronte a un'obiezione che non sanno controllare: per esempio, se si dice loro che non hanno tenuto conto della commutatività dei tre gusti diversi, o della non commutatività dei casi con due soli gusti: mettono in dubbio la correttezza del proprio risultato e finiscono per dichiarare di aver sbagliato.

Sintesi dei risultati dei colloqui clinici

Sono stati sottoposti al colloquio solo gli allievi che hanno avuto la migliore riuscita nel test scritto (63 alunni della scuola elementare, 116 della scuola media e 13 del primo anno di superiore). Ciò spiega perché tutti hanno superato il primo livello. Buona parte dei colloqui sono stati eseguiti dal ricercatore; gli altri sono stati fatti dagli insegnanti sperimentatori, sulla base di un documento-guida preparato dal ricercatore. Nessun insegnante ha effettuato colloqui con propri allievi. L'elaborazione completa di questi risultati è in possesso dell'autore: in questa sede ci si limita a mostrarne una sintesi.

A mano a mano che gli allievi cedono, si conclude il colloquio. Le percentuali dei livelli I e II sono calcolate sul numero di allievi ammessi a quei livelli.

Situazioni combinatorie

I livello			II livello		III livello		Totale	
conferma	cede	resiste	cede	resiste	cede	resiste	cede	resiste
50	9	41	7	34	16	34		
100.0%	18.0%	82.0%	17.1%	82.9%	32.0%	68.0%		

Situazioni strategiche numeriche

I livello			II livello		III livello		Totale	
conferma	cede	resiste	cede	resiste	cede	resiste	cede	resiste
106	32	74	14	60	46	60		
100.0%	30.2%	69.8%	18.9%	81.1%	43.4%	56.6%		

Situazioni strategiche geometriche

I livello			II livello		III livello		Totale	
conferma	cede	resiste	cede	resiste	cede	resiste	cede	resiste
36	11	25	9	16	20	16		
100.0%	30.6%	69.4%	36.0%	44.4%	55.6%	44.4%		

Se si pretende un apprendimento veramente robusto – il solo che può portare all'acquisizione della competenza –, occorre riflettere sul fatto che, in questa indagine, le riuscite vanno da un massimo del 68% a un minimo del 44,4%. Sicuramente siamo di fronte a dati preoccupanti se li confrontiamo con le esigenze fissate dai pro-

grammi ufficiali, che insistono sull'acquisizione di competenze di base per tutti (o quasi) gli allievi del settore scolastico obbligatorio (Arrigo, 2002a, 2002b).

A prima vista può stupire che la migliore qualità dell'apprendimento sia stata raggiunta nelle situazioni combinatorie. Ciò può essere dovuto al fatto che gli insegnanti che hanno partecipato alla ricerca mettendo a disposizione le loro classi, da tempo, lavoravano sull'educazione al pensiero combinatorio; hanno dunque fornito allievi già «rodati» in questo particolare ambito. Inoltre, tali situazioni combinatorie sono più accattivanti e non esigono particolari tecniche matematiche.

Percentuali di cedimenti per ordini scolastici

Può essere interessante, nel contesto, distinguere le percentuali di cedimenti relative ai diversi ordini di scuola: elementare (o primaria), media e superiore. Ecco il quadro che ne esce:

Scuola Elementare				Scuola Media			
numero colloqui	cedimenti II liv.	cedimenti III liv.	totale cedimenti	numero colloqui	cedimenti I liv.	cedimenti II liv.	totale cedimenti
63	20	7	27	116	29	19	48
100.0%	31.7%	16.3%	42.9%	100.0%	25.0%	21.8%	41.4%

Scuola Superiore				Totali			
numero colloqui	cedimenti II liv.	cedimenti III liv.	totale cedimenti	numero colloqui	cedimenti I liv.	cedimenti II liv.	totale cedimenti
13	5	3	8	192	54	29	83
100.0%	38.5%	37.5%	61.5%	100.0%	28.1%	21.0%	43.2%

Il numero di studenti delle superiori sottoposti al colloquio è esiguo, quindi il 61,5% di cedimenti va preso con cautela. Inoltre chi ha condotto i colloqui ha notato senza alcun dubbio che buona parte di questi allievi si presenta senza l'entusiasmo osservato negli allievi più giovani, in particolare nei bambini della scuola elementare: mentre questi ultimi sono emozionati e ci tengono a far bella figura (fosse anche solo per far fare bella figura al loro insegnante), i liceali, dal momento che al colloquio l'insegnante non è presente, assumono lo stato d'animo di chi non ha nulla da perdere né da guadagnare; per di più, in generale, gli studenti della scuola di commercio vedono nella matematica unicamente il lato applicativo.

Detto questo, possiamo osservare come la percentuale di cedimenti sul totale si situi attorno al 42-43% nella fascia di età che va dai 6 ai 15 anni: ciò significa che, relativamente ai problemi assegnati, solo il 60% scarso degli studenti che hanno ottenuto un buon risultato nello scritto ha mostrato di avere raggiunto un apprendimento robusto e si candida con buone possibilità al raggiungimento delle relative competenze.

7. Risposte alle domande di ricerca

Alla domanda D1

Come già detto, questa è la domanda di fondo. Considerati i risultati ottenuti si può senza ombra di dubbio affermare che una risposta scritta corretta non è affatto indice di raggiungimento di un livello di competenza. Fra gli allievi che rispon-

dono correttamente a tutte le domande di un test scritto vi è una parte tutt'altro che trascurabile che lo fa senza esserne intimamente convinta. Questi allievi rispondono secondo una consuetudine scolastica, con l'obiettivo principale di soddisfare le attese (apparenti) del loro insegnante. La caratteristica più visibile di questo stato (insoddisfacente, non robusto) dell'apprendimento è la mancanza di sicurezza. A volte basta una banale obiezione per far cambiare la risposta corretta data nel test scritto in una errata (considerata poi corretta).

Alla domanda D2

Lo studente che, di fronte a obiezioni avanzate dal ricercatore (o dall'insegnante o da suoi compagni) si limita a giustificazioni del tipo «è ciò che abbiamo imparato», quasi sempre opta per soluzioni diverse (errate, ma che lui crede corrette). Nemmeno in questi casi si può parlare di raggiungimento di un livello di competenza.

Alle domande D3 e D4

Se uno studente ha raggiunto la robustezza nell'apprendimento di tutte le conoscenze che concorrono al raggiungimento di una competenza, ha sicuramente compiuto un passo decisivo verso l'acquisizione della relativa competenza. Egli ha mostrato di saper difendere le proprie conoscenze anche di fronte a obiezioni (ingannatrici) mossegli da un adulto, mettendoci emotività, passione e razionalità. Se non ha ancora raggiunto ciò che si definisce col termine competenza, non ne è affatto lontano.

9. Ringraziamenti

Da queste righe giungano i ringraziamenti agli insegnanti sperimentatori (citati nel punto 4.) che hanno partecipato attivamente alla costruzione dei test scritti e in parte anche alla conduzione dei colloqui. Grazie a Bruno D'Amore per il sostegno e i preziosi consigli elargiti, a Magda Ramadan per la sua opera di valutazione della qualità dei colloqui, a Viviana Ravasi per l'aiuto prestato nell'effettuazione dei colloqui, ai tre referee che mi hanno dato la possibilità di approfondire determinati aspetti e a Giorgio Mainini che ha rivisto la bozza. Infine, un ringraziamento particolare agli allievi ticinesi e italiani che hanno accettato di sottoporsi ai colloqui – non del tutto tranquilli –, nel corso dei quali hanno messo in luce parecchi aspetti profondi (positivi e negativi) del loro apprendimento, decisivi per la buona riuscita della ricerca.

Bibliografia

Arrigo G. - D'Amore B.

«Lo vedo, ma non ci credo...» *Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale*. Lavoro presentato e accolto al CERME 1 (Conference of the European Society for Research in Mathematics Education), Osnabruck, (D), 1999.

Arrigo G. - D'Amore B.

«Lo vedo, ma non ci credo...», seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La matematica e la sua didattica*. Bologna: Pitagora. 1, 4-57, 2002.

Arrigo G.

Nuovo piano formativo, obiettivi, competenze. *Bollettino dei Docenti di matematica*, n. 44. Bellinzona: UIM-CDC. 51-60, 2002a.

Arrigo G.

Quando si definiscono competenze... *Bollettino dei Docenti di matematica*, n. 45. Bellinzona: UIM-CDC. 49-63, 2002b.

Arrigo G. - Ghisla G.

«Saper fare» e «Saper essere» nella scuola media. Appunti, riflessioni, suggerimenti. Bellinzona: DECS – UIM. 25-62, 2004.

Brousseau, G.

Théorie des situations didactiques. Grenoble: La Pensée sauvage, 1998.

D'Amore B.

Elementi di Didattica della Matematica. Bologna: Pitagora. III ed. 2001, 1999.

D'Amore B.

Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 22A, 3, 1999, 247-276, 1999b.

D'Amore B.

La complessità dell'educazione e della costruzione dei saperi. *Riforma e didattica*. 4, 35-40, 2000.

D'Amore B., Maier H.

Produzioni scritte degli studenti su argomenti di matematica (TEPs) e loro utilizzazione grafica. *La matematica e la sua didattica* n. 2. Bologna: Pitagora, 144-189, 2002.

D'Amore B.

Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica. Bologna: Pitagora, 2003a.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I.

«Competenze»: obiettivo per chi costruisce il proprio sapere. *La matematica e la sua didattica*. 3, 327-338, 2003b.

D'Amore B., Godino D.J., Arrigo G., Fandiño Pinilla M.I.

Competenze in matematica. Bologna: Pitagora, 2003.

D'Amore B. et altri.

Il «senso dell'infinito». *La matematica e la sua didattica*. Bologna: Pitagora. 4, 46-83, 2004.

D'Amore B.

Pratiche e metapratiche nell'attività matematica della classe intesa come società. *La matematica e la sua didattica*. Bologna: Pitagora. 3, 325-336, 2005.

Fandiño Pinilla M.I.

Curricolo e valutazione in matematica in matematica. Bologna: Pitagora, 2002.

Rogiers X.

Une pédagogie de l'intégration. Bruxelles: De Boeck Université, 2000.

Telleschi, R. Torre, G. (a cura di)

Il primo colloquio con l'adolescente. Milano: Raffaello Cortina, 1997.

Winnicott D.W.

La famiglia e lo sviluppo dell'individuo. Tr. It. (1968). Roma: Armando, 1965.

Appendice: rapporto della psicopedagoga

L'osservazione dei colloqui è stata effettuata su un campione composto da allievi di prima media e da studenti iscritti al primo anno dell'Istituto cantonale di commercio di Bellinzona; l'età dei ragazzi coinvolti si situa tra gli 11/12 anni nel caso degli allievi di scuola media e tra i 15/16 anni nel caso degli studenti di scuola media superiore.

Ci muoviamo quindi nel campo della preadolescenza e dell'adolescenza.

Per analizzare l'affidabilità, il contesto, le modalità e le condizioni nelle quali si sono svolti i colloqui, è necessario fare alcune riflessioni sugli aspetti peculiari e sulle dinamiche che caratterizzano un colloquio, un incontro tra un adulto e un adolescente (Telleschi-Torre, 1997).

Come già faceva notare Winnicott (1965), l'adulto fatica a comprendere gli adolescenti a causa delle loro specifiche caratteristiche evolutive, mentre dalla prospettiva dell'adolescente si evidenzia quanto egli fatichi a comunicare con l'adulto a livello verbale, anche nel quotidiano, quasi che non vi sia da parte sua l'abitudine a questo tipo di relazione.

Il ragazzo che incontra un adulto si confronta con il suo sistema di valori, con la sua storia personale, con la sua strumentazione culturale ed esperienziale; l'adolescente, in continua oscillazione tra l'essere bambino e l'essere adulto, tra l'essere parte del mondo dei coetanei e l'essere isolato nella propria onnipotenza, fatica ad esporsi, agendo le proprie emozioni soprattutto a livello non verbale e motorio, mentre l'adulto nella relazione con il ragazzo è capace, grazie alla propria consapevolezza, di filtrare il proprio mondo interno attraverso la capacità di riflettere su di sé.

È l'adulto quindi che deve aiutare il giovane a entrare in confidenza con aspetti sconosciuti di sé, deve «accoglierlo» e, nel caso del processo di apprendimento, sostenerlo a livello affettivo.

Contesto dell'osservazione

I colloqui sulla robustezza degli apprendimenti che sono stati oggetto di osservazione da parte nostra, sono stati condotti, come già descritto precedentemente, da un ricercatore, esterno alla classe e all'istituto scolastico, sempre con un singolo allievo.

Il ricercatore che svolgeva il colloquio era quindi una persona non conosciuta, mai incontrata prima.

L'informazione data ai ragazzi prima del colloquio è stata fornita da un adulto di riferimento, il proprio insegnante di matematica, che invitava gli allievi ad andare a discutere di alcuni problemi svolti, durante le lezioni, nei mesi precedenti.

I colloqui osservati hanno avuto luogo al di fuori della classe dell'allievo, di solito in un'altro locale della scuola, e la loro durata si situava tra i 20 e i 30 minuti.

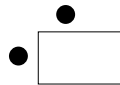
Osservazione

Scopo dell'osservazione era di valutare l'affidabilità dei colloqui; era quindi necessario verificare se esistessero le condizioni migliori perché l'apprendimento, il processo cognitivo, potesse avere luogo. Tali condizioni dipendono in larga misura dal come il ricercatore si pone durante il colloquio e da quali modalità utilizza al fine di mettere a proprio agio il ragazzo, sostenendone a livello affettivo i processi mentali.

Ricercatore e psicopedagogo non hanno volutamente discusso precedentemente i criteri dell'osservazione al fine di non influenzarsi reciprocamente; quest'ultima ha quindi privilegiato una modalità qualitativa e globale, riservandosi in un secondo tempo una rilettura critica di quanto osservato.

L'osservazione si è quindi focalizzata soprattutto sul ricercatore ed ha permesso di rilevare e analizzare i seguenti aspetti:

- *L'entrata in materia*: la fase iniziale prevedeva, con gli allievi di prima media, l'invito del ricercatore di scegliere, come oggetto di discussione, il problema che era maggiormente piaciuto all'allievo intervistato. Questa modalità ha permesso di rassicurare il ragazzo e di creare un clima di lavoro disteso.
- La *prossemica* scelta per il colloquio, sia nel caso della scuola media, che in quello della scuola media superiore, vedeva il ricercatore e l'allievo seduti di sbieco; questa tipologia di spazio interpersonale ha permesso il contatto visivo e ha trasmesso un senso di vicinanza affettiva e di cooperazione.



- Il *linguaggio corporeo* del ricercatore (molti sorrisi, la postura protesa verso il ragazzo,...) e le modalità di comunicazione verbale (incoraggiamento, richiesta dell'opinione del ragazzo,...) hanno svolto una importante funzione di sostegno affettivo nella fase di apprendimento.
- Sul *piano cognitivo* il ricercatore ha chiesto all'allievo di fare delle ipotesi iniziali, ha valorizzato l'uso del linguaggio matematico, ha invitato il ragazzo a cercare piste alternative, creando adeguate condizioni per l'apprendimento anche quando veniva richiesta al ragazzo una notevole capacità di astrazione.
- La *lode* ha rappresentato un altro ruolo importante durante il colloquio e il ricercatore l'ha utilizzata in modo adeguato, permettendo all'allievo, anche nei momenti nei quali l'emozione rischiava di rappresentare un ostacolo all'apprendimento, di superare il momento critico.
- Al termine del colloquio il ricercatore ha, alcune volte, chiesto un *feedback* sul come l'allievo si fosse sentito durante l'incontro: le risposte, evidentemente soggettive, sembrano confermare l'ipotesi che l'elemento destabilizzante fosse scarsamente influenzato dalle condizioni in cui si svolgeva il colloquio, ma che dipendesse soprattutto dalla difficoltà cognitiva incontrata dal ragazzo nell'affrontare il problema.

Conclusioni

Sulle reazioni degli allievi si è già detto precedentemente ed anche l'osservazione da parte della psicopedagogo non può che confermare l'analisi approfondita fatta dal ricercatore.

Dall'osservazione degli allievi emerge soprattutto quanto la differenza di età tra quelli di prima media e quelli di prima superiore si manifesti con una minore «freschezza» e una maggiore rassegnazione dei maggiori, come se il percorso scolasti-

co più lungo abbia influenzato la dimensione del piacere allo studio. Le risposte degli studenti di scuola media superiore erano infatti, in alcuni casi, più titubanti; i ragazzi dichiaravano di essere in difficoltà e faticavano, nonostante gli incoraggiamenti verbali e posturali del ricercatore, a proseguire nella risoluzione dei problemi.

Un altro aspetto rilevato è che, in generale, col crescere della difficoltà cognitiva degli stimoli, aumenta l'insicurezza degli allievi e le risposte divengono più approssimative ed incerte.

Il campione di colloqui osservati ha permesso quindi una valutazione positiva circa la loro affidabilità. Il ricercatore ha infatti utilizzato in modo adeguato tutti gli strumenti a sua disposizione per creare condizioni di apprendimento più adeguate possibili.

2. Un teorema geniale e divertente anche per la scuola elementare

Lorella Maurizi¹

Ho proposto ai bambini di una classe quinta della scuola primaria il teorema di Pick² perché volevo che sperimentassero un metodo facile e «manipolabile» per calcolare l'area delle figure piane.

