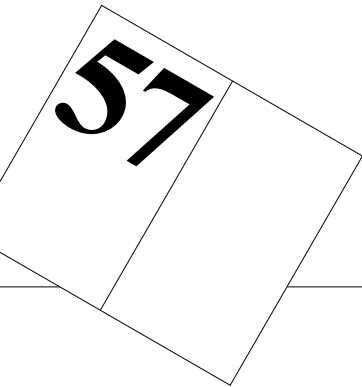


A cura  
del Laboratorio di didattica della matematica

---

# Bollettino dei docenti di matematica



Dicembre  
2008

---

Ufficio  
dell'insegnamento medio  
Centro  
didattico cantonale

Bollettino  
dei docenti di matematica  
57

Repubblica e Cantone  
Ticino  
Dipartimento dell'educazione,  
della cultura e dello sport

© 2008  
Divisione della Scuola  
Centro didattico cantonale

ISBN 88-86486-58-8

# **Bollettino dei docenti di matematica 57**

Dicembre  
2008

Ufficio dell'insegnamento medio  
Centro didattico cantonale

---

	Prefazione	7
--	------------	---

---

I.	Varia	
----	-------	--

---

1.	L'epistemologia scolastica spontanea e la cultura dei problemi matematici Guy Brousseau	9
----	--	---

---

2.	Knapsack: lo zaino e i suoi segreti Stefano Leonesi	21
----	--	----

---

3.	Attività SMASI in favore della scuola Gianfranco Arrigo	31
----	--	----

---

4.	La pianificazione dei consigli di classe Paolo Hägler	53
----	--	----

---

II.	Didattica	
-----	-----------	--

---

1.	Matematica dappertutto: concorso e mostra Joel Kubik Hernandez	65
----	---	----

---

2.	L'analogia in ambito geometrico Silvia Sbaragli, Luigina Cottino, Claudia Gualandi, Giancarla Nobis, Adriana Ponti, Mirella Ricci	71
----	---	----

---

III.	Passeggiate matematiche	
------	-------------------------	--

---

1.	A proposito di... Antonio Steiner, Gianfranco Arrigo	93
----	---	----

---

IV.	Dalla briccola	
-----	----------------	--

---

1.	Il calcio... un'altra occasione per fare matematica Luca Bellini	99
----	---	----

---

2.	Il Piccolo teorema di Pitagora Arturo Bianchi	103
----	--	-----

---

V.	Giochi	
----	--------	--

---

1.	Quiz numero 40: La pesata Aldo Frapolli	107
----	--	-----

---

2.	P-bam numero 4 Giorgio Mainini	111
----	-----------------------------------	-----

VI.

Segnalazioni

---

1.	Conferenza SMASI	113
2.	Recensioni	115

---

## Prefazione

La rubrica Varia si apre con un importante articolo di Guy Brousseau nel quale l'autore, fra l'altro, rende attenti gli insegnanti e i dirigenti scolastici sugli effetti negativi dell'introduzione sistematica degli standard e dei relativi test. È poi la volta di Stefano Leonesi che ci presenta un interessante problema di ricerca operativa. Il terzo contributo presenta l'attività che la SMASI (Società Matematica della Svizzera italiana) sta svolgendo negli ultimi due anni, in favore della scuola. Chiude Paolo Hägler che ci mostra come un matematico, membro del consiglio di direzione di un grande istituto scolastico, può sfruttare le sue conoscenze per allestire un piano dei consigli di classe che tenga conto del maggior numero di condizioni.

La parte centrale è dedicata alla didattica. Joel Hernandez ci presenta un'attività svolta con i suoi allievi lo scorso anno, un concorso che si è concluso con una mostra di notevole qualità. Silvia Sbaragli ci dà una sintesi della sua ultima fatica editoriale, una importante riflessione sull'uso dell'analogia in ambito geometrico, scritta insieme a un gruppo di insegnanti italiane.

Continuano le Passeggiate matematiche di Antonio Steiner e Gianfranco Arrigo e ritorna la rubrica Dalla briccola con Luca Bellini che ci suggerisce come si possa fare matematica anche con il gioco del calcio e con uno sconosciuto Arturo Bianchi, un articoletto dal contenuto misterioso.

Nella sezione giochi ritroviamo il quarantesimo quiz di Aldo Frapolli (auguri!) e il quarto P-bam di Giorgio Mainini.

Alla fine troviamo brevi ma importanti segnalazioni: l'annuncio della conferenza SMASI che Jean-Claude Pont terrà alla fine di gennaio e alcune interessanti recensioni.

# 1. L'epistemologia scolastica spontanea e la cultura dei problemi matematici<sup>1</sup>

Guy Brousseau<sup>2</sup>

In his article *Epistemologia, didattica della matematica e pratiche di insegnamento*, Bruno D'Amore (2007) presents and explains some fundamental concepts of mathematics' epistemology and didactics. He gives me the opportunity, in the first part of this text, to extend our common reflections with a short experimental study of teachers' and pupils' spontaneous epistemology, a topic on which we want to continue working together in the future. The second part will be dedicated to a study of the principles that build up the bases of the didactical epistemology of our society. I will take as a starting point the retro-innovation movement that, in the US and elsewhere is producing very serious negative effects on pupils, teachers and society. Unbridled assessment (High Stake Tests) penetrates into learning/teaching processes. Linked to simple behaviouristic political strategies (NCLB) it provokes damages. We will rapidly recall the principles on which this reform is based, some causes and effects. The most devastating effect is not only a forced individualization of teaching but also a totally individualistic conception of school culture.

## 1. L'epistemologia didattica in classe

L'*epistemologia* è la teoria della scienza in generale, cioè la teoria che cerca di definire i fondamenti, i metodi, gli oggetti e le finalità della scienza.

Le azioni degli insegnanti e degli allievi durante un'attività didattica sono decise in funzione delle convinzioni e delle conoscenze più o meno implicite che formano epistemologie scolastiche: quelle degli insegnanti, che si potrebbero qualificare come professionali, e quelle che utilizzano e condividono con i loro allievi.

L'*epistemologia scolastica* è l'insieme delle convinzioni – esplicite o implicite – che circolano nella scuola, sui metodi, sugli oggetti e sulla finalità delle conoscenze, degli insegnamenti e degli apprendimenti. Tende a rispondere a domande come: che cosa insegnare, apprendere, capire, utilizzare, ricordarsi, cercare, trovare, mostrare ... delle conoscenze; risolvere un problema, un esercizio, ecc. e come farlo? Che cosa fare se «qualcuno non capisce», ecc.

La maggior parte di queste domande non sono poste esplicitamente e non potrebbero esserlo. Le risposte sono implicite: si esprimono mediante azioni, abitudini, convinzioni, usanze. Non sono formulabili o piuttosto ciò che è formulato non corrisponde necessariamente a ciò che è fatto.

Per esempio, abbiamo osservato che gli insegnanti – volontariamente o inconsciamente – evitano il più possibile la costatazione di certi fallimenti degli allievi.

Abbiamo inventariato e classificato le strategie di evitamento, gli «*effetti*», (Brousseau, 1990) con le quali gli insegnanti cercano e accettano risposte formalmente corrette, anche se ottenute con mezzi retorici senza grande valore cognitivo né didattico come suggerire la risposta all'allievo (effetto Topaze), accettare una falsa

1. Questo articolo è stato pubblicato in italiano, per la traduzione di G. Arrigo, sulla rivista *La Matematica e la sua Didattica*, 2, 2008. La Redazione ringrazia l'autore G. Brousseau e il direttore della rivista B. D'Amore per la gentile concessione.
2. Professore emerito di Matematica, Premio Félix Klein 2003 dell'ICMI, Laboratorio «Antropologia e didattica delle scienze e della lingua», Università «Victor Segalen» Bordeaux 2, Istituto Universitario per la Formazione degli Insegnanti di Aquitaine.



ragione, o una parafrasi (Jourdain), utilizzare abusivamente analogie, o l'ostensione, frammentare indefinitamente il sapere da apprendere, ...

Questi *effetti* non sono errori, bensì mezzi retorici infondati anche se produttivi. Rispondono a circostanze precise e permettono alle conoscenze che contornano e attivano il sapere di giocare il loro ruolo. In più aprono uno spazio indispensabile alla *devoluzione* didattica. Ma hanno un'influenza sulle convinzioni relative al funzionamento degli apprendimenti. È così che, con il «processo psicomatematico» di Zoltan P. Dienes, l'analogia ha potuto apparire come la base unica di una teoria dell'insegnamento e dell'apprendimento. Abbiamo spiegato questi effetti con la necessità di rinviare il processo d'insegnamento. La maggior parte delle fermate sono intempestive. Rimandano l'allievo che sbaglia a un apprendimento personale molto costoso e fuori dal processo e gli fanno sovente perdere inutilmente del tempo. Il bilancio è peggiore in situazioni d'insegnamento collettivo.

Vi sono molte altre manifestazioni dell'epistemologia scolastica: per esempio gli allievi credono...

- che l'insegnante deve avere insegnato tutto ciò che chiede di sapere
- che l'allievo deve ricordarsi di tutto ciò che l'insegnante ha detto,
- e dunque che bisognerebbe imparare tutto a memoria...
- o al contrario inventare sul momento o indovinare la risposta richiesta
- o, inversamente, che quando si ha capito, si sa, e che non c'è bisogno di studiare,
- che cercare consiste nell'aspettare che sopraggiunga un'idea...

Le convinzioni degli insegnanti sono numerose e spesso altrettanto fantasiose.

L'epistemologia didattica spontanea conduce gli insegnanti e gli allievi ad adottare queste strategie e questi comportamenti sorprendenti.

Questi comportamenti didattici sono tradizionalmente oggetto di derisione nelle nostre società. Infatti in situazioni non didattiche, la retorica didattica, il tono, le ripetizioni, tutte le singolarità legate all'insegnamento sono senza oggetto, appaiono dunque ridicole. La nostra cultura ignora le necessità e le contraddizioni dell'indifendibile *contratto didattico*.

L'epistemologia formulata e quella che è taciuta ma che si rivela nelle decisioni non combaciano. La prima ha una funzione sociale e culturale, la seconda una funzione euristica e pratica. La differenza tra queste due forme dell'epistemologia scolastica rileva esattamente l'insufficienza delle nostre conoscenze in didattica.

La cultura epistemologica degli allievi comporta caratteri comuni espliciti, eco delle concezioni della società, fra cui quelli veicolati dai media (spesso senza precauzione). L'epistemologia implicita e pratica si adegua alle necessità del lavoro: nasce nell'attività di classe, influenzata in modo più o meno cosciente dall'insegnante. L'epistemologia esplicita può essere condivisa.

Si potrebbe pensare che, essendo il ruolo dell'epistemologia implicita nei processi d'insegnamento lo stesso da una classe all'altra, le concezioni epistemologiche implicite degli allievi e degli insegnanti sarebbero le stesse. Ma i lavori di Jarmila Novotna sembrano mostrare che variano da una classe all'altra<sup>3</sup>.

---

3. Nel quadro delle sue ricerche sui «problemi espressi a parole».

### Messa in evidenza di una componente dell'epistemologia degli allievi

La sperimentatrice chiede ad alcuni allievi di *ordinare* cinque problemi – scelti dai loro insegnanti fra quelli che avevano già risolto e studiato – secondo diversi *criteri*: **difficoltà, lunghezza dell'enunciato, interesse, chiarezza, utilità**.

Questi criteri sono stati scelti per evidenziare relazioni molto diverse con l'insegnamento. La *difficoltà* dei problemi sembra dover giocare un ruolo importante per gli allievi e per l'insegnante. Al contrario, se la *chiarezza* gioca un ruolo, questo elemento non ci pare così fortemente identificato. La *lunghezza dell'enunciato* è l'unico criterio oggettivo. L'*utilità* di un problema è un criterio che solo l'insegnante può valutare e formulare. L'*interesse* è un criterio individuale e collettivo.

Il test del coefficiente di correlazioni per ranghi di Kendall (il metodo dei giudici) (Sigel, Castella, 1988) permette di sapere se c'è o no concordanza fra gli allievi, per ogni ordinamento. Una concordanza significativa su un ordinamento secondo una variabile indica che, almeno implicitamente, il gruppo di allievi è sensibile a questa variabile.

Su un campione di 55 allievi, appartenenti a tre classi del 7° e 8° anno di scolarizzazione, *nessun* criterio ha dato luogo a un ordinamento significativo.

Al contrario, lo studio per classi ha mostrato, per alcune, ordinamenti significativi *per tutti* i criteri (vedere la tavola 1); cioè certi criteri studiati possono assumere uno stesso senso in una stessa classe, ma questo senso differisce da una classe all'altra o da una scuola all'altra.

#### Concordanze fra gli allievi

Classe B			
Ordinamenti secondo...	W. Kendall	Insieme dei 22 allievi	
Difficoltà	0,199633	Chi <sup>2</sup> = 26,35152	N S a .05
Interesse	0,446694	Chi <sup>2</sup> = 39,30909	S a .01
Lunghezza	0,50155	Chi <sup>2</sup> = 44,13636	S a .01
Chiarezza	0,423967	Chi <sup>2</sup> = 37,30909	S a .05
Utilità	0,430992	Chi <sup>2</sup> = 37,92727	S a .05

Tavola 1

Frazionando ulteriormente, secondo i **risultati degli allievi** in matematica (indicati dagli insegnanti), alcuni ordinamenti significativi appaiono in tutte le classi, sia fra gli allievi migliori sia fra i più deboli (vedere la Tavola 2).

#### Concordanze fra ordinamenti secondo i risultati degli allievi in matematica

Scuola A classe 1...	Risultati buoni		Risultati scarsi	
Difficoltà	Chi <sup>2</sup> = 19.82	S. 0,10	Chi <sup>2</sup> = 8,00	S. 0,02
Interesse	Chi <sup>2</sup> = 4,48	NS	Chi <sup>2</sup> = 1.86	NS
Lunghezza	Chi <sup>2</sup> = 23.88	S. 0,05	Chi <sup>2</sup> = 1.06	NS
Chiarezza	Chi <sup>2</sup> = 17.96	NS	Chi <sup>2</sup> = 7.2	S. 0,05
Utilità	Chi <sup>2</sup> = 13.65	NS	Chi <sup>2</sup> = 7.73	S. 0,05

Tavola 2

Ma gli ordinamenti significativi portano su criteri diversi e, inoltre, per uno stesso criterio significativo, gli ordinamenti sono diversi.

Da questa esperienza concludiamo che esiste un'epistemologia scolastica della quale certe componenti importanti si esprimono al livello delle classi. Queste componenti sono osservabili con il metodo che abbiamo utilizzato, che permette un'esplorazione sistematica.

Si tratta ora di intraprendere la determinazione degli indicatori che saranno utilizzabili dagli insegnanti nella progettazione e nella conduzione delle loro lezioni. Questa necessità è soprattutto evidente nelle attività di risoluzione di problemi.

In più, i progetti d'insegnamento che gli insegnanti e i ricercatori in didattica cercano di proporre sono limitati dalle concezioni epistemologiche e didattiche sparse nella società. Per gestire le richieste della scuola, il cittadino utilizza una epistemologia popolare molto sommaria che tende a imporsi nelle classi. La riprenderemo nel paragrafo seguente.

## 2. Epistemologia e didattica nella società Alcuni Principi della didattica classica

**1. L'obbligo del risultato:** il fallimento di un tentativo dev'essere sanzionato, e se il contratto non prevede clausole di rottura, il tentativo dev'essere ripreso fino al raggiungimento del successo.

**2. La regola delle condizioni preliminari sufficienti.** L'insegnamento è considerato come la «costruzione» di una nuova conoscenza con l'aiuto delle conoscenze acquisite prima dagli allievi e di un modo di costruzione ad essi noto.

La regola è interpretata nella seguente maniera restrittiva: le condizioni di apprendimento di una conoscenza «devono essere ostensibilmente riunite» nel momento del suo insegnamento.

Le relazioni fra i saperi acquisiti, i saperi da apprendere e i principi di costruzione sono diverse e abbastanza vaghe: dal semplice al complesso, dalla parte al tutto, dalle condizioni sufficienti alle conclusioni ecc. o inversamente.

In matematica, questa regola delle condizioni preliminari sufficienti conduce a considerare gli *spazi assiomatici* come modelli didattici.

**3. La regola di ottimizzazione.** Per insegnare il più possibile, bisogna perdere meno tempo possibile. Associato a una certa ignoranza del funzionamento degli apprendimenti invisibili, questo principio conduce l'insegnante a insegnare solo ciò che dev'essere appreso e dunque ad esigere che gli allievi apprendano tutto ciò che è stato insegnato. Il principio può essere corretto in «insegnare ciò che è indispensabile che l'allievo conosca per potergli insegnare ciò che deve apprendere». In ogni caso ogni curriculum si rappresenta allora con uno schema di fabbricazione da ottimizzare. (Per esempio, con i metodi dell'industria tipo la P.E.R.T.). Questa regola conduce a considerare l'apprendimento di conoscenze preliminari la condizione *sine qua non* per il passaggio all'insegnamento di una conoscenza mirata.

**4. La norma di passaggio da una tappa alla seguente** fondata sulla riuscita in una *prova* che certifichi sia l'acquisizione dei «prerequisiti» sia la loro disponibilità per gli apprendimenti successivi.

---

Secondo i casi, il termine «prerequisito» assume significati molto diversi:

- Tale sapere non può essere insegnato senza che tale conoscenza (detta prerequisito) sia «acquisita» (conosciuta, ..., perfettamente saputa?). Questa affermazione è indipendente dalle circostanze e dai metodi d'insegnamento?
- È forse insegnata ma nessuno degli allievi che non hanno soddisfatto i prerequisiti non può apprenderla, o meglio tale proporzione di allievi non può apprenderla, ecc.
- Tutti gli allievi che hanno soddisfatto le prove sui prerequisiti dovrebbero essere rassicurati di apprendere, ecc.

Queste regole costituiscono l'essenziale delle convinzioni epistemologiche degli insegnanti e degli allievi. Parrebbero logicamente giustificate. Infatti, sono fondate su una concezione del sapere e dell'insegnamento basata sulla fabbricazione degli oggetti e sulla distribuzione di beni materiali. Non appena si confrontano con l'osservazione, si rivelano contraddittorie.

### **Le vere pratiche della didattica spontanea**

Le nostre osservazioni al COREM hanno mostrato perché, di fatto, gli insegnanti non possono seguire queste regole e devono «praticare» il loro insegnamento in modo differente.

Ma questa *didattica spontanea* effettiva non è generalmente esplicitabile sotto forma di regole perché le decisioni dipendono da circostanze varie, ignorate dalle regole. Non appena la si vuole generalizzare, appaiono le sue contraddizioni rispetto alle concezioni ingenuie.

A questo proposito, abbiamo ricordato in precedenza l'esempio degli effetti del contratto didattico.

Abbiamo osservato anche che, in realtà, gli insegnanti trattano le conoscenze che insegnano, in modo differente, secondo il ruolo che giocano nella situazione e secondo il loro statuto scolastico al momento dell'insegnamento. Prima di essere richieste come referenza, dunque come *sapere* «acquisito», una conoscenza può essere stata incontrata, utilizzata, evocata, formulata, discussa, spiegata o anche istituzionalizzata. In ogni caso una stessa *conoscenza* gioca un ruolo diverso e dà luogo ad azioni didattiche spontanee diverse.

Queste diverse «forme» e funzioni delle conoscenze erano state riconosciute da Bloom negli anni '60 nella sua tassonomia degli obiettivi. Ma in assenza di studi sulle loro funzioni reciproche e soprattutto delle loro relazioni con decisioni didattiche, non hanno fatto che giustificare e rinforzare il modello d'insegnamento basato sulle regole classiche e i metodi comportamentisti. Perché nei dibattiti pubblici negli Stati Uniti non è più stato possibile far valere esplicitamente la necessità e la possibilità di coniugare queste diverse funzioni delle conoscenze per gli apprendimenti. Le conoscenze sono state confuse con i saperi e trattate come questi nella concezione delle valutazioni e della condotta politica dell'insegnamento.

## La valutazione per test standardizzati

La valutazione spontanea dello stato delle conoscenze degli allievi da parte degli insegnanti è complessa e imprecisa (vedere ad esempio la docimologia di H. Pieron). La sua sostituzione con valutazioni per mezzo di test formali standardizzati, più facile da effettuare, da compilare e da analizzare superficialmente, si espande a partire dagli anni '60.

Da allora, l'osservazione delle decisioni degli insegnanti ci ha mostrato che l'uso di questi test *durante le fasi di apprendimento* avrebbero conseguenze tristi *se fossero associate ai principi classici e ai metodi comportamentisti* (Brousseau, 1978). Nei trent'anni che seguirono questa prima analisi, le nostre previsioni si sono rivelate esatte e le abbiamo potute affinare.

## Gli effetti previsti e osservati

**i) La sotto valutazione degli allievi.** Infatti, per definizione, le conoscenze non possono essere valutate fuori dalle situazioni e in particolare per mezzo dei test standard. Ora la valutazione interpreta come uno scacco il minimo scarto «dalla» norma di apprendimento. Da cui una moltiplicazione drammatica delle «costatazioni» di fallimento.

**ii) L'allungamento senza limiti del tempo d'insegnamento.** A ogni «fallimento» l'insegnante è obbligato a far riprendere l'apprendimento completo fino a raggiungere la forme di «sapere» della conoscenza. Ma vi sono altre cause di allungamento: l'individualizzazione dell'insegnamento e la frammentazione del sapere.

**iii) L'individualizzazione dell'insegnamento.** In realtà, questo allungamento del tempo di apprendimento individuale cresce ancora perché l'insegnante *deve* creare, ufficialmente o *de facto*, gruppi di livello. Il processo sfocia in un insegnamento individuale. Il tempo che un insegnante può consacrare a ogni allievo è allora insignificante se questi non è un precettore. (E i precettori sono privati della possibilità di beneficiare di processi reali di costruzione della matematica.)

**iv) La frammentazione del sapere.** Ogni «fallimento» conduce a una decomposizione in saperi più «elementari» sempre più difficilmente collegabili. L'allungamento del tempo d'insegnamento conduce a sua volta a conseguenze disastrose.

**v) La concentrazione sui saperi di basso livello tassonomico** e dunque su processi di apprendimento di basso rendimento (comportamentismo), aumenta ancora i bisogni di tempo d'insegnamento.

**vi) Conseguenze sociali.** Derivano dalle *domande ripetute di alleggerimento* dei curricula o degli obiettivi da parte degli insegnanti.

## Altri effetti osservati

**i) Conseguenze sociali politiche ed economiche** che non avevamo previsto ma che si osservano oggi negli Stati Uniti. Interpretati da una società che ignora i fatti della didattica e dell'epistemologia, le domande di alleggerimento sono considerate come debolezze del sistema educativo e soprattutto degli insegnanti.

Le esigenze Nabucodonosoriane dei governi conducono gli insegnanti a

*riduzioni tacite* considerate dal potere come dissimulazioni o inganni, che creano un clima deleterio dentro e fuori gli istituti, in particolare in quelli pubblici.

**ii) Conseguenze epistemologiche.** Osserviamo uno *scivolamento epistemologico e culturale*: i test, inizialmente mezzi di valutazione, diventano essi stessi obiettivi, poi oggetti stessi, materia, dell'insegnamento. Le conoscenze sono così destrutturate, de-teorizzate...

Alcuni *problemi sono requisiti come prove* di controllo dell'acquisizione dei saperi. I problemi usuali che dovrebbero essere momenti di attività matematica sono contaminati dall'angoscia o dalla passività distruttrice associata alle prove. L'intera concezione scolastica dell'attività matematica è sfigurata.

### **Il fenomeno è ricorrente**

La densità delle prove di valutazione non è limitata da nessuna disposizione del sistema. Nulla impedisce che occupino tutto il tempo di lezione.

Così l'analisi è falsata dai risultati, conduce a scelte disastrose per il rendimento del lavoro dell'insegnante. I risultati, prima solo sotto valutati, poi vanno effettivamente in caduta libera.

Le valutazioni negative sono ancora accentuate dall'aumento delle esigenze nutrite da numerose «rilevazioni» provenienti da molti settori: psicologia, pedagogia, sociologia, economia, politica ... Nessuno di questi ambiti indica una possibilità di correzione, né valuta la validità di queste richieste. La fossilizzazione del sistema, dunque, non porterebbe che al suo fallimento.

### **La retro innovazione**

Le pratiche comportamentiste in voga dopo la guerra '39-'45 furono facilmente respinte dall'evidenza delle pratiche classiche, molto più adatte alla maggior parte delle condizioni dell'insegnamento dell'epoca. Questi rifiuti erano capiti da una popolazione che nell'insieme dava fiducia alla loro scuola e ai suoi responsabili.

L'incorporazione e la strumentalizzazione della scuola in diverse utopie spesso generose ma ignoranti ha condotto a riforme a cascata, dopo il «fallimento» proclamato, a volte prematuramente, dei precedenti. In questo processo le pratiche comportamentiste riappaiono in forze per effetto di potenti campagne ideologiche, politiche e commerciali. Chiamo questo ritorno «retro innovazione».

### **Un esempio**

Oggi negli Stati Uniti, malgrado eccellenti intenzioni, il sistema mostra le conseguenze previste.

Per una politica scolastica più giusta, gli High-Stake Tests (HST) sono obbligatori in tutte le scuole: si suppone valutino le conoscenze acquisite dagli allievi e dunque il risultato del lavoro degli insegnanti e mostrino le debolezze del sistema. Nella continuazione di questa pratica, la legge No Children Left Behind (NCLB) prevede sanzioni contro gli insegnanti (da finanziarie fino all'esclusione) e contro le scuole (chiusura) che non raggiungono i livelli richiesti negli HST.

In un'opera recente, Nichols e Berliner mettono in evidenza gli effetti – i danni collaterali – che questa politica, a prima vista logica e persino generosa produce:

- accrescimento della discriminazione causato dalla chiusura di scuole nelle aree depresse,
- imprigionamento degli insegnanti in rapporti pedagogici e sociali insostenibili,
- scoraggiamento ed esclusione degli allievi più deboli o appartenenti a popolazioni straniere,
- generalizzazione dell'«imbroglio» (termine che copre di obbrobrio gli effetti didattici degli insuccessi da noi citati in precedenza), ecc.

### **Conclusioni del paragrafo 2**

Le cause di movimenti di una tale ampiezza e di una tale potenza sono numerose. Le spiegazioni precedenti sono per la maggior parte ben salde.

Ma avere un effetto qualunque sul comportamento epistemologico delle nostre società è un problema didattico di ben altra ampiezza. I migliori propositi rimangono senza effetto (per esempio, la regolazione della numerazione orale in Francia in stallo da duecentocinquant'anni).

La pratica più minacciata dal riduzionismo comportamentista è l'uso onesto ed efficace dei problemi e delle domande, perché dipende da concezioni epistemologiche oggi mal conosciute. Gli insegnanti non hanno indici chiari concernenti la realizzazione degli obiettivi specifici che mirano con questo tipo di attività. Sono presi in linea di conto solo la riuscita e il fallimento.

## **3. La cultura dei problemi in matematica**

### **Testi, problemi, situazioni**

Nell'insegnamento un *problema* è un *teorema*, un testo di matematica trasformato in domanda con un procedimento formale.

La *soluzione* conduce a esplicitare saperi matematici organizzati secondo una costruzione logica. Si riferisce dunque a un testo.

La *ricerca di una soluzione* pone il problema in un insieme di condizioni più vasto, una *situazione*, e fa appello a conoscenze variate e a ragioni più generali (ergonomiche, storiche...). Si riferisce a una attività matematica che tenta di ricreare (utilizzazione di modelli vero o falso, ecc.).

È ben noto che l'insegnamento dei testi e degli algoritmi è necessario ma insufficiente sia per esercitare le conoscenze sia per acquisirne di nuove.

I problemi potrebbero non essere, come gli esercizi, che un mezzo di memorizzazione intelligente. In questo caso non mostrano le domande se non a partire dalle risposte, tutte preparate nella loro forma standard, e le offrono allo studio e all'ammirazione.

Anche la produzione e la scelta di domande devono essere favorite.

Ma un problema «aperto» suppone l'intervento di conoscenze scon-

sciute dal soggetto o per lo meno non insegnate. Viola dunque la regola dell'insegnamento preventivo sufficiente. Occupa anche un tempo considerevole per un beneficio dubbio.

Si tratta dunque, per insegnare la matematica, di modellizzare l'attività matematica produttrice di conoscenze e di creare condizioni che permettano agli allievi di dedicarsi con i loro mezzi agli oggetti di saperi che sono loro proposti.

Quali sono i mezzi utilizzati per realizzare questo progetto?

### **L'insegnamento dei metodi di risoluzione dei problemi**

Per migliorare la capacità degli allievi a risolvere problemi, alcuni didatti hanno inventariato le «euristiche» descritte da matematici come Polya e hanno voluto sviluppare il loro impiego. Ma, chiusi nella logica della didattica classica, sono stati indotti a proporre di insegnarle come saperi.

Ora, apprendere e utilizzare euristiche non è più semplice di apprendere e utilizzare teoremi, inoltre le euristiche sono conoscenze, ma non saperi, le loro condizioni d'impiego non sono determinate. Il fallimento è ineluttabile. Le euristiche possono essere passate agli allievi solo come metafore, sulla falsa riga delle conoscenze, da utilizzare sotto la responsabilità dell'utilizzatore.

Insegnarle *come saperi* costituisce un caso di scivolamento metadidattico.

### **Le olimpiadi**

Le Olimpiadi matematiche sono tali da suscitare nelle classi un'emulazione interessante e da far sorgere vocazioni. Ma con aspetti collaterali che non sono tutti positivi.

Inoltre i problemi sono recuperati come strumenti di valutazione e di confronto degli allievi. Ciò che non è senza conseguenze dubbiose per certi altri allievi e per l'insegnamento. Il ruolo di acculturazione degli allievi alla matematica è ignorato, a beneficio di un culturismo individuale spesso derisorio. Le prove del tipo «challenge del numero» o «Kangourou» – nelle quali è la partecipazione che è premiata senza comunque ignorare le prestazioni – sono adattamenti più utili all'insegnamento.

### **I rally matematici**

I «rally matematici» sono gare nelle quali i concorrenti – individui o squadre – devono ottenere per tappe un determinato risultato, spesso con mezzi o itinerari diversi e osservando certe convenzioni. I quesiti proposti sono enigmi matematici che ogni concorrente deve affrontare da solo ma che lo conducono a esplorare aspetti originali della questione che possono essere comunicati a tutti alla fine della prova. Lo spirito è l'opposto di quello delle olimpiadi.

L'organizzatore di un comune rally non si prefigge né di valutare i concorrenti né di «insegnare loro qualcosa». Cerca di far loro vivere una piccola *avventura* in una certa «regione», in modo che ciascuno ricavi molte osservazioni e ricordi interessanti da scambiare con gli altri al momento del ritrovo. Non deve soprattutto lasciare che qualcuno si perda irrimediabilmente. Parallelamente l'organizzatore della parte



matematica cerca di massimizzare il piacere e la soddisfazione del maggior numero di loro nell'incontro con una regione matematica. Un'avventura ricca d'insegnamenti e di piacere non è necessariamente una collezione di facili successi.

### **Conseguenze dello studio delle situazioni e dei processi didattici**

Tutte le occasioni di attività o di riflessioni matematiche per gli allievi sono analizzabili in termini di situazioni matematiche. Le situazioni didattiche comprendono situazioni matematiche nelle quali la riuscita è proprio l'obiettivo assegnato agli allievi, ma l'insegnante si interessa dapprima e spesso di più del rendimento didattico e cognitivo della situazione, che non si misura soltanto alla luce della sola riuscita.

Ciò che l'allievo può apprendere nel corso della ricerca di una soluzione non è contenuto nella soluzione ed è mal rappresentato dalla sola riuscita.

L'impiego di un algoritmo convenuto può far evitare il fallimento, ma allora la sua applicazione di solito procura solo un debole aumento delle conoscenze. Invece l'uso frequente è una condizione necessaria del mantenimento di un sapere.

Certi «fallimenti» insegnano meglio, di più e più velocemente, di una riuscita uniforme ottenuta con artifici didattici, di modo che la non riuscita durante l'apprendimento non significa affatto un «fallimento».

Il tasso di riuscita è un indice che non può essere utilizzato ingenuamente in questo caso.

### **Il concorso di enunciati**

Questo esempio di interventi destinati a favorire le conoscenze degli allievi sui problemi e a modificare la loro epistemologia spontanea è tratto dalla mia esperienza d'insegnamento dei razionali e dei decimali [Brousseau 1986] e da lavori recenti. In questo concorso gli allievi ordinano enunciati di problemi, li confrontano, li classificano, li giudicano e cominciano a costruirne di nuovi. Non sono più i problemi che selezionano gli allievi, ma è il contrario.

Si tratta di sviluppare una cultura basata sulla produzione da parte degli allievi di problemi e di domande di matematica.

## **4. Conclusioni**

Questo testo è un messaggio in favore dello sviluppo rapido e ben orientato dello studio scientifico dell'insegnamento della matematica e della sua diffusione controllata nella società.

Propone una sintesi degli strumenti che studi scientifici come quelli citati nel quadro della teoria delle situazioni possono produrre.

È anche un'introduzione a un inventario e a una riflessione sui mezzi e i quadri di questo studio scientifico.

*La didattica della matematica* è iniziata con lo studio delle situazioni, dispositivi di apprendimento e di insegnamento, e dei loro rapporti con la conoscenza. La didattica era e resta l'arte di insegnare qualche cosa a qualcuno che ha bisogno di ap-

prenderla. La didattica della matematica studia questa arte e le condizioni di diffusione della matematica fra gli esseri umani e le loro istituzioni.

