A cura
del Laboratorio di didattica della matematica

Bollettino dei docenti di matematica

58

Maggio
2009

Ufficio
dell’insegnamento medio
Centro
didattico cantonale

Bollettino
dei docenti di matematica
58

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport

ISBN 88-86486-59-6

Bollettino dei docenti di matematica 58

Maggio
2009

Ufficio dell'insegnamento medio
Centro didattico cantonale

Indice

Prefazione

Questo numero apre con la prima parte dell'originale volumetto di Jean-Claude Pont dal titolo «La ballata della mediana e il teorema di Pita-Goron»: la seconda parte seguirà sul prossimo numero. Seguono poi un nuovo contributo storico-epistemologico di Silvio Maracchia, redatto da Piero Antognini, e un interessante articolo di Stefano Leonesi su matematica e meteorologia. Arte e matematica è il tema del quarto articolo presentato dalla coppia Lorenzi-Francaviglia.

Per la didattica si trova un grato ricordo che il Bollettino vuole dedicare a Francesco Speranza a dieci anni dalla scomparsa: la seconda parte seguirà sul prossimo numero. Segue un primo contributo di Gianfranco Arrigo sulla sperimentazione in atto, relativa a un nuovo progetto di insegnamento del calcolo nella scuola elementare.

La sezione Giochi presenta tre cosette simpatiche: l'abituale quiz di Aldo Frapolli, «Apprendere giocando» di Bernardo Mutti e un nuovo P-bam di Giorgio Mainini.

Continuano le passeggiate matematiche di Antonio Steiner e Gianfranco Arrigo. Ritorna la rubrica Dalla Bricolla con un contributo di Giorgio Mainini.

Come sempre si chiude con le segnalazioni e alcune recensioni di novità librarie.

1. La ballata della mediana e il teorema di Pita-Goron Punti di vista sul triangolo rettangolo

Jean-Claude Pont[1]

A H.S.M. Coxeter che ha ridato alla geometria il fascino perduto.

«Si esita a introdurre una nuova classe di oggetti, perché si ha bisogno di uno solo di essi, si esita ancor più a dargli un nome. Solo in un secondo tempo, di fronte alla ripetizione di uno stesso processo, si introduce una classe e un nome (…)». Laurent Schwartz, *Un mathématicien aux prises avec le siècle*, Paris, Editions Odile Jacob, 1997, p. 293.

Starting from an original situation of elementary geometry, in this brief note J. C. Pont proposes us new theorems and new points of view on the rectangular triangle, enriching them with educational, historical and epistemological considerations.

1. Linee direttrici e genesi del testo

Nello stesso tempo elementare e anacronistico, questa opera è nata dall'incrocio di diverse idee e preoccupazioni, provenienti dalla didattica, dall'epistemologia e dalla storia. Nel primo paragrafo, evocando la genesi del testo, ne spiego le particolarità, gli anacronismi, la terminologia, lo stile di redazione.

Insegnavo matematica in un liceo, principalmente a studenti del «corso letterario» (o anche del «classico»); si era vicini al 1970. Questi «letterati» avevano la saggezza di gettare un occhio anche alla matematica, non pochi di loro sono poi diventati matematici, ingegneri o medici. Per aumentare le loro possibilità di intraprendere studi scientifici, avevo organizzato un corso opzionale, per soli volontari. Non era un corso di sostegno, ma un'attività di approfondimento della materia prevista dal programma, allo scopo di sviluppare la curiosità e il gusto per la ricerca. Mi sono messo quindi a cercare un soggetto nuovo, elementare e ludico. Il tema che propongo in questo scritto era concepito inizialmente per soddisfare queste peculiarità. L'occasione mi è stata suggerita da due tipi di riflessioni.

La prima proviene dalla storia della matematica, ambito nel quale allora lavoravo da dilettante. Avevo letto gli articoli del topologo Abraham Seidenberg sulla rivista *Archiv for history of exact sciences* concernenti l'origine rituale della matematica. Mi avevano molto colpito perché mostravano come anche la matematica avrebbe potuto avere un'origine di carattere non economico; questa idea mi aveva suggerito di tenere alcune conferenze su un tema che avevo intitolato genericamente «Matematica, figlia di madre sconosciuta». Per esempio, il problema della quadratura del cerchio, uno dei punti di convergenza della geometria antica, nei testi *Sylvasutras* presentati da Seidenberg, è associato alle costruzioni rituali: costruire tombe, l'una quadrata, l'altra circolare, alla condizione che le aree siano uguali, in modo da soddisfare esigenze di natura «teologica» di quel tempo. L'aspetto rituale è ancor più evidente nel problema della duplicazione

1. Professore onorario di storia e filosofia delle scienze, Università di Ginevra.
jean-claude.pont@unige.ch

del cubo, altro limite geodetico della matematica greca: la prima testimonianza che ci è giunta rivela un'intenzione del genere, esplicitamente associata a un mito.

La seconda riflessione sorge da considerazioni epistemologiche che si sono sviluppate in me progressivamente. L'armonia delle costruzioni, la maestosità dei luoghi, la stranezza delle prospettive che si attribuiscono alle produzioni matematiche mi hanno procurato, e mi procurano ancora, gioie profonde. Profonde ma anche benefiche. Con una perplessità che è andata crescendo: è troppo bello per essere il prodotto del caso in una data situazione. Apriamo il primo manuale che ci capita. Non c'è nessuno, nemmeno la creatura più umile, che non si senta implicata in una fitta rete di relazioni inattese. Mediane che incidono in un punto, bisettrici che seguono l'esempio, altezze e assi che non fanno di meno, c'è di che interrogarsi.

A chi si chiede perché gli oggetti e le teorie della geometria abbiano successo nella vita, si potrebbe rispondere: raggiungono la notorietà solo le creature che sono riuscite; la visibilità in matematica sarebbe dunque del tutto pragmatica. Altro discorso è quello relativo alle componenti nascoste che producono in questi esseri lo slancio vitale che mostrano. La mia opinione è la seguente: gli oggetti matematici, che si distinguono ai nostri occhi mediante proprietà strane, si singolarizzano già fortemente nella loro definizione. Il singolare genera il singolare, che diventa una proprietà ereditaria. Così, l'incidenza degli assi dei lati di un triangolo è uno dei tanti *avatar*[2] della singolarità che sta nell'angolo retto, nel punto medio di un segmento e nella figura del «triangolo»; le ipotesi che stanno alla base di questo teorema (punti, rette, appartenenza, intersezione, angolo retto, ecc.) veicolano un'informazione già ricca. In ogni oggetto matematico è immagazzinato, al momento della definizione, un certo insieme di informazioni che possono apparire per certi versi banali. Secondo un postulato abbastanza plausibile, la derivazione logica conserva l'informazione deformandola. Questa è una visione epistemologica che provoca una sorta di disincanto nei confronti della matematica; in un primo momento questa idea non mi incantò. Poi mi sono consolato: se il mistero perdeva il suo smalto, la bellezza, quella sì che rimaneva, ed era l'essenziale. (Vedere anche il paragrafo 20.)

All'origine di questo lavoro c'è una beffa studentesca. Il Vallese, cantone della Svizzera nel quale si svolge la peripezia che sto narrando, è un cantone di vigne, vignaioli, vino e, direi anche, di risate, per non evitare il pleonasmo. Se l'illustre Pitagora fosse vissuto al sole di questo paese, mi dicevo, avrebbe manifestato qualche inclinazione per la dea bottiglia. Soffrendo talvolta di diplopia, avrebbe considerato triangoli soddisfacenti alla condizione $a^2+b^2=2c^2$, al posto del ferreo $a^2+b^2=c^2$. Ancor prima di acquisirne le proprietà – che non potevano non esistere, visto il «teorema» di epistemologia appena evocato – avevo deciso di qualificarli come *pitagoroniani* e di battezzare *teorema di Pita-Goron* la più centrale delle proprietà. In effetti il Vallese produce un vino popolare chiamato «Goron». Le generalizzazioni che ne sono seguite mi hanno condotto ai triangoli che ho qualificato come rituali per rispetto delle loro origini: altari a base triangolare che dovevano soddisfare a certe condizioni sulle aree, in modo da rispettare determinate gerarchie fra divinità, l'area essendo la traduzione nel mondo sublunare delle loro complesse relazioni. Questi triangoli offrono un campo di ricerca esteso, i cui risultati si distinguono anche per una notevole inutilità.

2. Termine derivato dal sanscrito che significa incarnazione, soprattutto riferita a Visnù.

L'oggetto di questa opera possedeva, mi sembrava, le qualità richieste dall'obiettivo, offrendo la possibilità di motivare i miei studenti con il suo aspetto goliardico. Tuttavia mi accorsi molto presto che avevano bisogno di ben altre cose e quindi mi dedicai da solo a una corta ma intensa esplorazione del mondo *pitagoroniano*. In seguito dimenticai la questione fino al 1984. Durante una conferenza che dovevo tenere in occasione dell'assegnazione del premio Arnold Reymond (vedere la bibliografia), mi ricordai dell'aspetto epistemologico di questo lavoro e subito mi rimisi all'opera. Abbandonai una seconda volta la questione dicendomi che me ne sarei occupato durante il pensionamento. L'adorabile evento si è verificato e mi sono messo a riordinare le note sparse.

Mi sono deciso a pubblicare questo lavoro perché offre un pezzo di geometria divertente e fresca e perché i risultati propri di geometria che nasconde sono, credo, nuovi; pur avendo effettuato ricerche specifiche, non ho trovato alcuna traccia nella letteratura (vedere tuttavia la nota finale). Conformemente allo scopo che mi ero prefissato, ho conservato nella redazione lo stile di un manuale per allievi (motivati); ho anche introdotto qualche commento di natura epistemologica che somministravo volentieri ai miei pazienti, ma che non si trovano affatto sui libri. Sono aspetti scontati per l'insegnante; appartengono in qualche modo ai suoi paradigmi, ma non si esplicitano! L'allievo li impara progressivamente per conto suo, nel migliore dei casi. È peccato sia per la sua padronanza tecnica sia per il suo apprezzamento della matematica. Un libro scritto per gli allievi all'intenzione dei loro insegnanti. Il suo pubblico si definirà in modo tautologico come l'insieme dei lettori che l'avranno letto.

La geometria è come un pianeta che si esplora: si descrive la sua flora e la sua fauna, i suoi corsi d'acqua e le sue montagne. Qui presento una piccola contea, sfuggita alla paziente attenzione dei ricercatori. Il suo sottosuolo non contiene né carbone, né oro, né energia fossile, non ci sono né alte montagne, né vulcani, niente di spettacolare. Assomiglierebbe piuttosto al *pianeta del Piccolo Principe*. Rispetto alle attività matematiche dei nostri giorni, questa ricerca fa pensare a una scampagnata di una domenica di maggio, con tanto di coperta, stappato… il Goron, si ammirano i fiori e ci si sente bene.

Ho potuto beneficiare dei consigli illuminanti dei colleghi e amici:

Maryvonne Spiesser, *maître de conférence* di matematica all'*Institut de mathématiques*, *Université Paul Sabatier, Toulouse*

Gianfranco Arrigo, didatta della matematica, ASP Locarno.

Grégoire Nicollier, docente all'Alta Scuola Pedagogica vallesana.

Marc-André Pichard, già docente di matematica alla Royale Abbaye di Saint-Maurice.

2. Problemi di filosofia della geometria Il punto di vista dell'angelo o il punto visto dall'angelo[3]

Cominciamo col chinarci su questioni fondamentali ed elementari, che non si trattano né nei corsi elementari né nell'insegnamento universitario abituale. Questo silenzio – che è imbarazzante perché queste tematiche sono fra le più complesse –

3. Questo paragrafo può essere saltato in prima lettura.

è spesso all'origine di malintesi, di incomprensioni che complicano il compito degli allievi, senza facilitare quello dei loro insegnanti. È pur vero che si può fare una buona matematica senza preoccuparsi di queste cose. Detto altrimenti, la ragione di questo silenzio inquietante risiede nel fatto che tali questioni provengono dalla filosofia; più precisamente dalla *metafisica*, per la quale i matematici non hanno una grande considerazione. Ricordiamo dapprima che la parte della metafisica che si chiama ontologia si interessa dei problemi dell'essere in quanto tale, in particolare dei problemi legati all'esistenza; si parla dello statuto ontologico di un'entità. L'ontologia è anche legata a ciò che i filosofi chiamano il *senso* e la *referenza*.

Già nei primi contatti con la Geometria, il principiante incontra entità fondamentali, che interverranno nel discorso geometrico: il punto, la retta, il cerchio, il piano, ecc. Più in là gli si insegna a introdurre misure in certe conformazioni geometriche (lunghezza, area, volume, ecc.). Questa associazione fra oggetti geometrici e grandezza (si parla di *numero reale*) dovrebbe far nascere interrogativi. Ancora più in là, quando si introduce l'idea di coordinata, il punto diventa una coppia di numeri reali e la retta miracolosamente un'equazione di primo grado in due variabili, ecc. Come mai un cerchio può essere $x^2+y^2=r^2$ e quella cosa rotonda con la quale si giocava da bambini? O ancora quella che ci faceva sudare a causa della sua tangente o della sua lunghezza?

Allora, che cos'è un punto A? A questa domanda in apparenza banale, il miglior matematico del mondo non può che rispondere: «beh, ebbene, in verità non lo so proprio». Non si deve dimenticare che siamo agli albori di una nuova scienza e che non abbiamo nulla per appoggiarci. Cerchiamo di sbirciare nella natura. Ci sono punti nella natura? Certamente no. Se non si può dire che cos'è un punto, non sarà di meno per due punti, per una retta, ecc. Il grande matematico David Hilbert e il suo collega Giuseppe Peano ci hanno dato alla fine del XIX secolo una soluzione per uscirne: le entità fondamentali della geometria sono definite dall'insieme delle relazioni che queste devono soddisfare; si esprime una definizione implicita che permette di operare con l'entità. Si ritrova una posizione simile nelle scienze fisico-chimiche, nelle quali si definisce un oggetto mediante i procedimenti che permettono di costruirlo. Una soluzione deludente, certo, ma non si ha di meglio. Il punto non ci è dato né da un atto esterno, né da un'intuizione matematica residente in uno dei cromosomi dell'*homo sapiens*, il punto non esiste prima dell'azione del geometra. Non è il caso di continuare con le finezze di questa posizione, fondatrice di ciò che si chiama l'*assiomatica moderna*. È questa posizione filosofica che adotteremo in quest'opera. La chiameremo il *punto di vista dell'angelo*. La Geometria, come viene considerata dall'odierna filosofia della matematica, si identifica con il costruire a parire da idealità che non sono localizzate da nessuna parte e uno spirito puro, diciamo un angelo, deve poter riuscirci anche se non ha mai avuto alcun contatto con il nostro mondo materiale. Degli esseri trattati dalla Geometria, noi non ne sappiamo di più di quello che potrebbe saperne un angelo. Cioè: il punto di vista dell'angelo è il punto di vista dell'angelo.

Prolunghiamo la domanda «che cos'è un punto?». A seconda del contesto può essere una coppia di numeri reali, un essere definito da un insieme di relazioni, una funzione (in uno spazio funzionale), ecc. Il punto è un'entità multicefala, una cosa a geometria variabile. Non c'è modo di considerarlo univocamente. A questo proposito si può riprendere la famosa battuta del logico e filosofo Bertrand Russell: «Così, la matematica può essere definita come quella materia nella quale non si sa mai di che cosa si parla, né se ciò che si afferma è vero[4]».

L'allievo è raramente cosciente della natura molto particolare degli oggetti geometrici e l'insegnante, quando ne è cosciente, dimentica. È così che sui ghiacciai della Geometria spesso si vedono avanzare gruppi di fantasmi – che sarebbero corde se fossero in cordata – che attraversano profondi crepacci, senza rendersi conto delle difficoltà nascoste, se mi si concede l'espressione. Per convincersene basterebbe osservare un bravo matematico mentre accomoda la dimostrazione del teorema 2 del libro 1 degli Elementi di Euclide! Mostrando chiaramente che gli oggetti della Geometria non appartengono alla natura, che non possiamo vederli e che il triangolo che abbiamo sotto gli occhi non è un triangolo, la metafora dell'angelo proposta in precedenza permette di attirare l'attenzione su ciò che è permesso e su ciò che non lo è.

Una volta sistemati gli oggetti fondamentali, dimenticheremo queste noiose discussioni e ci si comporterà come se queste entità fossero oggetti reali con i quali abbiamo dimestichezza, grazie all'attività quotidiana che da tempo intratteniamo con esse. Esistono in virtù di una specie di decreto che abbiamo promulgato. Analogamente, per gli oggetti costruiti a partire da esse: triangolo, cerchio, ecc. Ovviamente conviene dapprima appropriarsi della presenza di questi oggetti e delle loro condizioni di esistenza: non è sufficiente allineare termini geometrici per sperare di fare geometria con gli oggetti che «definiscono». In tale contesto, consideriamo il caso del triangolo. Ci sono sostanzialmente due modi di capire un enunciato come questo: «Sia ABC un triangolo»:

- si *danno* (il senso del verbo necessiterebbe di un'analisi) i vertici A, B, C;
- si *danno* i lati AB, BC, CA.

Si nota una dissimmetria tra i due modi di fare. Mentre nel primo il triangolo è determinato, nel secondo devono essere verificate altre condizioni per garantire l'esistenza del triangolo: come si insegna in geometria elementare, ogni lato dev'essere minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza (*diseguaglianze triangolari*).

Insistiamo. Quando ci si vuol dare alla vera geometria – la Geometria – conviene sapere a priori che il triangolo ABC non è la cosa che abbiamo disegnato sul foglio e che, più generalmente, non c'è alcun triangolo nella natura. Ecco ciò che complica particolarmente la situazione. Ma la verità non ha prezzo!

Per esprimersi con concisione e precisione, il matematico introduce nel suo discorso notazioni e simboli. Ricordiamo alcune di queste notazioni e convenzioni che utilizzeremo nel corso della nostra storia. Rappresenteremo i vertici del triangolo con lettere maiuscole e indicheremo con la stessa lettera minuscola il lato opposto a un dato vertice. Così, i lati del triangolo ABC saranno a=BC, b=AC, c=AB. Quest'ultima convenzione racchiude un'ambiguità di linguaggio: con a intenderemo, a seconda del contesto, sia l'oggetto geometrico stesso sia la lunghezza del lato (il cui quadrato può essere rappresentato dall'area di un… quadrato). Per i vettori, ci serviremo della notazione usuale, sopprimendo la freccia per indicarne la norma.

4. Russell B. (2007). *Mysticisme et logique*. Paris: Vrin. Ripreso da un articolo del 1901.

3. I pitagoroniani esistono, li ho incontrati
Il teorema di Pita-Goron

Il punto di partenza del nostro studio concerne una popolazione di triangoli i cui lati soddisfano una relazione del tipo $a^2+b^2=2c^2$ e che abbiamo convenuto di battezzare *pitagoroniani*. Conformemente a ciò che abbiamo appena detto, cominceremo col chiederci se simili esseri esistono. Consideriamo quindi tre segmenti a, b, c con a=31, b=17, c=25.

Si ha: $17\leq 31+26$, $25\leq 31+17$, $31\leq 25+17$, $17\geq 31-25$, $25\geq 31-17$, $31\geq 25-17$. Le condizioni di esistenza del triangolo sono verificate. D'altronde si ha: $31^2+17^2=2\cdot 25^2$. Il triangolo ABC è pitagoroniano.

Stabilita la loro esistenza, partiamo alla scoperta della *Pitagoronia* e dei suoi abitanti. Costruiamo dapprima gli strumenti che ci permetteranno di setacciare le popolazioni pitagoroniane. Che cosa sappiamo di loro al momento? Sappiamo che per ciascuno di essi vale la relazione fra i lati: $a^2+b^2=2c^2$. Se rimaniamo sul terreno della Geometria, la interpreteremo in termini di aree di superfici fra i quadrati di lato a, b, c. Ma ciò non è di grande aiuto, perché difficile da utilizzare. Esiste un'altra pista, una leggera deviazione, che costituisce una buona ipotesi di lavoro. I triangoli pitagoroniani e quelli rettangoli – che conosciamo bene – hanno un'aria familiare. Supporremo che questa aria familiare ricopra proprietà vicine e più nascoste. Per esplorare questa pista, occorre repertoriare le proprietà del triangolo rettangolo, fra le quali scegliere quella che si presterebbe, dopo una qualche deformazione di dettaglio, a diventare un prolungamento al di fuori del suo ambito di definizione. Il mondo della Pitagoronia è ancora inesplorato e la scelta di una tale proprietà è aperta; dipende dal sentimento di ciascuno. Ho gettato il mio sguardo sulla mediana, della quale si sa che, nel triangolo rettangolo, quella che esce dal vertice dell'angolo retto è la metà dell'ipotenusa. Questa «retta notevole del triangolo», che è la mediana, possiede due proprietà generali – cioè non dipendente dal tipo di triangolo – nelle quali si scorgono gli elementi per un avvicinamento fra triangoli «rettangoli» e «pitagoroniani». La prima consiste nel fatto che le mediane di un triangolo concorrono in uno stesso punto (il centro di gravità del triangolo). La seconda è un simpatico teorema di geometria, oggi un po' dimenticato. Sia un triangolo ABC, m_a la misura della mediana per A; si ha:

$$4\,m_a^2 = 2\left(b^2+c^2\right)-a^2$$

e analogamente per le altre mediane. Questa relazione è promettente perché mette in scena i quadrati dei lati del triangolo. Avviamoci dunque sul terreno delle mediane di un triangolo ed esaminiamo come si comportano. Una particolarità meno classica delle due precedenti attirerà la nostra attenzione: con le tre mediane di uno stesso triangolo, si può sempre costruire un nuovo triangolo che ha queste ultime come lati. Vediamo come lo si stabilisce (figura 1).

Sia $\vec{m}_a$ il vettore determinato dalla mediana uscente da A e passante per il punto medio M1 di BC $\left(\vec{m}_a = \overrightarrow{AM_1}\right)$ e m_a la sua norma, cioè la distanza da A a M_1. Si fa la stessa cosa per $\vec{m}_b$ e $\vec{m}_c$ i vettori determinati dalle mediane uscite rispettivamente dai vertici B e C.

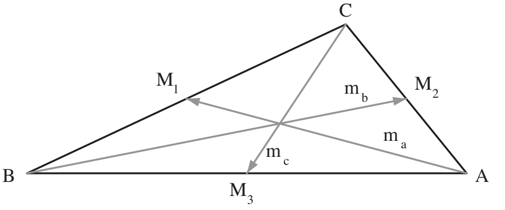


Figura 1

Si ha:

$$\vec{m}_a = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \quad ; \quad \vec{m}_b = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} \quad ; \quad \vec{m}_c = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

Si sommano le tre uguaglianze:

$$\vec{m}_a + \vec{m}_b + \vec{m}_c = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0}$$

Questa relazione esprime, nel linguaggio dei vettori, che esiste un triangolo i cui lati sono uguali alle mediane del triangolo ABC.

È il nostro **Teorema 1**: $\vec{m}_a + \vec{m}_b + \vec{m}_c = \vec{0}$

Il triangolo così ottenuto lo chiamo triangolo delle mediane del triangolo ABC, o anche il suo primo discendente e lo indico Δ_1. Chiamo *genitore* il triangolo ABC.

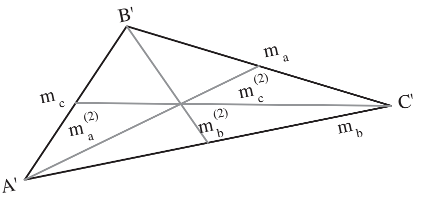


Figura 2a

Se da un qualunque punto A' si conduce un segmento A'B' parallelo e uguale a m_c della figura 1 (figura 2a), poi da B' un segmento B'C' parallelo e uguale a m_a e infine da C' un segmento C'A' parallelo e uguale a m_b, si ottiene un triangolo A'B'C', il primo discendente di ABC.

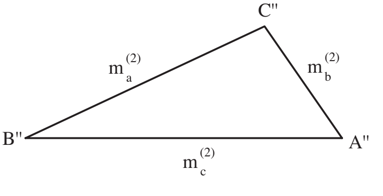


Figura 2b

Indicherò analogamente Δ_2 (o A"B"C") (figura 2b) il triangolo delle mediane di Δ_1, ecc. Quando sarà utile, adotterò la notazione:

$$\vec{m}_a^{(1)}, \vec{m}_b^{(1)}, \vec{m}_c^{(1)}$$

per i tre lati del triangolo Δ_1, ecc., Δ_0 per il triangolo ABC. Il triangolo Δ_n ha allora i lati $m_a^{(n)}$ e le mediane $m_a^{(n+1)}$.

Nella storia genealogica troviamo caratteri che si ripetono, a volte saltando una o più generazioni. Ciò suggerisce di interessarci della successione infinita (solo il nostro angelo è capace di considerare l'intera successione!): $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, ..., \Delta_i, ...$

Iniziamo con il triangolo Δ_2. Tenendo conto dei risultati precedenti si ha:

$$\vec{m}_a^{(2)} = \vec{m}_c + \frac{1}{2}\vec{m}_a = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} =$$

$$= \overrightarrow{CB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$$

Analogamente si ottengono $m_a^{(2)}$ e $\vec{m}_c^{(2)}$. Il triangolo di lati $m_a^{(2)}$, $m_b^{(2)}$, $\vec{m}_c^{(2)}$ è dunque simile al triangolo di lati a, b, c e il rapporto di similitudine è 3/4.

Scegliendo convenientemente si ha anche (// significa «parallelo a»):

$$m_a^{(2n)} \,//\, m_a^{(2n-2)} \,//\, \ldots \,//\, a$$

$$m_a^{(2n+1)} \,//\, m_a^{(2n-1)} \,//\, \ldots \,//\, m_a^{(1)}$$

$$m_a^{(2n)} = \frac{3}{4} m_a^{(2n-2)} = \ldots = \left(\frac{3}{4}\right)^n a$$

Questo è il **Teorema 2**. Si hanno le similitudini di triangoli

1. $\Delta_0 \sim \Delta_2 \sim \Delta_4 \sim ... \sim \Delta_{2n}$
2. $\Delta_1 \sim \Delta_3 \sim \Delta_5 \sim ... \sim \Delta_{2n+1}$

Il rapporto di omotetia è 3/4.

Il teorema permette pure di costruire un triangolo a partire dal suo primo discendente, come indica la figura 3: si costruisce Δ_2, il triangolo delle mediane del triangolo dato A'B'C'. Si utilizza la similitudine tra Δ_2 e Δ, il cui rapporto è 3/4.

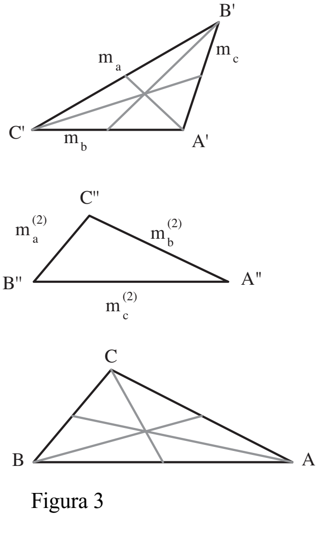


Figura 3

A Pitagoronia, gli abitanti si riconoscono per un tratto caratteristico, che sono i soli ad averlo, come i Baschi il loro berretto o i Vallesani le loro grandi cantine. Il gene che li distingue dai loro simili nel regno dei triangoli ha questo di notevole, che è codificato come proprietà ereditaria esclusiva, tramandata di generazione in generazione. Chiamo questa proprietà *teorema di Pita-Goron*.

Teorema 3. Un triangolo ABC i cui lati soddisfano l'uguaglianza $a^2+b^2=2c^2$ è simile al suo primo discendente.

Dimostrazione. Sia $a^2+b^2=2c^2$. Si ha: $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}$

$$4\,m_a^2 = 2\,b^2 + 2\,c^2 - a^2 = 2\,b^2 + \left(a^2+b^2\right) - a^2 = 3\,b^2$$

Così $m_a = \frac{\sqrt{3}}{2}\,b$; e analogamente $m_b = \frac{\sqrt{3}}{2}\,a$ e $m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}\,c$

Teorema 4. Se un triangolo è simile al suo primo discendente, allora il rapporto di similitudine è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Dimostrazione. Consideriamo una similitudine di rapporto μ tra Δ_0 e Δ_1. Scriviamo che la somma dei quadrati delle mediane è proporzionale alla somma dei quadrati dei lati omologhi presi in un ordine qualsiasi: $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \mu^2\left(a^2+b^2+c^2\right)$. Si ha:

$$2\left(a^2+b^2\right)-c^2+2\left(a^2+c^2\right)-b^2+2\left(b^2+c^2\right)-a^2 = 4\,\mu^2\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$3\left(a^2+b^2+c^2\right) = 4\,\mu^2\left(a^2+b^2+c^2\right);\ \mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

All'inizio di questa ricerca avevo osservato, fra l'altro, che era verificata anche l'uguaglianza $a^2+b^2=0$, come sarebbe il caso nel corpo dei numeri complessi. Ma era stato solo per scrupolo. Non dico quale fu la mia sorpresa, e il piacere, quando scoprii, non so per quale gioco del caso, l'articolo di Edward Kasner che cito nel paragrafo 19.3 e in bibliografia.

Osservazione

Prima di considerare il reciproco del teorema 3, è opportuno osservare che vi sono più similitudini possibili fra un triangolo e il suo primo discendente.

Reciproco del teorema 3. Se un triangolo è simile al suo primo discendente, allora è pitagoroniano.

Dimostrazione.

1. Sia $\Delta_0 \sim \Delta_1$ con $a \sim m_b$, $b \sim m_a$, $c \sim m_c$. Per il teorema 4 si ha $\frac{m_c}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Da cui:

$$\frac{1}{4}\left(2\,a^2+2\,b^2-c^2\right) = \frac{3}{4}\,c^2 \quad \text{e} \quad a^2+b^2 = 2\,c^2$$

Le altre proporzioni conducono a risultati analoghi.

2. Sia $\Delta_0 \sim \Delta_1$ con $a \sim m_b$, $b \sim m_c$, $c \sim m_a$.
Si ha per ipotesi $a = k\, m_b$, $b = k\, m_c$, $c = k\, m_a$; sia $\frac{a}{c} = \frac{m_b}{m_a}$ (1) e $\frac{b}{c} = \frac{m_c}{m_a}$ (2).

L'uguaglianza (1) implica: $\frac{a}{c} = \frac{\sqrt{2\left(a^2+c^2\right)-b^2}}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}}$

sia ancora:

$$a^2\left[2\left(b^2+c^2\right)-a^2\right] = c^2\left[2\left(a^2+c^2\right)-b^2\right]$$

$$2\,a^2\,b^2 - a^4 = 2\,c^4 - b^2\,c^2 \quad (3)$$

L'uguaglianza (2) implica: $\frac{b}{c} = \frac{\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}}$,

cioè $2\,b^4 - a^2\,b^2 = 2\,a^2\,c^2 - c^4$ (4)

Addizionando le uguaglianze (3) e (4):

$$a^4 + c^4 + 2\,a^2\,c^2 = a^2\,b^2 + b^2\,c^2 + 2\,b^4$$

o anche $\left(a^2+c^2\right)^2 = b^2\left(a^2+c^2+2\,b^2\right)$

Poniamo $\alpha = a^2 + c^2$; otteniamo $\alpha^2 - b^2\,\alpha - b^4 = 0$, da cui $\alpha = 2\,b^2$
e $a^2 + c^2 = 2\,b^2$ (5)

La simmetria che si osserva nell'ipotesi conduce a
$a^2 + b^2 = 2\,c^2$ (6) $b^2 + c^2 = 2\,a^2$ (7)

Per sottrazione fra le uguaglianze (5) e (6), (6) e (7) si ottiene: $a=b=c$, dunque il triangolo è equilatero. È facile dimostrare che il triangolo equilatero è pitagoroniano.

Possiamo ora enunciare il ***teorema di Pita-Goron***: **un triangolo è simile al suo primo discendente se e solo se è pitagoroniano.**

4. Triangoli rettangoli pitagoroniani

Siamo ora in presenza di due popolazioni di triangoli, ciò che ci spinge naturalmente a chiederci se i due insiemi sono disgiunti. In altre parole, esistono triangoli rettangoli e nello stesso tempo pitagoroniani? Incontreremo nel seguito un teorema che mostra geometricamente l'esistenza di tali individui. Per ora accontentiamoci di applicare un po' di algebra alle due condizioni che definiscono un tale triangolo:

$a^2 + b^2 = 2\,c^2$ e $a^2 = b^2 + c^2$

Combinando queste uguaglianze, otteniamo successivamente:

$$b^2 = a^2 - c^2\ ,\quad a^2 = \frac{3}{2}c^2\ ,\quad b^2 = \frac{1}{2}c^2\ ,\quad \frac{a^2}{b^2} = 3\ ,\quad \frac{c^2}{b^2} = 2$$

Nel caso in cui e si ha: $a^2 - b^2 = c^2$ e $a^2 + b^2 = n\,c^2$

si ha $\dfrac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = n$

Osservazioni

1. Non esistono triangoli rettangoli pitagoroniani con tre lati interi. Infatti le relazioni precedenti danno:

$$a = b\sqrt{3},\quad c = b\sqrt{2},\quad a = \sqrt{\frac{3}{2}}\,c$$

2. Per triangoli pitagoroniani a lati interi, si ha l'equazione diofantina $a^2 + b^2 = 2\,c^2$. Le soluzioni di questa equazione sono date[5] da:

$$a = r^2 - s^2 + 2\,r\,s\ ;\ b = \pm\left(r^2 - s^2 - 2\,r\,s\right)\ ;\ c = r^2 + s^2$$

(con r, s interi qualsiasi, ma tali da rendere interi x, y e z).
Per esempio, per $r=3$ e $s=2$: $a=17$, $b=7$, $c=13$.
Per $r=4$ e $s=3$: $a=31$, $b=17$, $c=25$.

5. I triangoli rituali. Relazioni geometriche

La forza produttrice della matematica risiede nell'attitudine alla generalizzazione. Qui, la generalizzazione naturale consiste, dopo aver considerato i triangoli per i quali $a^2 + b^2 = c^2$ e $a^2 + b^2 = 2\,c^2$, nel definire triangoli i cui lati soddisfano la condizione $a^2 + b^2 = n\,c^2$ ($n \in N^*$). Ovviamente questa esplorazione presuppone che tali triangoli esistano per ogni valore di n. Per ora ammettiamo che sia così (vedere Corollario 1). È una generalizzazione anche suggerita dalle condizioni del paragrafo 1. A questo proposito, citiamo due grandi matematici. Georg Cantor diceva che «l'essenza della matematica risiede nella libertà». Da parte sua, Laurent Schwartz, che abbiamo incontrato nella citazione iniziale, osservava: «Si esita a introdurre una nuova classe di oggetti perché se ne ha bisogno di uno solo, si esita ancor più a darle un nome. È solo più tardi, di fronte alla ripetizione dello stesso processo, che si introduce una classe e un nome (…)[6]».

Conformemente alle idee sviluppate nel paragrafo 1, chiameremo *triangolo virtuale di ordine n*, e lo indicheremo con $\theta(a,b,c;n)$, un triangolo i cui lati a, b, c soddisfano la condizione $a^2 + b^2 = n\,c^2$ ($n \in N^*$).

5. Archibald R. G. (1970). *An introduction to the theory of numbers*. Colombus Ohio: Charles E. Merrill Publishing Co.
6. Schwartz L. (1997). *Un mathématicien aux prises avec le siècle*. Paris: Editions Odile Jacob.

Nei triangoli rituali $\theta(a,b,c;n)$, i tre lati a, b, c giocano ruoli particolari. I lati a e b sono intercambiabili; in termini tecnici si dirà che lo scambio di a e di b lascia invariata la relazione $a^2+b^2=n\,c^2$. Simili a cloni, non si distinguono che dalla loro situazione «geografica» e dalla loro denominazione. Il lato c, al contrario, esegue una partitura da solista e impegna gli altri in una relazione modulata dall'intero n. Ho deciso di chiamare a e b *isopotes*, c *mésopotes*[7]. Il coefficiente di c^2 lo chiamo *coefficiente rituale*.

I pitagoroniani sono dunque triangoli rituali di ordine 2 e i triangoli rettangoli rituali di ordine 1. In questo caso, gli *isopotes* diventano cateti e il *mésopotes* ipotenusa.

Ci dedicheremo a un'esplorazione del mondo dei triangoli rituali e ci interesseremo alla natura dei loro discendenti, a quelli che si presentano come triangoli particolari. Iniziamo col chiederci a quale condizione Δ_1 potrebbe essere rettangolo con, diciamo $m_a \perp m_b$, [nella nostra notazione: $\theta(m_a,m_b,m_c;1)$].

Poniamo dunque l'ipotesi che m_a è perpendicolare a m_b. Per il teorema di Pitagora, abbiamo $m_c^2 = m_a^2 + m_b^2$ e applicando il teorema della mediana:

$$\frac{1}{4}\left[2\left(b^2+a^2\right)-c^2\right]=\frac{1}{4}\left[2\left(b^2+c^2\right)-a^2\right]+\frac{1}{4}\left[2\left(a^2+c^2\right)-b^2\right]$$

Semplificando si ottiene: $a^2+b^2=5\,c^2$

Questo è il **Teorema 5a**. Se Δ_1 è rettangolo, con $m_a \perp m_b$, allora $\theta(a,b,c;5)$.