È vero che per quanto riguarda quadrilateri e triangoli abbiamo giocato molto (nel senso più serio che si può dare a questo termine) con cartoncini, forbici, cannuce e altro materiale, ma per le figure «strane» cioè non regolari non è così semplice; il ricorrere alla scomposizione (sia reale col ritaglio, che iconico attraverso il disegno) riporta comunque sempre all'area di figure geometriche conosciute. Mi piaceva poter proporre un metodo che non avesse bisogno della conoscenza delle formule per il calcolo dell'area di altre figure e che potesse essere «scoperto» da loro, magari in gruppo.

Il pretesto nasce un pomeriggio durante un'attività con l'uso del geopiano. Volevo che i bambini verificassero concretamente quanti triangoli con la stessa base e la stessa altezza potevano costruire con gli elastici, quali caratteristiche avevano e perché erano tutti equiestesi. Terminata l'attività, li ho lasciati liberi di giocare col geopiano.

Giocare con il geopiano e gli elastici piace molto ai bambini: appena consegnato loro le tavolette di plastica si scatenano a costruire figure a volte semplici, a volte anche molto complesse.

Mentre guardo queste costruzioni chiedo loro di scegliere solo una figura, quella che ritengono la migliore e di farla poi vedere a tutti.

Costruiscono figure del tipo di quelle rappresentate in figura 1.

1. Scuola Primaria M. Peron, Verbania.

2. Georg Alexander Pick (Vienna, 1859 - ivi, 1942) matematico austriaco. Si veda anche l'articolo di Cavalli F., *Variazioni su una formula*, BDM 51, dicembre 2005.

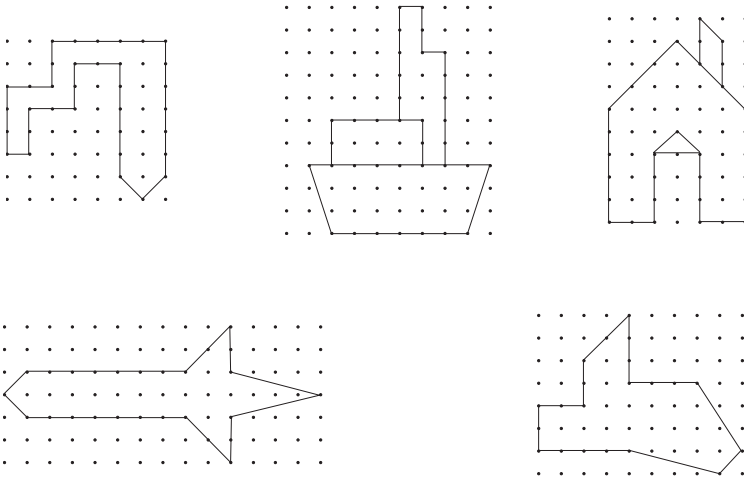


Figura 1 Disegni liberi sul geopiano. Gli allievi in un secondo tempo hanno ripassato con un colore solo il contorno esterno.

Ora chiedo loro di trovare l'area della figura costruita.

I bambini, senza troppo scomporsi, iniziano a contare i quadratini interi contenuti nella figura e ad approssimare il conteggio per quelli non interi. Dopo un po' sono in grado di dare una misura approssimata dell'area della loro figura (che a volte è davvero piuttosto articolata) usando come unità di misura il quadratino del geopiano.

Chiedo poi di scegliere una figura più semplice, di costruirla e di calcolare l'area. Qui le cose si fanno più facili

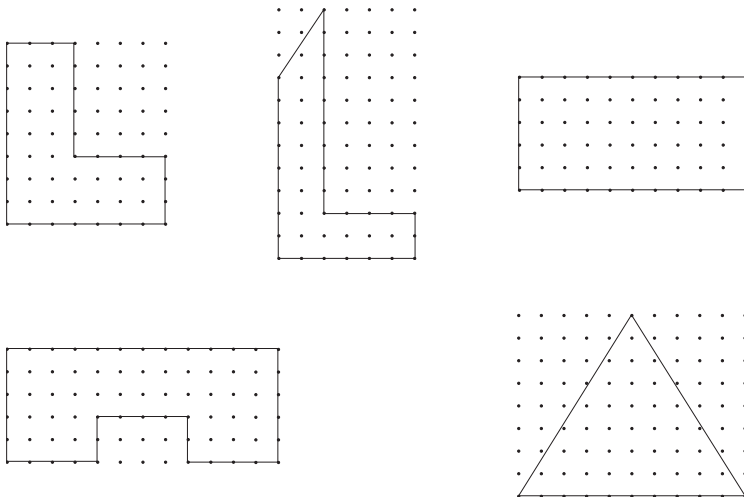


Figura 2 Disegni più semplici per ricercare.

Domando ai bambini se, secondo loro, c'è una strategia per calcolare l'area di una qualsiasi figura costruita sul geopiano. Qui gli allievi sono un po' sconcertati.

Suggerisco, perciò, di provare a costruire e calcolare l'area di figure conosciute, per esempio rettangoli o quadrati.

Il lavoro richiede tempo per il confronto e la discussione; dopo circa una mezz'oretta piuttosto animata (i bambini si alzano e confrontano la loro tavoletta con quella dei compagni e scrivono numeri su foglietti o direttamente sul banco, parlano molto) finalmente Matteo nota che ci dev'essere una relazione fra i «chiodini» e l'area e Pietro aggiunge che ci deve essere una relazione anche fra il contorno e l'area.

Ma quale?

Propongo a tutti di costruire un rettangolo, trovare l'area in quadretti e di verificare se c'è una relazione con i «chiodini» del contorno e i «chiodini» dell'interno.

Ma ancora non ce la fanno.

Proviamo ad invertire il procedimento.

Propongo di costruire un rettangolo di area 12 e di contare quanti chiodini ci sono sul contorno e quanti chiodini ci sono all'interno.

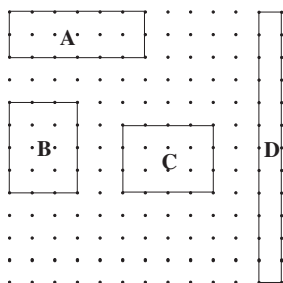


Figura 3.

Ora inseriamo i dati in una tabella del tipo

Figura	N° chiodini sul contorno	N° chiodini all'interno	Area della figura
A	16	5	12
B	14	6	12
C	14	6	12
D	26	0	12

Tabella 1

Proviamo a vedere se c'è una relazione fra i numeri, in modo che quelli contenuti nelle colonne due e tre generino, opportunamente combinati, il 12.

Non è facile.

Proviamo ancora con un altro rettangolo di area 24.

Usiamo lo stesso percorso: costruzione e registrazione in tabella.

E se viene richiesta un'area con unità di misura di lunghezza in centimetri o millimetri?

Risponde Mariele: «basta misurare il lato del quadretto di riferimento, cioè se è il quaderno può essere 0,5 cm oppure 0,4 cm, se è la carta centimetrata sarà di 1cm, e moltiplicare l'area trovata col teorema di Pick per l'unità di misura³».

Propongo ancora qualche esercizio di confronto di area da risolvere col teorema di Pick.

Sono contenta perché l'attività è molto piaciuta. È la prima volta in 25 anni di insegnamento della matematica nella scuola primaria che mi viene in mente di proporre Pick. Di solito a scuola non si fa per mancanza di tempo o forse perché non ritenuto immediatamente utilizzabile nella risoluzione di esercizi tradizionali. Consiglio i colleghi di proporlo in classe perché consente di giocare con la geometria e permette ai bambini di effettuare collegamenti e manipolazioni che li portano a nuove scoperte. Lo scopo non è tanto quello di trovare un altro sistema per calcolare l'area di figure poligonali, ma di ragionare in ambito geometrico, mettendosi nei panni di un matematico che cerca nuove strade da percorrere.

Foto ricordo



Al lavoro sul geopiano

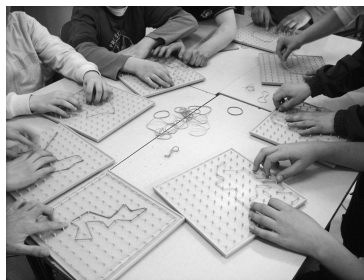
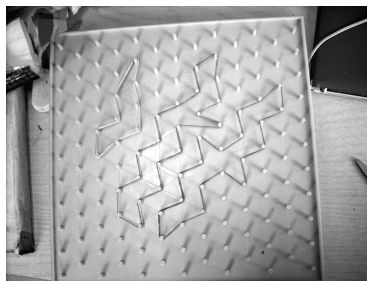


Figure libere: la fantasia non manca...



La chiave: figure senza punti interni



Tutti contenti: Pick è conquistato

3. Mariele intuisce la trasformazione omotetica di rapporto r , ma non sa che l'area andrebbe moltiplicata per r^2 .

1. Problemi di massimo e minimo

Antonio Steiner e Gianfranco Arrigo

1. Il problema dei Regiomontani

È uno dei più antichi problemi di massimo e minimo tramandati dalla storia. Ecco l'enunciato:

«A una parete è appeso un quadro; da quale distanza x lo si può ammirare sotto il massimo angolo di visuale?»

Ci aiutiamo con la figura 1.

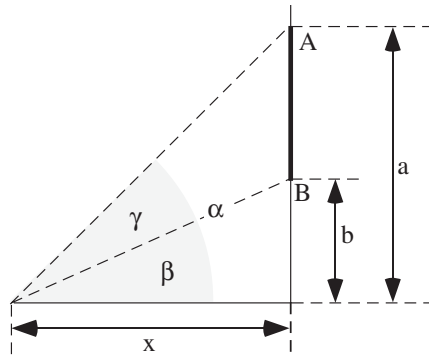


Figura 1 Angolo massimo di visuale.

Ricaviamo le seguenti uguaglianze:

$$\tan \alpha = \frac{a}{x} \quad , \quad \tan \beta = \frac{b}{x}$$

$$\tan \gamma = \tan (\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

quindi

$$f(x) = \tan \gamma = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\frac{a}{x} - \frac{b}{x}}{1 + \frac{a}{x} \frac{b}{x}} = \frac{(a-b)x}{x^2 + ab}$$

Si tratta ora di trovare per quale valore di x si ha un massimo di $f(x)$:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{(a-b)(x^2 + ab) - 2x^2(a-b)}{(x^2 + ab)^2}$$

L'equazione

$$\frac{df(x)}{dx} = 0$$

ha la soluzione

$$x = \sqrt{ab}$$

Questo risultato si può ottenere anche senza ricorrere al calcolo della derivata; vediamo come, aiutandoci con la figura 2.

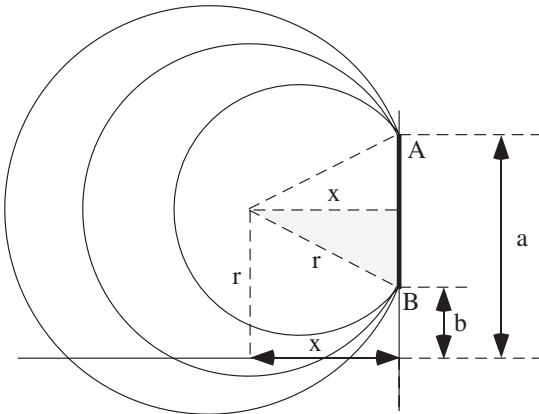


Figura 2 Linee di livello tangenti.

Ne risulta l'equazione

$$x^2 + \frac{(a-b)^2}{4} = \left(b + \frac{a-b}{2}\right)^2$$

che ha la soluzione

$$x = \sqrt{ab}$$

2. Il problema del bagnino

Il nostro bagnino (vedere la figura 3) si trova in A e vede in B un nuotatore in difficoltà che chiede aiuto. Sulla sabbia il bagnino può correre a una velocità $v_1=4$ km/h, mentre in acqua sa nuotare a una velocità di $v_2=3$ km/h. In quale punto P deve tuffarsi in acqua se vuol raggiungere B nel minor tempo possibile?

Ci aiutiamo con la figura 3.

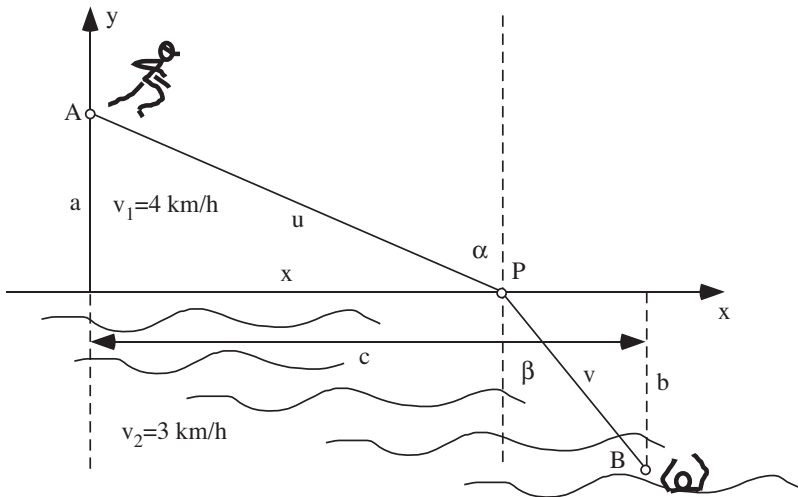


Figura 3 Il salvataggio.

Si deducono le seguenti uguaglianze:

$$a = u \cos \alpha \quad , \quad b = v \cos \beta \quad , \quad \tan \alpha = \frac{x}{a} \quad , \quad \tan \beta = \frac{c-x}{b}$$

Inoltre, osservando la figura 4, si ha

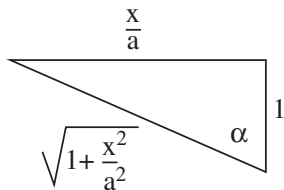


Figura 4 Particolare per il calcolo.

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}} \quad , \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(c-x)^2}{b^2}}}$$

$$t(x) = t_1 + t_2 = \frac{a}{v_1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} + \frac{b}{v_2} \sqrt{1 + \frac{(c-x)^2}{b^2}}$$

Cerchiamo ora il valore di x che rende minima la funzione $t(x)$:

$$\frac{dt(x)}{dx} = \frac{1}{v_1} \frac{x}{a \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}} - \frac{1}{v_2} \frac{b-x}{b \sqrt{1 + \frac{(c-x)^2}{b^2}}} = 0$$

Cioè

$$\frac{\sin \alpha}{v_1} = \frac{\sin \beta}{v_2}$$

Raggiungiamo quindi la legge di rifrazione, solitamente espressa nella forma

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}$$

oppure ancora

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}, \text{ con angolo di incidenza e angolo di rifrazione.}$$

Il percorso, in questo caso della luce, è facilmente costruibile come mostrato nella figura 5.

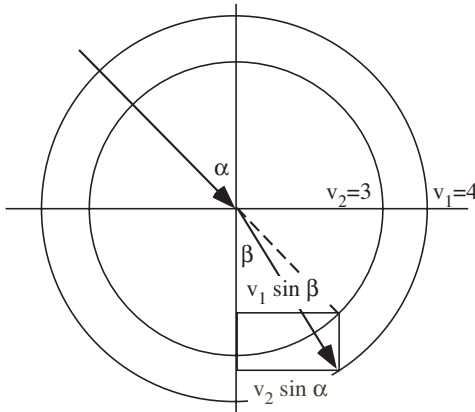


Figura 5 Legge di rifrazione.

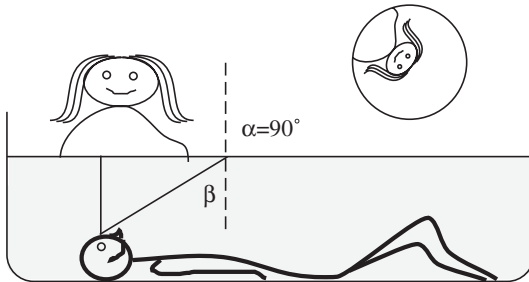


Figura 6 β è l'angolo limite della riflessione totale.

3. I barili di Kepler

Johannes Kepler (italianizzato: Keplero) (1571-1630) si recò in Stiria per acquistare un barile di vino. Si accorse che i vinai locali per determinare la capacità di un barile infilavano nell'apertura superiore una stanga graduata fino a toccare il fondo. Ovviamente questo modo di fare attirò subito la sua attenzione e il risultato fu uno splendido libro sul volume dei corpi di rotazione. La Scuola Politecnica Federale di Zurigo custodisce questa preziosa opera, che Antonio Steiner ha potuto personalmente visionare per concessione del direttore di quella biblioteca, in una stanza chiusa, senza purtroppo poter fare delle fotocopie. Veniamo ora per grandi linee al problema in questione. Supponiamo che il barile sia cilindrico, come rappresentato nella figura 7.

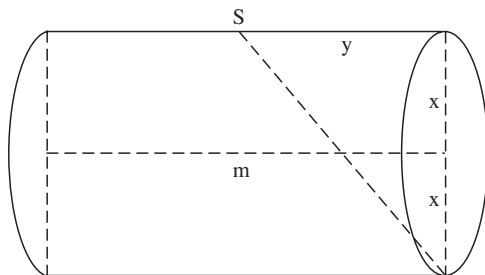


Figura 7 Il barile di vino di Kepler.