Questo studio mi sembra che debba essere basato sull'*osservazione* delle *pratiche di classe* (Brousseau, 1978). Ma non si riduce all'inventario delle interazioni esistenti. Dev'essere preceduta e accompagnata dalla loro modellizzazione, dagli studi teorici necessari e da un ritorno alla contingenza sotto forme adeguate. La sua natura sperimentale le suggerisce nuove proposte d'ingegneria. *L'ingegneria didattica* è nello stesso tempo lo strumento del suo iter sperimentale e quello della sua utilità per la concezione e la condotta del suo sviluppo.

Numerosi sono stati gli ambiti sollecitati come quadro di queste ricerche a volte con insistenza e malgrado non poche riserve: la Pedagogia, la Matematica, l'Epistemologia sperimentale, la Psicologia, le Neuroscienze, la Sociologia, le Scienze della comunicazione e del linguaggio, e più recentemente l'Antropologia o l'Etnologia... Nessuno riesce a soddisfare l'insieme delle condizioni necessarie.

## Bibliografia

Antibi A. (2007). *Les notes: la fin du cauchemar*. Paris: Math'adore.

Brousseau G. (1978). L'observation des activités didactiques. *Revue française de pédagogie*, 45, 130-140.

Brousseau N. et G. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. IREM de Bordeaux.

Brousseau G. (1990). Le contrat didactique et le concept de milieu: Dévolution. *Recherches en didactique des Mathématiques*. 9.3, 309-336. (Actes de la V<sup>ème</sup> Ecole d'été de Didactique des mathématiques, Plestin les grèves). Grenoble: La pensée sauvage.

Brousseau G. (2002) «Les doubles jeux de l'enseignement des mathématiques», (2002), 83-155. *Questions éducatives, l'école et ses marges: Didactique des mathématiques*, n. 22-23 décembre 2002 Centre de recherches de l'Université Jean Monnet Saint Etienne

Brousseau G., Brousseau N., Warfield V. (2004). Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part I: Rationals as measurement. *Journal of Mathematical Behavior* 23, 1-20

D'Amore B. (2001). *Scritti di Epistemologia matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (2007). Epistemologia, didattica della matematica e pratiche di insegnamento. *La matematica e la sua didattica*. 21, 3, 347-369.

D'Amore B. (1999). *Elementi di Didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

Nichols S.L., Berliner D.C. (2007). *COLLATERAL DAMAGE how High-Stakes Testing corrupts america's schools*. Sharon L. Harvard Education Press.

Sigel S., Castellan J. (1988). *Nonparametric statistics for the behavioral of sciences*. II edizione. London: MacGraw-Hill.

---

## 2. Knapsack: lo zaino e i suoi segreti

Stefano Leonesi<sup>1</sup>

What do knapsacks, Mathematics and secret codes share? In this paper we discuss the knapsack problem (or subset-sum problem) and its applications to public-key cryptosystems. Their past and future are considered and evaluated, basically in terms of security and efficiency.

### 1. Introduzione

Immaginate di dover preparare lo zaino (*knapsack* in inglese) per andare a scuola o, più allegramente, per una gita in campagna, e di avere a disposizione una certa quantità di oggetti per riempirlo, in modo da utilizzare tutto e solo lo spazio a disposizione, senza lasciare parti vuote ma neanche carichi «sporgenti». La questione appare frivola e poco attinente con numeri, matematica e codici segreti. Ma se pensiamo ad esempio a problemi generali di massimizzazione di un carico da trasporto o di sfruttamento ottimale dello spazio disponibile, si mostra assai più concreta ed interessante. Nei prossimi paragrafi vedremo piuttosto come da essa, formalizzata opportunamente in termini matematici, si possano trarre spunti e motivazioni per ideare dei sistemi crittografici di tutto rispetto.

### 2. Matematizzando

Dapprima traduciamo il problema dello zaino in forma matematica.

Consideriamo dunque uno zaino con un volume prestabilito  $V$  e  $k$  oggetti distinti di volume  $v_0, \dots, v_{k-1}$  rispettivamente per riempirlo; magari restringiamoci al caso in cui tutti questi volumi,  $V, v_0, \dots, v_{k-1}$ , siano rappresentati da numeri interi. Il quesito assume le seguenti sembianze.

**Problema dello Zaino.** Dati i numeri naturali  $k, V, v_0, \dots, v_{k-1} \neq 0$ , determinare, quando possibile, una sequenza tale che  $e_0, \dots, e_{k-1} \in \{0, 1\}$  tale che

$$V = \sum_{i < k} e_i v_i.$$

---

1. Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Camerino, via Madonna delle Carceri 9, 62032 Camerino. Dipartimento di Scienze della Comunicazione, Università di Teramo, Coste Sant'Agostino, 64100 Teramo. email: stefano.leonesi@unicam.it.

---

In questa formulazione, i volumi degli oggetti che colmano esattamente lo zaino sono quei  $v_i$  per cui  $e_i = 1$ .

### 3. Verificare o risolvere?

Una volta esposto il problema in versione matematica, il primo interrogativo che ci si può porre è: assegnati alcuni tra i  $k$  oggetti, siamo in grado di verificare se essi ricolmano esattamente lo zaino? Cioè se la somma dei loro volumi sia proprio  $V$ ? Certamente sì, e lo possiamo fare anche molto rapidamente: basta riempire lo zaino con gli oggetti scelti e alla fine ispezionare se essi saturano perfettamente lo zaino senza straripare. Ad esempio sia  $V=23$  il volume di uno zaino e siano  $v_0=2, v_1=5, v_2=6, v_3=9, v_4=12, v_5=19$  i rispettivi volumi degli oggetti a disposizione. È operazione di poco conto controllare che risolvono il problema.

La seconda e più rilevante domanda chiede invece se e come sia possibile scegliere alcuni tra i  $k$  oggetti in modo da colmare esattamente lo zaino. La situazione di differenza in modo sostanziale dalla precedente: un conto è *verificare* e un altro è *trovare* gli oggetti giusti. Comunque, il primo metodo che salta in mente è quello di muoversi per tentativi e vagliare tutte le possibili combinazioni di oggetti per riempire lo zaino senza eccessi o difetti. Presto però ci si renderebbe conto che questa strategia, ancora accessibile quando i  $k$  oggetti da controllare sono pochi, come nel caso di prima, diviene proibitiva se  $k$  è molto elevato. In effetti, il numero dei controlli da attuare coincide con quello dei sottoinsiemi  $\{0, \dots, k-1\}$  di che sappiamo essere  $2^k$  (incluso l'insieme vuoto) ed è quindi «esponenziale» rispetto a  $k$ : già con soli 10 oggetti saremmo costretti, nel peggiore dei casi, ad affrontare 1024 tentativi, e con 20 addirittura oltre un milione di prove. Il «caso peggiore» non è un'eventualità così rara perché ad esempio si presenta ogni qual volta che il problema dello zaino non ammette soluzione, in cui cioè non esiste alcuna combinazione degli oggetti che riempia perfettamente lo zaino, costringendoci così ad esaurire tutte le possibilità di selezione degli stessi prima di arrenderci. Il *problema dello zaino*, problema chiamato *knapsack* anch'esso per estensione, non è detto infatti che ammetta soluzione e, quando la ammette, non è garantito che sia unica; consideriamo a tal riguardo uno zaino di volume  $V=13$  da riempire con 3 oggetti di volume  $v_0=2, v_1=5$  e  $v_2=9$ : è immediato verificare che il problema non ammette soluzione; se invece abbiamo a disposizione anche altri 2 oggetti di volume  $v_3=8$  e  $v_4=11$ , allora la soluzione esiste, anzi ce ne sono due:  $(v_0, v_4)$  e  $(v_1, v_3)$ .

È importante far presente che allo stato attuale delle conoscenze non è noto alcun algoritmo «veloce» di soluzione del problema, ossia in grado di risolverlo con un numero al più polinomiale di passi rispetto alla quantità degli oggetti a disposizione, e anzi si paventa che non possa esistere. In termini più tecnici non si sa se *knapsack* sia un problema di tipo  $P$  (dotato di algoritmi di soluzione che operano in tempo *polinomiale* rispetto alla lunghezza dell'input). Si sa invece che *knapsack* appartiene a quella classe di problemi molto complicati, denominati NP-completi, i quali ammettono algoritmi rapidi (polinomiali) di *verifica* delle soluzioni (per ciò detti di tipo NP) e alla cui soluzione si può ridurre in modo deterministico e ancora rapido quella di **ogni** altro problema di tipo NP. In pratica, se esistesse un algoritmo veloce non solo di verifi-

ca ma anche di soluzione per uno qualunque di essi, in particolare per *knapsack*, allora ogni problema in NP sarebbe anche in P, permettendo di concludere  $P=NP$ , cioè che **tutti** i problemi che ammettono un procedimento rapido di verifica delle soluzioni hanno anche un algoritmo veloce di risoluzione (è infatti scontato che  $P \subseteq NP$  dal momento che ricavare una soluzione implicitamente costituisce una verifica già di per sé). C'è da dire che « $P=NP?$ » rappresenta la questione centrale della teoria della complessità e una delle principali di tutta l'informatica teorica. Tra l'altro, questo problema è stato addirittura scelto come uno dei sette più rilevanti del millennio dal *Clay Mathematics Institute* del Massachusetts, che ha anche messo in palio un premio di 1 milione di dollari per chi lo risolvesse. Come già detto, però, al momento tutti i metodi conosciuti di soluzione per problemi NP-completi sono lenti, ed esistono fondati argomenti per congetturare  $P \neq NP$ , cioè per pensare che essi, e nello specifico *knapsack*, non consentono metodi risolutivi rapidi.

#### 4. Dagli zaini ai codici segreti... passando per i sensi unici

L'intrattabilità e le difficoltà che manifestano simili problematiche le rendono teoricamente adatte per essere sfruttate nell'ideazione di sistemi crittografici, in particolare di quelli a chiave pubblica<sup>2</sup>. Presentiamo una breve e parziale panoramica sul tema, anche per prevedere un minimo di familiarità con la terminologia in uso. La *crittografia* è la scienza che studia sistemi per proteggere da occhi indiscreti le informazioni riservate trasformando il messaggio originale «in chiaro» in uno «cifrato», incomprendibile per chi, ad eccezione del legittimo destinatario, non possiede informazioni aggiuntive, dette *chiavi*. Tali sistemi sono chiamati *crittosistemi* o *cifrari*. La crittografia si occupa anche di garantire l'autenticità e l'integrità dei messaggi. La *crittoanalisi*, invece, ha l'obiettivo inverso, e cioè quello di «forzare» i crittosistemi, interpretando i messaggi cifrati e riportandoli «in chiaro» senza autorizzazione. Un intramontabile esempio di cifrario è quello usato da Giulio Cesare e narrato da Svetonio ne *La vita dei Cesari* (II secolo d. C.): consiste semplicemente nel sostituire ogni lettera del messaggio originale con la terza lettera successiva dell'alfabeto, ad esempio A con D, B con E, Z con C. La chiave di cifratura è rappresentata dunque dal numero 3 – indicante la scelta della terza lettera che segue – e coincide essenzialmente con quella di decifratura, visto che per risalire al testo originale basta sostituire ciascuna lettera con la terza che la precede nell'alfabeto. In sintesi questo crittosistema, come anche tutti quelli classici, necessita di un preventivo scambio di chiave tra mittente e destinatario; inoltre l'operazione del decifrare non presenta maggiori difficoltà computazionali del cifrare, una volta nota la chiave: nel cifrario precedente basta sostituire con la terza lettera precedente piuttosto che con la terza successiva. Per questo i cifrari classici vengono detti *simmetrici*.

Tornando ai giorni nostri, è immediato rendersi conto di come le tecnologie moderne abbiano considerevolmente accentuato e diffuso ai comuni cittadini l'esigenza di segretezza, visto che l'informazione viaggia in prevalenza per via telematica

2. NDR. Si veda anche l'articolo di Giulio C. Barozzi (2007), Il maestro di tutti noi, *Bollettino dei docenti di matematica*, n. 55, pp. 55-61.

attraverso internet, posta elettronica o telefono: si può ad esempio acquistare trasmettendo semplicemente le coordinate della propria carta di credito, eseguire bonifici bancari online e via dicendo. Tutto ciò esige una ovvia riservatezza per non rimanere indifesi dalle facili intercettazioni che avvengono in rete. Ma sono anche mutate le condizioni rispetto alla crittografia classica: anzitutto lo scambio preliminare di chiavi tra mittente e destinatario è reso impraticabile per via delle grandi distanze che spesso li separano e perché sovente i due non si conoscono neanche direttamente; inoltre l'eventuale trasmissione di queste chiavi via rete è rischiosa quanto quella del messaggio stesso, anche a causa della facilità di decifrazione dovuta alla simmetria dei cifrari.

Nella crittografia moderna, perciò, non viene richiesto alcun scambio di chiave riservata, il mittente cifra secondo una chiave resa *pubblica* dal destinatario, ma il decifrare deve risultare smisuratamente più complicato del cifrare, a meno che non si disponga di ulteriori informazioni – la *chiave privata* – tenute scrupolosamente segrete dal destinatario. In sostanza i moderni metodi si basano su una pesante *asimmetria* tra il cifrare e il decifrare. Questo è quello che si intende per *crittografia a chiave pubblica*. Una maniera per realizzare in concreto un tale obiettivo è quella di rifarsi alle cosiddette *funzioni a senso unico*, funzioni di cifratura che devono essere

- velocemente calcolabili (in tempi al più polinomiali), per permettere di cifrare agevolmente i messaggi verso un dato utente A,
- invertibili, in modo da garantire l'univoca decifrazione del messaggio,
- dotate tuttavia di un'inversa il cui calcolo deve risultare «paurosamente complesso e proibitivo» in mancanza di informazioni aggiuntive, la chiave privata di A, senza le quali nessun malintenzionato potrà decodificare in tempi rapidi un messaggio eventualmente intercettato, piuttosto sarà costretto ad impiegare tempi almeno esponenziali.

Siamo consapevoli che la nozione di funzione «a senso unico» appare vaga e fumosa, basata su affermazioni del tipo «paurosamente complesso e proibitivo» che nulla hanno di oggettivo e matematicamente rigoroso. In effetti, le difficoltà del calcolo della sua funzione inversa potrebbero essere soltanto momentanee e legate allo stato corrente delle conoscenze scientifiche; magari prima o poi un'abile mente potrebbe escogitare una procedura veloce per computarla e costringere la funzione originaria a perdere lo status di «funzione a senso unico»: in definitiva, non è detto che una funzione a senso unico rimanga per sempre tale.

È tempo di tornare ai problemi NP-completi e al nostro amato zaino, ma soprattutto alle complicazioni computazionali che sembrano intrinsecamente riguardarli. Non è difficile immaginare come essi possano rappresentare un ampio bacino da cui ispirarsi per attingere funzioni a senso unico. Effettivamente numerosi crittosistemi a chiave pubblica si basano sul problema dello zaino. Ne discuteremo il primo, quello dunque storicamente più rilevante, concepito da Ralph C. Merkle and Martin E. Hellman (1978) e fondato su una variante del problema generale.

## 5. Un caso particolare: la supercrescenza

Dal problema dello zaino si può derivare una versione più docile e maneggevole, detta *Problema Supercrescente dello Zaino*, ottenuta aggiungendo dei

vincoli sugli oggetti  $v_0, \dots, v_{k-1}$  a disposizione. Nello specifico si esigono sequenze  $v_0, \dots, v_{k-1}$  *supercreascenti*, ovverosia che una volta ordinate in modo crescente, ogni loro oggetto ha volume maggiore della somma dei volumi di tutti quelli più piccoli – che lo precedono –; in altri termini, per ogni  $i < k$ ,  $v_i > \sum_{j < i} v_j$ . Ad esempio, la sequenza 2, 5, 8, 17, 33 è supercreascente perché  $2 < 5$ ,  $2+5 < 8$ ,  $2+5+8 < 17$  e  $2+5+8+17 < 33$ , mentre 2, 5, 6, seppur crescente, non è supercreascente dato che non è minore di 6.

La peculiarità del problema supercreascente dello zaino è che consente procedure rapide di soluzione (quindi è in P). Eccone i dettagli: dati  $k$ ,  $V$  e la sequenza supercreascente  $v_0, \dots, v_{k-1}$ , si analizzano  $v_0, \dots, v_{k-1}$  iniziando dall'oggetto più grande  $v_{k-1}$  e viaggiando a ritroso sino a raggiungere il primo  $v_i \leq V$ ; se un tale  $v_i$  non esiste, non c'è soluzione, altrimenti se  $v_i = V$  esso stesso costituisce la soluzione, se invece  $v_i < V$ ,  $v_i$  va comunque scelto e posizionato nello zaino in quanto anche selezionando tutti i restanti oggetti di volume (e quindi di indice) minore, questi non riuscirebbero per la supercreascentezza ad uguagliare  $v_i$  e dunque neppure il volume  $V$  dello zaino. In altri termini, riferendoci alla matematizzazione proposta nella sezione 2, se una soluzione esiste,  $v_i$  vi prende parte e quindi occorre assumere  $e_i = 1$  ed  $e_j = 0$  per tutti gli indici  $j$  con  $i < j < k$ . A questo punto il volume  $V - v_i$  passa a ricoprire il ruolo di  $V$ , e occorre ripetere il medesimo ragionamento sulla sequenza (supercreascente)  $v_0, \dots, v_{k-1}$ . Iterando la procedura si arriva velocemente – in tempi polinomiali – alla soluzione se questa esiste, o a escludere che ve ne sia una. Di più, se la soluzione c'è, non è difficile convincersi che è anche unica. La supercreascentezza si mostra dunque adatta per generare funzioni a senso unico.

Per chiarire le idee, assumiamo  $V = 27$  e la sequenza supercreascente di prima 2, 5, 8, 17, 33. Visto che  $33 > 27 > 17$ , scegliamo subito il 17 e dunque poniamo  $e_4 = 0$  ed  $e_3 = 1$ . Poi si calcola  $27 - 17 = 10$ , si osserva che  $8 < 10$  e che quindi anche 8 partecipa alla soluzione, da cui  $e_2 = 1$ . Infine da  $10 - 8 = 2 < 5$  segue che 5 va escluso a differenza del 2 che invece completa la soluzione: dunque  $e_1 = 0$  e  $e_0 = 1$ .

Concludiamo ribadendo che, mentre non è noto alcun algoritmo rapido per il problema generale dello zaino, e anzi si congettura che non ve ne sia, per quello «supercreascente» la velocità di risoluzione appare evidente.

Prima di addentrarci nel cifrario di Merkle e Hellman è opportuno richiamare succintamente alcuni concetti e risultati di aritmetica modulare che torneranno utili.

## 6. L'aritmetica circolare

L'aritmetica *circolare* o *dell'orologio* è così chiamata per la sua caratteristica di ritornare a 0 ogni volta che si raggiunge un intero  $N$  fissato:  $N=24$  nel caso dell'orologio,  $N$  uguale al numero dei simboli a disposizione nei cifrari come quello di Cesare che usano un alfabeto, e così via. La relativa aritmetica, pur derivando da quella degli interi  $Z$ , ha le sue specificità che talvolta si discostano in modo rilevante da quelle di  $Z$ , e molte circostanze complicate. Consideriamo dunque l'anello  $Z$  degli interi con le consuete operazioni di somma e prodotto. Per ogni intero positivo  $N$  definiamo in  $Z$  la relazione di congruenza modulo  $N$  asserendo che due interi  $a$  e  $b$  sono congrui modulo  $N$ , in simboli  $a \equiv b$ , se  $N$  divide  $a - b$ , ovvero se hanno lo stesso resto nella divisione per  $N$ . È facile verificare che la congruenza modulo  $N$  è una relazione di equivalenza in  $Z$  le cui

classi  $a_N$ , per ogni intero  $a$ , corrispondono ai resti della divisione per  $N$ . L'insieme quoziente è quello comunemente indicato con  $Z_N$ . La relazione di congruenza preserva la somma e il prodotto tra interi, ossia per  $a, b, c, d$  in  $Z$  tali che  $a \equiv b \pmod{N}$ , e  $c \equiv d \pmod{N}$ , si ha  $a + c \equiv b + d \pmod{N}$  e  $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{N}$ : in pratica è sufficiente operare in  $Z$ , dividere i risultati per  $N$  e considerarne i resti. I tempi di esecuzione di questa procedura si mostrano rapidi (al più quadratici rispetto alla lunghezza di  $N$ ,  $a$  e  $b$ ). Si verifica poi facilmente che  $(Z_N, +, \cdot)$  è un anello commutativo unitario (con unità  $1_N$ ), proprio come gli interi, ma mentre  $-1$  e  $+1$  sono gli unici elementi invertibili in  $Z$ , gli  $a_N$  invertibili in  $Z_N$ , in altre parole gli  $a$  invertibili modulo  $N$ , sono tutti e soli quelli primi con  $N$ . Da ciò segue che  $Z_N$  è un campo solo se  $N$  è un numero primo. Inoltre l'inverso  $b$  di  $a$  modulo  $N$ , dunque tale che  $b \cdot a \equiv 1 \pmod{N}$ , corrisponde a una potenza di  $a$  modulo  $N$ , almeno quando  $N$  è primo, come mostrato già nel Seicento dal matematico (e giudice) francese Pierre de Fermat. Vale infatti il seguente risultato che prende il nome di

**Piccolo Teorema di Fermat.** Sia  $N$  un numero primo. Allora, per ogni intero  $a$  primo con  $N$ , si ha  $a^{N-1} \equiv 1 \pmod{N}$ .

Ad esempio,  $a=2$  è primo con  $N=131$ , allora  $2^{130} \equiv 1 \pmod{N}$ .

Il risultato consente, sotto le ipotesi di primalità relativa, un agevole calcolo dell'inverso  $b$  di  $a$  modulo  $N$  in quanto corrispondente alla potenza  $a^{N-2}$  modulo  $N$ ; infatti  $a^{N-2} \cdot a \equiv a^{N-1} \equiv 1 \pmod{N}$ .

Ricordiamo che sono noti algoritmi elementari in grado di computare rapidamente (in un numero polinomiale di passi) le potenze di  $a$  modulo  $N$ : nel nostro caso,  $2^{130} = ((((((2^2)^2)^2)^2)^2)^2) \cdot 2^2$  mostra che anziché eseguire le 129 moltiplicazioni del 2 sono sufficienti una moltiplicazione e 7 elevamenti al quadrato.

La nostra fulminea incursione nell'aritmetica circolare termina qui. Per approfondimenti si possono consultare ad esempio (Leonesi, Toffalori, 2006a e b). Per noi è finalmente giunta l'ora di tornare alla crittografia e in particolare a Merkle e Hellman.

## 7. Il crittosistema di Merkle-Hellman

Il cifrario di Merkle-Hellman sfrutta le caratteristiche della supercrescenza nel modo che ora mostreremo.

Anzitutto possiamo convertire le  $n$  lettere dell'alfabeto (anche comprensivo di spazi, punteggiature e simboli vari) in numeri, similmente alla tabella seguente

00	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
spazio	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	

Tabella A

e magari convenire di rappresentare questi numeri in notazione binaria mediante sequenze ordinate di 5 cifre scelte tra 0 e 1, ad esempio  $U = 21$  diventa 10101;



avremmo potuto optare anche per altre codifiche come il codice ASCII, quello solitamente adoperato nei computer, dove ogni simbolo dell'alfabeto si trasforma in una sequenza ordinata di 7 cifre binarie.

Suddividiamo poi il «treno» di 0 e 1 così ottenuto in blocchi  $(e_0 \dots e_{k-1})$  di lunghezza  $k$ , eventualmente antepoendo qualche 0 per garantire che tutti i blocchi abbiano questa stessa lunghezza. Quindi le unità di messaggio diventano del tipo  $(e_0 \dots e_{k-1})$ .

Ora veniamo al crittosistema.

Un utente A sceglie

- una sequenza supercrescente  $v_0, \dots, v_{k-1}$  di lunghezza  $k$ ,
  - un intero  $N > \sum_{i < k} v_i$ ,
  - un intero positivo a primo con  $N$
- che fanno parte della sua chiave privata, da tenere quindi accuratamente segreti.

Poi A nasconde sotto  $v_0, \dots, v_{k-1}$  le vesti di una nuova sequenza  $w_0, \dots, w_{k-1}$  non più supercrescente (almeno avrà cura che non lo sia) calcolando

- l'inverso  $b$  di  $a$  modulo  $N$  (per quanto ricordato nella sezione 6, tale inverso esiste, è  $a^{N-2}$  modulo  $N$ , e il suo computo è rapido),
  - $w_i \equiv a \cdot v_i \pmod{N}$  per  $0 < i < k$ ;
- ne consegue che  $b \cdot w_i \equiv b \cdot a \cdot v_i \equiv v_i \pmod{N}$ .

La sequenza  $w_0, \dots, w_{k-1}$  viene divulgata come chiave pubblica per coloro che intendono cifrare e inviare un messaggio all'utente A. Mentre  $b$  è tenuto segreto, a garantire la segretezza del suo inverso a modulo  $N$ . Pertanto  $v_0, \dots, v_{k-1}$ ,  $N$ ,  $b$  (e dunque  $a$ ) costituiscono la chiave privata di decifrazione di A.

Se un utente B vuole scrivere un messaggio ad A, lo divide, come detto prima, in blocchi  $(e_0 \dots e_{k-1})$  di cifre 0 e 1, li codifica calcolando  $w = \sum_{i < k} e_i w_i$  – sostanzialmente la funzione a senso unico –, quindi li spedisce ad A.

Ora A, con la propria chiave privata e con  $b$  in particolare, computa

$$V \equiv b \cdot W \equiv \sum_{i < k} e_i \cdot (b \cdot w_i) \equiv \sum_{i < k} e_i v_i \pmod{N}$$

Anzi, A sa che  $V$  è proprio uguale a

$$\sum_{i < k} e_i v_i \text{ perché } \sum_{i < k} e_i v_i \leq \sum_{i < k} v_i < N$$

per quanto scelto all'inizio. Ad A non resta altro che decodificare velocemente il blocco originale  $(e_0 \dots e_{k-1})$  sfruttando la supercrescenza  $v_0, \dots, v_{k-1}$ , di  $e$  e  $i$  rapidi – polinomiali – tempi di esecuzione dell'algoritmo relativo (mostrato nella sezione 5).

Al contrario, se un malintenzionato dovesse intercettare il blocco cifrato  $W$  e intendesse risalire al testo in chiaro  $(e_0 \dots e_{k-1})$ , si troverebbe di fronte alla sequenza pubblica non supercrescente  $w_0, \dots, w_{k-1}$  e dunque al problema generale dello zaino, con le già discusse difficoltà dovute alla sua lentezza di risoluzione (e alla sua non univocità).

Per chiarire meglio come opera il crittosistema, mostriamo un esempio banale ma concreto. In onore di Giulio Cesare immaginiamo di volergli trasmettere il

messaggio «AVE» e dunque, tenendo presente la tabella A e la sua conversione binaria, la sequenza

00001 10110 00101

A V E

Fissiamo a 3 la lunghezza  $k$  delle unità di messaggio il quale di conseguenza si decomporrà in

000 011 011 000 101. (\*)

A questo punto fissiamo le informazioni private di Cesare: la sequenza supercrescente  $v_0, v_1, v_2 = 1, 2, 5$  e gli interi  $N=23$  e  $a=7$ . Ci calcoliamo l'inverso  $b=10 \equiv 7^{21} \pmod{23}$  di  $a$  e la sequenza non supercrescente  $7 \equiv 7 \cdot 1 \pmod{23}$ ,  $14 \equiv 7 \cdot 2 \pmod{23}$ ,  $12 \equiv 7 \cdot 5 \pmod{23}$ . Questa lista 7, 14, 12 rappresenta la chiave pubblica per codificare e inviare il messaggio a Cesare sotto forma dei 5 blocchi 0,  $26=14+12$ , 26, 0,  $19=7+12$ . Cesare, per decifrarli ne calcola anzitutto i prodotti per  $b=10$  modulo 23 e cioè 0,  $7 \equiv 26 \cdot 10 \pmod{23}$ , 7, 0,  $6 \equiv 19 \cdot 10 \pmod{23}$ ; poi sfrutta la sequenza supercrescente segreta 1, 2, 5 risalendo a 0,  $2+5=7$ , ancora  $2+5=7$ , ancora 0, infine  $1+5=6$  corrispondenti a indici ( $e_0, e_1, e_2$ ) pari rispettivamente a 000, 011, 011, 000, 101. I blocchi del messaggio in chiaro (\*) sono così recuperati, e a Cesare non resta altro che raggruppare le cifre binarie in fasci da 5 e decodificarli in base alla tabella A.

## 8. Il passato e il futuro di Knapsack

Merkle era piuttosto sicuro della robustezza del suo metodo crittografico, almeno tanto da offrire 100 dollari (invero non molto, ma era pur sempre il 1978!) a chi lo avesse violato, cosa che avvenne puntualmente appena quattro anni dopo la sua ideazione ad opera di Adi Shamir (Shamir, 1982) il quale perfezionò un algoritmo polinomiale per la sua decifrazione. Shamir osservò che le sequenze pubbliche  $w_0, \dots, w_{k-1}$ , seppur non supercrescenti come le originali private, sono ottenute da esse tramite una trasformazione piuttosto elementare; ciò consente di costruire un veloce metodo risolutivo per infrangere il crittosistema, senza comunque scomodare il complicato problema generale dello zaino. Merkle mantenne la promessa e pagò i 100 dollari.

Sebbene dal destino sfortunato, il crittosistema di Merkle ed Hellman rimane importante sotto il profilo storico-concettuale perché progenitore di una lunga sequela di altri crittosistemi basati su varianti sempre più profonde di knapsack la cui nascita continua ancora oggi<sup>3</sup>. C'è da dire che anche molti di essi sono stati infranti nel corso degli anni, forse avallando l'idea che in realtà knapsack sia troppo vulnerabile e non costituisca una base poi così solida per generare sistemi crittografici, almeno non quanto la fattorizzazione di interi (si veda il crittosistema RSA), o il calcolo dei logaritmi discreti su campi finiti e curve ellittiche. Cerchiamo di valutare con più ponderazione la questione considerando argomenti legati all'efficienza e alla sicurezza.

3. (Su, Lu, Chang, 2006) e (Wang, Hu, 2007) tra gli ultimi.

1. Anzitutto l'attenta analisi dei passi computazionali fa emergere le caratteristiche di rapidità e praticità di cifratura/decifratura proprie dei sistemi basati su knapsack. Ad esempio, quando il numero di oggetti dello zaino è dell'ordine dei 100, la cifratura attraverso il crittosistema di Merkle-Hellman può essere più di 100 volte più veloce di quella dell'RSA (con moduli di circa 500 bits) (Odlyzko, 1990). Questo renderebbe preferibile i crittosistemi basati sullo zaino rispetto all'RSA, almeno quando i messaggi da inviare sono particolarmente lunghi.
2. Inoltre la provata NP-completezza del problema generale dello zaino fornisce un valore aggiunto rispetto ai problemi di fattorizzazione di interi e del calcolo dei logaritmi discreti, per i quali questa garanzia non c'è. Nulla vieta di pensare che prima o poi possano essere trovati procedimenti rapidi – al più polinomiali – per questi ultimi.
3. D'altro canto, c'è da osservare che l'NP-completezza riguarda il problema generale dello zaino e non necessariamente le sue varianti. Inoltre l'NP-completezza è una proprietà legata al «caso peggiore» (worst-case), tiene conto cioè del peggior comportamento possibile, in termini di velocità, al variare degli algoritmi risolutivi e delle istanze in input. Ma per la sicurezza di un sistema crittografico questo riferimento non appare troppo sensato e utile: singole violazioni «fortunate» – almeno per i crittoanalisti – potrebbero comunque avvenire. Anche l'analisi della complessità dei «tempi medi» (*average-case*) si mostra insufficiente: se anche l'1% delle istanze fossero risolvibili in tempi polinomiali, il crittosistema dovrebbe ragionevolmente considerarsi insicuro lo stesso. Più aderente alle esigenze della crittografia sarebbe lo studio del «caso migliore» (*best-case*), quindi del limite superiore alla rapidità di calcolo della soluzione per un particolare problema, ma estremamente difficile è la sua analisi e pochi sono i risultati teorici a disposizione. Adirittura non potrebbe esser considerata assolutamente rassicurante una ipotetica dimostrazione dell'assenza di risoluzioni *esatte* rapide: l'individuazione di algoritmi *probabilistici* efficienti, dunque rapidi ma soggetti a un certo margine di errore che in ogni caso è quantificabile, risulterebbe ugualmente letale per il crittosistema. Invero una tale eventualità sembra riguardare più da vicino i problemi che sono in NP-P piuttosto che quelli NP-completi dal momento che è stato dimostrato che se per un problema NP-completo esistesse un algoritmo polinomiale la cui probabilità di errore può essere resa arbitrariamente piccola, allora si potrebbero trovare algoritmi polinomiali anche per qualsiasi problema in NP, fatto che si ritiene inverosimile. In ogni caso queste complesse e profonde branche della teoria della complessità degli algoritmi presentano numerosi problemi aperti e necessitano ancora di notevoli sviluppi.

A testimonianza di come knapsack appassioni ancora e susciti vivo interesse di ricerca citiamo un recente metodo crittografico messo a punto dai cinesi Bao-cang Wang, Qianhong Wu e Yupu Hu e pubblicato nell'ottobre del 2007 (Wang, Hu, 2007). La procedura si basa su una versione probabilistica di knapsack che, a detta de-

---

gli autori, reggerebbe contro le tipologie di attacchi più comuni a cui si sono stati mostrati vulnerabili molti dei metodi basati su knapsack<sup>4</sup>. Se ciò sarà vero, solo il futuro sarà in grado di rivelarlo.

Quel che più ci importa è di aver mostrato come anche il problema dello zaino contribuisca a manifestare quanto vitale e avvincente sia la matematica, quanto inaspettate e intriganti le sue applicazioni e come la crittografia, animata dall'eterna lotta tra guardie e ladri, tra crittografi e crittoanalisti, costituisca un potente volano del progresso.