Vale anche il reciproco?

Sia dunque $a^2+b^2=5\,c^2$:

$$4\,m_c^2 = 2\,a^2+2\,b^2-c^2 = 10\,c^2-c^2 = 9\,c^2 \quad \text{e} \quad m_c = \frac{3}{2}c$$

Dalla similitudine $\Delta_0 \sim \Delta_2$ con $k=\frac{3}{4}$, si ha $m_c^{(2)} = \frac{3}{4}c = \frac{1}{2}m_c$

Ora, se una mediana di un triangolo è la metà di un lato, il triangolo è rettangolo e la mediana citata è quella relativa all'ipotenusa.

Abbiamo raggiunto il **Teorema 5b**. Se $\theta(a,b,c;5)$, allora Δ_1 è rettangolo con $m_a \perp m_b$.

Ora siamo in grado di enunciare il **Teorema 5**. Un triangolo è rituale di ordine 5 relativamente al suo lato c se e solo se il suo primo discendente (relativamente ai lati a e b) è rettangolo: $\theta(a,b,c;5) \Leftrightarrow m_a \perp m_b$ [cioè: $\theta(m_a,m_b,m_c;1)$].

I triangoli $\theta(a,b,c;5)$ partecipano alla vita generale dei triangoli e a quella dei rituali, ma hanno anche la loro propria vita, grazie alla proprietà di avere due mediane perpendicolari, ossia un discendente rettangolo.

Alcune relazioni sui triangoli rituali

Nel triangolo rituale di ordine n si ha

$$m_a{}^2+m_b{}^2+m_c{}^2=\frac{3}{4}(n+1)\,c^2 = 3\,\frac{n+1}{4\,n}\left(a^2+b^2\right)$$

7. Termini prestati al liguaggio francese. *Pote* significa amico.

Dimostrazione

a) Sia un triangolo $\theta(a,b,c;n)$ di mediane m_a,m_b,m_c

$$4\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2\right)=2\left(b^2+c^2\right)-a^2+2\left(a^2+c^2\right)-b^2+2\left(a^2+b^2\right)-c^2$$

$$=3\,a^2+3\,b^2+3\,c^2=3\,n\,c^2+3\,c^2$$

da cui $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(n+1)\,c^2$

b) Sostituendo c^2 con $\frac{a^2+b^2}{n}$ si ottiene:

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2=3\,\frac{n+1}{4\,n}\left(a^2+b^2\right)$$

Corollario

Nel triangolo rituale di ordine 3 si ha:
$m_a^2+m_b^2+m_c^2=a^2+b^2$

Applicazioni

1. Costruire 5 segmenti tali che la somma dei quadrati dei primi due è uguale alla somma dei quadrati degli altri tre.
   Si costruisce un triangolo $\theta(a,b,c;3)$ e si applica il teorema relativo alla somma dei quadrati delle mediane.
2. Costruire 4 segmenti tali che il doppio del quadrato del primo è uguale alla somma dei quadrati degli altri tre.
   Si procede analogamente con il triangolo isoscele.
3. Costruire due triangoli tali che l'area dei quadrati costruiti sul primo sia uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti su due lati del secondo.

$m_a^2+m_b^2+m_c^2=a^2+b^2$ e $b^2+c^2=a^2$,

cioè $c^2+2\,b^2=m_a^2+m_b^2+m_c^2$.

Il triangolo rettangolo permette di definire le funzioni trigonometriche. La parentela che abbiamo supposto esista fra questi e i triangoli rituali ci spinge a esaminare gli angoli di questi ultimi. I triangoli rituali sono prima di tutto triangoli e si possono quindi usare le formule della trigonometria, in particolare il teorema del coseno, ben presente in questo contesto.

Teorema 6. Sia $\theta(a,b,c;n)$. Si ha:

$$\cos A=\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\,\frac{1-n}{2} \quad \text{e} \quad \cos C=\frac{n-1}{2\,n}\,\frac{a^2+b^2}{a\,b}$$

Dimostrazione

i) $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos A$ (teorema del coseno) e $a^2 + b^2 = n\,c^2$ implicano:

$$b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos A = -b^2 + n\,c^2 \quad \text{e} \quad \cos A = \frac{b}{c} + \frac{c}{b}\,\frac{1-n}{2}$$

ii) $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos C$ e $a^2 + b^2 = n\,c^2$ danno:

$$\frac{a^2 + b^2}{n} = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos C \quad \text{e} \quad \cos C = \frac{n-1}{2\,n}\,\frac{a^2 + b^2}{a\,b} = \frac{n-1}{2}\,\frac{c^2}{a\,b} \quad \text{(qed)}$$

Quando a=b, il teorema 6 diventa: $\cos C = \dfrac{n-1}{n} = 1 - \dfrac{1}{n}$

Per n=1 si ha cos C=0, è il caso del triangolo rettangolo. È come se 1/n misurasse il grado di «non pitagoricità» del triangolo; metaforicamente si potrebbe dire che effettivamente più n è grande in $\theta(a,a,c;n)$ meno il triangolo è rettangolo. In termini tecnici, nel triangolo rituale isoscele di ordine n, l'angolo in C è una funzione decrescente di n.

6. Cerchi rituali

Faremo conoscenza con una figura associata al triangolo rituale e che ci porterà interessanti informazioni su questa famiglia di triangoli. Ci facciamo ancora condurre da un'analogia con il triangolo rettangolo, che ha la particolarità di essere iscrittibile in un semicerchio. In altre parole, il luogo geometrico del vertice di un triangolo rettangolo di data ipotenusa è un cerchio che ammette l'ipotenusa come diametro. La questione è dunque di sapere, dato il lato c e l'intero n, qual è il luogo geometrico del vertice C dei triangoli $\theta(a,b,c;n)$. Il teorema 7 dà la risposta.

Teorema 7. Il luogo geometrico del vertice C di un triangolo rituale $\theta(a,b,c;n)$ è un cerchio di raggio $r = \frac{c}{2}\sqrt{2\,n-1}$, centrato nel punto medio del lato c.

Chiamo questo cerchio il *cerchio rituale di ordine n*. Lo indico con $K^{(n)}(c)$.

Dimostrazione

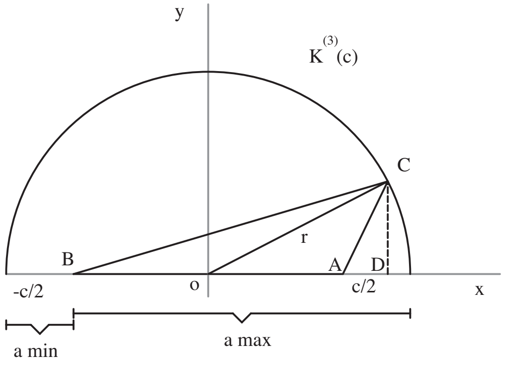


Figura 4

Scegliamo gli assi delle coordinate come indicato nella figura 4 e applichiamo il teorema di Pitagora ai triangoli ACD e BCD:

$$AC^2 = \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 \ (1) \quad \text{e} \quad BC^2 = \left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 \ (2).$$

Siccome $AC^2 + BC^2 = n\,AB^2$ per ipotesi, si ha:

$$\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 + \left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 = n\,c^2 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}\left[4\,x^2 + 4\,y^2 - (2\,n - 1)\,c^2\right] = 0$$

Semplificando:

$x^2 + y^2 = \dfrac{2\,n-1}{4}\,c^2$, che è l'equazione del cerchio cercato.

In particolare, per n=1 si ha $r = \frac{1}{2}\,c$, che è la caratteristica del triangolo rettangolo ricordato sopra.

Il cerchio rituale associato al triangolo rituale è come una tettoia che ricopre l'insieme della popolazione e che, in qualche modo, ci permette di vedere tutta la famiglia. Quando il matematico ha la fortuna di disporre di una simile figura associata – che è una specie di strumento matematico – ma che appartiene a un'altra categoria, la sfrutta, a partire dall'idea che riveleranno sia gli individui estremi sia le proprietà comuni.

Corollario 1

Dato c, per ogni intero positivo n esiste un'infinità di triangoli $\theta(a,b,c;n)$.

Corollario 2

La figura 4 ci insegna che $m_c = r = \frac{c}{2}\sqrt{2\,n-1}$. Si può beninteso redigere una prova dal punto di vista dell'angelo.

Corollario 3

La figura ci suggerisce ancora che in $\theta(a,b,c;n)$, dati c e n, la lunghezza del lato a varia tra due valori estremi che indicheremo a_{max} e a_{min}:

$$a_{max} = \frac{c}{2}\left(\sqrt{2\,n-1} + 1\right) \text{ e } a_{min} = \frac{c}{2}\left(\sqrt{2\,n-1} - 1\right)$$

Corollario 4

Nel triangolo rituale $\theta(a,b,c;3)$, a_{max} e a_{min} sono rispettivamente i lati del decagono regolare stellato e di quello convesso, iscritti in un cerchio di raggio c. Per n=3 e c=1, è il numero aureo: $\frac{c}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right)$.

Corollario 5

Se a è il piede della perpendicolare da C su AB, il triangolo ABC è simultaneamente rettangolo e rituale. In questo caso, il lato a è *isopote* o ipotenusa, b *isopote* o cateto, b *mésopote* o cateto.

Corollario 6

Il luogo dei centri di gravità di un triangolo rituale θ(a,b,c;n) è un cerchio, centrato nel punto medio di c e di raggio $\rho = \frac{c}{6}\sqrt{2\,n-1}$.

Corollario 7

Consideriamo la successione di triangoli isosceli θ(a,a,2;n) e chiamiamo (vedere figura 5) $a_{(1)}, a_{(2)}, ..., a_{(n)}$ i lati a successivi di questa successione $h_{(1)}, h_{(2)}, ..., h_{(n)}$ e le altezze successive incidenti i vertici C: $C_{(1)}, C_{(2)}, ..., C_{(n)}$.

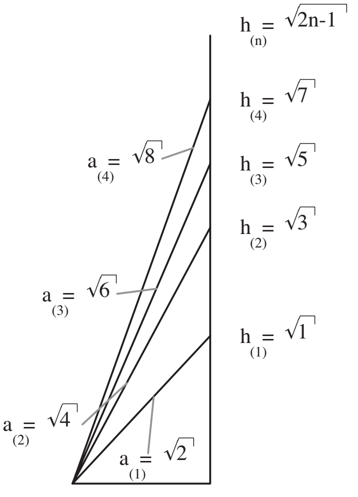


Figura 5

Si ha:

a) $a_{(n)} = \sqrt{2\,n}$ e $h_{(n)} = \sqrt{a_{(n)}^2 - 1} = \sqrt{2\,n-1}$

b) $\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{2\,n-1}{2\,n}}$. Con $\cos(2\,z) = \cos^2 z - 1$: $\cos C = 2\,\frac{2\,n-1}{2\,n} - 1 = \frac{n-1}{n}$

Nel triangolo θ(a,a,2;n), le altezze e uno dei lati incidenti C, preso alternativamente, sono dunque le radici degli interi successivi: $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, ..., \sqrt{n}, ...$

Il coseno dell'angolo C cresce come i rapporti degli interi successivi:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ..., \frac{n-1}{n}, ...$$

Siccome $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, si ha $\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2\,n}$.

7. Parallelogrammi e cerchi rituali

Sia θ(a,b,c;n). Si completa il triangolo (vedere figura 6) in modo da ottenere un parallelogrammo avente le diagonali c e c'; chiamo questo parallelogrammo *rituale*.

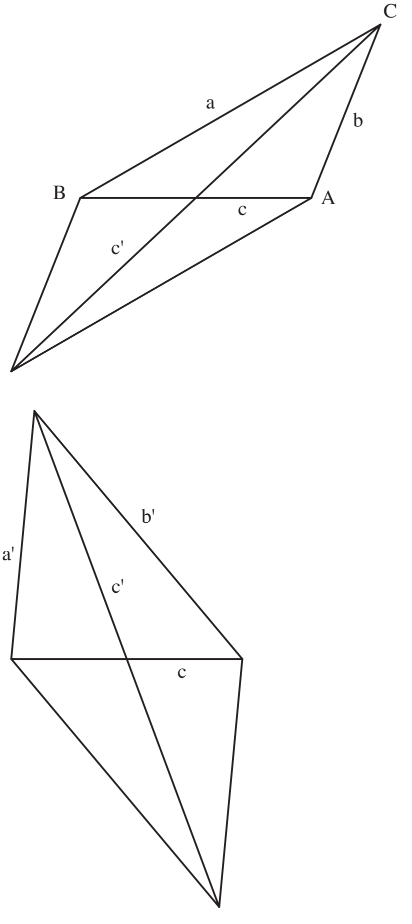


Figura 6

Conformemente con la terminologia introdotta nel paragrafo 5, chiamo *mésopotes amici* i lati come c e c' che sono diagonali di parallelogrammi rituali. Consideriamo un secondo parallelogrammo di diagonali c, c' e di lati a', b'. Per una nota proprietà delle diagonali di un parallelogrammo[8]:

$$2\left(a^2+b^2\right)=c^2+c'^2 \quad \text{e} \quad 2\left(a'^2+b'^2\right)=c^2+c'^2$$

da cui:

$$a^2+b^2=a'^2+b'^2=\frac{1}{2}\left(c^2+c'^2\right), \quad 2\,n\,c^2=c^2+c'^2 \quad \text{e} \quad c'=c\sqrt{2\,n-1}$$

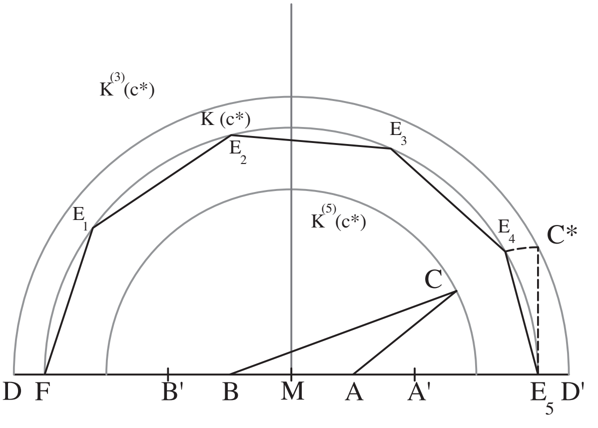
Si ha in particolare per n=5, c'=3 c. Reciprocamente, se c'=3 c in un parallelogrammo di lati a, b e di diagonali c, c', si ha $2(a^2+b^2)=c^2+9\,c^2$, cioè $a^2+b^2=5\,c^2$. Ne segue la costruzione di un triangolo rituale di ordine 5: dal punto medio M del lato c=AB, si traccia un segmento CC' con CC'=3 c.

8. In un parallelogrammo la somma dei quadrati dei lati è uguale alla somma dei quadrati delle diagonali.

Osservazione

Questo risultato fornisce una nuova dimostrazione del teorema 7. Se n e c sono fissati, a partire da $c' = c\sqrt{2n-1}$, si ottiene che il luogo del vertice C del parallelogrammo di diagonali c e c' è un cerchio di raggio $\frac{c}{2}\sqrt{2n-1}$.

8. Cerchi rituali coniugati e decagoni regolari



$K(M, MC) : K^{(5)}(c)$

$X_{c^*} = BC$; $y_{c^*} = AC$; $MB' = MA' = c^*/2 = c$

$K(M, MC^*) : K^{(3)}(c^*)$

$B'D = a_{min}(K^{(3)}(c^*))$; $MF = c''$

$FE_1 = E_1 E_2 = ... = E_9 E_{10} = B'D$

Figura 7

Sia $K^{(n)}(c)$ il cerchio rituale di ordine n corrispondente al triangolo $\theta(a,b,c;n)$; il suo raggio è $\frac{c}{2}\sqrt{2n-1}$. Nella figura 7 si ha $AC^2 + BC^2 = n\, AB^2$.

Consideriamo il cerchio di centro B e di raggio passante per il punto C* di coordinate

$$x_{C^*} = BC, \quad y_{C^*} = AC:$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2 = n\, c^2$$

Scegliendo opportunamente c*, per quali p si può avere $\theta(a',b',c^*;p)$?
Il cerchio rituale corrispondente $K^{(p)}(c^*)$ avrà il raggio

$$\rho' = \frac{c^*}{2}\sqrt{2p-1}.$$

Uguagliando ρ e ρ', si ha: $c\sqrt{n} = \frac{c^*}{2}\sqrt{2p-1}$

e identificando c*=2 c e n=2 p – 1, risulta $p = \frac{n+1}{2}$.

Si ottengono così coppie di cerchi che chiamerei coniugati: n=3, p=2; n=5, p=3; n=7, p=4, ...

Quando n=5 e p=3, si ha $a_{min} = \frac{c^*}{2}\left(\sqrt{2p-1}-1\right)$,

che è il lato del decagono regolare inscritto nel cerchio di raggio c*. La figura 8 illustra il procedimento di *costruzione* associato. I dati scelti sono: n=5, c=4. Per il decagono stellato si sostituisce B'D con B'D'.

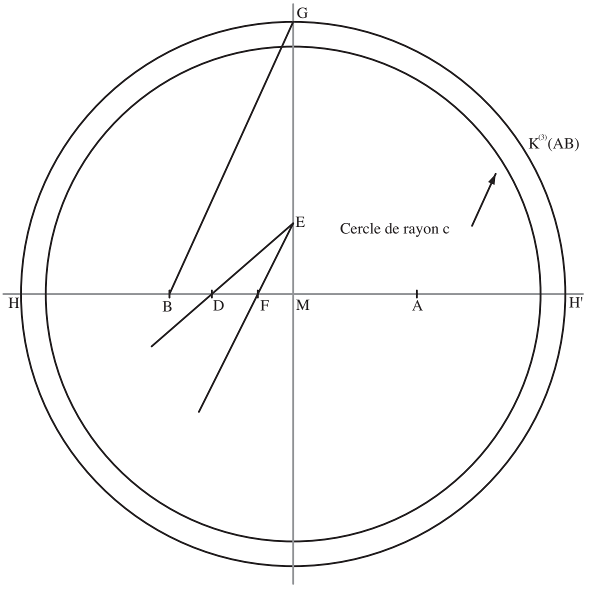


Figura 8

I risultati precedenti suggeriscono un altro metodo per la *costruzione* del decagono regolare (vedere figura 9). Nel triangolo θ(a,b,c;3), a_{min} e a_{max} sono ordinatamente i lati del decagono regolare convesso e stellato, inscritti nel cerchio di raggio c. In questo triangolo si ha:

$\cos C = \frac{p-1}{2p}\frac{a^2+b^2}{a\,b}$, che diventa per a=b e p=3: cos C=2/3.

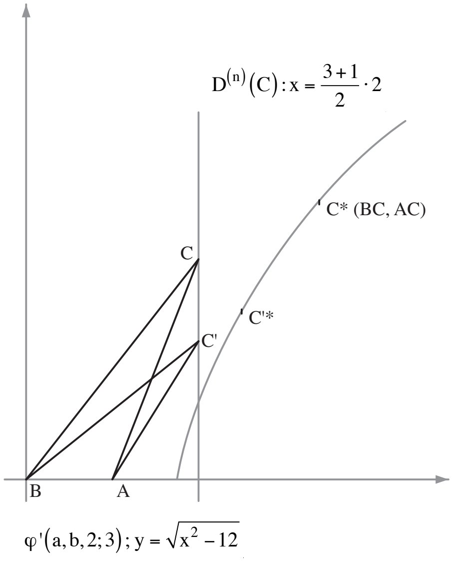


Figura 9

Su AB qualsiasi (=c) si costruisce un angolo DEM il cui coseno è 2/3, poi la bisettrice EF. Da B si conduce la parallela a EF; essa interseca il prolungamento di ME in G. G è un punto del cerchio $K^{(3)}$ (AB). Per questo cerchio rituale, si ha a_{min} = BH, che è anche il lato del decagono convesso inscritto nel cerchio di raggio AB. Parallelamente, BH' è il lato del decagono stellato.

Osservazioni

1. Il verbo «costruire» in geometria ha un significato preciso e particolare. Per ragioni tutt'altro che evidenti, una costruzione deve effettuarsi con i soli strumenti riga e compasso; ma questi, a loro volta, sono soggetti a condizioni strette, che causano la perdita di parte della loro potenzialità. Nel mondo sublunare sono pallidi rappresentanti degli oggetti geometrici che i Greci ritenevano eterni e immutabili. Sono come marionette comandate da un insieme di precetti – gli assiomi –, che li dirigono con il massimo rigore. Così, quando si depone il compasso per eseguire un'altra costruzione, occorre *chiuderlo*. Se non si sono rispettate queste esigenze si sono commessi errori. In senso stretto, il compasso e la riga non sono che oggetti succedanei, senza alcuna pertinenza in Geometria. Il punto di vista dell'angelo chiarirà ulteriormente questo aspetto: un angelo può manipolare assiomi, non strumenti come la riga o il compasso.
2. Ci si chiederà in quale misura i due metodi che ho proposto soddisfano pienamente le esigenze della costruzione che abbiamo appena presentato. I metodi che ho impiegato in questo scritto non provengono dalla geometria pura. Sono «contaminati» da elementi parassita di algebra, di geometria analitica, di trigonometria.

9. Due teoremi sui triangoli rituali

Continuiamo la nostra esplorazione dell'universo dei triangoli rituali. È abbastanza naturale chiedersi se in Pitagoronia o nel continente dei rituali esiste una sotto-popolazione i cui discendenti siano a loro volta rituali. In termini più precisi, si vorrebbe avere simultaneamente $\theta(a,b,c;k)$ $(k\in N^*)$ e $\theta(m_a,m_b,m_c;p)$ $(p\in N^*)$.

a) Supponiamo dunque che si abbia $\theta(m_a,m_b,m_c;p)$, cioè $m_a^2+m_b^2=p\,m_c^2$: da cui:

$$2\left(b^2+c^2\right)-a^2+2\left(a^2+c^2\right)-b^2=p\left(2\,a^2+2\,b^2-c^2\right)$$

$$a^2+b^2=\frac{4+p}{2\,p-1}\,c^2$$

b) Inversamente, sia $a^2+b^2=\dfrac{4+p}{2\,p-1}\,c^2$. Si ha allora:

$$m_a{}^2+m_b{}^2=\frac{1}{4}\left(a^2+b^2+4\,c^2\right)$$

o, dall'ipotesi:

$$m_a{}^2+m_b{}^2=\frac{1}{4}\left(\frac{4+p}{2\,p-1}\,c^2+4\,c^2\right)=\frac{c^2}{4}\,\frac{9\,p}{2\,p-1} \quad (1)$$

D'altra parte:

$$m_c{}^2=\frac{1}{4}\left(2\,a^2+2\,b^2-c^2\right)=\frac{1}{4}\left[\frac{2\,(4+p)}{2\,p-1}\,c^2-c^2\right]=\frac{c^2}{4}\,\frac{9}{2\,p-1} \quad (2)$$

Da (1) e (2) si ottiene: $m_a^2+m_b^2=p\,m_c^2$
Enunciamo dunque il

Teorema 8.

$$m_a{}^2+m_b{}^2=p \qquad \theta\left(a,b,c;\frac{4+p}{2\,p-1}\right)\Leftrightarrow\theta\left(m_a,m_b,m_c;p\right),\left(p\in N^*\right)$$

In parole: se in un triangolo del tipo $\theta(a,b,c;n)$, n è un intero della forma

$$\frac{4+p}{2\,p-1},$$

con p intero, allora il triangolo delle mediane, o primo discendente, è un triangolo rituale di ordine p, e inversamente.

Ma i presupposti della nostra inchiesta erano che il genitore sia della famiglia dei rituali, cioè che

$\dfrac{4+p}{2\,p-1}$ sia un intero. Questo fatto non può realizzarsi che per $p\leq 5$.

Le sole possibilità sono:

- p=1 e $\frac{4+p}{2p-1}$, con $\theta(\Delta_0;5)$ e $\theta(\Delta_1;1)$;
- $\frac{4+p}{2p-1}=1$ e p=5, con $\theta(\Delta_0;1)$ e $\theta(\Delta_1;5)$. Così il triangolo delle mediane di un triangolo rettangolo è rituale di ordine 5;
- p=2 e $\frac{4+p}{2p-1}=2$; ritroviamo il teorema di Pita-Goron camuffato; infatti, per i pitagoroniani, il triangolo di partenza è simile a quello delle sue mediane, cioè si ha $\theta(\Delta;2)$.

Così, i soli rituali il cui genitore è rituale sono di ordine 1, 2 o 5.

10. L'angelo alle prese con la variazione dell'angolo A nel triangolo rituale

Consideriamo un triangolo rituale $\theta(a,b,c;n)$ rapportato a un sistema di referimento ordinario, il cui asse x è sul lato c e l'origine nel punto medio di c (vedere figura 4). Il calcolo delle distanze AB, BC, CA secondo le formule ordinarie della geometria analitica dà:

$$a=\sqrt{\frac{c\left(nc+2x\right)}{2}} \quad \text{e} \quad b=\sqrt{\frac{c\left(nc-2x\right)}{2}}$$

In questo paragrafo ci collocheremo nel punto di vista dell'angelo. Introduciamo questi valori nel teorema del coseno[9]:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\left(n-1\right)c}{\sqrt{n^2c^2-4x^2}}$$

Studiamo questa funzione, che indicheremo con $\gamma_{(n)}(x)$ per $0\leq x\leq r$.
Il suo insieme di definizione Df è determinato dalla condizione
$n^2c^2-4x^2<0$, cioè

$$-\frac{1}{2}nc<x<\frac{1}{2}nc$$

L'angelo sa, per ragioni che definiremo «geometriche», ma che per lui provengono dall'analisi, che x dev'essere minore del raggio del cerchio rituale. Ciò assegna alla funzione un insieme di definizione che attiene alla natura del luogo geometrico, non alle esigenze dell'analisi; questo insieme di definizione lo indicheremo Df_g; è definito dall'intervallo $x\leq\frac{c}{2}\sqrt{2n-1}$.

9. Al teorema del coseno, che stabiliamo a partire dalla concezione abituale della Geometria, l'angelo può arrivarci per vie puramente analitiche, il cui sviluppo non entra in questa sede.

La disuguaglianza $\frac{c}{2}\sqrt{2\,n-1} < \frac{1}{2}\,n\,c$ è sempre soddisfatta e si deduce: $Df_g \subset Df$.

Dal nostro punto di vista, di umani mortali, non c'è bisogno di analisi per *vedere* che quando x tende verso

$\frac{c}{2}\sqrt{2\,n-1}$, l'angolo A tende a 0 e il suo coseno a 1.

Per l'angelo, non è così. Calcolerà $\gamma_{(n)}\left(\frac{c}{2}\sqrt{2\,n-1}\right)$;

vale la pena di effettuare questo calcolo con lui. L'algebra mette tutto a posto e fornisce questo 1, aggirando un lungo calcolo, che può anche stupire il nostro amico spirituale.

Si ha anche $\gamma_{(n)}(0) = \frac{n-1}{n}$(per questo risultato, vedere il paragrafo 6).

Calcoliamo ancora la derivata: $\gamma'_{(n)}(x) = \frac{4\,(n-1)\,x\,c}{\sqrt{\left(n^2\,c^2 - 4\,x^2\right)^3}}$.

Essa è positiva in tutto l'intervallo. La funzione $\gamma_{(n)}(x)$ cresce dunque da $\frac{n-1}{n}$ a 1 quando x cresce da 0 a r.

Fine della prima parte[10].

10. La seconda e ultima parte apparirà sul numero 59 di questa rivista.

Bibliografia

Bernays P. (2003). *Philosophie des mathématiques*. Paris: Vrin, Mathesis,. Introduction et traduction de Hourya Benis Sinaceur, 168-175.
Beth E. W. – Tarski A. (1956). A general theorem concerning primitive notions of Euclidean geometry. *Indagationes Mathematicae*, vol. 18, 1956, 468-474.
Dickson L. E. (1920). *History of the Theory of numbers*, vol. II *Diophantine Analysis*. New York: Chelsea Publishing Company, 1971. Première édition 1920. (Plus particulièrement 205 et chapitre XIV).
Kasner E. (1947). Neo-Pythagorean Triangles. *Scripta Mathematica*, vol. XIII, 1947, 43-47.
Pont J.-C. (1985). *Bazar épistémologique, conférence prononcée à la réception du Prix Arnold Reymond*. Lausanne: Librairie Payot.
Scott D. (1956). A symmetric primitive notion for Euclidean Geometry. *Indagationes Mathematicae*, vol. 18, 456-461.
Seidenberg A. (1962). The ritual origin of Geometry. *Archiv for history of exact sciences*, 488-527.
Seidenberg A. (1962). The origin of Mathematics. *Archiv for history of exact sciences*, vol. 18, 300-311.

2. Storia delle equazioni e dei sistemi di primo grado[1]

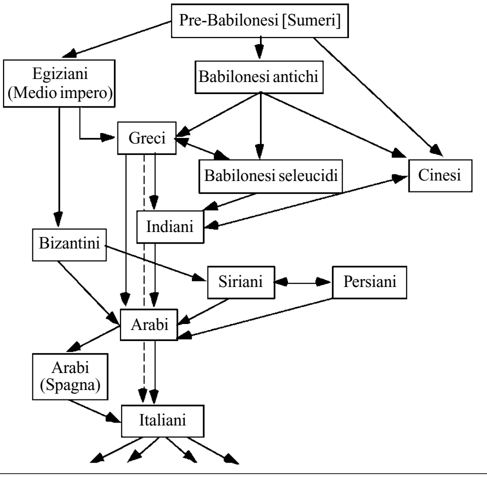
Silvio Maracchia[2]

First degree equations may seem a simple application of the four arithmetic operations and, accordingly, they do not receive much attention in the teaching of algebra. The present article shows that, on the contrary, their importance for the origin of algebra and for the attainment of symbolism and of particular techniques (e.g. the simple or double false position) is remarkable.

1. Sviluppo dell'algebra

Almeno in origine l'algebra viene intesa come lo studio sistematico di regole generali che consentano di determinare la soluzione di equazioni numeriche. Lo «spirito algebrico» nasce quando *i calcoli assegnati in un problema si invertono alla ricerca di valori non noti ma coinvolti in procedimenti di cui i risultati sono assegnati* (Maracchia, 2005, p. 4). Ad esempio: qual è il numero che moltiplicato con 3 dà 15?

Il seguente diagramma ci dà un'idea di come l'algebra, grazie ai legami tra le varie culture, si sia sviluppata a partire probabilmente dai Sumeri (ca. 2500 a.C.) per arrivare fino agli Italiani (XIII sec.) che l'hanno poi diffusa in tutta Europa.



1. Il contenuto della conferenza è stato ricostruito e sviluppato da Piero Antognini sulla base di appunti personali relativi alla conferenza tenutasi a Castione (TI) il 28 agosto 2007, dei lucidi messi a disposizione dal relatore e soprattutto grazie al testo, *Storia dell'algebra,* dello stesso professore (Maracchia, 2005). Per anni questo argomento è stato oggetto di un corso universitario tenuto dal relatore.
2. Dipartimento di Matematica, Università La Sapienza, Roma.

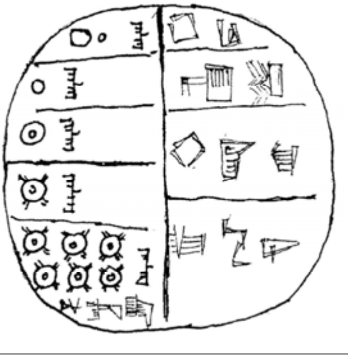
Il problema del *palo appoggiato*[3] è un esempio significativo per mostrare l'indubbia parentela tra le matematiche di diverse civiltà.

L'evoluzione dell'algebra delle equazioni si determina attraverso sei tappe fondamentali che si succedono nel tempo con una crescita pressoché costante (Maracchia, 2005, p. 5-9):

1. *Inversione delle operazioni*: i calcoli assegnati si invertono alla ricerca di valori non noti ma coinvolti in procedimenti di cui i risultati sono assegnati.
2. *Nascita degli algoritmi*: la ripetitività di un procedimento di calcolo porta ad una meccanicità e a una generalizzazione del procedimento stesso.
3. *Svincolo dalla geometria*: i calcoli vengono estrapolati dal loro significato geometrico per giungere a una regola. Comincia a prendere forma un atteggiamento mentale che porterà all'algebra astratta.
4. *Evoluzione del simbolismo*: vengono date indicazioni generiche anche per le quantità considerate note, in modo da rendere generali i procedimenti risolutivi, ottenendo così espressioni algebriche generali e formule risolutive.
5. *Percorso delle equazioni di terzo e quarto grado*: l'estensione del campo numerico porta alla completezza delle risoluzioni ammettendo soluzioni negative o complesse che geometricamente non avrebbero senso.
6. *L'algebra esamina se stessa*: le operazioni che si compiono nei vari passaggi algebrici vengono esaminate e successivamente assiomatizzate.

1. Il primo documento «algebrico»

Il più antico documento con un probabile significato algebrico è una tavoletta cuneiforme, catalogata come TM 75 G 1693, risalente circa al 2500 a.C e ritrovata da una spedizione italiana nel 1975 negli scavi di Ebla[4], nell'attuale Siria.



3. Maracchia (2005), p.102-103: *il problema consiste nel calcolare di quanto si discosta dal muro un palo di lunghezza assegnata l e all'inizio completamente aderente al muro se scivola di una certa altezza h anch'essa assegnata. Questo problema, che è una tipica applicazione del teorema di Pitagora, è presente nell'antica matematica babilonese, in quella seleucida e nella matematica cinese.*
4. Ebla è l'antico nome dell'odierna Tell Mardikh, a circa 60 km a sud di Aleppo, città della Siria settentrionale, scoperta nel 1964 da una missione archeologica italiana.

Questa tavoletta[5] pare essere stata redatta da Jsma-Ja[6], scriba di Kis, città sumera della Mesopotamia. La tavoletta sembra essere un'esercitazione: in sostanza richiede per quale numero deve essere moltiplicata la base 60 della numerazione sumera per ottenere i numeri indicati.

Ecco qui la traduzione e una possibile interpretazione in chiave algebrica moderna della parte sinistra:

Traduzione		Interpretazione
600	[è] 60…	$600 = 60 \cdot x$
3600	[è] 60…	$3600 = 60 \cdot y$
36000	[è] 60…	$36000 = 60 \cdot x$
360000	[è] 60…	……..
	[è] 60…	……..

Alla fine della tavoletta (parte sinistra), prima del nome del suo autore, si trova scritto «*non risolto*» quasi per indicare un esercizio assegnato agli studenti di Ebla dal professore sumero Jsma-Ja (Maracchia, 2005, p.13).

2. Egiziani[7]

Nei papiri matematici egiziani risalenti al periodo tra il 1900 e il 1600 a.C. si trovano quasi esclusivamente problemi riconducibili ad equazioni di primo grado. I documenti matematici pervenutici dai babilonesi sono invece di un livello superiore.

Il problema n.19 del cosiddetto *Papiro di Mosca*[8] è un «*problema aha*», dal termine egiziano per indicare «mucchio», nel senso di quantità incognita:

«*Metodo per calcolare un mucchio. (1+1/2) volte* [questo mucchio] *con 4 è diventato 10. Quanto è questo mucchio?*

Calcola tu l'eccesso di questo 10 sopra 4, è 6. Calcola con 1+1/2 fino a che trovi 1. Risulta 2/3. Pensa tu 2/3 di questo 6. Risulta 4. Ecco, è 4; tu l'hai trovato correttamente».

Il metodo di soluzione proposto nel papiro corrisponde sostanzialmente a quello da noi usato per risolvere l'equazione

$$(1+{}^{1}/_{2})\,x + 4 = 10$$
$$(1+{}^{1}/_{2})\,x = 10 - 4$$
$$(1+{}^{1}/_{2})\,x = 6$$
$$(1+{}^{1}/_{2}) \cdot {}^{2}/_{3}\,x = 6 \cdot {}^{2}/_{3}$$
$$x = 4$$

5. (Maracchia, 2005, p.13): *la decifrazione della tavoletta è di Giovanni Pettinato; la sua interpretazione, riconosciuta come la più attendibile, è dei matematici Tullio Viola e Isabella Vino*.
6. Jsma-Ja potrebbe essere il primo nome di matematico a noi noto.
7. Si veda (Maracchia, 2005, p.15-18).
8. Il *papiro di Mosca* (ca.1890 a.C) è, dopo il papiro Rhind, il secondo documento più importante della matematica egizia. È stato portato in Russia verso la metà del XIX secolo ed è conservato al museo di belle arti di Mosca.

Gli egiziani conoscevano anche il metodo della *falsa posizione* per risolvere le equazioni di primo grado. Nel problema n. 25 del cosiddetto *Papiro Rhind*[9]:

«*Una quantità sommata con la sua metà diventa 16.*
Conta con 2. Allora (1+1/2) di 2 è 3. Quante volte 3 deve essere moltiplicato per dare 16, lo stesso numero di volte deve essere moltiplicato 2 per dare il numero esatto. Allora dividi 16 con 3. Fa 5 + 1/3. Ora moltiplica 5+ 1/3 per 2. Fa 10 + 2/3. Hai fatto come occorre: La quantità è 10+2/3; la sua metà è 5 + 1/3; la somma è 16».