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = m^2 \\ V = 2\pi x^2 y = \max. \end{cases}$$

Fissata la lunghezza m , come si devono scegliere il raggio x e la semialtezza y del barile affinché il volume sia massimo? Qual è questo volume?

$$x^2 = \frac{1}{4}(m^2 - y^2) \quad , \quad V = \frac{\pi}{2} y(m^2 - y^2) = \max. \quad , \quad m^2 - 3y^2 = 0$$

$$x = \frac{m\sqrt{6}}{6} \quad , \quad y = \frac{m\sqrt{3}}{3} \quad , \quad V_{\max.} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9} m^3$$

Per $m = 5,49$ dm, si ha $V = 100$ L. Come mostra la figura 8, si tratta di un massimo molto piatto.

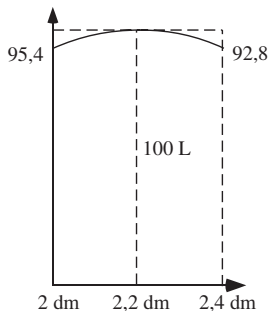


Figura 8 Massimo piatto.

4. Veleggiare correttamente

La navigazione a vela pone un problema interessante. Dato un determinato flusso di vento (rappresentato con un vettore) \vec{w} bisogna posizionare la vela in modo che l'imbarcazione, seguendo la sua rotta, riceva la massima spinta.

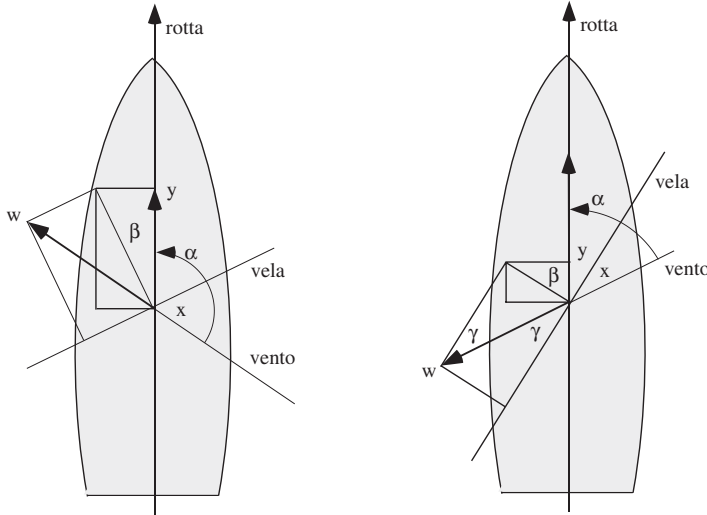


Figura 9 Veleggiare in favore e contro il vento.

Dalla figura 9 deduciamo la componente perpendicolare alla vela di modulo $(w \sin x)$ forma con la direzione della rotta l'angolo¹

$$\beta = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - x) = 90^\circ - \alpha + x$$

e perciò

$$y = w \sin x \cos \beta = w \sin x (\sin \alpha \cos x - \cos \alpha \sin x)$$

quindi y è massimo quando lo è

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin \alpha \sin 2x - \cos \alpha \sin^2 x$$

e quindi per x tale che

$$\sin \alpha \cos 2x - \cos \alpha \sin 2x = 0$$

cioè

$$x = \frac{\alpha}{2}$$

In parole: per navigare al massimo, bisogna sempre orientare le vele nella direzione della bisettrice dell'angolo α determinato dalla direzione del vento e dalla rotta: una vecchia regola della navigazione.

1. Col simbolo w indichiamo il modulo del vettore \vec{w} .

1. Proposte di laboratorio di geometria piana per la scuola media

Claudio Beretta

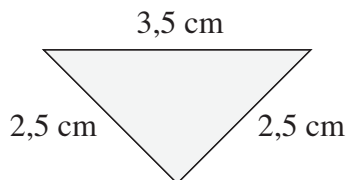
Proposta 1 (Terza media)

Lo scopo

È di approfondire alcuni concetti e di ragionare su qualche competenza geometrica elementare, concernente le figure piane, in relazione anche ai problemi del calcolo metrico. La propagazione dell'errore assoluto. Trasformazioni che conservano l'area.

Consegna

Secondo voi questo triangolo isoscele è rettangolo?

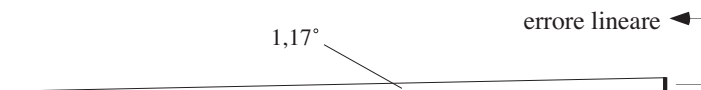


Nel caso di una risposta negativa:

- Qual è l'entità dell'errore relativo all'ipotenusa?
Consiglio: calcola la misura dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele di cateti 2,5 cm e confrontala con quella data nel disegno.
- L'angolo che avrebbe dovuto essere retto supera o no l'ampiezza di 90 gradi? Di quanti gradi?
Consiglio: aiutati con un disegno preciso e misura l'ampiezza corretta dell'angolo maggiore del triangolo.

Possibile riflessione

Ti diciamo che l'errore relativo all'angolo maggiore del triangolo è $1,17^\circ$.



Un errore assoluto di $\alpha = 1,17^\circ$, su una distanza di 1000 m porterebbe a una differenza lineare di poco più di 20 m, mentre a una distanza astronomica, per esempio quella fra la Terra e la Luna di circa 384'400 km, porterebbe a un errore di oltre 7850 km; considerato che il diametro della Luna è circa 3476 km, ci si può rendere conto dell'enormità di questo errore.

Proposta 2 (Quarta media)

Lo scopo

Risistemare il concetto di area, e di trasformazione che conserva l'area.

Consegna 2.1

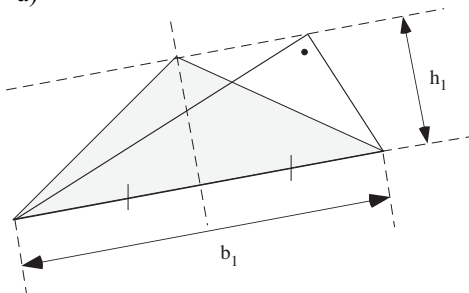
Dato il triangolo rettangolo $T_1 = ABC$ di ipotenusa b_1 ed altezza relativa h_1 , trasformalo in un triangolo isoscele equiesteso T_2 .

Introduciamo dapprima la seguente condizione: esattamente uno dei tre lati è mantenuto.

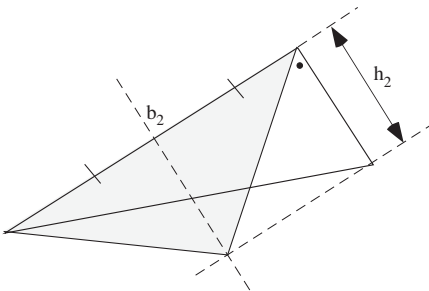
Quante soluzioni esistono?

Risposta: a meno di un'isometria, ce ne sono tre, come mostra la figura seguente.

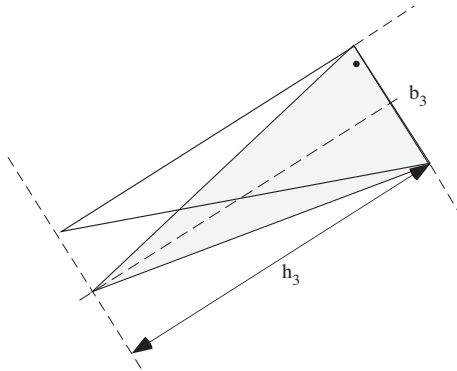
a)



b)



c)



Possibile riflessione: e se si facesse cadere la condizione di mantenere fisso uno dei tre lati?

Risposta: c'è un'infinità di soluzioni. Se $T_{x,y}$ è uno dei triangoli soluzione e (x,y) una sua coppia (base, altezza), basta che sia

$$x \cdot y = b_1 \cdot h_1$$

e che i lati isometrici abbiano misura $\sqrt{y^2 + \frac{x^2}{4}}$.

Consegna 2.2

Dato il triangolo rettangolo $T_1=ABC$ di ipotenusa b_1 ed altezza relativa h_1 , trasformalo in un triangolo equilatero equiesteso T_2 .

Risposta: qui esiste una sola soluzione. Se b è il lato del triangolo equilatero equiesteso T_2 , dev'essere

$$\frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{b_1 \cdot h_1}{2}$$

Gli allievi di quarta media sanno risolvere questa equazione e ricavare un valore approssimato della soluzione. La costruzione con riga e compasso è fuori dalla loro portata. La lasciamo come compito agli appassionati della geometria del compasso.

Quiz numero 39: il rettangolo a pezzetti

Aldo Frapolli

Ciao Archie!

In forma? Stavolta facciamo un giochino con un foglio di carta rettangolare, ad esempio un normale foglio A4. Immagina di tracciare un segmento con gli estremi sul perimetro del rettangolo: il foglio viene così suddiviso, al massimo, in 2 poligoni.

Se poi tracci un secondo segmento dello stesso tipo, il foglio sarà suddiviso, sempre al massimo, in 4 poligoni.

Come vedi nella figura, io con 5 segmenti sono riuscito a suddividere il foglio in 14 poligoni.

Secondo te qual è il numero massimo di poligoni in cui avrei potuto suddividere il foglio tracciando 5 segmenti?



Ma la mia domanda, caro Archie, è più intrigante:

Voglio suddividere il foglio in esattamente 50 pezzetti poligonali.

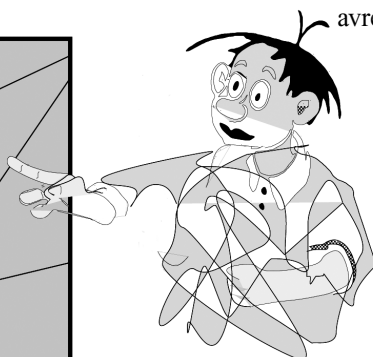
Qual è il numero minimo di segmenti necessari?

Vediamo un po' ...

... questi sono davvero 14.

Però, almeno 15 sarebbe possibile, siccome con questo segmento

avresti potuto avere un poligono in più.



E se non sbaglio, potrebbero essere addirittura 16.

Magari anche 17?

Qui la cosa si complica, ... e m'incuriosisce.

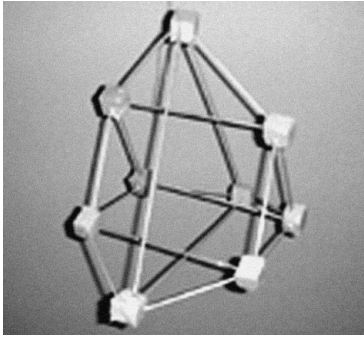
Se la cosa incuriosisce anche voi ... allora al lavoro!

Quanti segmenti «perimetrali» sono necessari, al minimo, per suddividere un foglio A4 in esattamente 50 pezzetti di forma poligonale?

Attendiamo il vostro foglio A4 con disegnata la soluzione, possibilmente accompagnata dalle spiegazioni del ragionamento fatto e da qualche considerazione sul tema.

Come sempre vi è un bel libro ad attendere la soluzione più originale.

Soluzione del Quiz numero 38



Il poliedro ribelle ha suscitato curiosità, ha fatto discutere, ha spinto molti lettori a scriverci per chiedere se non vi fosse un qualche errore oppure per affermare che alle condizioni descritte il poliedro non esiste.

Di esso non abbiamo ricevuto né modellini concreti, né foto, né descrizioni verbali, come se davvero non esistesse.

Invece esiste, eccome! Dunque il premio per questa volta non viene assegnato.

Il modellino scheletrato del solido proposto nel Quiz, visibile nella fotografia accanto, è stato costruito per davvero. Non è la prova dell'esistenza del solido ma di certo costituisce un valido punto di partenza per individuare l'eventuale struttura della superficie che lo delimita e provarne quindi l'esistenza.

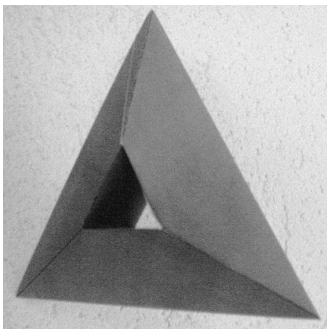
A destra vi proponiamo un possibile sviluppo della sua superficie e più sotto una foto del solido realizzato: ha 9 vertici, 18 spigoli e 9 facce, quest'ultime tutte a forma di quadrilatero.

Ma come? La formula di Eulero implicherebbe 11 facce! Vero per tutti i poliedri convessi ma non per tutti quelli non convessi.

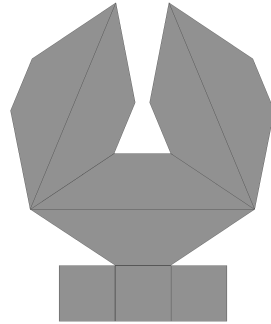
È proprio per far riflettere su questo aspetto che abbiamo proposto il Quiz. Ammettendo, ad esempio, la non convessità generata dalla presenza di fori, succedono cose strane, come dimostrato dal matematico francese H. Poincaré che ha generalizzato la formula di Eulero nel caso di poliedri di tal genere. Essa afferma che:

$$N(\text{vertici}) - N(\text{spigoli}) + N(\text{facce}) = 2 - 2N(\text{fori})$$

In effetti il solido proposto presenta un foro e quindi i conti non tornano. A causa del registro di rappresentazione scelto per il solido del Quiz (modellino scheletrato) tale foro



è poco evidente, tuttavia esiste, ed è delimitato da 3 facce rettangolari. L'indicazione della presenza nel poliedro di tali facce rettangolari avrebbe dovuto suggerire la presenza del foro, presenza che sarebbe dovuta diventare evidente per coloro che si fossero messi a costruirlo veramente, scontrandosi con l'ostacolo generato da quei tre «stecchini-spigoli» (ortogonali ad altri 9) visibili nella foto, che sembrano interni al solido ma che in realtà non lo sono.



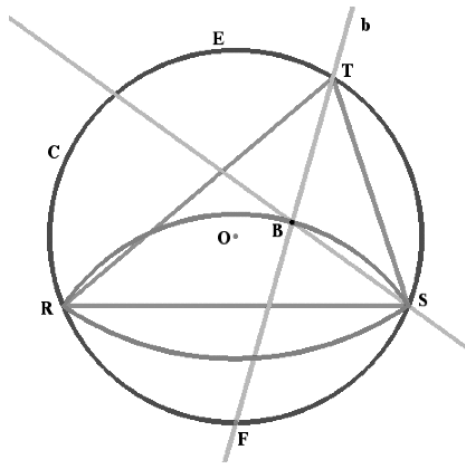
Dal punto di vista didattico, la situazione centrale del Quiz si presta per alcuni possibili rilanci, come ad esempio:

- occuparsi degli aspetti metrici del solido in qualche caso particolare, sia chiedendo di realizzare concretamente il modellino attraverso il suo sviluppo (affrontando quindi indirettamente anche il problema dell'area totale), sia ponendo la richiesta del volume; il caso particolare in cui le facce rettangolari sono dei quadrati (vedi lo sviluppo proposto sopra) è proponibile anche nella scuola media, mentre in generale è proponibile ad allievi di prima liceo, quando conoscono un minimo di trigonometria del triangolo rettangolo;
- andare alla ricerca della struttura di tutti i possibili solidi «euleriani» con 9 vertici, 18 spigoli e 11 facce, come suggerito da Emanuele Delucchi, che ringraziamo per il suo stimolante intervento inviatoci sul tema.

2. P-bam numero 3

Giorgio Mainini

Teorema



Ipotesi

Siano

RST un triangolo inscritto nella circonferenza C di centro O

B l'incentro di RST

F il punto di intersezione della bisettrice dell'angolo in T con C quando T è «a nord» del lato RS

E il punto di intersezione della bisettrice dell'angolo in T con C quando T è «a sud» del lato RS

Tesi

Il luogo di B quando T percorre la circonferenza C è l'unione dei due archi di circonferenza di estremi R e S e di centro rispettivamente F ed E .

Lemma 1

Il punto F è fisso

Difatti:

l'angolo RTF, essendo la metà dell'angolo RTS, è costante: quindi è costante l'arco su cui insiste. Poiché R non muta, anche F non muta.

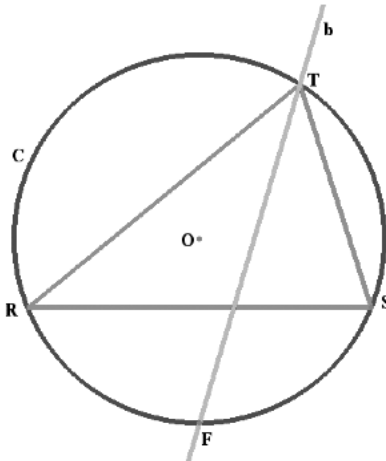
Analogamente per il punto E.

Lemma 2

F appartiene all'asse di RS

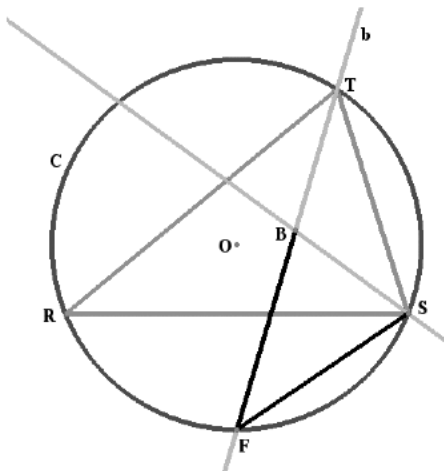
Difatti:

gli angoli RTF e STF sono uguali, essendo TF=b la bisettrice dell'angolo in T. Sono quindi uguali gli archi su cui insistono e dunque sono uguali i segmenti RF e SF.