## Bibliografia

- Baldoni M. W., Ciliberto C., Piacentini Cattaneo G. M. (2006), *Aritmetica, Crittografia e Codici*, Springer Italia.
- Lai M. K. (2003), Knapsack cryptosystems: the past and the future, online manuscript, 1-21. <http://www.ics.uci.edu/~mingl/knapsack.html>.
- Leonesi S., Toffalori C. (2006), *Numeri e Crittografia*, Springer Italia.
- Leonesi S., Toffalori C. (2006), *Un Invito all'Algebra*, Springer Italia.
- Merkle R. C., Hellman M. E. (1978). Hiding Information and Signatures in Trapdoor Knapsacks. *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. IT-24, 525-530.
- Nguyen P., Stern J. (2005), *Adapting density attacks to low-weight knapsacks*. In: Roy, B.K. (Ed.), *Advances in Cryptology - ASIACRYPT'05 (LNCS 3788)*, Springer, Berlin. 41-58.
- Odlyzko A. M. (1990), *The Rise and Fall of Knapsack Cryptosystems*. In Carl Pomerance, editor, *Cryptography and Computational Number Theory, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, vol. 42. American Mathematics Society, Providence, RI, 75-88.
- Shamir A. (1982), A Polynomial-time Algorithm for Breaking the Basic Merkle-Hellman Cryptosystem. *Proceedings of the IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*. IEEE, New York, 145-152.
- Su P.C., Lu E., Chang H. (2006), A knapsack public-key cryptosystem based on elliptic curve discrete logarithm. *Applied Mathematics and Computation*. vol. 168 (1), 40-46.
- Toffalori C., Corradini F., Leonesi S., Mancini S. (2005), *Teoria della Computabilità e della Complessità*, McGraw-Hill Italia.
- Wang B., Hu Y. (2006), *Diophantine approximation attack on a fast public-key cryptosystem*. In: Chen, K., Deng, R.H., Lai, X., Zhou, J. (Eds.), *The 2nd Information Security Practice and Experience Conference - ISPEC 2006 (LNCS 3903)*, Springer, Berlin, 25-32.
- Wang B., Wu Q., Hu Y. (2007), A knapsack-based probabilistic encryption scheme. *Information Sciences*. vol. 177 (19), 3981-3994.

---

4. Vedi ad esempio (Su, Lu, Chang, 2006) e (Wang, Hu, 2006).

### 3. **Attività SMASI<sup>1</sup> in favore della scuola**

Gianfranco Arrigo

The Mathematical Society of Southern Switzerland (SMASI) has been founded in 2002, on initiative of several young graduates in mathematic that were attending the mandatory courses in mathematical education at the pedagogical high school of Locarno in order to become mathematics teachers. Until 2006, the activity of the society has been focused on identifying, promoting and networking the mathematical activities in the Canton Ticino. Since 2006, after the election of the new president, the SMASI has decided to focus its activities on the promotion and improvement of mathematical teaching in the schools of Southern Switzerland. This paper presents an overview of the activities proposed in the year 2007-2008 and of the activities of the next year.

#### 1. **Presentazione**

L'obiettivo principale della SMASI è la promozione dell'immagine della matematica presso il pubblico in generale e segnatamente nel mondo della scuola, con particolare attenzione agli studenti. La questione è fondamentale, specialmente nella nostra società, vista la cattiva e falsa immagine che la gente molto spesso ha della nostra disciplina: la matematica vista come male necessario, come incubo di molti studenti, come disciplina arida e preconstituita e che quindi difficilmente può dare spazio alla fantasia, alla creatività, all'intuizione e via dicendo. Chi conosce la matematica, e soprattutto chi la pratica da cultore, sa benissimo che le cose non stanno così e che, anzi, la realtà sta agli antipodi. Si tratta di far capire a tutti che apprendere la matematica significa anche e soprattutto vivere un'avvincente avventura intellettuale, costruire e perfezionare continuamente immagini mentali di concetti astratti, manipolare creare e perfezionare modelli perfetti di una realtà concreta e imperfetta. Non si vuole con ciò gettare alcun discredito sulla scuola e in particolare sul lavoro degli insegnanti. Si è coscienti del fatto che la scuola fa quel che può in un ambito particolare nel quale è tenuta a osservare un gran numero di condizioni marginali che finiscono talvolta per snaturare la matematica che si deve insegnare.

È su questo punto che la SMASI sente di poter offrire il proprio contributo interagendo con allievi, insegnanti e genitori, eventualmente collaborando con altri enti, pubblici e privati, che perseguono lo stesso scopo.

In linea con questa visione si offrono corsi agli insegnanti e momenti di attività matematica agli allievi, allo scopo di far loro vivere una matematica stimolante, piacevole e formativa. Al pubblico in generale e ai genitori degli allievi la SMASI offre conferenze e possibilità di incontro: serate denominate «Tè dei matematici».

---

1. Società Matematica della Svizzera Italiana, via Torricelli 19, 6900 Lugano. Sito web: <http://www.smasi.ch>.

## 2. **Corsi di formazione per insegnanti delle scuole elementari**

Ogni corso è gratuito, si svolge in 4-5 sedute di 2-3 ore ciascuna e si articola in una fase di presentazione teorica seguita da altre di laboratorio o di discussione in comune. Per ora l'offerta si compone di 5 corsi, dei quali il primo è già stato effettuato due volte e il quinto è in programma nei prossimi mesi di febbraio e marzo. La sede, di regola, è quella della SMASI in via Torricelli 19 a Lugano.

Ecco l'offerta completa dei corsi.

### **Corso n. 1**

#### **Geometria nella scuola elementare**

L'apprendimento della geometria, tradizionalmente, parte dal riconoscimento delle figure piane: triangolo, quadrato, rettangolo, cerchio... con l'ausilio di modellini tridimensionali (per esempio «spesse» sagome di cartoncino colorato). Questo modo di fare porta l'allievo a costruirsi misconcetti che poi sono difficili da eliminare. Facendo leva sul fatto che l'idea di figura piana è sicuramente più sofisticata di quella di figura solida, si propone un avvio alla geometria dall'osservazione di semplici figure tridimensionali, dalla quale gli allievi possono ricavare importanti concetti di geometria piana e solida. Questo modo di fare, già sperimentato in diverse classi di scuola elementare e media, contribuisce a creare un rapporto affettivo e stimolante col mondo della geometria.

Il corso permette di effettuare una sperimentazione in classe, parallelamente a quella di una sessantina di insegnanti che da quest'anno sperimentano in diverse classi del cantone, seguiti dai formatori ASP Silvia Sbaragli e Gianfranco Arrigo.

### **Corso n. 2**

#### **Il calcolo a scuola nell'era dell'elettronica**

Non v'è dubbio che, oggi, gli algoritmi del calcolo scritto – quelli arabi, per intenderci, detti anche «calcoli in colonna» – hanno perso gran parte della loro importanza. Quasi tutti riconoscono di aver eseguito simili operazioni soltanto a scuola. Poi, basta. Se si entra nei particolari e si verifica la capacità di eseguire le singole operazioni aritmetiche in colonna da parte della odierna popolazione attiva, ci si accorge che l'addizione e la moltiplicazione sono ancora eseguite con sufficiente padronanza, mentre la sottrazione e ancor più la divisione difficilmente vengono portate a termine senza errori. Se poi si chiede a qualcuno come mai questi algoritmi funzionino, la risposta più frequente è: «perché me li hanno insegnati a scuola». Questo corso vuole stimolare gli insegnanti a sviluppare un atteggiamento consapevole nei confronti del calcolo numerico, tenendo conto dei cambiamenti tecnologici e sociali del nostro tempo; in particolare, vuole attirare l'attenzione sul fatto che oggi i calcoli di una certa complessità si fanno a macchina e ricordare che qualsiasi macchina va usata con consapevolezza e abilità, cosa che esige la capacità di stimare mentalmente il risultato. Quindi, per usare bene una calcolatrice, occorre conoscere le basi della scrittura matematica in riga, che è il linguaggio della calcolatrice, e del calcolo mentale con numeri semplici, che è il segreto della stima dei risultati.

**Corso n. 3****Educazione al pensare in senso combinatorio, probabilistico e statistico**

Un'evidente pecca della scuola odierna consiste nel non attribuire sufficiente importanza al pensiero combinatorio e probabilistico e di conseguenza nel non sviluppare alcuna educazione all'inferenza statistica. Mentre l'aritmetica e la geometria vengono trattate, in taluni casi, già nella scuola dell'infanzia e comunque nella scuola elementare e media, per questo importante terzo ramo dell'educazione matematica ci si accontenta di fare qualcosa negli ultimi anni delle superiori. Ciò significa che il giovane è confrontato con questa disciplina solo nel momento in cui l'insegnamento della matematica richiede un certo rigore e una marcata formalizzazione. Metaforicamente: si semina su un terreno non preparato. Ecco, in sintesi, il perché di molti insuccessi. Se qualcuno crede ancora che calcolo combinatorio, probabilità e statistica siano cose per soli specialisti, basta che rifletta sulle sollecitazioni di questo tipo che riceve il cittadino: previsioni del tempo, indagini demoscopiche di ogni genere (tendenze, indici di ascolto, marketing, proiezioni elettorali,...), verifica dell'effetto di nuovi medicinali, il gioco d'azzardo, ecc. Ecco quindi un compito importante della scuola obbligatoria: infondere nel futuro cittadino sane basi di pensiero combinatorio e probabilistico e strumenti basilari per poter distinguere tra risultati statistici attendibili e no.

**Corso n. 4****Il fantastico mondo del nostro maggiore matematico di tutti i tempi: Eulero**

Nel 2007 abbiamo celebrato il trecentesimo anniversario della nascita di Leonhard Euler, basilese, uno dei più validi matematici della storia dell'umanità. Eulero (questo è il suo appellativo italianizzato) è stato anche un grande comunicatore. I suoi scritti sono godibili al di là del loro contenuto matematico. Entrare nel suo mondo significa avvicinarsi ai problemi matematici più vari e interessanti; significa giocare con la matematica, provare il piacere di costruire qualcosa di nuovo e di intellettualmente importante, scoprire il fascino dell'attività matematica genuina. Riteniamo perciò importante che gli insegnanti della scuola dell'obbligo conoscano la faccia nascosta di questa disciplina fondamentale: potranno così arricchire la propria cultura e dare la possibilità ai propri allievi di assaggiare la matematica autentica.

**Corso n. 5****Come far fronte alle difficoltà in matematica**

L'insegnamento scolastico della matematica, largamente influenzato da costrizioni e limitazioni di diverso genere, crea anche insuccessi nell'apprendimento. L'accumulo nel tempo di difficoltà mal superate o del tutto aggirate agisce da elemento patogeno parassita e impedisce nuovi apprendimenti. A lungo andare, l'insuccesso frequente o generalizzato crea grossi guai psicologici e finisce col far odiare la matematica, con tutti i risvolti negativi che ne conseguono. Non esiste alcuna soluzione che permetta all'insegnante di agire con successo in ciascun caso di difficoltà incontrata dagli allievi. Esiste però un'illusione dell'insegnante: quella di credere nell'ipotesi più scontata dell'errore commesso dall'allievo (disattenzione, non comprensione di una regola matematica, mancanza di concentrazione, ecc.). Nonostante le buone intenzioni, quasi

mai questo modo di fare permette all'insegnante, e di conseguenza all'allievo, di recuperare l'apprendimento non avvenuto. Ciò che si vuol dare ai corsisti è una serie di strumenti che permettano di ottenere interpretazioni alternative delle cause degli insuccessi dei propri allievi, con la convinzione che più strumenti si hanno, maggiore è la probabilità di riuscita nel tentativo di recupero della difficoltà.

### 3. **Pomeriggi di matematica in classe per le scuole elementari**

Sono offerti a tutte le classi dalla terza alla quinta. Si svolgono nell'aula di classe e in altri due spazi ricavabili nella sede scolastica. L'attività dura un intero pomeriggio. Le date sono da concordare, l'orario è quello scolastico abituale. Lo scopo è dare la possibilità agli allievi della scuola elementare di effettuare un'attività matematica alternativa, a partire da stimolazioni accattivanti, in situazioni atte a far provare il piacere di imparare divertendosi. Gli allievi hanno la possibilità di apprendere qualche nuova conoscenza attraverso la riflessione personale e il confronto con i compagni, ciò che normalmente aumenta la fiducia in se stessi e fa capire che la matematica, se praticata attivamente, può dare soddisfazioni e risultati a priori impensabili. Si propongono tre atelier, gestiti da membri della SMASI. La classe è suddivisa in tre gruppi che a turno lavorano negli atelier per la durata di circa 30 minuti ciascuno. Se richiesto, uno degli atelier potrebbe anche essere gestito dall'insegnante di classe.

#### **Esempi di atelier già svolti sperimentalmente**

**1. Geometria dello spazio.** Dapprima gli allievi vengono brevemente introdotti nel mondo dei poliedri e imparano a riconoscere vertici, spigoli e facce e a riconoscere alcuni fra i poliedri più semplici. Poi gli allievi sono messi in situazione di fronte a una raccolta di modellini di solidi e sono invitati a ricercare alcune proprietà dei poliedri, con il supporto di una scheda appositamente preparata. Alla fine si discute collettivamente il lavoro fatto.

Le proprietà ricercate nella sperimentazione:

- la formula di Eulero sul numero di vertici, spigoli e facce di un poliedro;
- il problema della colorazione delle facce di un poliedro con l'impiego del numero minimo di colori;
- i percorsi minimi sia lungo gli spigoli di un cubo sia sulla sua superficie.

**2. L'abaco e alcuni problemi di calcolo numerico.** L'abaco è il più semplice e il più antico strumento di calcolo, inventato dall'uomo per semplificare l'esecuzione di calcoli lunghi e laboriosi. Consente, tra l'altro, di capire senza difficoltà i «passaggi» (delle decine, delle centinaia, ...). Si mostra inoltre, con un semplice esempio, come si può «fare economia», trasformando ogni sottrazione in una addizione.

**3. Invece del Sudoku.** Si propongono attività su schemi quadrati di numeri, da affrontare adottando una strategia opportuna. Possono servire da introduzione ad attività di tipo combinatorio.



**4. Passeggiate su una griglia.** Approfondendo di pavimentazioni, o altro, che esemplificano una griglia quadrata, si propone di andare da un punto di griglia ad un altro seguendo certe regole. Si deve stabilire quali e quanti sono i percorsi possibili. Da un lato si svolge così un'attività combinatoria, da un altro si evidenzia la necessità di codificare i percorsi, e da un terzo si introduce l'idea di generalizzazione di una situazione.

A richiesta, la SMASI si impegna a proporre altri atelier; è anche possibile che gli insegnanti stessi propongano determinate tematiche.

Seguono alcune fotografie scattate in uno di questi pomeriggi, tenutosi il 5 giugno scorso in una classe di Villa Luganese e animato dai soci SMASI Gianfranco Arrigo e Giorgio Mainini.



Geometria dello spazio. L'animatore introduce la situazione.



Geometria dello spazio. Si lavora insieme...



Geometria dello spazio. Si riflette...



Geometria dello spazio. La soddisfazione di aver imparato è evidente.



L'abaco. Un interessante strumento di calcolo del passato, sempre d'attualità.



L'abaco. Dopo un po' c'è già chi si sente autonomo.



L'abaco. Imparare a usare l'abaco significa anche approfondire il calcolo numerico.



Epilogo. È stata una bella avventura!



Epilogo. Così fanno i matematici.

#### 4. Giornate di matematica alla scuola montana

Sono offerte alle classi dalla terza alla quinta che hanno in programma un soggiorno alla scuola montana.

Il luogo dell'attività è la sede della scuola montana, la durata dell'attività è 3-4 mezza giornate.

Le date e gli orari sono da concordare.

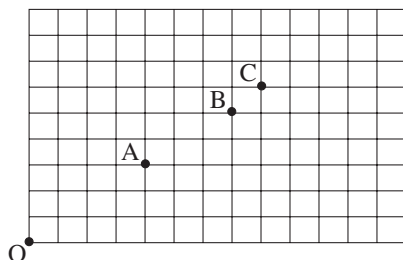
Scopo dell'attività è dare la possibilità agli allievi della scuola elementare di cimentarsi, per piccoli gruppi, con attività di *problem solving* alla portata di tutti; mettere in comune le idee emerse; confrontare i diversi metodi risolutivi impiegati. Inoltre far capire agli allievi che, in queste attività, ogni idea, anche se non del tutto corretta, può essere utile per giungere alla soluzione e che di conseguenza ognuno può dare il proprio contributo e partecipare alla soddisfazione collettiva di essere riusciti a venire a capo di situazioni tutt'altro che banali.

Si propongono le fasi seguenti:

1. Attività di *problem solving* per piccoli gruppi su problemi studiati appositamente per introdurre a questo modo di fare matematica.
2. Discussione delle varie difficoltà incontrate e delle idee messe in pratica per risolvere (attività metacognitive); controllo dei risultati e messa in comune di alcune strategie risultate vincenti.
3. Attività di *problem solving* su problemi più impegnativi.
4. Messa in comune del lavoro prodotto, riflessioni metacognitive, condivisione di un nuovo modo di affrontare l'apprendimento della matematica.

Ecco un paio di esempi di problemi proponibili.

### Problema



Partendo da O, si può determinare la posizione di ogni punto (o nodo) del reticolo. Per esempio, il punto A può essere determinato dalla coppia di coordinate ( $\rightarrow 4$  ;  $\uparrow 3$ ).

I punti B e C stanno entrambi sulla retta OA?

Come dev'essere la coppia di coordinate di un generico punto X del reticolo che si trova sulla retta OA?

### Problema

Il prodotto di 100 numeri (naturali) è uguale a 100.

Qual è il minimo valore che può avere la somma di questi numeri?

## 5. Pomeriggi di matematica per gli allievi della scuola media

Attività proposta a tutti gli allievi che hanno piacere di trascorrere un pomeriggio divertendosi con attività matematiche di *problem solving*. La sede principale è quella della SMASI a Lugano, in via Torricelli 19. Nel caso vi fossero gruppi consistenti di interessati provenienti da altre parti del cantone, si potrebbe ricorrere ad altre sedi. L'attività si svolgerà in un certo numero di mercoledì pomeriggio. A medio termine si potrebbero pure formare squadre con le quali partecipare a gare e sfide regionali o internazionali.

Lo scopo è dare la possibilità agli allievi della scuola media di effettuare un'attività matematica alternativa, a partire da stimolazioni accattivanti, in situazioni atte a far provare il piacere di scoprire e di confrontarsi con i propri compagni; impegnarli nella risoluzione di problemi non conosciuti che richiedono poche e semplici conoscenze matematiche, ma molte capacità intuitive e creative. Oltre al perfezionamento della propria formazione culturale e al rafforzamento della fiducia in se stessi, si offre ai partecipanti l'opportunità di aumentare la propria abilità nel risolvere problemi e nell'affrontare nuove situazioni di apprendimento.

I partecipanti vengono suddivisi in piccoli gruppi. L'attività si svolge in tre fasi:

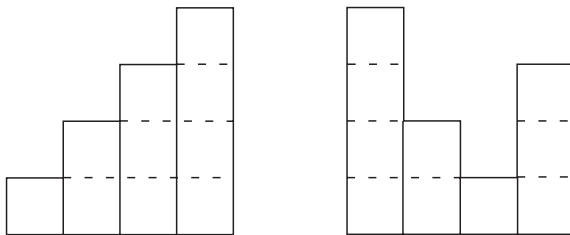
- affrontare alcuni problemi appositamente preparati;
- discutere insieme le varie difficoltà incontrate e le idee escogitate per tentare di superarle;

- confrontare i risultati e mettere in evidenza le strategie vincenti;
- partecipare a gare di allenamento.

### Esempi di problemi

#### Problema

Considera 4 strisce rettangolari formate da una, da due, da tre e da quattro quadratini. Con esse si possono ottenere figure del tipo riprodotto di seguito.



Ogni figura è ottenibile dalla prima solo cambiando di posto alle strisce. Quante figure diverse si possono ottenere? Fra di esse quali e quante hanno il perimetro minimo e quali e quante hanno il perimetro massimo?

#### Problema

Se un numero naturale ha un numero dispari di divisori, quale altra importante proprietà possiede?

### 6. Il problema della settimana: un'animazione per gli istituti di scuola media

Vi può partecipare ogni istituto di scuola media nel quale vi sia un gruppetto di insegnanti di matematica interessati e una direzione disposta a collaborare. L'attività si svolge interamente all'interno dell'istituto interessato. Vi sono due fasi distinte: nella prima, per circa 15 settimane consecutive di scuola, si propongono agli allievi dei problemi (uno alla settimana per ciascuna delle quattro classi); la seconda si svolge in una mezza giornata di scuola (nelle ultime settimane dell'anno scolastico) ed è una vera «Sfida dei campioni», nella quale i migliori solutori di ogni classe (8 di I, 8 di II, 8 di III e 8 di IV) si sfidano su domande di matematica. La sfida consiste in un turno di eliminatorie, uno di semifinali (la selezione viene fatta all'interno di ogni classe) e di una prova finale, alla quale sono ammessi gli 8 vincitori delle semifinali (due per classe), consistente nel risolvere per iscritto un problema uguale per tutti. Ai 32 allievi partecipanti viene dato un attestato di partecipazione e un premio; gli 8 finalisti ricevono anche un diploma d'onore e i premi più importanti.

Le 15 settimane consecutive potrebbero anche essere suddivise in due parti (per esempio, una in autunno, l'altra in primavera).

Lo scopo è creare nella sede un clima favorevole nei confronti della matematica e stimolare gli allievi a risolvere il problema settimanale per poter entrare a

far parte dei 32 concorrenti ammessi alla Sfida dei campioni. Chi non riesce a qualificarsi può assistere come spettatore alla Sfida dei campioni, uno spettacolo nel quale si alternano momenti di intrattenimento ad altri di competizione, ispirati allo spirito olimpico genuino.

La SMASI si assume la responsabilità scientifica della parte matematica, collabora alla redazione dei problemi settimanali e contribuisce all'organizzazione e alla conduzione della Sfida dei campioni, se necessario anche con un contributo finanziario.

Durante le settimane dedicate ai problemi, l'attività può svolgersi per esempio così:

- ogni lunedì gli allievi fanno di potersi recare in un determinato luogo (per esempio in biblioteca) a ritirare il foglio con il problema;
- gli allievi hanno tempo di risolvere il problema fino a venerdì a mezzogiorno;
- gli insegnanti volontari correggono le soluzioni (il lavoro è semplificato perché i problemi portano tutti a una sola soluzione);
- il lunedì successivo viene appeso all'albo l'elenco dei solutori che hanno avuto successo ed eventualmente il nome del fortunato estratto a sorte (uno per classe) che riceverà un piccolo premio;
- col passare delle settimane, gli insegnanti della sede individuano i 32 migliori solutori (8 per classe) che saranno ammessi alla Sfida dei campioni.

Si ritiene importante la collaborazione con i genitori (volontari o Assemblea dei genitori) soprattutto per la raccolta dei premi.

Per tutta la durata è necessario l'appoggio convinto della direzione dell'istituto sia per la messa a disposizione di spazi e attrezzature tecniche sia per consentire agli allievi interessati di abbandonare la propria classe in tempo di scuola durante la mezza giornata della Sfida dei campioni.

Durante lo scorso anno scolastico questa attività è stata svolta interamente nella Scuola media di Morbio, con piena soddisfazione di tutti. La SMASI ha avuto un'eccellente collaborazione da parte degli insegnanti Luca Bellini, Roberto Lardelli e Silvio Pellegrini – soci della SMASI –, del direttore Giorgio Dotti, dei membri della direzione e delle signore Consuelo Rigamonti Ortelli e Milene Bernasconi dell'Assemblea dei genitori della scuola media di Morbio. La partecipazione e l'impegno profuso dagli allievi sono stati ben al di sopra delle più rosee aspettative. Di seguito presentiamo alcune fotografie scattate durante la Sfida dei campioni tenutasi l'11 giugno scorso.



Sfida dei campioni. Le raccomandazioni dell'arbitro prima di iniziare.



Sfida dei campioni. La gara è in pieno svolgimento.



Sfida dei campioni. Il pubblico è attento, la tensione è grande.





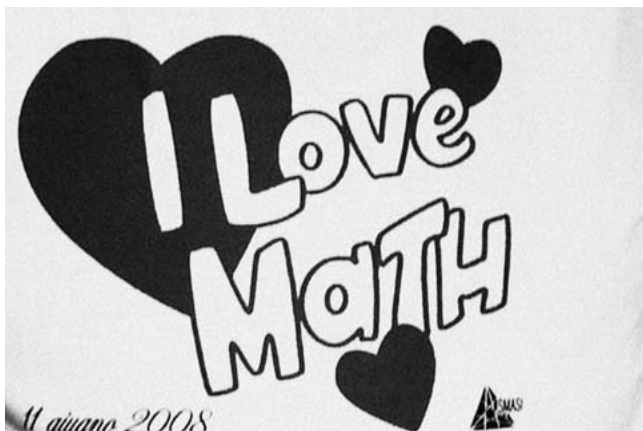
Sfida dei campioni. Gli 8 finalisti si sfidano nella risoluzione del problema finale.



Sfida dei campioni. Un vincitore mostra con fierezza il diploma d'onore.



Sfida dei campioni. La consegna dei premi da parte di una rappresentante dell'Assemblea dei genitori.



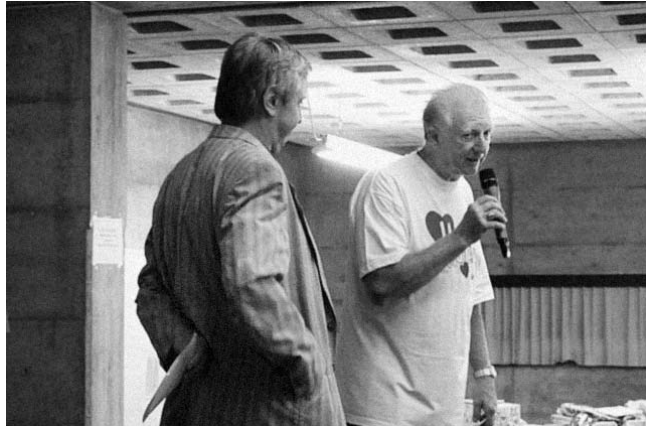
Sfida dei campioni. Particolare della maglietta indossata per l'occasione dai 32 concorrenti e dagli addetti ai lavori.



Sfida dei campioni. Ricchi premi per i più bravi.



Sfida dei campioni. Gli 8 finalisti.

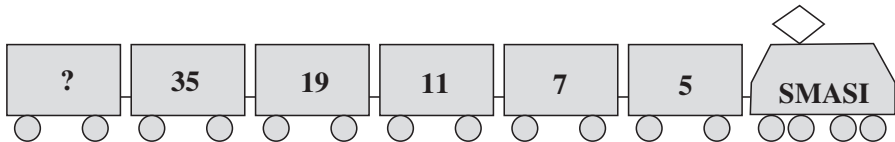


Sfida dei campioni. Si termina con le parole di ringraziamento a tutti i protagonisti da parte del presidente della SMASI Gianfranco Arrigo e del direttore della scuola Giorgio Dotti.

### Esempi di problemi della settimana

#### Per la classe prima

##### *Il trenino della SMASI*

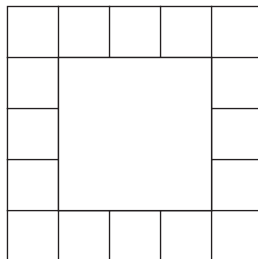


Qual è il numero che dovrebbe esserci sull'ultimo vagone?  
Motiva la risposta.

#### Per la classe seconda

##### *Contorno di vasche*

Per costruire il bordo di una vasca quadrata di mezzo metro di lato si usano 16 piastrelle quadrate, tutte uguali (vedi figura).



Quante di queste piastrelle occorrono per costruire il bordo di una vasca quadrata di 5 m di lato?

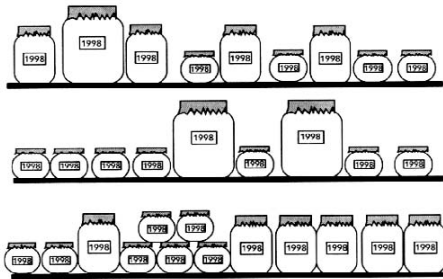
Trova questo numero e spiega come hai fatto.

**Per la classe terza**

***La marmellata***

Nonna Matilde ha disposto i suoi vasi di marmellata su tre diversi scaffali. Su ciascuno di questi vi sono esattamente 5 kg di marmellata.

Quanta marmellata c'è in un vaso piccolo, in uno medio e in uno grande?



**Per la classe quarta**

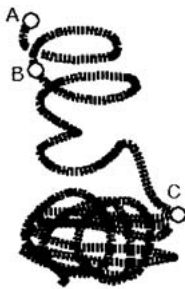
***I giri di corda***

Anna ha una corda sulla quale sono stati fatti i tre nodi A, B, C. Il pezzo di corda AB corrisponde a un quindicesimo della lunghezza totale della corda e AC a un sesto.

Se Anna mette il pezzo AB attorno al tronco di un albero, riesce a fare esattamente due giri.

Quanti giri può fare attorno allo stesso tronco con il pezzo BC?

Giustifica la risposta.



**Esempi di domande usate nella Sfida dei campioni**

Ogni sfida avviene tra due concorrenti e si compone di 5 domande. Chi si annuncia per primo, risponde: se azzecca riceve 1 punto, se sbaglia retrocede di 1 punto. Nel caso di risposta errata, il secondo concorrente decide se tentare la risposta: se azzecca riceve 1 punto, se sbaglia non gli succede niente. Se nessun concorrente risponde entro 10 secondi, si sostituisce la domanda. Se alla fine delle 5 domande i concorrenti sono a pari punteggio, si fa una domanda di spareggio.

**a. Eliminatorie****Classe prima**

- 1)  $56 : 7 = ?$
- 2) Quanti lati ha un decagono?
- 3) Quanti grammi equivalgono a mezzo chilo?
- 4) 252 è divisibile per 4?
- 5) Come si chiama il segmento che unisce due punti di una circonferenza?

**Classe seconda**

- 1)  $(-7) \cdot (+6) = ?$
- 2) Quanti assi di simmetria ha un rettangolo non quadrato?
- 3) Qual è la metà di  $1/4$  ?
- 4) Qual è l'approssimazione di  $\pi$  a meno di un decimo?
- 5)  $(-1)^{11} = ?$

**Classe terza**

- 1) Quanto fa:  $a - 5$  a ?
- 2) 3, 4 e 5 possono essere le misure dei lati di un triangolo rettangolo?
- 3) È vero che  $2/5$  è equivalente a 40%?
- 4) È vero che  $3/7 + 7/3$  è uguale a 1?
- 5) È vero che  $3/0$  è uguale a 0?

**Classe quarta**

- 1) Qual è lo sviluppo di  $(a + b)^2$ ?
- 2) Quante soluzioni ha l'equazione  $x^2 + 1 = 0$ ?
- 3) Come si chiama una funzione  $f(x)=ax+b$ ?
- 4) Se  $g(x)=x^3$ , quanto vale  $g(-1)$ ?
- 5) Qual è il volume della sfera di raggio 1?

**b. Semifinali****Classe prima**

- 1) Il numero 184 è divisibile per 8?
- 2) Quanti assi di simmetria ha un esagono regolare?
- 3) Esprimi 143 minuti in ore e minuti
- 4) 635 è divisibile per 15?
- 5) Pi greco è il noto rapporto tra circonferenza e ...?

**Classe seconda**

- 1) Quanto fa  $a^5 : a^2$  ?
- 2) Un triangolo può avere un angolo di  $179^\circ$ ?
- 3) Quale di queste frazioni è la maggiore:  $8/7$  oppure  $18/17$ ?
- 4) Quanto fa  $3/5$  in percentuale?
- 5) Qual è la soluzione dell'equazione  $x+2=1$ ?

**Classe terza**

- 1) Quanto fa  $(3b)^2$ ?
- 2) Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa di 1 m e un cateto di 0,8 m. Quanto è lungo l'altro cateto?
- 3) Che cosa fa  $3/4 : 7/5$ ?
- 4) Qual è la soluzione dell'equazione  $3x = 5/3$ ?
- 5) Quante facce rettangolari ha un prisma esagonale retto?

**Classe quarta**

- 1) Quanto fa  $(a+b)/(a^2-b^2)$ ?
- 2) Quante soluzioni ha l'equazione  $x(x-1)(x+2) = 0$ ?
- 3) Data la funzione, quali argomenti corrispondono all'immagine  $y=2$ ?
- 4) Qual è l'insieme delle soluzioni della disequazione  $-3x < 0$ ?
- 5) Se l'apotema di un cono è 5 cm, il raggio di base è 3 cm, qual è la sua altezza?

**c. Problema finale**

Un gelataio dispone di 4 gusti diversi: vaniglia (V), cioccolato (C), fragola (F) e limone (L).

Quanti coni diversi di tre palline può confezionare?

**7. Il tè dei matematici: incontri fra insegnanti, genitori e cultori della matematica**

Sono invitati al Tè dei matematici tutti coloro, matematici e no, che hanno interesse per la matematica e la sua didattica, o anche solo a incontrare colleghi giovani o maturi, in servizio o in pensione, o amici non insegnanti, che hanno la passionaccia della matematica, oppure ancora genitori alle prese con problemi scolastici dei figli.

Con piacere la Società Matematica della Svizzera Italiana (SMASI) aspetta tutti per una tranquilla e costruttiva conversazione davanti a una tazza di tè o di caffè o a una bibita accompagnati da qualche biscotto, gratuitamente offerti.