Si suppone che il valore da trovare sia un *numero scelto a caso* (nell'esempio 2), possibilmente semplice. Si eseguono sul numero scelto a caso le operazioni indicate nel problema (nell'esempio 2+1=3). Si confronta il numero ottenuto con il risultato richiesto (nell'esempio 16): se sono uguali il problema è risolto; altrimenti si calcola il rapporto tra il risultato richiesto e il numero ottenuto. Questo rapporto (nell'esempio 16/3) deve sussistere anche fra il numero cercato e quello scelto. Dunque il numero cercato è il prodotto del rapporto trovato per il numero scelto (nell'esempio $\frac{16}{3} \cdot 2 = \frac{32}{3} = 10 + \frac{2}{3}$).

Questo metodo verrà poi sviluppato successivamente dai matematici indiani con il *metodo della doppia falsa posizione* , che è un metodo di interpolazione lineare.

3. Babilonesi[10]

Nella più evoluta matematica babilonese il metodo della *falsa posizione* viene usato già in una tavoletta degli inizi del II millennio a.C. per il problema del *falso grano* (nella soluzione con la falsa posizione, data con i calcoli ma senza giustificazioni si parla appunto di falso grano):

«*Da un bur* [unità di superficie pari a 1800 sar] *ho raccolto 4 gur* [unità di volume pari a 300 sila]. *Da un secondo bur ho raccolto 3 gur. Il grano* [raccolto nel primo campo] *eccede il grano* [del secondo] *di 500* [sila]. *Ho sommato i miei* [due] *campi e fa 1800* [sar]. *Quanto sono i miei campi?*».

Traducendo in chiave moderna il problema con un sistema in cui *x* e *y* indicano le aree (in sar) dei campi si ottiene:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{1800} \cdot 4 \cdot 300 - \dfrac{y}{1800} \cdot 3 \cdot 300 = 500 \\ x + y = 1800 \end{cases}$$

9. Il *papiro Rhind* (1800-1600 a.C) è il più esteso papiro egizio di contenuto matematico pervenutoci. Deve il suo nome al collezionista scozzese Henry Rhind che lo acquistò nel 1858 a Luxor in Egitto e lo donò poi al British Museum, dove è attualmente conservato. È anche noto come *papiro di Ahmes* dal nome dello scriba che lo trascrisse.
10. Si veda (Maracchia, 2005, p.18-21).

Reinterpretata, e con l'aggiunta di alcune indispensabili spiegazioni, la soluzione data nella tavoletta è grosso modo questa: si suppone inizialmente che i due campi abbiano la stessa estensione, cioè 900 sar ciascuno. Il primo produrrebbe 600 sila e il secondo 450, con una differenza di 150 sila. È necessario dunque aumentare il primo di un numero opportuno di sar e diminuire conseguentemente il secondo. Ogni sar aggiunto al primo aumenta il raccolto di $\frac{1200}{1800}$ cioè $\frac{2}{3}$ di sila (poiché 1800 sar del primo campo producono 1200 sila); ogni sar tolto al secondo diminuisce il raccolto di $\frac{900}{1800}$ cioè $\frac{1}{2}$ di sila (poiché 1800 sar del secondo campo producono 900 sila). Ogni sar spostato dal secondo al primo campo provoca dunque un aumento della produzione di $\frac{2}{3} - (-\frac{1}{2}) = \frac{7}{6}$ di sila. Per ottenere 500 sila è necessario aggiungere 350 sila ai 150 sila trovati. Questo comporta uno spostamento di $350 : \frac{7}{6} = 300$ sar dal secondo al primo campo. Il primo campo ha dunque una superficie di $(900 + 300) = 1200$ sar e il secondo di $(900 - 300) = 600$ sar. Il primo produce così 800 sila e il secondo 300 sila.

3. Cinesi[11]

Anche i matematici cinesi adoperarono il metodo della *falsa posizione.*

Nel testo di aritmetica pratica di *Sun Tsu*, risalente verosimilmente al VI sec. a.C., si trova ad esempio il seguente problema:

«*Una donna stava risciacquando dei piatti in un ruscello, quando un sorvegliante delle acque le domandò: – Come mai avete tanti piatti? –*

– Perché in casa vi fu un banchetto –, rispose la donna.

Il funzionario chiese allora il numero dei commensali.

– Non lo so, – replicò la donna – so però che due a due usavano un piatto per il riso, tre a tre uno per il pane, quattro a quattro uno per le vivande e i piatti erano in tutto 65 –».

Indicando con x il numero di commensali, noi risolviamo il problema con l'equazione:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 65$$

che ha la soluzione $x = 60$.

I cinesi usano il metodo della falsa posizione: scegliendo come falsa soluzione 12, si ottiene $\frac{12}{2} + \frac{12}{3} + \frac{12}{4} = 13$ e, poiché $\frac{65}{13} = 5$, il numero cercato è $12 \cdot 5 = 60$.

Al metodo della *doppia falsa posizione* è dedicato il settimo capitolo della maggiore opera matematica cinese: *Chiu-chang suan-shu (Arte del calcolo in nove capitoli)*. Per la sua importanza nella matematica cinese quest'opera, di collocazione temporale incerta tra il II secolo a.C. e il I secolo d.C., è paragonata agli *Elementi* di Euclide.

Ecco il primo problema del capitolo settimo, intitolato *Eccesso e difetto*, per indicare che i due falsi valori si prendono uno maggiore e l'altro minore del valore da trovare.

11. Si veda (Maracchia, 2005, p. 55-64).

«*Quando comperiamo cose in società, se ciascuno dà 8 monete, l'eccesso è 3, se ciascuno dà 7 monete, la mancanza è 4. È richiesto il numero di soci e il prezzo delle cose acquistate*».

Noi tradurremmo il problema, indicando con *x* il numero dei soci e con *y* il prezzo totale degli oggetti, nella forma:

$$\begin{cases} 8\,x = y + 3 \\ 7\,x = y - 4 \end{cases} \quad \text{o in generale} \quad \begin{cases} a_1\,x = y + b_1 \\ a_2\,x = y - b_2 \end{cases}$$

La regola dei cinesi data dal matematico cinese per risolvere il problema, espressa in chiave moderna, è sorprendentemente simile al calcolo che si otterrebbe usando il metodo di Cramer per risolvere un sistema con l'aiuto dei determinanti

$$x = \frac{b_1 + b_2}{a_1 - a_2} \qquad y = \frac{a_1\,b_2 + a_2\,b_1}{a_1 - a_2},$$

cioè nel caso particolare del problema

$$x = \frac{3+4}{8-7} = 7 \qquad y = \frac{8 \cdot 4 + 7 \cdot 3}{8-7} = 53$$

La regola può essere spiegata con il metodo della doppia falsa posizione: indicando con *a* la quota a carico di ogni acquirente; tra il numero dei soci x e il prezzo complessivo della merce y vale la relazione lineare:

$a \cdot x = y$

Inserendo il primo valore falso $a_1 = 8$ si ottiene l'eccesso:

$8\,x = y + 3$, in generale $a_1 x = y + b_1$

Inserendo il secondo valore falso si ottiene il difetto:

$7\,x = y - 4$, in generale $a_2 x = y - b_2$

Sottraendo all'eccesso il difetto si ottiene:

$(8-7) \cdot x = 3 + 4$ in generale $(a_1 - a_2) \cdot x = b_1 + b_2$

Si può calcolare così il valore di x come il rapporto tra la differenza tra eccesso e difetto e la variazione di quota di ogni acquirente:

$$x = \frac{3+4}{8-7} = 7 \qquad \text{in generale} \qquad x = \frac{b_1 + b_2}{a_1 - a_2}$$

Successivamente, sfruttando le condizioni del problema, si trova il valore di y; ad esempio usando la seconda condizione:

$y = 7 \cdot 7 + 4 = 53$

in generale: $y = a_2\,x + b_2 = a_2 \cdot \dfrac{b_1 + b_2}{a_1 - a_2} + b_2 = \dfrac{a_1\,b_2 + a_2\,b_1}{a_1 - a_2}$

Inoltre la quota a carico di ognuno è

$$a = \frac{53}{7} \qquad \text{in generale} \qquad a = \frac{y}{x} = \frac{a_1\, b_2 + a_2\, b_1}{b_1 + b_2}$$

Nell'ottavo capitolo dell'*Arte del calcolo in nove capitoli* si incontra un problema che noi tradurremmo in un sistema di primo grado in tre equazioni e tre incognite e che i matematici cinesi risolvevano, operando sui soli coefficienti e termini noti con una tecnica che corrisponde al noto *metodo di eliminazione di Gauss*.

«*Vi sono tre tipi di grano; tre mucchi del primo tipo, due del secondo e uno del terzo fanno 39 misure; due del primo, tre del secondo e uno del terzo fanno 34 misure e uno del primo, due del secondo e tre del terzo fanno 26 misure. Quante misure di grano sono contenute in un mucchio di ciascun tipo?*».

Noi tradurremmo il problema nel sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

I matematici cinesi considerano una tabella, che corrisponde alla nostra matrice del sistema (ruotata di 90° in senso orario), e operano, con un procedimento simile all'algoritmo di Gauss, per rendere via via uguali a zero i coefficienti dell'incognita x nella seconda e nella terza equazione e dell'incognita y nella terza equazione, ottenendo così una nuova tabella semplificata cioè per noi significa una matrice triangolare e un relativo sistema facilmente risolvibile.

Trasformazioni successive della tabella cinese

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

metodo di eliminazione di Gauss

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3\cdot\text{II riga} - 2\cdot\text{I riga} \\ \\ 3\cdot\text{III riga} - \text{I riga} \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 5 & 1 & 24 \\ 0 & 4 & 8 & 39 \end{pmatrix} \;\; 5\cdot\text{III riga} - 4\cdot\text{II riga} \;\; \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 5 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & 36 & 99 \end{pmatrix}$$

Dunque:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ \quad 5y + z = 24 \\ \quad 36z = 99 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{99}{36} = \frac{11}{4} \\ y = (24 - \frac{11}{4}) \cdot \frac{1}{5} = \frac{17}{4} \\ x = (39 - \frac{11}{4} - 2 \cdot \frac{17}{4}) \cdot \frac{1}{3} = \frac{37}{4} \end{cases}$$

4. Greci[12]

4.1. Il «Fiore di Timarida»

I matematici greci sapevano, ancora prima di quanto si trova in modo esplicito nell'*Aritmetica* di Diofanto (del III sec d.C. circa), risolvere equazioni e sistemi di primo grado sia usando metodi geometrici sia aritmetici. La più antica notizia relativa all'algebra greca è il problema noto come *Fiore di Timarida*, risalente al V-IV sec. a.C. e di cui Giamblico riferisce nella seconda metà del III sec. d.C[13].

Il problema di Timarida chiede di determinare un valore incognito (x_1), conoscendo le sue somme ($a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}$) con valori non noti ($x_1, x_2, x_3, ..., x_n$) e nota anche la somma (S) del valore incognito con tutti gli altri valori.

Ad esempio: un padre lascia in eredità ai suoi quattro figli una somma di 1000 monete d'oro. Il primo e il secondo figlio ricevono 500 monete, il primo e il terzo 600 monete e il primo e il quarto 700 monete. Quanto riceve ognuno?

Il problema si traduce per noi nel sistema lineare di *n* equazioni in *n* incognite:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a_1 \\ x_1 + x_3 = a_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_1 + x_n = a_{n-1} \\ x_1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S \end{cases}$$

Giamblico descrive in modo completamente discorsivo, il metodo di soluzione, che espresso con il nostro simbolismo corrisponde a sottrarre dalla somma delle prime *n*–1 equazioni l'ultima equazione:

$$\begin{array}{r} (n-1)\cdot x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} \\ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = S \\ \hline (n-2)\cdot x_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} - S \end{array}$$

$$x_1 = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} - S}{n-2}$$

Nel caso particolare del problema dell'eredità si ottiene:

$$x_1 = \frac{500 + 600 + 700 - 1000}{2} = 400$$

e successivamente

$x_2 = 500 - 400 = 100$; $x_3 = 600 - 400 = 200$; $x_4 = 700 - 400 = 300$

12. Si veda (Maracchia, 2005, p. 21-43).
13. (Maracchia, 2005, p. 21). *Secondo Giamblico il pitagorico Timarida di Paro (o di Taranto) sarebbe vissuto probabilmente all'epoca di Platone (427-347 a.C.), dunque nel V-IV secolo a.C.*

4.2. Applicazioni ed estensioni del metodo di Timarida

Il metodo di Timarida è chiamato da Giamblico *epantema* (fioritura), probabilmente per indicare l'abbondanza di sviluppi che ne sono poi derivati nell'aritmetica[14].

Giamblico stesso lo usa per affrontare problemi che conducono a un sistema indeterminato del tipo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a \cdot (x_3 + x_4) \\ x_1 + x_3 = b \cdot (x_2 + x_4) \\ x_1 + x_4 = c \cdot (x_2 + x_3) \end{cases}$$

ad esempio nel caso particolare a = 2, b = 3, c = 4.

Per ricondurci al metodo di Timarida, sommando ai due membri della prima equazione, si ottiene:

$$S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a \cdot (x_3 + x_4) + x_3 + x_4 = (a+1) \cdot (x_3 + x_4)$$

Dalla prima equazione del sistema segue la relazione $x_3 + x_4 = \frac{x_1 + x_2}{a}$; inserendola nella precedente uguaglianza si ha:

$$S = (a+1) \cdot (x_3 + x_4) = (a+1) \cdot \frac{x_1 + x_2}{a} = \frac{a+1}{a} \cdot (x_1 + x_2)$$

e quindi $x_1 + x_2 = \frac{a}{a+1} \cdot S$

Analogamente si ricavano le equazioni: $x_1 + x_3 = \frac{b}{b+1} \cdot S$

e $x_1 + x_4 = \frac{c}{c+1} \cdot S$

Applicando la formula di Timarida al sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{a}{a+1} \cdot S \\ x_1 + x_3 = \frac{b}{b+1} \cdot S \\ x_1 + x_4 = \frac{c}{c+1} \cdot S \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = S \end{cases}$$

si ottiene

$$x_1 = \frac{S\left(\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{C}{c+1}\right) - S}{2}$$

14. Cfr. Loria G. (1987). *Le scienze esatte nell'antica Grecia.* Milano: Cisalpino-Goliardica, p. 808 e, per considerazioni didattiche, Arrigo G. (2005). Quale matematica per la scuola media. *BDM 51*, dicembre 2005.

Nel caso particolare considerato da Giamblico a = 2, b = 3, c = 4 si determinano x_1, x_2, x_3, x_4 in funzione di S:

$$x_1 = \frac{73}{120}S \quad ; \quad x_2 = \frac{7}{120}S \quad ; \quad x_3 = \frac{17}{120}S \quad ; \quad x_4 = \frac{23}{120}S$$

Volendo avere i valori minimi interi risolventi il sistema indeterminato si pone $S = 2 \cdot (a+1)(b+1)(c+1) = 12$, ottenendo così: $x_1 = 73$; $x_2 = 7$; $x_3 = 17$; $x_4 = 23$.

Un'altra applicazione del metodo di Timarida si trova anche in un problema dell'*Antologia greca*, opera attribuita a Metrodoro di Bisanzio (vissuto tra il IV e il VI sec. d.C.):

«*Fabbricami una corona di 60 mine*[15]*, mescolando opportunamente oro, rame, stagno e ferro. L'oro e il rame formino i* 2/3 *della corona, l'oro e lo stagno i* 3/4*, l'oro e il ferro i* 3/5*. Orbene! Dimmi esattamente la quantità di oro, di rame, di stagno e di ferro che devi prendere*».

Indicando rispettivamente con x_1, x_2, x_3, x_4 le masse di oro, rame, stagno e ferro (in mine) necessarie per forgiare la corona, si ha:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 40 \\ x_1 + x_3 = 45 \\ x_1 + x_4 = 36 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 60 \end{cases}$$

Da qui, secondo la formula di Timarida:

$$x_1 = \frac{40 + 45 + 36 - 60}{2} = 30 + \frac{1}{2}$$

e successivamente

$$x_2 = 9 + \frac{1}{2} \quad ; \quad x_3 = 14 + \frac{1}{2} \quad ; \quad x_4 = 5 + \frac{1}{2}$$

Un problema simile a quello di Timarida si trova nel *Manoscritto Bakšali* (una delle prime opere della matematica indiana risalente al III-IV sec. d.C., scritta su corteccia di betulla): cinque mercanti decidono di acquistare un gioiello; il prezzo (S) di questo gioiello si ottiene sommando la metà del denaro (x_1) posseduto dal primo con il denaro posseduto dagli altri quattro (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), oppure la terza parte del denaro del secondo mercante con il denaro posseduto dagli altri oppure la quarta parte del denaro del terzo mercante con il denaro posseduto dagli altri, oppure la quinta parte del denaro del quarto mercante con il denaro posseduto dagli altri, oppure la sesta parte del denaro del quinto mercante con il denaro posseduto dagli altri.

15. La *mina* era un'unità di misura di massa in uso presso gli antichi popoli del Mediterraneo orientale e corrispondeva per Babilonesi e Greci a 1/60 di *talento*. Il talento a sua volta era un'unità di misura di massa che per i Greci era variabile secondo luogo e tempi. Ad esempio il talento attico corrispondeva a circa 26,2 kg.

Si può quindi scrivere il sistema:

$$\begin{cases} \frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = S \\ x_1 + \frac{x_2}{3} + x_3 + x_4 + x_5 = S \\ x_1 + x_2 + \frac{x_3}{4} + x_4 + x_5 = S \\ x_1 + x_2 + x_3 + \frac{x_4}{5} + x_5 = S \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \frac{x_5}{6} = S \end{cases}$$

Dal confronto di ogni equazione con la seguente, si può scrivere:

$$\frac{1}{2}x_1 = \frac{2}{3}x_2 = \frac{3}{4}x_3 = \frac{4}{5}x_4 = \frac{5}{6}x_5$$

Indicando con q questo valore, si ha:

$$x_1 = 2\,q \quad ; \quad x_2 = \frac{3}{2}q \quad ; \quad x_3 = \frac{4}{3}q \quad ; \quad x_4 = \frac{5}{4}q \quad ; \quad x_5 = \frac{6}{5}q$$

Inserendo in una delle equazioni del sistema si ricava: $\frac{377}{60}q = S$

Per ottenere dei risultati interi basta porre $q = 60$ (o a un suo multiplo). Con questo valore si ottiene la soluzione del manoscritto:

$$x_1 = 120 \quad ; \quad x_2 = 90 \quad ; \quad x_3 = 80 \quad ; \quad x_4 = 75 \quad ; \quad x_5 = 72$$

Nel *Liber Abaci* del 1202 di Leonardo Pisano, detto Fibonacci (1170?-1228?), si trovano alcuni problemi che denotano una certa parentela con il problema di Timarida. Famoso ad esempio il seguente:

Significativo problema relativo a quattro uomini e a una borsa da essi ritrovata.

Quattro uomini aventi [ciascuno] *del denaro trovarono una borsa, e per essi* [risulta che il denaro de] *il primo con* [i denari de] *la borsa supera per il doppio* [i denari de] *il secondo e terzo uomo; il secondo* [con il denaro della borsa supera i denari de] *il terzo e il quarto per il triplo; il terzo* [con il denaro della borsa supera i denari de] *il quarto e il primo per il quadruplo; il quarto uomo, poi, con la borsa, supera* [i denari de] *il primo e il secondo per il quintuplo*».

Indicando con x, y, z, t, i denari dei quattro e con b il denaro nella borsa, si ha il sistema:

$$\begin{cases} x + b = 2\,(y + z) \\ y + b = 3\,(z + t) \\ z + b = 4\,(t + x) \\ t + b = 5\,(x + y) \end{cases}$$

Quello che rende il problema particolarmente interessante sono le parole di Leonardo Pisano:

«*Mostrerò però che questo problema è insolubile se non si ammette che il primo* [uomo] ***abbia un debito***».

Questo significa che il problema può essere risolto solo assegnando al denaro iniziale del primo *un numero negativo*. Probabilmente si tratta di uno dei primi problemi in cui in Occidente vengono considerati i numeri negativi! Leonardo, dopo una lunga serie di calcoli, descritti a parole (in cui indica con «dracme» i soldi del primo uomo (x) e con «res» quelli del secondo (y)) ottiene la relazione che noi traduciamo con:

$$\frac{22}{5}y + \frac{33}{5}x = \frac{38}{13}y + \frac{9}{13}x$$

evidentemente impossibile se x e y sono positivi, perché in questo caso il primo membro è maggiore del secondo. A questo punto Leonardo suppone che il primo uomo abbia un debito; noi lo indichiamo con (k>0) e ricaviamo dall'ultima uguaglianza e successivamente, dalle equazioni iniziali del sistema, le altre incognite z, t, b. La soluzione, in funzione del parametro k, del sistema è dunque:

$$x = -k \;;\; y = 4k \;;\; z = k \;;\; t = 4k \;;\; b = 11k$$

Il sistema è indeterminato e probabilmente, anche se non la menziona, Leonardo ha tenuto conto della possibilità di altre soluzioni.

Attribuendo ad esempio valori negativi al secondo si ottengono valori negativi anche per il terzo, il quarto e per i denari contenuti nella borsa!

La prima volta che appare esplicitamente una doppia soluzione di un sistema indeterminato analogo a quelli considerati è nel *Triparty* di Nicolas Chuquet[16]:

$$\begin{cases} x + y + 100 = 3(z + t - 100) \\ y + z + 106 = 4(x + t - 106) \\ z + t + 145 = 5(x + y - 145) \\ t + x + 170 = 6(y + z - 170) \end{cases}$$

La soluzione generale si trova esprimendo ad esempio le incognite y, z, t mediante x:

$$y = 215 - x \;;\; z = 15 + x \;;\; t = 190 - x$$

Le due soluzioni particolari trovate da Chuquet si ottengono con x = 100 (y = 115 ; z = 115 ; t = 90) e x = 80 (y = 135 ; z = 95 ; t = 110).

16. Nicolas Chuquet (1445?-1488) matematico francese nato a Parigi che operò soprattutto a Lione. La sua opera principale è il manoscritto *Le triparty en la science des nombres* del 1484, pubblicato per la prima volta solo nel 1880, in cui vengono tra l'altro formulate regole per il calcolo con i numeri negativi e affrontati problemi di falsa posizione semplice (*regola del tre)* o doppia.

Chuquet propone anche un problema determinato

$$\begin{cases} x + \dfrac{2}{3}(y + z + t) = 40 \\ y + \dfrac{3}{4}(x + z + t) = 40 \\ z + \dfrac{4}{5}(x + y + t) = 40 \\ t + \dfrac{5}{6}(x + y + z) = 40 \end{cases}$$

con la particolarità che la soluzione ha uno dei valori *uguale a zero*:
$x = 24$; $y = 16$; $z = 8$; $t = 0$.

4.3. Diofanto di Alessandria

Nell'*Aritmetica* di Diofanto[17] (III sec. d.C. circa), si trovano enunciate e risolte esplicitamente equazioni di primo grado, anche poi in relazione a sistemi di grado superiore.

Il progresso di Diofanto è stato quello di mostrare un livello algebrico superiore a quello raggiunto in precedenza: le soluzioni algebriche mostrano una conoscenza ormai acquisita, svincolata da rappresentazioni geometriche e l'introduzione di un simbolismo per indicare il *numero* (*aritmo*) da trovare, alcune sue potenze e altre semplificazioni[18].

Simbolismo moderno	*Simbolismo di Diofanto*
x	ς
x^2	Δ^{Y}
x^3	K^{Y}
x^4	$\Delta\Delta^{Y}$
x^5	ΔK^{Y}
1, 2, 3,...	α, β, γ,....
1/2	β^{χ}
1/3	γ^{χ}
$1/x^2$	$\Delta^{Y\chi}$
− ("meno")	↑
algebra simbolica	algebra sincop. - simbol.
$5x - 2$	ςε↑Μ°β
$25x^6 + 18 - x$	ΚΚ^{Y}κεΜ°ιη↑ς

17. Diofanto d'Alessandria visse probabilmente attorno al 250 d.C. ad Alessandria. Sulla sua vita non si sa quasi nulla. La sua opera principale l'*Aritmetica* era costituita di 13 volumi: solo 6 ci sono pervenuti nella versione originale greca, altri 4 sono stati ritrovati solo da una quarantina d'anni in una traduzione araba del 1200.
18. Nel *papiro Michigan*, un papiro greco della fine I sec. inizio II sec. d.C. conservato all'università del Michigan, è già presente in parte il simbolismo di Diofanto e ancor prima di Diofanto vengono trattati i sistemi lineari.

Anche se il simbolismo di Diofanto non è sopravissuto in alcun aspetto, è stato comunque di fondamentale importanza. L'uso del simbolismo ha infatti poi favorito non solo il naturale sviluppo dell'algebra (dalle equazioni di secondo fino a quelle di quarto grado e così via), ma dell'intera matematica.

Nell'*Aritmetica* si trova anche una sorta di «regola dei segni»: «*ciò che manca moltiplicato per ciò che manca dà ciò che esiste*» oppure «*ciò che manca moltiplicato per ciò che esiste dà ciò che manca*». Non si deve però essere tratti in inganno: Diofanto non considera l'esistenza dei numeri negativi, ma stabilisce unicamente delle regole di calcolo per poter applicare la proprietà distributiva[19].

Nel primo libro Diofanto affronta sistemi ed equazioni di primo grado. La prima proposizione (I.1) si occupa di «*dividere un numero dato in due numeri di cui è nota la differenza*». È caratteristico il carattere generale che Diofanto attribuisce alle proposizioni, anche se, come tutti gli algebristi fino a François Viète (1540-1603) si limita a presentare degli esempi numerici particolari.

Espresso con il nostro simbolismo l'esempio presentato da Diofanto è:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ y - x = 40 \end{cases}$$

Diofanto fa sempre uso di una sola incognita, il che, a volte, rende macchinoso il procedimento. Per la seconda condizione del problema indica i due numeri con x e x+ 40 e li sostituisce nella prima condizione ottenendo:

$x + (x+40) = 100$ da cui $2x + 40 = 100$

Qui sottrae poi 40 da entrambi i membri (un'operazione di vera algebra!) e ha: $2x = 60$ da cui infine $x = 30$.

I due numeri sono 30 e 70 e, come è evidente, verificano le condizioni del problema, dice Diofanto.

La settima proposizione (I.7):

«Togliere due numeri dati a uno stesso numero in modo che i resti abbiano un rapporto assegnato»

conduce nell'esempio di Diofanto all'equazione:

$$\frac{x-20}{x-100} = 3$$

Seguiamo le successive trasformazioni descritte da Diofanto

$3(x-100) = x - 20$ da cui $3x - 300 = x - 20$

«*aggiungendo ad ambo le parti i termini che si tolgono* [al primo membro] *si ottiene*»

$3x = x + 280$; $2x = 280$ e quindi $x = 140$.

Nell'*Antologia greca*, già ricordata prima (vedi § 4.2), si trova un curioso epigramma che fornisce alcune notizie sulla vita di Diofanto.

19. Ad esempio: $21 = 7 \cdot 3 = (9-2) \cdot (8-5) = 72 - 45 - 16 + 10$.

«*Ecco la tomba che racchiude Diofanto: una meraviglia da contemplare! Con artificio aritmetico la pietra insegna la sua età: Dio gli concesse di rimanere fanciullo un sesto della sua vita, dopo un altro dodicesimo le sue guance germogliarono; dopo un settimo egli riaccese la fiaccola del matrimonio: e dopo cinque anni gli nacque un figlio. Ma questi, giovane disgraziato e pur tanto amato, aveva appena raggiunto la metà dell'età cui doveva arrivare suo padre, quando morì. Quattro anni ancora, mitigando il proprio dolore con l'occuparsi con la scienza dei numeri*[20]*, attese Diofanto prima di raggiungere il termine della sua esistenza.*»

Indicando infatti con x l'età raggiunta da Diofanto, l'epigramma si trasforma nell'equazione di primo grado

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$$

da cui si deduce che $x = 84$, soluzione che l'autore dell'*Antologia Greca*, Metrodoro di Bisanzio, non dà, ma che avrebbe sicuramente saputo ottenere.

5. Indiani[21]

Anche se due opere matematiche indiane *Sulvasutra* (800 a.C.- 200 d.C.) e *Sourya Siddhantas* (IV-VI sec.) mostrano elementi provenienti dalla matematica egiziana, babilonese, cinese e greca, si può comunque osservare una notevole indipendenza della matematica indiana, dovuta a una diversa mentalità, in particolare, per l'algebra, a un distacco dalla geometria simile a quello riscontrato in Diofanto.

Nel VI secolo Brahmagupta[22] («protetto di Brahma») nella sua opera filosofico-matematica *Brahama-Sphuta Sidd'hanta* enuncia le regole dell'inversione, dà le regole dei segni, indica come trattare lo zero, ammette che la radice quadrata possa avere a seconda dei casi valore positivo o negativo. Per la moltiplicazione scrive ad esempio:

«*Regola di moltiplicazione. Il prodotto di una quantità negativa con una positiva è negativa; di due negative, è positiva; di due positive, è positiva, Il prodotto di zero con una negativa o di zero con una positiva, è nullo: di due zeri, è zero*».

Brahmagupta dà una regola generale per risolvere una generica equazione di primo grado che noi scriveremmo

$$a \cdot x + b = c \cdot x + d$$

«*Regola per una semplice equazione. La differenza di numeri assoluti, invertita, divisa per la differenza dell'incognita è incognita*[23] *dell'equazione*».

20. Non è il solo esempio di matematico che lenisce un dolore dedicandosi allo studio della materia. Così *Jean Victor Poncelet* (1788-1867), fatto prigioniero nella campagna di Russia, sviluppa la geometria proiettiva, o *Blaise Pascal* (1623-1662), che combatte il mal di denti studiando la cicloide.
21. Si veda (Maracchia, 2005, p. 44-50).
22. Brahmagupta (598-665 d.C.) matematico e astronomo indiano.
23. Leggere: il valore dell'incognita.

cioè appunto

$$x = \frac{d-b}{a-c}$$

Brahmagupta presenta tre esempi di equazioni di primo grado. Usa un simbolismo paragonabile a quello di Diofanto (ma probabilmente indipendente).

Ecco il primo esempio:

«*Se quattro volte la dodicesima parte della somma tra uno e l'incognita, aumentato di otto è uguale all'incognita aumentata di uno, dimmi il valore dell'incognita*».

Ecco qui le tappe, espresse con il nostro simbolismo, con cui Brahmagupta arriva alla soluzione:

$$x+1 \;\rightarrow\; \frac{x+1}{12} \;\rightarrow\; \frac{x+1}{3} \;\rightarrow\; \frac{x+25}{3} \;\rightarrow\; x+25=3x+3 \;\rightarrow\; x=\frac{25-3}{3-1}=11$$

Secondo fonti arabe, ai matematici indiani si deve il metodo della *doppia falsa posizione*.

Con Bhaskara[24] nel XII secolo viene raggiunto l'apogeo della matematica indiana. La sua opera *Siddhantaciromani* («coronamento del sistema») contiene anche due parti di carattere matematico: *Lilavati*, che tratta principalmente di aritmetica e *Vija-Ganita* («scienza di calcolo con le incognite»), che tratta di algebra.

Lilavati è la figlia dell'autore, cui il padre si rivolge nel tipico stile fantasioso della letteratura indiana, per la risoluzione di quesiti di carattere quasi esclusivamente aritmetico. Questi problemi nonostante, lo spirito algebrico, sono risolti con il metodo della falsa posizione, un po' a cavallo tra aritmetica e algebra. A volte poi questi problemi vengono ripresi e risolti in modo assolutamente algebrico nel *Vija Ganita*.

Ecco un problema del *Lilavati*:

«*Un quinto di uno sciame di api si posa su un fiore di Kadamba, un terzo su un fiore di Silindha. Tre volte la differenza tra i due numeri volò sui fiori di un Kutujan, e rimase solo un'ape che si librò qua e là per l'aria, ugualmente attirata dal grato profumo di un Gelsomino e di un Pandamus. Dimmi tu ora, donna affascinante, qual era il numero delle api*».

Indicando con x il numero delle api, con il nostro simbolismo scriviamo:

$$\frac{1}{5}x+\frac{1}{3}x+3\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{5}x\right)+1=x, \text{ da cui } x=15.$$

Bhaskara risolve il problema con il metodo della falsa posizione: pone il numero delle api uguale a 30, da cui ottiene per le api residue. Dunque poiché 1 è la metà di 2, il numero delle api deve essere la metà di 30, cioè 15.

24. Bhaskara (1114-1185) chiamato anche Bhaskara Achārya («Bhaskara il maestro») fu un astronomo e matematico indiano.

Bhaskara riprende questo problema nel *Vija-Ganita* e qui lo risolve per via algebrica.

6. Arabi e Leonardo Pisano[25]

Il primo esponente dell'algebra araba è considerato Mohammed ibn Musa Al-Khuwarizmi, attivo a Bagdad nel IX secolo[26]. Nella sua opera *Al-Kitah al muhtasar fu isab al-jabr wa-l-muqabala* (*«Il libro conciso dei calcoli di trasporto e riduzione»*) la stessa algebra, come per i matematici indiani, diventa oggetto di studio: si classificano le equazioni, si verificano i procedimenti seguiti per le risoluzioni[27].

Nella «Quaestio terza» del *Capitolum quaestionum*[28] Al Khuwarizmi presenta un metodo simile a quello di Diofanto per la risoluzione di un sistema di primo grado:

«*Dividi dieci in due parti e dividi una delle due parti per l'altra in modo da ottenere quattro*».

Per noi si tratta di trovare due numeri x e y tali che:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ \dfrac{y}{x} = 4 \end{cases}$$

Come Diofanto anche Al-Khuwarizmi usa una sola incognita («res»), fornendo però in maniera esplicita il metodo di risoluzione. Con il nostro simbolismo:

$$\frac{10 - x}{x} = 4$$

Al Khuwarizmi aggiunge: «*Già sai che quando moltiplicherai il risultato della divisione per il divisore, otterrai quanto dovevi dividere*», cioè:

$10 - x = 4\,x$

Si isola quindi il 10 dall'incognita x:

$10 = 5\,x$ da cui infine $x = 2$ (e $y = 8$)

Anche i matematici arabi hanno usato il metodo della *doppia falsa posizione*, che, come detto, è di origine indiana. Questo metodo si ritrova nel *Liber Abaci* (1202) di Leonardo Pisano, che lo chiama *elchatayn*, che in arabo vuol dire appunto «doppia falsa posizione».

25. Si veda (Maracchia, 2005, p. 50-55).
26. Muhammed ibn Musa Al-Khuwarizmi (780-850), matematico e astronomo, è riconosciuto con Diofanto come il padre dell'algebra.
27. Come noto il termine *algebra* deriva proprio da *al-jabr*, che significa trasporto. Anche il termine *algoritmo*, viene fatto risalire alla latinizzazione del nome di Al-Khuwarizmi.
28. La prima versione latina dell'opera di Al-Khuwarizmi con il titolo *liber maumeti filii moysi alchoarismi de algebra et almuchabala* si deve a Gerardo da Cremona (Cremona 1114-Toledo 1187), che fu un famoso traduttore di opere scientifiche arabe.

La doppia falsa posizione consiste nel determinare un valore incognito y sapendo che per esso si ottiene, mediante un determinato procedimento assegnato, il risultato noto x. Se si scelgono due valori arbitrari (o «falsi») y_1 e y_2 si ottengono mediante le condizioni del problema due corrispondenti valori x_1 e x_2. Supponendo una proporzionalità diretta tra le variazioni della x e della y, si costruisce una proporzione grazie alla quale si ricava il valore incognito y. Ad esempio, ammettendo che $x < x_1 < x_2$, il ragionamento di Leonardo Pisano conduce alla proporzione

$$(y_2 - y_1) : [(x_2 - x) - (x_1 - x)] = (y_1 - y) : (x_1 - x)$$

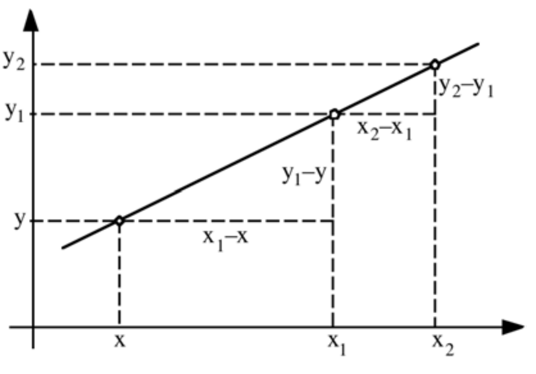
cioè

$$(y_2 - y_1) : (x_2 - x_1) = (y_1 - y) : (x_1 - x)$$

da cui

$$y = y_1 - \frac{(y_2 - y_1)(x_1 - x)}{(x_2 - x)}$$

L'interpretazione analitica di questa proporzione è immediata e si ottiene, per la supposta proporzionalità, dalla similitudine dei triangoli rettangoli.



Ecco un esempio tratto dal *Liber Abaci*:

«*Un certo lavoratore avrebbe dovuto prendere 7 soldi* (*bisantios*) *al mese se avesse lavorato* [tutto il mese] *e altrimenti avrebbe dovuto restituire 4 soldi al padrone per un intero mese* [non lavorativo]: *questi talvolta lavorò e talvolta no, così che, alla fine del mese ricevette dal padrone 1 soldo; si domanda quanti giorni dello stesso mese lavorò*»[29].