Analogamente per il punto E.

Dimostrazione del teorema



Si tratta di dimostrare che i segmenti FB e FS sono congruenti.
 Per questo scopo dimostro che FBS è un triangolo isoscele, perché gli angoli FBS e FSB sono congruenti.

Infatti si osservi che

$\angle RTF = \angle RSF$ perché insistono sullo stesso arco RF

$\angle RTF = \angle FTS$ perché TF = b è la bisettrice dell'angolo in T, per ipotesi

$\angle BST = \angle BSR$ perché SB è la bisettrice di $\angle TSB$, per ipotesi

quindi $\angle FTS = \angle RSF$

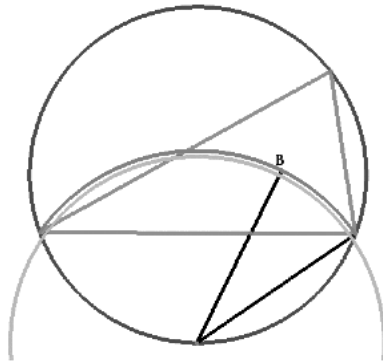
Segue

$\angle FBS = \angle FTS + \angle BST$ perché angolo esterno al triangolo TSB

$\angle FBS = \angle RSF + \angle BSR = \angle FSB$ c.v.d.

Allo stesso modo si procede quando T è «a sud» del lato RS.

Dimostrazione à la Cabri



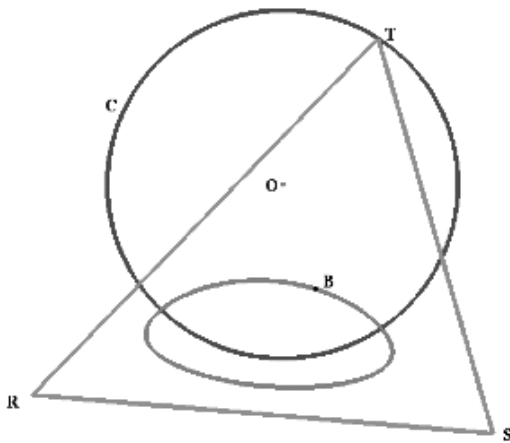
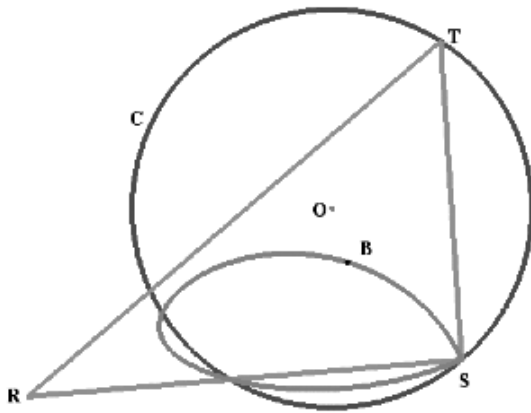
Dove l'arco grigio chiaro è tracciato un po' troppo piccolo per lasciar vedere il luogo.

P-bam

Se uno o due vertici del triangolo non appartengono alla circonferenza, la faccenda si fa spessa...

Quali sono i luoghi, nei due casi?

Le figure che seguono sono esempi particolari dei luoghi in questione.



1. Su alcune proprietà dei fasci di parabole

Daniele Sorini¹

In this article some properties about the curves described by vertexes of sheaves of parabolas are studied. Perhaps the most interesting result is in the case of sheaves of tangent parabolas seen that two proofs are given: the first based on the methods of coordinate geometry, the second on plane Euclidean geometry. At the end of the article some further applications of the theorems with *Derive for Windows* are described.

Presentazione dell'insegnante

Il lavoro di seguito presentato è frutto di alcune riflessioni e intuizioni di Daniele Sorini, uno studente di terza del corso sperimentale PNI² del Liceo Scientifico Statale Galileo Galilei di Trieste.

Come credo molti sanno il programma di matematica della terza liceo scientifico, sia tradizionale che sperimentale, è incentrato nella prima parte dell'anno sullo studio della geometria analitica cartesiana. Si studiano dettagliatamente le coniche e in particolare la circonferenza e la parabola viste le loro svariate applicazioni anche alla risoluzione di problemi algebrici e fisici.

In particolare, soprattutto nelle classi in cui si riesce ad affrontare un programma forte, come ad esempio nelle classi sperimentali, si cerca da un lato di approfondire le proprietà geometriche delle coniche (ad esempio le proprietà focali della parabola e dell'ellisse) e da un altro lato di affrontare abbastanza dettagliatamente lo studio dei fasci di circonferenze e parabole.

Nello svolgere il programma di geometria analitica si tenta sempre di non dimenticare i metodi della geometria sintetica per non creare fratture o dicotomie nello studio della matematica tra biennio e triennio e per tentare di dare una visione unitaria ed evolutiva, della disciplina. Si cerca inoltre di scoprire proprietà generali da dimostrare con entrambi i metodi, sia quello geometrico che quello analitico in modo da preparare gli studenti alla successiva evoluzione tra geometria analitica e analisi matematica. Proprio a questa idea evolutiva, nel rispetto dell'unità del sapere matematico, si è ispirato del resto pure il progetto «Lauree scientifiche» del nostro liceo che riguardava proprio la nascita del calcolo differenziale ed integrale a partire dagli studi geometrici dei matematici seguenti a Galileo, in particolare Torricelli.

1. Allievo della classe 3^a A, anno scolastico 2005/2006, del Liceo Scientifico Galileo Galilei di Trieste. Insegnante mentore: prof. Stefano Ravasi.
2. Piano nazionale informatica.

La classe terza in cui è iscritto Daniele si è sempre dimostrata una classe vivace intellettualmente e molto curiosa. Raramente in questa classe passano messaggi «dogmatici» senza una spiegazione accurata o una dimostrazione e alla fine della lezione (ma anche durante) spesso sono chiamato a rispondere a parecchie domande di chiarimenti su quanto abbiamo fatto ma anche a domande che chiedono di andare oltre a quello che abbiamo trattato.

Le ore dedicate alle esercitazioni sono abbastanza stimolanti anche quando si è costretti a svolgere, per consolidamento, esercizi di tipo ripetitivo abbastanza simili tra loro. In tali occasione viene infatti spesso fuori qualcosa di nuovo, di originale, ovviamente nei limiti di argomenti che sono piuttosto standard e già studiati molto accuratamente.

Con questa classe avevamo trattato accuratamente i fasci di circonferenze e in particolare avevamo studiato il luogo dei centri dimostrando che si tratta di una retta perpendicolare all'asse radicale del fascio conducendo la dimostrazione soprattutto dal punto di vista analitico.

Durante le ore di esercitazioni relative alla parabola e ai fasci di parabole, provando con parecchi fasci diversi, avevamo «scoperto» che, al contrario dei centri delle circonferenze, i vertici delle parabole dei fasci non presentavano particolari curve come loro luogo. Nonostante la semplicità della costruzione del fascio, il luogo dei vertici poteva essere una parabola, una retta o anche una curva diversa come risultava dal metodo di eliminazione del parametro.

Sinceramente non mi ero mai posto esplicitamente il problema di collegare il tipo di fascio alle caratteristiche del luogo geometrico dei suoi vertici e non avevo prestato attenzione ai casi particolari che via via si presentavano.

Durante una di queste ore di esercizi, Daniele mi chiese se fosse vero che, nel caso di un fascio di parabole tangenti, il luogo dei vertici fosse sempre una retta. Gli risposi che non sapevo se fosse vero o no, anche se dai numerosi esempi che avevamo svolto la proprietà era in effetti verificata. Dopo una veloce discussione sul fatto che ovviamente questo non dimostrava nulla, abbiamo convenuto però nel dire che la coincidenza sembrava sospetta e ho chiesto a Daniele di pensarci un po' su.

Da quel momento Daniele, con notevole costanza ed interesse, si dedicava a questo problema affrontandolo dal punto di vista analitico e giungendo rapidamente alla dimostrazione che viene di seguito presentata per prima.

A questo punto, in coerenza con quanto dichiarato prima, invitavo lo studente a formulare anche una dimostrazione geometrico-sintetica di quanto aveva già provato per via analitica, fornendogli anche qualche richiamo sulle proprietà focali della parabola.

Discutendo con me, Daniele riusciva poi a formulare la seconda dimostrazione che di seguito viene presentata e ad aggiungere anche altre due proprietà relative ad altri fasci di parabole di cui viene fornita la dimostrazione analitica.

Da un punto di vista matematico-didattico riaffermo che mi sembra significativo il recupero delle conoscenze di base della geometria euclidea e la loro applicazione nella dimostrazione di proprietà di enti matematici che di solito si trattano soprattutto dal punto di vista analitico e mi sembra importante riconoscere a un giovanissimo studente il frutto del suo interesse, impegno e fantasia.

Nella parte finale del lavoro abbiamo poi fatto alcune verifiche grafiche

con il Derive for Windows dei risultati ottenuti, mostrando ancora una volta come il supporto informatico possa essere utile per verificare i calcoli e mettere alla prova grafica i risultati ricavati.

Ho pensato quindi che valeva la pena scrivere, dopo qualche precisazione, il frutto del lavoro di Daniele che è una grande gratificazione per chi crede ancora che la scuola possa essere anche luogo di ricerca e di stimolo all'intelligenza creativa, sebbene molti tendano a negarlo o a sottovalutare le possibilità che essa offre.

I teoremi dimostrati

Iniziamo con il teorema relativo alle parabole tangenti.

Teorema

Il luogo dei vertici delle parabole di un fascio di parabole, con assi paralleli tra loro, tangenti in un punto diverso dal vertice, con assi paralleli tra loro, è una retta privata di un punto, e tale punto è proprio il punto di tangenza.

Del precedente teorema si forniscono due dimostrazioni, una espressa in termini di geometria analitica e una nell'ambito della geometria euclidea.

Iniziamo dalla dimostrazione analitica:

Dimostrazione 1

Si consideri un'equazione del fascio di parabole (ad asse verticale) tangenti, generato dalla combinazione lineare di una parabola degenere Γ_1 (la retta tangente comune) e di una parabola doppiamente riducibile Γ_2 passante per il punto base del fascio nel quale avviene la tangenza.

Siano

$$\Gamma_1 : a x + b y + c = 0 \quad \text{e} \quad \Gamma_2 : (x + d)^2 = 0$$

il fascio Φ risulta allora avente equazione

$$a x + b y + c + k (x + d)^2 = 0$$

Sviluppando il quadrato del binomio ed esplicitando la variabile y si ottiene

$$\Phi : y = -\frac{k}{b} x^2 - \frac{a + 2 k d}{b} x - \frac{k d^2 + c}{b}$$

Ricordando ora le note formule per il vertice

$$V \left(-\frac{B}{2 A} ; -\frac{\Delta}{4 A} \right)$$

di una parabola ad asse verticale (di equazione $y = Ax^2 + Bx + C$), si può scrivere l'equazione parametrica del luogo dei vertici λ delle parabole di Φ :

$$\lambda: \begin{cases} x = \frac{\frac{a+2kd}{b}}{-\frac{2k}{b}} \\ y = \frac{4\left(-\frac{k}{b}\right)\left(-\frac{kd^2+c}{b}\right) - \left(\frac{a+2kd}{b}\right)^2}{-\frac{4k}{b}} \end{cases}$$

Ovvero, sviluppando e semplificando:

$$\lambda: \begin{cases} x = -\frac{a+2kd}{2k} \\ y = -\frac{b}{4k} \frac{4k^2d^2 + 4kc - a^2 - 4k ad - 4k^2d^2}{b^2} \end{cases}$$

Si noti che nel numeratore dell'espressione della y si semplificano i due monomi opposti $4k^2d^2$ e $-4k^2d^2$ che sono gli unici che contengono il parametro k al secondo grado. Tale osservazione potrebbe già essere sufficiente per capire la natura del luogo geometrico λ . Otteniamo ad ogni modo l'equazione cartesiana con il metodo dell'eliminazione del parametro.

Ricavando k dalla prima equazione si ottiene:

$$\lambda: \begin{cases} k = -\frac{a}{2(x+d)} \\ y = \frac{a^2 + 4k ad - 4kc}{4kb} \end{cases}$$

Si noti che dall'espressione di k si ottiene la condizione $x \neq -d$ che significa che il punto di ascissa $x = -d$ è escluso dal luogo λ .

Sostituendo k nell'espressione della y si ottiene:

$$y = \frac{a^2 - \frac{2a^2d}{x+d} + \frac{2ac}{x+d}}{-\frac{2ab}{x+d}}$$

ovvero sviluppando e semplificando

$$y = -\frac{x+d}{2ab} \frac{a^2x + a^2d - 2a^2d + 2ac}{x+d}$$

ovvero

$$y = -\frac{ax - ad + 2c}{2b}$$

ossia

$$ax + 2by - ad + 2c = 0$$

che è l'equazione del luogo λ . Poiché essa presenta le variabili solo al primo grado allora essa è certamente una retta.

Osservazioni

1. Calcoliamo le coordinate del punto base del fascio di parabole. Esso è l'intersezione delle due generatrici e quindi le sue coordinate si ottengono dal sistema:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ (x + d)^2 = 0 \end{cases}$$

Tale punto base A ha perciò coordinate $A\left(-d; \frac{ad - c}{b}\right)$.

È interessante notare che tale punto coincide con il punto di ascissa $x = -d$ della retta λ precedentemente trovata come luogo dei vertici.

Si può concludere che dalla retta λ è escluso proprio il punto base del fascio che, come risulterà chiaro dalle successive dimostrazioni geometriche, non può esser vertice di alcuna parabola del fascio Φ .

2. La dimostrazione considera parabole tangenti con asse verticale. Tuttavia, se il fascio viene ruotato, anche il luogo dei vertici è soggetto alla stessa rotazione e, dato che la rotazione trasforma rette in rette, il teorema può essere generalizzato a un fascio di parabole tangenti con assi tra loro paralleli.
3. È necessario che le parabole non siano tangenti nel vertice, perché in tal caso i vertici di tutte le parabole del fascio coinciderebbero nel punto di tangenza, e di conseguenza il luogo dei vertici sarebbe un punto.
4. L'utilità «pratica» di questo teorema sta nel fatto che i coefficienti delle variabili presenti nell'equazione del luogo dei vertici vengono espressi in funzione dei parametri di partenza cioè a, b, c, d . Dunque, note la parabola degenera e la parabola doppiamente riducibile, si può giungere direttamente all'equazione del luogo dei vertici.

Dimostrazione 2

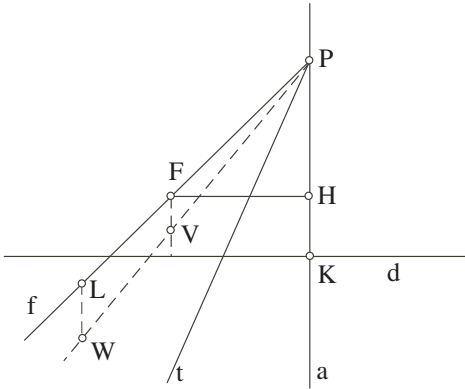
Tale dimostrazione presuppone la conoscenza di una proprietà focale della parabola che per comodità viene qui ricordata.

Essa afferma che:

data una parabola e un suo punto P, la tangente alla parabola in tale punto è bisettrice dell'angolo formato dalla parallela all'asse per esso e dalla retta congiungente il punto P con il fuoco della parabola.

Da tale proprietà, nel caso di parabole con assi paralleli tra loro, tangenti a un'unica retta in un suo punto P, discende che i fuochi di tali parabole formano una retta che indichiamo, nel disegno sottostante, con f. Essendo infatti la tangente t fissa e la parallela all'asse a delle parabole per il punto di tangenza fisso P pure essa fissa, la retta dei fuochi si ottiene tracciando per P la retta che forma con la tangente un ang-

lo della medesima ampiezza di quello formato da tale tangente con la parallela all'asse per P.



Sia F il fuoco e d la direttrice di una parabola δ del fascio di parabole tangenti a t in P. δ non compare nell'illustrazione per maggior chiarezza.

Essendo P un punto della parabola δ esso è equidistante dal fuoco e dalla direttrice e quindi poniamo $|PF|=|PK|=m$. Sia V il vertice di δ ed α l'angolo formato da f con a, H la proiezione di F su a. Poiché V è equidistante da F e da d riesce che

$$|FV| = \frac{|HK|}{2}$$

Poiché poi $|HK|=|PK|-|PH|=m-m \cos \alpha$, si ottiene

$$|FV| = \frac{m - m \cos \alpha}{2}$$

Valutiamo il rapporto $\frac{|FV|}{|PF|}$. Riesce

$$\frac{|FV|}{|PF|} = \frac{m(1 - \cos \alpha)}{2m} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

ossia tale rapporto è indipendente da m, cioè dalla distanza del punto P dal fuoco della parabola considerata.