Una prima esperienza è stata fatta questa primavera, nei giorni 7, 14, 21 e 28 aprile, la sera a partire dalle 20.30 nella sede della società. L'impressione nostra è che chi vi ha partecipato ne abbia tratto profitto e soddisfazione. Certo, non sono stati molti: sappiamo come sia difficile, di sera, strappare la gente dalla comoda poltrona del telespettatore. Ci proveremo ancora: chissà se avremo più successo?

**8. La Bottega: un ambiente di studio accogliente attrezzato e gratuito per matematici, insegnanti e cultori della matematica**

Con l'acquisizione della biblioteca personale di Maurice D. Froidcoeur (vedere di deguitto le foto della firma dell'atto di donazione), la sede della SMASI è diventata un luogo ideale per studiare e per documentarsi. Oltre alla biblioteca, sono a di-

sposizione dei soci, e di eventuali altre persone interessate, un locale con attrezzature informatiche allacciate a Internet, un locale per corsi dotato di una lavagna e di apparecchiature per la proiezione, due salette per lavori di gruppo, una cucina convenientemente attrezzata e i servizi. La SMASI si impegna a tenere aggiornata la biblioteca e a migliorare costantemente le attrezzature tecniche della sede. Ma, ciò che più conta, si spera che col passare del tempo ci siano sempre più persone, soprattutto insegnanti di ogni ordine di scuola, che frequentino la sede. Lo spirito che si vorrebbe creare è quello della Bottega rinascimentale: si impara operando con chi è più capace, si eseguono importanti lavori con tranquillità e piacere, in una parola si impara divertendosi.

Di seguito, presentiamo alcune fotografie della sede SMASI.



Matoteca. La firma dell'atto di donazione.



Matoteca. Matematica, storia, filosofia e didattica.



Matoteca. L'ufficio della biblioteca.



Sala riunioni. Qui si tengono anche i corsi per gli insegnanti.



Angolo computer con allacciamento internet.



---

**9. Conferenze**

Nel 2007 la SMASI ha organizzato due conferenze nell'ambito delle celebrazioni dei trecento anni dalla nascita di Leonhard Euler:

- la conferenza di Silvio Maracchia dell'Università La Sapienza di Roma, tenutasi il 26 marzo nell'aula magna del Liceo di Lugano 1, dal titolo «Intuizione e rigore in Eulero»;
- la conferenza di Giorgio T. Bagni dell'Università di Udine, tenutasi il 9 novembre nell'aula multiuso della Scuole comunale della Gerra a Lugano.

Nel 2008 non si sono tenute conferenze, soprattutto per problemi finanziari. Si riprenderà però nel 2009, già verso la fine di gennaio, con Jean-Claude Pont dell'Università di Ginevra che ci intratterrà con una relazione in francese dal titolo «La déraisonnable adéquation des mathématiques à l'univers<sup>2</sup>».

**10. Sito SMASI e contatti**

Informazioni dettagliate sulla SMASI si trovano sul sito web [www.smasi.ch](http://www.smasi.ch)

oppure si possono chiedere direttamente a uno dei membri del comitato, attualmente così composto:

Presidente

Gianfranco Arrigo, via Maraini 20 b, 6900 Massagno

Vice-presidente

Paolo Hägler, via Pratocarasso 31a, 6500 Bellinzona

Segretario

Willy Montella, Scuola media di Cadenazzo

Cassiere

Edo Montella, via Gesero, 6517 Arbedo

Membri

Luca Bellini (Scuola media Morbio)

Claudio Beretta (6653 Verscio),

Antonio Cassina (Scuola media Tesserete)

Giorgio Mainini (via Merlecco 7, 6963 Pregassona)

Sara Cataldi Spinola (Scuola media Minusio)

In quasi tutti gli istituti di scuola media la SMASI dispone di soci che hanno accettato di fare da antenna per diffondere le informazioni relative all'attività societaria. Il comitato ringrazia questi insegnanti volontari e auspica che anche in quelle poche sedi rimaste scoperte si possa trovare a breve tempo qualcuno che si metta a disposizione per assumere questo ruolo.

---

2. Vedere in particolare il lancio della conferenza nella rubrica Segnalazioni di questo numero.

---

## 4. La pianificazione dei consigli di classe

Paolo Hägler<sup>1</sup>

In this paper, I will present a mathematic method of planning the “Consigli di classe” and explain the different conditions that I have taken into account.

### 1. Introduzione

Dopo 7 anni di insegnamento della matematica nelle scuole cantonali (dapprima 2 anni nelle scuole medie e poi 5 nelle scuole medie superiori), in agosto del 2008 sono entrato nel consiglio di direzione della Scuola Cantonale di Commercio (SCC) di Bellinzona. Uno dei primi compiti che mi è stato attribuito è stata la pianificazione dei consigli di classe, che, essendo un matematico, ho trattato con l’ausilio degli strumenti di ricerca operativa in mio possesso, creando un programma che fornisce una soluzione che rispetta il più possibile le numerose condizioni prestabilite.

Negli ultimi anni i consigli di classe della SCC, hanno avuto luogo secondo alcune modalità che non ho messo in discussione.

In primis, poiché in quarta parecchie lezioni non sono svolte a classe intera ma a gruppi, non si tengono dei veri e propri consigli di classe di quarta, ma i casi che necessitano una discussione sono regolati individualmente, dai docenti interessati.

Secondariamente, poiché le salette per le riunioni disponibili sono due, i consigli di classe si svolgono sempre con due classi in parallelo.

Terzo: per non rendere troppo pesante la giornata lavorativa degli insegnanti, ogni giorno si tengono 3 turni di consigli di classe (i primi due in corrispondenza delle ultime due ore di lezione, durante le quali spesso sia le classi sia i docenti non hanno lezione, e il terzo subito dopo), per un totale di 6 consigli di classe al giorno.

### 2. L’approccio al problema

Quest’anno alla SCC ci sono 53 classi (e 123 docenti), ma siccome le quarte sono 11, per le quali sono abitualmente previste due giornate per discutere i casi dovuti, i consigli di classe interi da pianificare erano 42 (per un totale di 119 docenti

---

1. Docente di matematica presso la SCC di Bellinzona.

coinvolti, poiché 4 hanno lezioni sono con delle quarte oppure non sono tenuti a presenziare ai consigli di classe poiché insegnano unicamente in corsi particolari come religione e grafica).

Potrebbe quindi sembrare che il problema consista «semplicemente» nel posizionare 42 classi in 42 spazi (6 per ognuno dei 7 giorni in cui è pianificato un consiglio di classe non di quarta). Un simile problema, se fosse tale, si potrebbe agevolmente risolvere con l'algoritmo ungherese (creato da H. W. Kuhn nel 1955, sulla base del lavoro di due matematici ungheresi D. König e E. Egerváry), poiché si tratterebbe del problema dell'assegnazione di peso massimo in un grafo bipartito, che è un problema polinomiale che l'algoritmo indicato sopra risolve in un ordine di tempo  $O(n^2m)$  dove  $n$  è il numero di vertici del grafo (nel nostro caso il numero di classi) e  $m$  è il numero di spigoli del grafo (nel nostro caso  $m$  va sostituito con  $n(n-1)$  poiché il grafo è completo. Purtroppo non è così, poiché i pesi dei diversi spigoli non sono fissi, ossia non possiamo dire quanto convenga posizionare una classe in un dato momento della griglia prima di metterci al lavoro, poiché può diventare conveniente posizionarla o non posizionarla in un certo momento a dipendenza di come posizioniamo le altre classi. Ad esempio, se le classi 1A e 1B hanno 6 docenti in comune, è comodo posizionarle una di seguito all'altra, così i docenti evitano trasferte a scuola (o di restare) per un solo consiglio di classe, mentre è improponibile proporle in parallelo, poiché tutti e 6 i docenti devono rinunciare a presenziare al consiglio di una delle due classi.

Per poter prendere in considerazione queste e altre condizioni in maniera realistica, la prima idea è stata quella di suddividere il problema in 3 problemi separati. Il primo problema è l'**accoppiamento delle classi** che avranno il consiglio di classe in parallelo; il secondo è il **raggruppamento delle coppie** di classi che avranno il consiglio di classe lo stesso giorno; ed il terzo è l'**assegnazione al giorno** dei vari gruppi di classi.

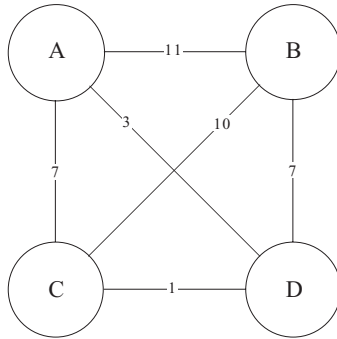
Questa scelta permette di risolvere il problema in maniera efficace, ma presenta un paio di difetti. Il primo, di cui mi sono subito reso conto ma che avevo deciso di accettare, è che non è possibile accettare di migliorare (anche di molto) la soluzione dei problemi 2 e 3, se non a scapito di un piccolo peggioramento della soluzione del primo problema (e migliorare la soluzione del problema 3 a scapito di un peggioramento della soluzione del problema 2).

Il secondo problema, al quale non avevo pensato ma che si è presentato solo una volta terminato di costruire la prima versione del mio programma, è l'assenza di un docente di classe o di un membro della direzione in alcune date (alla SCC ad ogni classe è attribuito un membro della direzione, che, in quanto responsabile, è tenuto a presenziare al consiglio di classe). Per poter rispettare queste condizioni di presenza, ho dovuto evitare che un intero blocco di 6 classi avesse il consiglio di classe in un dato giorno, quando in realtà erano meno (da 1 a 3) le classi impossibilitate ad avere il proprio consiglio in quella data.

In un secondo tempo, nella seconda versione dell'algoritmo, ho risolto entrambi i problemi contemporaneamente. Parlerò di questa miglioria del primo programma in seguito.

### 3. L'accoppiamento delle classi

Questo è il primo problema da risolvere, ma che, vista la sua complessità, è stato l'ultimo che ho programmato. Esso può essere facilmente rappresentato su un grafo: ogni classe è rappresentata da un vertice, e ogni possibile accoppiamento è uno spigolo che collega due vertici; e si ottiene così un grafo completo. Ad ogni spigolo è poi associato un peso, a dipendenza di quanto sia conveniente accoppiare due classi (ossia programmare i consigli di classe in contemporanea). Ponendo tutti i pesi con valori positivi, il problema matematico è quindi quello di cercare l'accoppiamento (matching) di peso massimo (maximum weighted matching).



Ad esempio, in questo grafo, l'accoppiamento di peso massimo (di peso 14) è  $\{\{A;C\};\{B;D\}\}$ .

Si osservi che se il numero di classi è dispari, basta aggiungere una classe fittizia e degli spigoli che la collegano a tutte le classi con pesi uguali tra loro. Si tratta di un problema polinomiale risolto per la prima volta da J. Edmonds (nel 1965) con un algoritmo che lo risolve in un tempo nell'ordine di  $O(n^4)$ , dove  $n$  è il numero di vertici (ossia di classi), e una seconda volta da H. N. Gabow (nel 1973) con un algoritmo che funziona in  $O(n \cdot m)$  dove  $n$  è il numero di vertici (le classi nel nostro caso) e  $m$  è il numero di spigoli ( $n(n-1)$  nel nostro caso poiché il grafo è completo), che per il nostro grafo completo si traduce in  $O(n^3)$ . Tuttavia entrambi questi algoritmi sono abbastanza complessi da programmare e sensibilmente lenti nell'esecuzione, visto il valore dell'esponente. D'altra parte, la taglia del nostro problema è sì abbastanza modesta, ma non eccessivamente da poterli implementare. Ho quindi preferito optare per un'euristica (un algoritmo che non trova la soluzione ottimale, ma un'ottima soluzione). Prima di vedere l'euristica che ho utilizzato, però, facciamo un passo indietro e terminiamo di costruire il grafo associando un peso ad ogni spigolo.

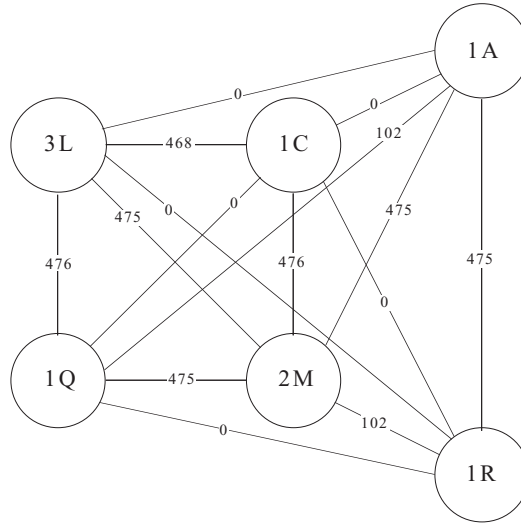
L'idea di base è quella di dare un peso massimo a ogni spigolo, e poi ridurre il peso qualora ci siano dei docenti in comune tra le due classi rappresentate dai vertici. Il primo peso massimo che ho scelto per ogni spigolo, è stato 1000, ma l'ho poi modificato in  $20'000/n$  dove  $n$  è il numero di classi, di modo che se è possibile avere  $n/2$  coppie di peso massimo ( $n/2$  coppie di classi senza nessun docente in comune), il peso massimo teorico complessivo del problema sarà 10'000. Questa scelta è stata utile per controllare più facilmente quanto la mia soluzione era vicina al massimo teorico possibile (ma non necessariamente possibile!).

Un'altra idea che ho poi rivalutato è stata quella di penalizzare con un peso fisso un certo tipo di docente in comune a due classi. Ad esempio,  $-1000$  (ossia  $1000$  da togliere al valore iniziale) se un docente di una classe è anche il membro della direzione responsabile per l'altra, o  $-1000$  se un insegnante è docente di classe di entrambe le classi, o  $-100$  se un docente insegna in entrambe le classi intere, o  $-20$  se un docente insegna ad una classe intera ed in maniera parziale (solo ad alcuni allievi<sup>2</sup>) nell'altra, o  $-1$  se un docente insegna in maniera parziale in entrambe le classi. Ho però rivisto questa mia idea iniziale, poiché se, ad esempio, le classi 1A e 1B hanno 4 docenti in comune, mentre 1C e 1D non ne hanno nemmeno uno e se 1A e 1C hanno due docenti in comune, e pure 1B e 1D ne hanno due, ritengo più sensato proporre il secondo accoppiamento piuttosto che il primo per un consiglio di classe. Questo poiché, con 4 docenti in comune, se ogni docente sceglie a quale consiglio di classe è meglio presenziare, è probabile che i 4 scelgano la stessa classe poiché più problematica, riducendo così di molto il numero di docenti presenti al consiglio di classe dell'altra classe. Ho quindi preferito dare dei pesi che si moltiplicano tra loro per ogni docente in comune, cosicché, se ogni concomitanza è una con un coefficiente moltiplicativo di 10, alla coppia 1A-1B è attribuito un peso di 10000 inferiore al massimo possibile, mentre 1C-1D resta a punteggio pieno; le coppie 1A-1C e 1B-1D avrebbero entrambe un punteggio di 100 inferiore al massimo possibile, rendendo così questo secondo accoppiamento migliore del primo. Per evitare pesi negativi, tutti quelli negativi li ho trasformati in nulli. Ciò non ha compromesso il risultato finale, poiché il numero di coppie con pesi elevati è alto, ed ogni classe ha almeno un paio di spigoli con pesi elevati.

Passiamo ora all'euristica utilizzata. Per prima cosa ho osservato che le coppie di classi senza nemmeno un docente in comune erano ben 28, e quelle con alcuni docenti in comune con un peso elevato (uno o più docenti in comune ma tutti con pochi allievi sia di una classe sia dell'altra) erano addirittura 108. Nella miglior soluzione trovata con l'euristica, 7 coppie sono del primo gruppo (nessun docente in comune), 13 del secondo (da 1 a 3 docenti in comune, ma tutti che insegnano solo ad alcuni allievi di entrambe le classi) ed 1 al di fuori di queste (3 docenti in comune, tutti che insegnano solo ad alcuni allievi di entrambe le classi, e un docente della direzione che è responsabile per una classe e che insegna ad alcuni allievi dell'altra). La prima euristica alla quale ho pensato è stato l'algoritmo greedy<sup>3</sup>, ma non potevo certo considerare tutte le 28 coppie senza nessun docente in comune alla stessa stregua. Ho quindi ordinato tutte le coppie, dalla più conveniente da considerare alla meno conveniente, in base a due criteri. Il primo è il peso dell'arco (ordine decrescente), e il secondo è la somma dei pesi di tutti gli archi uscenti dai due vertici (in ordine crescente), poiché uno spigolo

- 
2. Alla SCC la materia comunicazione è insegnata a blocchi in tutte le classi, e la classe è generalmente divisa in 3 gruppi, per un numero di allievi attorno al 7 (di ogni classe) che vengono uniti a 7 allievi di un'altra classe; mentre in terza ci sono dei corsi opzionali dove il numero di allievi è spesso inferiore al 7, e quindi ho utilizzato dei pesi diversi anche a dipendenza di quale fosse la materia insegnata.
  3. Questo algoritmo, utilizzato in problemi diversi, si basa semplicemente sulla scelta migliore possibile in ogni iterazione, escludendo poi tutto ciò che diventa impossibile con la scelta appena effettuata. Nel nostro grafo precedente, questo algoritmo sceglie dapprima lo spigolo  $\{A;B\}$ , essendo quello di valore massimo, e poi elimina dal grafo i due vertici coinvolti e ogni arco a loro connesso. Resta quindi solo lo spigolo  $\{C;D\}$  come seconda scelta. Si noti che questo accoppiamento è il peggiore possibile!

scelto impedisce che gli spigoli adiacenti lo siano (ogni classe deve essere accoppiata a un'altra sola), e quindi questi altri spigoli devono avere un peso il più piccolo possibile. A questo punto ho quindi applicato l'algoritmo greedy, ossia ho accoppiato le due classi con lo spigolo più conveniente, e poi ho eliminato dal grafo i due vertici e tutti gli spigoli adiacenti a essi, e proseguito allo stesso modo fino alla fine. Siccome, proseguendo in questo modo, la soluzione non mi soddisfaceva, poiché c'erano ben 2 spigoli di peso 0 che erano scelti, ho corretto l'accoppiamento considerando tutti i possibili scambi di vertici, come nell'algoritmo per il problema del commesso viaggiatore<sup>4</sup>. Tra tutte le soluzioni trovate che sono dei massimi locali, ho quindi preso quella di valore massimo.

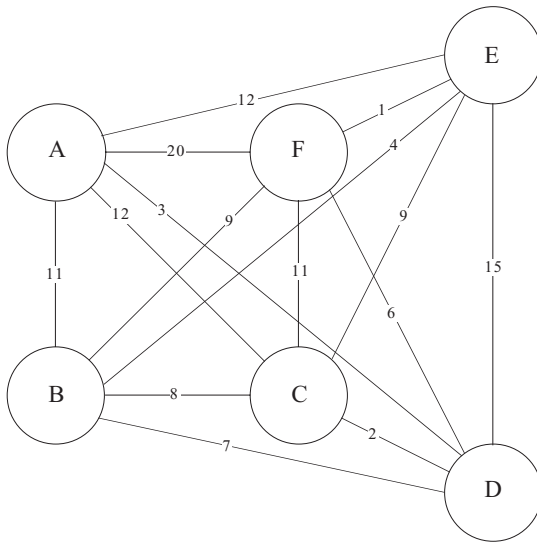


Questa è una piccola parte del grafo reale utilizzato (figurano solo 6 dei 42 nodi, e solo 15 dei 861 spigoli).

#### 4. Il raggruppamento delle coppie

Questo problema si può rappresentare con un grafo molto simile a quello del problema precedente, ossia con ogni coppia di classi in un vertice (quindi i vertici sono la metà rispetto al problema di prima), e con degli spigoli che collegano i vari vertici con pesi stabiliti in base a quanto sia utile programmare nella stessa giornata i consigli di classe delle due coppie di classi considerate.

4. Questo problema di ricerca operativa è uno dei più famosi. Si tratta di trovare il circuito più breve che permetta di visitare tutti i nodi previsti (le città per il commesso viaggiatore). Non esiste un algoritmo polinomiale per questo problema, e lo si risolve con un'euristica in 2 (o 3 tappe). La prima tappa è la costruzione di una soluzione iniziale (di cui non ci occupiamo qui), mentre la seconda è quella di provare a invertire l'ordine di due nodi all'interno del circuito per vedere se si riesce ad accorciarlo. Ho preso spunto da questa operazione, provando a scambiare due classi, per il mio algoritmo. Una terza tappa, non sempre applicata, è quella di provare a invertire l'ordine di 3 città.



In questo grafo il 3-matching migliore consiste in  $\{\{A;C;F\};\{B;D;E\}\}$  e ha peso 69.

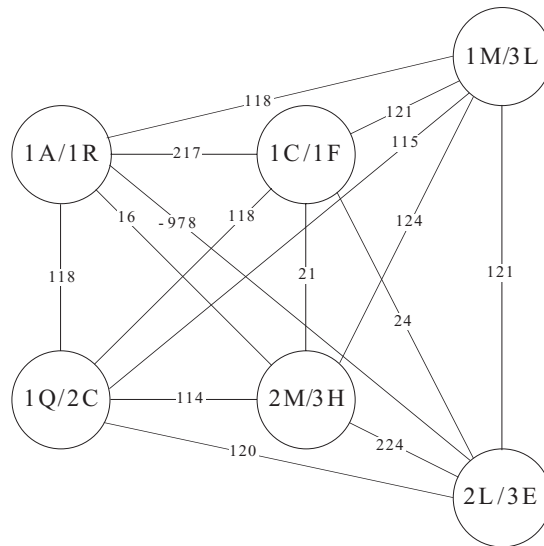
La grande differenza sta nel fatto che non bisogna più trovare un accoppiamento (ossia un insieme di coppie di vertici), ma un insieme di terne di vertici. Questo problema, indicato con 3MP (3-matching problem) non è più un problema polinomiale, ma un problema NP-completo, ossia per il quale non è stato trovato (e si ritiene che quindi non esista) un algoritmo che trovi la soluzione migliore in un ordine di tempo polinomiale rispetto alla grandezza del problema. Le possibilità per risolvere il problema, sono quindi due. O si considera un'euristica, come ho fatto nel problema precedente, oppure, approfittando della taglia ridotta del problema, si opta per un algoritmo del tipo Branch & Bound<sup>5</sup> (ciò che ho fatto).

Prima di passare però ai dettagli dell'algoritmo, concentriamoci sui pesi dei diversi spigoli. Anche in questo caso, qualora il numero di vertici non fosse un multiplo di 3, aggiungo dei nodi fittizi. I pesi degli spigoli tra due vertici fittizi sono elevatissimi, mentre quelli tra un vertice fittizio e un altro sono nulli, ciò che favorisce il fatto che resti una giornata con due soli consigli di classe, piuttosto che due giornate con 4 consigli di classe. In questo modo, durante il giorno con 2 consigli di classe, è possibile trattare poi i casi dei consigli di classe di quarta.

A differenza di prima, sono partito con un peso nullo su ogni spigolo, e l'ho aumentato per ogni docente in comune ai due gruppi, di modo da cercare di avere, ogni giorno, il minor numero di docenti coinvolti nei consigli di classe, con lo scopo, quindi, di raggruppare il più possibile i diversi consigli di classe di ogni docente durante le stesse giornate, cercando di lasciare ai docenti il maggior numero di giornate libere. Questo obiettivo, essendo secondario e quindi già limitato dagli accoppiamenti di classe trovati prima, è stato raggiunto meno bene, ed in alcuni casi, alcuni docenti hanno

5. Questa tecnica permette di trovare la soluzione ottimale di ogni problema, ma non in un tempo sempre considerevole. Essa è composta di 2 parti, come suggerisce il nome, una in cui si fissano alcuni valori (Branch), ed un'altra in cui si calcola un limite superiore (o inferiore se si deve minimizzare) per tutte le soluzioni coi valori prefissati (Bound).

avuto tutti i loro consigli di classe ognuno in un giorno diverso (soprattutto per i docenti a tempo fortemente ridotto). Un'altra differenza rispetto ai pesi del primo problema, è stata la minor varietà di misure dei pesi aggiunti, poiché ogni docente è stato considerato alla stessa stregua, qualunque sia il numero di allievi ai quali insegna, con due uniche eccezioni. La prima è stata quella di cercare di concentrare nello stesso giorno i consigli delle classi che hanno lo stesso responsabile di direzione, in quanto ciascuno di essi è responsabile di un numero considerevole di classi (da 9 a 13), e porta sé alla riunione il computer da connettere alla rete per poter vedere le schede degli allievi. La seconda eccezione è invece un'eccezione con pesi negativi, per cercare di evitare che i docenti con due docenze di classe abbiano i consigli di classe delle loro classi nello stesso giorno. Questo poiché la mole di lavoro per redigere i giudizi di 40 allievi, tutti nello stesso tempo, è parecchia.



Quella illustrata è una parte del grafo intero (6 dei 21 nodi, e 15 dei 210 spigoli).

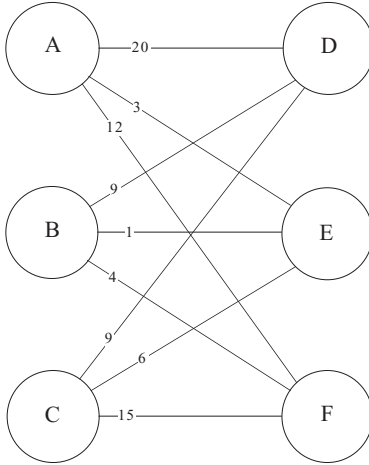
Passiamo ora all'algoritmo utilizzato. Ho optato, come già anticipato, per un metodo di Branch & Bound, ispirandomi al problema del sacco da montagna<sup>6</sup>, dove, dati alcuni oggetti di volume e valore conosciuto, bisogna riempire il sacco (di capienza nota) con oggetti che valgano complessivamente il più possibile. Ho quindi considerato tutte le possibili terne di vertici, dando a ogni terna il peso dato dalla somma dei pesi dei 3 spigoli. Ho poi ordinato tutte le terne di vertici in ordine decrescente, e creato la prima soluzione tramite l'algoritmo greedy. Ora, risalendo dalla peggior terna presa fino alla migliore, ho considerato il sottoproblema con tutte le terne migliori già prese, e quella in corso non presa, trovando eventualmente soluzioni migliori, oppure escludendo questa possibilità tramite una soluzione massima possibile raggiungibile inferiore alla miglior soluzione trovata. Con questo metodo ho quindi trovato la soluzione migliore al problema.

6. Vedere l'articolo di Stefano Leonesi «Knapsack: lo zaino e i suoi segreti», su questo numero.



## 5. L'assegnazione al giorno

Anche questo ultimo problema è facilmente rappresentabile con un grafo. Questa volta si tratta di un grafo bipartito, con un primo insieme di vertici composto da alcuni vertici (7 nel nostro caso) con i gruppi di 6 classi, e 2 per i gruppi di quarte; mentre il secondo insieme è composto dai diversi giorni messi a disposizione per i consigli di classe. Si tratta di trovare l'accoppiamento di peso massimo sul grafo bipartito, un problema polinomiale facilmente risolvibile con l'algoritmo ungherese.



In questo grafo bipartito l'assegnazione migliore è  $\{\{A;D\};\{B;E\};\{C;F\}\}$  di peso 36.

Tuttavia ho preferito risolverlo con un metodo di Branch & Bound vista la taglia estremamente ridotta del problema. Non ho perso nulla, in quanto trovo la stessa (a meno di più soluzioni a parti merito) soluzione migliore come con l'algoritmo ungherese, ed il tempo di calcolo è ridotto ad un paio di minuti). Se avessi invece programmato l'algoritmo ungherese, avrei forse (vista la taglia ridotta del problema) ottenuto un algoritmo più rapido, ma avrei dovuto investire parecchio più tempo nella programmazione.

Anche in questo caso, vediamo dapprima i pesi dati ai diversi spigoli, ognuno che collega un vertice del primo insieme (delle classi) ad un vertice del secondo insieme (i giorni). Gli scopi sono due: il primo è quello di ridurre il numero di ore di lezione che cadono a causa degli impegni dei docenti nei consigli di classe, ed il secondo è quello di ridurre il numero di consigli di classe dei diversi docenti quando loro hanno la giornata o la mezza-giornata libera, e, secondariamente, le ore di attesa tra la fine dell'ultima lezione ed il primo consiglio di classe. Questa volta sono partito da pesi nulli, li ho aumentati per ogni circostanza da evitare, ed ho poi cercato l'accoppiamento di peso minimo. Ho dato dei pesi maggiori alle perdite delle giornate o mezza giornata libere dei docenti rispetto alle perdite di lezioni, alle quali a loro volta ho attribuito dei pesi maggiori alle ore di attesa da parte dei docenti tra la fine delle lezioni pomeridiane ed il primo consiglio di classe. A questo proposito, bisogna dire quali possibili ordini dei consigli di classe ho considerato. Trattandosi di 3 coppie, gli ordini possibili sono 6, ma ne ho considerati soltanto due, poiché ho fissato quello centrale, mantenendo ai

margini le due coppie di classi con lo spigolo di peso minore nel problema precedente, di modo da evitare che la maggioranza dei docenti fosse impegnata nel primo e nell'ultimo consiglio di classe di una giornata avendo l'ora libera nel mezzo. Tra gli ordini restanti, per ogni diverso giorno della settimana, ho scelto l'ordine migliore. Quindi, se un certo gruppo di consigli di classe fosse stato in seguito piazzato di lunedì o di martedì, l'ordine nel quale i consigli di classe si sarebbero svolti sarebbe stato diverso. Per i casi da discutere delle classi di quarta ho lasciato la possibilità di scegliere se utilizzare i primi due giorni del calendario (utile nel secondo semestre visto che, a causa degli esami di maturità, il semestre per le quarte finisce prima) oppure gli ultimi due.

L'ultima tappa consiste appunto nella scelta del giorno. Ho dapprima risolto il problema con l'algoritmo greedy, attribuendo a un gruppo di classi il giorno per loro meglio possibile, poi il migliore possibile tra i restanti per il secondo gruppo e così via. Come ho già detto prima, ho poi utilizzato un metodo Branch & Bound, già spiegato in precedenza.

Per poter poi presentare la soluzione, non sotto forma di numeri, ma nella forma di tabella riempita con classi, date, orari e sale, ho dovuto risolvere un altro piccolissimo problema: la scelta delle sale. Per il primo consiglio di classe della giornata, essa è assolutamente indifferente visto che le salette sono identiche, ma per i successivi non lo è. Ho optato quindi per la soluzione che confermava nella stessa sala dell'ora prima lo stesso responsabile della direzione.

## 6. La seconda versione

Come già anticipato prima, il problema delle assenze di membri della direzione e/o di docenti di classe era stato mal risolto. Ho quindi proseguito la costruzione dell'algoritmo, mantenendo la soluzione trovata finora come soluzione iniziale. A partire da questa soluzione iniziale, ho creato una funzione obiettivo che considerasse tutto ciò che desideravo e/o che non desideravo con pesi diversi. Ad esempio, volendo assolutamente evitare che il docente di classe e/o il responsabile della direzione fosse assente, ho dato un peso estremamente negativo al posizionamento del consiglio di classe in uno di questi giorni. Molte delle condizioni poste sono quelle elencate prima, mi limito quindi ad illustrarne due: una modificata rispetto a prima, e una nuova. Quella modificata è relativa alla scelta del giorno, poiché rimettendo in discussione anche gli accoppiamenti delle classi e i raggruppamenti in un giorno, disponevo di un margine di manovra più ampio, e ho quindi valutato, per ogni singolo docente, quante volte avrebbe dovuto rinunciare alla giornata o alla mezza giornata libera, dando dei pesi moltiplicativi, di modo che se un docente avrebbe dovuto rinunciare a due giornate libere, davo a questa soluzione un peso peggiore rispetto a una in cui due diversi docenti rinunciassero a una giornata libera a testa (a parità di altre condizioni). La condizione nuova, che prima non avevo considerato, non potendolo fare vista la strategia che avevo adottato, è stata quella di evitare che due consigli di due classi con lo stesso docente di classe si tenessero a distanza di uno o due giorni (oltre allo stesso giorno già considerato prima).

A questo punto, partendo dalla soluzione iniziale, ho provato a effettuare due tipi di scambi: un semplice scambio tra due classi, e uno (molto più utilizzato nell'algoritmo poiché non crea coppie di classi improponibili), tra due coppie di classi.

L'algoritmo esegue dapprima i migliori scambi possibili per spostare dei consigli di classe da date in cui o il docente di classe e/o il responsabile della direzione sia assente, e poi ne esegue altri per migliorare la soluzione, potendoli far susseguire l'uno all'altro. Nonostante questo, a volte ci si trova in una regione dell'insieme delle soluzioni ammissibili, che non aveva grandi massimi, per cui, ho inserito una parte di algoritmo che, utilizzando anche dei numeri casuali, cerca un altro accoppiamento di classi con pesi molto elevati, anche permettendo dunque degli scambi di classe che peggiorassero provvisoriamente la situazione migliorandola poi in seguito. Grazie a questa catena di classi che porta a un nuovo accoppiamento è stato possibile migliorare di parecchio la soluzione, soprattutto per ciò che riguarda le giornate e mezze giornate libere sacrificate dai docenti, sia per ciò che riguarda il raggruppamento dei consigli di classe al quale un responsabile della direzione deve partecipare (ad esempio, per un membro della direzione che segue 8 classi, l'impegno è stato limitato a 3 giornate (2 volte 3 classi ed una volta 2) invece delle 4 previste dalla prima soluzione (2 volte 3 e due volte 1)).

## 7. Implementazione

Affinché il programma sia facilmente utilizzabile da tutti, sia per ciò che concerne l'inserimento dei dati (i nomi, o le sigle, di ogni docente di ogni classe e l'ultima ora di lezione di ogni giorno di ogni docente e di ogni classe), sia per me per poter controllare facilmente come procede l'algoritmo e per poter modificare agevolmente qualche dato se fosse necessario, ho scritto il programma in Visual Basic partendo dai fogli di calcolo di Excel. Evidentemente si tratta soltanto di una versione gamma (nemo-nemo beta) di un programma, poiché è ancora suscettibile di parecchie migliorie e correzioni, qualora con l'esperienza dovessi rendermi conto di alcuni aspetti che non funzionano o che non ho considerato.

											Pianificazione	
1	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
2	Ultima ora (bianco: giornata libera, 0: CdD)						Giorni disponibili per CdC				Preferenze	
3	Lunedì	Martedì	Mercoledì	Giovedì	Venerdì		Giorno (nr)	lu/ma/me/gi/ve			quarte	crociare
4	AGAD	0	0	0	0	0		4	ma			
5	ALMI	4		8	9			5	me		all'inizio	x
6	ANLI	10	4			9		6	gi			
7	BAAL	8			8			7	va			
8	BAAU	5	9	9	9	9		10	lu			
9	BAGI	0	0	0	0	0		11	ma			
10	BAJE	8	8	5	8	4		12	me			
11	BAMA		3	8	7	8		13	gi			
12	BASM	8	8	3	10	9		14	ve			
13	BAST			10								
14	BECL	10	8	8	10	9						
15	BEEG	9	10	8	5	8						
16	BEGI	4	9	8	10	9						
17	BELL	8		2		4						
18	BENI		5	8	10							
19	BEVA			3	9	8						
20	BEWA	3	5	9	8	5						
21	BIRN			9	10	9						
22	BMLU		7	8	10							
23	BODA	5	9	8		5						
24	BOFD	8	4		8	9						

Questo è il foglio Excel in cui introdurre:

- a sinistra, l'ultima ora di lezione di ogni docente (le sigle sono generate da un'introduzione precedente)
- al centro, i giorni disponibili per i consigli di classe
- a destra, la preferenza su dove posizionare i casi da discutere delle quarte

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1			IX	X	XI		ma 4	IX	GENA	Com	Com
2	ma 4	SR1	2E	2P	2J		ma 4	IX	LEAL	Com	Com
3	ma 4	SR2	3F	3H	3G		ma 4	X	CRDA	Com	Com
4	me 5	SR1	1F	1S	1R		ma 4	X	DAGI	Doc	Opz
5	me 5	SR2	3A	3B	1A		ma 4	X	GIEL	Com	Com
6	gi 6	SR1	1M	2B	2A		ma 4	XI	GENA	Com	Opz
7	gi 6	SR2	2L	2C	2F		ma 4	XI	GIEL	Com	Com
8	ve 7	SR1	1C	1D	1B		me 5	IX	MAFA	Com	Opz
9	ve 7	SR2	3L	3J	3M		me 5	IX	PEFA	Com	Opz
10	lu 10	SR1	1L	1Q	1E		me 5	X	BAJE	Com	Com
11	lu 10	SR2	2Q	2M	2G		me 5	XI	BAJE	Com	Com
12	ma 11	SR1	1T	1J	1G		me 5	XI	FATP	Com	Com
13	ma 11	SR2	2H	2D	2N		gi 6	IX	GENA	Com	Com
14	me 12	SR1	1H	1P	1N		gi 6	X	BAJE	Com	Com
15	me 12	SR2	3E	3C	3D		ve 7	IX	CRDA	Com	Opz
16	gi 13	SR1					ve 7	IX	GIAR	Com	Com
17	gi 13	SR2					ve 7	IX	ZAGI	Resp UP	Opz
18	ve 14	SR1					ve 7	X	DAGI	Doc	Opz
19	ve 14	SR2					ve 7	X	GENA	Com	Opz
20							ve 7	X	GIAR	Com	Com
21							ve 7	XI	BAJE	Com	Opz
22							ve 7	XI	MAFA	Com	Opz
23							ve 7	XI	ZAGI	Resp UP	Opz
24							lu 10	IX	GIEL	Com	Com
25							lu 10	X	GIEL	Com	Com
26							ma 11	X	BAJE	Com	Com
27							ma 11	XI	GIEL	Com	Com
28							me 12	IX	DAGI	Doc	Opz
29							me 12	IX	MAFA	Com	Opz
30							me 12	XI	BAJE	Com	Com
31							me 12	XI	CRDA	Com	Opz
32							me 12	XI	GENA	Com	Com

Questo è il foglio Excel con il risultato finale. A sinistra figura il calendario dei consigli di classe (quello della 1D avrà luogo venerdì 7 la decima ora di scuola, nella sala riunioni 1, in parallelo a quello della 3J). A destra figurano tutte le concomitanze. Per queste due classi (1D e 3J) ci sono 3 docenti che insegnano ad almeno una parte di allievi di ognuna delle due classi. Si tratta di DAGI (insegna francese in 1D, e nell'opzione di francese ad alcuni allievi della 3J), GENA (insegna comunicazione ad alcuni allievi della 1D e nell'opzione di comunicazione ad alcuni allievi della 3J) e GIAR (insegna comunicazione ad alcuni allievi di entrambe le classi).

## 8. Conclusioni

Grazie alla miglioria apportata nella seconda versione del programma, ritengo di aver potuto ottimizzare molti aspetti. Tuttavia la mia esperienza in merito è ancora scarsa e non so se qualche altro criterio possa entrare in considerazione. La soluzione trovata col nuovo algoritmo soddisfa tutte le condizioni forti che ho posto tranne una: irrisolvibile a causa delle altre, poiché un membro della direzione e un docente sono assenti per gli stessi 3 giorni consecutivi e una docente ha la doppia docenza di classe, una in una classe a cui deve presentare il membro della direzione e l'altra a cui presenza la docente. Siccome la condizione di mantenere distanti i consigli di classe di queste due classi è stata reputata più forte di quella dell'assenza di un docente, non è stato possibile soddisfare quest'ultima. Ritengo però che sia comunque una buona soluzione, anche per ciò che riguarda le giornate e mezze giornate libere dei docenti, poiché il numero di docenti che devono rinunciare a più di una di esse si conta sulle dita delle mani, mentre i docenti che se le ritrovano intatte sono in numero maggiore.

# 1. Matematica dappertutto: concorso e mostra

Joel Kubik Hernandez<sup>1</sup>

## 1. Bando del concorso

Che cosa?	Concorso: realizzazione cartellone A3 individuale, mostra, votazione e premiazione
Chi?	1A, 1B, 2A, 3B/C base con Joel Kubik M. H.
Dove?	SM Gravesano, sala multiuso
Quando?	Ottobre – dicembre 2007. Esposizione: febbraio 2008.

## 2. Introduzione

È ormai cosa arcinota che tanto maggiore è il coinvolgimento personale dell'allievo e quindi la motivazione, quanto migliore risulta l'apprendimento. Ognuno di noi ha sperimentato personalmente che impara (e ricorda) più facilmente ciò che gli interessa o ciò che «ha scoperto» dopo una fase di apprendimento euristico caratterizzata da momenti di crisi e di refutazione e da altri di successo e di soddisfazione. Attività, queste, che sviluppano le capacità ragionate degli allievi, che aumentano il grado di fiducia in se stessi e che contribuiscono alla formazione di una mentalità costruttiva.

All'opposto si situa l'apprendimento riproduttivo, purtroppo molto frequente, secondo il quale l'insegnante sceglie e trasmette la materia che gli alunni sono poi chiamati a riprodurre, secondo il collaudatissimo (e comodo) schema «spiegazione-esercitazione-riproduzione». In questo modo risulta difficile appassionare la classe e inoltre si contribuisce a rafforzare l'immagine della matematica come disciplina arida, i cui contenuti sono prestabiliti e che quindi non può dare spazio alla creatività degli allievi.

Nel mio lavoro che presento qui in modo sintetico, ho scelto di rendere gli allievi attori principali dell'attività matematica, lasciando loro la scelta del tema da trattare e il modo di esporlo.

---

1. Scuola media di Gravesano.

Gli obiettivi perseguiti:

- prendere coscienza dell'importanza della matematica e dell'onnipresenza di questa disciplina nella vita quotidiana e nel mondo che ci circonda;
- far emergere la creatività dei partecipanti per scoprire la vocazione interdisciplinare della matematica;
- motivare gli alunni nello studio della matematica, proponendola da un punto di vista diverso da quello tradizionale scolastico, che lasci spazio agli interessi e ai talenti personali, come pure alla creatività e allo stupore di fronte a risultati assolutamente inattesi.

Ricordo che la ricerca in didattica disciplinare ha dimostrato che ciò che si apprende a scuola, in questo caso la matematica, diventa tanto più spendibile nella vita, quanto più è collegata con altre discipline.

### **3. Prima fase: la realizzazione del cartellone**

Ogni allievo ha ricevuto la consegna di realizzare a casa un cartellone A3 sul quale doveva rappresentare il collegamento fra un tema a scelta (della propria vita o del mondo circostante) e la matematica. Il titolo del concorso rivela la vastità dei temi trattabili che, dopo un'iniziale sensazione di smarrimento da parte degli allievi, ha dato luogo a una variegata e sorprendente gamma di ambiti in cui gli alunni hanno illustrato la matematica.

Ecco alcuni dei temi scelti: corsa d'orientamento, frazioni nelle ruote, diabete, cucina (ricette), fiori, colibrì, «marematica» (forme geometriche negli animali marini), l'infinito, spirali, cavolo romanesco (frattali), cristallo di neve, musica, tempo, piramidi egizie, pianeti (sistema solare), castello di Bellinzona, architettura, mondo dei minerali, pattinaggio, ballo da sala, basket, pallavolo, calcio, ...

### **4. Seconda fase: la valutazione dei lavori e l'allestimento della mostra**

Dopo due mesi ogni allievo ha consegnato il cartellone che è stato in seguito analizzato, fotocopiato e valutato dall'insegnante.

Durante il mese di febbraio nella sala multiuso della scuola, è stata allestita una mostra di tutti i lavori. È stato realizzato anche il libro della mostra, in cui sono raccolti i settanta lavori consegnati in formato A4 e a colori, attualmente disponibile presso la biblioteca scolastica della scuola media di Gravesano e presso il centro didattico dell'Alta Scuola Pedagogica di Locarno.

Dopo aver visitato la mostra, ogni allievo aveva a disposizione quattro voti che poteva esprimere incollando altrettanti cerchietti autoadesivi direttamente sui cartelloni esposti, secondo le proprie preferenze. Questa valutazione ha determinato il vincitore del Premio del pubblico.

## 5. Terza fase: la premiazione

L'insegnante ha poi proceduto a scegliere i sette lavori migliori (scelta molto difficile e sofferta), che sono stati premiati durante la cerimonia conclusiva.

La cerimonia di premiazione si è tenuta prima delle vacanze di carnevale; tutte le classi partecipanti si sono riunite nella sala multiuso in presenza del direttore e di alcuni docenti, non solo di matematica.

I vincitori sono stati premiati con cristalli di quarzo ticinesi di varie dimensioni nella loro forma naturale, ciascuno in un contenitore manifatturato su misura, mentre il premio del pubblico è stato un libro illustrato sulla vita e le opere dell'artista M.C. Escher.

Di seguito i risultati del concorso:

### I tre migliori cartelloni

<b>1° posto</b>	Massimiliano Pallich	2A	(infinito)
<b>2° posto</b>	Claudio Keller	1A	(diabete)
<b>3° posto</b>	Michel Rosselli	1B	(cristallo di neve)

### Riconoscimenti

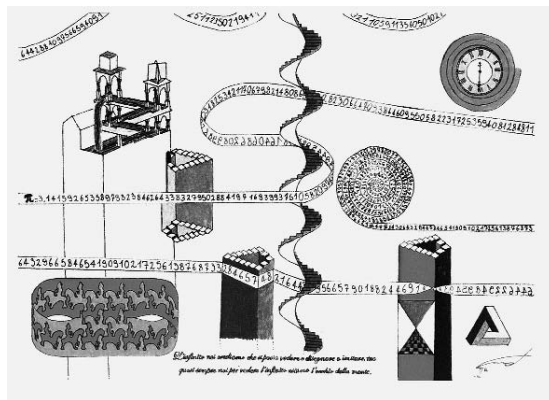
Luca Gaia 1A (cavolo), Pietro Celetti 1B (ballo da sala), Simone Morelli 2A (Mondo dei minerali), Marianne Solcà 3B (forme geometriche nella realtà).

### Premio del pubblico

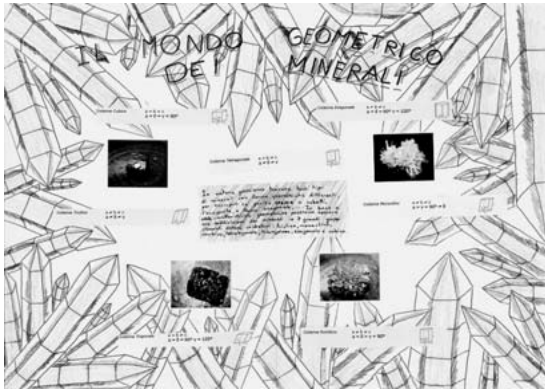
Massimiliano Pallich 2A (infinito)

Tutti i lavori sono poi stati esposti una seconda volta alla Mostra didattica realizzata a margine del 3° Convegno di Didattica della Matematica che si è tenuto il 25 e 26 agosto 2008 negli spazi dell'Alta Scuola Pedagogica di Locarno.

## 6. Alcuni cartelloni realizzati dagli allievi



Infinito. Massimiliano Pallich, 2A



Mondo geometrico dei minerali. Simone Morelli, 2A

**MATEMATICA: A colazione, pranzo e cena.**

Cos'è il diabete? Il diabete di Tipo 1 è una malattia autoimmune, la che in genere si manifesta nell'infanzia o nell'adolescenza. Il carattere cronico dei alti livelli di glucosio (zucchero) nel sangue, perché il pancreas non produce insulina.

Come si cura? È necessario mettere ogni giorno e per tutta la vita dosi di insulina nei malati di diabete. Oltre a ciò è molto importante cambiare le abitudini alimentari, praticare dello sport e non fumare.

Tabella di carboidrati contenuti in alcuni cibi:

Cibo	Carboidrati (g)
100g di pasta	25
100g di riso	25
100g di pane	45
100g di frutta	10
100g di verdura	5

La formula è:  $100g \rightarrow 100g$  di carboidrati.

Esempi:

- 100g di pasta + 10g di frutta = 35g di carboidrati
- 100g di pane + 10g di frutta = 55g di carboidrati

La matematica non è importante solo in scuola, ma è importante ovunque la. Claudio Keller Dedato

Diabete. Claudio Keller, 1A

**Partamento**

Il Partamento è un'arte che si basa sulla geometria. È un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica. È un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

1. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria.

2. Partamento è un'arte che si basa sulla matematica.

3. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

4. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

5. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

6. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

7. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

8. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

9. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

10. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

11. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

12. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

13. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

14. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

15. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

16. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

17. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

18. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

19. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

20. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

21. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

22. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

23. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

24. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

25. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

26. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

27. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

28. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

29. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

30. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

31. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

32. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

33. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

34. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

35. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

36. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

37. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

38. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

39. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

40. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

41. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

42. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

43. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

44. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

45. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

46. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

47. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

48. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

49. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

50. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

51. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

52. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

53. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

54. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

55. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

56. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

57. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

58. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

59. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

60. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

61. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

62. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

63. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

64. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

65. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

66. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

67. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

68. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

69. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

70. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

71. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

72. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

73. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

74. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

75. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

76. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

77. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

78. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

79. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

80. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

81. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

82. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

83. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

84. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

85. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

86. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

87. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

88. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

89. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

90. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

91. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

92. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

93. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

94. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

95. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

96. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

97. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

98. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

99. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

100. Partamento è un'arte che si basa sulla geometria e sulla matematica.

Ballo da sala. Pietro Celetti, 1B





Cavolo. Luca Gaia 1A

## 7. Le impressioni degli allievi

Durante la mostra ogni allievo visitatore era invitato a scrivere, su un apposito foglio A3, la propria opinione sull'intera attività.

Ritengo di fare cosa gradita a tutti, concludendo con una piccola scelta delle opinioni espresse.

*Fare il cartellone è stata una cosa molto bella, guardando la mostra si imparano molte cose interessanti. Realizzare i propri cartelloni può essere stato faticoso perché richiede molto tempo, ma ci aiuta a capire meglio la matematica. (Valentina 1A)*

*Trovo che la mostra sia davvero interessante e ho fatto fatica a scegliere chi votare, perché erano tutti molto belli! (Veronica 1A)*

*È un' esplorazione alle idee! (Sofia 1A)*

*La mostra è molto bella, piena di idee e di belle foto, disegni, mi piacciono molto tutti. (Tamara 1B)*

*La mostra mi è piaciuta perché tutti si sono impegnati. Parlano di cose che solo andando nel profondo di esse riusciamo a vedere. (Marica 1B)*

*La mostra secondo me è stata molto istruttiva e ho capito che la matematica e la geometria esistono in tutto il mondo, dappertutto. (Anonimo 1B)*

*Complimenti a tutti per la fantasia e la varietà degli argomenti e complimenti alla maestra per l'idea! (Mila 1B)*

*Trovo che la mostra sia una buona idea per imparare cose nuove divertendosi. (Anonimo 2A)*

*Io ho trovato molta indecisione nel dare un voto, perché i cartelloni erano molto interessanti e originali. L'esperienza di questo lavoro è stata molto creativa e simpatica. (Laura 3C).*

## 2. L'analogia in ambito geometrico<sup>1</sup>

Silvia Sbaragli, Luigina Cottino, Claudia Gualandi,  
Giancarla Nobis, Adriana Ponti, Mirella Ricci<sup>2</sup>

In this paper we propose analogy as explicit educational instrument for reasoning, thinking, experimenting and asking (himself) intelligent questions. Firstly, the teachers acquire the concept discussing, experimenting and wondering, together with other teachers. Then, after a careful educational transposition, this way of doing research is proposed to the pupils through activities, games, problems and discussions.

### 1. L'analogia in aula

**Dalla Prefazione di Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla**

L'analogia regge il mondo. L'essere umano è alla costante ricerca di analogie, dovunque e sempre. Nella sua natura, c'è il bisogno di ancorarsi a qualche cosa di già conosciuto, di fronte al nuovo, per necessità mentale, per sfruttare strutture note, per sentirsi sicuro. L'analogia è una forma inconscia che determina le scelte: sapere che quel che sta per essere vissuto è del tutto sconosciuto, dà angoscia; sapere che ricalcherà esperienze analoghe precedenti, tranquillizza.

Ma a volte l'analogia è una falsa compagna di viaggio. Il bambino recita: io vado, tu vai, egli va, noi vadiamo..., per analogia, in questo caso traditrice. Perfino adulti vi diranno erroneamente che il successivo di 2,3 è 2,4 per falsa analogia con i numeri naturali.

(...) Dunque l'analogia ha una forza duplice:

da un lato offre appigli notevoli, un grande aiuto al pensiero creativo;

dall'altro lato, spesso è causa di speculazioni cognitive e intellettuali;

rompendo l'analogia, spesso in modo necessario, si apprende.

Ma allora, perché non portare a scuola l'analogia? «C'è già», diranno in coro i lettori. Sì, ma, come spesso capita alle cose intelligenti che sono nascoste, è implicita. La domanda vera è: perché non sfruttarla, nei due sensi visti prima, per confermarla o per smentirla, come strumento didattico? Cioè mostrando quando vale e quando non vale?

---

1. Questo articolo è una sintesi del testo: Sbaragli et al. (2008).

2. L. Cottino, C. Gualandi, G. Nobis, A. Ponti, M. Ricci da diversi anni fanno parte del R.S.D.D.M. (Gruppo di Ricerca, Sperimentazione e Divulgazione in Didattica della Matematica) dell'Università di Bologna e insegnano nelle scuole elementari degli Istituti comprensivi «Vittorio Locchi» (plesso di via Cesari) e «Giusti D'Assisi» (plesso di via Palermo) di Milano. La coordinatrice Silvia Sbaragli appartiene al N.R.D. (Nucleo di Ricerca in Didattica della matematica) di Bologna e insegna all'Alta Scuola Pedagogica di Locarno.

## 2. Da dove nasce l'esigenza dell'analogia

L'esigenza di sperimentare in classe questo argomento nasce da una ricerca pubblicata da Sbaragli nel 2006 a proposito della capacità degli insegnanti di scuola elementare di riconoscere *analogie*; tale sperimentazione ha coinvolto le autrici-maestre di questo libro da più punti di vista: come intervistate (inizio 2005) e intervistatrici (fine 2005). Questo lavoro punta l'attenzione sul passaggio tra piano e spazio, mettendo in relazione ciò che accade tra *perimetro e area di due figure piane* e tra *area e volume di due figure solide*.

Per poter comprendere a pieno il percorso seguito per giungere al testo: Sbaragli et al. (2008), occorre esplicitare che questa ricerca del 2006 segue un precedente lavoro riguardante le convinzioni di insegnanti e studenti relative alle relazioni tra *perimetro e area di una figura piana* (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2005), nel quale si sono analizzate le convinzioni degli insegnanti e degli studenti sulle relazioni tra questi due concetti; convinzioni spesso basate su tentativi di confermare sempre maggiorazioni o minorazioni tra queste entità, una volta poste in relazione.

In particolare, le presunte relazioni di dipendenza stretta tra perimetro e area sul piano relazionale sono del tipo (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2005, pp. 67-68):

«se A e B sono due figure piane, allora:

- se (perimetro di A > perimetro di B) allora (area di A > area di B)
- idem con <
- idem con = (per cui: due figure isoperimetriche sono necessariamente equiestese);
- e viceversa, scambiando l'ordine “perimetro - area” con “area - perimetro”».

In particolare, in tale ricerca è stato chiesto ad insegnanti e allievi di mettere in relazione i perimetri (**p**) di due figure con le loro rispettive aree (**A**), chiedendo di fornire un esempio per ciascuno dei seguenti 9 possibili casi (Figura 1); in questo modo si voleva evidenziare che le «relazioni» sopra riportate non valgono in modo acritico e generalizzato.

<b>p</b>	<b>A</b>	<b>p</b>	<b>A</b>	<b>p</b>	<b>A</b>
>	>	>	=	>	<
=	>	=	=	=	<
<	>	<	=	<	<

Figura 1

Nella prima casella «> >» si chiede di trovare due figure tali che, passando dalla prima alla seconda, il perimetro cresca e l'area cresca; nella seconda «= >» due figure tali che, passando dalla prima alla seconda, il perimetro rimanga inalterato mentre l'area cresca; e così via.

Riportiamo di seguito un esempio di risoluzione che mostra tutti e 9 i casi.

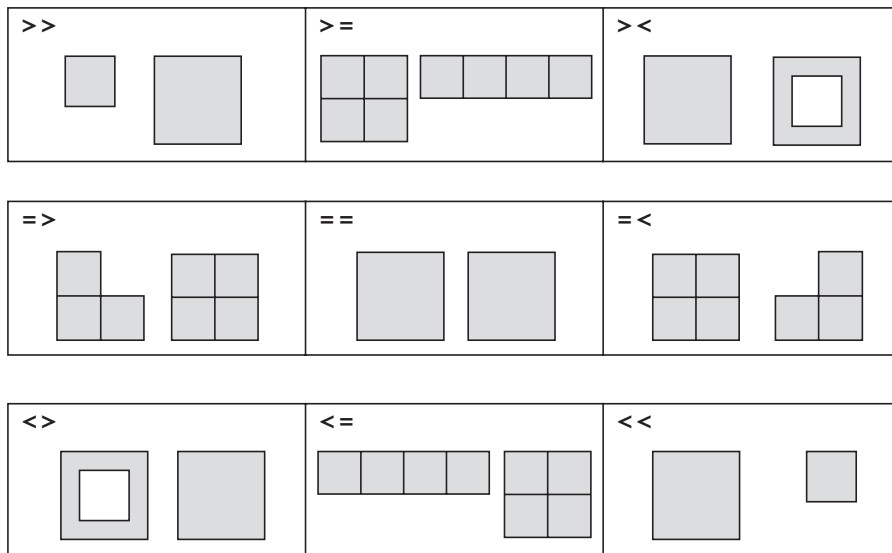


Figura 2

In particolare si osserva che se di una figura si sa la relazione del perimetro rispetto a un'altra figura, nulla di pre-determinato si può sapere su che cosa avviene per l'area. I risultati ottenuti da D'Amore e Fandiño Pinilla (2005) rivelano le numerose difficoltà possedute da alcuni insegnanti e allievi di ogni livello scolastico ad accettare l'esistenza di tutti i 9 casi e a riuscire a trovare due figure per ogni casella; più in generale, dimostrano la presenza di numerose misconcezioni radicate a proposito di supposte relazioni, ritenute necessarie, tra la variazione del perimetro e dell'area in funzione della variazione di una figura piana: «Non avevo mai riflettuto da questo punto di vista, vedevo sempre figure singole. Eravamo abituati a pensare che se cresceva un aspetto cresceva anche l'altro» (insegnante di scuola elementare).

Più in generale, i risultati di questa ricerca mostrano che l'ostacolo che si oppone alla costruzione da parte degli studenti di una conoscenza riguardante le relazioni tra «perimetro ed area» non è solo di natura epistemologica, com'è stato rilevato dalla letteratura di ricerca, bensì soprattutto di natura didattica; esso quindi risiede soprattutto nelle scelte didattiche.

Si è partiti da questi interessanti risultati per studiare successivamente l'*analogia* tutta da confermare tra le relazioni attese, verificate o smentite, tra *perimetro e area* di una figura piana, e quelle tra *area e volume* di una figura solida: perimetro sta ad area (in una figura piana) come area sta a volume (in una figura solida).

Questa ricerca sull'*analogia* (Sbaragli, 2006) è stata effettuata analizzando le risposte degli insegnanti autori di questo articolo all'inizio del 2005 e di altri insegnanti di scuola elementare e medie che sono stati intervistati dalle stesse autrici-maestre di questo articolo, dopo aver effettuato un anno di riflessione e studio personale e condiviso su questo tema.

Si è deciso di rivolgere l'attenzione solo a insegnanti perché si è ritenuto che per questa problematica fosse questo il campione di analisi più interessante dato che, come afferma Zan (1998): «Si può riconoscere che nella formazione delle convinzioni ha una notevole responsabilità il tipo di insegnamento ricevuto».

In questa ricerca ci siamo messi nella condizione di valutare se gli insegnanti che avevano preso possesso cognitivo delle relazioni tra perimetro e area sapessero trasferirle, per analogia, a relazioni tra area e volume.

Dopo aver sottoposto la tabella della Figura 1, si erano mostrate le soluzioni di Figura 2 indipendentemente dalle prestazioni degli insegnanti intervistati; successivamente si è proposta la tabella della Figura 3, chiedendo agli insegnanti di riflettere su questi nuovi 9 casi nello spazio, dove **A** sta per area della superficie e **V** sta per volume. Si chiedeva di valutare se i casi fossero tutti possibili e di produrre un esempio per ciascun caso ritenuto possibile.

<b>A</b>	<b>V</b>	<b>A</b>	<b>V</b>	<b>A</b>	<b>V</b>
>	>	>	=	>	<
=	>	=	=	=	<
<	>	<	=	<	<

Figura 3

In questo modo si voleva vedere se gli insegnanti erano in grado di sfruttare l'analogia tra piano e spazio, ossia tra ciò che avevano appena esaminato individualmente (Figura 1), o del quale erano venuti a conoscenza durante il colloquio con il ricercatore (Figura 2), e il nuovo problema proposto (Figura 3).

Anche in questo caso, il lavoro scritto individuale è stato fatto seguire da un'intervista per indagare le convinzioni e gli eventuali cambi di convinzioni degli insegnanti sulle presunte relazioni tra area e volume.

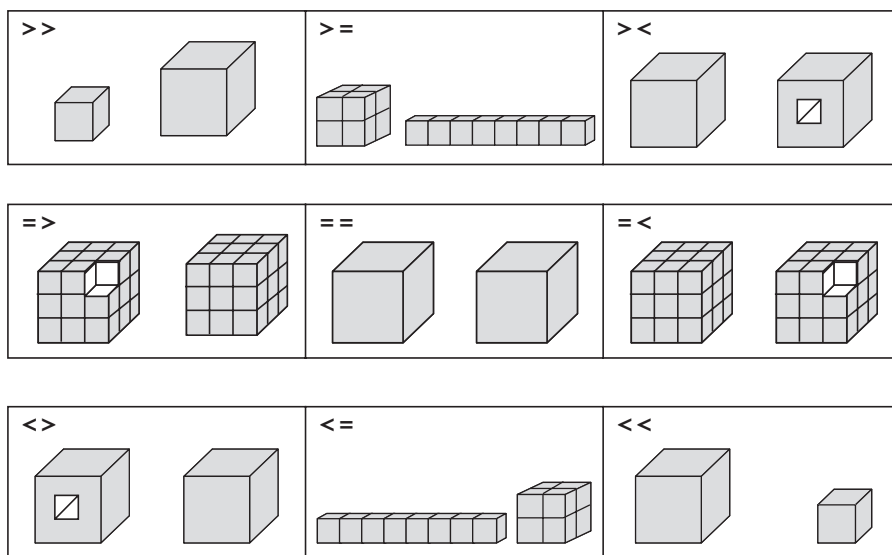


Figura 4

### 3. Risultati di ricerca

I risultati della ricerca di Sbaragli (2006) dimostrano che, presso gli insegnanti di scuola elementare e media, non vi è consapevolezza della mancata esistenza di relazioni obbligate e predeterminate tra area e volume di figure solide. Vi sono quindi notevoli problemi di costruzione concettuale in questo ambito che fan sì che l'ostacolo alla costruzione di una conoscenza matematicamente soddisfacente delle relazioni tra «area e volume» di figure solide da parte degli studenti, rilevata dalla letteratura di ricerca, non è solo di natura epistemologica bensì prevalentemente di natura didattica, come è avvenuto per la ricerca citata in precedenza su «perimetro e area». Anzi, i risultati attestano che, in questo caso, gli ostacoli didattici sono ancora più accentuati, dato che alle presunte relazioni obbligate si sommano le difficoltà di gestione dello spazio. Gli insegnanti denotano poca abitudine a ragionare nello spazio e a gestire situazioni tridimensionali: «Nello spazio è veramente complicato», «Nel piano mi è capitato qualche volta di ragionare su figure lunghissime che poi avevano l'area minore rispetto a un quadrato con lo stesso perimetro, allora mi è capitato di rifletterci, mentre nello spazio no, non mi è mai capitato»; «Devo ammettere che per me lo spazio è ignoto» (affermazioni di insegnanti intervistate). Questo era già stato messo in evidenza nel testo di Arrigo e Sbaragli (2004).

Molti insegnanti sostengono che il malinteso di pensare che l'aumento dell'area di una figura tridimensionale comporta necessariamente l'aumento del volume derivi da una mancanza di conoscenza di questo argomento e si ripromettono di includerlo nella propria azione didattica di insegnamento/apprendimento.

Ma ciò che interessa maggiormente in questa sede è che la quasi totalità degli insegnanti intervistati non è riuscita a cogliere l'analogia tra piano e spazio; ossia,

i docenti non sono riusciti a sfruttare gli esempi del piano (prodotti o visti a posteriori) a sostegno di ciò che avviene nello spazio, affrontando la seconda situazione come se non avesse nulla a che vedere con la proposta precedente: «No, non ho più pensato alla situazione precedente», «Non ho pensato di utilizzare le stesse figure della prima tabella, non ho visto l'analogia, perché non mi sono mai trovata in una situazione simile. Come insegnante lavoro sul cambio di figura con lo stesso perimetro e la stessa area, ma non li metto in relazione. Nello spazio poi mai!», «Non ho pensato di utilizzare le stesse figure della prima tabella. Per me questi lavori sono completamente una novità. Non ho nella mia esperienza mai pensato di passare dal piano allo spazio trasformando le figure. Le figure del piano sono come staccate dalle figure nello spazio», «Lo spazio mi ha confuso, cercavo figure diverse, non ho fatto riferimento alle precedenti, non ci ho proprio pensato. Come sono lontani piano e spazio per me, e sì che avevo già visto i casi nel piano, ma non li ho visti come una possibilità per costruire nello spazio... erano nel piano».

Le motivazioni fornite dagli insegnanti della mancata messa in pratica dell'analogia rientrano tra le seguenti:

- incapacità: «Mi rendo conto che è importante e che queste cose non si fanno abbastanza a scuola. Bisogna farlo, ma io non so come farlo», «Non so, forse perché non ci si pensa, io non ne so abbastanza. Mi piacerebbe saperne di più. Fammi sapere di più, se hai materiale passamelo»;
- mancanza di tempo: «Ci vuole troppo tempo, si fa fatica a lavorare così»;
- mancanza di formazione: «I miei insegnanti non me ne hanno mai parlato»;
- mancanza di vera implicazione da parte dell'insegnante: «Il mancato uso è dovuto al fatto che l'insegnante vuole fare meno fatica. Pensare per analogia vuol dire ragionare e per far ragionare, devi preparare la lezione in un certo modo. Non ci poniamo questo obiettivo. La scuola va avanti con metodi vecchi».

I risultati di questa ricerca hanno così messo in evidenza che queste manchevolezze da parte degli insegnanti possono essere le cause delle carenze degli studenti evidenziate in una ricerca di Noss e Hoyles nel 1996, basate sull'incapacità di riuscire a fare auspicati collegamenti tra un sapere e l'altro.

Riteniamo importante sottolineare come il cambio di convinzione negli insegnanti, dal prima al dopo intervista, sia stato significativo, e in parecchi casi abbia richiesto prove e riflessioni successive non banali. Perché avvenisse tale cambio, la maggior parte degli intervistati ha avuto bisogno di ricorrere agli esempi forniti dall'intervistatore. Quel che si evince, però, è che, dopo aver visto gli esempi, o creati dall'intervistato stesso o proposti dall'intervistatore, si sono attenuate le misconcezioni legate all'intuizione per quanto riguarda questi concetti geometrici e si è percepita l'utilità dell'analogia come strategia fondamentale per risolvere velocemente la situazione proposta.

#### **4. Le personali convinzioni e i cambi di convinzioni delle autrici-maestre sottoposte alla ricerca**

Le prestazioni iniziali ottenute dalle cinque autrici-maestre nel sottoporsi alla ricerca di D'Amore e Fandiño Pinilla (2005), relativa alla relazione tra perimetro e

area di figure piane, sono confrontabili con i risultati ottenuti dalla ricerca accennati nel paragrafo 2.

Le maggiori difficoltà che hanno incontrato risiedono nei concetti che coinvolgono lo spazio, così come si rileva dalle affermazioni che sono state immediatamente esplicitate durante l'intervista: «Quando poi ci hai proposto la tabella per la relazione tra area e volume, ancora una volta mi sono detta che forse erano possibili tutti e nove i casi, ma ero molto in difficoltà a pensare alle figure da disegnare e con i volumi mi rendo conto che sono davvero con una fitta nebbia nel cervello», «Quando mi hai consegnato la seconda tabella con il rapporto area-volume, ho pensato per qualche secondo che potevano esserci esempi anche qui per i 9 casi, ma che avevo bisogno di trovarli per esserne sicura. Immediatamente mi sono bloccata e avevo la testa in panne perché non mi venivano in mente solidi per poter accontentare il primo esempio; il mio problema era: "Come faccio a dire se l'area è uguale, maggiore o minore visto che sono solidi?". Il tutto avveniva in pochi secondi. Io sentivo un forte imbarazzo e credo, a ripensarci bene, che il problema fosse che l'area dei solidi non è per me così semplice e di immediato possesso come concetto poiché c'è l'area laterale e quella delle basi, inoltre se penso a solidi di rotazione la difficoltà per me aumenta con l'area del cerchio, non parliamo poi della sfera. Ancora una volta il mio problema è stato un problema di misura che forse nasconde un problema di comprensione profondo dei concetti di area e volume».

Le autrici-maestre che non hanno pensato subito all'analogia tra spazio e piano, nelle interviste lo dichiarano apertamente: «Non ho trasferito nello spazio i casi che avevo rappresentato nel piano, non ho riconosciuto spontaneamente l'analogia tra i casi nel piano e nello spazio», «Neanche per un momento ho pensato che potevo trasferire almeno qualche esempio della prima tabella alla seconda».

Hanno inoltre parlato tra loro con estrema sincerità del disagio provato nell'affrontare questa richiesta e hanno manifestato il bisogno e la voglia di saperne di più: «Non sono molto fiera di me se ripenso alla reazione che ho avuto, ero convinta di essere un po' più capace sia da un punto di vista teorico che pratico. Questa tua proposta è l'ennesima situazione in cui mi trovo a ripensare profondamente alle mie conoscenze, alle mie convinzioni e mi rendo conto che devo approfondirle con un mio maggiore coinvolgimento (quello che di solito chiedo ai bambini)».

Soprattutto durante l'intervista sono emersi molti dubbi e considerazioni sull'azione didattica: «Mi sono detta che c'è una grossa difficoltà da parte mia a pensare per analogia e di conseguenza mi chiedo come e quanto ciò possa influenzare la mia attività di insegnante», «Ripensando a me, alla mia storia di studente, non ho ritrovato percorsi o momenti di studio che mi abbiano stimolato a cogliere analogie in matematica, mentre penso con facilità alla analogia nella letteratura o in scienze, forse perché piano e spazio vengono ancora considerati per difficoltà due mondi separati con regole proprie senza alcuna relazione».

Venti giorni dopo la presentazione di questa ricerca, una autrice-maestra ha spedito la seguente lettera alla ricercatrice: «Insieme alle altre ho riprovato a capire e ad approfondire le relazioni delle due tabelle; non ti nascondo che ora con quella sul perimetro e l'area sono più sicura, ma con l'altra ho ancora parecchie perplessità e mi sono riproposta di lavorarci ancora da sola. A proposito della ricerca, mi sembra davvero bella e utile. Più di me chi può dirtelo? Ho toccato con mano come sia importante



l'analogia nella risoluzione di problemi e come insegno male, non avendo per prima io capacità analogiche».

Questa iniziale situazione di disagio e smarrimento ha sollevato nelle autrici-maestre una gran voglia di approfondire tali situazioni, coinvolgendo tutte le insegnanti in uno studio individuale e di gruppo settimanale. Questo periodo di confronto, riflessione e studio è durato più di un anno, e includeva anche incontri di approfondimento e formazione sui diversi aspetti del quadro teorico. Tale percorso ha prodotto un notevole cambio di convinzioni e una maggiore acquisizione di sicurezza su questi argomenti (e non solo). Ecco alcune affermazioni delle autrici-maestre: «Finalmente ora mi sento di poterne cogliere il significato con più consapevolezza», «La scoperta dell'esistenza dell'analogia illumina il sapere», «Nel mondo al di fuori della scuola si possono trovare molte situazioni in cui è in gioco la capacità di stabilire relazioni e di questo dovremmo tenerne conto. Io credo che molto più spesso dovremmo chiederci se quello che proponiamo ai nostri alunni è efficace oppure no senza aver paura dei cambi di convinzione», «Avere la possibilità di approfondire è fondamentale per essere insegnanti diversi, io sono diversa da prima con i miei alunni e ho delle soddisfazioni enormi, vedo i comportamenti dei bambini e ogni volta mi stupisco dei risultati che osservo»<sup>3</sup>; «Non trovo altre parole per dirti quanto sarebbe fondamentale per ogni insegnante poter entrare in un'altra fase della vita lavorativa: quella in cui sono messi a nudo i propri apprendimenti e la propria umanità con una profondità mai neanche immaginata».

Solo dopo un anno di formazione, le autrici-maestre si sono sentite in grado di effettuare le interviste ad altre insegnanti inerenti la ricerca di Sbaragli (2006) e di effettuare la trasposizione didattica di questo argomento della quale si riporta un esempio nel paragrafo 6.

## 5. Alcuni riferimenti teorici

Il quadro teorico di riferimento è legato a tre differenti tematiche:

1. area e perimetro, per la quale rimandiamo a D'Amore e Fandiño Pinilla (2005; 2006);
2. area e volume, per la quale rimandiamo a Sbaragli (2006);
3. analogia, rispetto alla quale abbiamo deciso, per non appesantire troppo la lettura, di limitare in questo articolo l'analisi solo a quei riferimenti bibliografici che, in qualche modo, hanno davvero condizionato l'indirizzo della nostra successiva sperimentazione.

Iniziamo dal significato del termine *analogia*.

Nell'accezione comune della lingua italiana, per il termine *analogia*, nell'Enciclopedia Treccani, Roma, 2002, si legge: «relazione di somiglianza, uguaglianza di rapporti, proporzione matematica». In particolare, l'origine più antica, come suggerisce la sua radice greca (*analoghía*), si fonda sul concetto matematico di proporzione che stabilisce una similitudine come uguaglianza di rapporti. Ma la nostra interpretazione

---

3. Come sostengono Tirosh e Graeber (2003): «Le convinzioni possono essere un ostacolo ma anche una potente forza che permette di effettuare cambiamenti nell'insegnamento».

trascende questo significato particolare e va anche oltre quella di Pesci (2002) che, a proposito di pensiero proporzionale, mette in evidenza l'ostacolo didattico che si può generare quando si punta esclusivamente l'attenzione su termini e proprietà che sembrano esclusivi del concetto di proporzione, senza far cogliere l'analogia strutturale tra le situazioni di proporzionalità e altre situazioni moltiplicative, e soprattutto quando non si favorisce l'uso consapevole delle proprietà aritmetiche che, ancora prima dell'impatto con la proporzionalità, gli allievi conoscono già a proposito di rapporti e uguaglianze.

Jacques Hadamard (1865-1963) fa riferimento all'importante ruolo che gioca il *pensiero analogico* durante il processo di scoperta: la nostra mente, anche inconsapevolmente, cerca analogie e costruisce le immagini anche attingendo a esperienze precedenti e immagini già consolidate.

Guy Brousseau (2004), in un articolo su una modellizzazione dell'insegnamento della matematica, afferma: «Il docente deve dunque dissimulare le sue intenzioni con un artificio didattico: scegliere domande le cui risposte possono essere costruite dall'allievo, ricorrere ad analogie, suggerire metodi ecc.».

Francesco Speranza (1988) sostiene in modo deciso l'importanza dell'analogia dal punto di vista didattico: «Corrispondenze e analogie strutturali, temi che, a sua volta, sono la chiave di volta del pensiero matematico-strutturale. A mio avviso il ritrovare analogie è uno dei momenti essenziali del pensiero critico: ritengo che sia utile lasciare che gli allievi si sbizzarriscono a inventare qualche analogia, anche se poi una più attenta critica potrà farne dimenticare molte fra quelle inventate».

Vinicio Villani (2006) ribadisce l'importanza di lavorare didatticamente riconoscendo analogie tra piano e spazio: «(...) nulla impedirebbe di accennare in termini intuitivi, fin da quando si svolge il programma di geometria piana, alle analogie e alle differenze con la geometria dello spazio; successivamente, nello svolgere il programma di geometria dello spazio, ciò consentirebbe viceversa di collegare in modo naturale le nozioni tridimensionali alle corrispondenti nozioni bidimensionali già studiate in precedenza evidenziandone analogie e diversità».

Gérard Vergnaud (2007) sostiene: «C'è un pericolo nel prendere oggetti di studio troppo piccoli: si rischia di non afferrare il processo organizzatore dello sviluppo. Questi processi si basano infatti su analogie, metafore e slittamenti di senso. A partire da certe regolarità osservate nella realtà, spesso prodotte dall'azione del soggetto, questi processi sfociano in costruzioni concettuali di alto livello, che non hanno più una relazione facilmente identificabile con le regolarità della realtà. Senza il linguaggio e i simbolismi sviluppati dalla cultura, sarebbe impossibile identificare queste costruzioni concettuali».

Efraim Fischbein (1985) ribadisce l'importanza dell'analogia in riferimento ai modelli intuitivi: «Compito della didattica della matematica è quello di correggere, migliorare, arricchire il fondamento intuitivo corrispondente ai vari "campi concettuali" matematici e, certamente, di migliorare il più possibile il controllo delle strutture concettuali. Eventuali conflitti tra il livello intuitivo, il livello algoritmico e il livello formale non possono essere eliminati ignorando semplicemente il livello intuitivo. (...) Lo studente deve essere aiutato a prendere coscienza di tali conflitti». A questo scopo, per superare difficoltà derivanti dal forte peso che hanno i modelli intuitivi, l'Autore consiglia, tra le strategie, proprio quella di fare ricorso all'uso dell'analogia.

Queste considerazioni spingono a voler trattare l'analogia, ma, come rife-

risce Luciana Bazzini (1995) citando Fischbein: «Non dobbiamo però dimenticare che se i vari tipi di ragionamento analogico da una parte possono favorire la costruzione di conoscenze, dall'altra possono indurre a conclusioni erronee nel momento in cui vengono enfatizzati o distorti particolari aspetti a svantaggio di altri. Se l'analogia è una potenziale generatrice di ipotesi, può essere anche causa di misconcetti o fraintendimenti (Fischbein, 1987; 1989)». In effetti, capita spesso che, quando il soggetto si trova in forte incertezza di fronte a un problema da risolvere, tende a trasformare un certo nucleo di informazioni da un dominio ben conosciuto a un altro meno noto, tramite un trasferimento per analogia. Può avvenire allora che si assumano per valide corrispondenze analogiche che invece non sono accettabili per quei particolari sistemi. Si parla, in questo caso, di analogie «tacite» che possono inserirsi nel processo cognitivo e perturbarlo.

In ogni caso, con le specifiche cautele necessarie per una significativa didattica, nessuno mette in dubbio l'importanza dello sviluppo del pensiero analogico.

A questo proposito, Stavy e Tirosh (2001) sostengono l'importanza dell'analogia, affermando che lo scopo primario dell'insegnamento matematico e scientifico è quello di incoraggiare gli studenti a trasferire la conoscenza da un caso specifico ad altri. Eppure numerosi studi al riguardo hanno dimostrato che gli studenti non fanno tali auspicati collegamenti, spesso a causa dell'inadeguatezza del sistema formativo (Noss, Hoyles, 1996).

Così come fece Fischbein, anche Stavy e Tirosh (2001) propongono tra le metodologie che permettono di aiutare gli studenti a superare gli effetti delle regole intuitive, l'insegnamento per analogia.

Sempre a proposito della funzione del ragionamento analogico, nel processo di ristrutturazione della conoscenza individuale e del superamento di misconcezioni, va ricordato il lavoro di Brown e Clement (1989).

Attente riflessioni riguardanti l'analogia in situazioni problematiche sono fornite da Lucangeli e Passolunghi (1995). Le due autrici citano varie ricerche che si sono focalizzate su un particolare tipo di *transfer* che avviene quando si presenta un problema base e poi uno a esso analogo (Reeves, Weisberg, 1993; 1994; Ross, 1987); sembra che siano proprio i dettagli del problema e il contesto in cui è stato appreso, a guidare il *transfer* che porta alla soluzione. In seguito le due autrici parlano in modo puntuale del *transfer* analogico, che avviene quando il problema di base e il problema *target* sono analoghi, cioè quando entrambi condividono la stessa struttura risolutiva; in tal caso la soluzione del problema base può essere trasferita al problema target (Gentner, Gentner, 1983).

Anche Bazzini (1995) sostiene l'importanza del pensare per analogia, concependola come una strategia fondamentale per aiutare gli allievi nella costruzione del sapere, in una continua interazione tra ciò che si sa già e ciò che deve essere acquisito. Per l'autrice, il pensare per analogia aiuta a codificare e organizzare le nuove conoscenze, a recuperare quelle archiviate in memoria e a creare nuovi schemi concettuali, in linea con il pensiero di Mason (1992), che considera l'analogia uno strumento potente per apprendere in maniera relazionale, ossia connettere «pezzi» di sapere disponendo di sistemi di riferimento atti a strutturare e comprendere campi problematici nuovi, senza rimanere bloccati da una conoscenza «inerte».

In particolare, Bazzini (1995) sottolinea contemporaneamente l'importanza didattica e la necessaria cautela che occorre adottare nel far uso dell'analogia: «Il ragionamento analogico da una parte richiede e dall'altra stimola la flessibilità men-

tale, facilitando l'apprendimento. Come abbiamo già osservato, si tratta dunque di liberare la conoscenza "inerte" e utilizzarla in situazioni nuove. Naturalmente, l'uso dell'analogia nell'istruzione non è esente da rischi e non per niente l'analogia viene definita una "lama a doppio taglio" (...)».

Per la nostra trattazione risulta cruciale anche il concetto di *metafora*.

Nel Dizionario Enciclopedico La Repubblica del 2003 è riportato: «Le definizioni tradizionali della M. si possono compendiare nella seguente: sostituzione di una parola con un'altra il cui senso letterale ha una qualche somiglianza col senso letterale della parola sostituita. La M. infatti è stata classificata dalla retorica classica come "tropo" e i tropi sono figure di sostituzione che vertono su parole singole. Il luogo che viene applicato per trovare questo tropo è il locus a simili, la somiglianza; il procedimento è la contrazione di un paragone: si identifica un'entità con quella con cui essa viene confrontata; donde la definizione di M. come *similitudo brevior*».

Ma come è sostenuto anche da Andriani et al. (2005), nel Novecento la metafora è passata da concezioni tradizionali come quella sostitutiva e comparativa, che la collocavano in un ambito esclusivamente linguistico, a una concezione centrata invece sulla sua natura concettuale.

Le scienze cognitive hanno così osservato che l'ambito nel quale si collocano le metafore non sia da considerarsi quello esclusivamente linguistico, ma pervade la vita quotidiana e in particolare il comportamento comunicativo.

L'entrata della metafora nella scienza è avvenuta soprattutto grazie al testo di Black (1954) nel quale viene proposta la teoria dell'interazione che evidenzia una connessione tra metafore e modelli nelle teorie scientifiche.

Inoltre Lakoff e Johnson (1980) mettono in evidenza come la metafora venga intesa come una proiezione sistematica di strutture concettuali da un dominio a un altro, evidenziandone il ruolo all'interno del linguaggio ordinario.

Il ruolo della metafora nel nostro sistema concettuale, nella percezione delle cose che ci circondano, sul come interagiamo con il mondo fisico e su come comunichiamo con gli altri, ha portato anche a riflessioni specifiche nel campo della matematica.

Da questo punto di vista va citata la *teoria della conoscenza incarnata* (*embodied cognition theory*) di Lakoff e Nuñez (2000) che consiste nella scienza dei processi cognitivi basati sulla nostra fisicità di esseri umani, sia per quanto riguarda il corpo che il cervello. Questa teoria della conoscenza, che ha ampiamente fatto discutere in positivo e in negativo il mondo intero<sup>4</sup>, attribuisce un ruolo fondamentale alla *metafora* considerandola come un importante strumento cognitivo. Questo nuovo approccio cognitivo mette in evidenza come la matematica sia generata, oltre che dalla nostra lunga storia sociale e culturale, anche dalla nostra capacità metaforica di collegare domini diversi e di adattarci al mondo. Le nuove conoscenze sono costruite sulla base di schemi preesistenti e l'interazione con la realtà gioca un ruolo cruciale nell'apprendimento. La metafora concettuale di Lakoff e Nuñez è intesa come una struttura che consente di comprendere concetti astratti in termini concreti, utilizzando idee e modelli di ragionamento fondati nel sistema senso-motorio. Questa metafora viene intesa come una «mappatura» tra due domini concettuali differenti che permette di esportare

4. Per un approfondimento critico di questa teoria si veda Robutti (2006).

la struttura di un dominio concettuale «sorgente» a un dominio concettuale «obiettivo», per ragionare su quest'ultimo come se fosse il primo. Per i due Autori, il pensiero metaforico è quindi parte essenziale del ragionamento, in particolare matematico.

Al di là delle critiche che possono essere fatte a questa teoria, a noi interessa riconoscere un ruolo alle metafore come strumento cognitivo; ruolo riconosciuto didatticamente anche dalla Sfard (2002) che le reputa decisive nel processo di reificazione dei concetti a partire da esperienze di vita reale, attraverso l'uso di strutture linguistiche, che consentono di trasformare determinati processi in un oggetto matematico.

Nei paragrafi seguenti si propone dunque un esempio del rendiconto dell'esperienza di apprendimento e di ricerca-azione messa in atto dalle 5 insegnanti di scuola elementare, autrici di questo articolo.

Lo studio consapevole e adulto, dai punti di vista matematico, epistemologico e didattico, ha portato le componenti del gruppo a esprimere le loro convinzioni matematiche, epistemologiche e didattiche preliminari, a prendere coscienza di cambiamenti anche notevoli circa tali convinzioni; il che ha costretto, sempre in ambito di ricerca-azione, a rivedere le proprie posizioni per quanto concerne la trasposizione didattica.

La ricerca-azione è una ben nota metodologia di ricerca che affonda le sue radici in lavori degli anni '40 negli USA, specie di Lewin (1946), ma che ha trovato una significativa sistemazione concettuale nel mondo della scuola, soprattutto in Australia, negli Stati Uniti e in Gran Bretagna. È contraddistinta da una doppia funzione dell'insegnante-ricercatore, dallo studio approfondito di un tema di ricerca, dall'analisi dei prodotti dei propri allievi in termini di ricerca e, non ultimo, anzi, in questo caso prioritario, l'osservazione di sé stessi nel fare ricerca. Nel nostro caso, ci preme evidenziare come «la ricerca-azione porta il ricercatore a interagire con l'oggetto della ricerca e quindi a essere direttamente implicato» (Canevaro, Gaudreau, 1988).

Questa idea è stata ripresa in ambito matematico da diversi autori, si veda ad esempio D'Amore (1991).

Con questi presupposti, vedremo nel paragrafo 8 un confronto tra la propria azione in aula ed il proprio (nuovo) apprendimento critico (matematico, epistemologico, didattico), grazie alle auto-dichiarazioni esplicite delle insegnanti che hanno partecipato alla ricerca.

La metodologia scelta per questo resoconto è la *learning story*, con interventi diretti dei partecipanti, secondo la metodologia della riflessione personale (autobiografia). Questa tecnica viene molto usata con profitto dalla ricerca in contesto internazionale da tempo; ne è prova il lavoro anticipatore di Gudmundsdottir (1996), nel quale si usa la *metafora dell'iceberg* per illustrare come la punta emergente corrisponde a quanto viene dichiarato come risposta (esplicita) da un insegnante a una domanda nel corso di una intervista, mentre la parte maggiore (implicita) è quella nascosta sotto l'acqua; essa può emergere solo grazie a una narrazione personale.

Da questo punto di vista, ricordiamo il lavoro di Campolucci, Maori, Fandiño Pinilla e Sbaragli (2006) dove viene presentato il resoconto di un'esperienza di apprendimento e di ricerca-azione messa in atto da parte di un gruppo di 36 insegnanti (di scuola dell'infanzia, elementare e secondaria di I grado) sul tema delle frazioni sfruttando la metodologia della *learning story*, al quale rimandiamo per maggiori approfondimenti bibliografici.

## 6. Il senso delle proposte

Le proposte didattiche pensate, progettate e realizzate dalle autrici-maestre riguardano il passaggio tra piano e spazio e viceversa, alla ricerca di eventuali analogie tra questi due ambiti. Tali esperienze sono state condotte nelle diverse classi di scuola elementare ma sono state pensate, progettate e discusse sempre in gruppo da parte delle insegnanti.

Nella fase di progettazione comune, ciascuna insegnante si è sentita lentamente cambiare e diventare più consapevole del significato di quei nove riquadri delle tabelle della ricerca. Questa esperienza ha consentito agli insegnanti di capire concretamente e in modo sempre più approfondito che cosa significa pensare in termini di analogia: fare distinzioni, riconoscere determinati limiti, operare scelte, confronti, ...

Raggiungere tale consapevolezza da parte dell'insegnante, permette di gestire al meglio la situazione di classe in modo da trasferire agli allievi una strategia potente che permette loro di essere sempre più padroni delle diverse situazioni, per rendere più forti e consapevoli le loro conoscenze e competenze.

Il pensiero analogico, ad esempio in geometria, consente di considerare lo spazio e il piano contemporaneamente: si è nello spazio e ci si domanda qual è il poliedro che è formato dal minor numero di facce, ci si sposta nel piano e ci si fa una domanda analoga (Arrigo, Sbaragli, 2004; Cottino, Sbaragli, 2005). Naturalmente si deve cambiare linguaggio o trovarne uno che si adatta a entrambi gli ambienti. Si può parlare di poliedri e di poligoni, di facce per il tetraedro e di lati per il triangolo, oppure, si può trovare un linguaggio unificante, parlando degli elementi che delimitano le figure. Il tetraedro è una parte di spazio delimitata dal minor numero di facce (4), così il triangolo è una parte di piano delimitata dal minor numero di lati (3).

Il pensiero analogico permette, per esempio, di lavorare su concetti fondamentali quali perimetro, area e volume facendone comprendere le caratteristiche attraverso la ricerca e la rappresentazione di tutte le relazioni possibili, nel piano tra perimetro e area e nello spazio tra area e volume. Il pensiero analogico permette di trasferire relazioni, quindi conoscenze, da un contesto a un altro, in questo caso dal piano allo spazio e viceversa, senza dover sempre ricominciare da capo.

Lo studio contemporaneo dei concetti precedentemente indicati apre allo studio delle grandezze corrispondenti e delle rispettive unità di misura.

Anche in questo caso, si può trovare un'analogia tra il calcolo dell'area e del volume sia pure nella differenza delle due grandezze di riferimento: come per passare dalla grandezza lunghezza alla grandezza area si usa la moltiplicazione, così per passare dalla grandezza area alla grandezza volume si usa la moltiplicazione.

La presentazione contemporanea di due problemi con la richiesta di confrontarli favorisce nei bambini un atteggiamento di ricerca di somiglianze e differenze e sviluppa la capacità di scegliere quali elementi mettere in relazione per rappresentare le situazioni e per trovare le soluzioni.

Come affermano Andriani et al. (2005): «(...) la prima fase dell'apprendimento è quella dell'*assimilazione*, nel corso della quale si stabiliscono delle analogie, si fanno confronti, si cercano somiglianze e differenze con le conoscenze anteriori. Se le informazioni ricevute e riorganizzate sono giudicate conformi a ciò che si sa già, non si apprende niente di nuovo. La situazione a cui si è posti di fronte non si confi-

gura come un vero problema, ci si esercita, si hanno conferme, si rinforzano le conoscenze precedenti. Se, al contrario, ci si rende conto che le conoscenze che si possiedono non consentono di assimilare i nuovi dati della situazione, oppure che quelle stesse conoscenze si rivelano insufficienti, si instaura un disequilibrio. La situazione si pone come un reale problema da risolvere e le conoscenze precedenti costituiscono un ostacolo che bisognerà eliminare».

L'allievo che pratica il confronto e la messa in relazione acquisisce così lentamente la capacità di riflettere sul proprio lavoro cognitivo mettendo in corrispondenza ciò che già conosce con ciò che sta esplorando. Inoltre, nei casi in cui l'intuizione gioca un ruolo deviante, il riconoscere analogie può far superare veri e propri blocchi.

Concludiamo questo paragrafo, affermando ancora una volta che lavorare con l'analogia è mettersi gli «occhiali del matematico» (Cottino, Sbaragli, 2005); questa metafora ha molta presa sui bambini, li aiuta a capire che il confronto tra due situazioni presuppone una contestualizzazione e la ricerca di ciò che la caratterizza individualmente, per poterle poi mettere in relazione.

## 7. Immaginiamo e scegliamo

Proponiamo un'attività realizzata in terza elementare che rientra all'interno di un lungo percorso intrapreso dalle autrici-maestre dalla prima alla quinta e che è interamente presentato in Sbaragli et al. (2008). In particolare, nelle seguenti situazioni si è indagata l'analogia tra le relazioni:  $p >, A < e A >, V <; p <, A > e A <, V >$ .

### ***Immaginiamo in 2D***

Si è chiesto agli allievi:

*Immaginate e disegnate due figure in 2D in modo che una delle due abbia perimetro minore e area maggiore dell'altra.*

Per rispondere alla consegna è importante ricorrere anche a figure non convesse ma, da questo punto di vista, gli allievi si sono trovati inizialmente in difficoltà, pur avendo già conosciuto questo tipo di figure.

Per fortuna ci sono quei bambini che, di fronte a una provocazione, pensano alle esperienze passate, le ricordano e le mettono a disposizione della classe.

Durante queste attività, gli allievi sono liberi di muoversi nell'aula e, quando sono in difficoltà, si rivolgono ai compagni che secondo loro sono in grado di aiutarli; la richiesta di aiuto comporta una discussione che arricchisce tutti; più di una volta abbiamo infatti notato che la spiegazione tra pari è molto efficace e aiuta nella fase di socializzazione del sapere<sup>5</sup>. Questo è in linea con ciò che sosteneva Vygotskij (1896-1934) a proposito di *problem solving collaborativo*, cioè affrontato dall'apprendente sotto la guida di un adulto o in collaborazione con un coetaneo più capace. Fondamentale, da questo punto di vista, è l'appartenenza a una società all'interno della quale l'apprendente è inserito: «L'apprendimento umano presuppone una natura sociale

5. Vedere anche: Arrigo G., Maurizi L., Minazzi T. (2005). «Chi spiega impara a mettere i pensieri bene»: la comunicazione intenzionale in matematica. *La matematica e la sua didattica*, 1, 2005. Bologna: Pitagora, pp. 33-56.

specifica e un processo attraverso il quale i bambini si inseriscono gradualmente nella vita intellettuale di coloro che li circondano» (Vygotskij, 1931-1980).

In questa sperimentazione, l'aiuto reciproco ha permesso a tutti di disegnare le figure secondo la relazione richiesta.

L'uso degli oggetti messi a disposizione per l'attività (figure di cartoncino in 2D e di legno in 3D) ha favorito una profonda riflessione sulle figure convesse e no e ha sollecitato una attenta riflessione sugli elementi da confrontare.

I bambini conoscevano molto bene gli oggetti forniti, li avevano già usati per giocare in diverse situazioni, perciò non erano disturbati da caratteristiche percettive non rientranti in ambito matematico come il colore, il tipo di materiale, ...

Riportiamo di seguito i disegni prodotti da un gruppo:

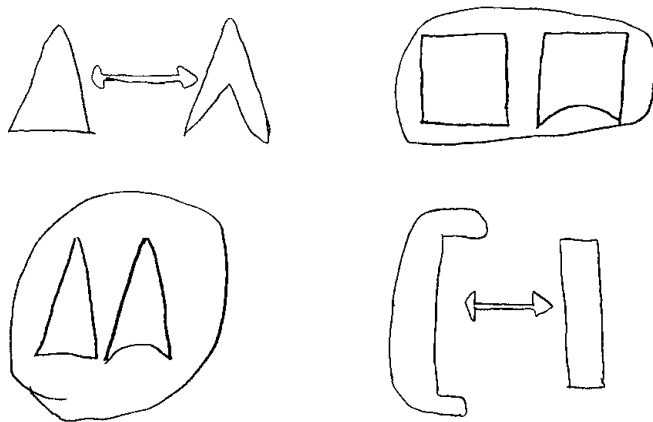


Figura 5

Anche se i disegni realizzati dai bambini sono molto imprecisi, mettono ugualmente bene in evidenza la scelta delle figure non convesse per soddisfare la richiesta.

Vogliamo soffermarci sul lavoro di Niccolò che ha disegnato un cerchio e una corona circolare e poi li ha cancellati.

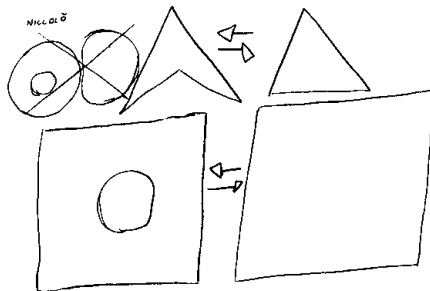


Figura 6

Dopo aver analizzato con l'intera classe il lavoro di Niccolò, gli abbiamo chiesto il perché della cancellazione. La sua risposta è stata: «Io dicevo “no” perché



pensavo che in un cerchio non si poteva contare la superficie perché dicevo che solo in una figura con gli angoli si poteva contarla».

(Riteniamo che la discussione collettiva su un lavoro personale sia utile e proficua non solo per il bambino che l'ha prodotto ma anche per gli altri che possono avere la stessa convinzione, pur non avendola esplicitata, o per noi insegnanti che abbiamo così l'occasione di capire che cosa veramente pensano i nostri allievi) (Bartolini Bussi, 1989 a, b).

Dopo la discussione, Niccolò chiede di poter riscrivere le sue scoperte su un foglio e le riporta in questo modo:

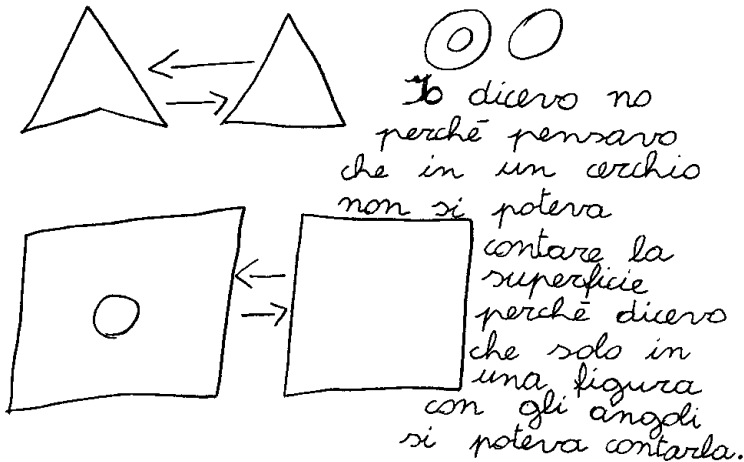


Figura 7

Abbiamo fatto presente agli alunni che il problema sollevato da Niccolò è stato un problema anche per i matematici, nel senso che il calcolo delle aree delle figure piane più comuni era già noto fin dai tempi di Talete di Mileto (624 circa-548 circa a.C.) e anche prima, e comunque era ben dimostrato ai tempi di Euclide di Alessandria (IV-III sec. a.C.).

Ma quando la figura non è più un poligono, come ad esempio un cerchio, per il calcolo dell'area bisogna aspettare matematici più sofisticati come Archimede di Siracusa (287-212 a.C.) o, in epoca più recente, Evangelista Torricelli (1608-1647) e Bonaventura Cavalieri (1598-1647) e, per una sistemazione moderna, addirittura i matematici tedeschi del XIX secolo.

È stata un'occasione per rendere partecipi i bambini di alcuni momenti della storia della matematica: anche loro, come i matematici della storia, possono vivere gli stessi tipi di problemi.

### **Scegliamo in 3D**

*Fra tutte le figure tridimensionali che vedete sul tavolo, cercate due figure in modo che una delle due abbia l'area minore e il volume maggiore dell'altra.*

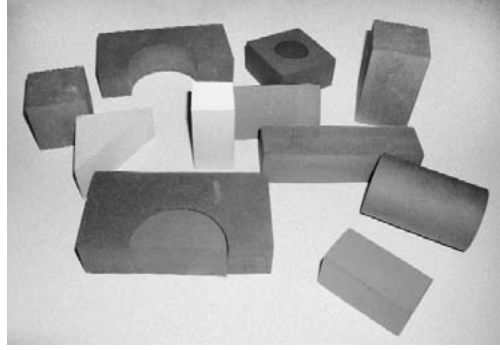


Figura 8

La scelta delle figure non convesse in 2D ha influenzato l'esperienza in 3D. Molti bambini hanno cercato figure analoghe togliendo da un parallelepipedo quella che potremmo chiamare una «lunetta», così come in 2D avevano tolto una parte del rettangolo trasformando un tratto del segmento-contorno in una linea curva.

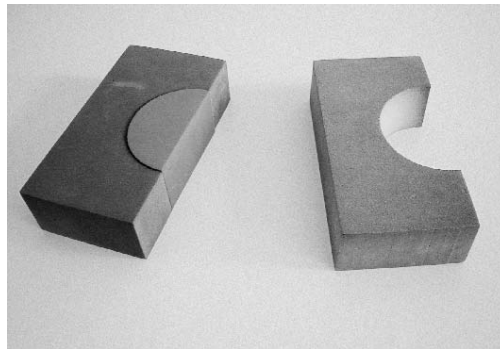


Figura 9

Ma i bambini hanno dato per scontato che togliendo una parte di una figura si ottiene sempre una figura di area maggiore, applicando una falsa analogia tra piano e spazio: «la concavità nel piano fa aumentare il perimetro, la concavità nello spazio farà aumentare l'area», pur essendo anche nel piano una considerazione non sempre vera. Gli allievi hanno applicato un criterio che poteva essere vincente: «togliere» una parte di figura, ma in modo scorretto; in effetti non hanno tenuto conto che per ottenere una figura di area maggiore occorre «togliere» una parte di figura in particolari modi.

La seconda figura, ottenuta togliendo la lunetta, ha in effetti area minore del parallelepipedo iniziale; ma di questo inizialmente gli allievi non si erano accorti, dato che si erano dimenticati di considerare le aree delle due figure parallele e congruenti della lunetta che avevano eliminato. Solo sfruttando pezzi di carta per confrontare le due superfici, gli allievi si sono resi conto dell'interpretazione scorretta iniziale.



Figura 10

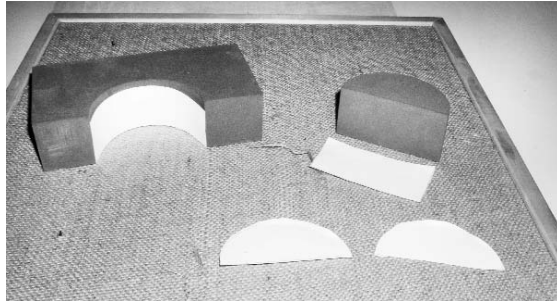


Figura 11

Successivamente ci siamo posti il seguente problema: «Come devo modificare una figura perché l'area della nuova figura sia maggiore di quella di partenza?». Abbiamo fatto l'esperienza del «togliere» con i cubetti di legno.

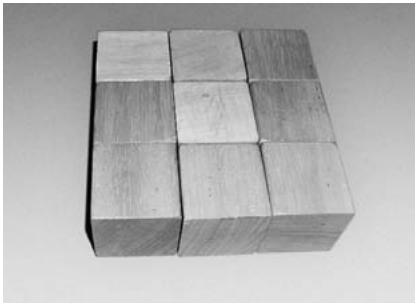


Figura 12

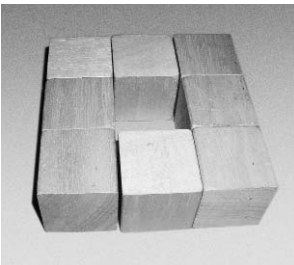


Figura 13

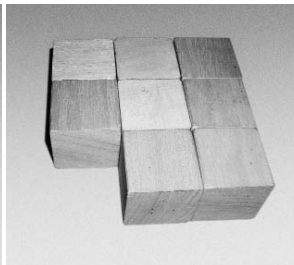


Figura 14

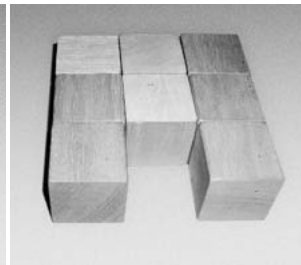


Figura 15

Come si può vedere dalle figure 13, 14 e 15, il «togliere» non comporta necessariamente una diminuzione di area, ma tipologie diverse: nella prima figura l'area è maggiore di quella di partenza, nella seconda è minore e nella terza è uguale.

## 8. Le nostre convinzioni oggi

Le 5 autrici-maestre al termine della loro esperienza di ricerca-azione nelle diverse classi di scuola elementare affermano: «Ogni volta che rileggiamo la frase

di Speranza (1988): “A mio avviso il ritrovare analogie è uno dei momenti essenziali del pensiero critico: ritengo che sia utile lasciare che gli allievi si sbizzarriscano a inventare qualche analogia anche se poi una più attenta critica potrà farne dimenticare molte tra quelle inventate”, non possiamo non riandare ai nostri anni di studio, al tempo delle elementari, al tempo delle medie, al tempo delle magistrali (una volta si chiamavano così e duravano quattro anni). Non abbiamo mai incontrato un insegnante di matematica che ci avesse parlato dell'analogia o che, pur non pronunciando mai la parola analogia, ci avesse introdotto esplicitamente all'idea che si potesse ragionare e riflettere in modo consapevole sulle somiglianze e differenze tra diverse situazioni.

Se poi pensiamo a tutti i corsi di formazione proposti dal Ministero della Pubblica Istruzione, le cose non sono andate meglio.

Per molto tempo, nelle nostre classi abbiamo dato poco spazio all'idea che quello che vale in un certo ambito potrebbe valere anche in un altro, abbiamo sempre chiesto spiegazioni con tutti i passaggi ben evidenziati. Abbiamo insegnato a cercare somiglianze e differenze ma siamo rimaste al livello della descrizione, senza favorire nei nostri alunni la formazione di una pratica che attraverso l'analogia potesse aiutarli a risolvere problemi.

A posteriori possiamo dire che, soprattutto all'inizio del nostro insegnamento, l'azzardare soluzioni attraverso l'analogia, certamente ci avrebbe messo in difficoltà, un ragionamento esplicitato in tutti i suoi passaggi ci dava più sicurezza e possibilità di controllo.

Dobbiamo aggiungere anche che il libero pensiero dei nostri bambini ci avrebbe spaventato: non sapevamo dove ci avrebbe portato e come avremmo potuto utilizzarlo. Volevamo sempre arrivare al nocciolo della questione senza tanti “scarti”.

Come sempre, il cambiamento è avvenuto in seguito a una frustrazione: noi stesse, sottoposte a un problema di carattere geometrico, come abbiamo indicato nei precedenti paragrafi, non siamo state in grado di risolverlo, non siamo state cioè in grado di dire che le relazioni tra perimetro e area nel piano potevano avere un analogo anche tra area e volume nello spazio. Non abbiamo visto l'analogia tra il piano e lo spazio. Per fortuna eravamo un gruppo e abbiamo cominciato a lavorare sull'analogia, abbiamo cominciato a studiare con entusiasmo e umiltà. Per l'ennesima volta nella nostra carriera di insegnanti, ci siamo trovate a rivedere il nostro modo di insegnare, a fare i conti con una nostra incapacità che influiva negativamente sui bambini.

Applicare il metodo dell'analogia comporta però un sapere matematico sicuro; senza questo sapere non saremmo state capaci di affrontare i pericoli dell'analogia dai quali ci mette in guardia Fischbein (1987; 1989). Quindi, per imparare a ragionare per analogia abbiamo dovuto anche approfondire la conoscenza della matematica stessa.

L'analogia comporta l'incontro con le esperienze passate: bisogna imparare a rendere sempre utilizzabile il sapere già acquisito.

Ma queste sono parole; come si fa a farle diventare pratiche quotidiane?

Abbiamo pensato di proporre ai nostri bambini la drammatizzazione della soluzione di un problema, non per mostrare una via da seguire, ma per mostrare che cosa accade dentro di noi, quando siamo di fronte a un problema che ci appare oscuro.

Abbiamo potuto constatare che l'offerta della nostra umanità di insegnanti che si mostra in una condizione simile alla loro, seppur drammatizzata, ha per-

messo ai bambini di “capire” che per imparare la matematica e per imparare a lavorare per analogia, occorre mettersi in gioco sul piano delle conoscenze, del metodo, dei sentimenti. Hanno incominciato a capire che la soluzione di un problema comporta uno sguardo al passato, per scegliere ciò che sarebbe utile confrontare con la situazione proposta; un confronto tra elementi analizzati, quello nuovo e quelli del passato, sulla base di somiglianze e differenze; una decisione sulla base di una analogia riconosciuta o sulla base di una analogia impossibile.

Questo percorso rappresenta per noi solo una tappa di un continuo cambiamento che coinvolge noi insegnanti e i nostri allievi, per questo vogliamo concludere con la seguente frase di Seneca che rispetta pienamente ciò che stiamo provando a conclusione della stesura di questo percorso: “*Continua ciò che hai cominciato e forse arriverai alla cima, o almeno arriverai in alto a un punto che solo tu comprenderai non essere la cima*”».

## Bibliografia

- Andriani M.F., Dallanoce S., Falcade R., Foglia S., Gregori S., Grugnetti L., Maffini A., Marchini C., Rizza A., Vannucci V. (2005). *Oltre ogni limite*. Bologna: Pitagora.
- Arrigo G., Sbaragli S. (2004). *I solidi. Riscopriamo la geometria*. Roma: Carocci.
- Bartolini Bussi M. (1989a). La discussione collettiva nell'apprendimento della matematica. Parte I. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 12, 1, 5-49.
- Bartolini Bussi M. (1989b). La discussione collettiva nell'apprendimento della matematica: analisi di due casi. Parte II. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 12, 5, 615-654.
- Bazzini L. (1995). Il pensiero analogico nell'apprendimento della matematica: considerazioni teoriche e didattiche. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 2, 107-129.
- Black M. (1954). Mathaphor. *Proceedings of the Aristotelian Society*. 55, 173-94. [Traduzione italiana in: Black M. (1983). *Modelli archetipi metafore*. Parma: Pratiche].
- Brousseau G. (2004). Una modellizzazione dell'insegnamento della matematica. *Bollettino dei docenti di matematica*. 49, 11-32.
- Brown D.E., Clement J. (1989). Overcoming misconceptions via analogical reasoning: abstract transfer versus explanatory model construction. *Instructional Science*. 18, 237-261.
- Campolucci L., Maori D., Fandiño Pinilla M.I., Sbaragli S. (2006). Cambi di convinzione sulla pratica didattica concernente le frazioni. *La matematica e la sua didattica*. 3, 353-400.
- Canevaro A., Gaudreau J. (1988). *L'educazione degli handicappati*. Roma: NIS.
- Cottino L., Sbaragli S. (2005). *Le diverse "facce" del cubo*. Roma: Carocci.
- D'Amore B. (1991). Ricerca-Azione, possibile paradigma della ricerca in didattica. *La Scuola Se*. 79-80, 14-17.
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2005). Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti. *La matematica e la sua didattica*. 2, 165-190.
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2006). *Area e perimetro. Aspetti concettuali e didattici*. Trento: Erickson.
- Fischbein E. (1985). Intuizione e pensiero analitico nell'educazione matematica. In: Chini Artusi L. (Ed.). *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Bologna: Zanichelli-UMI. 8-19.
- Fischbein E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics*. Dordrecht: D. Reidel Publ. Company.
- Fischbein E. (1989). Tacit Models and Mathematical Reasoning. *For the Learning or Mathematics*. 2, 9-14.
- Gentner D., Gentner D.R. (1983). Flowing Water or Teaching Crowds: Mental Models of Electricity. In: Gentner D., Stevens A. (Eds.). *Mental Models*. Hillsdale: Erlbaum.
- Gudmundsdottir S. (1996). The Teller, the Tale, and the One Being Told: The Narrative Nature of the Research Interview. *Curriculum Inquiry*. 26(3), 293-30.
- Lakoff G., Johnson M. (1980). *Metaphores we live by*. Chicago: University of Chicago Press. [Traduzione italiana in: Lakoff G., Johnson M. (1998). *Metafora e vita quotidiana*. Milano: Bompiani].
- Lakoff G., Nuñez R. E. (2000). *Da dove viene la matematica*. Torino: Bollati Boringhieri.
- Lewin K. (1946). Action Research and Minority Problems. *Journal of Social Issues*. Vol. 2.
- Lucangeli D., Passolunghi M.C. (1995). *Psicologia dell'apprendimento matematico*. Torino: UTET.
- Mason L. (1992). *Reti di somiglianze*. Milano: Franco Angeli.
- Noss R., Hoyles C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers*. Dordrecht: Kluwer.
- Pesci A. (2002). *Lo sviluppo del pensiero proporzionale nella discussione di classe*. Bologna: Pitagora.
- Reeves L.M., Weisberg R.T. (1993). On the concrete nature of human thinking: content and context in analogical transfer. *Educational psychology*. 13, 245-258.
- Reeves L.M., Weisberg R.T. (1994). The role of content and abstract information in analogical transfer. *Psychological Bulletin*. 115, 381-400.
- Robutti O. (2006). Embodied cognition e didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica*. 20, 2, 163-186.
- Ross B. H. (1987). This is like that: the use of earlier problems and the separation of similarity effects. *Journal of Experimental psychology: learning, memory and cognition*. 13, 4, 629-639.
- Sbaragli S. (2006). La capacità di riconoscere «analogie»: il caso di area e volume. *La matematica e la sua didattica*. 2, 247-285.
- Sbaragli S., Cottino L., Gualandi C., Nobis G., Adriana Ponti A., Ricci M. (2008). *L'analogia, aspetti concettuali e didattici. Un'esperienza in ambito geometrico*. Roma: Armando Armando.
- Sfard A. (2002). Thinking in Metaphors and Metaphors for Thinking. In: D. Tall, M. Thomas (Eds.). *In-*

---

*telligence, Learning and Understanding in Mathematics. A tribute to Richard Skemp.* Flaxon: Post Pressed. 79-96.

Speranza F. (1988). Salviamo la geometria! *La matematica e la sua didattica*. 2, 3, 6-13.

Stavy R., Tirosh D. (2001). *Perché gli studenti fraintendono matematica e scienze?* Trento: Erickson.

Tirosh D., Graeber A. (2003). Challenging and changing mathematics teaching classroom practice. In: Bishop A.J., Clements M.A., Keitel C., Kilpatrick J., Leung F.K.S. (Eds.). *Second International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 643-687.

Vergnaud G. (2007). La concettualizzazione nell'attività degli allievi e nella pratica degli insegnanti. In: D'Amore B., Sbaragli S. (Eds.). (2007). *Allievi, insegnati, sapere: la sfida della didattica della matematica*. Atti del convegno: "Incontri con la matematica n. 21". 2-3-4 novembre 2007. 27-34.

Villani V. (2006). *Cominciamo dal punto*. Bologna: Pitagora.

Vygotskij L.S. (1931-1980). *Il processo cognitivo*. Torino: Boringhieri.

Zan R. (1998). *Problemi e convinzioni*. Bologna: Pitagora.

## 1. A proposito di...

Antonio Steiner, Gianfranco Arrigo

### 1. Risoluzione grafica di un'equazione quadratica

Partiamo con un esempio:

$$(x+2)(x-4) = x^2 - 2x - 8 = 0$$

Le soluzioni  $x_1 = -2$  e  $x_2 = 4$  sono le ascisse dei punti d'intersezione della parabola  $y = x^2 - 2x - 8$  con l'asse  $Ox$ .

La parabola è costruibile solo per punti. Perciò **ci proponiamo di ottenere  $x_1$  e  $x_2$  come ascisse dei punti di intersezione di un cerchio passante per il punto  $(0;1)$  con l'asse  $Ox$** , come mostrato nella figura 1.

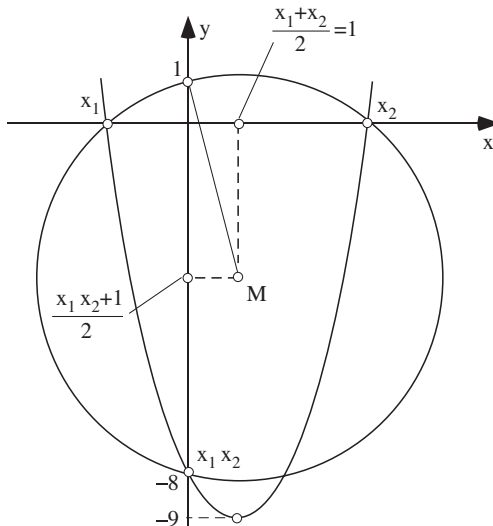


Figura 1. Le soluzioni dell'equazione  $x^2 - 2x - 8 = 0$  come ascisse dei punti d'intersezione di un cerchio passante per  $(0;1)$  con l'asse  $Ox$ .

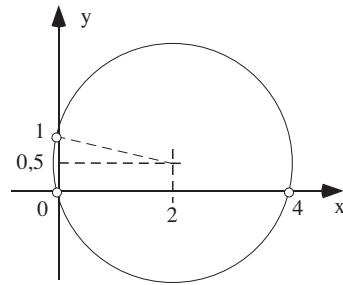
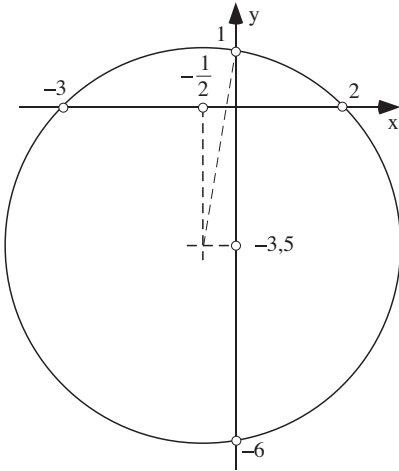


### III. Passeggiate matematiche

Ciò è possibile per le relazioni di Vieta e per il teorema relativo all'asse di una corda:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a} = 1, \quad x_1 \cdot x_2 = 1 \cdot \frac{c}{a} = -8; \quad M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{x_1 x_2 + 1}{2}\right); \quad M(1; -3,5)$$

La figura 2 mostra le diverse possibilità.

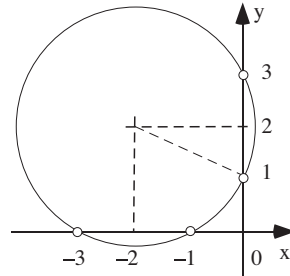
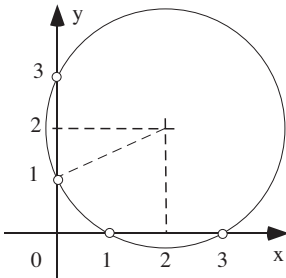


$$(x+3)(x-2) = x^2 + x - 6 = 0$$

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}; \quad \frac{c}{a} = -6$$

$$x(x-4) = x^2 - 4x = 0$$

$$-\frac{b}{2a} = 2; \quad \frac{c}{a} = 0$$



$$(x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$-\frac{b}{2a} = 2; \quad \frac{c}{a} = 3$$

$$(x+3)(x+1) = x^2 + 4x + 3 = 0$$

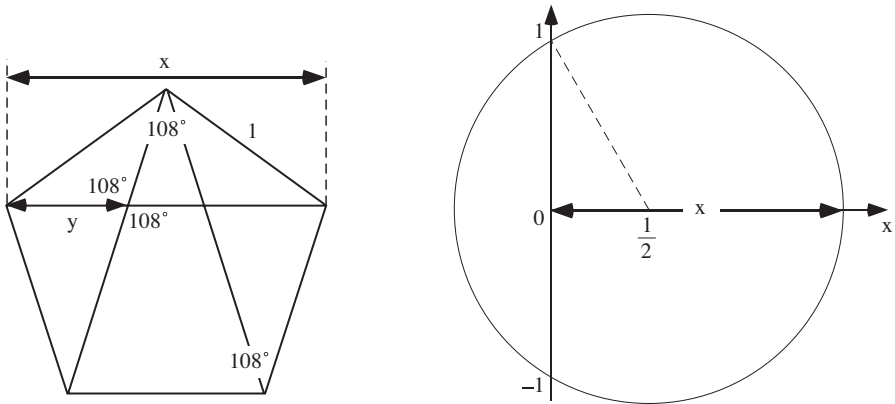
$$-\frac{b}{2a} = -2; \quad \frac{c}{a} = 3$$

Figura 2. Soluzioni con segni diversi

Dalle nostre riflessioni ricaviamo che **la soluzione di un problema geometrico riconducibile a una equazione di secondo grado è costruibile con riga e compasso.**

Un esempio è costituito dalla costruzione del pentagono regolare, presentata nella figura 3 del prossimo paragrafo.

## 2. Il pentagono regolare



$$y = x - 1 ; \quad \frac{1}{x} = \frac{x-1}{1}$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2} ; \quad \frac{c}{a} = -1$$

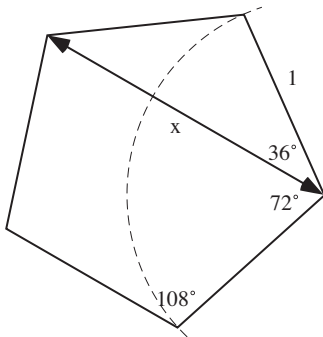


Figura 3. Costruzione del pentagono regolare

**3. Cerchio con poligono regolare di n lati inscritto e circoscritto**

Con riferimento alla figura 4, detti  $P_n$  e  $p_n$  i perimetri dei poligoni regolari di n lati circoscritti e inscritti e con  $C$  la lunghezza della circonferenza, si ha

$$P_n = 2n \frac{\sin \frac{360^\circ}{2n}}{\cos \frac{360^\circ}{2n}} \cdot r \quad ; \quad p_n = 2n \sin \frac{360^\circ}{2n} \cdot r \quad ; \quad \frac{P_n}{p_n} = \frac{1}{\cos \frac{360^\circ}{2n}} \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{p_n} = 1$$

e quindi

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{360^\circ}{2n} \quad ; \quad C = 2\pi r$$

Ora indichiamo con  $A_n$  e  $a_n$  le aree dei poligoni regolari di n lati circoscritti e inscritti e con  $A$  l'area del cerchio; analogamente si ha

$$A_n = n \frac{\sin \frac{360^\circ}{2n}}{\cos \frac{360^\circ}{2n}} \cdot r^2 \quad ; \quad a_n = n \sin \frac{360^\circ}{2n} \cos \frac{360^\circ}{2n} \cdot r^2$$

così che

$$A = \pi r^2$$

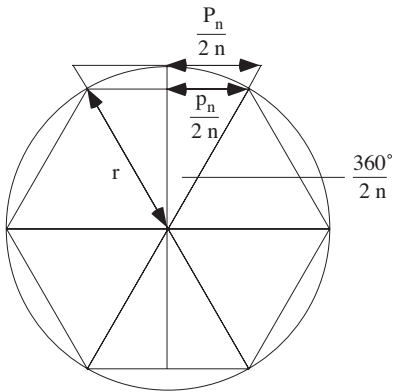


Figura 4. Cerchio con poligono regolare di n lati inscritto e circoscritto.

## 4. Rettificazione della circonferenza: costruzioni approssimate

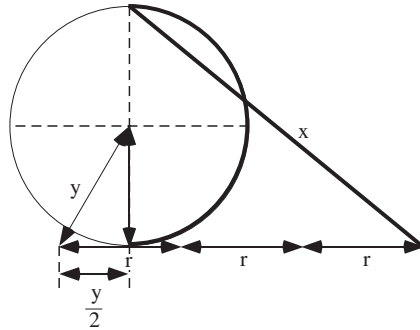
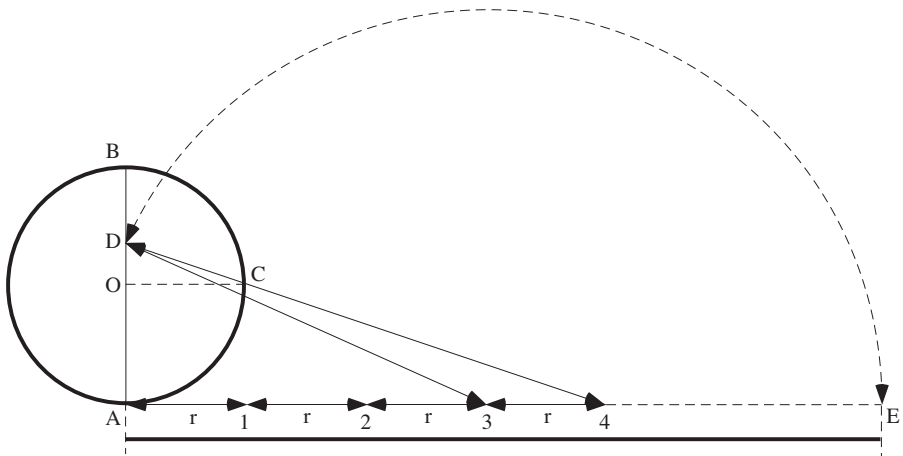


Figura 5. Approssimazione di Kochanski:  $x = r \cdot \sqrt{\frac{40 - 6\sqrt{3}}{3}} \cong r \cdot 3,14153 \cong \frac{C}{2}$

La verifica del risultato di Kochanski è un bell'esercizio per gli studenti delle prime classi delle superiori.

Un'approssimazione ancora migliore è stata raggiunta dal matematico svizzero Paul Finsler (1894-1970); la stessa è stata inviata il 2 marzo 1938 alla rivista *Commentarii Mathematici Helvetici* e pubblicata nel numero (Band) 10, p. 249-250, nell'articolo «Einige elementargeometrische Näherungskonstruktionen».

Eccola:



Sulla tangente in A si riporta 4 volte il raggio a partire dal punto A, ottenendo così il punto 4. Inoltre  $|1C| = |OC| = r$  e la retta 4C interseca il diametro AOB della circonferenza in D. Infine sulla tangente si determina il punto E tale che  $|3E| = |3D|$ ; allora AE è un'approssimazione dell'intera circonferenza.

Infatti:

detto  $x = |OD|$ , si ha la seguente uguaglianza

$$\frac{r+x}{4r} = \frac{x}{r}$$

da cui

$$x = \frac{r}{3}$$

Perciò

$$|AE| = 3r + \frac{r}{3}\sqrt{97} = r \cdot \left(3 + \frac{1}{3}\sqrt{97}\right) \cong r \cdot 3,14148\dots$$

L'errore è dell'ordine di  $\frac{6r}{26000}$ .

Questa costruzione può essere proposta anche ad allievi di quarta media.

Nello stesso articolo è citata un'altra costruzione geometrica, molto simile a quella appena vista, opera del brasiliano J. Cordilha, pubblicata sul numero 44 della *Revue générale des Sciences* (1933). Egli considera un triangolo rettangolo di cateti

$$\left(4 - \frac{1}{4}\right)r \text{ e } \frac{1}{2}r.$$

La sua approssimazione della circonferenza di raggio  $r$  è la somma delle lunghezze dell'ipotenusa di questo triangolo e  $\frac{5}{2}r$ .

Anche questa verifica può essere proposta agli allievi a partire dalla quarta media. La lunghezza approssimata è

$$\frac{\sqrt{229} + 10}{4} \cdot r \cong 2r \cdot 3,14159324\dots$$

L'errore dell'approssimazione è dell'ordine di

$$\frac{6r}{5'000'000}$$

Nello stesso articolo, in una nota a piè di pagina, viene citata l'approssimazione numerica data dal geniale matematico indiano Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887-1920), proposta, come sua abitudine, senza alcuna spiegazione. Essa appare sul *Quarterly Journal of Mathematics*, XLV, 1914, p. 350-372. Ramanujan afferma di avere ottenuto questa «curiosa approssimazione» di  $\pi$  in modo empirico. Eccola per curiosità:

«Prendete il numero 1234, trasponete le due prime cifre e le due ultime, così il numero diventa 2143. Dividete questo numero per 22. Prendete due volte la radice quadrata (quindi fate la sua radice quarta). Il risultato finale è notevolmente vicino a  $\pi$  (a meno di 1 miliardesimo)».

Dunque:

$$\pi \cong 4\sqrt[4]{\frac{2134}{22}} \cong 3.141592653$$

Tutti sanno che, oggi, grazie alle enormi capacità di calcolo dei computer, si conoscono addirittura trilioni di cifre decimali di  $\pi$ , cioè dell'ordine di  $10^{18}$ . Tuttavia questi risultati non mettono per nulla in ombra le costruzioni geometriche appena viste e nemmeno la formuletta di Ramanujan. Tutte eccellono in semplicità, genialità e immediatezza.

---

**1. Il calcio... un'altra occasione per fare matematica**

Luca Bellini

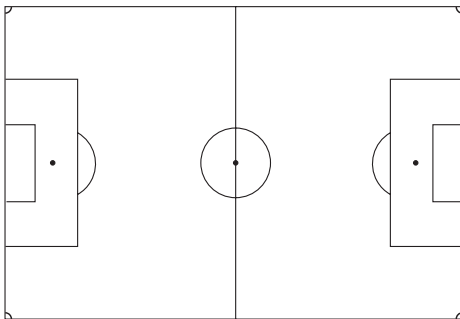
Secondo il regolamento della FIFA<sup>1</sup>, un campo di calcio per incontri internazionali deve avere al massimo le misure 75 m x 110 m. Le linee di demarcazione devono avere una larghezza massima di 12 cm. Queste linee comprendono (vedi figura):

- il contorno del rettangolo di gioco;
- la linea mediana;
- il contorno dell'area di porta, che è un rettangolo di dimensioni 1832 cm x 550 cm;
- il contorno dell'area di rigore, che è un rettangolo di dimensioni 4032 cm x 1650 cm;
- la circonferenza di centro campo che ha raggio 9,15 m;
- l'arco di circonferenza dell'area di rigore che è un terzo della circonferenza di centro campo;
- il dischetto di centro campo e i due del calcio di rigore che hanno un diametro di 12 cm;
- i quattro quarti di circonferenza di raggio 1 m che segnano gli angoli del terreno di gioco.

In occasione dei futuri campionati mondiali di calcio, nella nazione ospitante si costruisce un nuovo stadio con terreno da gioco rispondente alle dimensioni (massime) stabilite dalla FIFA.

---

1. Letteralmente: Fédération Internationale de Football Association.



### Attività A

#### Il campo da gioco e le linee di demarcazione

- Calcola l'area e il perimetro dell'intero campo da calcio.
- Calcola l'area della superficie denominata area di rigore.
- Calcola l'area del cerchio di centrocampo.
- Calcola la lunghezza dell'arco di circonferenza dell'area di rigore.

### Attività B

- Per ragioni organizzative è importante sapere qual è l'area della superficie totale occupata dalle linee di demarcazione: trovala tu.
- Calcola la percentuale della superficie di campo ricoperta dalle linee di demarcazione.

### Attività C

#### Il pallone

Il pallone per le partite ufficiali deve avere, da regolamento, una circonferenza minima di 68 cm e massima di 71 cm.

La sua massa può variare tra 396 g e 453 g.



- Quali sono il volume minimo e il volume massimo di un pallone per le partite ufficiali il gioco del calcio?
- Calcola il raggio di un pallone da calcio che possiede una circonferenza massima di 70 cm.

Ogni pallone da calcio è formato di 12 pentagoni regolari e 20 esagoni regolari assemblati tra loro con una cucitura. I lati di ciascun poligono misurano 4,5 cm.

- Trova la lunghezza totale di tutte le cuciture.

**Attività D****Le porte**

Le porte da calcio sono rettangolari: 2,44 cm di altezza e 7,32 cm di larghezza.



- Calcola il rapporto fra le dimensioni di una porta da calcio.
- Calcola l'area della superficie «disponibile» per effettuare una rete, detta anche specchio della porta..
- Il dischetto del calcio di rigore si trova ad una distanza di 11 m dalla linea di porta.
- Calcola la distanza del dischetto dai pali, dall'asta e dall'incrocio dei pali.

**Attività E****Torneo fra nazioni**

La tabella seguente riporta alcuni dati relativi a un torneo fra nazioni.

	<b>Giocate</b>	<b>Punti</b>	<b>Gol fatti</b>	<b>Gol subiti</b>
Turchia	12	24	26	11
Portogallo	14	28	20	10
Francia	12	26	25	5
Svezia	12	27	23	9
Russia	12	24	18	7
Svizzera	14	28	24	14

- Puoi affermare che, rispetto ai punti conquistati, la squadra migliore è la Svizzera?
- Se due squadre hanno totalizzato gli stessi punti, per decidere qual è la migliore si guarda la differenza reti (gol fatti meno gol subiti); in caso di nuova parità si guarda il quoziente reti (gol fatti diviso gol subiti). Qual è la miglior squadra in assoluto?
- Qual è la squadra che possiede il miglior attacco?
- Qual è la squadra che possiede la miglior difesa?

**Attività F****La fase finale**

Alla fase finale dei campionati del mondo partecipano 16 squadre, suddivise inizialmente in gironi di 4 squadre. In ogni girone, ogni squadra affronta tutte le altre una sola volta.

- Quante partite si giocano all'interno di ogni girone?



Al termine della fase a gironi, le prime due squadre classificate nei rispettivi gironi accedono ai quarti di finale, per un totale di 8 squadre. Queste si affrontano a eliminazione diretta fino a che non viene proclamata la squadra vincitrice.

- Quante partite si giocano a partire dai quarti di finale?
- Quante partite si giocano in totale all'europeo di calcio?
- Quante partite avrà giocato, nella fase finale dell'europeo, la squadra risultata campione?

### Attività G

Considera un campo di dimensioni 68,2 m x 100,1 m.

Immagina di volerlo ricoprire con palloni dal diametro di 22 cm, come indicato in figura.



- Quanti palloni sono necessari?
- Supponendo di guardare il campo dall'alto, calcola l'area della parte di erba ancora visibile.
- Calcola la percentuale dell'erba visibile rispetto all'intero terreno di gioco.

## 2. Il Piccolo teorema di Pitagora

Arturo Bianchi<sup>1</sup>

Durante il periodo di un ciclo di conferenze tenute nella zona di Crotone sul tema «Pitagora e il suo tempo» sono stato avvicinato da XY, alto esponente della malavita organizzata locale nella sua qualità di responsabile dei contatti con le banche estere<sup>2</sup>. Dopo avermi sottoposto a un certo numero di «prove», XY mi chiese se ero interessato a esaminare un antico documento che, chissà da quando, era in possesso della sua famiglia e che, secondo lui, conteneva una parte dell'insegnamento esoterico di Pitagora, quella riservata ai *mathematikoi* e negata agli *akusmatikoi*. Gli risposi che ero interessato moltissimo e, dopo qualche ulteriore «prova», fui condotto, bendato, in un luogo che poteva ben essere il caveau di una banca. Lì, in una teca di cristallo a prova di proiettile perforante, a temperatura e pressione costanti e in atmosfera di azoto – così mi erudì XY – era conservato il documento, una pergamena parecchio rovinata e di difficilissima lettura, che non potei fotografare ma soltanto copiare. Eccone un *excerptum*, parzialmente interpolato da me, che tratta di ciò che ho chiamato il Piccolo teorema di Pitagora:

Μῆνιν ἄειδε, θεά, Πηληϊάδεω Ἀχιλῆος οὐλομένην, ἣ μυρί' Ἀχαιοῖς ἄλγε' ἔθηκε, Ἄντιο Λουγκάνο ωραίο ὦ γλυκιά χώρα μου. Διωγμένοι χωρίς σφάλμα πολλὰς δ' ἰφθίμους ψυχὰς Ἄϊδι προΐαψεν ἡρώων, αὐτοὺς δὲ ἐλώρια τεύχε φεύγουν οἱ Ἀναρχικοί. Καὶ φεύγουν τραγουδώντας μ'ἐλπίδες στην καρδιά. Καὶ κύνεσσιν οἰωνοῖσι τε πᾶσι· Διὸς δ' ἔτελείετο βουλή· ἔξ οὔ δὴ τὰ πρῶτα εἶναι γι' ἔσας φτωχοὺς, γι' ἔσας, ἔργαζομένους που μας ἀλυσοδέσαν ως αν διασπῆτην ἐρίσαντε Ἀτρεΐδης τε ἄναξ ἀνδρῶν καὶ δῖος Ἀχιλλεύς. Τίς τάρ κακοποιοί. Μα η ιδέα μας, μόνον της αγάπης εἶναι η ιδέα. Αγαπητοί σφωε θεῶν ἔριδι ξυνέηκε μάχεσθαι; Λητοῦς καὶ Διὸς υἱός· ὃ γὰρ βασιλῆι συντρόφοι, φίλοι, που ἴδω θα μείνετε, την κοινωνικὴν ἀλήθεια δυνατὰ χολωθεῖς νοῦσον ἀνά στρατὸν ὤρσε κακὴν, ὀλέκοντο δὲ λαοί, οὔνεκα τὸν διαφημίζετε. Αυτὴ εἶναι η ἐκδίκηση που τη ζητούμε ἀπ' ἐσάς. Εσύ, που μας Χρῦσην ἠτίμασεν ἀρητῆρα

1. *Arturo Bianchi* è uno pseudonimo: le vere generalità dell'autore sono note alla Redazione, che, tenuto conto di alcuni particolari cronachistici contenuti nel testo, ha ritenuto accettabile la richiesta dell'autore e ha deciso di venir meno alla sua abitudine di non pubblicare contributi scritti sotto falso nome.
2. Che XY sia quanto scritto è *vox populi*, non provata in sede giudiziaria.

Ἄτρεΐδης· ὁ γὰρ ἦλθε θεὰς ἐπὶ νῆας Ἀχαιῶν διώχνεις μ' ἕνα δειλό ψεύδος, αστική δημοκρατία, θα ντρέπεσαι μία μέρα. Καὶ λυσόμενός τε θύγατρα φέρων τ' ἀπερείσι' ἄποινα, στέμματ' ἔχων ἐν χερσὶν σε κατηγοροῦμε ἐνώπιον τοῦ μέλλοντος. Διωγμένοι χωρὶς διακοπὴ θα πάμε ἐκηβόλου Ἀπόλλωνος χρυσέω ἀνὰ σκῆπτρω, καὶ λίσσετο πάντας Ἀχαιούς, προσβάλλει καὶ βρίζει τον θρύλο του Γκουλιέλμου Τελ. Ἄτρεΐδα δὲ μάλιστα δύο, κοσμήτορε λαῶν·

Nella trascrizione ho introdotto la punteggiatura e, di conseguenza, qualche maiuscola. La traduzione letterale è di ben poca utilità: lo stile di Pitagora, o del pitagorico che ha redatto il testo, è involuto, immaginifico, ridondante e dunque molto lontano da quello cui siamo abituati. Quella che segue è di conseguenza una traduzione *ad sensum*.

Tu sai, discepolo evoluto, che in ogni triangolo rettangolo il quadrato dell'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati dei cateti. Ci sono tuttavia triangoli rettangoli speciali per i quali vale un'altra equivalenza: il quadrato del cateto minore è uguale alla somma dell'altro cateto e dell'ipotenusa. Questi triangoli speciali hanno sia l'ipotenusa che è di un'unità maggiore del cateto maggiore sia il cateto minore di lunghezza dispari.

Il Piccolo teorema è interessante per almeno due motivi:

- storico: non mi risulta, infatti, che sia mai stato trovato in altre trattazioni di geometria e
- matematico: è ben evidente che un'area non può essere uguale alla somma di due segmenti.

Ciononostante, afferma una verità. Pitagora, o il pitagorico, non mostra esempi, ma i seguenti sono illuminanti:

Cateto minore	Cateto maggiore	Ipotenusa
1	0	1
3	4	5
5	12	13
7	24	25
9	40	41
11	60	61
13	84	85
15	112	113
17	144	145
19	180	181
21	220	221

La prima terna, [1,0,1], non può rappresentare un triangolo rettangolo, e per essa non è nemmeno vero che l'ipotenusa è di un'unità maggiore del cateto maggiore, ma è comoda per il seguito. Si osservi infatti che le differenze fra i cateti maggiori sono 4, 8, 12, 16, 20, ...

Ne consegue che l'( $n+1$ )-esima terna sarà

$$\begin{aligned} \left[ 2n+1, 4 \sum_1^n i, 1 + 4 \sum_1^n i \right] &= \left[ 2n+1, 4 \frac{n(n+1)}{2}, 1 + 4 \frac{n(n+1)}{2} \right] = \\ &= [2n+1, 2n^2+2n, 2n^2+2n+1] \end{aligned}$$

e davvero

$$(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n^2 + 2n) + (2n^2 + 2n + 1)$$

D'altra parte è

$$\begin{aligned} (2n+1)^2 + (2n^2+2n)^2 &= 4n^2 + 4n + 1 + 4n^4 + 8n^3 + 4n^2 = \\ &= 4n^4 + 8n^3 + 8n^2 + 4n + 1 = (2n^2 + 2n + 1)^2 \end{aligned}$$

come deve essere per il «normale» teorema di Pitagora.

## Quiz numero 40: La pesata

Aldo Frapolli

Caro Joe,

per festeggiare l'anno nuovo ho pensato di regalarti uno fra i tanti lingottini d'oro che vedi davanti a te.

Si tratta di 40 pile identiche, formate ognuna da 39 lingottini uguali nella forma e non distinguibili a occhio nudo.

L'unica differenza è che tutti i lingottini di una delle pile pesano di 9 g, mentre tutti gli altri pesano 8 g.

Puoi scegliere quello che vuoi tu. Vediamo se sei fortunato e peschi quello da 9 g.

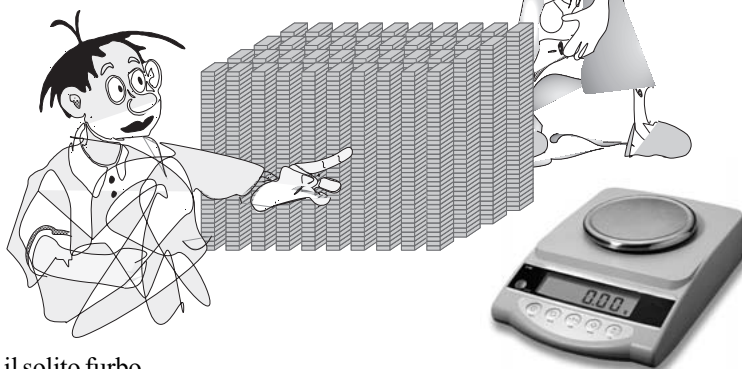
Ti ringrazio.

Per male che vada sono sempre 8 g d'oro. Per quello da 9 g ho una possibilità su quaranta di azzeccarlo.

Però ... !

Vedo una bilancia.

Mi lasceresti usarla per fare una pesata e poi decidere quale lingottino prendere?



Sei il solito furbo.

Vuoi aumentare la probabilità di scegliere quello da 9 g.

Ne prendi uno e lo pesi.

Se non è quello giusto, al secondo colpo hai una possibilità su 39 di trovarlo.

D'accordo, puoi usare la bilancia. Però ti concedo una sola pesata!

Che cosa avrà in mente Joe? Anch'egli lo stratagemma indicato da Archie per aumentare la sua probabilità di pescare il lingottino di maggior valore o qualcos'altro?

La nostra domanda è: che cosa potrebbe avere in mente Joe per assicurarsi la maggiore probabilità di azzeccare il lingottino da 9 g facendo una sola pesata?

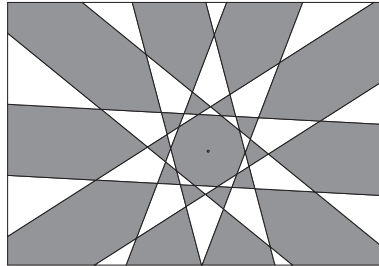
Attendiamo come sempre le vostre risposte, curiosi di vedere chi si aggiudicherà il libro riservato a alla soluzione più originale.

## Soluzione del Quiz numero 39

Fra le soluzioni pervenuteci vi proponiamo quella di Mauro Zoffoli, di Cesena, completa e piacevole anche da un punto di vista estetico. che si è aggiudicato il libro in palio di Colin Bruce, *Sherlok Holmes e le trappole della logica*.

**Sono necessarie almeno 10 rette per ottenere 50 pezzetti poligonali.**

*Un possibile risultato è presentato nella figura a lato.*



In particolare con 9 rette si possono ottenere al massimo 46 pezzetti e con 10 rette si può arrivare a 56 pezzetti.

Infatti se  $n$  è il numero di rette, il numero massimo di pezzetti ottenibili è dato dalla formula:

$$N(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

Per trovarla si può ragionare così.

Prima di tutto la limitazione del formato A4 non è importante; se si ha una soluzione per il piano infinito si può individuare un rettangolo sufficientemente grande da contenere tutte le intersezioni e poi comprimere il rettangolo orizzontalmente e verticalmente in modo uniforme fino ad avere le dimensioni di un A4.

Lavoriamo quindi nel piano infinito.

Prima di tracciare una retta abbiamo un pezzo. Tracciando la retta 1 otteniamo 2 pezzi. La retta 3 la tracciamo in modo che non sia parallela alle precedenti e che non passi per i loro punti di intersezione (questo è sempre possibile farlo).

Questa retta, quando interseca una delle due rette precedenti, divide il pezzo attraversato in due pezzi. Si formano così tre nuovi pezzi, dunque in totale 7 pezzi.

In generale, con una nuova retta non parallela a nessuna delle precedenti, si ottengono tanti nuovi pezzi quante sono le rette precedenti più un ultimo pezzo quando la retta «raggiunge l'infinito».

Abbiamo quindi la seguente formula ricorsiva:

$$A(n) = A(n-1) + (n-1) + 1 = A(n-1) + n, \quad \text{con } A(0)=1.$$

Per ottenere la forma algebrica si possono elencare le uguaglianze:

$$A(0) = 1$$

$$A(1) = A(0) + 1$$

$$A(2) = A(1) + 2$$

$$A(3) = A(2) + 3$$

$$A(n-1) = A(n-2) + (n-1)$$

$$A(n) = A(n-1) + n$$

---

Addizionando membro a membro si ottiene:  $A(n) = 1 + 1+2+3+\dots+(n-1)+n$

Conoscendo la formula per la somma dei primi  $n$  numeri interi si ha la formula data precedentemente.

Per ottenere in modo facile  $n$  rette non parallele e con mai 3 che s'incontrano nello stesso punto si può procedere così: se  $n$  è dispari, disegnare un poligono regolare di  $n$  lati e tracciare le  $n$  rette contenenti i lati; se  $n$  è pari, disegnare un poligono regolare con  $(n-1)$  lati e le rette contenenti i lati, aggiungere quindi una retta passante per il centro del poligono regolare, non parallela ad alcun lato e non passante per alcun vertice.

Per avere esattamente i 50 pezzi richiesti si può procedere ad esempio nel modo seguente: partiamo da un poligono regolare di 10 lati; le prime cinque rette contenenti i lati formano 16 pezzi (non ci sono rette parallele), la sesta retta forma 5 pezzi nuovi (non interseca una delle precedenti perché parallela), la settima forma 6 pezzi nuovi, e così via fino alla decima.

I pezzi così formati sono quindi  $16+5+6+7+8+9=51$ .

Nello scegliere il rettangolo basta poi fare in modo che un lato passi per un vertice «esterno» in modo da escludere uno dei pezzi.

## 2. P-bam<sup>1</sup> numero 4

Giorgio Mainini

### Riempimenti

È dato un quadrato  $n \times n$ : si tratta di annerire 1, 2, ...,  $n$  celle: in quanti modi diversi è possibile?

#### Livello 1

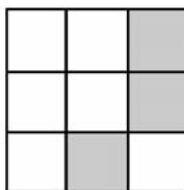
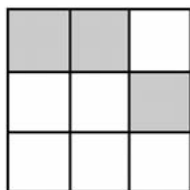
Porre  $n=2$  e provare, prima con l'annerimento di una sola cella, poi con 2, poi ...

Che cosa si intende per «modi diversi»?

Porre  $n=3$  e provare, prima con l'annerimento di una sola cella, poi con 2, poi ...

Che cosa si intende per «modi diversi»?

Ad esempio, i seguenti due modi sono uguali o diversi?




---

1. Con la denominazione p-bam s'intende un problema matematico «che ha la maligna ma stimolante tendenza a scoppiare fra le mani di chi lo tratta». Questa rubrica è aperta a tutti gli appassionati che hanno problemi di questo tipo da proporre. Contattare: [bdmp-bam@yahoo.it](mailto:bdmp-bam@yahoo.it).



## **Livello 2**

Porre  $n=4$ , poi  $n=5$ , e provare

## **Livello 3**

Trovare una formula che risponda alla domanda «Se  $n=2$  (3, ...), in quanti modi diversi si può annerire una cella?

Trovare una formula che risponda alla domanda «Se  $n=2$  (3, ...), in quanti modi diversi si possono annerire 2 (3, ...) celle?»

Trovare una formula che risponda alla domanda «Se l'ordine del quadrato è  $d$ , in quanti modi diversi è possibile annerire  $d$  celle?»

Trovare una formula che risponda alla domanda «Se l'ordine del quadrato è  $d$ , in quanti modi diversi è possibile annerire  $k$  celle?»

Trovare una formula che risponda alla domanda «Se l'ordine del quadrato è  $d$ , quanti annerimenti diversi sono possibili?»

## **Livello 4 e seguenti**

Quali e quanti annerimenti presentano simmetrie assiali, simmetrie centrali, simmetrie di rotazione?

Se, invece che con quadrati, si lavorasse con rettangoli  $m \times n$ , come cambierebbero le risposte date in precedenza?

Se, invece che con quadrati, si lavorasse con cubi  $d \times d \times d$ , come cambierebbero le risposte date in precedenza?

Se, invece che con cubi, si lavorasse con parallelepipedi rettangoli  $d \times e \times e$  o  $d \times e \times f$  come cambierebbero le risposte date in precedenza?

E se si lavorasse con ipercubi?

Preparare un programma per computer che dia le risposte.

---

**1. L'irragionevole adeguamento dello spirito all'Universo<sup>1</sup>**

**Conferenza SMASI**

**Mercoledì 28 gennaio 2009, ore 20.30**

**Sala multiuso, Scuole comunali Gerra, Lugano, Via Trevano 86**

**Jean-Claude Pont, Università di Ginevra**

**Presentazione della conferenza**

Tracce bizzarre sul biancore di un foglio e si pesano la Luna e la Terra, il Sole e le Stelle, geroglifici sapientemente combinati e lo spirito scopre un pianeta che nessuno aveva visto, un altro che nessuno non vedrà mai e l'Uomo guida verso l'infinito dell'Universo sonde che ci informano sullo stato della materia in questi siti lontani e desolati.

*Voyager, Pioneer* sono prodotti diretti del pensiero matematico e senza la matematica non esisterebbero.

Questa matematica che illumina il Cielo di molti ricercatori stabilisce misteriosamente un contatto tra lo Spirito e il Mondo, è una mediatrice privilegiata tra noi e le cose, rende possibile questo irragionevole adeguamento dello spirito all'Universo.

Senza matematica non ci sarebbe né radio, né televisione, né automobile, cioè, nulla di ciò che caratterizza il nostro tempo. Da dove viene questa misteriosa potenza del numero, della figura, del simbolo?

Facciamo qualche esempio. Dire che le tre altezze di un triangolo s'intersecano in un punto non comporta sicuramente un grande titolo di gloria (anche se...), ma affermare che esistono sempre sulla Terra due punti diametralmente opposti nei quali la coppia (temperatura, pressione) è la stessa è tutt'altra cosa. Nella mia relazione vorrei mostrare con alcuni esempi questo stupefacente potere del pensiero matematico.

---

1. Il titolo è ripreso liberamente da un celebre articolo di Pál Jenő Wigner, anglicizzato in Eugene Paul Wigner (Budapest, 17 novembre 1902 - Princeton, 1 gennaio 1995), fisico e matematico ungherese naturalizzato statunitense, vincitore del Premio Nobel per la fisica nel 1963.

---

## 2. Recensioni

**Nicosia G. G. (2008). *Numeri e culture*. Trento: Erickson. Pag. 156, euro 18, ISBN: 978-88-6137-314-3**

In una recente intervista (Università di Pisa, 2006) Claudio Magris ha affermato che «il traduttore è veramente un coautore, un po' complice, un po' rivale, un po' innamorato... Non bisogna dimenticare che la traduzione, come ha scritto Schlegel in un suo bellissimo passo, è la prima forma di critica letteraria, tanto è vero che scopre subito i punti deboli di un testo». Ebbene, l'esordio di Giovanni Giuseppe Nicosia, allora studente di Bruno D'Amore, come scrittore avviene nel 2002 con un'importantissima traduzione: quella di *Etnomatematica* del grande Ubiratan D'Ambrosio, medaglia Klein nel 2005 per la didattica della matematica. Ed ora, a distanza di sei anni, D'Ambrosio così ricorda nella presentazione scritta per *Numeri e culture*, opera del suo giovane collega: «Giovanni si mise a tradurre il mio libro e lo fece con molta competenza. Ne derivò una certa ammirazione da parte mia per quel giovane matematico che iniziava la carriera scientifica e nacque così una grata amicizia. La mia soddisfazione per la pubblicazione di questo libro va molto al di là del fatto di vedere il mio amico completare un progetto accademico, perché, come cultore dell'Etnomatematica, sono felice di constatare che la comunità internazionale dispone di una nuova risorsa che aiuterà molti insegnanti, ricercatori e studenti a riconoscere la ricchezza e la diversità di varie culture».

*Numeri e culture* è il quarto volume della collana «Strumenti per la didattica della matematica», diretta da Bruno D'Amore per la Erickson. Il sottotitolo dell'opera è assai indicativo: «Alla scoperta delle culture matematiche nell'epoca della globalizzazione». Tutto ciò avviene attraverso i sistemi di numerali in uso in alcune delle comunità socio-culturali costituite in Italia in seguito ai fenomeni migratori.

Se l'aspetto interculturale si sta proponendo, negli ultimi anni, come uno dei più importanti elementi di cui tener conto in ambito didattico, la matematica è talvolta considerata alla stregua di una disciplina che risente poco dell'influenza dei diversi contesti culturali. Spesso si cerca di mettere in evidenza l'universalità della ma-

tematica, una caratteristica che porterebbe ad una scarsa rilevanza delle componenti «geografiche». Questa posizione è superficiale e scorretta, e il volume di Giovanni Giuseppe Nicosia fornisce spunti di riflessione fondamentali in questo senso.

Riflettiamo sulla matematica e sul suo linguaggio: i risultati dell'*embodiment* sono stati confermati da numerose ricerche didattiche e possono essere riassunti nella constatazione secondo la quale il nostro corpo ci induce a «pensare matematicamente» nonché ad «esprimerci matematicamente» in un certo modo. Ma da ciò come si è giunti, nella storia, all'elaborazione della (o di una) matematica? È in effetti la realtà con la quale tutti noi veniamo a contatto, con i suoi vincoli, che ci porta a costruire strumenti matematici di un particolare tipo: artefatti e strumenti mediante i quali proprio quella realtà possa essere descritta ed elaborata, ovvero mediante i quali gli esseri umani siano in grado di interagire efficacemente con il «mondo». Il linguaggio matematico, collegandosi alla realtà, va a costituire il complesso formale sul quale la realtà stessa si basa; d'altro canto, viene da essa influenzato. È il nostro pensiero che, attraverso il linguaggio, in un reciproco gioco di influenze (dal pensiero alla parola e, seguendo Vy-gotskij, anche con la parola generatrice di pensiero), interagisce con la realtà.

Ma questo legame tra matematica e realtà non deve farci trascurare l'importanza di una componente «convenzionale» che si riconduce allo sfondo sociale. Particolari scelte sono state (e sono) giustificate sulla base di particolari esigenze: la comunità scientifica, nella storia della matematica, ha optato per alcune definizioni, ha codificato alcuni modi di procedere per dei motivi precisi. La matematica, in generale, non è una teoria del tutto convenzionale, indipendente dalla realtà, anche se non coincide con la descrizione di essa; la matematica è *ispirata* dall'universo fisico, ovvero collegata ad esso, ma *attraverso la mediazione di scelte umane, sociali*. Dunque le matematiche (il plurale è d'obbligo) non possono non essere considerate in relazione alle diverse culture.

Per concludere, e ci troviamo perfettamente in linea con la riflessione di Giovanni Giuseppe Nicosia, la *nostra* matematica sintetizza *un modo* di descrivere la realtà, di intervenire su di essa: il *nostro* modo, funzionale rispetto a determinati usi, a certe pratiche sociali. Nessuna matematica può esistere senza l'essere umano che la concepisce e che la usa; e questo essere umano è una persona concreta, che vive in un ambiente, in una comunità, in un contesto storico e socio-culturale. La riflessione sviluppata in *Numeri e culture* ci porta così a ricordare un'affermazione didatticamente importante di Lucia Grugnetti e Leo Rogers, secondo i quali: «una storia che mostri la diversità, piuttosto che l'universalità, dello sviluppo matematico aggiunge una dimensione stimolante alla disciplina stessa. In particolare, rende possibile l'ingresso in classe del mondo e della sua storia, in modo da contrastare ogni ristretta visione etnocentrica». Una questione certamente attuale che non può essere elusa da chi opera nella didattica della matematica e che trova nel lavoro di Giovanni Giuseppe Nicosia un'eccellente sostegno. (Giorgio T. Bagni)

**D'Amore B. (2008). *Allievi*. Bologna: Gedit Edizioni. Pag. 160, euro 19. ISBN 978-88-6027-072-6. Prefazione di Gian Mario Anselmi.**

Bruno D'Amore, docente presso le università di Bologna, Bolzano e Bogotà (Colombia), ideatore e direttore del Convegno nazionale «Incontri con la Mate-

matica» che da oltre vent'anni riunisce a Castel San Pietro Terme (Bologna) centinaia (migliaia!) di insegnanti entusiasti, è tra i più profondi e influenti studiosi di didattica della matematica del panorama scientifico internazionale: spesso abbiamo avuto occasione di segnalare i suoi fondamentali volumi di ricerca, testi sui quali si è formata un'intera generazione di studiosi in didattica della matematica. Ma è anche uno scrittore raffinatissimo, prosatore colto e sempre attento alla profondità dei rapporti tra le persone, ai fecondi accostamenti delle varie culture nella storia e nella geografia dell'avventura del pensiero umano. *Allievi* è il suo secondo libro di narrativa, preceduto cinque anni or sono da *Icosaedro*, opera che è stata insignita di due importanti riconoscimenti letterari.

*Allievi* è un volume entusiasmante, dedicato al meraviglioso rapporto, talvolta delicato e complesso ma sempre essenziale, che si instaura tra il maestro e l'allievo: il sottotitolo dell'opera è esplicito, «Dieci maestri parlano di allievi», e porta il lettore a tuffarsi subito in un intreccio di periodi, di prospettive culturali e di differenti umanità. Talvolta lo spunto storico è apertamente dichiarato ovvero di immediata individuazione, come quello, ben noto ma rivisitato in chiave originale e vivace tra Giotto e Cimabue; in altri casi il lettore viene indotto a esplorare, a cercare, dunque a inquadrare progressivamente il contesto storico (e geografico) di riferimento, anche sulla base degli anni che danno il titolo ai diversi capitoli del libro. In ogni caso la fertile versatilità della trattazione e del tono ci conduce ad attraversare personalità e momenti storici, contesti sociali, ambienti, tematiche e connessioni di eccezionale ampiezza e significatività.

Con *Allievi* riscopriamo quindi una storia della cultura dal vero spessore umano, inedita ma riconoscibile, per molti versi esaltante o forse commovente. Una storia corredata da un'indicazione importante e preziosa: l'accento sul ruolo fondamentale delle modalità (scientifiche, certamente, ma anche affettive) della trasmissione del pensiero e della cultura, l'essenzialità del rapporto tra maestro e allievo, connessione che dalla sfera privata si evolve a un ruolo sociale, addirittura universale. (Giorgio T. Bagni)

**Fandiño Pinilla M. I. *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica*. Trento: Erickson. Pag. 142, euro 18. ISBN 978-88-6137-360-0. Prefazione di Giorgio Bolondi.**

#### Indice

Premessa. Capitolo 1. L'apprendimento della matematica come oggetto unitario e multiplo. 1.1. Unità e molteplicità di fattori. 1.2. Diverse componenti nell'apprendimento della matematica. 1.3. Sapere e saper fare: unicità e differenze. 1.4. Valutare: un processo. 1.5. Intervenire sulla e valutare la specificità di un insuccesso. Capitolo 2. L'apprendimento concettuale. 2.1. Registri di rappresentazione semiotica 2.2. Costruzione della conoscenza. 2.3. Valutare l'apprendimento concettuale. Capitolo 3. L'apprendimento algoritmico 3.1. Algoritmi. 3.2. Algoritmi nella storia della matematica. 3.3. Il pericolo degli algoritmi. 3.4. Valutare l'apprendimento algoritmico. Capitolo 4. L'apprendimento strategico. 4.1. Generalità. 4.2. Esercizi, problemi e zona di sviluppo prossimale. 4.3. Problemi matematici nella storia. 4.4. Valutare l'apprendimento strategico. Capitolo 5. L'apprendimento comunicativo 5.1. Comunicare la mate-

matica. 5.2. Linguaggi della matematica in aula. 5.3. Valutare l'apprendimento comunicativo. Capitolo 6. Apprendimento e gestione delle rappresentazioni semiotiche. 6.1. Ancora sui registri di rappresentazione semiotica. 6.2. Valutare la gestione dei registri semiotici. Conclusione. Bibliografia.

Perché un allievo, in matematica, sbaglia?

Una domanda di questo genere è sulla bocca di tutti, e non solo degli addetti ai lavori in un periodo in cui le valutazioni internazionali hanno fatto suonare qualche campanello d'allarme per la scuola italiana, segnatamente con riferimento alla matematica. Il recentissimo importante volume di Martha Isabel Fandiño Pinilla, studiosa estremamente acuta e originale in didattica della matematica, docente a contratto nelle università di Bologna e Bolzano e presso l'Alta Scuola Pedagogica di Locarno (Svizzera) è condirettrice del Convegno nazionale «Incontri con la matematica» di Castel San Pietro Terme (Bologna), ci invita a non dare risposte troppo spicciative o comunque banali (se non addirittura sbagliate e quindi, purtroppo, dannose) alla domanda con la quale abbiamo aperto questa nota.

Già il titolo del lavoro in esame è assai significativo: *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica*. Qui troviamo dunque l'indicazione esplicita di una complessità spesso colpevolmente elusa nel momento in cui un fallimento in matematica da parte di uno studente viene liquidato con affermazioni quali «non ha capito» oppure «non ha studiato» (o, peggio, la deleteria «non è portato per la matematica!»). Che fare, allora?

Nel sottotitolo del volume, «Valutare e intervenire in modo mirato e specifico», la strada da seguire appare chiarissima: le fasi di valutazione e la conseguente «terapia» devono essere condotte con consapevolezza e attenzione, insomma in termini «mirati», tenendo conto di diversi aspetti rilevanti. Martha Isabel Fandiño Pinilla individua e classifica i campi da esaminare nei cinque seguenti: acquisizione dei concetti, incapacità nella gestione degli algoritmi, mancanza di strategia nella risoluzione dei problemi, inadeguatezze comunicative, difficoltà nella gestione dei registri semiotici. A ciascun argomento viene dedicato un approfondimento specifico.

Il libro di Martha Isabel Fandiño Pinilla è davvero un'opera lucida che sarà certamente utilissima a tutti gli insegnanti e ai ricercatori in didattica della matematica, caratterizzata da uno stile rigoroso e incisivo; è basata su molte ricerche sperimentali da anni condotte dall'Autrice e dai suoi collaboratori nei diversi livelli scolastici; è inoltre corredato da una selezionata bibliografia. (Giorgio T. Bagni)

**Huff D. (2007). *Mentire con le statistiche*. Pescara: Monti e Ambrosini Editori. Pag. 204, euro 15. ISBN 978-8889479-09-4.**

Dalla quarta di copertina: «Finalmente l'edizione italiana di un capolavoro famoso nel mondo». Non è solo il libro sulle statistiche di maggior successo in tutta la storia dell'editoria. Non è solo il testo più chiaro e comprensibile che sia mai stato scritto sull'argomento. È anche oggi, più che mai d'attualità. Non è solo per gli specialisti del settore o per chi ha l'esigenza di studiare e interpretare statistiche, ricerche e sondaggi. È per tutte le persone che desiderano capire meglio il significato di numeri, dati e deduzioni da cui siamo continuamente inondati e confusi. Un testo scien-

---

tificamente corretto, ma di facile lettura. Ironico e divertente, ma molto serio nella sostanza».

Il libro è così strutturato: Premesse all'edizione italiana: 1. Un libro prezioso; 2. Capire con le statistiche. Mentire con le statistiche: Introduzione; 1. Il campione con l'errore incorporato; 2. La media ben scelta; 3. Quei piccoli numeri che non ci sono; 4. Molto rumore per praticamente nulla; 5. Il grafico fantasmagorico; 6. L'immagine monodimensionale; 7. Il numero pseudoconnesso; 8. Il vecchio *post hoc* ritorna in sella; 9. Come statisticolare; 10. Come reagire alle statistiche. *Post scriptum* all'edizione italiana: 1. L'arte di dare una seconda occhiata; 2. Alcune citazioni; 3. Come prima, più di prima.

La prima edizione del libro, dal titolo *How to Lie with Statistics*, risale all'antidiluviano 1954: finalmente è arrivata, con disdicevole ritardo, l'edizione italiana. Mi piace sottolineare che tutte le virtù descritte nella quarta di copertina corrispondono al vero. Il libro si legge con vero piacere (meglio cominciare a leggerlo un venerdì sera: il rischio di coricarsi tardi per arrivare in fondo non è trascurabile) ed è fitto di esempi pronti ad essere rapidamente adattati e utilizzati in classe. (Giorgio Mainini)

Progetto grafico  
Bruno Monguzzi  
Prestampa  
Taiana  
Stampa  
Veladini

Redazione  
Laboratorio di didattica della matematica  
Ufficio dell'insegnamento medio  
Viale Portone 12  
CH-6501 Bellinzona  
Svizzera

Telefono  
091 814 18 21/22/24  
Fax  
091 814 18 19  
[gianfranco.arrigo@span.ch](mailto:gianfranco.arrigo@span.ch)

Amministrazione  
Ufficio dell'insegnamento medio  
Viale Portone 12  
CH-6501 Bellinzona  
Svizzera  
Fax  
091 814 18 19

Esce due volte all'anno  
a maggio e a dicembre

Abbonamento annuo  
SFR 30  
€ 16



In questo numero: un importante articolo di G. Brousseau; due contributi di ricerca operativa di S. Leonesi e P. Hägler; due articoli di didattica di J. Hernandez e S. Sbaragli; curiosità matematiche di A. Steiner e G. Arrigo; una proposta didattica di L. Bellini e A. Bianchi; giochi con A. Frapolli e G. Mainini; una segnalazione e alcune recensioni.

Direzione  
Gianfranco Arrigo

Comitato di redazione  
Aldo Frapolli, Carlo Ghielmetti, Corrado Guidi,  
Paolo Hägler, Giorgio Mainini, Edo Montella,  
Alberto Piatti, Remigio Tartini

Comitato scientifico  
Sergio Albeverio, Giorgio T. Bagni, Giulio Cesare Barozzi, Claudio Beretta, Mauro Cerasoli, S.D. Chatterji, Bruno D'Amore, André Delessert, Colette Laborde, Vania Mascioni, Silvia Sbaragli, Antonio Steiner

ISBN 88-86486-58-8  
Fr. 18.–

Repubblica e Cantone  
Ticino  
Dipartimento dell'educazione,  
della cultura e dello sport