29. Noi tradurremmo il problema, indicando con x il numero dei giorni lavorativi, con $\frac{7}{30} \cdot x - \frac{4}{30} \cdot (30 - x) = 1$ da cui $x = \frac{150}{11} = 13 + \frac{7}{11}$

Applicando la *doppia falsa posizione*, Leonardo suppone $y_1 = 15$ e $y_2 = 20$ giorni lavorativi e calcola i corrispondenti x_1 e x_2:

$$y_1 = 15 \qquad x_1 = \frac{1}{2}\cdot 7 - \frac{1}{2}\cdot 4 = \frac{3}{2}$$

$$y_2 = 20 \qquad x_2 = \frac{2}{3}\cdot 7 - \frac{1}{3}\cdot 4 = \frac{10}{3}$$

Sapendo che $x = 1$, si ha la proporzione:

$$(20-15):\left(\frac{10}{3}-\frac{3}{2}\right) = (15-y):\left(\frac{3}{2}-1\right) \text{ da cui } y = 15-\frac{15}{11} = \frac{150}{11} = 13+\frac{7}{11}$$

7. Conclusione

L'esame dell'algebra relativa alle equazioni di primo grado consente già di osservarne lo sviluppo a partire dalle prime tavolette e dai papiri egiziani in cui i problemi si presentano con uno spirito algebrico. Si cominicia a osservare metodi standard come la *falsa posizione* a metà strada tra aritmetica e algebra.

Indiani e Arabi sviluppano un'attitudine algebrica superiore: come aveva fatto Diofanto si dà un nome all'incognita, alle operazioni da eseguire e grazie all'opera di Al-Khuwarizmi anche all'algebra stessa. La semplicità delle equazioni di primo grado non consente però di valutare il vero sviluppo dell'algebra stessa, che si può osservare meglio nelle equazioni di grado superiore al primo.

Bibliografia

Bagni G.T. (1996). *Storia della matematica, Volume I, Dall'Antichità al Rinascimento.* Bologna: Pitagora.
Boyer C. (1980). *Storia della matematica.* Milano: Mondadori.
Bunt L., Jones P., Bedient J. (1983). *Le radici storiche delle matematiche elementari.* Bologna: Zanichelli.
Gheverghese G.J. (2003). *C'era una volta un numero. La vera storia della matematica*, Milano: Il saggiatore.
Giusti E. (a cura di). (2002). *Un ponte sul Mediterraneo. Leonardo Pisano, la scienza araba e la rinascita della matematica in Occidente*. Firenze: Edizioni Polistampa.
Kline M. (1991) *Storia del pensiero matematico, Volume I, Dall'Antichità al Settecento.* Torino: Einaudi.
Loria G. (1987) *Le scienze esatte nell'antica Grecia*. Milano: Cisalpino-Goliardica.
Maracchia S. (2005). *Storia dell'algebra*. Napoli: Liguori.

3. Le equazioni dell'atmosfera: matematica e meteorologia

Stefano Leonesi[1]

In this paper we propose and briefly discuss some mathematical aspects of meteorology and weather forecasts: the role of the main equations governing atmosphere and the difficulties to solve them.

Premessa

La meteorologia è la scienza che studia l'atmosfera e le leggi che ne regolano il comportamento. Tali leggi possono essere espresse attraverso equazioni fisico-matematiche che tengono conto del modo in cui i parametri atmosferici, come temperatura, umidità, pressione, direzione e velocità del vento, evolveranno nel tempo rispetto ai valori attuali. La risoluzione esatta di queste equazioni fornirebbe una descrizione dello stato futuro dell'atmosfera, ovvero una previsione, o meglio una certezza, dedotta a partire dalla conoscenza esatta delle sue condizioni iniziali. Ma le cose, nella pratica, non risultano affatto così semplici e lineari. Proviamo a capirne il perché.

Le equazioni che regolano l'atmosfera

Per moti su scale maggiori della distanza intermolecolare l'atmosfera può essere considerata un fluido continuo, anziché un insieme discreto di particelle. Ciò rende possibile esprimere le leggi che governano la dinamica e la termodinamica dell'atmosfera attraverso equazioni differenziali alle derivate parziali. Le equazioni fluidodinamiche derivano dai principi di conservazione e di bilancio della massa, della quantità di moto e dell'energia, a cui si possono aggiungere l'equazione di stato dei gas perfetti e altre ancora.

1. Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Camerino; Dipartimento di Scienze della Comunicazione, Università di Teramo; email: stefano.leonesi@unicam.it.

Per rendere più precisamente l'idea, tra le principali equazioni, dette *equazioni primitive,* troviamo:

1. Equazione di conservazione della massa (o Equazione di continuità)

Nell'atmosfera terrestre si assume che non ci siano né pozzi né sorgenti di massa. Per un volume infinitesimo la conservazione della massa risulta

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v})$$

dove il membro di sinistra rappresenta la variazione della densità nell'unità di tempo, mentre il termine di destra è il flusso di massa (ρ rappresenta la densità).

2. Equazione di conservazione della quantità di moto (o di bilancio, o ancora Secondo principio della dinamica)

Afferma che la variazione della quantità di moto in un volume è data dalle forze sulla superficie di tale volume, più le forze agenti sull'intero volume. Se è costante, la si può trasformare nella forma vettoriale equivalente

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} + \vec{F}_r - 2\,\vec{\Omega} \times \vec{v}$$

dove l'operatore

$$\frac{D(\,)}{Dt} = \frac{\partial(\,)}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)(\,)$$

è detto *di derivata totale*. L'equazione indica allora che la variazione della velocità $\vec{v}$ lungo il moto naturale della masserella infinitesima – cioè l'accelerazione – è determinata dal gradiente di pressione

$$\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p$$

che agisce su di essa, dai contributi della gravità $\vec{g}$, delle forze non conservative (viscose) $\vec{F}_r$ e della forza di Coriolis $-2\,\vec{\Omega} \times \vec{v}$: questo ultimo termine nasce dal considerare la terra come un sistema di riferimento rotante.

3. Equazione di conservazione dell'energia (o Primo principio della termodinamica)

Deriva dal primo principio della termodinamica $\partial Q = p\,dV + dU$. L'equazione afferma che il calore ∂Q ceduto a una masserella d'aria è uguale al lavoro effettuato $p\,dV$ più la variazione della sua energia interna U.

Tali equazioni fondamentali possono essere integrate da altre, come quella dei **gas perfetti** o la seguente.

4. Equazione dell'equilibrio idrostatico

Discende dall'assunzione che l'atmosfera sia in equilibrio lungo la verticale, cioè che la pressione assuma dei valori in verticale tali da contrastare la forza di gravità; in formule:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

dove p è la pressione, g l'accelerazione di gravità, e ρ la densità.

Per sistema di *Equazioni di Navier-Stokes* si intende proprio la formalizzazione matematica dei principi fisici di bilancio ai quali i fluidi, imposta la condizione di continuo, sono costretti a sottostare. Il nome deriva da quelli del matematico e ingegnere francese Claude-Louis Navier (1785-1836), che per primo diede una descrizione differenziale del moto dei fluidi incomprimibili, e del fisico irlandese George Gabriel Stokes (1819-1903), che ne derivò la formulazione matematica.

Caos, farfalle e previsioni incerte

Da quanto detto, emerge che la meteorologia è sostanzialmente la meccanica e termodinamica dei fluidi applicata all'atmosfera. Ma l'atmosfera è un sistema di fluidi estremamente complesso: differenze di temperatura tra luoghi diversi creano differenze di pressione che regolano direzione e intensità dei venti, i quali a loro volta trasportano anche vapore acqueo, che può condensare e rilasciare calore, alterando così le differenze di temperatura da cui eravamo partiti. Insomma la situazione è assai ingarbugliata e colma di circoli viziosi (feedbacks). Questo rende l'atmosfera un sistema cosiddetto *dinamico caotico*, cioè un sistema che, pur essendo deterministico – la cui evoluzione dipende esclusivamente dal suo passato –, risulta anche difficilmente prevedibile perché assai sensibile alle condizioni iniziali: un errore anche infinitesimo nella conoscenza dello stato del sistema ad un certo istante, è in grado di causare un enorme errore nella previsione futura, specie a medio e lungo termine; per dirla con le parole di Edward Lorenz (1917-2008), recentemente scomparso, «padre» della teoria del caos, «*le equazioni differenziali che regolano l'atmosfera, a causa della loro non linearità, sono in realtà molto sensibili alle condizioni iniziali; per cui anche cambiando di pochissimo le condizioni di partenza del sistema dinamico ad esse associato, l'evoluzione, a causa di una divergenza esponenziale di traiettorie inizialmente vicine nello spazio delle fasi, assume stati del tutto differenti*». Lo stesso Lorenz coniò per questa situazione il termine di «*effetto farfalla*».

Tornando alle equazioni di Navier-Stokes, in effetti risultano in genere estremamente complesse e non ammettono soluzioni analitiche esatte che possano fornirci con certezza i valori futuri previsti dei parametri meteorologici. Conseguentemente, a meno di accontentarsi di equazioni molto semplificate che siano sì risolubili esattamente quanto però inattendibili, è necessario ricorrere a metodi numerici che forniscano soluzioni *approssimate* delle equazioni primitive. Tuttavia, a causa dell'enorme mole di calcoli di cui si abbisogna, è solo a partire dagli anni '50, e con il successivo avvento di computer di potenza sempre maggiore, che è stato possibile impostare le previsioni del tempo basandosi – seppur in modo numerico approssimato – direttamente sulle leggi che governano il comportamento dell'atmosfera.

Ne consegue che le previsioni meteorologiche appaiono oggi sempre più precise e raffinate, grazie anche ai progressi concettuali e tecnologici, ma non potranno svincolarsi dall'intrinseca limitatezza imposta dai fattori caotici.

I modelli fisico-matematici per le previsioni del tempo

Un modello fisico-matematico previsionale può essere definito come un'ipotesi concettuale o numerica sull'evoluzione del fenomeno o delle variabili da prevedere. Di seguito è proposto un possibile schema di funzionamento di un modello.

1. Definizione della griglia
2. Definizione delle condizioni iniziali e al contorno
3. Risoluzione numerica delle equazioni
4. Post analisi e verifica dell'attendibilità dei risultati
5. Correzione del modello

Il compito fondamentale di tali modelli è di risolvere numericamente il sistema di equazioni a partire da condizioni iniziali date e da condizioni al contorno definite. Per i modelli meteorologici le condizioni iniziali di temperatura, pressione, umidità e vento sono fornite dalle reti di osservazioni meteorologiche sia di superficie che in quota; queste ultime sono costituite da palloni sonda dotati di sensori e di trasmettitori radio. Le condizioni al contorno si suddividono in laterali, superiore ed inferiore; per esempio si può assumere che le tre componenti del vettore velocità siano nulle al suolo o che i fenomeni che si formano all'interno del dominio del modello possano uscire dal dominio stesso senza riflessione verso l'interno, o altro ancora.

Unitamente alle condizioni iniziali e al contorno è necessario definire una griglia che ricopra una parte o tutto il globo, comprendendo diversi livelli dell'atmosfera, sui nodi della quale risolvere il sistema di equazioni e quindi determinare i valori previsti di temperatura, pressione, vento, umidità etc. La rappresentazione dei campi meteorologici con valori numerici approssimati, detta *discretizzazione*, evidenzia i limiti del metodo numerico. Più la griglia è fitta, tanto più numerosi sono i valori da trattare e tanto più costosa è la soluzione in termini di tempo di calcolo (necessariamente limitato se vogliamo che la previsione abbia un senso); meno numerosi sono i nodi tanti più errori di approssimazione avremo.

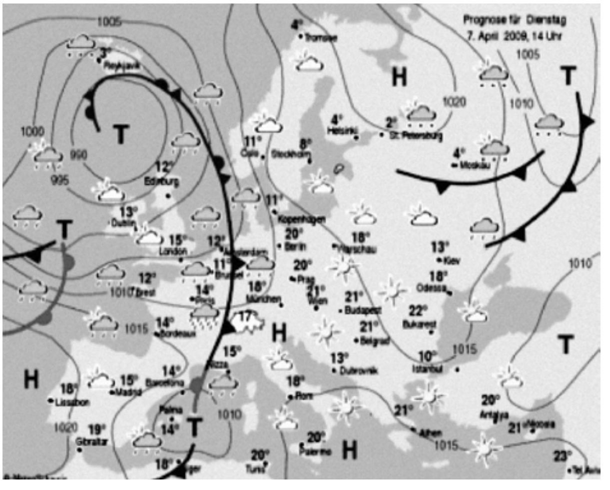


Figura 1 Quadro della previsione meteorologica fornita da MeteoSvizzera per il 7.4.2009.

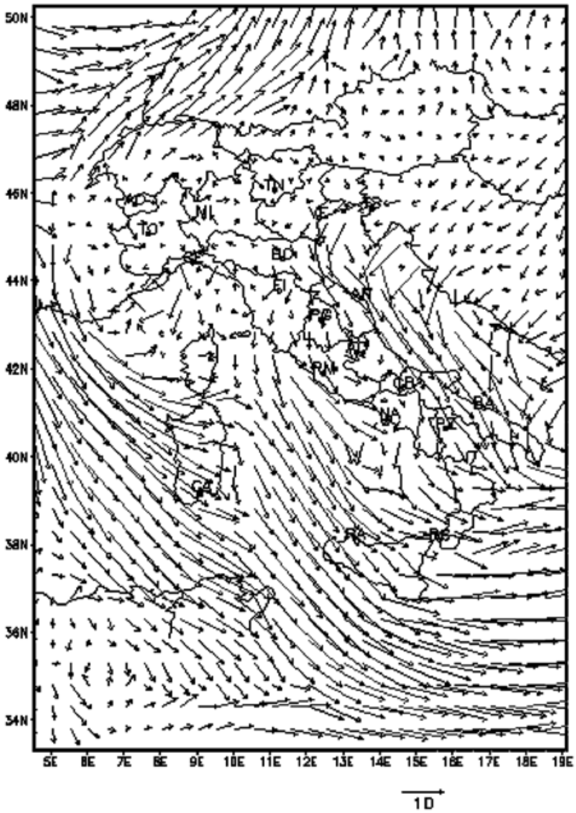


Figura 2 Progetto LAMI. Aeronautica Militare, Reggio Emilia. Carta dei venti.

Approssimazioni e differenze finite

Una delle tecniche maggiormente usate per risolvere numericamente le equazioni differenziali è costituita dai cosiddetti *metodi di approssimazione alle differenze finite* (altri schemi sono il metodo agli elementi finiti, lo schema spettrale, lo schema pseudospettrale, e via dicendo), che consistono essenzialmente in due step:

1. la discretizzazione dei campi delle variabili indipendenti;
2. l'approssimazione delle derivate presenti nelle equazioni – quindi di limiti di rapporti incrementali – con le differenze delle variabili dipendenti rapportate ad intervalli finiti delle variabili indipendenti – dunque approssimate solo con rapporti incrementali –.

L'insieme delle equazioni risultanti può essere poi risolto con metodi algebrici.

Le espressioni adottate per approssimare le derivate sono desunte dalla definizione di sviluppo in serie di Taylor; per esempio, considerando una funzione differenziabile f(x), si ha

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\,\Delta x + \frac{f''(x)\,\Delta x^2}{2} + o(\Delta x^2)$$

da cui, ad esempio troncando alla derivata prima, otteniamo l'approssimazione

$$f'(x) \cong \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

con un ordine di approssimazione pari a o(Δx). La precedente espressione rappresenta una differenza in avanti (*forward*); una differenza centrata è invece data da

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$

Mentre una differenza all'indietro (*backward*) è la seguente:

$$f'(x) = \frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}$$

Per ottenere delle espressioni che approssimano le derivate di ordine superiore, si possono combinare gli operatori differenziali così «discretizzati» e relativi agli ordini inferiori.

Poi per approssimare le derivate spaziali può essere utilizzato il *Metodo dei punti griglia*. Esso consiste nell'introdurre un insieme discreto di punti, disposti su una griglia regolare, cioè tale che divida in un numero intero di intervalli di uguale lunghezza la regione in cui si desidera calcolare la soluzione delle equazioni. Sia f(x) la funzione che si desidera discretizzare sulla griglia, la variabile indipendente assumerà i valori $x = i \cdot \Delta x$ con $i = 0,1,2,...,n$ dove Δx è la lunghezza del passo di griglia. La funzione f, valutata sul punto di griglia i, la indichiamo con $f_i = f(i \cdot \Delta x)$. Ora si possono costruire gli schemi:

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_i \cong \frac{f_{i+1}-f_i}{\Delta x} \qquad \text{(forward)}$$

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_i \cong \frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2\,\Delta x} \qquad \text{(centrato)}$$

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_i \cong \frac{f_i-f_{i-1}}{\Delta x} \qquad \text{(backward)}$$

Per approssimare le derivate temporali si possono utilizzare schemi analoghi, ad esempio gli schemi di Eulero, di Leapfrog, trapezoidale, che in questo lavoro citiamo solamente.

Un problema del millennio

Parliamo ancora delle equazioni di Navier-Stokes, le equazioni principe che descrivono i processi fluido-dinamici, legandole stavolta ad un premio di ben 1 milione di dollari! Come detto, finora non sono note formule risolutive analitiche che le risolvano in modo esatto, e neanche sappiamo se tali formule possano esistere; si deve altresì ammettere candidamente che i progressi in questa direzione sono stati relativamente modesti nel corso di più di un secolo. A sancire l'estrema importanza e complessità della problematica è l'inserimento nel 2000 da parte del *Clay Mathematics Institute* di Cambridge, Massachusetts, proprio della questione dell'*esistenza e regolarità delle soluzioni delle equazioni di Navier-Stokes* tra i sette problemi più importanti del millennio, a fianco di questioni della portata di P = NP o dell'Ipotesi di Riemann. Qui ne riportiamo la descrizione originale:

«*Waves follow our boat as we meander across the lake, and turbulent air currents follow our flight in a modern jet. Mathematicians and physicists believe that an explanation for and the prediction of both the breeze and the turbulence can be found through an understanding of solutions to the Navier-Stokes equations. Although these equations were written down in the 19th Century, our understanding of them remains minimal. The challenge is to make substantial progress toward a mathematical theory which will unlock the secrets hidden in the Navier-Stokes equations*».

Chiunque apportasse contributi sostanziali alla questione avrebbe diritto appunto a un milione di dollari – oltre a onore e gloria, naturalmente –.

Per inciso, solo uno dei sette problemi del millennio è stato sinora risolto: la congettura di Poincaré, nel 2002, dal russo Grigorij Perelman.

Previsioni fai da te?

Concludiamo queste brevi note constatando che l'avvento di internet ha concesso la possibilità agli appassionati, o semplicemente curiosi, di imparare a farsi le previsioni del tempo comodamente dal proprio computer. È evidente che occorre almeno una conoscenza di base delle principali leggi che regolano l'atmosfera, dei principali parametri meteorologici e di come interpretare le mappe elaborate dai modelli di previsione. Molti dei centri nazionali e internazionali di meteorologia mettono infatti a disposizione gratuitamente sul web una porzione – talvolta corposa – delle carte elaborate dai loro modelli ad area globale, o emisferica, e comunque con passo griglia in genere di circa 50 km, o ad area limitata – con passo griglia solitamente dell'ordine dei 5-20 km –.

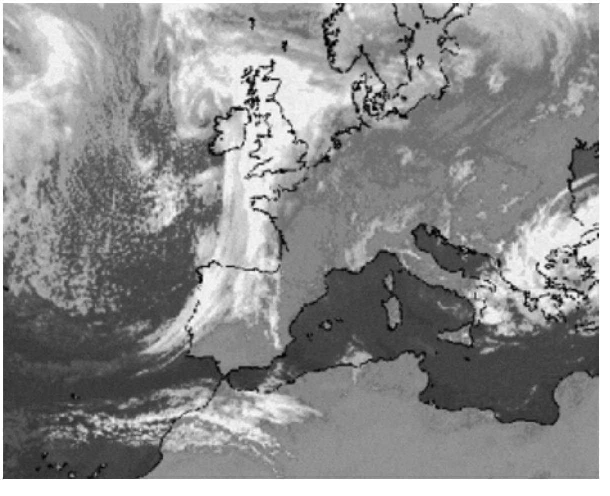


Figura 3 Immagine ottenuta con raggi infrarossi dal satellite MeteoSat-8 il 6.4.2009 alle 12.00.

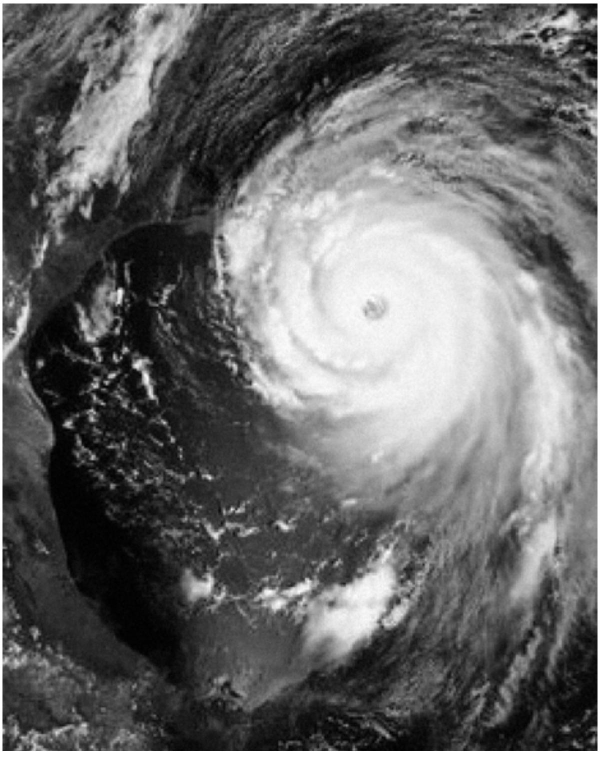


Figura 4 Ciclone.

Bibliografia

Dunlop S. (2006). *Che tempo fa*. Milano: Vallardi.
Dutton J. A. (1995). *Dynamics of Atmospheric Motion*. New York: Dover.
Giuffrida A., Sansosti, G. (2006). *Manuale di meteorologia. Una guida alla comprensione dei fenomeni atmosferici e climatici*. Roma: Gremese Editore.
Hanblyn R. (2001). *L'invenzione delle nuvole. La storia affascinante della nascita della meteorologia*. Milano: Rizzoli.
Holton J. R. (1997). *An introduction to dynamic meteorology*. Oxford: Academic Press.
Melsa J. L., Sage A. P. (1973). *An Introduction to Probability and Stochastics Processes*. New Jersey: Prentice Hall.
Nakamura S. (1977). *Computational Methods in Engineering and Science*. New York: Wiley.
Nebeker F. (1995). *Calculating the weather: meteorology of the 20th century*. San Diego: Academic Press.
Pasini A. (2003) *I cambiamenti climatici. Meteorologia e clima simulato*. Milano: Bruno Mondadori.
Smith G. D. (1985). *Numerical Solution of Partial Differential Equations*. Oxford: Clarendon Press.
Wilson F., Dunlop S. (1989). *Guida alla previsione del tempo*. Bologna: Zanichelli.

4. Arte e Matematica: un connubio divertente

Nuovi approcci didattici nell'insegnamento della matematica attraverso l'utilizzo dell'arte

Marcella Giulia Lorenzi[1], Mauro Francaviglia[2]

A fruitful interaction between arts and mathematics can improve the efficacy and appeal of mathematical teaching, in particular through the adoption of a Kleinian paradigm (based on the concept of structure and on its symmetry). In this paper, we present a brief outline of several experimentations performed in the context of mathematical education through ICT. We highlight in particular the parallelism between several approaches followed in arts and mathematics and we discuss new educational activities based on the use of ICTs.

1. Introduzione
Proposte per una nuova didattica della matematica attraverso l'arte

Come già evidenziato altrove (Lorenzi, Francaviglia, 2008), un'epoca di forte spinta verso un insegnamento di natura sempre più «funzionale» sta attraversando la didattica delle Scienze, portando a ridurre tutto quello che non è considerato essere «immediatamente professionalizzante». Questa rivoluzione ha purtroppo attraversato anche il comparto della Matematica, sulla scia di una sua sempre più pressante «astrattizzazione», con la progressiva perdita di contatto tra essa e gli aspetti più «emotivi» dell'apprendimento e la rinuncia, spesso voluta e non occasionale, all'utilizzo degli strumenti visivi e degli aspetti intuitivi, per dare uno spazio sempre più crescente ai pur fondamentali e utilissimi aspetti algebrico-deduttivi e allo strumento di calcolo analitico. Questa spinta ha di fatto reso la Matematica «moderna» più lontana da quegli aspetti immaginifici e «immediati» che, per secoli, ne avevano caratterizzato la crescita e il continuo accostamento al resto del Sapere, allargando il solco tra la Matematica e le giovani generazioni e generando l'identificazione della Matematica con una disciplina «fredda e rigorosa» piuttosto che «calda e appassionante». I docenti di matematica si trovano quindi a dover fare delle scelte non facili, relativamente agli argomenti da introdurre nei programmi di studio; e gli studenti guardano alla Matematica come a uno strumento da apprendere in breve tempo e subito utilizzare, rinunciando così a trasmettere e/o a recepire le connessioni tra il progresso scientifico, il pensiero matematico e la «vita quotidiana».

Convinti che una prassi didattica importante nell'insegnamento della Matematica sia invece quella di trasmetterne anche la quotidianità e la sua vicinanza agli aspetti umanistici della Cultura, e non solo a quelli di natura strettamente scienti-

1. Laboratorio per la Comunicazione Scientifica dell'Università della Calabria, Ponte Bucci, Cubo 30c, 87037, Arcavacata di Rende CS; e-mail: marcella.lorenzi@unical.it.
2. Dipartimento di Matematica, Università di Torino, Via Carlo Alberto 10, 10123, Torino (TO); e-mail: mauro.francaviglia@unito.it.

fica[3], abbiamo sviluppato un nuovo approccio all'insegnamento della Matematica e delle sue applicazioni, fortemente basato sui legami che essa presenta con il mondo dell'Arte. Una metodologia che «insegna» a riconoscere la Matematica «implicita» nelle diverse situazioni, spesso contenuta in «oggetti» apparentemente lontani da essa – come quadri, sculture, opere architettoniche, brani musicali – che sono spesso realizzati seguendo apposite Geometrie, rapporti numerici, proporzioni; in una parola, che sottilmente presentano, spesso nascondendole ma spesso anche esaltandole, diverse «Strutture Matematiche».

Non si tratta, ovviamente, di una scoperta eclatante, perché i rapporti tra Arte e Matematica sono già ben noti ed ampiamente visitati; si tratta, piuttosto, di un nuovo approccio, che cercheremo di sintetizzare in questa Nota, da noi originariamente predisposta per gli atti del Convegno «Mylaematica 2008» (tenutosi a Milazzo dal 26 al 29 marzo 2008 e dedicato ad alcune nuove frontiere della Didattica della Matematica). Per una versione più estesa si rimanda a (Lorenzi, Francaviglia, 2008) e all'ampia bibliografia ivi contenuta. Più precisamente è stato sviluppato un percorso didattico di «Matematica nell'Arte» che si propone di rapportare la Matematica, nel suo sviluppo storico e nella sua modernità, alle discipline artistiche, siano esse figurative, plastiche, visive, acustiche o costruttive; si sono avviati studi relativi all'uso di nuove tecnologie didattiche e informatiche legate all'Arte (tradizionale o «digitale») per un più efficace insegnamento e per una più adeguata comunicazione dei contenuti scientifici; e, in parallelo, si è anche sviluppato un percorso di natura interdisciplinare che veda l'Arte come «strumento di ingresso» per la presentazione e la trasmissione di concetti matematici astratti.

La metodologia didattica da noi elaborata privilegia, sul piano formale, lo studio delle strutture (lo spazio percepito e rappresentato è, in realtà, uno spazio strutturato), delle loro trasformazioni (spesso nascoste nell'Arte Classica e alquanto dinamiche nell'Arte Moderna e Contemporanea) e dei Gruppi di composizione delle loro stesse trasformazioni. In sostanza, si tratta di un approccio basato sulla Geometria delle Trasformazioni e pienamente nello spirito del «Programma di Erlangen» di Felix Klein. In questo contesto noi proponiamo la lettura «diretta» delle strutture matematiche insite in un oggetto d'Arte, con sostanziale rovesciamento del paradigma: non «quanta Matematica sia presente nell'Arte» (cosa del resto ben nota) bensì la scoperta progressiva di quanta struttura sia nascosta nell'armonia o nella apparente disarmonia di un'opera d'arte. L'Arte viene quindi proposta per prima, al livello delle emozioni, mentre la Matematica «astratta» viene successivamente, nel suo fondamentale ruolo di chiave interpretativa e unificante. Questo percorso prevede anche la nascita di un «Portale di Arte e Matematica» del tutto innovativo, al crocevia tra questi due aspetti della Cultura classica, moderna e contemporanea[4], tuttora in fase di progettazione.

La Matematica si è sviluppata in parallelo e talvolta in modo precursore non solo con il pensiero scientifico, ma anche con il nostro modo di percepire, descrivere e rappresentare il mondo sensibile per mezzo dell'Arte. La nostra storia culturale mostra infatti la vicinanza dei legami tra la Matematica – come mezzo per scoprire e descrivere la realtà – e l'Arte, che tende ad esprimere o rappresentare la realtà. La transizione dalla Geometria Euclidea del tempo degli antichi Greci alla Geometria della

3. Cfr. per esempio (Emmer M., 2000-2005, 1994, 2008), (Francaviglia, Lorenzi, 2008), (Francaviglia, Lorenzi, Pantano, 2008).
4. Cfr. (Lorenzi, Francaviglia, 2008) e bibliografia ivi citata.

Prospettiva nel Rinascimento, alla Geometria Non-Euclidea del XVIII e XIX secolo, sino allo sviluppo della Geometria delle «forme topologiche» nel XX secolo, può e deve essere vista come controparte dei paradigmi statici dell'Arte e dell'Architettura dell'antichità, al concetto di «bel dipingere» – attraverso l'esattezza e la ricostruzione – di Pier della Francesca, all'evoluzione delle forme artistiche nel XIX secolo (Divisionismo, Espressionismo, Impressionismo) sino alla completa distruzione della simmetria nelle forme moderne, contemporanee e di avanguardia artistica (Cubismo, Pit-tura Frattale e così via). Nel Rinascimento l'artista era un uomo completo: pittore, scultore, architetto, matematico ed anche scienziato. La necessità per i pittori di rappresentare fedelmente il mondo tridimensionale in solo due dimensioni condusse poi alla nascita della Geometria Proiettiva, mentre ulteriori ricerche volte sulle rette parallele hanno successivamente condotto alla nascita della Geometria cosiddetta «Non-Euclidea» (preludendo, in campo artistico, allo sviluppo dell'Impressionismo e dell'Arte del Novecento). Il XIX e XX secolo – attraverso nuove concezioni di Spazio, di Tempo e di Movimento – hanno poi condotto a comprendere che moto e curvatura sono una parte integrante del Mondo e non qualcosa di immerso in esso. L'Arte contemporanea ha quindi visto l'introduzione del Tempo come quarta dimensione sensibile, mentre un vero «Dinamismo in Arte» è finalmente raggiunto solo con l'introduzione della fotografia e successivamente della cinematografia. Facendo scorrere le immagini per ricostruire un oggetto con una dimensione in più, fatto reso ormai comune dalle applicazioni della «Computer Graphics», si può anche operare nelle Arti Figurative (si pensi alle opere di Picasso, di Balla, di Duchamp; oppure al cubo a quattro dimensioni di Dalì, che si apre nello spazio tridimensionale). Con il XX secolo si aprono sia per la Matematica sia per l'Arte nuovi spazi di indagine sul concetto di Spazio: la nuova Matematica del Novecento è anche la Matematica delle Varietà, della Curvatura e della rivincita del Discreto; nascono i Frattali e si fa strada la Teoria del Caos, e molte ricerche «moderne» nel fare Arte riflettono queste nuove idee (Pollock e il movimento Frattalista); ma bisogna ricordare anche Corneliis Escher, inventore di spazi apparentemente impossibili e di disegni fantastici basati sulla ripetitività e sull'autosimilarità frattale, nella Geometria Iperbolica; e che dire di Kandiskii…?

Esistono quindi molteplici connessioni tra Arte e Matematica, ormai universalmente riconosciute, anche se spesso la prospettiva con cui si guarda a esse tende a privilegiare l'aspetto strettamente matematico rispetto a quello artistico. Il nostro progetto si pone l'obiettivo di rovesciare questa tendenza: utilizzare l'Arte come fonte di interesse verso la Matematica, tendendo a creare una comprensione «progressiva» nella quale l'Arte venga per prima (lato estetico ed emotivo) stimolando il bisogno e il desiderio di penetrare più a fondo nelle strutture matematiche soggiacenti. Evidenziando l'influenza che l'Arte ha storicamente avuto sullo sviluppo di specifiche parti del «pensiero matematico», non solo per rendere più divertente l'approccio alla Matematica attraverso stimoli di natura «estetica», ma anche di fornire preziosi strumenti per approfondire l'insegnamento e l'apprendimento della Matematica lungo le linee guida indicate nei «*Mattoncini*» dell'U.M.I. (Accascina, Anichini, Anzellotti, Rosso, Villani, Zan, 2006).

In questa nota focalizzeremo la nostra attenzione su due recenti ricerche che appartengono alla sfera generale sopra descritta: i) l'uso dei Mandala per una più diretta comprensione delle simmetrie; ii) l'uso di agenti virtuali in un progetto di didattica della Geometria e dell'Artitmetica Pitagorica rivolto alle Scuole Elementari.

2. Didattica della Matematica attraverso i Mandala

2.1. Definizione e Simbolismo del Mandala

La parola Mandala, che significa «*cerchio*», deriva dal Sanscrito; essa indica genericamente un'immagine circolare, di solito associata ad altre forme geometriche o simboli, più frequentemente al quadrato e al triangolo[5]. I Mandala possono essere convenientemente utilizzati in contesti didattici, sia per elaborare modelli multidisciplinari che coniughino l'insegnamento scientifico a quello umanistico, sia per le loro proprietà evocative di forme geometriche primordiali e per la loro esplicita simmetria o dissimmetria volutamente costruita (Francaviglia, Lorenzi, Paese, 2007).

2.2. Struttura matematica del Mandala e uso dei Mandala nella Didattica della Matematica

Molto spesso un Mandala è dato dalla semplice unione di quadrati, triangoli e cerchi concentrici (per esempio, si pensi al Mandala «Kalachakra», di origine tibetana, Fig. 1). Si osservi come emerga l'unione tra il quadrato e il cerchio, data dalla concentricità e dalla mutua inscrizione di tali elementi. Il primo effetto percepito dall'osservatore è quello di una «simmetria del cerchio», ma quando l'attenzione muove verso i livelli più interni un occhio attento può scoprire l'esistenza di altre simmetrie; l'uso dei colori e la presenza di figure simboliche (non geometriche) rompe anche la simmetria del quadrato, a favore di ulteriori livelli di simmetria. L'effetto finale è quello di una «*apparente simmetria del tutto, che contiene in realtà numerosissimi livelli di simmetrie diverse*» (ed anche una struttura «pre-frattale»). Rimandiamo a (Lorenzi, Francaviglia, 2008) per approfondimenti. Un analogo gioco di sovrapposizione di livelli di simmetrie e di simmetrie apparenti è ancora più accentuato nello Yantra induista denominato «Srichakra» (Fig. 2), costruito dalla sovrapposizione di nove triangoli isosceli, quattro orientati a Nord e cinque orientati a Sud. Anche in questo caso l'impressione di insieme è quella di una simmetria completa, che viene invece perduta focalizzando l'attenzione al suo centro, dove il quinto triangolo, pur mantenendo la simmetria lungo l'asse verticale, rompe la simmetria lungo quello orizzontale e fornisce quindi, sottilmente, una direzione al diagramma.

L'utilizzo dei Mandala in contesti didattici è già stato ampiamente sperimentato[6]. Esistono software specificatamente creati per la costruzione di Mandala e noi stessi abbiamo lavorato sull'ipotesi che sia il disegno stesso del Mandala a migliorare l'apprendimento di alcuni elementi dell'Aritmetica e della Geometria. In una prima applicazione (Francaviglia, Lorenzi, Paese, Sorrentino, 2008) si è utilizzato il software «Adobe Illustrator ®» per realizzare progressivamente, passo a passo, la costruzione dello Yantra «Srychakra» in sei fasi successive. In una seconda applicazione[7] abbiamo introdotto una costruzione geometrica «di tipo mandalico» utilizzando un semplice

5. Cfr. (Francaviglia, Lorenzi, Paese, Sorrentino, 2008), dove viene anche evidenziato il ruolo dei Mandala nel campo della Psicologia Analitica e nella «meditazione».
6. Cfr. (Lorenzi, Francaviglia, 2008) e bibliografia ivi citata.
7. Cfr. (Lorenzi, Francaviglia, 2008), (Francaviglia, Lorenzi, Paese, Sorrentino, 2008), (Francaviglia, Lorenzi, Paese, 2008).

software di grafica e un semplice problema di Aritmetica Modulare, implementato attraverso il programma «® Mathematica 5.2»[8].