Se ora si considera un'altra parabola del fascio, detti L il suo fuoco e W il suo vertice, ripetendo il ragionamento di cui sopra si ottiene

$$\frac{|LW|}{|PL|} = \frac{|FV|}{|PF|}$$

stante l'indipendenza di tale rapporto dalla distanza del punto P fisso dal fuoco della parabola esaminata.

Si considerino i triangoli PFV e PLW. Gli angoli di vertice F e L sono congruenti poiché FV e LW sono paralleli; inoltre

$$\frac{|LW|}{|PL|} = \frac{|FV|}{|PF|}$$

e quindi i due triangoli sono simili.

Riesce quindi $FPV = LPW$ e quindi i vertici V e W sono allineati con P . Poiché tale ragionamento si può ripetere con il vertice di una qualsiasi parabola del fascio si può concludere che i vertici di tali parabole formano una retta.

Osservazioni

1. Si noti che da questa retta è escluso il punto base P del fascio poiché per ottenerlo bisognerebbe prendere $F \equiv P$.
2. Si noti ancora che con qualche considerazione trigonometrica si riesce anche a calcolare, in funzione di α , l'angolo formato da tale retta dei vertici con la tangente comune alle parabole del fascio.

Proviamo poi questo secondo teorema, meno significativo del primo ma che, ad ogni modo, mostra l'efficacia della geometria analitica in generale e del metodo di eliminazione del parametro in particolare.

Teorema

Il luogo dei vertici delle parabole di un fascio di parabole congruenti, con assi paralleli tra loro, con la concavità nel medesimo verso e secanti in un solo punto (ossia non coassiali), è una parabola congruente a quelle del fascio, con concavità di verso opposto a quella delle parabole date, e avente il vertice nel punto base del fascio medesimo.

Di questo teorema forniamo una dimostrazione analitica.

Siano $\gamma_1 : y = ax^2 + bx + c$ la parabola generatrice del fascio Ω e $x + d = 0$ la retta del fascio di parabole passante per l'unico punto base del fascio. Tale punto base si ottiene dal sistema

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ x + d = 0 \end{cases} \text{ e quindi ha coordinate } (-d ; a d^2 - b d + c).$$

Un'equazione di tale fascio Ω può esser scritta allora

$$y = a x^2 + b x + c + k (x + d)$$

$$\text{ovvero } y = a x^2 + (b + k) x + k d + c$$

Applicando allora le solite formule per il vertice di una parabola, il luogo cercato ha equazioni parametriche:

$$\lambda : \begin{cases} x = -\frac{b+k}{2a} \\ y = -\frac{(b+k)^2 - 4a(kd+c)}{4a} \end{cases}$$

Ricaviamo k dalla prima equazione ottenendo $k = -b - 2ax$ e sostituiamo nella seconda; sviluppando otteniamo

$$y = \frac{-(b - b - 2ax)^2 + 4a[(-b - 2ax)d + c]}{4a} = \frac{-4a^2x^2 + 4a(-bd - 2axd + c)}{4a} =$$

$$= \frac{-4a^2x^2}{4a} + \frac{4a(-bd - 2axd + c)}{4a}$$

Semplificando si ottiene infine

$$\lambda : y = -ax^2 - 2adx + c - bd$$

ossia una parabola congruente a quelle del fascio, essendo i loro coefficienti direttivi uguali in modulo, ma con concavità di verso opposto ad esse, dato che i medesimi coefficienti direttivi sono opposti.

Si noti che calcolando il vertice di tale parabola si ottiene

$$V_\lambda(-d; a d^2 - b d + c)$$

che è proprio il punto base del fascio.

Osservazioni

1. Una rotazione, essendo un'isometria, trasforma parabole in parabole congruenti, perciò, come nel teorema precedente, quanto dimostrato può essere generalizzato ad un fascio di parabole con assi paralleli tra loro, congruenti, con la concavità nel medesimo verso e secanti in un solo punto.
2. Anche in questo caso, l'utilità «pratica» del teorema in questione risiede nel fatto che, note l'equazione di una parabola del fascio e le coordinate del punto base dello stesso, si può giungere direttamente all'equazione del luogo dei vertici, saltando tutti i passaggi intermedi.

Consideriamo infine un terzo teorema relativo ai fasci di parabole secanti in due punti distinti.

Teorema

Il luogo dei vertici di un fascio di parabole secanti, con assi paralleli tra loro, è sempre un'iperbole.

Dimostrazione

Si consideri un'equazione del fascio Φ di parabole (ad asse verticale) secanti in due punti, generato dalla combinazione lineare tra la parabola Γ_1 degenera e la parabola riducibile Γ_2 passante per i punti base del fascio.

Siano

$$\Gamma_1 : ax + by + c = 0 \quad \text{e} \quad \Gamma_2 : (x + e)(x + f) = 0$$

Il fascio Φ risulta allora avere equazione

$$ax + by + c + k(x + e)(x + f) = 0$$

Sviluppando ed esplicitando la y si ottiene

$$\Phi: y = -\frac{k}{b}x^2 - \frac{a+k(e+f)}{b}x - \frac{c+k e f}{b}$$

applicando le solite formule per il vertice di una parabola, il luogo dei vertici ha equazione:

$$\lambda: \begin{cases} x = -\frac{a+k(e+f)}{2k} \\ y = \frac{a^2 + 2ak(e+f) - k[4c - k(e-f)^2]}{4kb} \end{cases}$$

Si noti che l'espressione della y contiene la condizione $b \neq 0$. Infatti, se fosse $b=0$, l'equazione della parabola degenera si ridurrebbe alla forma $ax + c = 0$, cioè sarebbe una retta verticale, che non può in alcun modo intersecare la parabola riducibile in due punti distinti, essendo essa costituita da una coppia di rette verticali distinte.

Esplicitando ora il parametro k riesce:

$$\lambda: \begin{cases} k = -\frac{a}{2x+e+f} \\ y = -\frac{-a^2 + k(4c - 2ae - 2af) + k^2[4ef - (e+f)^2]}{4kb} \end{cases}$$

Sostituendo k nell'espressione della y si ottiene

$$y = -\frac{ax^2 + 2cx - aef + c(e+f)}{b(2x+e+f)}$$

da cui

$$b(2x+e+f)y = -ax^2 - 2cx + aef - c(e+f)$$

ovvero, sviluppando

$$ax^2 + 2bxy + 2cx + b(e+f)y - aef + c(e+f) = 0$$

Ponendo poi $A = b(e+f)$ e $B = -aef + c(e+f)$ e continuando a sviluppare, si ottiene:

$$ax^2 + 2bxy + 2cx + Ay + B = 0$$

che è l'equazione di una conica.

Si noti che nell'equazione del luogo dei vertici non compare il termine con y^2 , dunque

$$\Delta = (-2b)^2 = 4b^2.$$

Ciò significa che $\Delta > 0$ per tutti i $b \neq 0$ e, dato che si è visto in precedenza che deve essere $b \neq 0$, Δ sarà sempre positivo, perciò il luogo dei vertici è sempre un'iperbole.

Si noti ancora, osservando l'equazione esplicita della iperbole, che essa è una funzione definita per ogni

$$x \neq -\frac{e+f}{2}$$

Perciò la retta

$$x = -\frac{e+f}{2}$$

rappresenta l'asintoto verticale di tale iperbole poiché

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{e+f}{2}} \left[-\frac{ax^2 + 2cx - aef + c(e+f)}{b(2x+e+f)} \right] = \infty$$

Osservazioni

1. In particolare, se $a=0$, l'iperbole è equilatera (funzione omografica). Inoltre, se $a=0$, l'equazione della parabola degenera si riduce alla forma $by + c = 0$, che rappresenta una retta orizzontale. Ciò significa che se i punti base del fascio appartengono a una retta orizzontale, allora il luogo dei vertici del fascio stesso è un'iperbole equilatera.
2. Si può notare inoltre che l'asintoto dell'iperbole passa per il punto medio dei punti base del fascio.
3. Anche in questo caso, il teorema, studiato inizialmente per un fascio di parabole esterne con asse verticale, può essere generalizzato ad un fascio di parabole esterne con assi paralleli tra loro, dato che la trasformata di un'iperbole in una rotazione è ancora un'iperbole.

Verifica con Derive

Mettiamo alla prova quanto trovato con due esempi numerici facendo la verifica grafica con il Derive.

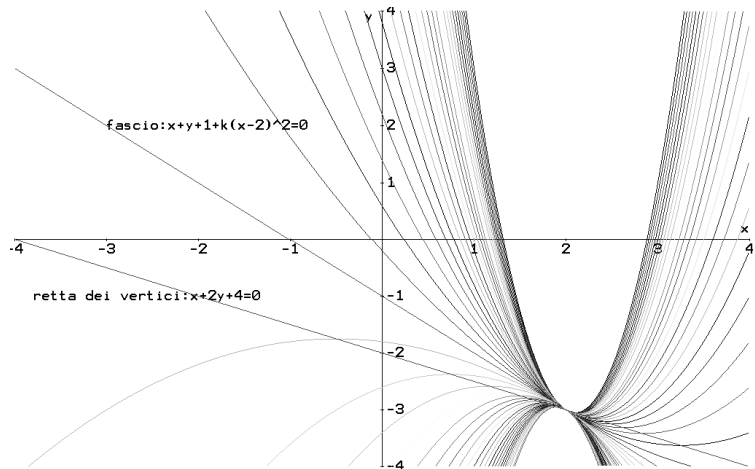
Iniziamo con un fascio di parabole tangenti di equazione

$$\Phi : x + y + 1 + k(x-2)^2 = 0$$

Riesce quindi $a=b=c=1$, $d=-2$. In base ai calcoli nel caso generale il luogo dei vertici è la retta di equazione $x+2y+4=0$. Rappresentiamo sia alcune parabole del fascio sia la retta dei vertici con il Derive. Usiamo il comando Vector scrivendo nel listato quanto segue:

$$\text{VECTOR}(x+y+1+k \cdot (x-2)^2=0, k, -5, 5, 0.2)$$

Con il comando «Simplify Basic» si ottengono poi le parabole scelte che è facile rappresentare con il comando Plot. Si può rappresentare poi la retta ottenuta dalle formule generali con il seguente grafico:



In tale grafico si nota chiaramente che la retta passa per i vertici delle parabole rappresentate.

Per il teorema sulle parabole secanti, scegliamo ora il fascio.

$$\Phi: x + y + 1 + k(x - 2)(x - 3) = 0$$

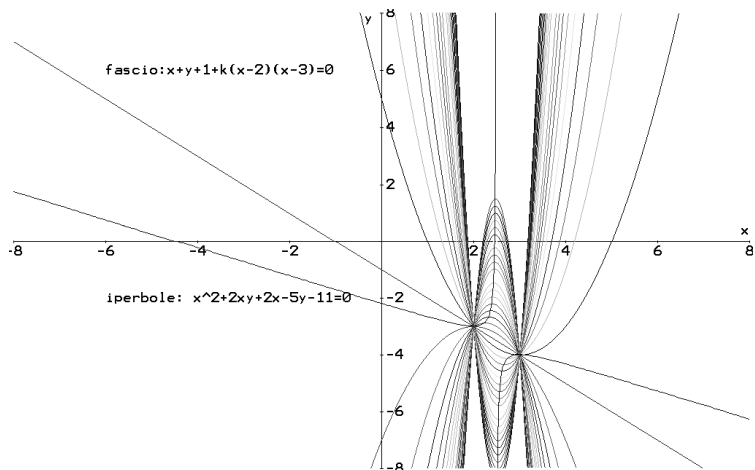
Quindi abbiamo $a=1$, $b=1$, $c=1$, $e=-2$, $f=-3$.

Dalle formule ricavate nel caso generale si ottiene che il luogo dei vertici è l'iperbole $x^2 + 2xy + 2x - 5y - 11 = 0$.

Sempre con Derive, si possono rappresentare alcune parabole del fascio con il comando Vector e precisamente scrivendo nel listato la seguente riga:

$$\text{VECTOR}(x+y+1+k \cdot (x-2) \cdot (x-3)=0, k, -20, 20, 1)$$

Con il comando «Simplify Basic» si ottengono poi le parabole scelte che è facile rappresentare con il comando Plot. Si può rappresentare poi l'iperbole ottenuta dalle formule generali ottenendo il seguente grafico:



In tale grafico si vede chiaramente che l'iperbole passa per i vertici delle parabole rappresentate.

Si noti ancora una cosa interessante: nel fare i calcoli, nell'espressione di k , si doveva porre la condizione

$$x \neq -\frac{e+f}{2}$$

Questo trova conferma nel grafico soprastante in cui si nota che non ci sono punti dell'iperbole corrispondenti al valore

$$x = -\frac{e+f}{2} = \frac{5}{2}$$

ascissa del punto medio dei due punti base, corrispondente all'asintoto dell'iperbole stessa.

Bibliografia

Bergamini M., Trifone A., Barozzi G.

Moduli blu di Matematica - Modulo S+L. Bologna: Zanichelli, 2005.

Norbedo B.

La geometria analitica piana. Trieste: Edizioni Goliardiche, 2001.

2. Alcune osservazioni sul teorema di Rouché-Capelli¹

Miriam Ferrara²

The student investigates if the Cramer's method for the study and solution of 2x2 linear systems of equations can be extended to 3x3 systems and discovers that, if all the determinants are zero, the 3x3 system is not necessarily indeterminate, but could also be impossible.

A volte noi studenti liceali nello studio della matematica prediligiamo l'aspetto applicativo piuttosto che quello teorico e ci interroghiamo sull'utilità di alcuni teoremi. In questo lavoro, nato dopo un compito in classe sulle matrici e i sistemi lineari, vengono presentate alcune osservazioni sul teorema di Rouché-Capelli e sulla sua utilità. Tale teorema afferma che condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema lineare sia compatibile è che il rango della matrice dei coefficienti coincida con quello della matrice completa. Ma è davvero necessario utilizzare tale teorema? Esistono altri metodi che non coinvolgono la determinazione del rango della matrice per stabilire se un sistema lineare è possibile oppure no? Inizialmente pensavo che ciò fosse possibile.

Supponiamo di avere un sistema 2 x 2

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \quad (1)$$

e che il determinante della matrice dei coefficienti sia uguale a zero

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

In tal caso, possiamo concludere che il sistema non è determinato e che, quindi, non è possibile applicare il metodo di Cramer. Ciononostante applichiamo tale metodo e determiniamo

$$x = \frac{\det A_x}{\det A}, \quad y = \frac{\det A_y}{\det A}, \quad (3)$$

-
1. Si tratta del teorema che stabilisce le condizioni di esistenza e il numero di soluzioni di un sistema lineare $m \times n$. Prende il nome dal matematico francese Eugène Rouché (1832-1910) e dall'italiano Alfredo Capelli (1855-1910).
 2. Studentessa del Liceo Scientifico B. Rescigno, Via Viviano 3, 84086 Roccapiemonte (SA).

dove

$$\det A_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \det A_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \quad (4)$$

e $\det A = 0$ per ipotesi.

Non essendo determinato, il sistema può essere impossibile o indeterminato. Se almeno uno tra $\det A_x$ e $\det A_y$ è diverso da zero possiamo concludere che esso è impossibile. Ciò è in accordo con il teorema di Rouché-Capelli, essendo il rango della matrice completa superiore a quello della matrice dei coefficienti. Ma se si verifica $\det A_x = \det A_y = 0$ e, quindi,

$$x = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{0}{0}$$

possiamo concludere che il sistema è indeterminato? Supponendo che almeno uno dei termini della matrice dei coefficienti sia diverso da zero, il rango della matrice completa è uguale ad 1 e coincide con quello della matrice dei coefficienti. Essendo i due ranghi coincidenti, il sistema è compatibile per il teorema di Rouché-Capelli. Non essendo il sistema determinato poiché $\det A = 0$ per ipotesi, dobbiamo concludere che esso è indeterminato.

È possibile generalizzare questo risultato a sistemi di ordine superiore? Supponiamo di avere un sistema

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad (5)$$

e che il determinante della matrice dei coefficienti sia uguale a zero

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

Pur non essendo il sistema determinato, applichiamo il metodo di Cramer e determiniamo

$$x = \frac{\det A_x}{\det A}, \quad y = \frac{\det A_y}{\det A}, \quad z = \frac{\det A_z}{\det A} \quad (7)$$

dove

$$\det A_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \det A_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \det A_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \quad (8)$$

e $\det A = 0$ per ipotesi.

Come detto in precedenza se almeno uno tra $\det A_x$, $\det A_y$, $\det A_z$ è diverso da zero, possiamo concludere che il sistema è impossibile, in accordo con il teorema di Rouché-Capelli. Ma se si verifica $\det A_x = \det A_y = \det A_z = 0$ e, quindi,

$$x = \frac{0}{0}, y = \frac{0}{0}, z = \frac{0}{0}$$

possiamo concludere che il sistema è indeterminato e, quindi, generalizzare il risultato trovato per sistemi 2×2 ?

Con alcuni esempi numerici, mostro che se $x = y = z = \frac{0}{0}$, il sistema può essere sia indeterminato che impossibile.

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 3 \\ 5x - y - z = 11 \end{cases} \quad (9)$$

avente il determinante dei coefficienti ($\det A$) uguale a zero in quanto nella matrice dei coefficienti sono presenti due colonne uguali. «Forzando» il metodo di Cramer, si ha

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 11 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{0} = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 5 & 11 & -1 \end{vmatrix}}{0} = \frac{0}{0}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 11 \end{vmatrix}}{0} = \frac{0}{0} \quad (10)$$

e, quindi, sarei portata a concludere che il sistema è indeterminato. Osserviamo che la terza riga è combinazione lineare delle altre due in quanto si ottiene sommando alla prima riga moltiplicata per due la seconda moltiplicata per tre. Il sistema dato dall'Eq.(9) è, quindi, equivalente a

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 3 \end{cases} \quad (11)$$

e le sue soluzioni sono $\{2, -1 - \lambda, \lambda\}$ con $\lambda \in \mathfrak{R}$. Il sistema risulta quindi indeterminato, come mi aspettavo.

Consideriamo ora il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 2y + 2z = 5 \\ 3x + 3y + 3z = 8 \end{cases} \quad (12)$$

avente il determinante dei coefficienti uguale a zero essendo le righe della matrice dei coefficienti multiple tra loro. Per il sistema dato dall'Eq.(12) risulta inoltre $\det A_x = \det A_y = \det A_z = 0$ e, quindi,

$$x = y = z = \frac{0}{0}$$

Ciononostante il sistema è impossibile, e non indeterminato come mi aspettavo. Il rango della matrice dei coefficienti è uguale a uno mentre quello della matrice completa è pari a due e quindi, per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è impossibile.

Riassumendo, se il determinante della matrice dei coefficienti ($\det A$) è uguale a zero e almeno uno tra $\det A_x$, $\det A_y$, $\det A_z$ è diverso da zero, posso concludere che il sistema è impossibile. Se $\det A_x = \det A_y = \det A_z = 0$, non posso stabilire se il sistema è impossibile o indeterminato e devo necessariamente ricorrere al teorema di Rouché-Capelli.

Ringraziamenti

Si ringraziano la prof.ssa Maria Funaro del Liceo Scientifico «B. Rescigno» di Roccapiemonte e il prof. Giovanni Vincenti del Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università degli Studi di Salerno per le utili discussioni e suggerimenti.

1. Didattica della Matematica 2008

Convegno di didattica della Matematica

Locarno 25-26 agosto 2008

Alta Scuola Pedagogica, piazza S. Francesco 19, CH 6600 Locarno

<http://aspti.ch/didamat08>

Comitato di organizzazione

Presidente	B. Janner, dir. ASP
Coordinatori	A. Frapolli, L. Martinoni
Responsabili scientifici	B. D'Amore, M. I. Fandiño-Pinilla
Responsabile Mostre	S. Sbaragli
Responsabile Atti	G. Arrigo
Responsabili finanze e logistica	M. Costi, A. Frapolli, D. Frigerio, O. Villa
Amministrazione	D. Bonetti
Ufficio Insegnamento Medio	L. Pedrini
Centro didattico cantonale	S. Righenzi

Presentazione del convegno

Anno 2008. Il 3° Convegno di Didattica della Matematica di Locarno, organizzato dall'Alta Scuola Pedagogica nel magnifico chiostro dell'antico convento annesso alla chiesa di San Francesco, è una realtà. Il discorso sulla teoria didattica iniziato a Bellinzona con la manifestazione Matematica 2000, in occasione dell'anno della matematica, è stato ripreso una prima volta a Locarno nel 2004 e continua oggi sulla scorta della profondità delle riflessioni innescate. Propone una nuova ventata di ossigeno grazie alla presenza di relatori di fama scelti accuratamente, grazie anche alla preziosa collaborazione dei professori Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla.

Il Ticino è un piccolo mondo, ma anche una realtà essenziale nel panorama culturale svizzero. La scuola ticinese vi appartiene di diritto ed è sempre stata consapevole del fatto che, in quanto scuola di una minoranza, non può essere inferiore né a quella di cultura tedesca né a quella romanda. Questa nostra peculiarità è sempre stata stimolo fondamentale per la promozione di una scuola di qualità: il passato ce lo insegna. In tempi difficili e disseminati di sfide come quelli che stiamo vivendo, è necessario trovare la forza di continuare e il coraggio di operare senza lasciarsi troppo condizionare dalle difficoltà quotidiane. Forza, coraggio, determinazione, caparbietà sono abiti mentali che l'insegnante sa vestire soprattutto se la sua prassi didattica è ben fondata teoricamente. Il convegno di didattica si prefigge di mantenere alto l'interesse nei confronti dei principali problemi che si pongono nel delicato e meraviglioso processo di insegnamento-apprendimento. Per farlo è importante stabilire e mantenere un collegamento diretto tra la ricerca didattica attuale e la pratica in classe. Ecco perché il Canton Ticino è orgoglioso di accogliere in questi due giorni, a Locarno, sede dell'Alta Scuola Pedagogica, alcuni fra i più autorevoli didatti della matematica del mondo intero.

Presentazione della mostra

Il convegno è accompagnato da una mostra dedicata agli insegnanti, agli allievi e ai genitori delle nostre scuole. Costituisce una rassegna di attività matematiche svolte in classe, un'occasione privilegiata per proficui scambi di esperienze vissute, uno stimolo a produrre nuovi materiali e percorsi didattici, strumenti essenziali per promuovere un buon apprendimento.

- **Matematica e dintorni:** laboratori interdisciplinari per scuola dell'infanzia, elementare e secondaria di primo grado – Forlìmatica, coordinata da A. Carloni, L. Colinelli, L. Giorgi, S. Neri, P. Ricci, A. Siboni, T. Tampellini, S. Tartagni (Forlì, Italia)
- **Riflessi matematici in natura** - Renzo Didoni (ICS di Vedano al Lambro, Italia)
- **Matematica e Arte** - G. Baldi, A. Ferrini, A. Leonardi, S. Traquandi (SS I° grado Marconi - SS 2° grado Giovanni da San Giovanni, S. Giovanni Valdarno, AR, Italia)
- **Matematica: che storia!** - L. Crivelli, L. Falconi, F. Gazzoli, G. Kunz, A. Lunghi, N. Olivieri, M. Stefanini, D. Tamagni (studenti ASP Locarno, scuola elementare)
- **Percorso matematico attraverso i cinque sensi** - A. Carmeci, F. Franzi, I. Fregosi, S. Scaramozza, L. Zanchin (studentesse ASP, scuola elementare)
- **Giochiamo con la matematica e non solo...** - M. Akai, V. Battista, L. Bellotti, E. Cattaneo, A. Cereda, F. Riva, M. Soldati (studentesse ASP, scuola dell'infanzia e elementare)
- **Settimana di gioco e matematica** - S. Cataldi, D. Caglioni, G. Morinini (insegnanti scuola media, Minusio)
- **Matematica dappertutto** - J. Hernandez, F. Mazzaro (insegnanti scuola media, Gravesano/Lodrino)

Programma delle conferenze

Lunedì 25 agosto 2008

8.30-9.00	Ricezione
9.00-9.30	Saluto delle Autorità
9.30-10.20	Claire Margolinas (Francia) Ricerca e sviluppo per l'insegnamento della matematica nella scuola elementare: il caso dell'enumerazione
10.35-11.25	Giorgio Bolondi (Italia). Immagini dei numeri
11.25-14.30	Presentazione e visite libere a mostre e workshop

Pausa pranzo

-
- 14.30-15.20 **Gert Schubring** (Germania)
I numeri negativi – sfide significative per la storia, l'epistemologia e la didattica della matematica.
- 15.35-16.25 **Vicenç Font** (Spagna)
Rappresentazioni attivate nel calcolo della derivata di una funzione [in spagnolo, con traduzione simultanea]
- 16.25-17.15 **Visite libere alle mostre e ai workshop**
- 17.15-18.00 **Rinfresco offerto dalla città di Locarno**

Martedì 26 agosto 2008

- 9.15-10.05 **Juan Diaz Godino** (Spagna)
Sviluppo di competenze di analisi didattica nella formazione degli insegnanti di matematica [in spagnolo, con traduzione simultanea]
- 10.20-11.10 **Gérard Vergnaud** (Francia)
A quali domande risponde la teoria dei campi concettuali? [in francese]
- 11.10-12.00 **Tavola rotonda e chiusura del convegno**

2. **La storia della matematica: un percorso affascinante per uno scopo didattico**

Castel San Pietro Terme

Sabato 6 e domenica 7 settembre 2008, sala del Cassero

Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica

c/o Dipartimento di Matematica Università di Bologna

Comune di Castel San Pietro Terme, Assessorato alla Cultura

Presentazione

La matematica ha una storia fatta da uomini e donne, una evoluzione avvincente che, spesso, i più ignorano; una storia fatta da persone, da avvenimenti, da epopee, da scelte, da ideologie, da necessità, da svolte improvvise e da bisogni impellenti. Perché non portare in aula, agli allievi, questo messaggio? Perché non tentare di mostrare il volto umano della matematica? Certo, per poterlo fare, bisogna conoscerne la storia...

Le lezioni sono state pensate a solo scopo didattico, per qualsiasi livello scolastico, dalla primaria alle superiori. A volte, per capire certe situazioni d'aula, la conoscenza della evoluzione delle idee matematiche si rivela uno strumento formidabile.

Programma

Sabato 6 settembre 2008

10.00-12:30 La preistoria della matematica; Sumeri, Egizi.
14.30-19.00 Greci; Etruschi e Romani; Storia degli strumenti di calcolo;
Le grandi civiltà dell'America pre-colombina; Cinesi.

Domenica 7 settembre 2008

9.00-12:30 Il Medioevo; Storia delle frazioni; il Rinascimento.
14.30-17.00 I secoli XVIII, XIX, XX.

Docenti

Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla, NRD di Bologna.

Il Corso è a numero chiuso; le prescrizioni si accettano fino al 31 agosto solo via e-mail all'indirizzo: ines@umbria.net (inviando nome, cognome, indirizzo postale completo, livello scolastico di appartenenza e numero telefonico privato). Gli ammessi riceveranno immediata conferma via e-mail. In caso di superamento del limite, i non ammessi verranno immediatamente avvisati con lo stesso mezzo. Ogni iscritto, senza eccezioni, verserà sabato 6 settembre mattina, tra le 9 e le 10, a parziale contributo per la manifestazione, la somma di 30 €.

La sede del Cassero si trova nel centro storico della città; si consiglia di parcheggiare l'auto nel parcheggio gratuito dell'Ospedale, a poche decine di metri dalla sede del Corso.

Per informazioni scientifiche, ci si può rivolgere a: ines@umbria.net

Per avere ulteriori informazioni logistiche

Maria Rita Baroncini - Ufficio Cultura e Turismo
Comune di Castel San Pietro Terme
Piazza XX Settembre 3
40024 Castel San Pietro Terme BO
Tel. 051 6954198 Fax 051 6954180 feriali ore 9-13.30
e-mail: ufficioturismo@cspietro.it
cultura@cspietro.it
<http://www.dm.unibo.it>
<http://www.cspietro.it>
<http://www.dm.unibo.it/rsddm>

I Corsisti dovranno provvedere per conto proprio alla eventuale prenotazione alberghiera. La segreteria declina ogni responsabilità per mancato alloggio.

Per ulteriori informazioni relative all'alloggio ci si può rivolgere a:

IAT/URP
Tel. e fax 051 6954154
Piazza XX settembre 3
40024 Castel San Pietro Terme (BO)
<http://www.cspietro.it>

Pro Loco
Tel. 051 6951379/051 6954135
Fax 051 6951623
Via Ugo Bassi, 19
40024 Castel San Pietro Terme (BO)
proloco@castelsanpietroterme.it

3. Didattica della matematica e azioni d'aula

Convegno Nazionale n. 22: *Incontri con la Matematica*

Castel San Pietro Terme (Bologna)

7-8-9 novembre 2008

Direzione scientifica

Atti a cura di

Direzione tecnica

Mostre e laboratori a cura di

Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla

Bruno D'Amore e Silvia Sbaragli

Berta Martini

Ines Marazzani e Silvia Sbaragli

Conferenze

Venerdì 7 novembre, RS Congressi (Hotel Castello)

Tutti gli ordini scolastici

- 14.30-15.30 **Inaugurazione** alla presenza delle Autorità del mondo politico ed accademico. Saluto del Sindaco di Castel San Pietro Terme; Saluto del Presidente dell'Unione Matematica Italiana, prof. Franco Brezzi; Saluti delle Autorità accademiche e ministeriali.
- 15.30-16.30 **Paolo Guidoni** (Università di Napoli). Metafore, modelli, forme simboliche. Strategie di discorso e azione nell'insegnamento/apprendimento della matematica (e delle scienze).
- 16.30-17.30 **Claire Margolinas** (Laboratoire PAEDI, Université Blaise Pascal Clermont-Ferrand II). Saper organizzarsi, fa parte della matematica?
- 17.30-18.00 Intervallo
- 18.00-19.00 **Guy Brousseau** (Medaglia Klein, Università di Bordeaux I) e **Bruno D'Amore** (Università di Bologna). Buoni e cattivi usi delle analisi di tipo meta nell'attività didattica.

Sabato 8 novembre, Salone delle Terme (Albergo delle Terme)

Scuola dell'Infanzia

- 15.00-15.45 **Maria Arcà** (CNR Roma). L'esperienza: un legame forte tra i bambini e il mondo.
- 15.45-16.30 **Paola Vighi** (Università di Parma). Dall'osservazione alla formalizzazione: guarda ... gioca, guarda ... impara.
- 16.30-17.00 Intervallo
- 17.00-17.45 **Gianfranco Staccioli** (Università di Firenze). 1,2,3... il contesto che conta.

- 17.45-18.30 **Claire Margolinas** (Laboratoire PAEDI, Université Blaise Pascal Clermont-Ferrand II). Organizzazione, spazi, enumerazione: conoscenze nella scuola dell'infanzia.

Sabato 8 novembre, RS Congressi (Hotel Castello)

Scuola Primaria, Secondaria di primo e di secondo grado

- 14.30-15.30 **Paolo Freguglia** (Università de L'Aquila). La storia della matematica per comprendere la matematica.
- 15.30-16.30 **Colette Laborde** (Università di Grenoble). Il passaggio nella scuola primaria da manipolazioni di oggetti materiali ai concetti matematici usando il nuovo Cabri Elem.
- 16.30-17.00 Intervallo ed attività ludiche
- 17.00-18.00 **Domingo Paola** (Genova). La costruzione di significato in classe: una sfida per l'insegnante.
- 18.00-19.00 **Massimo Ferri** (Università di Bologna) e **Susanna Lapponi**. La matematica nascosta nel futuro delle immagini.

Seminari

Sabato 8 novembre, Aula Magna (Istituto Alberghiero)

Seminari per la Scuola dell'Infanzia

- 9.00-9.45 **Erminia Dal Corso** (Verona, RSDDM Bologna). Esperienze di matematica nella Scuola dell'Infanzia.
- 9.45-10.30 **Anna Angeli** e **Mariangela di Nunzio** (Lucca, RSDDM Bologna). In viaggio con i numeri per scoprire, meravigliarsi, misurare, contare e giocare.
- 10.30-11.15 **Paola Vighi** (Università di Parma) e **Palma Rosa Micheli** (Scuola dell'Infanzia «Lodesana», Fidenza). Guarda... gioca, guarda... impara.

Sabato 8 novembre, RS Congressi (Hotel Castello)

Seminari per la Scuola Primaria e Secondaria di primo grado

- 9.00-9.45 **Giovanni G. Nicosia** (RSDDM Bologna). Culture, sistemi di rappresentazione e modelli di numero naturale.
- 9.45-10.30 **Silvia Sbaragli** (NRD Bologna, ASP Locarno). La divisione. Aspetti concettuali e didattici.
- 10.30-11.15 **Gianfranco Arrigo** (NRD Bologna, ASP Locarno). Mente e calcolatrice: a ciascuna il suo ruolo.

Sabato 8 novembre, Salone delle Terme (Albergo delle Terme)

- Seminari della Sezione «Disagio nei processi di apprendimento»**
- 9.00-9.45 **Maura Iori** (NRD Bologna): Epistemologia dell'insegnante di matematica sulla sua conoscenza professionale.
- 9.45-10.30 **Felice Carugati** (Università di Bologna). La scuola che vorremmo.
- 10.30-11.15 **Bruno D'Amore, Martha Isabel Fandiño Pinilla, Ines Marazzani e Silvia Sbaragli** (NRD Bologna). Difficoltà nell'apprendimento della matematica.

Sabato 8 novembre, Sala Giardino (Hotel delle Terme)

- Seminari per la Scuola Secondaria di secondo grado**
- 8.30-9.15 **Francesco Caviglia** (CNR - Istituto Tecnologie Didattiche, Genova). Responsabilità di insegnanti e curricula per i risultati delle indagini PISA.
- 9.15-10.00 **George Santi** (NRD Bologna). Concettualizzazione e senso in matematica; la prospettiva semiotica-culturale.
- 10.00-10.45 **Annalisa Cusi** (Università di Modena e Reggio E.). La dimostrazione in ambito aritmetico: un buon contesto per favorire lo sviluppo di nuove consapevolezze nei confronti del ruolo del linguaggio algebrico.
- 10:45-11:30 **Sylviane Beltrame e Gregorio Torretta** (Liceo Scientifico «Marinelli», Udine). Dal gioco alla dimostrazione.
- 11:30-12:15 **Tiziana Armano, Sergio Console, Ornella Robutti, Ada Sargenti e Claudia Testa** (Università di Torino). Precorsi di matematica: un progetto in continuità.