Vogliamo concludere questo paragrafo ricordando che dal costruttivismo in poi è stata evidenziata la necessità di cercare nuovi modelli di insegnamento basati su «*un sapere soggettivamente costruito»* e su di un maggior coinvolgimento del discente nel meccanismo stesso dell'apprendimento (*«imparare facendo»* ed «*imparare divertendosi»*). Proprio in questa cornice si collocano le proposte didattiche che coniugano l'Arte alla Matematica, si che Pittura, Architettura, Musica possono opportunamente diventare soggetti descrivibili anche attraverso categorie matematiche. Estrinsecando, infatti, la struttura matematica degli oggetti artistici è nostra convinzione che sia possibile «*parlare di Matematica in modo semplice e soprattutto in modo interessante».* Basandosi sulla teoria dei «Neuroni Specchio» si è cercato in lavori successivi[9] di mostrare anche come le «*antiche conoscenze sugli effetti psicofisiologici della meditazione»* possono contribuire a indicare nuove metodologie di insegnamento più efficaci e più utili al soggetto, mediate dai meccanismi di tipo «riflessivo».

Figura 1 Il Mandala «Kalachakra» (Tibet).

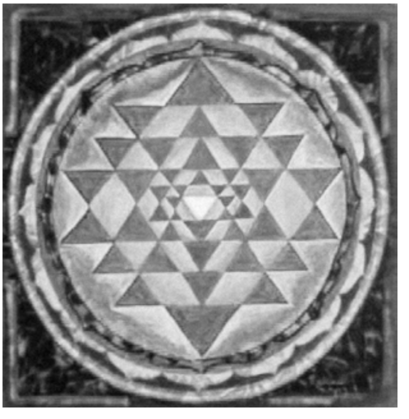


Figura 2 Lo «Srichakra», uno Yantra Induista.

3. Strumenti di Arte Digitale per nuove forme di insegnamento della Matematica

Oltre alle sperimentazioni di cui sopra, le nuove tecnologie offerte dall'Arte Digitale possono essere anche utilizzate per introdurre, attraverso la multimedialità, nuovi e più efficaci strumenti di insegnamento in Matematica e in Fisica. Citiamo innanzitutto l'uso da noi fatto di un agente virtuale (un «avatar» con le sembianze di Albert Einstein) appositamente creato all'interno di un percorso divulgativo sulla Teoria della Relatività Speciale, prodotto nel 2005 per l'Anno Mondiale della Fisica[10], presente sul «Portale della Ricerca Italiana» come «Speciale Divulgativo»[11].

8. Ibidem, per alcune immagini realizzate nel contesto.
9. Cfr. la bibliografia citata in (Lorenzi, Francaviglia, 2008).
10. DVD del «Pirelli Relativity Challenge», citato nella bibliografia.
11. Fatibene L. Francaviglia M. Lorenzi M.G. Mercadante, citato nella bibliografia e recentemente pubblicato in forma estesa in una monografia divulgativa (Lorenzi, Fatibene,

Agenti virtuali

Per raggiungere risultati di Visualizzazione Scientifica in linea con la necessaria compresenza di rigore e di efficacia comunicativa[12] è utile se non addirittura necessario far uso di metodologie grafiche e audiovisive specializzate e coerenti, che attraverso tecniche di Arte Digitale permettano di coniugare prodotti di elevata qualità grafica con una struttura tecnico-scientifica rigorosa. Sia per produrre oggetti di Comunicazione Scientifica, ma anche per fornire adegauti strumenti di insegnamento a un livello più efficiente e accattivante. L'impatto visivo delle strutture «virtuali» è certamente fondamentale per migliorare la capacità di questi prodotti nello stimolare e attirare l'interesse degli utenti, aiutando ad «ammorbidire» tutte quelle difficoltà comunicative che sono intrinsecamente correlate alla trasmissione di un messaggio scientifico astratto che, di regola, è lontano dall'esperienza comune.

3.2. Un progetto per insegnare la Geometria Euclidea in maniera divertente attraverso una serie di video didattici

Nell'ottica descritta sopra si è recentemente avviata la definizione di un percorso didattico nei settori della Geometria Euclidea del Piano e dell'Aritmetica Pitagorica (pensato per un insegnamento a livello di Scuola Elementare), da convertirsi in una serie di quattordici lezioni «sceneggiate» raccolte in una serie di video e prodotti multimediali[13]. Gli accorgimenti «tecnici» di produzione di questi video didattici sono ampiamente descritti in (Francaviglia, Lorenzi, Senatore, Talarico 2007), all'interno del «*context based design»*). Vogliamo qui, invece, soffermarci brevemente sui contenuti didattici e su alcuni «accorgimenti visuali» di cui ci siamo serviti per rendere il prodotto ben saldo sul piano didattico e del rigore nonché divertente per un pubblico di giovanissimi studenti. Si rimanda a (Lorenzi, Francaviglia, 2008) per ulteriori approfondimenti.

Gli specifici argomenti da noi scelti all'interno dell'Aritmetica Pitagorica e delle basi della Geometria Euclidea del piano seguono un percorso logico e parzialmente deduttivo, che si basa principalmente sulla «uguaglianza di figure» (criteri di congruenza ed equivalenza; criteri di similitudine di triangoli e di altre figure poligonali più complicate). Le lezioni si snodano in modo lineare, partendo dai concetti più elementari (punti, linee, angoli, figure piane, poligoni regolari, circonferenze), che vengono introdotti in modo non assiomatico ma piuttosto in modo visivo-intuitivo, non disdegnando di utilizzare anche un punto di vista più vicino alla visione Kleiniana, cioè privilegiando soprattutto gli aspetti legati alle trasformazioni di queste figure: movimenti rigidi e trasformazioni conformi (rotazioni, tralsazioni e dilatazioni). L'uso dello strumento multimediale, infatti, permette di far muovere le figure (o loro parti) rigidamente nel piano, sì che l'occhio veda le sovrapposizioni (o le mancate sovrapposizioni) mentre le voci degli «attori» commentano la grafica, fornendo spiegazioni su quanto sta accadendo e, quindi, sui concetti matematici nascosti nelle immagini. Vogliamo ancora una volta sottolineare come l'ausilio visivo della strumentazione di stampo «mec-

Francaviglia, 2007) con allegato un DVD contenente testi di approfondimento, un video e un prodotto multimediale dal titolo «$E=mc^2$».

12. Cfr. (Francaviglia, Lorenzi, 2008) e (Francaviglia, Lorenzi, Pantano, 2008).
13. Cfr. (Lorenzi, Fatibene, Francaviglia, 2007) e (Francaviglia, Lorenzi, Senatore, Talarico (2007).

canico» costituisca di fatto, una della basi storiche della Geometria Euclidea stessa e che, comunque, ne riporta l'essenza dallo studio algebrico-analitico (peraltro potente) allo studio delle trasformazioni rigide del piano, cioè di tutte e solo quelle trasformazioni che – in ossequio al «programma di Erlangen» di Felix Klein – le caratterizzano in termini di invarianza di rette, piani, circonferenze ed angoli. Il tutto di ben più potente efficacia visiva, resa appunto possibile dall'uso dello strumento informatico.

Contemporaneamente vengono spiegate le frazioni e le proporzioni; l'uso accorto delle circonferenze ci permette di introdurre la nozione di distanza tra due punti, mentre metafore basate sull'uso dei colori *(«quanta vernice serve per colorare questi segmenti o queste figure…?»)* permettono di introdurre, in modo elementare, la nozione di misura di una lunghezza o di un'area piana; i bambini impareranno così anche a eseguire le operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione. Uno scopo non marginale è anche quello di mostrare ai bambini come tutti questi fondamentali concetti base della Matematica (Geometria piana, Teoria delle grandezze e loro Misura, Aritmetica dei numeri interi e frazionari) non siano a sé stanti, ma profondamente correlati tra loro; e come, in particolare, la Geometria fornisca sempre un approccio più legato all'intuizione per introdurre in modo più semplice e visivo concetti astratti, solo successivamente esprimibili attraverso formule algebriche o analitiche.

Sono già state integralmente completate la traccia didattica e la sceneggiatura delle quattordici lezioni, con testi pronti ad essere inseriti nell'impianto grafico e gli avatar che fungono da insegnanti. Si sono interamente realizzati due dei quattordici filmati, già testati all'interno di lezioni «pilota». Restano da realizzare le successive dodici lezioni multimediali, unitamente ad un «manuale di accompagnamento» che funga da sostegno per gli insegnanti, guidandoli nella scelta di approfondimenti didattici. Abbiamo infatti voluto costruire una serie di lezioni «autocontenute» che, nello spazio di circa 4-5 minuti ciascuna, introducano in modo visivo e con poche definizioni una serie di concetti, ben definendone alcuni e lasciandone altri a un livello più vago, come «introduzione» a vere e proprie lezioni che solo l'Insegnante può fare, spiegando successivamente i concetti e interagendo con i discenti stessi. Il lettore è rinviato a (Lorenzi, Francaviglia, 2008) per una dettagliata descrizione dei contenuti del percorso stesso.

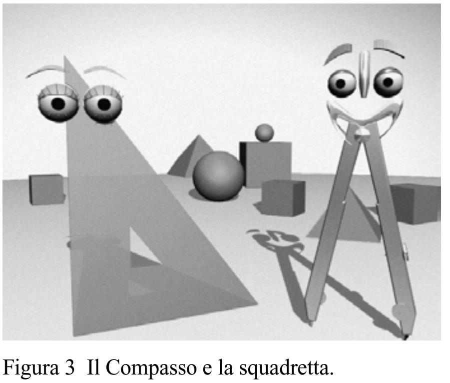


Figura 3 Il Compasso e la squadretta.

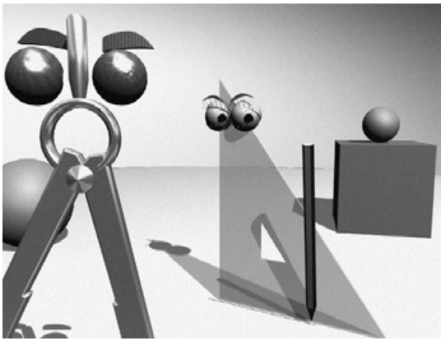


Figura 4 Tracciare segmenti.

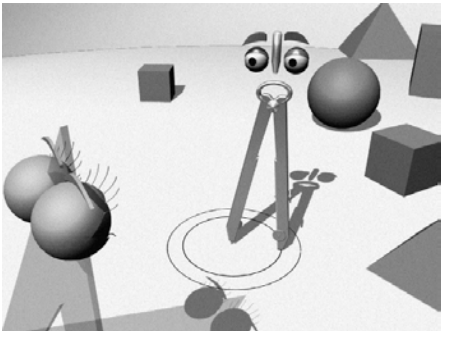


Figura 5 Tracciare circonferenze.

4. Conclusioni

Nei programmi didattici la Matematica costruisce vari livelli di struttura e la sua trasmissione prevede percorsi di insegnamento diversi tra lo specifico ed il particolare (talvolta cosiddetti «discendente» e «ascendente»). Nella nostra ottica, invece, il raggiungimento di migliori scopi didattici si deve avvalere di una sapiente ed equilibrata miscela dei due percorsi. Nel presentare le innumerevoli interazioni tra Matematica e Arte si deve inoltre mantenere, per quanto possibile, anche un atteggiamento «storicista», cogliendo cioè il sottile parallelismo che, nel progresso del pensiero e delle conoscenze, ha visto evolvere nel tempo, in modo profondamente interconnesso, il pensiero matematico, la nostra percezione del mondo fisico e il nostro modo di concepire o sviluppare l'Arte come mezzo per riempire armonicamente, o descrivere e rappresentare esteticamente, oppure trascendere e trasfigurare il mondo sensibile e percepito.

Per ciò che riguarda la progettazione di percorsi disciplinari da rivolgere agli studenti delle scuole, noi riteniamo che un efficace insegnamento della Matematica non può essere pensato solo «in maniera lineare», ma debba invece usufruire di ritorni e approfondimenti su concetti spiegati e introdotti a livelli progressivamente più profondi. In questo il parallelismo tra Arte e Matematica può essere un utilissimo strumento, soprattutto se – come premesso nell'Introduzione – il riconoscimento delle forme presenti nell'Arte (e più in generale nel mondo percepito) precede la loro astrazione in un percorso più propriamente teorico. Si devono inoltre sfruttare più a fondo le nozioni fondanti della «Geometria Sintetica» sviluppata nel XIX secolo, privilegiando le strutture e le loro simmetrie come guida per la comprensione degli oggetti matematici astratti.

Quando si progetta un'attività didattica volta all'acquisizione di un determinato concetto è necessario prestare attenzione sia ai suoi aspetti disciplinari e di carattere tecnico, sia ai suoi aspetti storico-epistemologici, sia e soprattutto agli aspetti di carattere cognitivo. Educare è un atto intenzionale, che richiede una preliminare analisi degli obiettivi da perseguire e delle strategie che bisogna porre in atto per ottenere buoni risultati didattici. Tenendo inoltre in debito conto che la Matematica è troppo spesso percepita come una disciplina esclusivamente astratta e lontana dalla comune esperienza, il che è ovviamente falso e fuorviante. Non sempre i programmi di insegnamento evidenziano i forti legami che la Matematica presenta, invece, con il mondo reale.

Le esperienze di cui si parla in questo articolo sono tutte inerenti a una visione diversa che noi suggeriamo. Una visione che prevede anche un rinnovamento dei contenuti e soprattutto dei metodi, da legare – senza eccessi ma senza paure – all'uso di tecnologie educative moderne e più efficaci. Una rivisitazione basata sull'equilibrato utilizzo dei diversi livelli strutturali di cui la Matematica gode nella sua pienezza, per capire e descrivere lo spazio circostante. Un rinnovamento metodologico che abbandoni schemi rigidi (quello euclideo e quello strettamente kleiniano) ricercando invece un giusto equilibrio tra i diversi approcci, a seconda della tipologia degli studenti cui si indirizza.

5. Ringraziamenti

Si ringraziano Simona Paese, Caterina Senatore, Antonio Sindona e Antonio Sorrentino per il contributo ai lavori e alle ricerche su cui si basa questo articolo.

Bibliografia

Lorenzi M.G. Francaviglia M. (2008). *Arte per una Matematica Divertente,* Volume delle Conferenze Mathesis di Torino AA. 2007-2008 (KimWilliams Books, Torino - in corso di stampa).

Emmer M. (Ed.). *Matematica e Cultura 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005*. Milano: Springer-Verlag.

Emmer M. (Ed.). (1994). *The Visual Mind: Art and Mathematics*. Cambridge (Massachussetts): The MIT Press.

Emmer M. (2008). The Idea of Space in Art, Technology and Mathematics. *Journal of Applied Mathematics APLIMAT, 1 (2)*, 71-82– ISSN 1337-6365 – anche in: *Proceedings 7th International Conference APLIMAT 2008*. Bratislava: M. Kovacova Ed. pp. 647-658 - ISBN 978-80-89313-03-7 (book and CD-Rom).

Lorenzi M.G. Francaviglia M. (2008). Art, Mathematics & Cultural Industry: new Trends in the Digital Era. in: *Proceedings of the ICIAM Minisymposium C/MP/171/H/208 on e-Learning and Applied Mathematics*. Zürich: ICIAM (in corso di stampa).

Francaviglia M. Lorenzi M.G. Pantano P. (2008). Art & Mathematics*. Proceedings of the Conference «Communicating Mathematics in the Digital Era», Aveiro, 15-18 September 2006 (CMDE2006)*. Wellsley (Massachussetts: J.M. Borwein, E.A.M. Rocha & J.F. Rodrigues Eds.; A.K. Peters Ltd., 265-278

Accascina G. Anichini G. Anzellotti G. Rosso F. Villani V. Zan R. (2006). La Matematica per le Altre Discipline – Prerequisiti e Sviluppi Universitari. *Notiziario U.M.I., Anno XXXIII.* Bologna.

Francaviglia M. Lorenzi M.G. Paese S. Sorrentino A. (2008). Mandala Reali e Virtuali nella Didattica della Matematica Attraverso Nuove Tecnologie Educative. *Quaderni di Didattica 6*, 85-105.

Francaviglia M. Lorenzi M.G. Paese S. (2007). The Role of Mandalas in Understanding Geometrical Symmetrie. *Proceedings 6th International Conference APLIMAT 2007*. Bratislava: M. Kovacova Ed. Slovak University of Technology. 315-319 - ISBN 978-80-969562-8-9 (book and CD-Rom) - abstract in: *Book of Abstracts*, ibidem, 47 – ISBN 978-80-969562-9-6.

«Pirelli Relativity Challenge». (2006). DVD-Rom del «Pirelli INTERNETional Award»; M. Armeni ed.; Milano: Pirelli & C. S.p.A. Website: http://www.pirelliaward.com

Fatibene L. Francaviglia M. Lorenzi M.G. Mercadante S. *Una Sfida: Divulgare la Relatività*. Speciale Divulgativo sul Sito Web del Portale della Ricerca Italiana http://www.ricercaitaliana.it/

Lorenzi M.G. Fatibene L. Francaviglia M. (2007). *Più Veloce della Luce: Visualizzare lo SpazioTempo relativistico.* Cosenza: Centro Editoriale e Librario dell'Università della Calabria, 80, con DVD-Rom - ISBN: 88-7458-067-3.

Francaviglia M. Lorenzi M.G. Senatore C. Talarico A. (2007). Agents and Multimedia Technologies for an Innovative Didactics of Mathematics and Physics*. Atti del Convegno «Didamatica 2007».* A. Andronico e G. Casadei Eds; parte I. Bologna: Soc. Ed. Asterisco, 302-311.

Francaviglia M. Lorenzi M.G. Senatore C. Talarico A. (2007). Innovative Didactics of Mathematics and Physics at Elementary Standard of Education using Agents and Multimedia Technologies. *Proceedings of the «11th World Multi-Conference on Systemics, Cybernetics and Informatics: WMSCI 2007, Orlando, Florida, 8-11 July, 2007».* N. Callaos et al. Ed.s. Orlando: IIIS, Vol. III, pp. 186-191 - ISBN-10: 1-934272-17-5: ISBN-13: 978-1-934272-17-6.

1. Ricordo di Francesco Speranza[1] a dieci anni dalla scomparsa

Gianfranco Arrigo, Edoardo Montella

Francesco Speranza has studied in Bologna, where he has been pupil of Mario Villa. From 1969 he has been full professor of Geometry and from 1974 full professor of complementary mathematics at the University of Parma. In 30 years of activity, starting from zero, he has built a valid research group operating in the fields of mathematical education, epistemology, history of science and philosophy. In this paper, we remind him as teacher and friend, presenting the summary of two talks given by himself in Ticino in 1972.

Prima conferenza. L'insegnamento della matematica[2]

1. Introduzione di Francesco Speranza[3]

Ogni materia, nella scuola, finisce col realizzarsi in dipendenza dal momento storico. In pratica però essa si realizza in un ambito culturale (e questo vale particolarmente per la matematica) a sua volta influenzato dalla materia stessa.

Per esempio la matematica pre-ellenica rispondeva a scopi pratici ben precisi. Il materiale trovato in Mesopotamia è praticamente una raccolta di esercizi per imparare a svolgere lavori pratici. I Greci invece hanno dato alla matematica un carattere di puro diletto spirituale. La matematica del tardo Medio Evo e del Rinascimento si è sviluppata sotto la sollecitazione dei traffici e del nascente sistema bancario.

L'algebra di Bombelli, Cardano e Tartaglia non aveva più lo scopo preciso del saper calcolare: si occupava di questioni che al momento sembravano campate in aria.

Nel '600 e '700 si ha la spinta della fisica. Galileo: *«il libro della natura è fatto di cerchi e di triangoli»*.

Lo sviluppo ulteriore è caratterizzato dalle ricerche, fra altri, di Newton e Leibniz (Calcolo infinitesimale).

Quindi, all'inizio del XX secolo, la matematica conosciuta dal grande pubblico è quella sviluppata sotto la spinta dei fisici.

Se fossero state le scienze umane a causarne lo sviluppo, la matematica delle scuole sarebbe stata ben diversa.

1. Francesco Speranza è morto il 19 dicembre 1998. È stato nostro amico e maestro. Le sue conferenze ci hanno aiutato ad avvicinarci all'epistemologia della matematica. Ci piace ricordarlo riproponendo le sintesi di due suoi interventi in Ticino.
2. Note relative alla conferenza tenuta da Francesco Speranza a Lugano, l'11 novembre 1972, a cura di Gianfranco Arrigo.
3. Gli interventi che Francesco Speranza ha effettuato in Ticino non sono mai state vere e proprie conferenze, ma nutriti scambi di idee preceduti da una sua introduzione.

Quella che va sotto l'etichetta di «matematica moderna» è una matematica che vuol riflettere di più su se stessa e non badare più unicamente a soddisfare i bisogni della fisica.

Questo vuol dire non disperdersi troppo in ricerche settoriali, ma riflettere sull'essenza della matematica stessa.

In questo senso hanno operato per esempio Cantor, Cauchy, Frege. Ci sono poi state le idee di Piaget sulle strutture del pensiero umano, che hanno permesso di stabilire una specie di isomorfismo fra queste e le strutture madri dei matematici: topologiche, d'ordine e algebriche (Bourbaki).

L'informatica intesa come costruzione di un linguaggio è strettamente legata all'algebra e alla logica. Essa può essere introdotta nella scuola dell'obbligo, a condizione che ci siano docenti competenti in materia.

Abbiamo detto che il contenuto non è più così importante, perciò ci si potrebbe anche muovere solo nel campo dell'informatica: in esso si possono mettere in evidenza le strutture-madri e quindi lo scopo sarebbe raggiunto.

Aggiungiamo che la posizione dell'informatica è privilegiata, perché da essa è più facile cavar fuori le strutture fondamentali.

La posizione della geometria e della topologia nella scuola media: da un punto di vista astratto, topologia e geometria sono così delicate che sarebbe meglio lasciarle stare. Si potrebbe trattare la topologia degli spazi finiti, ma sarebbe poi troppo distante dal concreto.

Naturalmente questa è una visione troppo radicale del problema: queste due discipline possono trovare uno spazio anche nell'insegnamento medio. La difficoltà sta appunto nel fatto che sono modelli infiniti, anzi di un'infinità molto disturbante (per esempio: il continuo della retta). Il postulato della continuità ha preoccupato a lungo i matematici. Esso implica conoscenze approfondite e di una difficoltà maggiore di quelle dell'algebra dei gruppi e degli anelli, per esempio.

Altra grossa difficoltà: il fatto intuitivo finisce per portare la gente ad ammettere un mucchio di cose, che invece andrebbero trattate con molta circospezione. Per esempio il fatto che in un triangolo la bisettrice di un angolo incontri il terzo lato è stato ammesso da Euclide senza dimostrazione. Nel secolo scorso[4] si è giunti alla conclusione che è un teorema dimostrabile. Quindi l'intuizione spaziale da un lato è un bene e va sviluppata ma da un altro lato bisogna imparare a non fidarsi troppo di essa.

E veniamo a un'enunciazione di proposte da meditare.

1. Si sviluppi presto la geometria analitica; allora i problemi geometrici diventano algebrici e quindi facilmente risolvibili.
2. Cerchiamo di approfondire un discorso sulle trasformazioni geometriche, dando alla geometria una carica dinamica.
3. Studiamo volentieri sistemi geometrici finiti. Vantaggi: si rompe l'asservimento allo spazio fisico; le cose si possono toccare con mano. Per esempio avendo due insiemi di pochi elementi, si possono costruire tutte le applicazioni del primo verso il secondo; in una proiezione di una retta, su un'altra non posso controllare tutti i punti e le loro immagini: sono obbligato a descrivere questa corrispondenza.

4. Nel XIX secolo.

Il discorso sulla topologia può essere iniziato ad esempio con alcuni concetti fondamentali (interno, contorno, confine).

A livello di teoria degli insiemi non si arriva a parlare di contorno: un elemento è dentro o fuori dall'insieme, non nasce il problema del confine.

Sul modo di introdurre gli insiemi numerici Z e Q, si fa osservare che il metodo delle coppie ha dato buoni risultati, specialmente per Q, perché questo possiede elementi che si sono sempre scritti in forma di coppia. La difficoltà qui sta nell'introduzione delle operazioni. Si sono cercate altre strade, specialmente in Belgio, per presentare questi insiemi (vedere i testi di Papy e Servais), ma ognuno di questi presenta vantaggi e svantaggi, per cui non si può asserire che ci sia un metodo migliore di un altro.

Come si giustifica l'introduzione del concetto di gruppo nella scuola media?

Bisogna distinguere: se fossimo degli spiriti puri e cominciassimo a capire qualcosa di matematica, sarebbe indifferente quale struttura trattare o approfondire. Però di fatto viviamo in un contesto storico e riceviamo l'eredità dei due rami tradizionali della matematica: l'algebra e la geometria.

Ora, dall'algebra nasce il concetto di operazione con tutte le proprietà annesse, senza le quali non si può calcolare.

Dalla geometria nasce il concetto di trasformazione e quindi di composizione di trasformazioni con tutte le proprietà relative. Si inserisce qui la tendenza unificatrice: quali proprietà sono essenziali nell'una e nell'altra disciplina? Quali più frequenti? Ecco che nasce allora il gruppo.

Piccoli esempi di gruppi si possono poi trovare all'infuori di questo contesto tradizionale. Basta prendere un foglio di carta rettangolare e studiarne i movimenti e le loro composizioni.

Altro esempio: l'aritmetica dell'orologio o aritmetica modulare. Un'altra cosa che si può dire concerne il discorso sul grado di libertà dei modelli di una teoria: ad esempio la geometria euclidea ne ha uno solo. La teoria dei gruppi ne ha già di più, ma, a meno di isomorfismi, non sono molti (a seconda del numero degli elementi). La teoria dei grafi è molto più ricca in questo senso. Anche qui però ci vuole un certo equilibrio.

Sul rapporto matematica-fisica c'è da dire che dev'essere un rapporto dinamico.

Insegnare matematica moderna vuol dire innanzitutto cavar fuori queste strutture.

In Belgio è stata insegnata matematica moderna a bambini caratteriali, ricavandone risultati impensati.

Se nei ragazzi si riesce a mettere in evidenza queste strutture madri, allora si possono ottenere grandi cose.

Pensiamo solo a questo: se si riuscisse a fare in modo che una persona, di fronte a un discorso politico apparentemente esaltante, riesca a portare alla luce con una certa facilità i sottofondi ambigui e contraddittori, si sarebbe raggiunta una rivoluzione culturale, che ne metterebbe in ombra tante, di rivoluzioni culturali.

Quindi oggi la matematica deve contribuire alla formazione della persona. Non si pretende che tutti arrivino agli estremi (e alla deformazione) del matematico, tutt'altro, ma si vuole contribuire a colmare una carenza esistente in modo chiaro nell'uomo d'oggi.

Come si realizza un insegnamento moderno?

Va abbandonata completamente l'idea che la matematica sia una scienza d'élite, da insegnare quando il giovane intelligente è sufficientemente maturo.

Si deve cominciare già in tenera età. Da più parti si propugna di iniziare già in età pre-alfabetica, quindi alla scuola materna.

Bisogna però tener conto che ogni età ha le sue caratteristiche, che devono essere conosciute e rispettate.

I docenti, finora depositari della scienza, devono farsi avanti e studiare insieme la strada da percorrere.

Probabilmente, perché il processo di assestamento sia compiuto, ci vorrà un'intera generazione. Poi vi sarà forse un nuovo ripensamento.

La teoria degli insiemi, oggi, dà un linguaggio alla matematica, ma già ci sono sviluppi che possono modificare le cose in futuro. La teoria delle categorie porterà un'ulteriore e più raffinata generalizzazione.

2. Riassunto delle idee emerse durante la discussione

Il processo di rinnovamento in corso nell'insegnamento della matematica dovrà coinvolgere tutte le altre discipline scolastiche. Quando i docenti saranno stati tutti formati secondo le nuove concezioni, allora si avrà nella scuola una nuova situazione che dovrebbe dare degli ottimi risultati.

Ovviamente non è per ragioni pratiche che si è arrivati a questo. Inconsciamente gli uomini hanno cercato di realizzare il mondo a immagine della propria mente.

D'altra parte fino a poco tempo fa la scuola aveva come scopo culturale quello di insegnare a scrivere e a far di conto. La società che ha necessità pratiche e non possiede mezzi tecnologici di calcolo ha questa esigenza.

Ieri si curava anche la calligrafia, perché era un fatto importante. Oggi questo cade: per comunicare per iscritto fuori dall'ambito familiare, si adopera la macchina per scrivere.

Per i calcoli si adoperano le calcolatrici. La gente si abitua sempre di più, e in gran parte inconsciamente, a servirsi dei mezzi che la tecnica mette a disposizione. Con ciò non si vuol dire che questa abitudine sia un bene: è solo una constatazione.

Cosa si chiede oggi alla scuola, se non è più importante il far di conto? Se la matematica fosse rimasta la scienza dei numeri e delle figure, dal punto di vista dei contenuti, non ci sarebbe granché da chiedere.

Ma la matematica è evoluta. Il centro di gravità si è spostato dal contenuto al **metodo**. Non è più importante **cosa** si studia, ma **come** si lavora. Attraverso il metodo matematico l'allievo deve raggiungere una facoltà critica nei confronti della realtà che lo circonda. La Matematica è diventata la materia formativa per eccellenza, soppiantando il latino, che lo era nella scuola tradizionale del mondo occidentale.

E come materia formativa supera di molto il latino, perché questa lingua deve la sua importanza solo al fatto che fino a cinquecento anni fa era la lingua dei dotti: non si capisce bene infatti come possa essere la «forma perfetta», il linguaggio di un popolo di giuristi e conquistatori.

E oggi la matematica è veramente un linguaggio, indipendentemente dal positivismo che la considera il linguaggio dalle scienze.

Basta credere un pochettino a Piaget…

Ma veniamo alla struttura di questo linguaggio: perché si mette l'accento sull'importanza delle strutture madri?

Perché esse sono sempre state presenti nella matematica. Non c'è bisogno di leggere l'opera di Bourbaki, per incontrarle. Anche nei programmi tradizionali delle scuole erano presenti: solo, non erano messe in evidenza.

Ma allora perché non continuare come prima, cercando, al massimo, di mettere in evidenza le strutture?

Semplicemente perché solo gli specialisti riescono a vederle in un contesto tradizionale.

La scienza applicata dà gli stimoli, la matematica fugge in avanti, ma così prepara strumenti che più tardi serviranno agli utilizzatori della matematica (esempi: calcolo differenziale assoluto per la relatività generale, strutture algebriche per la meccanica quantistica).

Continua sul numero 59.

2. Il calcolo a scuola: sperimentazione di un nuovo progetto didattico

Gianfranco Arrigo[1]

In this paper, we present a new approach for the teaching of arithmetic calculus experimented in several primary school classes in the last years. This research has started from the publication, in the issue 40 of this journal (may 2000), of the paper "Il calcolo a scuola, ovvero: l'inizio di un cambiamento epocale" by G. Arrigo. The proposed approach is based on the use of the pocket calculator as usual educational instrument, on the improvement of mental calculus and mathematical in-line writing and on the estimation of result of complex calculations. The proposed approach allows the elimination from the curriculum the teaching of Arabic calculation algorithms.

1. Introduzione

A partire dalla pubblicazione (Arrigo, 2000) ho avuto modo di rivolgermi a gruppi di insegnanti in occasione di corsi di aggiornamento tenuti in Ticino e in varie regioni dell'Italia, senza dimenticare la presentazione fatta al grande Convegno di Castel San Pietro Terme nell'edizione del 2008[2]. Il grande interesse mostrato dai corsisti mi ha incoraggiato a continuare a percorrere questa strada innovatrice e a progettare una prima sperimentazione in classe. Ho trovato un gruppetto di insegnanti disposte a provare con i propri allievi lungo tutto l'arco della scolarità primaria. Quest'anno si lavora nelle classi terze, quindi si possono già svolgere attività importanti su addizione, sottrazione e moltiplicazione. I primi riscontri ci stimolano a continuare su questa strada fino in quinta. Vedremo.

2. Due ardui problemi di insegnamento

Con questo progetto voglio proporre una soluzione coerente, attuale e unitaria a due importanti problemi concernenti il curricolo scolastico primario.

Il primo è quello del cosiddetto calcolo in colonna (o calcolo scritto), ossia degli algoritmi arabici per il calcolo di somme, prodotti, differenze e quozienti.

Si sa che questi algoritmi, insieme al sistema di numerazione posizionale in base dieci, sono stati divulgati nelle nostre regioni dal *Liber Abaci* di Leonardo Pisano, detto anche Fibonacci (~1180-~1250). Il titolo non deve trarre in inganno: fino al secolo XII il vocabolo *abaco* (o *abbaco*) significava *aritmetica* e spesso più particolarmente aritmetica basata sull'uso di cifre indo-arabiche (Loria, 1929-1933 in Bagni,

1. Le basi teoriche del nuovo progetto per l'insegnamento del calcolo nella scuola dell'obbligo si trovano in (Arrigo, 2000).
2. Si è trattato del seminario per insegnanti di elementare e media dal titolo *Mente e calcolatrice: a ciascuna il suo ruolo*.

1996). In questa opera, appunto, il giovane Leonardo spiega la tecnica degli algoritmi arabici e propone una raccolta di interessanti problemi che possono essere risolti applicando tali algoritmi. Uno di questi problemi ha avuto grande fortuna: quello sull'evoluzione di una coppia di conigli, i quali diventano fecondi a partire dal secondo mese di vita, problema che sfocia in una successione numerica, detta appunto *successione di Fibonacci*. Si sa che Leonardo aveva imparato tali tecniche direttamente dai mercanti arabi durante un soggiorno nell'Africa settentrionale. L'opera del Fibonacci non è stata subito accolta con grande entusiasmo, per una serie di motivi che qui non sto a indicare, ma col tempo gli algoritmi arabici hanno sostituito completamente – almeno alle nostre latitudini – l'uso dell'abaco inteso come tavoletta per il calcolo e sopravvivono ancora oggi, se non altrove, nella scuola primaria. Già, forse solo nella scuola primaria. Ben diversa è la situazione nella vita reale: praticamente nessuno calcola più in questo modo. La venditrice, un tempo maestra nell'eseguire addizioni e sottrazioni in colonna, oggi usa la cassa registratrice automatica, che stabilisce l'importo totale, il resto e, se necessario, lo sconto speciale; usa pure la bilancia automatica, che determina con estrema precisione la quantità e il prezzo della merce pesata. La casalinga, quando le occorre recarsi all'ufficio postale per eseguire dei pagamenti (per esempio a fine mese), usa la calcolatrice. Sui posti di lavoro e nelle economie famigliari la fa da padrone il *computer*, mentre per eseguire calcoli importanti e complicati si ricorre ai centri di calcolo. Già nel mio articolo del 2000 scrivevo:

«È quindi giunto il momento che la scuola prenda in considerazione seriamente il problema del calcolo in colonna e si ponga senza mezzi termini la domanda se ha ancora senso, alle soglie del duemila, insegnare a padroneggiare gli algoritmi del calcolo in colonna».

Il secondo problema è costituito dall'esistenza della calcolatrice elettronica tascabile a basso costo. In generale, a quanto mi consta, il settore scolastico dell'obbligo non ha mai accettato con interesse ed entusiasmo questo nuovo strumento di calcolo. Le posizioni assunte dagli insegnanti nei confronti della calcolatrice tascabile possono essere di tre tipi:

- rifiuto per principio, quindi proibizione di farne uso in classe,
- tolleranza disinteressata, quindi nessuna responsabilità di insegnarne un uso corretto,
- integrazione dello strumento nell'educazione al calcolo numerico.

Molto significativo è il seguente estratto dal testo (Enzensberger, 1997):

«– E tu chi sei? gli chiese Roberto.

E quel tizio, con sua grande sorpresa, gli urlò:

Sono il mago dei numeri!

Ma Roberto non aveva proprio voglia di farsi prendere in giro da un nanetto come quello.

– Tanto per cominciare, disse, il mago dei numeri non esiste.

– Ah no? E se non esisto perché allora mi rivolgi la parola?

– E poi odio qualsiasi cosa abbia a che fare con la matematica.

(...)

Con un balzo elegante il mago scese dalla foglia di acetosella e si mise accanto a Roberto che per protesta si era seduto nell'erba alta.

(…) La sai una cosa? Gran parte dei veri matematici i calcoli non li sa nemmeno fare. Non vogliono sprecare il tempo, e poi ci sono le calcolatrici. Ce n'hai una anche tu, no?

– Certo, però a scuola non possiamo usarla.

– Ho capito, disse il mago. Non fa niente. Sapere un po' le tabelline non guasta. Può tornare utile se si scaricano le batterie. Ma la matematica, caro mio, è un'altra cosa!

(…)

– Di magico i numeri hanno che sono semplici. In fondo non ti serve nemmeno la calcolatrice. Per cominciare ti basta una sola cosa: l'uno. Puoi farci quasi tutto».

Le maestre usano spesso introdurre brani presi da libri come questo: servono a creare un'atmosfera positiva nei confronti dell'attività matematica.

I due problemi dell'insegnamento citati in precedenza rimangono tuttora irrisolti, almeno dalle nostre parti.

Si continua a insegnare gli algoritmi del calcolo in colonna, spendendo molto tempo, molto spesso tediando gli allievi che non sempre riescono a capire il perché di certi modi di fare e finiscono per adeguarsi alla situazione memorizzando i vari passaggi. L'addizione in colonna si impara abbastanza facilmente, a condizione di non dimenticare i riporti. La sottrazione in colonna è già più ardua, anche se, giocando sui complementi, ogni sottrazione potrebbe essere trasformata in addizione: ma non mi risulta che si faccia così in classe. La moltiplicazione è più difficile ancora, soprattutto se le cifre dei fattori sono numerose. Vi sono però metodi alternativi; fra i meno sconosciuti ricordo la *moltiplicazione per gelosia* (o per *graticola*), la moltiplicazione *egizia* o *del contadino russo* basata sulla scomposizione di un numero nella somma di potenze di 2 e altri ancora. Infine la divisione in colonna pone il più difficile problema di apprendimento. Si sono tentate variazioni del metodo genuino, con lo scopo di migliorare le percentuali di riuscita. Cito ad esempio quella presentata da Brousseau (2007), detta «divisione ergonomica» e applicata in Francia, molto simile a quelle usate nei paesi anglosassoni e in Finlandia. Lo stesso autore afferma di aver cercato metodi più adatti alle possibilità umane, senza però poterne constatare l'esistenza; sta di fatto che le difficoltà rimangono.

Il risultato di questo insegnamento è deludente. Gli allievi più abili, come sempre, imparano senza eccessive difficoltà. Gli altri non riescono a raggiungere livelli di comprensione accettabili e si rifugiano con successo alterno nella memorizzazione dei vari passaggi richiesti dall'algoritmo, col risultato che, non appena cessa la necessità di metterlo in atto, l'abilità svanisce dalla mente. Raramente si trova qualcuno che sappia spiegare le ragioni matematiche alla base dei singoli passaggi. Il tutto assume quindi un'aria di mistero. «Si fa così perché me lo hanno insegnato» è la risposta che va per la maggiore anche fra gli adulti.

La calcolatrice, soprattutto nella scuola primaria, è poco usata e dove la si usa è spesso male impiegata. «Gli allievi sono più abili di me nel manipolare questi aggeggi elettronici: io non ho proprio nulla da insegnare». Nulla di più falso.

3. Il nuovo progetto di insegnamento del calcolo

Il progetto si basa sui tre principi seguenti

1. Calcoli semplici e stima di risultati si eseguono usando la propria mente (calcolo mentale e scrittura matematica in riga).
2. Calcoli faticosi e sequenze complesse di calcoli si fanno a macchina.
3. Il calcolo scritto (l'insieme degli algoritmi arabici o calcoli in colonna) non dovrebbe più far parte dei programmi, ma, se lo si vuole, può essere visto in un contesto storico nel quale si mettono a confronto diversi tipi di algoritmi.

Nel primo principio, sottolineo quanto messo tra parentesi: l'abilità di calcolo mentale degli allievi dev'essere continuamente sviluppata con molta cura, così come l'abitudine a servirsi della scrittura matematica già nella scuola primaria. Per esempio, dovendo calcolare la somma 387+858+235, invece di incolonnare i numeri e di applicare il noto algoritmo dell'addizione, posso procedere così:

$$387 + 858 + 235 = (300 + 800 + 200) + (80 + 50 + 30) + (7 + 8 + 5) =$$
$$1300 + 160 + 20 = 1480$$

Si vede subito che sostanzialmente si fanno le stesse operazioni richieste dall'algoritmo arabico, ma con una grande differenza: l'uso della scrittura matematica rende esplicita la struttura matematica basata sulla scomposizione degli addendi in centinaia, decine e unità. Qualche insegnante mi confessava la propria perplessità sull'introduzione delle parentesi già in seconda primaria. Ho detto loro di usare delle scatole, per esempio stilizzate in questo modo:

$$\boxed{300+800+200} + \boxed{80+50+30} + \boxed{7+8+5}$$

Il bello della faccenda è che dopo un po' gli allievi cominciano a tralasciare i trattini orizzontali e qualcuno, bene informato nell'ambiente familiare, giunge a chiedere se può usare le parentesi invece delle scatole! Dunque, nessun timore. Dal punto di vista aritmetico, per poter eseguire le addizioni in questo modo, l'allievo deve essere abituato a scomporre i numeri e ad associarli in modo conveniente. Ecco allora due esempi di addizioni che possono essere eseguite a mente più velocemente che con la calcolatrice:

$$77 + 56 + 23 = (77 + 23) + 56 = 100 + 56 = 156$$
$$780 + 540 + 460 = 780 + (540 + 460) = 780 + 1000 = 1780$$

Qui il matematico vede subito l'uso combinato delle proprietà associativa e commutativa dell'addizione. A mio modo di vedere, nella scuola primaria, non conviene presentarle separatamente con i loro nomi così difficili da ricordare, ma è importante far notare agli allievi che per calcolare una somma di più addendi si può iniziare dove si vuole e procedere nell'ordine desiderato: basta considerare tutti gli addendi, ciascuno una sola volta. Questa è una proprietà familiare a chiunque abbia già contato un certo numero di oggetti e perciò fa parte sicuramente del curricolo sommerso di ogni allievo.

E chi obietta che non sempre capita di incontrare calcoli così addomesticati mi dà l'occasione per affermare che il calcolo mentale deve servire soprattutto per stimare risultati di sequenze di calcoli e che i numeri che servono per ottenere la stima sono scelti dallo stimatore, il quale, a poco a poco, se convenientemente abituato, sa aggiustarli (sceglierli) in modo che risulti più facile calcolare mentalmente. Per esempio:

$$\begin{array}{llllll} \text{calcolo:} & 23{,}80 & + & 41{,}25 & + & 73{,}15 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{stima:} & 25 & + & 40 & + & 75 \ = (25+75)+40=100+40=140 \end{array}$$

risultato esatto ottenuto con la calcolatrice: 138,2

In (Arrigo, 2000) si trovano altri esempi di situazioni additive (ma non solo) che, con un minimo di abilità, si possono risolvere più in fretta a mente che con la calcolatrice. Occorre quindi sviluppare con cura e gradatamente le abilità di calcolo mentale degli allievi. Per dare un'idea meno vaga, riporto alcune situazioni fra le più interessanti e frequenti, proponibili nella scuola primaria.

1. Addendi ripetuti

$5 + 5 + 3 + 3 + 3 + 6 + 6 + 3 + 4 + 4 + 4 + 4 + 3 + 5 + 4 + 6 =$
$= 5 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 15 + 15 + 18 + 20 = 68$

Commento: per capire il vantaggio del calcolo mentale, basta provare ad eseguire questo calcolo con una calcolatrice.

2. Addendi vicini

$607 + 606 + 605 + 606 = 600 \cdot 4 + 7 + 6 + 5 + 6 = 2400 + 24 = 2424$

Commento: questa situazione si presenta regolarmente quando si vuole ottenere una media di misurazioni ripetute.

3a. Sottrazione (primo modo)

$73 – 17 = (73 – 10) – 7 = 63 – 7 = (63 – 3) – 4 = 60 – 4 = 56$

3b. Sottrazione (secondo modo)

$17 \xrightarrow{\mathbf{+3}} 20 \xrightarrow{\mathbf{+50}} 70 \xrightarrow{\mathbf{+3}} 73$

$73 – 17 = \mathbf{3} + \mathbf{50} + \mathbf{3} = 56$

Commento: questo secondo metodo non dev'essere tralasciato perché può risultare più agevole del primo. La sua formalizzazione con il percorso frecciato (operatori additivi) è consigliabile e permette di evitare il diffuso impiego erroneo del segno di uguaglianza (17+3=20+50=70+3=73).

4. Oltre le tabelline

$7 \cdot 13 = 7 \cdot (10 + 3) = 7 \cdot 10 + 7 \cdot 3 = 70 + 21 = 91$
$42 \cdot 14 = (40 + 2) \cdot 14 = 40 \cdot 14 + 2 \cdot 14 = 560 + 28 = 588$

Commento: al centro di questa tecnica di calcolo sta la proprietà distributiva. Contrariamente alla coppia di proprietà associativa e commutativa che insieme, come ho sottolineato in precedenza, dà un effetto… naturale, questa proprietà è alquanto anti-intuitiva e va quindi curata con molta attenzione. Più tardi, gli allievi dei quali ci stiamo occupando, la incontreranno per esempio nel calcolo letterale; anzi in quell'ambito sarà la proprietà basilare, quella, insomma, che regge un po' tutta la struttura del calcolo algebrico elementare.

5. Moltiplicazioni ripetute

$25 \cdot 38 \cdot 4 = (25 \cdot 4) \cdot 38 = 100 \cdot 38 = 3800$
$189 \cdot 125 \cdot 8 = 189 \cdot (125 \cdot 8) = 189 \cdot 1000 = 189000$
Commento: valgono le considerazioni fatte per l'addizione con più addendi.

6. Divisione con una sola cifra al divisore

$112 : 8 = (80 + 32) : 8 = 80 : 8 + 32 : 8 = 10 + 4 = 14$
$301 : 7 = (280 + 21) : 7 = 280 : 7 + 21 : 7 = 40 + 3 = 43$
Commento: di nuovo è importante la proprietà distributiva[3]. Inoltre la scomposizione del dividendo dev'essere fatta opportunamente; nel secondo esempio essa risulta più difficile… ma anche più gratificante.

7a. Divisione con il divisore di due cifre (primo modo)

$390 : 15 = (390 : 5) : 3 = [(350 + 40) : 5] : 3 = [350 : 5 + 40 : 5] : 3 =$
$= 78 : 3 = (60 + 18) : 3 = 26$
Commento: la novità è che qui si applica l'importante relazione di divisibilità, cioè: se un numero è divisibile per $(a \cdot b)$ allora è divisibile per a e per b (e viceversa).

7b. Divisione con il divisore di due cifre (secondo modo)

$390 \xrightarrow{\mathbf{-20} \cdot 15} 90 \xrightarrow{\mathbf{-6} \cdot 15} 0$
$390 : 15 = \mathbf{20} + \mathbf{6} = 26$
Commento: valgono le stesse osservazioni fatte in 3b). Se la scomposizione appena presentata fosse troppo difficile, si possono sempre aumentare le tappe.

Parallelamente alla crescita dell'abilità nel calcolare mentalmente, cresce quella di eseguire calcoli approssimati o stime di risultati. Per esempio:

3. Attiro l'attenzione sul fatto che la distributività della divisione funziona solo in un senso: vale nel caso $(a \pm b):c$, ma non nel caso $c:(a \pm b)$.

calcolo: $47 : (0{,}333 + 0{,}448 + 0{,}675)$

$$\begin{array}{cccc} 47 & 0{,}333 & 0{,}448 & 0{,}675 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 45 & 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}6 \end{array}$$

Stima: $45 : (0{,}5 + 0{,}4 + 0{,}6) = 45 : 1{,}5 = 90 : 3 = 30$

Risultato ottenuto con la calcolatrice (approssimato a meno di un centesimo): 32,28.

Commento: l'originalità di questo calcolo mentale sta nell'uso della proprietà invariantiva della divisione. Contrariamente all'abitudine di moltiplicare per 10 (o per un'opportuna potenza di 10), qui si è moltiplicato (divisore e dividendo) per 2: tanto basta per ottenere una divisione equivalente tra numeri interi.

4. Primi sguardi sulla sperimentazione

Dopo aver effettuato alcune prove negli anni scorsi, quest'anno è partita una sperimentazione più strutturata che interessa cinque insegnanti[4]: una di Giulianova, due di Teramo e due di Verbania. Quest'anno le sperimentatrici abruzzesi hanno classi terze (chi una, chi due), mentre le verbanesi insegnano in classi seconde. Dall'anno scorso si sta lavorando sul progetto, sia sul piano teorico sia su quello dell'ingegneria didattica. Oltre al rispetto dei principi enunciati, si cerca, direi con ottimi esiti finora, di far piacere il calcolo mentale ai giovanissimi alunni. Si è tenuto conto anche dei preziosi consigli trasmessi da Ines Marazzani nell'ambito della sperimentazione sui numeri grandi (Marazzani, 2007).

Al di là delle questioni tecniche, l'obiettivo principale è di familiarizzare l'allievo con i numeri, di fare in modo che provi voglia e piacere nel manipolarli. Detto in altre parole: si cerca di portare l'allievo ad avere con i numeri uno stretto rapporto di amicizia. Ogni numero, anche quello che apparentemente sembrerebbe privo di interesse, nasconde proprietà – i bimbi li chiamano *segreti* – rilevanti dal punto di vista della struttura e quindi del calcolo mentale. Per esempio, dopo aver saputo che il numero civico di un istituto scolastico è il 78, ecco che si scopre che

$$78 = 39 \cdot 2 = (3 \cdot 13) \cdot 2 = 2 \cdot 3 \cdot 13$$

L'interesse sta nel fatto che 78 è divisibile per 13. In generale i multipli di 13 entro il 100 non sono molto conosciuti dagli allievi, ma nel calcolo mentale torna utile sapere che 26, 39, 52, 65, 78, 91 sono divisibili per 13, soprattutto perché un criterio di divisibilità per 13 normalmente non si conosce.

Di aneddoti che esaltano le proprietà intrinseche dei numeri interi, se ne trovano parecchi nella storia della matematica e dei matematici. Per esempio, si racconta che quando il matematico indiano Ramanujan era convalescente in una clinica di Put-

4. Si tratta delle insegnanti Maddalena Creati (Giulianova), Daniela Antonini e Silvana Di Michele (Teramo), Lorella Maurizi e Tiziana Minazzi (Verbania), che non ringrazierò mai sufficientemente per il grande impegno e per la particolare capacità di tradurre in classe in modo esemplare le idee grezze che trasmetto loro.

ney (nei pressi di Londra) l'amico e collega Hardy andava spesso a fargli visita. In una di quelle occasioni, Hardy, senza nemmeno salutarlo, gli disse: «Il numero del mio taxi è 1729: un numero piuttosto insignificante». Al che, Ramanujan replicò: «No, Hardy! No, Hardy! Invece è un numero molto interessante. È il più piccolo numero esprimibile come somma di due cubi in due modi diversi» (Wells, 2002). Infatti, con l'ausilio anche solo di una semplice calcolatrice, non è difficile rendersi conto che:

n	n^3	$1729 - n^3$	$\sqrt[3]{1729 - n^3}$	funziona?
1	1	1728	12	sì
2	8	1721	non intera	no
3	27	1702	non intera	no
4	64	1665	non intera	no
5	125	1604	non intera	no
6	216	1513	non intera	no
7	343	1386	non intera	no
8	512	1217	non intera	no
9	729	1000	10	sì
10	1000	729	9	sì
11	1331	398	non intera	no
12	1728	1	1	sì

La tabella si ferma qui perché $13^3 > 1729$. Quindi le due scomposizioni pensate da Ramanujan sono $1^3 + 12^3$ e $9^3 + 10^3$ entrambe del numero 1729; altre non ce ne sono.

4.1. Manipoliamo da subito anche i numeri grandi

Anche se vetusti programmi ancora in auge prescrivono per la prima classe elementare la conoscenza dei numeri entro il 20, i didatti della matematica sono concordi nel riconoscere che tale restrizione non tiene e, anzi, si rivela dannosa. Ogni insegnante deve sapere che gli allievi portano a scuola un curricolo sommerso importante, che occorre conoscere e rispettare e sul quale dev'essere innestata la nuova conoscenza. L'esperienza effettuata dal gruppo di Bologna, sotto la guida di Ines Marazzani, ha mostrato come i bambini di prima elementare sanno benissimo cavarsela anche con numeri ben più grandi del 20, del 100, del 1000. Ecco un nostro esempio.

Possiamo sapere quanti alunni in tutto frequentano la nostra scuola?
(Teramo)
Li contiamo quando si entra la mattina.
Li facciamo mettere nell'atrio o in palestra e poi li contiamo.
Non va bene, se poi qualcuno è malato e non c'è non facciamo il conto giusto.
Facciamo un'indagine, chiediamo alle altre maestre quanti alunni ci sono nelle loro classi poi facciamo i conti.

Risultato dell'indagine.

1a A 20 alunni	1a B 20 alunni	1a C 19 alunni	1a D 20 alunni
2a A 21 alunni	2a B 15 alunni	2a C 23 alunni	2a D 25 alunni
3a A 23 alunni	3a B 23 alunni	3a C 22 alunni	
4a A 23 alunni	4a B 27 alunni	4a C 24 alunni	
5a A 25 alunni	5a B 27 alunni		

Per calcolare tutti gli alunni occorrerebbe trovare il risultato di
20+20+19+20+21+15+23+25+23+23+22+23+27+24+25+27 =
Così è troppo difficile, non lo sappiamo fare!
Come potremmo cavarcela?

Disegniamo una crocetta per ogni alunno, facciamo righe di 10 crocette così è più facile contarle.

xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	xxxxxxx
xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	
xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	
xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	
xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	
100	100	100	57

(100 + 100 + 100) + 57 = 300 + 57 = 357

Frequentano la nostra scuola 357 alunni.

4.2. La rappresentazione dei numeri nel nostro sistema di numerazione

La figura 1 mostra un esempio di macchina calcolatrice manuale. Si intravede sulla destra la macchina costituita da un foglio organizzato a tabella e sulla sinistra le etichette dei valori.

Con questo materiale si possono svolgere almeno tre compiti basilari:

- rappresentare un numero
- addizionare due numeri
- sottrarre da un numero un altro numero

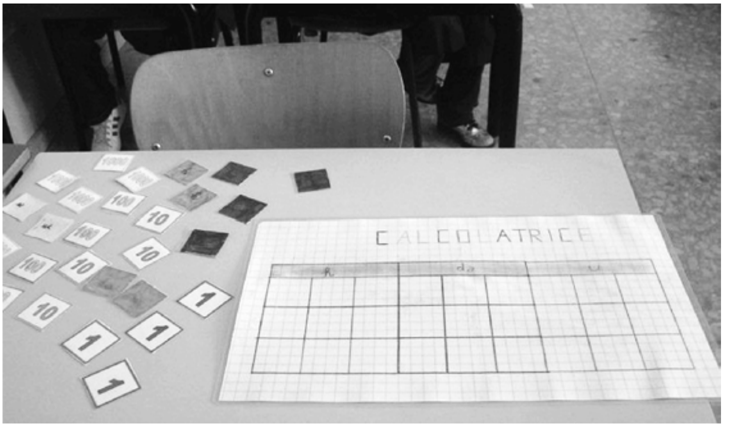


Figura 1 La calcolatrice (Giulianova).

Un materiale alternativo è quello degli orologi. Manipolando opportunamente le lancette si possono eseguire i tre compiti citati sopra. Si notino le etichette che contraddistinguono ogni orologio:

u	sta per	unità
da	sta per	decina
h	sta per	centinaio
uk	sta per	unità di migliaia

L'uso di questi simboli non è certamente una novità: sono gli stessi usati nel Sistema internazionale delle misure; con una variazione: uk invece di k per le unità di migliaia. Ciò rende più evidente il meccanismo della successione dei simboli che servono per scrivere i numeri grandi; successione che continua con dak, hk, uM, daM, hM, uG e così via.

Figura 2 Gli orologi (Giulianova).

4.3. I numeri complementari

Abbiamo visto come molto spesso la presenza di addendi complementari rispetto a un multiplo di 10 sia sfruttabile per semplificare e quindi velocizzare il calcolo della somma. Ecco un esempio di attività che ha lo scopo di abituare gli allievi a riconoscere i numeri complementari.

$$\boxed{51} \quad + \quad \boxed{} \quad = \quad \boxed{60}$$

$$\boxed{18} \quad + \quad \boxed{} \quad = \quad \boxed{20}$$

$$\boxed{} \quad + \quad \boxed{32} \quad = \quad \boxed{40}$$

… … …

Figura 3 Che numero manca? (Giulianova)

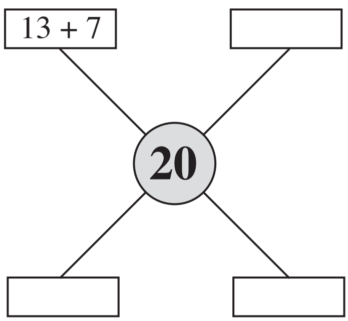


Figura 4 Ricerca dei complementi a 20 (Teramo). Il disegno dev'essere completato e abbracciare tutti i casi possibili.

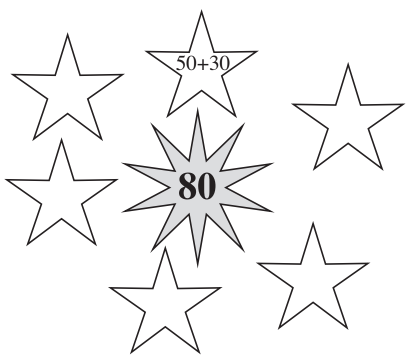


Figura 5 La galassia (Giulianova e Teramo). In ogni stella l'allievo è invitato a inserire una somma di multipli di 10 uguale a 80. Non è detto che le stelle disegnate siano sufficienti per esaurire tutti i casi possibili, oppure potrebbero essere sovrabbondanti…

In queste due ultime attività l'insegnante può cogliere l'occasione per stimolare un primo ragionamento di tipo combinatorio. Per raggiungere l'obiettivo occorre innanzi tutto non preparare il disegno completo (il numero di rettangoli o di stelle preparate dev'essere diverso da quello necessario e sufficiente), poi costringere l'allievo a far fronte all'obiezione «Ne manca almeno una!» anche e soprattutto nel caso che lo stesso le abbia trovate tutte: in questo modo lo si costringe a cercare un criterio sistematico di generazione delle somme in modo che risulti evidente la completezza del lavoro. Nasce anche il problema della commutatività: 50+30 lo consideriamo diverso o no da 30+50?

Ecco un esempio di lavoro nel quale un allievo ha trovato tutti i casi possibili.

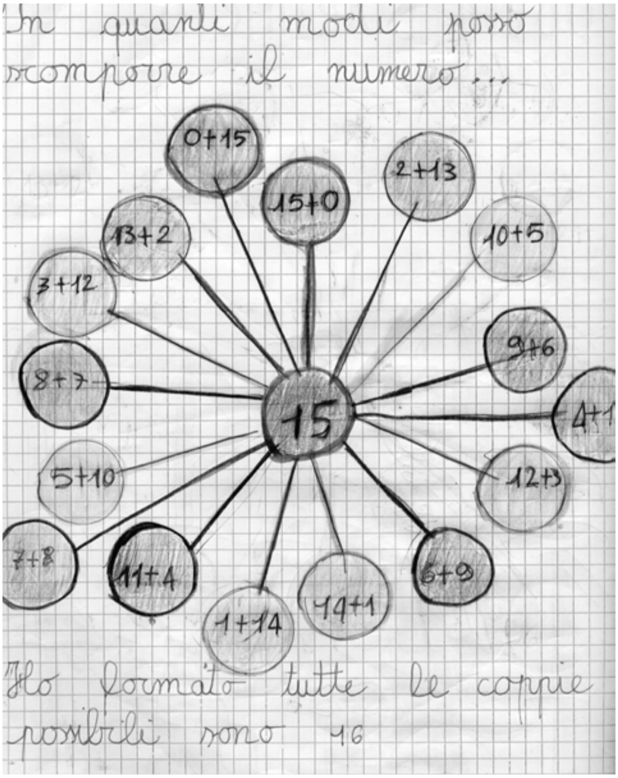


Figura 6 Fuochi d'artificio (Giulianova).

4.4. I percorsi frecciati

Sono utili anche per capire e rappresentare determinati algoritmi, per esempio quelli visti per la sottrazione e per la divisione. Conviene quindi introdurli subito, per esempio sotto forma di giochini, come mostrano le immagini che seguono. Le frecce rappresentano operatori, per esempio «+2» è un particolare operatore additivo che incrementa di 2 il numero iniziale.

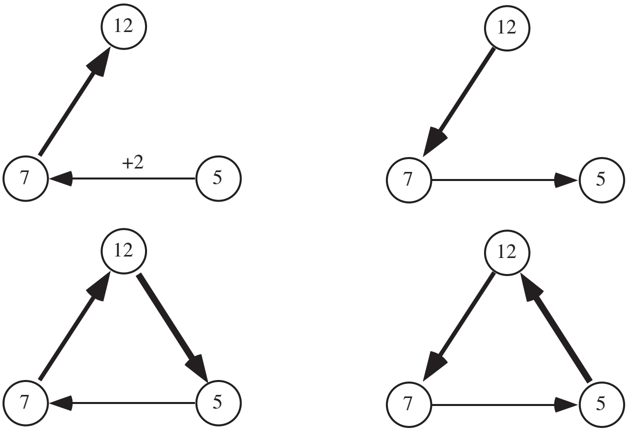


Figura 7 Cosa dicono le frecce? (Teramo).

Questa attività spinge l'allievo anche a considerare la relazione esistente tra due frecce parallele e di senso opposto. Nasce l'idea di operatore inverso: «+2» e «–2» sono operatori inversi. Che cosa si ottiene se a un numero dato si applicano successivamente due operatori inversi? In seconda non è necessario introdurre il termine «operatore»; gli allievi lo chiamano, per esempio, «macchina» o «maghetto» che cambia i numeri.

4.5. Scomposizioni a gogo

Ecco una situazione creata appositamente per stimolare gli allievi a cercare tutte le scomposizioni possibili.

A freccette (Giulianova e Teramo)

Pino e Lina giocano a freccette. Lina con un solo tiro ha fatto 50 punti. Pino vuole ottenere lo stesso punteggio, anche con più tiri.

In quali modi può totalizzare 50 punti?

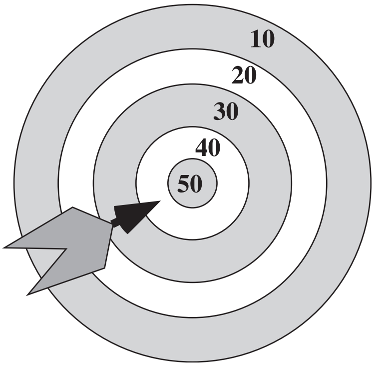


Figura 8 A freccette: il bersaglio.

50 = 50 + 0	50 = 10 + …. + ….. + …. + ….
50 = 20 + …..	50 = 10 + 20 + ….
50 = 10 + …..	50 = 20 + ….. + …. + ….
…..	….

4.6. Quando la mente batte la calcolatrice

Come già detto, uno degli aspetti stimolanti del calcolo mentale è quello di riuscire a battere in velocità un compagno che opera con la calcolatrice. Ecco un esempio significativo.

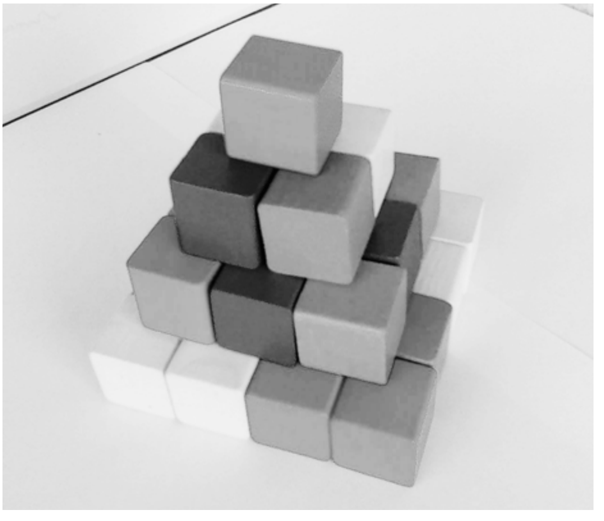


Figura 9 La piramide (Giulianova).

In ogni strato successivo, il centro della faccia inferiore dei cubetti coincide con il vertice che hanno in comune le facce superiori dei quattro cubetti sottostanti (vedere la figura 9).

Quanti cubetti sono stati usati per costruire la piramide?

$$16 + 9 + 4 + 1 = (16 + 9) + (4 + 1) = 25 + 5 = 30$$

Bello, facile, veloce.

Supponiamo ora di voler costruire una piramide alta il doppio. Quanti cubetti occorrerebbero?

$$1+4+9+16+25+36+49+64=(36+64)+(49+1)+(16+4)+(25+9) =$$
$$= 100 + 50 + 20 + 34 = 204$$

Difficilino, ma che bello poterci arrivare! D'altra parte, calcolare una somma di 8 addendi con la calcolatrice non è così facile come si potrebbe credere a prima vista: basta provare.

4.7. Tecnica di calcolo mentale e scrittura in riga

Quando si tratta di perfezionare la tecnica di calcolo mentale, è bene staccarsi dalle situazioni concrete. L'obiettivo è di acquisire una certa sicurezza e velocità. Non si deve nemmeno trascurare l'aspetto estetico: un calcolo fatto nel modo più semplice e sintetico è anche bello!

Ecco alcuni esempi tratti direttamente dai quaderni degli alunni.

«Ho fatto 150+236=386»

(100 + 200) + (50 + 30) + (0 + 6)

300 80 6

386

Si vede bene l'influsso della «macchina calcolatrice» e degli «orologi» (vedere le figure 1 e 2).

Sono bravo?

14 + 23 = (10 + 20) + (4 + 3)= 30 + 7 = 37

91 – 16 = (91 – 10) – 6

56 – 23 = (50 – 20) + (6 – 3) = 33

…

Notevole l'uso delle parentesi: contrariamente a quanto si pensava, gli allievi si abituano presto a usarle.

Ancora più bravi

23 + 15 + 7 = (23 + 7) + 15 = 45

33 + 4 + 17 = (33 + 17) + 4 = 50 + 4 = 54

61 – 37 = (61 – 30) – 7 = (31 – 1) – 6 = 24

…

Con la moltiplicazione entra in scena la proprietà distributiva.

13 × 6 = 10 × 6 + 3 × 6 = 60 + 18 = 78

24 × 3 = 20 × 3 + 4 × 3 = 60 +12 = 72

…

È interessante notare che il primo passaggio

13 × 6 = (10+3) × 6

non viene scritto. Sicurezza? Desiderio di semplificare la scrittura?

Bibliografia

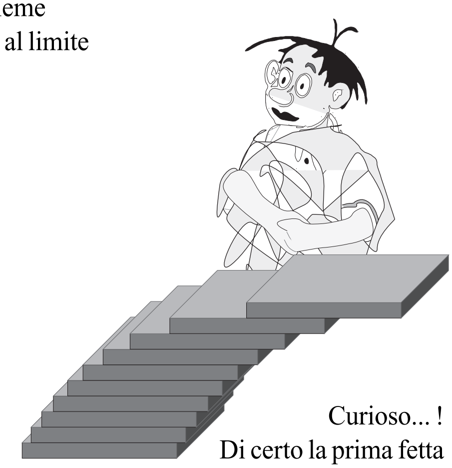
Arrigo G. (2000). Il calcolo a scuola, ovvero: l'inizio di un cambiamento epocale. *Bollettino dei docenti di matematica*, 40, 57-68.
Arrigo G. (2001). Il calcolo a scuola (2): l'uso della calcolatrice. *Bollettino dei docenti di matematica*. 43, 57-64.
Arrigo G. (2004). Quale matematica per la scuola elementare? *Bollettino dei docenti di matematica*. 48, 9-28.
Arrigo G., Corrent G., Mainini G., Marchio A. (2006). *Atolli matematici*. Vol. 1. Lugano: Casagrande Fidia Sapiens, 10-34.
Arrigo G., Bollini V., Corrent G., Mainini G. (2007). *Atolli matematici*. Vol. 2. Lugano: Casagrande Fidia Sapiens, 52-59.
Brousseau G. (2007). *Français Calcul partie 2. Les divisions. Les méthodes, les dispositions, et les sens des divisions ...* Scaricabile dal sito http://www.ardm.eu/files/Francais_Calcul_partie2.pdf
Bagni G.T. (1996). *Storia della Matematica*, volume I. Bologna: Pitagora, 160-161.
Jannamorelli B. (1995). *Strumenti di calcolo aritmetico ingenui… ma ingegnosi*. Torre dei Nolfi (AQ): Edizioni Qualevita.
Enzensberger H.M. (1997). *Il mago dei numeri*. Torino: Einaudi, 7-11.
Marazzani I. (2007). *I numeri grandi. Esperienze di ricerca e sperimentazione nella scuola dell'infanzia e primaria*. Trento: Erickson.
Wells D. (2002). *Personaggi e paradossi della matematica*. Milano: Oscar Saggi Mondadori, 83.

Quiz numero 41: Il cubo armonico

Aldo Frapolli

Caro Archie,
ti piace il solido che vedi davanti a te?
L’ho chiamato ***cubo armonico***.
Possiede 42 facce, 40 delle quali sono rettangolari
e le altre 2 sono poligoni con ognuno 40 lati.
Mi è venuto quasi per gioco, partendo da un cubo
di spigolo 10 cm tagliato in 10 «fette» di ugual spessore.
Ho fatto scivolare la prima fetta – dall’alto – sulla
seconda, la seconda fetta sulla terza, la terza sulla quarta
e così via fino alla nona, lasciando ferma la decima.
Ogni volta ho spinto una fetta – in blocco assieme
con tutte le fette che si trovavano sopra – fino al limite
dell’equilibrio oltre il quale
il blocco sarebbe
caduto.

Bello Joe!
Però non hai detto
che le varie fette
poi le hai incollate assieme,
per fare in modo
che il tutto non cascasse.
Giusto?



Curioso... !
Di certo la prima fetta
sporge 5 cm rispetto
alla seconda.
Ma la seconda rispetto alla terza …
di quanto sporge?
Vediamo un po’…

Qui ti sbagli Archie.
Il tutto è in perfetto equilibrio.
Prova! ... se non ci credi.
Io poi ... mi sono divertito a calcolare il valore esatto
dell’area totale di questo strano solido.
Sai quant’è?

Come può aver fatto Joe, senza dire di quanto sporgono le varie fette?
Giriamo a voi la domanda rivolta ad Archie: qual è la misura esatta della superficie totale del cubo armonico?

A chi andrà, questa volta, il libro riservato alla soluzione più originale?

Soluzione del Quiz numero 40

Vi proponiamo la soluzione della redazione, visto che questa volta non ci è pervenuta alcuna proposta valida. Si vede che i lingottini d'oro hanno stimolato la curiosità di pochi.

La risposta è che in realtà Joe, effettuando una sola pesata, può individuare con certezza la pila di lingottini da 9 g.

Come? Ad esempio:
Prende 1 lingotto dalla prima pila, 2 lingotti dalla seconda pila, 3 lingotti dalla terza pila e così via fino alla trentanovesima pila, dalla quale preleva 39 lingotti. Lascia intatta la 40^a pila.
Poi pesa tutti assieme i lingotti prelevati.
Se la massa è di 6240 g significa che la pila da 9 g è la 40^a, altrimenti sottrae 6240 al valore letto: ottiene un numero fra 1 e 39 che corrisponde al numero della pila con i lingottini da 9 g.

La spiegazione del perché funziona sta nei numeri che accompagnano il seguente ragionamento.

Il numero dei lingotti pesati è:

$$1+2+3+4+\ ...\ +39=\frac{(1+39)\cdot 39}{2}=780 \text{ (lingotti)},$$

di cui al massimo 39 sono da 9 g e tutti gli altri sono da 8 g. Il valore massimo che si può ottenere con la pesata è quindi:

$780 \cdot 8 + 39 = 6240 + 39$ (grammi)

Siccome 6240 è il valore minimo possibile – ottenuto nel caso in cui la pila dei lingotti da 9 g fosse la 40^a – facendo la differenza fra la massa pesata e il minimo si ottiene un numero fra 1 e 39 che indica la pila con i lingottini da 9 g.

2. Apprendere giocando Giochi geometrici e… aritmetici

Bernardo Mutti[1]

1. Introduzione

«Apprendere giocando» non è solo uno slogan assai diffuso, ma anche una concreta possibilità di variare, almeno ogni tanto, l'attività didattica in classe. Quando poi il gioco è centrato su aspetti concettuali importanti dei programmi scolastici, la cosa si fa ancor più interessante. Nel seguito presenterò alcuni giochi di competizione che concernono sia la conoscenza delle figure geometriche piane, sia quella delle frazioni.

Siccome però il termine «gioco» può essere interpretato in diversi modi, mi permetto di far seguire alcune citazioni di studiosi che hanno cercato di precisarne il significato.

Johan Huizinga, psicologo, linguista, storico del Medioevo e orientalista, nella sua opera *Homo ludens* del 1938 dà la seguente definizione.

Gioco è un'azione, o un'occupazione volontaria, compiuta entro certi limiti definiti di tempo e di spazio, secondo una regola volontariamente assunta, e che tuttavia impegna in maniera assoluta, che ha un fine in se stessa; accompagnata da un senso di tensione e di gioia, e dalla coscienza di «essere diversi» dalla «vita ordinaria».

Tutto ciò che Huizinga considera peculiare per il gioco lo troviamo anche nella matematica. Gli assiomi e i procedimenti matematici sono «regole del gioco» che occorre assumere. Inoltre vi è certamente *tensione* quando si affronta un problema matematico e *gioia* quando lo si risolve; nel matematico professionista vi è anche la coscienza che i problemi di cui si occupa sono *diversi* da quelli della vita di tutti i giorni.

La distinzione che fa Bruno D'Amore chiarisce ulteriormente il concetto. Egli individua due categorie di gioco, il *play* ed il *game*.

*Il **play** è quello che ha come scopo il raggiungimento di una soluzione, spesso solitario; l'indovinello alla Martin Gardner è l'esempio prediletto, ma va bene anche il solitario, il cruciverba, il sudoku; non c'è premio, non c'è vincita, c'è solo il completamento di un iter che qualcuno ha creato per te.*

1. Maestro pensionato, animatore nella scuola elementare, membro attivo della SMASI.

*Il **game** è quello in cui ci sono posta e strategia, quel che si vince è quel che l'avversario perde; ci sono informazioni esplicite, per esempio le regole e le mosse dell'avversario, e informazioni nascoste, per esempio le carte distribuite a caso; per cui, spesso il game necessita di conoscenze un po' specifiche, almeno un po' di probabilità, la conoscenza dello strumento che stai utilizzando (carte, scacchiera, dadi etc.). Accomunare le due tipologie di gioco sotto lo stesso nome può essere riduttivo o deleterio, ma in italiano abbiamo solo quel termine, gioco, null'altro. Forse è per questo che nascono equivoci.*

I giochi che propongo all'attenzione degli insegnanti sono del tipo *game*. Da insegnante di scuola elementare, sono arrivato a capire l'importanza del gioco attraverso un'esperienza parallela a quella di Ennio Peres, il famoso giocologo italiano, che così si esprime:

La mia vocazione primaria è quella di divulgatore dei concetti elementari della matematica. In questa veste, verso la fine degli anni '70, ho mosso i miei primi passi come giornalista e autore di trasmissioni televisive. Siccome, però, incontravo molte difficoltà a farmi prendere sul serio, sono stato costretto a farmi prendere per... gioco. In pratica, dopo essere riuscito a farmi apprezzare come esperto di giochi vari, è stato più facile trovare degli editori disposti a darmi fiducia anche in veste di divulgatore.

Termino con un pensiero di Martin Gardner:

La linea che separa la Matematica da intrattenimento dalla Matematica seria è sottile e indistinta… In generale, la matematica è considerata ricreativa se ha un aspetto giocoso che può essere capito e apprezzato anche dai non matematici… quasi tutte le branche della matematica hanno aree che possono essere considerate ricreative. Purtroppo moltissimi insegnanti continuano a ignorare il potenziale della Matematica divertente.

2. Gioco A: classificazioni

Materiale

- modellini in cartoncino di figure geometriche: triangoli e quadrilateri di diversa forma, grandezza e colore;
- bigliettini di carta su cui scrivere le proprietà delle figure o etichette già pronte;
- eventualmente sacchetti, buste, scatolette o cordicelle a mo' di recinto per inserire le figure geometriche.

Prima modalità di gioco

Distribuire i modellini di figure geometriche e lasciare che i giocatori (singolarmente o a gruppetti) formino dei sottoinsiemi e scrivano sul biglietto perché hanno selezionato quei pezzi in un unico insieme.

Seconda modalità di gioco

Distribuire i modellini di figure geometriche, presentare una dopo l'altra le etichette prestabilite e formare i sottoinsiemi.

3. Gioco B: conoscenza delle proprietà di triangoli e quadrilateri

Materiale

- tavole a griglia quadrettata: quadretti 2x2 (cm);
- serie di triangoli e quadrilateri;
- mazzo di carte da gioco con i nomi delle *proprietà* e *Non proprietà* dei poligoni.

N.B. Le carte possono essere introdotte per sottoinsiemi (per esempio: solo triangoli, solo quadrilateri,…) oppure tutte in una volta.

Importante: il docente, attraverso il gioco delle classificazioni, introduce allievi ed allieve al vocabolario geometrico delle figure piane.

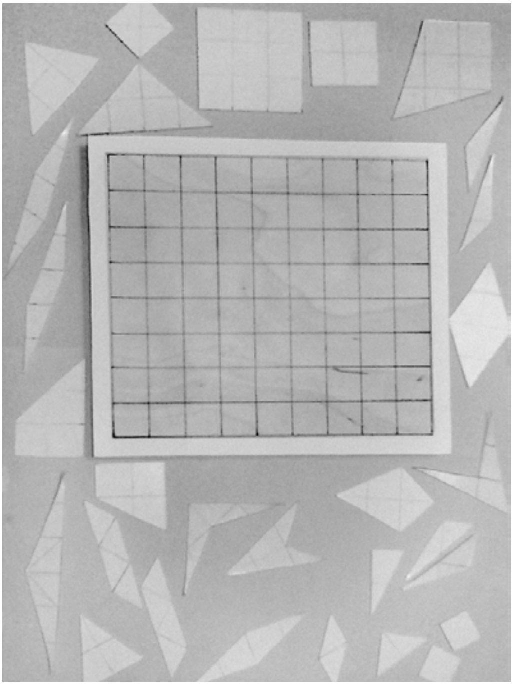


Figura 1 La tavola quadrettata e le diverse figure geometriche con e senza i segni della griglia.

Prima modalità di gioco

Ogni giocatore riceve una tavola quadrettata da pavimentare con le figure geometriche.

Per ogni 2 giocatori è a disposizione una serie completa di triangoli e quadrilateri e una serie completa di carte recanti proprietà delle figure che può essere usata anche solo parzialmente. Vi sono anche alcune carte «scambio / equivalente» che permettono di sostituire subito o successivamente figure con altre di stessa area.

A turno ognuno solleva una carta dal mazzo, la analizza, prende la figura indicata (o una tra le figure possibili) e la dispone sulla propria griglia.

N.B. La carta utilizzata va riposta sotto il mazzo.

Vince chi per primo pavimenta la propria griglia o chi ne avrà ricoperto la maggiore superficie.

Seconda modalità di gioco

I giocatori dapprima riempiono la propria tavola quadrettata con figure geometriche a scelta (esercizio di tassellazione del piano). Limitazione: delle diverse figure si può prendere un solo quadrato e un solo rettangolo *Non rombo*.

Poi procedono come nella modalità precedente ma togliendo una figura alla volta.

Vince chi per primo avrà tolto tutte le figure o avrà una maggior superficie libera.

4. Gioco C: figure geometriche e frazioni minori o equivalenti a 1

Materiale

- serie di triangoli e quadrilateri di area 1;
- mazzo di carte con frazioni minori o equivalenti a 1;
- tavole da gioco con una doppia serie di rettangoli quadrettati e diversi per forma ed estensione.

  N.B. le due serie di rettangoli sono congruenti e di colore diverso e ogni tavola è utilizzata da 2 giocatori.

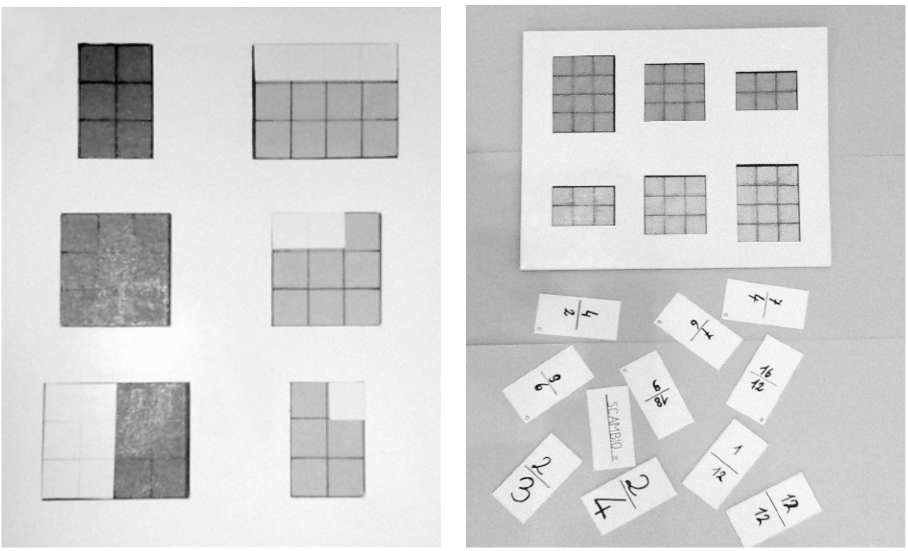


Figura 2 Tavole per 2 giocatori. Si possono anche inserire alcune carte «scambio / equivalente».

Prima modalità di gioco

Ogni giocatore, scelto il proprio colore, disposte le figure geometriche sul tavolo e mescolate le carte, a turno pesca una carta e, seguendone l'indicazione, dispone la figura appropriata sui propri rettangoli.

N.B. (La carta utilizzata va riposta sotto il mazzo).

Vince chi per primo riempie tutte le figure del proprio colore o chi ne copre la maggior superficie.

Seconda modalità di gioco

Vedi gioco B, seconda modalità.

5. Gioco D: frazioni minori, equivalenti o maggiori di 1

Materiale

- per ogni giocatore una tavola quadrettata su cui figurano più serie di figure diverse per forma ed estensione; ogni serie è congruente alle altre e figure congruenti hanno lo stesso colore;
- una serie di triangoli e quadrilateri con area diversa ed esprimibile con un numero intero e i cui vertici devono coincidere con gli incroci della quadrettatura;
- una serie di carte da gioco su cui figurano le frazioni minori, equivalenti o maggiori di 1.

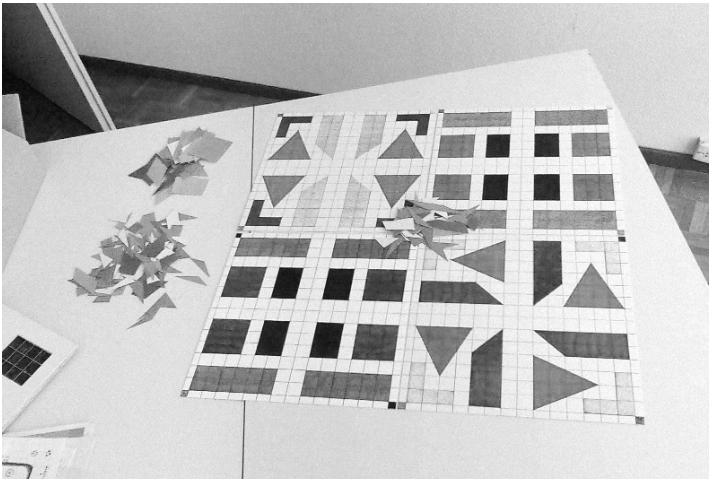


Figura 3 Quattro tavole da gioco e una collezione di modellini di figure geometriche.

Modalità di gioco

Vedi le due del gioco C.

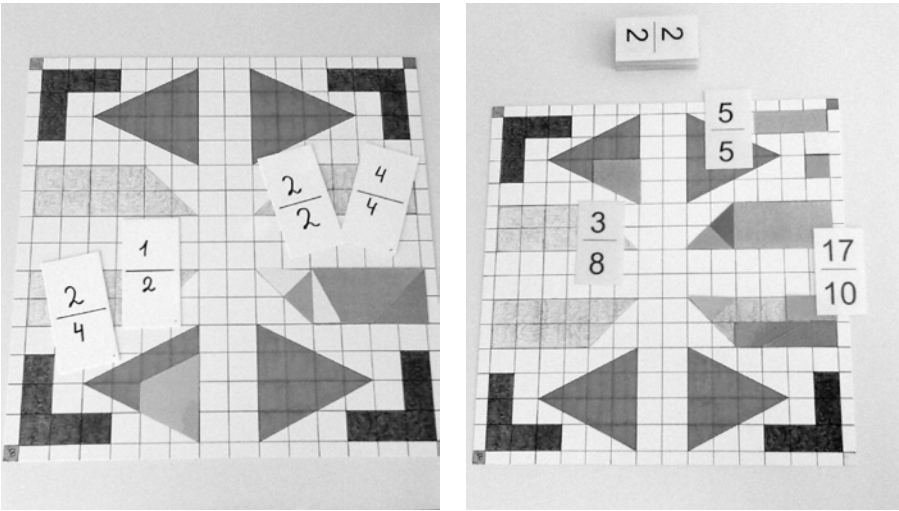


Figura 4 Esempi di giochi completati: due figure a sinistra (triangolo con trapezio di area 1/2 e trapezio interamente ricoperto, con le etichette 2/4, 1/2 e 2/2, 4/4) e sulla destra tre figure (triangolo con trapezio di area 3/8; figura a L interamente ricoperta, con l'etichetta 5/5; due trapezi unitari, uno interamente ricoperto e l'altro solo per 7/10 della sua superficie, con l'etichetta comune 17/10).

3. P-bam[1] numero 5

Giorgio Mainini

Giocando con Kaprekar

«harsad» in sanscrito significa «grande gioia».

Il matematico indiano Shri Dattathreya Ramachandra Kaprekar ha definito «numero harshad» un numero naturale divisibile per la somma delle sue cifre.

Che lingua è il sanscrito?

Kaprekar, chi era costui?

Livello 1

Trova qualche numero harshad.

Trova i numeri harshad minori di 100.

Livello 2

Che cosa si può dire dei numeri divisibili per 9?

Trova il minore e il maggior numero harshad di 3 cifre divisibile per 13.

Livello 3

Esistono numeri harshad divisibili per 11? Se sì, trovane almeno uno; se no, come mai?

Chiamiamo:

N: un numero naturale

SN: la somma delle sue cifre

Q: N/SN

Prepara un grafico di tutti gli N compresi fra 1 e 100 e dei rispettivi Q (N sull'asse delle ascisse, Q sull'asse delle ordinate) e individua i numeri harshad.

1. Con la denominazione p-bam s'intende un problema matematico «che ha la maligna ma stimolante tendenza a scoppiare fra le mani di chi lo tratta». Questa rubrica è aperta a tutti gli appassionati che hanno problemi di questo tipo da proporre. Contattare: bdmpbam @yahoo.it.

Livello 4

Ci sono dei numeri che sicuramente non sono harshad: trova una loro caratteristica.

Livello 5

Come definiresti, con una formula, un numero harshad di n cifre?

Livello 6: algoritmo di Kaprekar

1. Sia w un numero (di almeno 2 cifre)
2. costruisci il numero w’ composto dalle cifre di w in ordine decrescente e il numero w” composto dalle cifre di w in ordine crescente
3. calcola h = w’ – w”
4. torna al punto 1, ponendo h al posto di w.

Che cosa capita, a dipendenza del numero di cifre di w?

Livello 7 e seguenti

Spiega perché capita quello che capita quando w ha 2 cifre.
Spiega perché capita quello che capita quando w ha 3 cifre.
Sperimenta con w con più di 3 cifre e descrivi che cosa capita.

Consiglio: ti può essere utile il sito
http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Arithmetic/Kaprekar.shtml

Fino a qualche tempo fa si riteneva che tutti i fattoriali fossero numeri harshad, ma si è poi scoperto che non è vero. Qual è il più piccolo fattoriale che non è un numero harshad? Quante cifre ha? Ovviamente, quel fattoriale finisce con un certo numero di zeri: quanti sono?

Consiglio: fa un giretto in internet.

1. Somma dei primi n numeri naturali e dei loro quadrati con un'interessante applicazione al volume della calotta sferica

Antonio Steiner, Gianfranco Arrigo

1. Somma dei primi n numeri naturali

1.1. Fase euristica

Vogliamo trovare un modo per calcolare la somma dei primi n numeri naturali, per qualsiasi valore di n. Questo problema è anche detto «del piccolo Gauss». Un gustoso aneddoto racconta infatti che il matematico Karl Friedrich Gauss (1777-1855), quando frequentava la scuola elementare a Braunschweig, costituiva un serio problema per il suo insegnante, soprattutto durante le lezioni di matematica. Già, perché, sveltissimo nello svolgere i compiti assegnati, dedicava gran parte del tempo a importunare i compagni di classe. Si racconta dunque che un bel giorno il maestro, per tenerlo occupato per un bel po' gli assegna il compito di calcolare la somma dei primi 100 numeri naturali. Dopo neanche un minuto, Gauss consegna un foglio sul quale il maestro, sgomento, riconosce il risultato corretto. Come avrà fatto? si chiede chi non conosce questa storia. Ebbene, il piccolo Gauss, usando inconsciamente un metodo che più di un secolo dopo gli psicologi della *Gestalt*, in particolare il ceco Max Wertheimer (1880-1943), battezzarono col termine di *ristrutturazione*.

Gauss opera la seguente ristrutturazione del problema: scrive due volte la somma, su due righe separate, la seconda volta invertendo l'ordine degli addendi.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\ n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \ldots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

Questa ristrutturazione mostra una caratteristica importante: si osserva che sommando a due a due gli addendi di ogni colonnina si ottiene costantemente (n+1). Dunque, chiamando S la somma cercata, si può scrivere:

$$2\,S_n = \underbrace{(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)}_{n\ \text{addendi}} \quad \text{da cui} \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Un altro tipo di ristrutturazione può essere eseguita nel registro figurale. Vediamo prima il caso particolare n=5.

La figura 1 ci mostra che tale somma può essere rappresentata mediante un numero triangolare:

Figura 1 1+2+3+4+5

Figura 2 Rettangolo 5x6

La figura 2 ci mostra che accostando due rappresentazioni del numero triangolare (1+2+3+4+5) si ottiene un rettangolo 5x6.

In generale, si intuisce che accostando due numeri triangolari (1+2+3+…+n) si ottiene un rettangolo nx(n+1). Di nuovo si ricava la formula ottenuta in precedenza.

1.2. Generalizzazione e formalizzazione

La formula intuita

$$S_n = \frac{n\left(n+1\right)}{2}$$

può essere dimostrata col metodo dell'induzione completa.

Inoltre, con essa si calcola facilmente la somma dei primi n termini di una successione (o progressione) aritmetica, cioè:

$$a+\left(a+d\right)+\left(a+2\,d\right)+\left(a+3\,d\right)+\ldots+\left[a+\left(n-1\right)d\right]=n\,a+\left[d+2\,d+3\,d+\ldots+\left(n-1\right)d\right]=$$

$$=n\,a+d\,\left[1+2+3+\ldots+\left(n-1\right)\,\right]=n\,a+d\,\frac{\left(n-1\right)n}{2}=\frac{2\,a+d\left(n-1\right)}{2}\,n=\frac{x_1+x_n}{2}\,n$$

dove x_1 è il primo termine della successione e x_n è l'ennesimo termine.

2. Somma dei quadrati dei primi n numeri naturali

2.1. Fase euristica

Se T_n è l'ennesimo numero triangolare, si ha per definizione:

$$T_n = T_{n-1} + n$$

Illustrazione, per n=5 (vedere la figura 3).

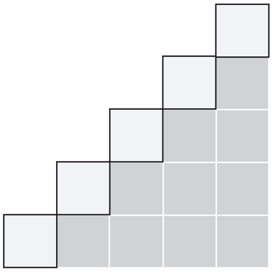


Figura 3 $T_5 = T_4 + 5$

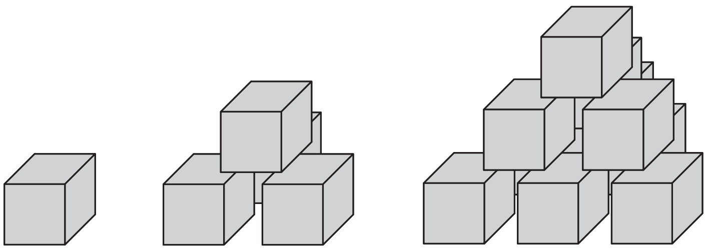
Figura 4 $Q_5 = T_5 + T_4$

Se Q_n è un numero quadrato, si ha

$Q_n = T_n + T_{n-1}$

Illustrazione, per n=5 (vedere la figura 4).

Ora abbiamo bisogno dei numeri tetraedrici.



$TE_1 = 1 = T_1$ $\quad$ $TE_2 = 1 + (1+2) = 4 = T_1 + T_2$ $\quad$ $TE_3 = 1 + (1+2) + (1+2+3) = 10 = T_1 + T_2 + T_3$

Figura 4 I primi tre numeri tetraedrici.

In generale: $TE_n = T_1 + T_2 + ... + T_n$

Ci serve trovare una formula che esprima TE_n in funzione di n[1].

Poniamo n=5 e ricorriamo a una nuova ristrutturazione: disponiamo differentemente tre numeri TE_5 e addizioniamo riga per riga sfruttando il fatto che ogni somma è un multiplo di 7:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 1 & & 5 & & 7 \\ 1\;2 & & 2\;1 & & 4\;4 & & 7\;7 \\ 1\;2\;3 & + & 3\;2\;1 & + & 3\;3\;3 & = & 7\;7\;7 \\ 1\;2\;3\;4 & & 4\;3\;2\;1 & & 2\;2\;2\;2 & & 7\;7\;7\;7 \\ 1\;2\;3\;4\;5 & & 5\;4\;3\;2\;1 & & 1\;1\;1\;1\;1 & & 7\;7\;7\;7\;7 \end{array}$$

Otteniamo:

$3 \cdot TE_5 = 3 \cdot (1 + 3 + 6 + 10 + 15) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot 7$

1. Per un approfondimento, vedere per esempio Conway J.H., Guy R.K. (1999). *Il libro dei numeri*. Versione italiana. Milano: Hoepli.

da cui

$$TE_5 = \frac{5 \cdot (5+1) \cdot (5+2)}{6} = 35$$

In generale, possiamo formulare l'ipotesi:

$$3\,TE_n = 3 \cdot (T_1 + T_2 + \ldots + T_n) = T_n \cdot (n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{2}$$

quindi

$$TE_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Ora sappiamo che:

$$TE_n + TE_{n-1} = (T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n) + (T_1 + T_2 + \ldots + T_{n-1})$$

$$1 \qquad 2^2 \qquad 3^2 \qquad n^2$$

Quindi possiamo ricavare la formula cercata:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n-1)n(n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2+n-1)}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2.2. Un metodo algebrico

Poniamo l'ipotesi:

$$S_n^{(2)} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = A\,n^3 + B\,n^2 + C\,n$$

Per determinare i coefficienti A, B e C sostituiamo a n, nell'ordine, i valori 1, 2 e 3. Otteniamo così il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} A + B + C = 1 \\ 8A + 4B + 2C = 5 \\ 27A + 9B + 3C = 14 \end{cases}$$

che ha la soluzione

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{3} \\ B = \dfrac{1}{2} \\ C = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

per cui si raggiunge la formula:

$$S_n^{(2)} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

La dimostrazione di questa formula dev'essere eseguita col metodo dell'induzione completa:

- La formula vale per n=1.
- Se la formula vale per n, allora vale anche per n+1, infatti con un semplice calcolo algebrico si può verificare che:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

- Di conseguenza la formula per $S_n^{(2)}$ vale per ogni $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Calcolo del volume di una calotta sferica

Con riferimento alla figura 6, suddividiamo la calotta sferica in (n+1) strati di uguale spessore. Siano r il raggio della sfera e h l'altezza della calotta.

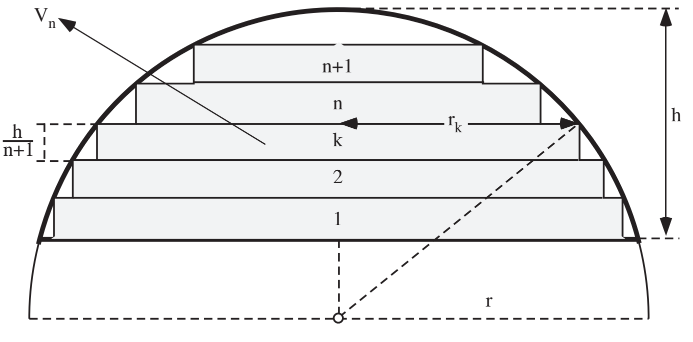


Figura 6 Suddivisione della calotta sferica in strati di uguale spessore.

Siccome $r_k^2 = r^2 - \left[r - h + k\,\frac{h}{n+1}\right]^2 = 2\,r\,h - h^2 - k\,\frac{2\,h\,(r-h)}{n+1} - k^2\,\frac{h^2}{(n+1)^2}$

il volume del k-esimo strato è:

$$\frac{\pi h}{n+1}\, r_k^2 = \frac{\pi h^2 (2r-h)}{n+1} - \frac{2\pi h^2 (r-h)}{(n+1)^2}\cdot k - \frac{\pi h^3}{(n+1)^3}\cdot k^2$$

e sommando i volumi degli (n+1) strati si ottiene

$$V_n = \pi h^2 (2r-h)\frac{n}{n+1} - \frac{2\pi h^2 (r-h)}{(n+1)^2}\cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k}_{S_n} - \frac{\pi h^3}{(n+1)^3}\cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^2}_{S_n^{(2)}}$$

Sfruttando i risultati ottenuti nei primi due paragrafi, otteniamo:

$$V_n = \pi h^2 \left[(2r-h)\frac{n}{n+1} - (r-h)\frac{n}{n+1} - \frac{h}{6}\,\frac{n(2n+1)}{(n+1)^2}\right]$$

Infine il volume V della calotta si ottiene come limite di V_n per n tendente all'infinito.

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = \pi h^2 \left[(2r-h) \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}}_{=1} - (r-h) \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}}_{=1} - \frac{h}{6} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n(2n+1)}{(n+1)^2}}_{=2} \right] =$$

$$= \pi h^2 \left(2r - h - r + h - \frac{h}{3} \right) = \frac{\pi h^2}{3} (3r - h)$$

Commento didattico

Questa attività si inserisce perfettamente nelle proposte di pre-analisi: lavori di preparazione allo studio dell'analisi liceale[2]. Lo scopo è di preparare un terreno di esperienza euristica, molto importante, per non dire essenziale, per una corretta comprensione dei concetti fondamentali dell'analisi matematica. Sottolineiamo che non è assolutamente necessario conoscere la teoria dei limiti per intuire che, per esempio, la frazione algebrica

$$\frac{n}{n+1}$$

per n molto grande, per n più grande di qualsiasi numero immaginabile, per n tendente all'infinito tende a 1. Basterebbe tabulare la frazione per valori di n sempre più grandi (vedere la figura 7), oppure operare la semplice trasformazione algebrica:

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

e costatare che 1/n diventa sempre più piccolo fino a raggiungere valori trascurabili, per n molto grande o tendente all'infinito. Cose, queste, che un allievo sveglio di scuola media capisce molto bene.

n	n/(n+1)
1	0.5
10	0.909090909
100	0.99009901
1000	0.999000999
10000	0.99990001
100000	0.99999
1000000	0.999999
10000000	0.9999999
100000000	0.99999999
1000000000	0.999999999

Figura 7 Tabulazione della frazione algebrica n/(n+1).

2. Si veda in particolare l'articolo di G. Arrigo «Attività di pre-analisi: loro importanza ed esempi» pubblicato sul numero 53 di questa rivista (dicembre 2006) e scaricabile dal sito: www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/arrigo/arrigo.htm

V. Dalla bricolla

1. Frazioni egizie

Giorgio Mainini

Nel papiro Rhind (dal nome dell'antiquario scozzese Henry Rhind che lo acquistò a Luxor nel 1859) lo scriba Ahmes riporta su una pagina tutte le frazioni del tipo

$$\frac{2}{2n+1}$$

con $n = 1, \ldots, 50$ e quelle del tipo $\frac{n}{10}$ con $n = 1, \ldots, 9$ scomposte in somme dove compaiono solo ***aliquote*** (cioè frazioni del tipo $\frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}^*$) o $\frac{2}{3}$.

Esempi

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} \qquad ; \qquad \frac{9}{10} = \frac{1}{5} + \frac{1}{30} + \frac{2}{3}$$

Non ci è dato sapere perché mai gli Egizi abbiano scelto di fare così. La risposta data da André Weil (6 maggio 1906, Parigi - 6 agosto 1998, Princeton) è stata «Hanno scelto una via sbagliata».

Sull'altra pagina del papiro sono posti e risolti 84 problemi aritmetici, algebrici e geometrici[1].

Diremo che **trasformare una frazione minore di 1 in *frazioni egizie* significa scomporre la frazione in una somma di aliquote tutte diverse fra loro**.

Due metodi di trasformazione

I metodo: metodo di Fibonacci

Ecco come Fibonacci (Leonardo Pisano, ca. 1170 forse a Pisa - 1250 forse a Pisa) risolve il problema nel suo *Liber abaci* del 1202.

Cominciamo con un esempio:
trasformare $\frac{8}{11}$ in frazioni egizie.
Per prima cosa si osservi che $\frac{8}{11} > \frac{1}{2}$

1. Altre fonti dicono 86, altre 87: l'A. non sa leggere i caratteri ieratici.

Quindi si può scrivere $\frac{8}{11}=\frac{1}{2}$ perché $\frac{1}{2}$ è la maggiore aliquota minore di $\frac{8}{11}$ da cui

$$R_1=\frac{8}{11}-\frac{1}{2}=\frac{16-11}{22}=\frac{5}{22}$$

A questo punto si ricomincia: la maggiore aliquota minore di $\frac{5}{22}$ è $\frac{1}{5}$.

Dunque

$$\frac{8}{11}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+R_2$$

da cui

$$R_2=\frac{5}{22}-\frac{1}{5}=\frac{25-22}{110}=\frac{3}{110}$$

Poi: la maggiore aliquota minore di $\frac{3}{110}$ è $\frac{3}{111}=\frac{1}{37}$

Dunque

$$\frac{8}{11}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{37}+R_3$$

da cui

$$R_3=\frac{3}{110}-\frac{1}{37}=\frac{111-110}{4070}=\frac{1}{4070}$$

E si è raggiunta la fine:

$$\frac{8}{11}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{37}+\frac{1}{4070}$$

Prima osservazione

Poiché

$$\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

una volta trovato che $\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ si può scrivere

$$\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}{24}=\ldots$$

In parole: trovata **una** trasformazione se ne possono trovare **infinite**.

Seconda osservazione

I resti trovati nell'esempio sono $\frac{5}{22}$; $\frac{3}{110}$; $\frac{1}{4070}$

È solo un caso che, mentre i denominatori crescono, i numeratori diminuiscono?

No, è sempre così, e questo è il bello della faccenda. Infatti, se i numeratori, tutti numeri naturali, diventano sempre più piccoli, prima o poi raggiungeranno 1 (uno) e la trasformazione sarà eseguita.

In altre parole: **ogni frazione è trasformabile in frazioni egizie**.

Terza osservazione (banale)

Non ha senso occuparsi di frazioni maggiori di 1, perché possono sempre essere espresse come somma di un intero e di una frazione minore di 1.

Dimostrazione che i resti hanno i numeratori sempre più piccoli

Partiamo dalla frazione $\frac{N}{D}$ ricordando che

- $\frac{N}{D} < 1$
- se N = 1 il problema non esiste, perché $\frac{1}{D}$ è già un'aliquota.

Dunque interessano solo i casi N > 1

Si vuole ottenere

$$\frac{N}{D} = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \ldots$$

con $u_1 < u_2 < u_3 < \ldots < u_n < u_{n+1}$

scegliendo ogni volta il massimo u_1 a ogni nuovo resto. Ciò significa che

$$\frac{1}{u_1} < \frac{N}{D}$$

ma anche che

$$\frac{1}{u_1 - 1} > \frac{N}{D}$$

Il resto è

$$R_1 = \frac{N}{D} - \frac{1}{u_1} = \frac{N \cdot u_1 - D}{D \cdot u_1}$$

Poiché

$$\frac{1}{u_1 - 1} > \frac{N}{D}$$

e tutti e quattro i termini della disequazione sono positivi, si ha

$$D > N \cdot (u_1 - 1)$$

$$D > N \cdot u_1 - N$$

$$N > N \cdot u_1 - D$$

Ma $N \cdot u_1 - D$ è proprio il numeratore del resto: è così dimostrato che tale numeratore è minore di N.

Siccome ad ogni passaggio si ripete la stessa procedura, i numeratori diventeranno sempre minori, e ciò dimostra che ogni frazione è trasformabile in frazione egizia.

Esempi di esercizi proponibili in classe (1)

1. Trova un modo che ti permetta di distribuire in parti uguali cinque pizze fra otto persone facendo il minor numero possibile di tagli.

2. Trasforma in frazioni egizie

$\frac{3}{10}$; $\frac{14}{15}$; $\frac{21}{25}$; $\frac{4}{13}$; $\frac{3}{19}$; altre di tua scelta

3. Che cosa capita se, invece di cominciare con l'aliquota maggiore, diciamo $\frac{1}{k}$, cominci con $\frac{1}{k+1}$?

4. Trova qualche coppia (x,y) che soddisfi l'equazione

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \qquad x, y \in \mathbb{N}^*$$

5. Calcola $\frac{1}{10} + \frac{1}{19} + \frac{1}{190} =$ A che cosa ti fa pensare il risultato trovato?

6. Dopo avere trasformato $\frac{9}{20}$ in frazioni egizie, ricorda (!?) che $9 = 4 + 5$

7. Trasforma $\frac{7}{12}$; $\frac{11}{30}$; $\frac{19}{84}$ Inventa tu altri casi «benigni»

8. Nella «Prima osservazione» è mostrato come «allungare di 2» una trasformazione egizia: sai trovare un metodo per «allungarla di 1»?

A questo punto è chiaro che il metodo di Fibonacci funziona sempre ma che non è il più efficiente.

Nell'Appendice sono date le trasformazioni più corte di tutte le frazioni ridotte ai minimi termini di denominatore compreso fra 3 e 13.

II metodo: riduzione dei conflitti

È evidente che per ogni frazione è

$$\frac{a}{b} = \underbrace{\frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \ldots \frac{1}{b} + \frac{1}{b}}_{\text{a addendi}}$$

che non è una trasformazione egizia lecita perché tutte le aliquote sono uguali; si tratta di «eliminare i conflitti», cioè sostituire ogni coppia di addendi uguali o con una sola frazione o con un'altra coppia che abbia la stessa somma ma con addendi diversi.

Si considerano due casi:

I caso: b = 2k ***cioè b pari***

Si opera la sostituzione

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{b} = \frac{1}{k}$$

tante volte quanto è necessario.

II caso: b = 2h+1 ***cioè b dispari***

Si opera la sostituzione

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{b} = \frac{2}{b+1} + \frac{2}{b(b+1)}$$

tante volte quanto è necessario.

Esempi

$$\frac{7}{8}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\underbrace{\underbrace{\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)}_{\frac{1}{4}}+\underbrace{\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)}_{\frac{1}{4}}}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)}_{\frac{1}{4}}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$$

$$\frac{7}{9}=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\right)}_{\substack{\frac{1}{9+1}+\frac{1}{9(9+1)}=\\=\frac{1}{5}+\frac{1}{45}}}+\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\right)}_{\frac{1}{5}+\frac{1}{45}}+\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\right)}_{\frac{1}{5}+\frac{1}{45}}=\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)}_{\frac{1}{3}+\frac{1}{15}}+\underbrace{\left(\frac{1}{45}+\frac{1}{45}\right)}_{\frac{1}{23}+\frac{1}{1035}}+\frac{1}{5}+\frac{1}{45}+\frac{1}{9}=$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{23}+\frac{1}{1035}+\frac{1}{5}+\frac{1}{45}+\frac{1}{9}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{23}+\frac{1}{45}+\frac{1}{1035}$$

Certo che, quanto ad efficienza, Fibonacci gli bagna bellamente il naso: teniamolo presente tanto per allenare un po' con il calcolo con le frazioni, sia numeriche come esercizio, sia letterali per giustificare le due sostituzioni.

In questo caso il modo migliore consiste nel combinare i due metodi:

$$\frac{7}{9}=\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}_{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}+\frac{1}{9}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}$$

Il metodo fa sì che ogni volta che si ha un denominatore pari il numero di frazioni diminuisce di 1; quando invece il denominatore è dispari il numero delle frazioni non cambia, ma si ha un conflitto di meno. Di conseguenza, data una frazione $\frac{d}{n}$, dopo al massimo d passaggi si giunge alla fine.

Il papiro Rhind

Secondo moderni storici della matematica, pare che Ahmes abbia usato i seguenti metodi per trovare i «suoi» risultati. «suoi», perché egli stesso scrive di averli ripresi da documenti più antichi: siccome il papiro risale a circa il 1650 a.C., si può presumere che i risultati siano stati trovati tra il 1850 e il 2000 a.C.

Se 2n+1 = p è primo, la trasformazione usa la formula

$$\frac{2}{p}=\frac{2}{p+1}+\frac{2}{p\,(p+1)}$$

Se invece 2n+1 = a·b allora usa una delle due seguenti

$$\frac{2}{a\cdot b}=\frac{1}{\frac{a\cdot(b+1)}{2}}+\frac{1}{\frac{a\cdot b\cdot(a+1)}{2}} \qquad ; \qquad \frac{2}{a\cdot b}=\frac{1}{\frac{a\cdot(a+b)}{2}}+\frac{1}{\frac{b\cdot(a+b)}{2}}$$

Esempi di esercizi proponibili in classe (2)

9. Controlla che le tre uguaglianze precedenti sono corrette.

10. $\frac{2}{7}$ Ahmes: $\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$

11. $\frac{2}{23}=$ Ahmes: $\frac{1}{12}+\frac{1}{276}$

12. $\frac{2}{37}=$ Ahmes: $\frac{1}{24}+\frac{1}{111}+\frac{1}{296}$

13. $\frac{2}{21}=$ Ahmes: $\frac{1}{14}+\frac{1}{42}$

14. $\frac{2}{63}=$ Ahmes: $\frac{1}{42}+\frac{1}{126}$

Le trasformazioni secondo Ahmes, nella forma $\mathbf{\frac{2}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}$

n	a	b	c	d	La piu corta?	n	a	b	c	d	La piu corta?
3	2	6			Sı	**53**	30	318	795		No 27 ; 1431
5	3	15			Sı	**55**	30	330			Sı, ma anche 40 ; 88 e altre 2
7	4	28			Sı	**57**	38	114			Sı, ma anche 33 ; 209 e altre 2
9	6	18			Sı, ma anche 5 ; 45	**59**	36	236	531		No: 30 ; 1770
11	6	66			Sı	**61**	40	244	488	610	No: 31 ; 1891
13	8	52	104		No 7 ; 91	**63**	42	126			Sı, ma anche 56 ; 72 e altre 5
15	10	30			Sı, ma anche 12 ; 20 e altre 2	**65**	39	195			Sı, ma anche 45 ; 117 e altre 2
17	12	51	68		No: 9 ; 153	**67**	40	335	536		No: 34 ; 2278
19	12	76	114		No: 10 ; 190	**69**	46	138			Sı, ma anche 39 ; 299 e altre 2
21	14	42			Sı, ma anche 15 ; 35 e altre 2	**71**	40	568	710		No: 36 ; 2556
23	12	276			Sı	**73**	60	219	292	365	No: 37 ; 2701
25	15	75			Sı, ma anche 13 ; 325 e 14 ; 378	**75**	50	150			Sı, ma anche 60 ; 100 e altre 5
27	18	54			Sı, ma anche 15 ; 135	**77**	44	308			Sı, ma anche 63 ; 99 e altre 2
29	24	58	174	232	No: 15 ; 435	**79**	60	237	316	790	No: 40 ; 3160
31	20	124	155		No: 16 ; 496	**81**	54	162			Sı, ma anche 45 ; 405 e altre 2
33	22	66			Sı, ma anche 21 ; 77 e altre 2	**83**	60	332	415	498	No: 42 ; 3486 e 44 ; 996 ; 2739
35	30	42			Sı, ma anche 21 ; 105 e altre 2	**85**	51	255			Sı, ma anche 55 ; 187 e altre 2
37	24	111	296		No: 19 ; 703	**87**	58	174			Sı, ma anche 48 ; 464 e altre 2
39	26	78			Sı, ma anche 24 ; 104 e altre 2	**89**	60	356	534	890	No 45 ; 4005 e altre 56 di lung. 3
41	24	246	328		No: 21 ; 861	**91**	70	130			Sı, ma anche 52 ; 364 e altre 2
43	42	86	129	301	No: 22 ; 946	**93**	62	186			Sı, ma anche 51 ; 527 e altre 2
45	30	90			Sı, ma anche 36 ; 60 e altre 5	**95**	60	380	570		No: 60 ; 228 e altre 3
47	30	141	470		No: 24 ; 1128	**97**	56	679	776		No: 49 ; 4753
49	28	196			Sı, ma anche 25 ; 1225	**99**	66	198			Sı, ma anche 90 ; 110 e altre 5
51	34	102			Sı, ma anche 30 ; 170 e altre 2	**101**	202	303	606		No: 51 ; 5151

Nelle colonne «**La più corta?**» sono proposte trasformazioni alternative.

Qualche osservazione sul lavoro di Ahmes, o del suo ispiratore

Perché $\frac{2}{2n+1}$?

Ovviamente, poiché le frazioni di numeratore 1 sono aliquote, non è il caso di elencarle.

Il numeratore 2 consente di esprimere qualunque frazione di denominatore dato «per raddoppio»: in sostanza si tratta di esprimere ogni numeratore come somma di potenze di 2, una sorta di numerazione binaria.

Esempio

$$\frac{11}{23}=\frac{8}{11}+\frac{2}{11}+\frac{1}{2}=2\cdot\left(2\cdot\frac{2}{11}\right)+\frac{2}{11}+\frac{1}{11}$$

In effetti, nello stesso papiro Rhind si trovano problemi che implicano moltiplicazioni, e il metodo usato si basa proprio sul raddoppio.

Schema di moltiplicazione per raddoppio: 53 · 61

1*	61	+
2	122	
4*	244	+
8	488	
16*	976	+
32*	1952	+
Stop, perché 64 > 53	3233	

Nella prima colonna si comincia sempre con 1 e nella seconda con il moltiplicatore, poi si raddoppia finché, raddoppiando ancora, si troverebbe nella prima colonna un numero maggiore del moltiplicando. Si indicano poi con asterischi i numeri che, sommati, danno il moltiplicando e, nella seconda colonna si sommano i numeri che corrispondono a quelli con l'asterisco.

Oggi scriveremmo

$53\cdot 61=(2^5+2^4+2^2+2^0)\cdot 61=110101_2\cdot 61_{10}$

Gli Egizi sapevano eseguire, sempre con il metodo del raddoppio, anche moltiplicazioni del tipo

$$11\cdot 3\frac{5}{39}=(8+2+1)\cdot\left[3+\left(2\cdot\frac{2}{39}+\frac{1}{39}\right)\right]=(8+2+1)\cdot\left[3+\left(2\cdot\left(\frac{1}{26}+\frac{1}{78}\right)+\frac{1}{39}\right)\right]=$$

$$=1011_2\cdot\left[3+\left(2\cdot\left(\frac{1}{26}+\frac{1}{78}\right)+\frac{1}{39}\right)\right]$$

Il passaggio da $\frac{2}{39}$ a $\frac{1}{26}+\frac{1}{78}$ si ricava, appunto, dalla tabella fornita da Ahmes.

Perché fino a $\frac{2}{101}$?

Un'ipotesi è questa: la trasformazione di Fibonacci di $\frac{2}{103}$ dà $\frac{1}{52}+\frac{1}{5356}$ e 5356 è molto maggiore di 890, massimo denominatore in tabella (v. sotto). D'altra parte la migliore delle 65 trasformazioni di $\frac{2}{103}$ di lunghezza 3 è $\frac{1}{60}+\frac{1}{515}+\frac{1}{1236}$ che, a sua volta, non è il massimo della vita. Per «trasformazione migliore» intendo che il suo massimo denominatore è minore del massimo denominatore di tutte le altre trasformazioni. Le trasformazioni di lunghezza 4 sono catastrofiche: il mio povero computer non ce l'ha fatta a trovarle tutte. Allora mi sono rivolto al Centro Svizzero di Calcolo Scientifico (CSCS) di Manno[2]. Dopo qualche giorno di calcoli il computer del CSCS ha dato il suo responso: le trasformazioni lunghe 4 sono 21'982. La prima che ha trovato è stata

$2/103 = 1/52 + 1/5357 + 1/28692093 + 1/823236172028556$

e l'ultima

$2/103 = 1/144 + 1/145 + 1/180 + 1/47792$

Per curiosità, l'elenco completo occupa circa 440 pagine di 50 righe l'una!

Denominatori usati

3	30	58	114	198	308	531
4	34	60	124	202	316	534
6	36	62	126	219	318	536
8	38	66	129	232	328	568
10	39	68	130	236	330	570
12	40	70	138	237	332	606
14	42	75	141	244	335	610
15	44	76	150	246	356	679
18	46	78	155	255	365	710
20	50	86	162	276	380	776
22	51	90	174	292	415	790
24	52	102	186	296	470	795
26	54	104	195	301	488	890
28	56	111	196	303	498	

Denominatori usati più di una volta

Denominatore	Usato volte	Fattori primi
30	6	2 ; 3 ; 5
60	5	2 ; 3 ; 5
42	4	2 ; 3 ; 7
12	3	2 ; 3
24	3	2 ; 3
40	3	2 ; 5
66	3	2 ; 3 ; 11
6	2	2 ; 3
15	2	3 ; 5
18	2	2 ; 3
28	2	2 ; 7
51	2	3 ; 17
54	2	2 ; 3
58	2	2 ; 29
114	2	2 ; 3 ; 19
174	2	2 ; 3 ; 29

2. Ringrazio sentitamente il dr. Michele De Lorenzi del CSCS che, con cortesia e sollecitudine, si è dedicato a soddisfare la mia curiosità.

In tutto, nel papiro sono dati 126 denominatori, di cui 103 pari e 23 dispari; se si scompongono in fattori primi si trova che il massimo primo usato è 101.

L'evidente propensione per i denominatori pari può spiegare perché Ahmes non dà sempre la trasformazione che ci aspetteremmo, cosa che avviene 21 volte. Là dove non dà la trasformazione più corta sceglie quasi sempre denominatori minori di quelli della trasformazione più corta. Altre scelte si possono giustificare confrontando la scomposizione in fattori primi dei denominatori proposti da Ahmes con quella dei denominatori che avremmo scelto noi: si può dedurre che gli Egizi conoscessero i numeri primi? Resta invece «misterioso» il caso dei denominatori 63, 65 e 95.

Scrittura abbreviata delle frazioni egizie

Siccome tutte le frazioni hanno il denominatore uguale a 1, per risparmiare spazio e fatica si usa scriverle in forma di stringa, così:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\dots \text{ diventa } [a, b, c,....]$$

In questa forma abbreviata sono scritte le frazioni nell'Appendice, dove in neretto sono evidenziate le trasformazioni nelle quali il massimo denominatore è il minimo possibile.

Invito alla ricerca

- Là dove sono possibili più trasformazioni più corte, la prima è sempre quella ottenuta con il metodo di Fibonacci. Sopra ho scritto che «il metodo di Fibonacci funziona sempre ma che non è il più efficiente»: di fatto, nell'ambito delle frazioni considerate, non lo è mai.
  Ho il sospetto che in realtà non lo sia mai, ma non ho la dimostrazione. Grosso modo, la vedo così: se ogni volta uso l'aliquota maggiore, il resto diventerà sempre il più piccolo possibile, e ciò implica che i denominatori diventino molto grandi.
- Però, tra le trasformazioni più brevi, quella di Fibonacci, nell'ambito considerato, c'è sempre: sarà sempre così?
- Si provi a ricavare una strategia (se c'è) per trovare le trasformazioni più brevi e, fra di esse, la migliore, cioè quella per la quale il massimo denominatore è il minore possibile.

Sitografia minima

http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fractions/egyptian.html
http://www.toutankharton.com/Le-papyrus-Rhind?artsuite=0
Per approfondimenti, in particolare per vedere altri metodi di trasformazione, vedi
http://www.ics.uci.edu/~eppstein/numth/egypt/intro.html

Appendice

Le trasformazioni più corte delle frazioni di denominatore minore o uguale a 13.

In neretto le trasformazioni in cui il massimo denominatore è minimo

2/3 = [2,6]
2/5 = [3,15]
2/7 = [4,28]
2/9 = [5,45] = [**6,18**]
2/11 = [6,66]
2/13 = [7,91]
3/4 = [2,4]
3/5 = [2,10]
3/7 = [3,11,231] = [3,12,84] = [3,14,42] = [3,15,35] = [4,6,84] = [**4,7,28**]
3/8 = [3,24] = [**4,8**]
3/10 = [4,20] = [**5,10**]
3/11 = [4,44]
3/13 = [5,33,2145] = [5,35,455] = [5,39,195] = [5,45,117] = [6,16,624] = [6,18,117] =
= [**6,26,39**] = [7,13,91]
4/5 = [2,4,20] = [**2,5,10**]
4/7 = [2,14]
4/9 = [3,9]
4/11 = [3,33]
4/13 = [4,18,468] = [4,20,130] = [**4,26,52**] = [5,10,130]
5/6 = [2,3]
5/7 = [2,5,70] = [2,6,21] = [**2,7,14**]
5/8 = [2,8]
5/9 = [2,18]
5/11 = [3,9,99] = [**3,11,33**] = [4,5,220]
5/12 = [3, 12] = [**4,6**]
5/13 = [3,20,780] = [3,21,273] = [3,24,104] = [**3,26,78**] = [4,8,104]
6/7 = [2,3,42]
6/11 = [2,22]
6/13 = [3,8,312]
7/8 = [2,3,24] = [**2,4,8**]
7/9 = [2,4,36] = [**2,6,9**]
7/10 = [2,5]
7/11 = [2,8,88] = [**2,11,22**]
7/12 = [2,12] = [**3,4**]
7/13 = [2,26]
8/9 = [2,3,18]
8/11 = [2,5,37,4070] = [2,5,38,1045] = [2,5,40,440] = [2,5,44,220] = [2,5,45,198] =
= [2,5,55,110] = [2,5,70,77] = [2,6,17,561] = [2,6,18,198] = [2,6,21,77] =
= [**2,6,22,66**] = [2,7,12,924] = [2,7,14,77] = [2,8,10,440] = [2,8,11,88] =
= [3,4,7,924]
8/13 = [2,9,234] = [2,10,65] = [**2,13,26**]
9/10 = [2,3,15]
9/11 = [2,4,15,660] = [2,4,16,176] = [2,4,20,55] = [**2,4,22,44**] = [2,5,10,55]
9/13 = [2,6,39]
10/11 = [2,3,14,231] = [2,3,15,110] = [**2,3,22,33**]
10/13 = [2,4,52]
11/12 = [2,3,12] = [**2,4,6**]
11/13 = [2,3,78]
12/13 = [2,3,12,156] = [**2,3,13,78**] = [2,4,6,156]

1. Pratiche matematiche e didattiche in aula

Convegno Nazionale n. 23: *Incontri con la Matematica*
Castel San Pietro Terme (Bologna)
6-7-8 novembre 2009

Direzione: Bruno D'Amore, Martha I. Fandiño Pinilla e Silvia Sbaragli

Conferenze

Venerdì 6 novembre, Pala RS Congressi

Tutti gli ordini scolastici

14.30-15.30 **Inaugurazione** alla presenza delle Autorità del mondo politico ed accademico; Saluto del Sindaco di Castel San Pietro Terme; Saluti delle Autorità accademiche e ministeriali

15.30-16.30 **Bruno D'Amore** (Università di Bologna): *Matematica, stupore e poesia* [lettura di brani eseguita da Gabriele Argazzi e Barbara Bonora (L'aquila signorina – Terzadecade)]

16.30-17.00 Intervallo

17.00-18.00 **Giorgio Bagni** (Università di Udine): *Buon compleanno, Charles Darwin (1809-1882)! Nascita ed evoluzione delle matematiche: riflessioni per la didattica*

18.00-19.00 **Piergiorgio Odifreddi** (Università di Torino): *Rivoluzioni in matematica*

Sabato 7 novembre, Pala RS Congressi

Scuola Primaria, Secondaria di primo e di secondo grado

14.30-15.30 **Ornella Robutti** (Università di Torino): *L'insegnamento e l'apprendimento della matematica nel XXI secolo: sfide mondiali e risposte nazionali*

15.30-16.30 **Luigi Tomasi** (LS «P. Paleocapa», Rovigo - Università di Ferrara): *Spazio e figure: visualizzazione dinamica ed esplorazione di proprietà, dai modelli materiali a Cabri*

16.30-17.00 Intervallo ed attività ludiche; estrazione a sorte omaggi Media Direct

17.00-18.00 **Bernard Sarrazy** (Università di Bordeaux 2, Francia):
Insegnare ed apprendere: un'analisi didattica di alcuni paradossi di una relazione apparentemente contrattuale

18.00-19.00 **Nicolina Malara** (Università di Modena e Reggio Emilia):
Il concetto di funzione - aspetti epistemologici e didattici

Sabato 7 novembre, Salone delle Terme (Albergo delle Terme)

Scuola dell'Infanzia

14.30-15.30 **Giorgio Bolondi** (Università di Bologna): *Continuità e discontinuità in matematica: dalla scuola dell'infanzia alla primaria*

15.30-16.30 **Ivo Mattozzi** (Università di Bologna – Clio '92): *Raccontare il tempo*

16.30-16.40 **Carla Ida Salviati** (Giunti Scuola):
Saluti della rivista Scuola dell'infanzia

16.40-17.00 Intervallo

17.00-18.00 **Martin Dodman** (Università di Bolzano):
Plurilinguismo, crescita neuronale e matematizzazione in età precoce

18.00-19.00 **Anna Angeli** e **Monica Danesi** (Lucca, RSDDM Bologna):
Matematica e geografia per bambini della scuola dell'infanzia

Seminari

Sabato 7 novembre, Aula Magna (Istituto Alberghiero)

Seminari per la Scuola dell'Infanzia

9.00-09.45 **Viviana Graglia** e **Maria Giovanna Bluma**
(SP 2° Circolo, Domodossola): *La fata statistica e i suoi sortilegi*

9.45-10.30 **Giorgio Bagni** (Università di Udine):
Piccole storie di matematica per piccoli grandi matematici

10.30-11.15 **Annarita Monaco** (Roma, RSDDM Bologna):
Il gioco della matematica: esperienze di aritmetica nella scuola dell'infanzia

Sabato 7 novembre, Pala RS Congressi

Seminari per la Scuola Primaria e Secondaria di primo grado

8.30-09.15 **Stefano Beccastrini** e **Paola Nannicini** (Arezzo, RSDDM Bologna):
Perché qui invece che là? Del buon uso didattico (anche in matematica) delle mappe e degli atlanti

9.15-10.00 **Martin Dodman** (Università di Bolzano): *Di cose più o meno serie: valutazione e il valore posizionale di cifre e lettere*

10.00-10.45 **MEDIA DIRECT** con la collaborazione del gruppo **«Matematica in Rete»** (MiR, Corinaldo) e **SP «A. Manzoni»** (Rescaldina, MI): *Robotica LEGO, Polydron e microscopia. Esperienze didattiche in continuità*

10.45-10.55 **Carla Ida Salviati** (Giunti Scuola): *Saluti della rivista La Vita scolastica*

10.55-11.40 **Ivo Mattozzi** (Università di Bologna – Clio ’92):
Dal tempo raccontato al tempo misurato

Sabato 7 novembre, Salone delle Terme (Albergo delle Terme)

Seminari della Sezione: Disagio nei processi di apprendimento

9.00-09.45 **Pietro Di Martino** (Università di Pisa): *La macchina di ferro senza cuore: matematica e emozioni negative in classe*

9.45-10.30 **Massimo Baldacci** (Università di Urbino):
L’apprendimento e il disagio scolastico di secondo tipo

10.30-11.15 **Elena Malaguti** (Università di Bologna):
Io, studente, cosa ci *faccio a scuola?*

Sabato 7 novembre, Sala Giardino (Hotel delle Terme)

Seminari per la Scuola Secondaria di secondo grado

8.30-09.15 **Mario Puppi** (IS «E. Majorana», Mirano, Venezia):
Laboratorio di matematica dinamica

9.15-10.00 **Pier Luigi Contucci** (Università di Bologna):
Il metodo sperimentale in matematica

10.00-10.45 **Silvio Maracchia** (Università di Roma «La Sapienza»):
L’amore dei matematici per la matematica

10.45-11.30 **Sergio Invernizzi** (Università di Trieste) e **Carla Fiori** (Università di Modena e Reggio Emilia): *Numeri reali: c’è ancora qualcosa da dire?*

11.30-12.15 **Mirko Degli Esposti** (Università di Bologna): *Lo stile non è un’opinione: modelli matematici per l’attribuzione dell’autore*

12.15-13.00 **Annalisa Cusi** (GREM, Università di Modena e Reggio Emilia):
Effetti di un approccio didattico di tipo linguistico all’algebra: gli studenti si raccontano rivelando nuove competenze e più appropriate concezioni circa il significato della disciplina

Domenica 8 novembre, Aula Magna (Istituto Alberghiero)

Seminari per la Scuola dell’Infanzia

9.00-09.45 **Giovanni G. Nicosia** (RSDDM Bologna): *Gesti e parole per contare*

9.45-10.30 **Stefano Furlati** e **Claudia Paoletti** (Oltremare Riccione) e **Silvia Sbaragli** (NRD Bologna - ASP Locarno): *La geometria delle api*

10.30-11.15 **Giorgia Tosi** (Mantova): *Matematica e disabilità. Un’esperienza di matematica nella scuola dell’infanzia*

Domenica 8 novembre, Pala RS Congressi

Seminari per la Primaria

8.30-09.15 **Nadia Vecchi** (Biella, RSDDM Bologna):
Pillole di Storia della Matematica per la scuola primaria

9.15-10.00 **Annarita Monaco** (Roma, RSDDM Bologna): *Matematica in gioco*

10.00-10.45 **Giorgio Gabellini e Franca Masi** (Cattolica, RSDDM Bologna): *La matematica di chi dovrà insegnarla nella scuola primaria: «Ma quanta ne so?»*

10.45-11.30 **Bruno D'Amore** e **Ines Marazzani** (NRD Bologna): *Un concetto dall'apprendimento complesso, l'angolo*

11.30-12.15 **Anna Cerasoli** (L'Aquila): *Matematica leggera (e nutriente)*

Domenica 8 novembre, Salone delle Terme (Albergo delle Terme)

Seminari per la Primaria e Secondaria di primo grado

8.30-09.15 **Giuliana Gnani** (Università di Ferrara): *Insegnamento integrato nella formazione dei docenti; il progetto* Matematicainsieme

9.15-10.00 **Daniele Gouthier** (ICS, Sissa, Trieste): *Immagini della matematica. Matematica per immagini*

10.00-10.45 **R. Beccaro, V. Bussi, M. Candeago, A. Ferretti, L. Ghisio, G. Giubelli** (IC Pray Biellese, BI): *Quando la divisione crea continuità*

10.45-11.05 **Silvia Maria Leopardi** (II Circolo di Rho, Milano): *Giochi matematici in rete: un nuovo ruolo per alunni e insegnanti*

Domenica 8 novembre, Sala Giardino (Albergo delle Terme)

Seminari per la Scuola Secondaria di primo e secondo grado

8.30-09.15 **Sylviane Beltrame e Gregorio Torretta** (L.S. «Marinelli» di Udine, NRDM Univ. di Udine): *Matematica viva*

9.15-10.00 **Gianfranco Arrigo, Bruno D'Amore** e **Silvia Sbaragli** (NRD, Bologna): *Infiniti infiniti*

10.00-10.45 **Massimo Ferri** (Università di Bologna): *Matematica e Robotica*

10.45-11.30 **Mario Barra** (Università di Roma «La Sapienza»): *Ragionamento o Calcolo?*

11.30-11.50 **Ombretta Locatelli** (Collegio «San Carlo», Milano): *MATh.en.JEANS: fare ricerca matematica a scuola*

Domenica 8 novembre, Salone delle Terme (Albergo delle Terme)

Per tutti i livelli scolastici

12.15-12.30 Manifestazione di chiusura del convegno presso il Salone delle Terme: saluto delle autorità

Mostre e Laboratori (in contemporanea e dopo i seminari)
Istituto Alberghiero
Sabato 7 novembre dalle 9.00 alle 14.00 e domenica 8 novembre dalle 9.00 alle 12.00

Scuola dell'infanzia

- **Anna Angeli** e **Monica Danesi** (Lucca, RSDDM Bologna): *Matematica e geografia per bambini della scuola dell'infanzia*

- **Anna Angeli** (Lucca, RSDDM Bologna) e **Mariamonica Cappelli** (SP «G. Puccini» Montecarlo, Lucca): *In viaggio con... Dante*
- **Viviana Graglia** e **Maria Giovanna Bluma** (SP 2° Circolo, Domodossola): *La fata statistica e i suoi sortilegi*
- **Stefano Furlati** e **Claudia Paoletti** (OLTREMARE, Riccione) con la collaborazione del gruppo **«Matematica in Rete»** (MiR, Corinaldo) e **Silvia Sbaragli** (NRD, Bologna): *La geometria delle api*
- **MEDIA DIRECT** con la collaborazione del gruppo **«Matematica in Rete»** (MiR, Corinaldo) e **SP «A. Manzoni»** (Rescaldina, MI): *Robotica LEGO, Polydron e microscopia. Esperienze didattiche in continuità*
- **Aurelia Martini** (Pinerolo): «Tutto dipende da dove vuoi andare»... Giochi e problemi di percorso
- **SI comunali «Vigne Parco», «San Mauro», «Fiorita»** di Cesena coordinate da **Carolina Travanti**: *Giochiamo a ri-costruire lo spazio intorno a noi*
- **Cristina Giordani**, **Lucia Agnese Pracucci** e **Paolo De Iovanna** (IC Savignano sul Rubicone): *Matematica in continuità*

Scuola primaria

- **Anna Angeli** (Lucca, RSDDM Bologna) e **Mariamonica Cappelli** (SP «G. Puccini» Montecarlo, Lucca): *In viaggio con... Dante*
- **Viviana Graglia** e **Maria Giovanna Bluma** (SP 2° Circolo, Domodossola): *La fata statistica e i suoi sortilegi*
- **Stefano Furlati** e **Claudia Paoletti** (OLTREMARE, Riccione) con la collaborazione del gruppo «**Matematica in Rete»** (MiR, Corinaldo) e **Silvia Sbaragli** (NRD, Bologna): *La geometria delle api*
- **Stefano Furlati** e **Claudia Paoletti** (OLTREMARE, Riccione) con la collaborazione del gruppo «**Matematica in Rete»** (MiR, Corinaldo) e **Silvia Sbaragli** (NRD, Bologna): *Le curve dell'Universo*
- **MEDIA DIRECT** con la collaborazione del gruppo «**Matematica in Rete»** (MiR, Corinaldo) e **SP «A. Manzoni»** (Rescaldina, MI): *Robotica LEGO, Polydron e microscopia. Esperienze didattiche in continuità*
- **GIUNTI Scuola** (Firenze): *L'uso della lavagna interattiva nella scuola*
- **Stefania Bassi e Mirella Pedrini** (I.C. «C.A. Dalla Chiesa» Roma): *Piegando si impara. Esperienze nella geometria della carta piegata*
- **Alessandra Brena** («Matematita», Centro Interuniversitario di Ricerca per la comunicazione e l'apprendimento informale della matematica, Milano): *Dar forma alla matematica: i kit di laboratorio del centro matematita*
- **Roberto Cennoma** (3° Circolo Francavilla Fontana, BR): *Oggetti matematici*
- **SI comunali «Vigne Parco», «San Mauro», «Fiorita»** di Cesena coordinate da **Carolina Travanti**: *Giochiamo a ri-costruire lo spazio intorno a noi*

- **Laura Caramia**, **Antonella Casadei** e **Amelia A. Vantaggiato** (IC San Mauro Pascoli): *Preistoria, orti, castelli e flotte*
- **Cristina Giordani**, **Lucia Agnese Pracucci** e **Paolo De Iovanna** (IC Savignano sul Rubicone): *Matematica in continuità*
- **Vanna Pratesi** (SP «Don Milani», IC «Masaccio», San Giovanni Valdarno) con la collaborazione della IV A, Liceo Psico-Pedagogico «Giovanni da San Giovanni» e **Attilio Ferrini** (RSDDM, Bologna): *Facciamo scienze: un percorso laboratoriale fra magia e conoscenza*

Scuola secondaria di primo grado

- **Stefano Furlati** e **Claudia Paoletti** (OLTREMARE, Riccione) con la collaborazione del gruppo «**Matematica in Rete»** (MiR, Corinaldo) e **Silvia Sbaragli** (NRD, Bologna): *Le curve dell'Universo*
- **Paolo Pasi** (Ravenna, RSDDM Bologna): *Leonardo: specchio profondo e oscuro. Un percorso matematico nell'opera leonardesca*
- **MEDIA DIRECT** con la collaborazione del gruppo «**Matematica in Rete»** (MiR, Corinaldo) e **SP «A. Manzoni»** (Rescaldina, MI): *Robotica LEGO, Polydron e microscopia. Esperienze didattiche in continuità*
- **GIUNTI Scuola** (Firenze): *L'uso della lavagna interattiva nella scuola*
- **Alessandra Brena** («Matematita», Centro Interuniversitario di Ricerca per la comunicazione e l'apprendimento informale della matematica, Milano): *Dar forma alla matematica: i kit di laboratorio del centro matematita*
- **Cristina Giordani**, **Lucia Agnese Pracucci** e **Paolo De Iovanna** (IC Savignano sul Rubicone): *Matematica in continuità*

Scuola secondaria di secondo grado

- **Association pour la Création de la Cité des Géométries***,* traduzione italiana **Liceo «Galvani»** (Bologna) e **Liceo «Leonardo da Vinci»** (Casalecchio di Reno, BO) con la collaborazione di **FORMATH PROJECT**: *Sfere, bolle, palle, globi. Viaggio attraverso le scienze e le arti*
- **Annalisa Cusi** (GREM, Università di Modena e Reggio Emilia): *Il filo di Teseo. Un percorso didattico innovativo di approccio all'insegnamento dell'algebra*
- **Paolo Pasi** (Ravenna, RSDDM Bologna): *Leonardo: specchio profondo e oscuro. Un percorso matematico nell'opera leonardesca*
- **Alessandra Brena** («Matematita», Centro Interuniversitario di Ricerca per la comunicazione e l'apprendimento informale della matematica, Milano): *Dar forma alla matematica: i kit di laboratorio del centro matematita*

2. Recensioni

Fandiño Pinilla M.I. (2008). Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica. Trento: Erickson. Pagg. 142, euro 18. ISBN 978-88-6137-360-0. Prefazione di Giorgio Bolondi.

Perché un allievo, in matematica, sbaglia?

Una domanda di questo genere è sulla bocca di tutti, e non solo degli addetti ai lavori in un periodo in cui le valutazioni internazionali hanno fatto suonare qualche campanello d'allarme per la scuola italiana, segnatamente con riferimento alla matematica. Il recentissimo importante volume di Martha Isabel Fandiño Pinilla, studiosa estremamente acuta e originale in didattica della matematica, docente a contratto nelle università di Bologna e Bolzano e presso l'Alta Scuola Pedagogica di Locarno (Svizzera) è condirettrice del Convegno nazionale «Incontri con la matematica» di Castel San Pietro Terme (Bologna), ci invita a non dare risposte troppo spicciative o comunque banali (se non addirittura sbagliate e quindi, purtroppo, dannose) alla domanda con la quale abbiamo aperto questa nota.

Già il titolo del lavoro in esame è assai significativo: *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica*. Qui troviamo dunque l'indicazione esplicita di una complessità spesso colpevolmente elusa nel momento in cui un fallimento in matematica da parte di uno studente viene liquidato con affermazioni quali «non ha capito» oppure «non ha studiato» (o, peggio, la deleteria «non è portato per la matematica»!). Che fare, allora?

Nel sottotitolo del volume, «Valutare e intervenire in modo mirato e specifico», la strada da seguire appare chiarissima: le fasi di valutazione e la conseguente «terapia» devono essere condotte con consapevolezza e attenzione, insomma in termini «mirati», tenendo conto di diversi aspetti rilevanti. Martha Isabel Fandiño Pinilla individua e classifica i campi da esaminare nei cinque seguenti: acquisizione dei concetti, incapacità nella gestione degli algoritmi, mancanza di strategia nella risoluzione dei problemi, inadeguatezze comunicative, difficoltà nella gestione dei registri semiotici. A ciascun argomento viene dedicato un approfondimento specifico.

Il libro di Martha Isabel Fandiño Pinilla è davvero un'opera lucida che sarà certamente utilissima a tutti gli insegnanti e ai ricercatori in didattica della matematica, caratterizzata da uno stile rigoroso e incisivo; è basato su molte ricerche sperimentali da anni condotte dall'Autrice e dai suoi collaboratori nei diversi livelli scolastici; è inoltre corredato da una selezionata bibliografia. (Giorgio T. Bagni)

Stefano Beccastrini, Maria Paola Nannicini (2008). Il cammino della matematica nella storia. Roma: Armando Editore. Pagg. 192, euro 16. ISBN 978-88-6081-406-7. Prefazione di Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla.

Questo volumetto fa parte della collana *Matematica per gli insegnanti e per la classe*, diretta da B. D'Amore e M.I. Fandiño Pinilla. Obiettivo della collana è di contribuire a colmare un evidente vuoto di contenuti e di metodologia presente nella scuola obbligatoria; essa, come scrivono i direttori, va in varie direzioni: riflessioni didattiche su argomenti e metodologie che hanno avuto successo; proposte di argomenti matematici corroborate da concrete indicazioni operative; riflessioni su temi e problemi che hanno dimostrato efficacia in aula.

Dalla prefazione: la storia della matematica in didattica della matematica ha almeno tre funzioni primarie: dare a chi studia la matematica l'idea dell'evoluzione critica delle idee; dare a chi si sta costruendo un cognitivo nuovo in matematica un ambiente evolutivo nel quale situarne i risultati e i personaggi; restituire alla matematica e ai suoi personaggi un valore umano, fornendo dunque della disciplina una visione umanistica e non fredda, rigida, estranea ai fatti del mondo.

Insomma: un volumetto preziosissimo per gli insegnanti di ogni ordine e grado, una vera miniera di idee e di notizie utilissime per la preparazione delle attività di classe. (G. Arrigo)

Silvio Maracchia (2008). Grandi matematici. 50 indovinelli per 50 biografie. Bologna: Pitagora. Pagg. 140, euro 17. ISBN 88–371–1726–4. Prefazione di Bruno D'Amore.

Questa volta Silvio Maracchia smette gli abiti di fine, profondo e autorevole saggista – tutti noi lo apprezziamo per i suoi scritti di storia della matematica – e ci fa una sorpresa: 50 indovinelli in versi, in rima alternata, che nascondono altrettanti famosi matematici. Per chi sta al gioco e vuole tentare di dare a ciascuno una soluzione, vi sono anche degli aiuti: a 10 a 10 l'autore dichiara le coppie di date nascita/morte, perfidamente messe alla rinfusa. Chi invece non ha voglia di giocare al quiz può passare direttamente alla seconda parte e leggersi le biografie dei 50 matematici prescelti; testi, questi, già pubblicati sulla rivista «L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate» (organo del Centro Ricerche Didattiche Ugo Morin, di Paderno del Grappa), riveduti e completati per l'occasione. Si tratta di un agile volumetto, piacevole alla lettura, che contiene parecchie informazioni utilissime per gli insegnanti. Ci ripetiamo se dicessimo ancora dell'importanza di legare i contenuti dell'insegnamento con informazioni e considerazioni storico-filosofiche sulla loro genesi. Ci piace terminare questa breve presentazione con le parole dell'autore: *«(…) la storia della matematica ha un fascino eccezionale per la eterna lotta dell'uomo che, con la sua logica e la sua ragione, ma anche con una misteriosa intuizione, ha intrapreso e intraprende per tendere, se non per raggiungere, una verità che appare inafferrabile»*. (G. Arrigo)

D'Amore B. (2008). Allievi. Bologna: Gedit Edizioni. Pagg. 160, euro 19. ISBN 978-88-6027-072-6. Prefazione di Gian Mario Anselmi.

Bruno D'Amore, docente presso le università di Bologna, Bolzano e Bogotà (Colombia), ideatore e direttore del Convegno nazionale «Incontri con la Matematica» che da oltre vent'anni riunisce a Castel San Pietro Terme (Bologna) centinaia (migliaia!) di insegnanti entusiasti, è tra i più profondi e influenti studiosi di didattica della matematica del panorama scientifico internazionale: spesso abbiamo avuto occasione di segnalare i suoi fondamentali volumi di ricerca, testi sui quali si è formata un'intera generazione di studiosi in didattica della matematica. Ma è anche uno scrittore raffinatissimo, prosatore colto e sempre attento alla profondità dei rapporti tra le persone, ai fecondi accostamenti delle varie culture nella storia e nella geografia dell'avventura del pensiero umano. *Allievi* è il suo secondo libro di narrativa, preceduto cinque anni or sono da *Icosaedro*, opera che è stata insignita di due importanti riconoscimenti letterari.

Allievi è un volume entusiasmante, dedicato al meraviglioso rapporto, talvolta delicato e complesso ma sempre essenziale, che si instaura tra il maestro e l'allievo: il sottotitolo dell'opera è esplicito,»Dieci maestri parlano di allievi», e porta il lettore a tuffarsi subito in un intreccio di periodi, di prospettive culturali e di differenti umanità. Talvolta lo spunto storico è apertamente dichiarato ovvero di immediata individuazione, come quello, ben noto ma rivisitato in chiave originale e vivace tra Giotto e Cimabue; in altri casi il lettore viene indotto a esplorare, a cercare, dunque a inquadrare progressivamente il contesto storico (e geografico) di riferimento, anche sulla base degli anni che danno il titolo ai diversi capitoli del libro. In ogni caso la fertile versatilità della trattazione e del tono ci conduce ad attraversare personalità e momenti storici, contesti sociali, ambienti, tematiche e connessioni di eccezionale ampiezza e significatività.

Con *Allievi* riscopriamo quindi una storia della cultura dal vero spessore umano, inedita ma riconoscibile, per molti versi esaltante o forse commovente. Una storia corredata da un'indicazione importante e preziosa: l'accento sul ruolo fondamentale delle modalità (scientifiche, certamente, ma anche affettive) della trasmissione del pensiero e della cultura, l'essenzialità del rapporto tra maestro e allievo, connessione che dalla sfera privata si evolve a un ruolo sociale, addirittura universale. (Giorgio T. Bagni)

Progetto grafico
Bruno Monguzzi
Prestampa
Taiana
Stampa
Veladini

Redazione
Laboratorio di didattica della matematica
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera

Telefono
091 814 18 21/22/24
Fax
091 814 18 19
gianfranco.arrigo@span.ch

Amministrazione
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera
Fax
091 814 18 19

Esce due volte all'anno
a maggio e a dicembre

Abbonamento annuo
SFR 30
€ 16