Domenica 9 novembre, Aula Magna (Istituto Alberghiero)

- Seminari per la Scuola dell'Infanzia**
- 8.30-9.15 **Gianfranco Staccioli** (Università di Firenze). Tavole da gioco nella logica della cooperazione.
- 9.15-10.00 **Maria Arcà** (CNR Roma). Dire, fare, pensare... Non si è mai troppo piccoli.
- 10.00-10.45 **Ines Marazzani** (NRD Bologna). Matematica e routines nella scuola dell'infanzia.

Domenica 9 novembre, RS Congressi (Hotel Castello)

- Seminari per la Scuola Primaria**
- 9.00-9.45 **Maria Rosaria Gambuli** (I.C. «Cimarosa», Aversa). Scienza Amica - Newton Karaoke.

- 9.45-10.30 **Giancarlo Navarra** (GREM di Modena). L'early algebra fra teoria e prassi. Un approccio innovativo all'insegnamento e all'apprendimento della matematica.
- 10.30-11.15 **Stefano Beccastrini e Paola Nannicini** (Arezzo, RSDDM Bologna): Due vecchie amiche: matematica e geografia. Invito alla costruzione di percorsi matematici integrati.
- 11.15-12.00 **Giorgio Bolondi e Martha Isabel Fandiño Pinilla** (NRD Bologna). Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica.

Domenica 9 novembre, Sala Giardino (Albergo delle Terme)

Seminari per la Scuola Secondaria di primo e secondo grado

- 8.30-9.15 **Relatore Texas**
- 9.15-10.00 **Giovanni Pezzi e Lorenza Resta** (Liceo «Torricelli», Faenza). Matebilandia: una sperimentazione di percorsi matematici tra le attrazioni di Mirabilandia.
- 10.00-10.45 **Consolato Pellegrino** (Università di Modena) e Luciana Zuccheri (Università di Trieste). Tre in uno. Piccola enciclopedia della matematica intrigante.
- 10.45-11.05 **Benedetto Scimmi** (ISIS «Salvatorelli», Todi). La matematica nascosta delle assonometrie.
- 11.05-11.25 **Ombretta Locatelli** (Collegio «S. Carlo», Milano). Fare matematica: un'esperienza di laboratorio.

Domenica 9 novembre, Salone delle Terme (Albergo delle Terme)

Seminari per la Scuola Secondaria di primo e secondo grado

- 8.30-9.15 **Domingo Paola** (Genova). La costruzione del concetto di funzione nella scuola secondaria di secondo grado.
- 9.15-10.00 **Giordano Bruno** (Università di Roma I, La Sapienza). Incertezza, certezza e «certezza pratica» secondo Bruno de Finetti.
- 10.15-11.00 **Anna Maria Benini** (USR Emilia Romagna). Le competenze matematiche in una dimensione europea: l'area strategica del biennio secondario superiore.
- 11.00-11.45 **Paolo Fasce** (Liceo Scientifico «Leonardo da Vinci», Genova): Il sudoku in classe.

Domenica 9 novembre, RS Congressi (Hotel Castello)

Per tutti i livelli scolastici

- 12.15-12.30 Manifestazione di chiusura del convegno presso il Centro Congressi: salute delle autorità, consegna degli attestati, interventi ludici.

Mostre e Laboratori

(in contemporanea e dopo i seminari)

(a cura di Ines Marazzani e Silvia Sbaragli)

Presso l'Istituto Alberghiero

Sabato 8 novembre dalle 9.00 alle 14.00

e domenica 9 novembre dalle 9.00 alle 12.00

Scuola dell'infanzia

- **Paola Vighi** (ULRDM, Università di Parma) e **Palma Rosa Micheli** (Scuola dell'Infanzia «Lodesana», Fidenza). Dal bruco alla farfalla e oltre ... Un percorso matematico-artistico.
- **Primo Circolo di Spinea** (Venezia), insegnanti della Commissione Matematica. Documentare la matematica: dalla scuola dell'infanzia alla scuola primaria, esperienze di un curriculum condiviso e partecipato.
- **Biblò** (Biblioteca per bambini) coordinata da **Maria Zanarini** (Quartiere Porto, Bologna). La matematica è antipatica. Laboratorio divertente per allenare la mente.
- **Renzo Baldoni**, MATEUREKA (Museo del Calcolo, Pennabilli, Pesaro). Dalla fatica al piacere di contare. Mostra degli strumenti e delle macchine che hanno aiutato l'uomo a passare dalla «fatica» al «piacere» di contare.
- Gruppo «**Matematica in Rete**» (MiR, Corinaldo). Le parole per dirlo. Una comunicazione efficace per superare alcune misconcezioni in geometria.

Scuola primaria

- **SP dell'Istituto Comprensivo «A. Manzoni»** (Rescaldina, Milano). «L'angolo è dove ci sono tutti i ragni... magari c'entra la matematica».
- **Primo Circolo di Spinea** (Venezia), insegnanti della Commissione Matematica. Documentare la matematica: dalla scuola dell'infanzia alla scuola primaria, esperienze di un curriculum condiviso e partecipato.
- **Biblò** (Biblioteca per bambini) coordinata da **Maria Zanarini** (Quartiere Porto, Bologna). La matematica è antipatica. Laboratorio divertente per allenare la mente.
- «Matebilandia, percorsi matematici a MIRABILANDIA», con la collaborazione dell'**I.C. di Castrocaro, 1° C. «A. Saffi»** (Forlì) e Silvia Sbaragli. I Maya e le simmetrie in un parco divertimenti.
- **A. Carloni, L. Giorgi** (SP «Livio Tempesta», Forlì). In classe dopo Mirabilandia.
- «I giovani scienziati» coordinati da **Marco Calò, Guido Della Bruna, Serena Facchinetti, Giorgio Hausermann e Pamela Suozzi** (ASP, Locarno). Coltiviamo giovani scienziati.

- **Renzo Baldoni**, MATEUREKA (Museo del Calcolo, Pennabilli, Pesaro). Dalla fatica al piacere di contare. Mostra degli strumenti e delle macchine che hanno aiutato l'uomo a passare dalla «fatica» al «piacere» di contare.
- Gruppo «**Matematica in Rete**» (MiR, Corinaldo). Le parole per dirlo. Una comunicazione efficace per superare alcune misconcezioni in geometria.
- **Giancarlo Navarra** (GREM, Modena). L'early algebra fra teoria e prassi. Un approccio innovativo all'insegnamento e all'apprendimento della matematica.
- **F. Riva, M. Soldati** (studentesse ASP, Locarno, Svizzera). Leonard e la Regina delle misconcezioni.

Scuola secondaria di primo grado

- «Matebilandia, percorsi matematici a MIRABILANDIA», con la collaborazione dell'I.C. di **Castrocaro, 1° C. «A. Saffi»** (Forlì) e **Silvia Sbaragli**: I Maya e le simmetrie in un parco divertimenti.
- **Renzo Baldoni**, MATEUREKA (Museo del Calcolo, Pennabilli, Pesaro). Dalla fatica al piacere di contare. Mostra degli strumenti e delle macchine che hanno aiutato l'uomo a passare dalla «fatica» al «piacere» di contare.
- Gruppo «**Matematica in Rete**» (MiR, Corinaldo). Le parole per dirlo. Una comunicazione efficace per superare alcune misconcezioni in geometria.
- **Emanuela Ughi, Maria Francesca Tanda, Paola Luciani** e **Marta Ministrini** (Università di Perugia). La mostra in valigia.
- **Centro di Formazione Futura S.p.A.** (San Giovanni in Persiceto e San Pietro in Casale, Bologna) coordinato da **Paola Ferioli**. Obbligo Formativo: l'integrazione fra matematica, meccanica ed elettrotecnica.
- **Centro di Formazione Ciofs Fp** (Bologna) coordinato da **Benedetta Quadrini** e **Luca Magnocavallo**. Mate-matrix.
- **Fondazione Opera Madonna Del Lavoro** (Fomal), San Giovanni in Persiceto (Bologna), coordinato da **Catia Govoni**. Cuciniamo la matematica.
- **Centro di Formazione Enaip**, Bologna, coordinato da **Villelmo Labombarda** e **Alessandro Zucchini**. Circolazione stradale: matematica ed automazione.
- **Cefal** (Consorzio Europeo per la Formazione e l'Addestramento dei Lavoratori), S. Lazzaro di Savena (Bologna), coordinato da **Stefania Pigozzi**. Matematica in vetrina.
- **Giancarlo Navarra** (GREM, Modena). L'early algebra fra teoria e prassi. Un approccio innovativo all'insegnamento e all'apprendimento della matematica.
- **F. Riva, M. Soldati** (studentesse ASP, Locarno, Svizzera): Leonard e la Regina delle misconcezioni.

Scuola secondaria di secondo grado

- «Matebilandia, percorsi matematici a MIRABILANDIA» con la collaborazione di **Giovanni Pezzi** e **Lorenza Resta**. Alla ricerca delle curve con il Liceo «Torricelli» di Faenza.
- **Renzo Baldoni**, MATEUREKA (Museo del Calcolo, Pennabilli, Pesaro). Dalla fatica al piacere di contare. Mostra degli strumenti e delle macchine che hanno aiutato l'uomo a passare dalla «fatica» al «piacere» di contare.
- **Emanuela Ughi, Maria Francesca Tanda, Paola Luciani** e **Marta Minestrini** (Università di Perugia). La mostra in valigia.
- **Centro di Formazione Futura S.p.A.** (San Giovanni in Persiceto e San Pietro in Casale, Bologna) coordinato da Paola Ferioli. Obbligo Formativo: l'integrazione fra matematica, meccanica ed elettrotecnica.
- **Centro di Formazione Ciofs Fp** (Bologna) coordinato da **Benedetta Quadrini** e **Luca Magnocavallo**. Mate-matrix.
- **Fondazione Opera Madonna Del Lavoro** (Fomal), San Giovanni in Persiceto (Bologna), coordinato da **Catia Govoni**. Cuciniamo la matematica.
- **Centro di Formazione Enaip**, Bologna, coordinato da **Villemo Labombarda** e **Alessandro Zucchini**. Circolazione stradale: matematica ed automazione.
- **Cefal** (Consorzio Europeo per la Formazione e l'Addestramento dei Lavoratori), S. Lazzaro di Savena (Bologna), coordinato da **Stefania Pigozzi**. Matematica in vetrina.
- **Italo Tamanini** e **Domenico Luminati** (Università di Trento). Problemi di massimo e di minimo.
- **Classe VH P.N.I. del Liceo Scientifico «A. Roiti»** di Ferrara coordinata da **Mariacristina Fornasari**. La geometria frattale e i suoi sviluppi nelle Scienze e nell'Arte.

Informazioni utili

È riconosciuto l'esonero dal servizio per la partecipazione al Convegno (per insegnanti di ogni ordine e grado, per il personale direttivo ed ispettivo) ai sensi dell'art. 62 del CCNL/2003 in quanto l'Università, ai sensi dell'art. 1 della Direttiva Ministeriale n. 90 del 1 dicembre 2003, è Ente riconosciuto dal MIUR per la formazione dei docenti.

Verrà rilasciato un attestato per n° 20 ore di Aggiornamento, in base alla CM 376, prot. 15218, del 23 12 1995 e successive modifiche. In caso di frequenza parziale al Convegno, verrà comunque rilasciato un attestato per il numero di ore di presenza effettive.

Per avere ulteriori informazioni, ci si può rivolgere a:
 Maria Rita Baroncini
 Ufficio Cultura e Turismo
 Comune di Castel San Pietro Terme
 Piazza XX Settembre 3
 40024 Castel San Pietro Terme BO
 Tel. 051 6954198 Fax 051 6954180 feriali ore 9-13.30
 e-mail: ufficioturismo@cspietro.it
cultura@cspietro.it
<http://www.dm.unibo.it>
<http://www.cspietro.it>
<http://www.dm.unibo.it/rsddm>

Il Convegno è aperto a tutti, non essendo a numero chiuso, qualsiasi sia il giorno d'arrivo. L'iscrizione avviene direttamente durante il Convegno. Non si accettano pre-iscrizioni. La segreteria organizzativa centrale addetta alle iscrizioni avrà sede presso l'Albergo delle Terme, viale delle Terme 1113; sarà aperta venerdì 7 novembre dalle ore 11 alle ore 18 e sabato 8 novembre dalle ore 8 alle ore 18. Si consigliano i Convegnisti di effettuare se possibile le iscrizioni venerdì 7 novembre tra le ore 11 e le 13 per evitare code. Prima delle ore 11 del 7 novembre non verranno accettate iscrizioni. Al momento dell'iscrizione viene consegnata al Convegnista una cartella contenente vario materiale. A ciascun partecipante viene richiesto un contributo alle spese di organizzazione di 50 Euro (studenti e specializzandi con libretto 25 Euro).

La Pro Loco sarà a disposizione per assistenza turistica gratuita ai Convegnisti ed ai loro Accompagnatori e fornirà ogni indicazione relativa ad orari di aerei, treni e bus. È assicurata l'assistenza medica per tutta la durata del Convegno. Per tutta la durata del Convegno saranno attivi servizi di trasporto gratuito tra la sede della segreteria e le stazioni dei bus e ferroviaria di Castel San Pietro. Gli Atti, pubblicati da Pitagora Ed. Bologna, a cura di Bruno D'Amore e Silvia Sbaragli, saranno disponibili fin dal giorno della inaugurazione. I Convegnisti dovranno provvedere per conto proprio alla prenotazione alberghiera. Poiché si prevede un afflusso notevole, si consiglia di provvedere al più presto. La segreteria declina ogni responsabilità per mancato alloggiamento.

Ricettività Alberghiera nel territorio di Castel San Pietro Terme

- ★★★★ Anusca Palace Hotel, viale Terme 1058, tel. 051 948824
- ★★★★ Castello, viale Terme 1010/b, tel. 051 940138
- ★★★★ Gloria, Toscanella, via Emilia 46, tel. 0542 672702
- ★★★ Delle Terme, viale Terme 1113, tel. 051 941140
- ★★★ Nuova Italia, via Cavour 73, tel. 051 941932
- ★★★ Parigi, viale Terme 860, tel. 051 6942027
- ★★★ Park Hotel, viale Terme 1010, tel. 051 941101
- ★★★ Il Gallo, via Repubblica 34, tel. 051 941114
- ★★★ Arlecchino, via Repubblica 23, tel. 051 941835
- ★★ Due Portoni, via Mazzini 141, tel. 051 941190
- ★★ Terantiga, via De Iani 11, tel. 051 6957234
- ★ Maraz Sole e Mare, P.zza Vittorio Veneto 1, tel. 051 941236

4. Recensioni

Arrigo G., Bollini V., Mainini G., Marchio A. (2006). Atolli matematici. Volume 1. Lugano (Svizzera). G. Casagrande Editore. Pagg. 210. ISBN: 88.7795.171.0

Arrigo G., Bollini V., Corrent G., Mainini G. (2007). Atolli matematici. Volume 2. Lugano (Svizzera). G. Casagrande Editore. Pagg. 195. ISBN: 978.88.7795.176.2.

Arrigo G., Beretta C., Mainini G., Tartini R. (2004). Atolli matematici. Volume 3. Lugano (Svizzera). G. Casagrande Editore. Pagg. 172. ISBN: 88.7795.136.X

Arrigo G., Beretta C., Mainini G., Tartini R. (2005). Atolli matematici. Volume 4. Lugano (Svizzera). G. Casagrande Editore. Pagg. 248. ISBN: 88.7795.157.5

Ci si riferisce qui alle II edizioni, 2007. I quattro volumi sono dedicati alle classi della scuola media ticinese che dura quattro anni.

Recensione di Bruno D'Amore

Un recensore matematico abituale e professionista, come il sottoscritto, evita accuratamente di recensire libri di testo per le scuole, per evitare d'essere tacciato di favoritismi, per evitare una folle corsa di Editori ed Autori verso un'ampia, comoda e gratuita pubblicità; ma anche perché, normalmente, nei libri di testo è facile rintracciare errori o per lo meno debolezze sia sul piano matematico, sia su quello didattico-metodologico. Meglio allora tacere. Ma qui non si tratta solo di un libro di testo per i quattro anni della scuola media svizzera; qui si tratta di un gioiellino ben confezionato, dotto, ricchissimo di idee, di spunti matematici e didattici di ogni tipo, un prodotto cioè che, al di là di un uso meramente scolastico, potrebbe essere gustato anche da palati fini per una lettura piacevole, coinvolgente ed interessante. Siamo di fronte ad un testo che si presta non solo ad un uso scolastico di eccellenza, per cervelli raffinati, ma anche a fornire mille idee al docente di non importa quale livello scolastico.

Il capitano Maths conduce una nave in una crociera tra gli atolli mate-

matici, con due passeggeri a bordo, che cambiano di volume in volume: Cocorito, pappagallo variopinto, che ripete d'ogni frase le parole più significative, come a fissarle, e Pulce, elegante gattina nera, talmente furba da cercare sempre le soluzioni più comode e semplici; di nuovo Pulce con Pesce Saggio, un tipo che sa e che esprime il proprio stato d'animo attraverso la forma del proprio acquario; Pippo e Titti, due quattordicenni dai caratteri ben distinti: lui semplicione e ingenuo, lei vispa e raffinata; Beba, una *teenager* poco interessata allo studio, e Materobot, un robot grande calcolatore dal sapere enciclopedico. La crociera parte, ed il lettore-crocerista si trova a passare per vari atolli, quello dei numeri, quello delle figure geometriche, quello del laboratorio matematico. Ogni volume è poi suddiviso in varie componenti: situazioni per apprendere concetti nuovi, sintesi per fissare le idee apprese, palestra per consolidare, test di autovalutazione per mettersi in gioco.

La nave parte, e qui comincia il bello, colloqui fra i tre personaggi detti, che però coinvolgono il lettore crocerista, il quale partecipa in prima persona, entrando nelle situazioni, approfittando delle sintesi, lasciandosi coinvolgere nelle palestre e cercando di capire qual è lo stato della costruzione del proprio apprendimento.

La matematica presente è quella tradizionale, con parecchie proposte innovative riguardanti i numeri, le figure geometriche, la combinatoria, la probabilità e la statistica, ma lo strumento didattico pedagogico è ancor più attuale: intanto perché vi sono stimoli a non finire, senza la usuale paura di offendere chi resta indietro; io sono del parere che, per arrivare lontano, bisogna sparare alto e dunque apprezzare chi osa; e poi ci sono qui tutti gli stimoli ad usare ogni possibile strumento, per esempio si presenta un uso ragionato, consapevole, intelligente, furbo della macchina calcolatrice.

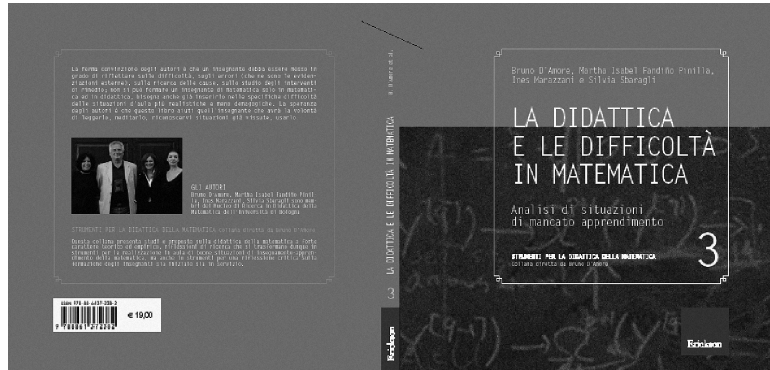
I problemi sono veri, sembrano tratti dalla vita reale, dal quotidiano, dal supermercato, dallo sport, dalle passeggiate, dai giochi, incredibile: quale che sia l'attività che lo studente ama di più, gli si mostra quanta e che matematica contiene, che problemi suscita, come si risolvono.

Sono poi mille le situazioni concrete nelle quali lo studente è invitato a fare, ad operare, non solo a calcolare o risolvere; qui si auspica, è evidente, che l'insegnante che userà questi libri sia ben disposto nei riguardi del laboratorio come luogo dell'ipotizzare, progettare, costruire, verificare, come se l'apprendimento della matematica facesse parte di una fucina di idee, di un'attività concreta, e non solo di fogli a quadretti da riempire. Alcune di queste attività sono a dir poco geniali: impossibile sottrarsi, stimolano una curiosità sorprendente, una voglia di provare che ti spinge a metterti in gioco. Anche perché ce n'è per tutti i gusti e dunque, prima o poi, qualsiasi studente troverà qualche cosa che lo affascini in maniera personale, specifica.

Molta la cura matematica, nascosta, non palese; a fronte di attività semplici ed affascinanti, l'esperto vede bene che cosa si è nascosto e su che cosa si è puntato; e sempre vi scopre un acume e delle sottigliezze che colpiscono per l'astuzia e la competenza che vi si celano.

Dovrebbe essere molto semplice, per un insegnante in gamba, seguire un testo così, anche perché resta poco da fare, solo avviare quella scintilla che si chiama curiosità, e poi sedersi ad aspettare; se vi è buona materia infiammabile, al docente resta solo il paziente compito di aspettare. I concetti, quelli corretti, si formeranno da sé.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Marazzani I., Sbaragli S. (2008).
La didattica e le difficoltà in matematica. Trento: Erickson. Pagg. 160, euro 19.
ISBN: 978-88-6137-238-2.



Dalla Premessa degli autori

Sebbene gli studi e le ricerche teoriche ed empiriche sul complesso processo di insegnamento-apprendimento della matematica siano le più consolidate e le più sviluppate, rispetto alle analoghe di altre discipline, è sotto gli occhi di tutti il fatto che, a fronte del sempre maggior impegno di ricercatori ed insegnanti, prosegue un fallimento strutturale nell'apprendimento da parte degli studenti. Nonostante le spinte innovative e le sempre maggiori conoscenze che la ricerca produce, i convegni, le riviste, i testi che divulgano ed illustrano i risultati delle ricerche, la matematica continua ad occupare un posto di rincalzo nelle simpatie di adulti e giovani, a produrre risultati negativi, a costituire una delle discipline di minor interesse. I giovani che si iscrivono alle facoltà scientifiche sono in netto calo mondiale (anche se le iscrizioni ai corsi di laurea in matematica in Italia sono in leggera ripresa).

Nel processo di insegnamento – apprendimento della matematica c'è qualche cosa che non va; ci sono cioè troppe difficoltà nell'apprendimento della matematica.

Di che cosa si tratta?

A fronte di molti studi condotti soprattutto da psicologi su cause funzionali, organiche, sensoriali etc., cui si fa solo un rapido cenno in questo libro, analoghi lavori di analisi, studio, ricerca, sperimentazione sulle difficoltà nell'apprendimento della matematica, dal punto di vista della ricerca in didattica della matematica, non sono moltissime.

Certo, tra i più recenti, per limitarci al panorama italiano, spicca, per complessità e profondità, quello di Rosetta Zan (2007). Ma noi riteniamo che una pluralità di interventi e di studi, anche tra loro diversi, seppure ad intersezione non vuota, possano aiutare il lettore ad orientarsi in questa letteratura. Più sono gli stimoli, più è pensabile che vi sia un impulso ad analizzare le proprie situazioni d'aula, a scavare nei motivi, nelle cause di queste difficoltà, non solo a scopo analitico, bensì anche per poter intervenire con consapevolezza di causa e dunque con specificità.

Così, abbiamo deciso di raccogliere le nostre idee e le nostre proposte di riflessione su questo argomento e di proporre questa analisi dividendola in quattro mo-

menti che sono poi i capitoli del libro: il primo, di carattere espositivo generale; il secondo, proponendo in dettaglio la teoria degli ostacoli; il terzo, analizzando l'idea di misconcezione; il quarto, verificando come il contratto didattico costituisca specifica difficoltà; una bibliografia finale piuttosto estesa potrebbe aiutare il lettore desideroso di approfondire l'argomento.

Si tratta di una piccola goccia nel mare delle difficoltà, ce ne rendiamo ben conto, ma un aiuto a coloro che, disarmati di fronte a molteplici ripetuti errori sempre uguali, non sanno più che fare. Forse uno stimolo critico, forse una raccolta di esempi, forse quel minimo di teoria che eleva l'esempio a idea più generale, potranno essere d'aiuto al lettore-insegnante.

La nostra ferma convinzione è che un insegnante deve essere messo in grado di riflettere sulle difficoltà, sugli errori (che ne sono le evidenziazioni esterne), sulla ricerca della causa, sullo studio degli interventi di rimedio; non si può formare un insegnante di matematica solo in matematica ed in didattica, bisogna anche già inserirlo nelle specifiche difficoltà delle situazioni d'aula più realistiche e meno demagogiche.

La nostra speranza è che questo libro aiuti quell'insegnante che avrà la volontà di leggerlo, meditarlo, riconoscerne situazioni già vissute, usarlo.

Mazzone S., Fontana F., De Nuccio S. (2008). Leonhard Euler: «l'incarnazione dell'Analisi». Barletta: rotas. Pagg. 80.

Questo quaderno rientra nel programma di attività delle sezioni Mathe-sis (Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche fondata nel 1895) e Cidi (Centro di Iniziativa Democratica degli Insegnanti) di Campobasso per la incentivazione e la diffusione della cultura umanistica e scientifica nelle scuole della Regione Molise. Il titolo, in copertina, dà direttamente la motivazione della scelta di L. Euler come soggetto di questa nuova pubblicazione. Nel corso delle celebrazioni del terzo centenario della nascita di Euler, le sezioni della Mathesis e del Cidi hanno voluto dare il loro modesto contributo con un Convegno, che si è svolto a Campobasso a maggio del 2007, sulla figura e sulle opere di Euler. Il quaderno si rivolge in primo luogo agli insegnanti, ai futuri insegnanti e agli studenti delle scuole secondarie, ma può interessare anche tutti coloro che desiderano saperne di più su uno dei più grandi matematici di tutti i tempi.

È un libretto snello e simpatico che si aggiunge ai materiali prodotti nel nostro cantone in occasione della celebrazione dei trecento anni dalla nascita di Euler. Gli argomenti trattati sono tre:

- L. Euler e l'analisi matematica del suo tempo. (S. Mazzone)
- La «didattica» di L. Euler nelle «Lettere a una Principessa Tedesca». (F. Fontana)
- Euler nella matematica della Scuola secondaria superiore. (S. De Nuccio)

Fra le pagine vi si può trovare qualche spunto in più rispetto ai lavori pubblicati da questa rivista, non poche citazioni originali e alcune interessanti riproduzioni grafiche.

De Nuccio S. (2003). 12 compiti scolastici di Évariste Galois. Campobasso: Edizioni Goliardiche. Pagg. 246, euro 18. ISBN 88-88171-33-9.

Dall'introduzione dell'autore

Si tratta della traduzione dal francese di dodici compiti scolastici di matematica di E. Galois che furono depositati da E. Picard presso l'Istituto di Francia, dove tuttora si trovano nell'album dei manoscritti del giovane matematico francese. Nell'introduzione dell'autore si legge pure che sono scritti su fogli semplici o doppi, generalmente dello stesso formato 12x23 cm, con una grafia che cambia continuamente per l'inchiostro, per la penna e per lo stile.

Il contenuto riguarda argomenti trattati dal professore E. Richard nel corso di *Mathématiques spéciales 2*, frequentato da Galois nell'anno scolastico 1828-29 presso il liceo Louis-le-Grand di Parigi. Lo stesso Galois insegnò questi lavori al suo insegnante, che li conservò con cura e li fece in seguito pervenire a C. Hermite, altro suo geniale allievo. Per i problemi affrontati e per le risoluzioni date, originali e nello stesso tempo eleganti, questi elaborati possono essere considerati il lavoro di un ottimo studente. Anche se non contengono alcuna anticipazione del grande genio matematico di Galois e non annunciano ancora l'opera eccezionale che Évariste riuscirà a creare pochi anni dopo, mostrano però come il giovane Galois, studiando direttamente le opere dei grandi maestri, sia riuscito ad iniziare e completare la sua formazione matematica.

La traduzione di questi compiti scolastici ha lo scopo di far conoscere agli studenti i primi lavori matematici dell'«infelice giovinetto».

Le traduzioni sono corredate di commenti e di note, scritti con caratteri tipografici diversi.

Della sfortunata e breve vita di E. Galois vengono descritti il periodo storico, la famiglia, la carriera scolastica, le idee politiche, le opere e i rapporti con i grandi matematici del tempo, per cercare di capire, fin dove è possibile, la sua complessa e discussa personalità.

La matematica al tempo di Galois era un insieme di teorie: l'algebra, l'analisi, la geometria, non certamente isolate tra loro, collegate con un sistema di relazioni per passare da una teoria all'altra. Ricordiamo che Galois, insieme a N.H. Abel, è stato il creatore dei principi fondamentali dell'algebra moderna, che tratta delle strutture algebriche in cui non si ragiona più su enti determinati, ma si considerano diversi sistemi di regole, ciascuno dei quali viene applicato ad una varietà di modelli distinti.

Per meglio comprendere il forte impulso che seppe dare Galois al processo di generalizzazione della matematica, viene fatta un'attenta lettura della «Memoria sulle condizioni di risolubilità delle equazioni per mezzo di radicali», il cui contenuto costituisce la cosiddetta Teoria di Galois delle equazioni.

Il libro termina con quattro appendici. Nelle prime tre viene riportata una sintesi dei risultati fondamentali del problema della risolubilità delle equazioni per mezzo di radicali, a partire dagli algebristi italiani del '500 fino a Galois; nell'ultima vengono esposte le nozioni fondamentali della Teoria dei gruppi.

Consigliamo vivamente questa opera soprattutto agli insegnanti delle superiori e alle varie biblioteche scolastiche, sempre povere di testi di matematica di un certo interesse.

De Nuccio S. (2003). Lezioni di matematica dagli scritti di Évariste Galois. Vol. I, II. Campobasso: Edizioni Goliardiche. Vol I pagg. 495, euro 39. ISBN 88-88171-92-4. Vol II pagg. 512, euro 42. ISBN 978-887873-036-6.

Dalla prefazione di Silvio Maracchia

Questo è un libro di matematica, un testo adatto alla lettura dei docenti di ogni tipo di scuola, capace di arricchire la loro preparazione e migliorare di conseguenza il loro insegnamento.

Molti argomenti trattati fanno parte dei programmi, altri servono per ampliarli in maniera utile, appunto, alla preparazione del docente ma utile anche agli studenti maggiormente interessati alla disciplina, stimolati poi dal fatto che un loro coetaneo ha dato l'occasione per la trattazione dei vari capitoli; un coetaneo spesso in lotta con la «matematica ufficiale» e con gli insegnanti miopi o poco motivati.

Questo libro ha infatti un taglio storico preciso poiché ruota appunto attorno alla figura tragica e stupefacente di Evariste Galois che ha commosso tutti coloro che ne sono venuti a conoscenza anche solo di sfuggita. In effetti, sia le pagine introduttive del libro rivolte all'ambientazione dell'epoca storica in cui visse Galois attraverso la descrizione delle scuole e dei matematici che maggiormente vennero coinvolti nella sua breve vita e sia gli scritti autentici di Galois anteposti agli sviluppi dei vari argomenti trattati in essi, testimoniano questo interesse storico.

I numerosi riferimenti bibliografici, inoltre, consentono la possibilità di ulteriori sviluppi sia matematici e sia, specialmente, storici, oltre a garantire la serietà della ricerca perseguita dagli Autori, per altro già noti per altre pubblicazioni.

Le Lezioni di Matematica consentono, poi, oltre agli argomenti matematici sviluppati, di mostrare come il giovane Galois, appena diciassettenne, padroneggiava non solo la teoria delle equazioni che lo ha reso famoso, ma anche alcune parti non banali della matematica. È questo un aspetto della sua produzione matematica molto poco nota anche in questi anni in cui la non facile teoria delle equazioni sta attraversando una notevole diffusione scientifica e divulgativa.

Gli spunti storici e didattici sono numerosissimi e spaziano su tutta la storia della matematica. In sintesi: i numeri interi, il calcolo di aree e volumi, i logaritmi, le frazioni continue, i teoremi fondamentali del calcolo differenziale, la misura del lato del pentadecagono regolare, la risoluzione approssimata delle equazioni, il raggio di curvatura delle curve nello spazio. Numerose e molto interessanti sono anche le citazioni originali e le riproduzioni grafiche, essenziali per stimolare gli studenti allo studio dell'evoluzione dei concetti matematici. Si tratta, insomma, di una collana (dovrebbero seguire altri volumi) pensata per gli insegnanti che desiderano rinnovare i contenuti del proprio insegnamento recuperando importanti episodi della lunga storia del pensiero matematico.

Progetto grafico
Bruno Monguzzi
Prestampa
Taiana
Stampa
Veladini

Redazione
Laboratorio di didattica della matematica
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH-6501 Bellinzona
Svizzera

Telefono
091 814 18 21/22/24
Fax
091 814 18 19
gianfranco.arrigo@span.ch

Amministrazione
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH-6501 Bellinzona
Svizzera
Fax
091 814 18 19

Esce due volte all'anno
a maggio e a dicembre

Abbonamento annuo
SFR 30
€ 16

In questo numero: proposte varie dei coautori M. J. Gander, K. Santugini e A. Steiner, di M. Cerasoli e di G. T. Bagni; articoli di didattica proposti da G. Arrigo e da L. Maurizi; passeggiate matematiche di A. Steiner e G. Arrigo; laboratorio matematico di C. Beretta; intermezzo ludico di A. Frapolli e G. Mainini; contributi degli studenti D. Sorini e M. Ferrara; numerose segnalazioni di manifestazioni e numerose recensioni.

Direzione
Gianfranco Arrigo

Comitato di redazione
Aldo Frapolli, Carlo Ghielmetti, Corrado Guidi,
Paolo Hägler, Giorgio Mainini, Edo Montella,
Alberto Piatti, Remigio Tartini

Comitato scientifico
Sergio Albeverio, Giorgio T. Bagni, Giulio Cesare Barozzi, Claudio Beretta, Mauro Cerasoli, S.D. Chatterji, Bruno D'Amore, André Delessert, Colette Laborde, Vania Mascioni, Silvia Sbaragli, Antonio Steiner

ISBN 88-86486-56-1	Repubblica e Cantone
Fr. 18.–	Ticino
	Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport