A cura
del Laboratorio di didattica della matematica

Bollettino dei docenti di matematica

59

Dicembre
2009

Ufficio
dell'insegnamento medio
Centro
didattico cantonale

Bollettino
dei docenti di matematica
59

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell’educazione,
della cultura e dello sport

ISBN 978-88-86486-75-0

Bollettino dei docenti di matematica 59

Dicembre
2009

Ufficio dell’insegnamento medio
Centro didattico cantonale

Indice

	Prefazione	7
I.	Varia	
	1. Ricordo di Giorgio Tomaso Bagni Sottrazione e prestito: spunti storici e uso di artefatti (con una considerazione interculturale) Giorgio T. Bagni	9
	2. La ballata della mediana e il teorema di Pita-Goron Punti di vista sul triangolo rettangolo Jean-Claude Pont	23
	3. Nascita e sviluppo del concetto di numero Silvio Maracchia	41
II.	Didattica	
	1. Estensione del campo numerico e senso del numero nella scuola elementare: spunti teorici e proposte didattiche Alberto Piatti, Ivo Dellagana	57
	2. Problemi scolastici nell'ottica del *problem solving* Gianfranco Arrigo	69
	3. Percorso didattico sui quadrilateri Sara Cataldi	77
	4. Enumerazione e organizzazione nella scuola dell'infanzia Angela Carmeci	87
	5. Uso didattico di metodi dell'Aritmetica vedica Giorgio Mainini	105
III.	Giochi	
	1. Quiz numero 42 Aldo Frapolli	113
	2. Apprendere giocando Giochi geometrici e aritmetici Bernardo Mutti	117

IV. Passeggiate matematiche

1. Per gli amanti della geometria alla Euclide
Teorema sul triangolo dei piedi delle altezze
Antonio Steiner, Gianfranco Arrigo 121

V. Segnalazioni

1. Premio «Giorgio Tomaso Bagni» 123

2. Recensioni 125

Prefazione

Non avremmo mai voluto farlo, ma la vita è così: il numero inizia con un doveroso quanto doloroso ricordo di Giorgio Tomaso Bagni, deceduto lo scorso 10 giugno in conseguenza di un banale incidente in bicicletta. Pubblichiamo l'ultimo articolo che ci ha trasmesso: l'ultimo di una lunga serie. Giorgio è sempre stato affezionato alla nostra pubblicazione e ha contribuito non poco a elevarne il livello. Gliene siamo immensamente grati.

In conseguenza di ciò, rimandiamo al prossimo numero il secondo articolo in occasione dei dieci anni dalla morte di Francesco Speranza. La sezione Varia continua con la seconda e ultima parte dell'opera di Jean-Claude Pont: l'avventura attraverso i mondi dei triangoli rituali e pararituali. La sezione si completa con un altro contributo storico-epistemologico di Silvio Maracchia, a cura di Piero Antognini.

Molto nutrita si presenta la sezione Didattica, che per la prima volta offre articoli riferiti a tutti gli ordini scolastici, scuola dell'infanzia compresa. Si inizia con Alberto Piatti e Ivo Dellagana che propongono interessanti riflessioni sull'apprendimento del concetto di numero. Gianfranco Arrigo presenta il rapporto di una mini-ricerca sul *problem solving* nella scuola elementare, operata nell'ambito dei corsi di aggiornamento della SMASI. Sara Cataldi ci offre uno squisito «percorso sui quadrilateri»: un bell'esempio di apprendimento attivo della geometria. Sempre nella sezione Didattica, con molto piacere, pubblichiamo una sintesi del lavoro di diploma di Angela Carmeci, ex studentessa dell'ASP, a testimonianza della serietà con la quale si affronta la didattica della matematica in quella scuola. Infine anche Giorgio Mainini si confronta con una produzione centrata sulla didattica: propone certi algoritmi antichi di calcolo mentale che possono essere trasformati in situazioni di apprendimento per il calcolo algebrico.

Dopo tanta didattica, giunge gradita la sezione Giochi: con Aldo Frapolli e il suo nuovo quiz e con un'altra puntata di giochi di Bernardo Mutti.

Continuano le Passeggiate matematiche di Antonio Steiner e Gianfranco Arrigo con un teorema assai tosto di geometria sintetica.

Infine le segnalazioni propongono il bando del concorso intestato a Giorgio Tomaso Bagni e alcune recensioni di cui una dello stesso Bagni.

1. Ricordo di Giorgio Tomaso Bagni[1] Sottrazione e prestito: spunti storici e uso di artefatti (con una considerazione interculturale)

Giorgio T. Bagni

In the theoretical framework based upon some elements by Vygotskij and Wartofsky, and taking into account Peirce's division of a sign into icon, index, and symbol, we examined two methods in order to realize practically subtractions with natural numbers. A denomination used in Chinese educational practice can be relevant in order to point out the crucial point of the procedure. The semiotic analysis of the artefact "pascalina" emphasises the importance of indexicality.

1. Introduzione: oggetti matematici e attività umana

1.1. Reciproche influenze

Secondo L. Radford e H. Empey, «gli oggetti matematici non sono entità preesistenti, bensì oggetti concettuali generati nel corso dell'attività umana»; è importante notare che «la matematica è molto più di una forma di produzione del sapere – una pratica di teorizzazione. Se è vero che le persone creano la matematica, non è meno vero che, viceversa, la matematica influenza i modi di essere, di vivere e di pensare delle persone»: dunque «la matematica crea le condizioni per il sorgere di certe forme di soggettività e di comprensione» (Radford & Empey, 2007, p. 250, nel presente lavoro le traduzioni sono nostre). Abbiamo dunque una doppia relazione di influenza tra l'attività degli esseri umani e la matematica: (i) da un lato, la prima ha determinato, nella storia e nella geografia (e tuttora determina) la seconda; ma (ii) reciprocamente la seconda, e anche in questo caso dovremmo riferirci alle varie forme di matematica che si sono sviluppate nei periodi storici e nelle diverse tradizioni culturali, può influenzare «i modi di essere, di vivere e di pensare delle persone».

La sottrazione è un «oggetto» matematico che più di altri può riferirsi all'attività umana, almeno per l'aspetto (i). Se colleghiamo la sottrazione di due naturali con la valutazione della cardinalità di insiemi legati da opportune relazioni di corrispondenza biunivoca, il modello che ne ricaviamo è tra i più diretti e intuitivi. La situazione può apparire meno semplice nel momento in cui si considerano procedimenti pratici, ad esempio per l'esecuzione di sottrazioni in colonna: tali operazioni si eseguono sulla base di regole elementari, conosciute anche dagli allievi più giovani, ma alcuni aspetti dei metodi che andremo a descrivere non sono banali e sono degni di attenzione.

1. Giorgio ci ha lasciati il 10 giugno scorso in seguito a un banale incidente in bicicletta. Il BDM lo ricorda così: pubblicando l'ultimo articolo che ci aveva inviato. Come se fosse ancora fra noi.

1.2. Artefatti

Ricordiamo che Radford descrive «un approccio basato su artefatti, cioè oggetti dai quali emerge la *tekhnē* algebrica e la concettualizzazione dei suoi oggetti teorici. […] Essi sono considerati *segni* in senso vygotskiano» (Radford, 2002, § 2.2; Radford & Grenier, 1996). In alcune parti di questa ricerca estenderemo l'idea di artefatto anche a oggetti (strumenti) non concreti; faremo inoltre riferimento a un ambiente meno elevato, in quanto ci collocheremo in ambito aritmetico e non algebrico: ma la posizione dello studioso canadese ci sembra condivisibile.

Andremo a esaminare due punti di vista: il primo (sezione 2) è basato sul noto procedimento che consente la sottrazione in colonna di numeri espressi in notazione posizionale (di esso considereremo due varianti). Il secondo (sezione 4) utilizza uno strumento propriamente detto (Rabardel, 1995; Bartolini Bussi, Mariotti & Ferri, 2005), quello che Wartofsky (1979) chiamerebbe artefatto primario: la «pascalina» (Bartolini Bussi & Mariotti, 1999 e in stampa).

Tali aspetti sono però interconnessi: alcune considerazioni sulla sottrazione in colonna (nella forma in cui viene presentata agli allievi, ma anche tenendo conto di alcune significative varianti terminologiche che esamineremo in 3.1) possono essere intese in relazione all'uso della pascalina. Ciò suggerirebbe di riferirsi a tali considerazioni come ad artefatti secondari (pensiamo sempre a Wartofsky, 1979) che consentono agli allievi di operare efficacemente con l'artefatto primario, ovvero come base per uno schema d'azione (Rabardel, 1995). Preferiamo però, almeno inizialmente, introdurre autonomamente gli aspetti teorici in quanto, come vedremo, le loro radici (anche storiche) e i loro significati didattici non sono riferibili soltanto al collegamento con l'artefatto primario che andremo a esaminare.

1.3. Segni

Il nostro quadro teorico si collega con alcune considerazioni sugli aspetti semiotici basate sull'approccio peirceano (sebbene la relazione tra Vygotskij e Peirce non sia banale: Seeger, 2005; per Vygotskij «il segno non è […] mero mezzo di pensiero e di formazione di idee (Peirce), ma, soprattutto, mezzo di *trasformazione* delle funzioni psichiche dell'individuo»: Radford, 2006, p. 38). M.H.G. Hoffmann nota che i sistemi cognitivi sono innanzitutto sistemi semiotici, essendo dipendenti da segni e mediati da rappresentazioni; quindi segnala due principali questioni: «come il mondo esterno influenza e promuove lo sviluppo di capacità cognitive, e come possiamo portarci da queste capacità, necessariamente collegate con situazioni concrete, alla conoscenza astratta» (Hoffmann, 2007, p. 185). Ci concentreremo sul primo punto e gli aspetti semiotici saranno importanti in tale prospettiva.

Secondo Peirce noi non possiamo «pensare senza segni», e i segni sono costituiti da tre parti correlate: un oggetto, un segno propriamente detto e un interpretante (Peirce, 1998, p. 478; in Peirce il termine segno è usato sia per la terna «oggetto, segno, interpretante» che per il segno propriamente detto, il «representamen», negli ultimi lavori). L'interpretante può collegarsi alla comprensione che gli utenti del segno hanno della relazione tra il segno e l'oggetto; dunque il significato di un segno si manifesta nell'interpretazione generata negli utenti (Bagni, 2006 e 2007). L'approccio peirceano associa i segni con la cognizione, e la natura cognitiva dell'oggetto influenza la natura del segno. Peirce suddivide i segni in tre classi, basati su di una rappresentazione qualitativa (il segno è allora un'*icona*), fisica (un *indice*) e convenzionale (un *simbolo*, sebbene le idee di Peirce siano cambiate nelle varie fasi dello sviluppo della sua teoria).

2. La sottrazione «in colonna»

2.1. La «presa in prestito»

L'esecuzione pratica della sottrazione di naturali «in colonna» si basa su procedimenti e su accorgimenti didattici la cui elaborazione affonda nella storia della matematica (ci occuperemo di ciò nella prossima sezione). In molti libri adottati per l'insegnamento nella Scuola Primaria troviamo esposto il tradizionale metodo della sottrazione con la cosiddetta «presa in prestito»; ad esempio:

$$\begin{array}{ccc} {}^{8} & {}^{15} & \\ 9 & 5 & - \\ 7 & 6 & = \\ \hline 1 & 9 & \end{array}$$

La regola è richiamata con la usuale denominazione; troviamo la dicitura: «Obiettivo: introdurre l'operazione di sottrazione con prestito» (*Matelandia 2* di S. Bonuccelli Bargellini, p. 111; molte altre pubblicazioni potrebbero essere citate).

Questa diffusa regola non è l'unica a trovare spazio nei libri dedicati agli alunni della Scuola Primaria. In *Schede di matematica per la II elementare* di S. Thévenet, A. Garioudl e N. Pitot (a cura di M. Lavelli e G. Spanio), è proposta e descritta una regola che differisce lievemente, ma in termini significativi, dalla precedente. Leggiamo in tale libro, a proposito della sottrazione 95-76:

> Non si può ottenere 5 aggiungendo qualche numero a 6, perciò si prende in prestito una decina e si ha 15. Che cosa si aggiunge a 6 per avere 15? Si aggiunge 9. Scrivo 9 sotto la colonna delle unità.
>
> Per la colonna delle decine: tengo conto che ho preso in prestito una decina, perciò: per avere 9 decine, avendone già 1 riportata, quante ancora ne devo aggiungere a 7? Ne devo aggiungere ancora 1. Scrivo 1 sotto la colonna delle decine: 1+7+1 riportata = 9 decine.

2.2. Uno sguardo alla storia: procedimenti diversi

Prima di ipotizzare una valutazione di tali regole pratiche è interessante proporre qualche riferimento storico (Bagni, 1994). Presentiamo ad esempio quanto affermato da Cristoforo Clavio (1538-1612) in *Aritmetica prattica* (ci siamo basati sull'edizione veneziana dell'opera del 1738).

L'autore descrive innanzitutto la sottrazione con la presa in prestito che coinvolge le cifre del minuendo («che cosa ha da farsi quando la figura inferiore è maggiore della superiore», pp. 17-20); quindi enuncia una «più facil regola di sottrarre quando la figura inferiore è maggiore della superiore» (pp. 20-24):

Questa regola […] è usata da molti Aritmetici, ma noi molto più facilmente così l'insegneremo. Quando la figura inferiore è maggior della superiore, piglisi la differenza che è tra essa, e il 10, e a questa differenza s'aggionga la figura superiore, dalla quale la sottrazzione non si può fare, e tutta la somma si scriva sotto la linea, perché questa somma avanzerebbe, se quella figura maggiore si levasse dal numero composto dal 10 e da quella figura superiore, dalla quale non si può fare la sottrazzione, non altrimente, che se fosse pigliata l'unità in presto... Doppo questo acciò non siamo sforzati di levare con l'imaginazione l'unità dalla figura superiore, dalla quale è stata virtualmente l'unità pigliata in presto, aggiongeremo alla figura inferiore, che prossimamente verso la parte sinistra segue, una unità, e questa somma dalla figura superiore (senza levar prima da essa alcuna unità) sottrarremo.

Anche in alcuni testi storici, quindi, troviamo entrambe le regole pratiche. Riassumiamo i due procedimenti pensando alla sottrazione 95-76:

a) con il tradizionale metodo della presa in prestito tra le cifre del minuendo, al posto della sottrazione 5-6 (impossibile in **N**) si esegue la sottrazione 15-6 e quindi *si decrementa di 1 la cifra delle decine del minuendo* (lasciando inalterata la cifra delle decine del sottraendo);
b) con il secondo procedimento esaminato, si esegue ugualmente la sottrazione 15-6 e *si incrementa di 1 la cifra delle decine del sottraendo* (lasciando invece inalterata la cifra delle decine del minuendo).

L'equivalenza dei modi di procedere è garantita dalla proprietà invariantiva: per quanto riguarda la sottrazione delle cifre delle decine, il risultato di (9-1)-1 (caso a) è uguale a quello di 9-(1+1) (caso b). Però dal punto di vista dell'utilità pratica, il procedimento (b) che *non* prevede il prestito tra le cifre del minuendo appare talvolta di più agevole esecuzione. Ad esempio, nelle sottrazioni di numeri in notazione binaria la presenza di *ripetuti* prestiti del procedimento (a) può risultare pesante per l'allievo (suggeriamo di eseguire, in colonna, 110001-10011 con entrambi i metodi). Il procedimento (b) considera passaggi analoghi, ma *non contemporaneamente*: dal punto di vista pratico appare più efficace.

Osserviamo infine che dal punto di vista semiotico le scritture aritmetiche, alla stregua di quelle algebriche, possono considerarsi *icone complesse* (Bakker & Hoffmann, 2005). La componente iconica è evidente, in particolare quando si tratti di espressioni di procedimenti in colonna. Si riscontra inoltre la presenza di una componente simbolica nella rappresentazione di unità, decine e centinaia attraverso il sistema posizionale. La componente indicale non sembra essere rilevabile.

2.3. Questioni di trasparenza

Proponiamo ora qualche considerazione sulla «trasparenza» dei procedimenti indicati (riprendiamo il termine da Meira, 1998). Ci chiediamo: gli studenti sono in grado di giustificare a se stessi i metodi o li impiegano meccanicamente? Quale significato hanno, per gli studenti, la regola della presa in prestito e la consuetudine di decrementare di 1 la cifra delle decine del minuendo e quella di incrementare di 1 la cifra delle decine del sottraendo?

Se si considera la versione più diffusa della sottrazione con la presa in prestito (procedimento a), non è difficile riconoscerne una discreta trasparenza: è giustificabile ricorrendo a un'immagine riferita al «prestito» e alla «trasformazione» di una delle decine presenti nel minuendo in dieci unità. Il procedimento (b) ammette una giustificazione meno immediata. Un allievo potrebbe chiedersi, pensando all'esempio 95-76: perché si deve «salire» da 6 a 15 (visto che «sopra» c'è 5 e non 15)? E soprattutto perché la variazione 5→15 per le unità del minuendo provoca una variazione 7→8 nella cifra delle decine del sottraendo?

La correttezza del metodo (b), dunque, è fuori discussione, ma è altrettanto innegabile che il procedimento risulta meno chiaro del metodo (a); nonostante la sua utilità pratica, rischia quindi di essere eseguito in forma meccanica. Riassumendo:

Procedimento (a)	*Procedimento (b)*
(il prestito porta a modificare le cifre del minuendo)	(il prestito porta a modificare le cifre del sottraendo)
maggiore trasparenza	minore trasparenza
minore efficacia	maggiore efficacia

Si noti che in entrambi i procedimenti il passaggio dalle decine all'unità è identificato con il termine *prestito*. L'uso di tale termine può essere discusso.

3. Una nota interculturale: l'importanza di un termine

3.1. Due diverse tradizioni matematiche e didattiche

Parlando di *prestito* si ricorre a una denominazione che deriva evidentemente dal linguaggio commerciale. Questa elementare constatazione ci porterà a trattare alcuni aspetti che possono essere riferiti a questioni di didattica interculturale (Abdallah-Pretceille, 1999). Andremo dunque a occuparci brevemente di tradizioni matematiche (e didattiche) diverse dalla nostra: considereremo in particolare l'aritmetica cinese (Martzloff, 1997).

L'eredità della cultura cinese differisce da quella della cultura greca (Nisbett, 2007): al nostro agire individuale, ispirato alla libertà personale, corrisponde un agire collettivo, ispirato all'autocontrollo; al nostro dominio sulla natura si contrappone una ricerca di armonia tra l'essere umano e la natura, contrapposizione che si riflette, in termini economici, in attività di caccia, pastorizia e commercio da un lato (tradizione europea) e di prevalente agricoltura dall'altro (tradizione cinese). La presenza nella nostra aritmetica pratica di denominazioni ispirate alla terminologia commerciale è quindi un elemento (metaforico) da porre in relazione con alcune caratteristiche culturali che affondano nella storia sociale.

Maria G. Bartolini Bussi (in stampa) collega queste differenze culturali con una differenza riscontrabile tra le descrizioni dei procedimenti di sottrazione nelle diverse tradizioni educative: nel mondo occidentale, come notato, abbiamo la sottrazione con la *presa in prestito*, in due diverse versioni. Gli insegnanti cinesi parlano invece di una decina che viene *decomposta* (l'uso di composizione e decomposizione riferito al 10 è riscontrabile in pratiche sociali e familiari in diverse tradizioni orientali: Cobb & Yang, 1995). Dunque nella terminologia orientale si sottolinea che unità, decine e centinaia possono essere considerate un tutto unico, in quanto contribuiscono alla costituzione del numero in questione: in quest'ottica l'unità di ordine superiore viene decomposta per rendere possibile l'operazione, senza l'obbligatorio ricorso a un «prestito» e a una «restituzione».

Quanto notato non deve essere ridotto a una questione formale; anche se considerassimo la differenza da un punto di vista terminologico, dovremmo analizzarne le implicazioni concettuali, in omaggio a quel «potere del linguaggio sul pensiero» (*språkets makt över tanken*) di cui parlava, già nel XIX secolo, il linguista Esaias Tagner (Eco & Sebeok, 2000, p. 24), posizione che per alcuni versi ritroviamo in Vygotskij (1990).

3.2. Il momento chiave

Chiediamoci ora: qual è il momento chiave nell'esecuzione di una sottrazione in colonna? Per quanto abbiamo sopra visto, è necessario il trasferimento di una decina dalle decine alle unità (il «prestito» propriamente detto); ma il successivo passaggio essenziale sul quale si basa l'intero procedimento è quello che consente la «trasformazione» di una decina in 10 unità:

$\boxed{\text{① \textit{prestito} } (9-1)}$ $\boxed{\text{② \textit{decomposizione} 1 decina = 10 unità } (5+10)}$

$$\begin{array}{ccc} 8 & 15 & \\ 9 & 5 & - \\ 7 & 6 & = \\ \hline 1 & 9 & \end{array}$$

Questo accade, ovviamente, per entrambe le versioni del procedimento (a, b). Ebbene, il termine *prestito* non inquadra compiutamente questo momento: non si tratta soltanto di trasferire qualcosa (una decina, ma ovviamente considerazioni analoghe potrebbero essere fatte per centinaia, migliaia etc.) da qualcuno a qualcun altro (fase ①), ma soprattutto di trasformare questa entità trasferita da una decina a 10 unità, dunque di *decomporla nei suoi costituenti* (fase ②). Da questo punto di vista una denominazione come quella usata nelle scuole cinesi può essere più idonea a evocare la trasformazione della decina «prestata» in 10 unità. Possiamo dunque suggerire che l'uso del termine *decomposizione* può contribuire a rendere più trasparente (nel senso di Meira, 1998) il procedimento.

Esamineremo la realizzazione della sottrazione ricorrendo a un artefatto ispirato a una delle macchine matematiche più famose della storia: la «pascalina» (il cui nome deriva, com'è noto, da uno dei grandi della matematica, Pascal: nel 1642 il non ancora ventenne Blaise costruì la prima calcolatrice di questo tipo).

4. Artefatti e sottrazione

4.1. Descrizione dell'artefatto utilizzato

La pascalina è uno strumento che consente di eseguire addizioni e sottrazioni. Elemento base della macchina è una ruota dentata avente sulla circonferenza dieci tacche equidistanti numerate da 0 a 9. Le ruote (tre, nella macchina che abbiamo considerato, denominata «zero+1»: Fig. 1) fanno riferimento a indicatori e sono collegate nel modo che descriveremo.

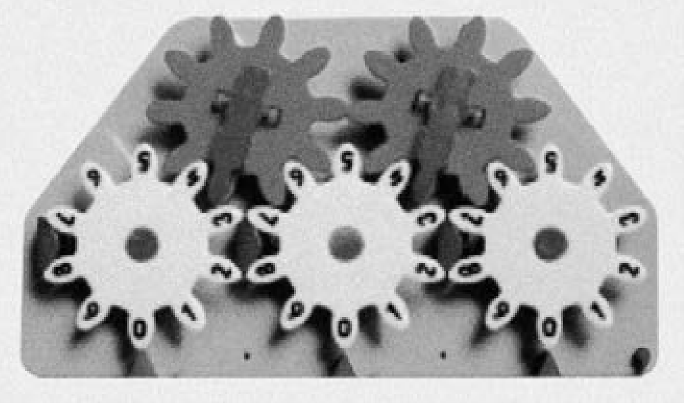


Fig. 1 Una pascalina «zero+1» (Quercetti)

Osserviamo che nella macchina che abbiamo utilizzato le ruote possono girare sia in senso orario che in senso antiorario, mentre nella pascalina originale il movimento poteva avvenire soltanto in senso orario.

Un miglioramento rispetto al tradizionale pallottoliere può essere evidenziato nella realizzazione del riporto, una delle maggiori difficoltà per i calcoli a mente. Aggiungendo 6 unità a 4 unità in un pallottoliere è necessario fare due operazioni:

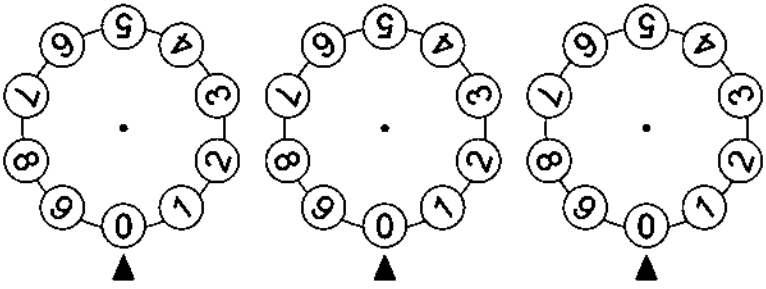
– «annullare» le dieci palline-unità ottenute
– e spostare una pallina-decine.

Invece in un calcolatore a ruote basta far compiere un giro completo alla ruota (giro corrispondente a 10 unità): quando questa passa per la posizione 0, un accoppiamento meccanico produce direttamente la rotazione di una tacca della seconda ruota (che rappresenta le decine, collocata immediatamente a sinistra della prima) realizzando in tal modo il necessario riporto.

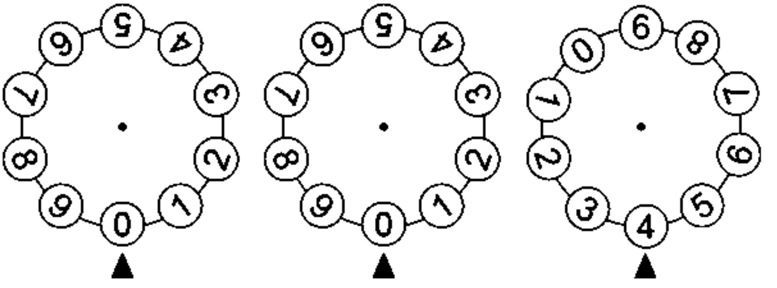
Anticipiamo un'osservazione che ci consentirà di apprezzare alcune caratteristiche didattiche interessanti del funzionamento del calcolatore a ruote: le due operazioni ricordate con riferimento al pallottoliere sono significative in quanto *esprimono in termini concreti l'equivalenza tra dieci unità e una decina.* Il fatto che nel calcolatore a ruote i due momenti siano fisicamente collegati è rilevante in quanto ne sottolinea la necessità: l'«annullamento» di dieci palline-unità per ottenere una pallina-decine non è un'opzione, analoga alla possibilità di «cambiare» dieci monete da un euro con una banconota da 10 euro (un altro paragone «commerciale», talvolta utilizzato con riferimento al pallottoliere o all'abaco), bensì è una situazione ineludibile, che caratterizza il sistema di notazione numerica.

Descriviamo più in dettaglio il funzionamento del calcolatore a ruote.

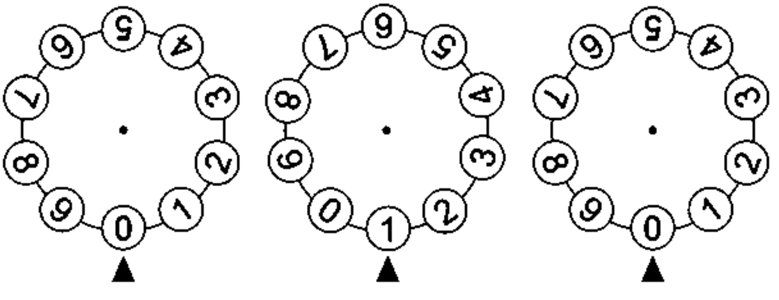
L'artefatto a cui facciamo riferimento in posizione iniziale (tale da indicare 0 unità, 0 decine e 0 centinaia) è schematizzabile come segue:



Per illustrare il collegamento meccanico tra le ruote proponiamo l'addizione 4+6. La rappresentazione di 4 unità si ottiene agendo sulla prima ruota a destra e facendola scattare di quattro posizioni in senso orario:



Volendo aggiungere 6 unità, si fa scattare ancora la prima ruota a destra di sei posizioni; all'ultimo scatto la ruota delle unità torna ad indicare 0 e quella delle decine passa a indicare 1, grazie all'apposito collegamento tra le ruote dentate.



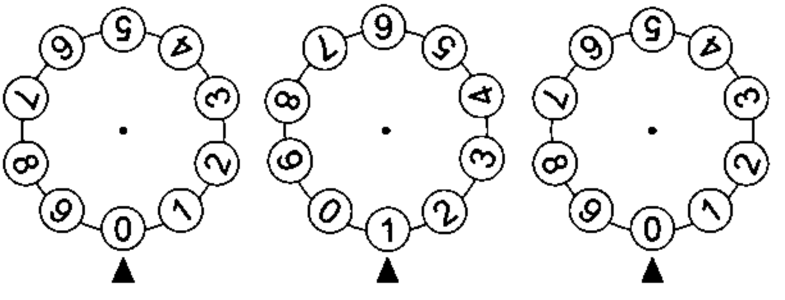
4.2. Analisi semiotica

Da un punto di vista peirceano un artefatto come quello ora descritto (calcolatore a ruote) costituisce un segno complesso (ci riferiamo ancora a Bakker & Hoffmann, 2005). Una valutazione a colpo d’occhio non può che rifarsi a una componente iconica; come osservato per le espressioni in colonna, abbiamo poi la presenza di una componente simbolica, ad esempio nella rappresentazione di unità, decine e centinaia che caratterizza il sistema posizionale.

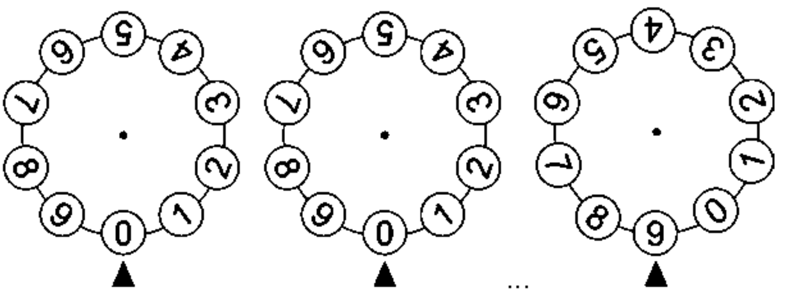
Nella rappresentazione esaminata e nel suo funzionamento si evidenzia però il ruolo essenziale della connessione fisica, concreta tra le ruote: la presenza di una componente indicale. È in questa terza componente, che incrementa la complessità del segno, che si manifesta un’importante differenza tra l’artefatto che ora consideriamo e i procedimenti di esecuzione dell’operazione in colonna.

4.3. La realizzazione della sottrazione

La sottrazione può essere eseguita con un calcolatore a ruote mediante rotazioni in senso antiorario. L’accoppiamento meccanico delle ruote agisce nel momento in cui scatta la necessaria «presa in prestito» (seguita, nel linguaggio della tradizione didattica cinese, dalla «decomposizione» della decina in dieci unità). Il momento da considerare è dunque il seguente: dalla posizione che rappresenta il numero 10,



ruotando di una posizione in senso antiorario la prima ruota a destra (quella delle unità), dunque sottraendo un’unità, tale ruota si posiziona sul 9 e contemporaneamente il collegamento meccanico tra le due ruote fa muovere di una posizione in senso antiorario la ruota delle decine:



Il movimento contemporaneo delle due ruote suggerisce che togliendo 1 da 10 «accade qualcosa» sia alle unità, che da 0 passano a 9, che alle decine, che da 1 passano a 0. Questa contemporaneità determinata meccanicamente suggerisce il collegamento concettuale, la trasformazione. Più che un prestito, viene dunque evidenziata la fase di *decomposizione* di una decina nelle unità che la costituiscono.

5. Alcune considerazioni per verifiche empiriche

5.1. Ulteriore analisi dell'artefatto

Notiamo innanzitutto l'importanza essenziale della componente indicale nel funzionamento della macchina e, quindi, nel significato da attribuire all'esecuzione pratica dell'operazione con essa. Il momento chiave del procedimento, la decomposizione della decina in 10 unità, è concretamente realizzato dal meccanismo che collega le ruote; tale meccanismo è a vista e il suo funzionamento può essere seguito dall'allievo che utilizza l'artefatto.

Nell'artefatto sono dunque incorporati fatti aritmetici relativi alla rappresentazione numerica. Possiamo così sintetizzare la situazione (con Wartofsky, 1979):

Caratteristiche macchina (artefatto primario)	*Modalità d'uso (artefatto secondario)*	*Aspetti matematici riferiti alla sottrazione (artefatto terziario)*
macchina calcolatrice meccanica a ruote («pascalina»)	**– 1 con rotazione di una tacca in senso antiorario** (+1, tacca in senso orario)	Sottrazione operazione inversa rispetto all'addizione (definizioni di Peano)
■ **con ruote a 10 denti che** ■ **sono collegate meccanicamente in modo che il passaggio per lo 0 di una ruota sia registrato dalla ruota a sinistra**		■ **numerazione in base 10** ■ **l'unità di ordine superiore «prestata» viene decomposta in 10 unità di ordine inferiore**

Si noti tuttavia che l'uso dell'artefatto secondo le modalità descritte, pur potendo veicolare idee matematiche collegate a quella di numerazione posizionale (in base 10), non richiede né implica la conoscenza di algoritmi aritmetici come la sottrazione con la presa in prestito. Dunque il procedimento di sottrazione in colonna in una delle versioni sopra descritte dovrà essere introdotto agli allievi. Il ruolo dell'artefatto potrà portare a un chiarimento di alcune caratteristiche del procedimento: riprendendo la terminologia di Meira (1998), l'uso della calcolatrice a ruote potrà contribuire a rendere più trasparente la sottrazione in colonna.

5.2. Spunti per ulteriori ricerche

Per confermare e approfondire le posizioni sopra espresse potrà essere utile una ricerca sperimentale la cui organizzazione esula dagli scopi del presente lavoro. Ci limitiamo a segnalare che alcune prove preparatorie sono state realizzate proponendo a un gruppo di allievi di una classe II elementare (di 7-8 anni, a Pordenone, con la collaborazione dell'insegnante Paola Favaron) e a un gruppo di allievi di una classe

I della Scuola Media (di 11-12 anni, a Tione di Trento, con la collaborazione dell'insegnante Cristina Mariani) un'attività con calcolatori a ruote. Pur trattandosi di esperienze soltanto abbozzate, alcune indicazioni potranno essere considerate nella preparazione di una ricerca più approfondita.

Un primo contatto con l'artefatto (calcolatore meccanico con tre ruote, come quello sopra descritto) ha lasciato agli allievi il compito di interpretarlo e di esplorarne le modalità di funzionamento. È stato mediamente rilevato (con le ovvie differenze tra i campioni considerati, dovute ai diversi livelli scolastici) che:

– circa la metà degli allievi ha individuato la funzione delle ruote e ha compreso che per addizionare (incrementare il numero rappresentato) le ruote devono essere azionate in senso orario mentre per sottrarre devono essere azionate in senso antiorario (Fig. 2 e Fig. 3)

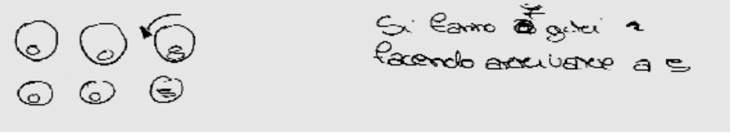


Fig. 2 Particolare di un protocollo

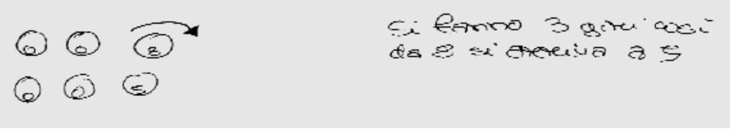


Fig. 3 Particolare di un protocollo

– dopo le prime osservazioni la maggior parte degli allievi ha notato in diversi modi che la ruota delle unità «fa scattare» quella delle decine (Fig. 4)

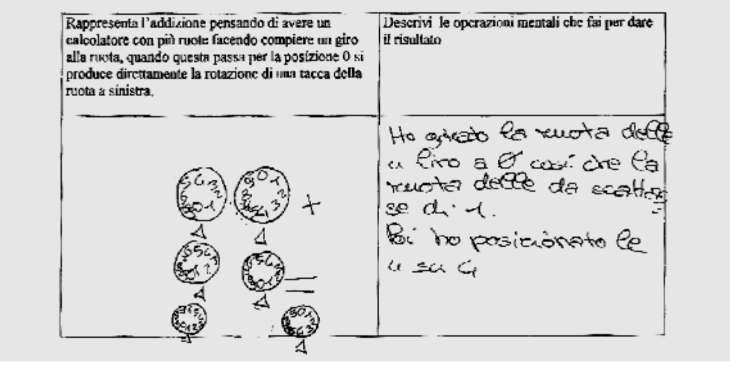


Fig. 4 Particolare di un protocollo

– circa un terzo degli allievi ha eseguito addizioni e sottrazioni procedendo solo sul disco delle unità; un altro terzo ha considerato separatamente unità e decine

Il collegamento tra le ruote è una delle prime caratteristiche dell'artefatto che vengono percepite dagli allievi. Come poco fa notato, in tale caratteristica sono incorporati contenuti matematici di notevole importanza: dunque queste prime osservazioni confermano le possibilità didattiche collegate all'uso dell'artefatto.

Un'ulteriore ricerca potrà essere dedicata all'analisi di collegamenti tra la percezione del funzionamento del calcolatore a ruote e l'apprendimento, in termini giustificati e consapevoli, di procedimenti pratici per la sottrazione in colonna.

Riflessioni conclusive

Le precedenti considerazioni ci inducono ad affermare che l'uso del calcolatore a ruote può portare l'allievo a rendersi conto dell'importanza essenziale della trasformazione decine-unità sulla quale si basano i procedimenti pratici di sottrazione (anche se tale connessione non è stata dettagliatamente provata mediante ricerche sperimentali). Abbiamo inoltre notato che la macchina stessa e il suo funzionamento possono essere accostati alla terminologia propria della matematica cinese, più che al termine «prestito» derivato dalla occidentale tradizione commerciale. Altre questioni dovranno essere esaminate: ad esempio, l'introduzione di un particolare approccio e di una particolare terminologia matematica può influenzare la formazione dei bambini? Può determinarne la mentalità, il modo di pensare? Potrà dunque essere interessante analizzare la situazione tenendo presente la seconda parte della citazione riportata all'inizio del presente lavoro, in cui leggiamo che «la matematica influenza i modi di essere, di vivere e di pensare delle persone» (Radford & Empey, 2007, p. 250).

Concludiamo osservando che il ricorso a un classico artefatto primario storicamente «europeo» quale la pascalina si è idealmente collegato all'attenzione per una tradizione matematica e didattica diversa da quella occidentale. Questo accostamento non deve essere considerato incoerente o problematico. Se la curiosità per le esperienze culturali lontane dalla nostra e dunque i confronti di tradizioni diverse possono essere considerati uno dei nuclei fondanti della storia culturale europea, come sostiene Salvatore Settis (2004), l'attenzione per la geografia delle matematiche non è soltanto una (pure importantissima) scelta di riconoscere la piena validità dell'altro; è anche un modo di vivere la nostra tradizione culturale, di mantenerci fedeli alla nostra identità.

Ringraziamenti

L'autore ringrazia la Prof. Mariolina Bartolini Bussi dell'Università di Modena e Reggio Emilia e la Prof. Marisa Michelini dell'Università di Udine per i preziosi suggerimenti e le indicazioni bibliografiche. Un vivo ringraziamento alle insegnanti Paola Favaron (Scuola Elementare «Gabelli» di Pordenone) e Cristina Mariani (Istituto Comprensivo di Tione di Trento).

Bibliografia

Abdallah-Pretceille, M. (1999). *L'éducation interculturelle*. Paris: PUF.

Bakker, A., & Hoffmann, M. (2005). Diagrammatic reasoning as the basis for developing concepts: A semiotic analysis of students' learning about statistical distribution. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 333-358.

Bagni, G.T. (1994). I metodi pratici di sottrazione nei manuali di aritmetica. *La matematica e la sua didattica*, 4, 432-444.

Bagni, G.T. (2006). Some cognitive difficulties related to the representations of two major concepts of Set Theory. *Educational Studies in Mathematics*, 62 (3), 259-280.

Bagni, G.T. (2007). *Rappresentare la matematica*. Roma: Aracne.

Bartolini Bussi, M.G. (in stampa). Perché i bambini cinesi sono più bravi in matematica? Alla ricerca di una risposta nei loro libri di testo di 1° e 2° elementare. In: *Conferenze e seminari 2007/2008 dell'Associazione Subalpina Mathesis*. Torino: Kim Williams Books.

Bartolini Bussi M.G. & Mariotti M.A. (in stampa), Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom: Artefacts and Signs after a Vygotskian Perspective. In L. English et al. (a cura di), *Handbook of International research in Mathematics education* (2nd edition). Mahwah: Erlbaum.

Bartolini Bussi, M.G. & Mariotti M.A. (1999). Semiotic Mediation: from History to Mathematics Classroom. *For The Lerning of Matematics*, 19, 2, 27-35.

Bartolini Bussi, M.G., Mariotti, M.A. & Ferri, F. (2005). Semiotic mediation in primary school: Dürer's glass. In M.H.G. Hoffmann, J. Lenhard, & F. Seeger (Eds.), *Activity and sign. Grounding mathematics education. Festschrift for Michael Otte* (pp. 77-90). New York: Springer.

Cobb P. & Yang M.T.L. (1995). A cross-cultural investigation into the development of placevalue concepts of children of Taiwan and the U.S. *Educational Studies in Mathematics*, 28, 1-33.

Eco, U. & Sebeok, T.A. (a cura di) (2000). *Il segno dei tre: Holmes, Dupin, Peirce*. Milano: Bompiani (1983, *The sign of three: Holmes, Dupin, Peirce*. Bloomington: Indiana University Press).

Hoffmann, M.H.G. (2007). Learning from people, things, and signs. *Studies in Philosophy and Education*, 26, 3, 185-204.

Martzloff, J.-C. (1997). *History of Chinese mathematics*. Berlin: Springer.

Meira, L. (1998). Making sense of instructional devices: the emergence of transparency in mathematical activity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29-2, 121-142.

Nisbett, R.E. (2007). *Il Tao e Aristotele*. Milano: Rizzoli (2004, *The Geography of Thought. How Asians and Westerners Think Differently… and Why*. New York: Free Press).

Peirce, C.S. (1998). *The essential Peirce*. Peirce Edition Project. Bloomington: Indiana Un. Press.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Colin.

Radford, L. & Empey, H. (2007). Culture, knowledge and the Self: Mathematics and the formation of new social sensibilities in the Renaissance and Medieval Islam. *Revista Brasileira de História da Matemática*. Festschrift D'Ambrosio, Esp. 1, 231-254.

Radford, L. & Grenier, M. (1996). Entre les idées, les choses et les symboles. Une séquence d'enseignement d'introduction à l'algèbre. *Revue des sciences de l'éducation*, 22, 253-276.

Radford, L. (2002). Algebra as tekhne: Artefacts, Symbols and Equations in the classroom. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 1 (1), 31-56.

Radford, L. (2006).Tre tradizioni semiotiche: Saussure, Peirce e Vygotskij. *Rassegna*, 29, 34-39.

Seeger, F. (2005). Notes on a semiotically inspired theory of teaching and learning. In M. Hoffmann, J. Lenhard & F. Seeger (Eds.), *Activity and sign - Grounding mathematics education* (pp. 67-76). New York: Springer.

Settis, S. (2004). *Il futuro del classico*. Torino: Einaudi.

Vygotskij, L.S. (1990). *Pensiero e linguaggio. Ricerche psicologiche*. Roma-Bari: Laterza (1934, *Myšlenie i rec'*. *Psichologiceskie issledovanja*. Moskva-Leningrad: Gosudarstvennoe Social'no-Ekonomiceskoe Izdatel'stvo).

Wartofsky, M. (1979). Perception, representation and the forms of action: towards an historical epistemology. In *Models. Representation and the scientific understanding* (pp. 188-209). Dordrecht: Reidel.

2. La ballata della mediana e il teorema di Pita-Goron Punti di vista sul triangolo rettangolo[1]

Jean-Claude Pont[2]

Starting from an original situation of elementary geometry, in this brief note J.C. Pont proposes us new theorems and new points of view on the rectangular triangle, enriching them with educational, historical and epistemological considerations.

11. Il triangolo pararituale e la sua iperbole

1. Un'altra generalizzazione naturale del triangolo rettangolo (o di quello pitagoroniano) concerne la popolazione dei triangoli per i quali si ha $a^2 - b^2 = n c^2$. Senza preoccuparmi per ora della loro esistenza, chiamo triangolo pararituale di ordine n un triangolo i cui lati a, b, c soddisfano la relazione $a^2 - b^2 = n c^2$, e che indico con $\theta'(a, b, c; n)$. Ho deciso di conservare le denominazioni *isopote* e *mésopote* per i triangoli parari-tuali, anche se la simmetria fra a e b non è conservata nel passaggio dai rituali ai pararituali. Quanto al coefficiente n di c^2, lo chiamo *coefficiente pararituale*. Per il triangolo rettangolo si ha dunque: $\theta(a, b, c; 1)$ e $\theta'(a, b, c; 1)$.
2. Nel sistema di coordinate usuali, poniamo il lato c=AB sull'asse x a partire dall'origine. Siano x, y le coordinate del vertice C opposto a c (vedere figura 9).

   Si può scrivere:
   $a^2 = x^2 + y^2$; $b^2 = |x - c|^2 + y^2$ oppure ancora $a^2 - b^2 = 2cx - c^2$

   con $a^2 - b^2 = n c^2$

   Da cui: $2cx - c^2 = n c^2$ e $x = \frac{n+1}{2} c$;

   è l'equazione di una retta che chiamo *pararituale* e che indico con $D^{(n)}(c)$.

   Il luogo del punto C è dunque la retta di equazione $x = \frac{n+1}{2} c$.

1. Si tratta della seconda parte dell'interessante e originale opera dell'autore. La prima parte è stata pubblicata sul numero 58 di questa rivista.
2. Professore onorario di storia e filosofia delle scienze, Università di Ginevra. jean-claude.pont@unige.ch.

3. La retta pararituale suggerisce (come potrebbe l'angelo *vederlo*? dimostrarlo?) che i più piccoli valori dei lati a e b sono:

$$a_{min} = \frac{c}{2}(n+1) \quad e \quad b_{min} = \frac{c}{2}(n-1).$$

4. L'uguaglianza $x^2 - y^2 = n\,c^2$ definisce un'iperbole di vertice $x = c\sqrt{n}$ e di asintoto y=x. Poniamo x=BC e y=AC con $x^2 - y^2 = n\,c^2$. x e y sono sia le coordinate di un punto C* di questa iperbole sia i lati a, b di un triangolo θ'(a, b, c; n). Chiamo *pararituale* questa iperbole.
Si ha qui una biiezione dei punti dell'iperbole associata situati «a destra» dei valori limite:

$$a_{min} = \frac{n+1}{2}c \quad e \quad b_{min} = \frac{n-1}{2}c$$

sull'insieme dei vertici C del triangolo pararituale. La disuguaglianza

$$\frac{n+1}{2}c > c\sqrt{n}$$

conduce alla disuguaglianza $(n-1)^2 > 0$, che è sempre soddisfatta. Così la retta pararituale $D^{(n)}(c)$:

$x = \frac{n+1}{2}c$ è situata al di là del vertice dell'iperbole.

Come nel caso del cerchio rituale, la retta pararituale ci offre un buon mezzo di visualizzare insieme gli elementi di una popolazione di triangoli pararituali.

5. Sia un triangolo rettangolo di ipotenusa a e di cateti b e c. Si ha simultaneamente: $a^2 - b^2 = c^2$, cioè θ'(a, b, c; 1) e $a^2 = b^2 + c^2$, cioè θ(b, c, a; 1). Nel caso del triangolo rettangolo, la retta $D^{(n)}(c)$ passa per il vertice dell'angolo retto.

12. Gli angoli nei triangoli pararituali

Gli angoli sono talvolta un buon rivelatore per descrivere una popolazione di triangoli. Anche il teorema del coseno si rivela uno strumento adeguato.

12.1 Il teorema 9

Sia θ'(a, b, c; n). Per il teorema del coseno si ha:

a) $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$ oppure, con $a^2 - b^2 = n\,c^2$: $\cos A = \frac{1-n}{2}\,\frac{c}{b}$

Nella formula che dà il cos A, 1–n è negativo: A è dunque sempre ottuso (evidente per noi e invisibile per l'angelo: lui lo legge in questa formula!).

In particolare:

per n=2: $\cos A = -\frac{1}{2}\frac{c}{b}$;

per n=3: $\cos A = -\frac{c}{b}$

b) $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2\,a\,c} = \frac{n+1}{2}\frac{c}{a}$

In particolare:

per n=2: $\cos B = \frac{3}{2}\frac{c}{a}$

per n=3: $\cos B = 2\frac{c}{a}$

c) $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2\,a\,b} = \frac{(n-1)\,a^2+(n+1)\,b^2}{2\,a\,b\,n}$

Possiamo ora enunciare il **Teorema 9**. Nel triangolo rituale si ha

$$\cos A = \frac{1-n}{2}\frac{c}{b}, \quad \cos B = \frac{n+1}{2}\frac{c}{a}, \quad \cos C = \frac{(n-1)\,a^2+(n+1)\,b^2}{2\,a\,b\,n}$$

12.2 Reciproco

Supponiamo che un triangolo ABC soddisfi la condizione

$$\cos A = \frac{1-n}{2}\frac{c}{b} \quad \left(n \in N^*\right)$$

Quando n percorre l'insieme dei numeri dispari, $\frac{1-n}{2}$

si estende nell'insieme degli interi negativi Z_-^*.

Poniamo $\frac{1-n}{2} = s \quad \left(s \in Z_-^*\right)$. Si ha: $\frac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c} = s\,\frac{c}{b}$,

da cui $a^2-b^2=(1-2\,s)\,c^2$ (con $1-2s \in N$); sia ancora $\theta'(a,b,c;1-2\,s)$.

Questa condizione conduce a sua volta a $\cos B = \frac{1-2\,s+1}{2}\frac{c}{a} = \frac{n+1}{2}\frac{c}{a}$.

Abbiamo raggiunto il **Teorema 10**. Se cos A è multiplo intero di c/b, esiste un intero n=1–2s tale che il triangolo ABC è pararituale di coefficiente n.

Applicazione

Nel triangolo $\theta'(a,b,c;3)$, si ha $\cos A = -\frac{c}{b}$.

Se si prolunga BA di AC’=c, $\frac{c}{b}$ è anche il coseno dell’angolo A; l’angolo AC’C è allora retto.

Tutti i vertici C dei triangoli θ'(a, b, c; 3) si trovano dunque sulla perpendicolare BA nel punto C’, che è la retta pararituale $D^{(3)}(c)$:

$$x = \frac{3+1}{2} c = 2\,c\,.$$

In altro modo ancora, con la costruzione, si ha $\cos B = \frac{2\,c}{a}$ e ciò implica che l’angolo BC’C sia retto.

Poniamo l’attenzione al luogo descritto dal vertice C di un triangolo pararituale θ'(a, b, c; n), e utilizziamo questa volta le coordinate polari, come indicato nella figura 10.

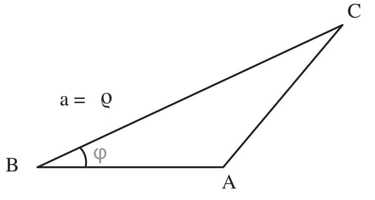


Figura 10

Si ha:

$$\cos B = \frac{n+1}{2}\,\frac{c}{a} \quad \text{e} \quad \rho = a, \quad \text{cioè} \quad \rho = \frac{c}{\cos\varphi}\,\frac{n+1}{2}$$

In particolare:

per n=1: $\rho = \frac{c}{\cos\varphi}$ e l’angolo A è retto;

il triangolo è rettangolo, come dev’essere per n=1;

per n=2: $\rho = \frac{3}{2}\,\frac{c}{\cos\varphi}$, $\rho\cos\varphi = \frac{3}{2}$ e ritroviamo la retta pararituale.

13. Trasferimento di proprietà

In questo paragrafo metteremo in opera una tecnica matematica collaudata, che consiste nel ricavare una proprietà di una configurazione per trasferirla a una configurazione associata.

Nella situazione che prendo in esame, ricorrerò esclusivamente all’algebra e all’analisi, cioè ci metteremo nella posizione dell’angelo. Trasferiremo proprietà dell’iperbole al triangolo e, ponendo certe questioni di natura puramente analitica, ritroveremo una nota proprietà dei triangoli.

Consideriamo la derivata nel punto (x,y) della funzione che definisce l'iperbole pararituale:

$$y = \sqrt{x^2 - n c^2}\ ;$$

un calcolo semplice dà, utilizzando l'interpretazione geometrica della derivata (la derivata come pendenza della tangente nel punto considerato):

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - n c^2}} = \frac{x}{y} = \operatorname{tg} \alpha$$

dove tg α è l'angolo formato dalla tangente alla curva in questo punto con l'asse x.

Nel paragrafo 12 avevamo d'altronde ottenuto:

$$\cos A = \frac{1-n}{2}\frac{c}{y} \quad e \quad \cos B = \frac{n+1}{2}\frac{c}{x}$$

da cui: $\dfrac{\cos A}{\cos B} = \dfrac{1-n}{1+n}\dfrac{x}{y} = \dfrac{1-n}{1+n} \operatorname{tg} \alpha$

Uno spirito curioso potrebbe interessarsi alle situazioni nelle quali gli angoli A e B sono uguali o supplementari, cioè cos A = ± cos B, che esige che si abbia:

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{1+n}{1-n} \quad \text{o ancora} \quad \frac{x}{\sqrt{x^2 - n c^2}} = \pm \frac{1+n}{1-n}$$

Elevando al quadrato i due membri e semplificando (in questa semplificazione, che vale la pena di effettuare in dettaglio, si vede all'opera tutta la magia dell'algebra), otteniamo la condizione

$$x = \frac{1+n}{2} c\,,$$

che corrisponde al punto dell'iperbole per il quale il triangolo scompare, cioè $C \in D^{(n)}$.

L'uguaglianza considerata vale dunque solo per il triangolo degenerato con $a=_{min}$, A=180° e B=0. È evidentemente una situazione nella quale l'angelo non tocca terra, per così dire. È di fronte a un risultato analitico che nessuna intuizione potrebbe spiegare.

Abbandoniamo il mondo degli angeli e torniamo sulla terra. In geometria elementare si apprende (è il teorema 1.16 degli *Elementi* di Euclide) che, nel triangolo, l'angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni non adiacenti; cioè che B non può mai essere uguale al supplementare di A, che è proprio l'angolo esterno.

Stupiamoci ancora di fronte al fatto che ogni punto dell'iperbole pararituale reca, in un intorno piccolo come si vuole, il destino di un triangolo rituale. È come se l'area del triangolo, il valore dei suoi lati, il valore degli angoli vi fossero iscritti con l'inchiostro simpatico.

14. La potenza dell'algebra

Dal punto di vista della logica, dato un numero n, si considererà l'espressione $\theta(a, b, c; n)$ come una relazione ternaria R_n (a,b,c). Nel linguaggio comune si direbbe che a e b hanno lo stesso ruolo o che sono intercambiabili. In termini tecnici, la relazione R_n è simmetrica nelle due prime componenti: $R_n(a,b,c) = R_n(b,a,c)$. In virtù di questa «simmetria», le formule relative a un triangolo rituale di ordine n restano invariate quando si scambiano a e b. Così da

$$\cos A = \frac{b}{c} + \frac{c}{b}\,\frac{1-n}{2}$$

(vedi teorema 6) si deduce, senza effettuare calcoli,

$$\cos B = \frac{a}{c} + \frac{c}{a}\,\frac{1-n}{2}.$$

È il *principio della ragione sufficiente* (di Leibniz): perché una diversità possa apparire nel corso di una deduzione, occorre una ragione. Nella relazione

$$\cos C = \frac{n-1}{2\,n} \cdot \frac{a^2 + b^2}{a\,b},$$

la simmetria si traduce in quella grafica delle lettere a e b.

Nel caso di $\theta'(a, b, c; n)$, la relazione R'_n non possiede più questa simmetria; pertanto a e b continuano a manifestare una certa parentela, che li solidarizza nei confronti di c (si noterà che il linguaggio matematico o metamatematico non ha né concetti né terminologia per esprimere questo fatto e quindi bisogna ricorrere a metafore: «parentela», «solidarietà»). Ci si attende quindi che le formule che esprimono il coseno degli angoli contengano una traccia di questa comunanza. Al contrario, c è di un altro mondo. Nel coseno dell'angolo C, a e b portano il segno di questa parentela (vedi il teorema 9):

$$\cos A = \frac{1-n}{2}\;\frac{c}{b} \quad , \quad \cos B = \frac{1+n}{2}\;\frac{c}{a} \quad , \quad \cos C = \frac{(n-1)\,a^2 + (n+1)\,b^2}{2\,a\,b\,n}$$

Il numero c suona da solista.

In queste formule, vale la pena di osservare con quale sottigliezza l'algebra riesce a mostrare nel contempo la parentela e la diversità tra a e b.

15. Il quadrilatero romano

Consideriamo un triangolo sia rituale di ordine n sia pararituale di ordine p:

$a^2 + b^2 = n\,c^2$ (1)

e

$a^2 - b^2 = p\,c^2$ (2)

Addizionando queste due uguaglianze: $a = c\sqrt{\dfrac{n+p}{2}}$

Sottraendole: $a = c\sqrt{\dfrac{n+p}{2}}$

Applichiamo le formule stabilite nei paragrafi 5 e 12 e consideriamo l'angolo A come derivante nel contempo da θ(a, b, c; n) e da θ'(a, b, c; p).

Si ha: $\cos A_{(n)} = \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{b}\,\dfrac{1-n}{2}$, $\cos A_{(p)} = \dfrac{1-p}{2}\,\dfrac{c}{b}$

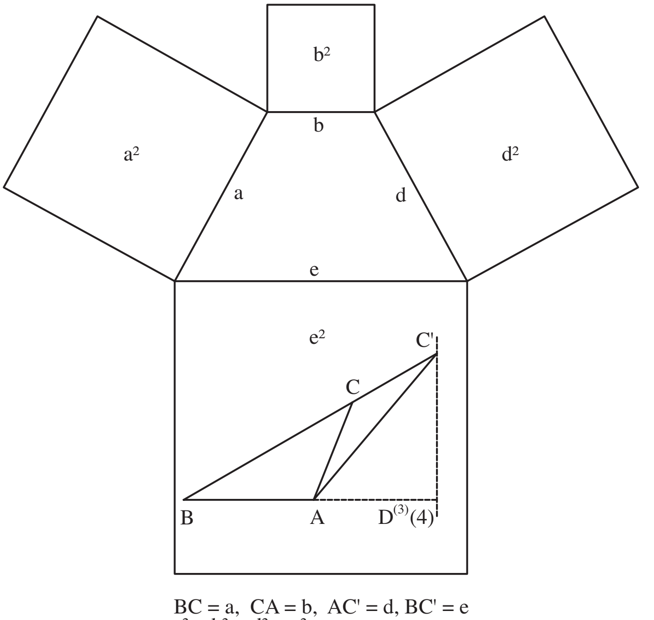
Trattandosi dello stesso angolo, dobbiamo avere:

$$\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\,\frac{1-n}{2} = \frac{1-p}{2}\,\frac{c}{b}$$

Semplificando si ha: $2b^2 = (n-p)\,c^2$
Siamo con gli angeli, se si può dire!

Applicazioni

1. Costruire un triangolo rettangolo tale che l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa a sia un numero intero di volte di quella del quadrato costruito sul cateto c. Si usano le uguaglianze $a^2 + b^2 = n\,c^2$ e $a^2 - b^2 = c^2$ dunque $n = 3$, $a^2 = 2\,c^2$; $n = 5$, $a^2 = 3\,c^2$; $n = 7$, $a^2 = 4\,c^2$
2. Nell'ottica di 1.4 e prolungando artificiosamente la filosofia che sembra presiedere alla costruzione degli altari dell'India antica, costruisco altari che simboleggiano il dogma cattolico della Trinità: un solo Dio in tre persone. Chiamo quadrilatero romano la figura ottenuta (figura 11).



BC = a, CA = b, AC' = d, BC' = e
$a^2 + b^2 + d^2 = e^2$

Figura 11

Il triangolo ABC è rituale di ordine 3 e ABC' pararituale di ordine 3, per cui $a^2 + b^2 = 3\,c^2$ e $e^2 - d^2 = 3\,c^2$ e quindi $a^2 + b^2 + d^2 = e^2$.

Ho scelto il punto C' sulla retta $D^{(3)}(c)$ in modo che a e d siano circa uguali. Facendo variare la posizione di C', si possono attribuire alle componenti della Trinità gradi diversi di importanza e creare parecchie eresie!

16. Altri sguardi sul triangolo rettangolo Da quello considerato come $\theta(a, b, c; 1)$ o come $\theta'(a, b, c; 1)$: dal genere alla specie e dalla specie al genere

Si parte dalla classe dei triangoli rituali e si particolarizza al caso dell'ordine 1. Si sostituisce dunque n con 1 nelle relazioni ottenute (cerchio rituale, formule trigonometriche, parallelogrammo rituale, teorema della mediana, ecc.). Inversamente, ogni caratteristica trova la sua generalizzazione naturale nei triangoli rituali o pararituali (i filosofi direbbero che il triangolo rettangolo si inserisce nel genere triangolo rituale o triangolo pararituale):

- il triangolo rettangolo è inscrivibile in un semicerchio;
- nel teorema di Pitagora, il cofficiente di c^2 è 1;
- il coefficiente del rapporto tra un cateto e l'ipotenusa, cioè del coseno di un angolo, vale 1;
- la mediana relativa all'ipotenusa è la metà dell'ipotenusa.

16.1 Proponiamoci di generalizzare la proprietà dell'inscrivibilità del triangolo rettangolo. Invece di considerare il lato c come diametro del cerchio di Talete, lo supporremo parte propria di questo diametro, conservando la posizione centrale del suo punto medio. Poniamo

$$\frac{c}{2}\sqrt{2\,n-1} \quad \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$$

il suo raggio r. Si ha (figura 4[3]):

$$BC^2 = \left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 \quad , \quad AC^2 = \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2$$

$$BC^2 + AC^2 = 2\,r^2 + \frac{c^2}{2} = 2\left(2\,n-1\right)\frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{2} = n\,c^2 = a^2 + b^2$$

16.2 Vedremo che i triangoli rituali sono peraltro una generalizzazione dei triangoli rettangoli: nel triangolo $\theta(a, b, c; n)$, la mediana relativa al lato c è un multiplo dispari del semilato c.

Siano c, c' *mesopotes* amici, cioè (vedere paragrafo 7[4]), $c' = c\sqrt{2\,n-1}$.

3. La figura si trova nella prima parte del testo, pubblicata sul numero 58, a pagina 22.
4. Il paragrafo 7 si trova nella prima parte del testo, pubblicata sul numero 58, a pagina 24.

Si sa che c'/2 è la mediana relativa al lato c:

$$m_c = \frac{c'}{2} = \frac{c}{2}\sqrt{2n-1}.$$

Per esempio, diamo a n alcuni valori in modo che

$\sqrt{2n-1} \in \mathbb{N}^*$:

$$n = 5,\ m_c = 3\frac{c}{2}\ ;\quad n = 13,\ m_c = 5\frac{c}{2}\ ;\quad n = 25,\ m_c = 7\frac{c}{2}\ ;$$
$$\ldots\ ;\quad n = 2k^2 + 2k + 1,\ m_c = (2k+1)\frac{c}{2}$$

Reciprocamente. Sia $m_c = (2k+1)\frac{c}{2}\quad (k \in \mathbb{N}^*)$.

Segue: $2a^2 + 2b^2 - c^2 = (2k+1)^2 c^2$ e $nc^2 = a^2 + b^2$ con $n = 2k^2 + 2k + 1$

Si ottiene:

$$c' = c\sqrt{2n-1} = c\sqrt{4k^2 + 4k + 1} = (2k+1)c$$

16.3 Ricordiamo dapprima che nel triangolo rettangolo di ipotenusa a si ha: θ'(b, c, a; 1) e θ'(a, b, c; n). Il coseno dell'angolo B è uguale a c/a. Nel triangolo pararituale θ'(a, b, c; n) si ha:

$$\cos B = \frac{n+1}{2}\frac{c}{a}$$

Per i valori dispari di n, il coseno di B è un multiplo intero di c/a, perché il coefficiente di proporzionalità è 1 per il triangolo rettangolo. I triangoli rettangoli formerebbero una sottoclasse della classe dei triangoli rituali per i quali il coseno di un angolo acuto è uguale a 1·c/a. Si passa da questa particolarità al generale considerando il caso in cui il coseno è un multiplo intero (o razionale) di c/a. Inversamente, avendo osservato che nei triangoli rituali il coseno dell'angolo acuto è un multiplo intero (per n dispari) del rapporto c/a, si è condotti a interessarsi del caso in cui il coefficiente di proporzionalità è 1.

16.4 Il triangolo rettangolo possiede numerose proprietà e ciascuna può prestarsi per l'esercizio che esaminiamo in questo paragrafo. Ecco una proprietà curiosa e poco conosciuta del triangolo rettangolo: se si riporta sull'ipotenusa c, a partire da ciascuno dei suoi estremi, rispettivamente i cateti a e b, il segmento intersezione è uguale al diametro del cerchio inscritto nel triangolo. Questa proprietà è estendibile all'intera classe dei triangoli rituali θ(a, b, c ; n)? In altri termini: in questi triangoli, il segmento costruito come appena indicato è una funzione razionale del diametro del cerchio inscritto nel triangolo?

17. Una famiglia curiosa

Le mediane del triangolo ABC $\theta(a, b, c\, ; n)$ o $\theta'(a, b, c\, ; n)$ e i lati di questo triangolo possono essere combinati diversamente e generare così triangoli differenti dei quali ci si può chiedere se sono rituali o pararituali. Bisognerà tuttavia stare attenti che queste combinazioni cieche, come quelle dell'angelo, conducano a oggetti che soddisfino le disuguaglianze triangolari.

17.1 Determiniamo il valore delle mediane uscenti dai vertici A e B in un triangolo $\theta(a, b, c\, ; n)$:

$$4\, m_a^2 = 2\, b^2 + 2c^2 - a^2 \ (1), \quad 4\, m_b^2 = 2\, a^2 + 2c^2 - b^2 \ (2).$$

Addizionandole si ha:
$4(m_a^2 + m_b^2) = b^2 + a^2 + 4\, c^2$, cioè $m_a^2 + m_b^2 = \dfrac{n+4}{4}\, c^2$.

Per $n = 4s$ ($s \in N^*$): $m_a^2 + m_b^2 = (s + 1)\, c^2$.

Si ha così: $\theta(m_a, m_b, c\, ; s + 1)$. Se n è multiplo di 4 e se le condizioni di esistenza del triangolo sono soddisfatte, il triangolo formato dal lato c e dalle due mediane uscenti dai suoi vertici è rituale di ordine n/4+1.

17.2 Sia $\theta'(a, b, c; p)$. Si ha: $4\, (m_b^2\ m_a^2) = 3\, a^2\ \ 3\, b^2 = 3\, p\, c^2$. Per $p=4\, t$ ($t \in N^*$) si ha: $\theta'(a, b, c\ ; p) \Rightarrow \theta'(m_b, m_a, c\ ; 3t)$.

17.3 Consideriamo un triangolo rituale di ordine n e pararituale di ordine p:
$a^2 + b^2 = n\, c^2$ (1) e $a^2 - b^2 = p\, c^2$ (2), con $n = 4\, s$ e $p = 4\, t$.

Addizioniamo e sottraiamo le uguaglianze (1) e (2):

$$a = c\sqrt{\frac{n+p}{2}} \quad e \quad b = c\sqrt{\frac{n-p}{2}}.$$

Deve quindi essere n>p.

Cerchiamo la condizione affinché il cerchio rituale

$$K^{(n)} : \frac{c}{2}\sqrt{2n-1} \quad \text{tagli la retta } D^{(p)}: \quad x = \frac{p+1}{2}\, c\,,$$

e l'esistenza del punto di intersezione fra le due linee garantisce quella di un triangolo sia rituale sia pararituale. Si deve risolvere il sistema (vedere i paragrafi 6[5] e 11):

$$\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{2n-1}{4}\, c^2 \quad e \quad x = \frac{p+1}{2}\, c\,.$$

5. Il paragrafo 6 si trova nella prima parte del testo, pubblicata sul numero 58, a pagina 22.

Da cui si ricava:

$$y^2 = \frac{c^2}{4}\left(2\,n - 1 - p^2\right)$$

e quindi la condizione di esistenza: $2\,n > p^2 + 1$.

Essa è soddisfatta per esempio dai valori n=16, p=4, ma non da n=8, p=4.

Ci si può anche basare sulla figura 9: il diametro del cerchio è $c\sqrt{2n-1}$ e la distanza della retta $D^{(p)}(c)$ dall'origine è

$$\frac{p+1}{2}\,c.$$

Si ottiene la condizione: $\sqrt{2n-1}\;c > \frac{p+1}{2}\,c$

Abbiamo appena visto che:
$m_a^2 + m_b^2 = (s+1)\,c^2$ e $m_b^2\;m_a^2 = 3\,t\,c^2$, cioè addizionando e sottraendo:

$$m_a = \sqrt{\frac{s+1-3t}{2}} \quad \text{e} \quad m_b = \sqrt{\frac{s+1+3t}{2}}$$

Continuando a calcolare si può ottenere:

$$a^2 + m_b^2 = \frac{5\,s + 7\,t + 1}{2}\,c^2$$

$$b^2 - m_a^2 = \frac{3\,s - t - 1}{2}\,c^2$$

$$b^2 - m_b^2 = \frac{3\,s - 7\,t - 1}{2}\,c^2$$

$$b^2 + m_a^2 = \frac{5\,s - 7\,t + 1}{2}\,c^2$$

$$a^2 + m_a^2 = \frac{5\,s + t + 1}{2}\,c^2$$

$$a^2 - m_b^2 = \frac{3\,s + t - 1}{2}\,c^2$$

$$b^2 + m_b^2 = \frac{5\,s - t + 1}{2}\,c^2$$

$$a^2 - m_a^2 = \frac{3\,s + 7\,t - 1}{2}\,c^2$$

Si osserva la bella regolarità dei coefficienti di s da una parte, di quelli di t dall'altra.

Queste formule sono particolarmente interessanti quando il coefficiente di c^2 è un intero. Un'analisi della parità dei coefficienti del numeratore indica queste situazioni:

- se n è pari, lo è anche la parte contenente s; se n è dispari, lo è pure la parte contenente t, ma nell'operazione seguente di aggiunge o si toglie 1; in altri termini, se s è pari e t dispari, tutti i coefficienti di c^2 sono interi;
- se s è dispari, il termine ±1 ristabilisce la parità e quella del numeratore dipende da t.

Altrimenti detto, se s è dispari e t pari, tutti i coefficienti di c^2 sono interi.

L'esame della tabella dei coefficienti di s, t permette il riassunto seguente:

- i triangoli rituali sono del tipo: $5\ s + \alpha\ t + 1$, con $\alpha = 7, 1, 1, 7$
- i triangoli pararituali sono del tipo: $3\ s + \alpha\ t - 1$

18. Esercizio epistemologico-didattico. Nei laboratori di Dio

Nella pedagogia classica, non si sottolinea abbastanza la magia del calcolo letterale, l'incredibile rete di relazioni, tessute a partire da percorsi diversi, che si possono mobilitare a piacimento e che sempre si intersecano, conducono agli stessi risultati, anche se iniziano da punti di partenza molto lontani. È questo che ha dato alla matematica quell'aureola straordinaria, sua dal tempo dei Greci; e che non si è mai smentita. I logici del XX secolo – Kurt Gödel in testa – hanno arricchito l'incarto della certezza della matematica con contributi di grande importanza teorica e filosofica. Ci insegnano soprattutto che non abbiamo alcun mezzo – e non l'avremo mai – per dimostrare che la matematica non incontra mai contraddizioni, anche se si spinge molto in avanti il suo sviluppo. Comunque, la coerenza che si osserva ovunque nell' enorme edificio matematico odierno, vecchio di oltre duemila anni, sembrerebbe alla maggior parte della gente una dimostrazione morale che eguaglia tutte le dimostrazioni logiche. In questa piccola opera, si è già potuto osservare, in una scala modesta, diversi aspetti di questa coerenza. L'idea soggiacente alle righe che seguono è di dare un esempio di questa coerenza e di attirare l'attenzione degli allievi su di essa, per mezzo di alcuni esempi concreti.

Facciamo dapprima qualche calcolo su un triangolo $\theta'(a, b, c \ ; n)$:
$a^2 \ \ b^2 = n\ c^2$.
Nel paragrafo 12, abbiamo ottenuto

$$\cos C = \frac{(n-1)\ a^2 + (n+1)\ b^2}{2\ a\ b\ n} \qquad (1)$$

La condizione $\cos C \leq 1$ genera la disequazione
$(n-1)\ a^2 \ \ 2\ a\ b\ n + (n+1)\ b^2 \ \ 0 \qquad (2)$

che risolviamo dapprima rispetto alla variabile a. Dato che il coefficiente di a^2 è positivo, le soluzioni si situano all'interno dell'intervallo delle radici:

1. $$a_{1,2} = \frac{b\,n \pm \sqrt{b^2\, n^2 - (n-1)\,(n+1)\,b^2}}{n-1} = \frac{n \pm 1}{n-1}\,b$$

   la soluzione della disequazione è anche una condizione di esistenza per il triangolo, cioè:

   $$b < a < \frac{n+1}{n-1}\,b \qquad (3)$$

   Esaminiamo i risultati (1) e (2) a partire da considerazioni sulle ipotesi.

   a) Nel caso n=1, il triangolo è rettangolo di ipotenusa a; (1) fornisce cos C = b/a, che è, se si vuole, la definizione abituale del coseno. La relazione (3) ci insegna che a può crescere indefinitamente e il punto C allontanarsi all'infinito, all'aumentare di b.
   b) Consideriamo, per n=2, i valori estremi di a. La relazione (3) diventa: $b < a < 3\,b$. Nella situazione estrema: $a = 3\,b$, $a^2 \;\; b^2 = 8\,b^2$, o, con l'ipotesi $c = 2\,b$, i lati del «triangolo» sono: b, 2 b, 3 b. È anche il limite permesso dalla disuguaglianza triangolare: $a + 2\,b = 3\,b \leq 3b$.
   c) Per n=3 si ha: $b < a < 2\,b$, con un ragionamento analogo.

2. Consideriamo la disequazione (2) rispetto alla variabile b:
   $(n + 1)\,b^2 - 2\,a\,b\,n + (n - 1)\,a^2 \leq 0$. Si ha:

   $$b_{1,2} = \frac{an \pm \sqrt{a^2 n^2 - (n-1)(n+1)a^2}}{n+1} = \frac{n \pm 1}{n-1}\,a$$

   e l'insieme delle soluzioni è:

   $$\frac{n-1}{n+1}\,a < b < a \qquad (4)$$

Si ammira come l'algebra riesce a sfruttare nello stesso tempo la dissimmetria di partenza tra a e b e la loro analogia strutturale!

Esaminiamo questi risultati.

a) Per n=1, il triangolo è rettangolo e si ha: $0 < b < a$. Al limite: b=a e $a^2 \;\; b^2 = 0$, da cui c=0; in conformità alla sparizione del triangolo rettangolo, quando lo si forza ad avere un'ipotenusa uguale a un cateto.
b) Per n=2, la disuguaglianza (4) si scrive $a/3 < b < a$. Al limite $a = 3\,b$, si ritrova il precedente caso 1b).

La sottile inversione tra n–1 e n+1 e il mantenimento di un equilibrio tra a e b sono stati sufficienti per modificare ciò che occorreva modificare e conservare ciò che andava conservato.

Si ha l'impressione di trovarsi nel laboratorio di Dio!

Osservazioni

Le situazioni simmetriche sono poco interessanti perché mantengono le variabili unite (nel caso $a^2 + b^2$); con loro, l'algebra può addormentarsi. Ma appena sorge una dissimmetria, ecco che l'algebra si mobilita e tutte le sue cellule si attivano in modo che alla fine sia reso a ciascuno il dovuto.

19. Problemi difficili

Ecco alcune fra le domande più difficili che concernono i triangoli rituali o pararituali.

19.1 Precisiamo dapprima che un intero A (che non è divisibile per il quadrato di un numero primo) è detto *congruente* se esiste un triangolo rettangolo con lati razionali di area A. Un problema molto vecchio ma ancora non risolto è quello di determinare quale condizione deve soddisfare A per essere un intero congruente. Per esempio, Fermat ha dimostrato che il numero 1 non è congruente. Aggiungiamo che Don Zagier ha dimostrato che 157 è congruente, ma che nel triangolo più semplice di area 157, il numeratore di un cateto conta 25 cifre, il denominatore 23 cifre e per il solo numeratore dell'ipotenusa ci vogliono ben 48 cifre. Eppure 157 è un numero «piccolo»![6] Come dice Colmez, la caccia ai triangoli rettangoli con lati razionali e area A arrischia di essere un tantino acrobatica. Ovviamente si può estendere il problema ai triangoli rituali e pararituali. Chi non riesce a fare «il meno» potrà fare il più?

19.2 Nella raccolta dei lavori inaugurata da David Hilbert e dalla scuola italiana, numerosi studi sono stati consacrati dai geometri ai fondamenti della geometria. Mario Pieri fu il primo a chiedersi se ci fosse un modo di ridurre le nozioni primitive della geometria a una sola. È in questo contesto che dimostrò che la relazione ternaria I fra punti definita da (I (A, B, C) $\Leftrightarrow$ AB = AC) (cioè A è equidistante da B e da C) permette, come sola nozione primitiva, di fondare le geometrie euclidee per ogni dimensione maggiore di 1; è una relazione simmetrica nelle sue due ultime componenti. Sullo slancio di Pieri, altri autori si sono messi alla ricerca di simili relazioni. Così Evert Willem Beth e Alfred Tarski, due importanti logici, hanno dimostrato che, per le dimensioni maggiori di 2, la relazione E(X, Y, Z) che stabilisce che i tre punti sono vertici di un triangolo equilatero è sufficiente; è una relazione simmetrica, ma è insufficiente per la geometria piana. Inltre Dana Scott ha stabilito che la relazione T definita da (T (A, B, C) $\Leftrightarrow$ il triangolo ABC è rettangolo in uno dei suoi tre vertici) è sufficiente per le dimensioni maggiori o uguali a 2. T è una relazione ternaria completamente simmetrica. Gli elementi del presente lavoro ci conducono a sostituire $\theta(a, b, c; 1)$ con $\theta(a, b, c; n)$ e a porre la domanda: la relazione R_n (A, B, C) definita da (R_n (A, B, C) $\Leftrightarrow$ il triangolo ABC è rituale in un suo lato) può servire da nozione primitiva? Una risposta negativa rinforzerebbe la singolarità del triangolo rettangolo. Ciò che determina la differenza essenziale è verosimilmente la costanza di uno degli angoli C nella classe di triangoli $\theta(a, b, c; 1)$.

6. L'osservazione 2 del paragrafo 3 si trova nella prima parte del testo, pubblicata sul numero 58, a pagina 18.

19.3 In un articolo del 1947, Edward Kasner copnsidera triangoli i cui vertici hanno per coordinate numeri complessi: se si indicano con A_k (k = 1, 2, 3) i vertici di uno di questi triangoli, si possono scrivere le loro coordinate $(z_1^{(k)}, z_2^{(k)})$. Si definisce in seguito la lunghezza del lato A_jA_k con la formula abituale della distanza della geometria analitica:

$(A_jA_k)^2 = (z_1^{(k)} - z_1^{(j)})^2 + (z_2^{(k)} - z_2^{(j)})^2$. Ispirato dalla «parentela» con i triangoli rettangoli per i quali $a^2 + b^2 - c^2 = 0$, Kasner chiama *neo-pitagoriani* i triangoli (a,b,c) per i quali: $a^2+b^2+c^2 = 0$ (nessuno dei lati dev'essere nullo). Dopo aver dimostrato che la trigonometria ordinaria è applicabile al triangolo neo-pitagoriano, stabilisce alcune interessanti proprietà. Ne cito tre:

- se un triangolo è neo-pitagoriano, allora il prodotto dei coseni dei suoi tre angoli è –1;
- un triangolo è neo-pitagoriano se e solo se:

$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = 0;$$

- se in un triangolo ogni mediana è proporzionale al lato corrispondente, allora il triangolo è sia neo-pitagoriano sia equilatero. Il rapporto di similitudine è

$$i\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Possiamo ora tornare all'osservazione 2[7] del paragrafo 3 e completarla. Si vede in quale mirabile modo il passaggio ai numeri complessi riesce a coronare la situazione. Sarebbe possibile, ma forse fastidioso, tentare un'estensione della teoria di Kasner ai triangoli rituali, segnatamente alla classe dei triangoli neo-rituali caratterizzati dalla condizione: $a^2 + b^2 + n\,c^2 = 0$.

Nota

Le sole indicazioni che ho trovato sui triangoli oggetto di questo lavoro figurano nel volume 3 del libro di Leonard Eugen Dickson. Ci dice che si sono chiamate *automediani* i triangoli con lati razionali nei quali le mediane sono proporzionali ai lati e questi soddisfano alla condizione $a^2 + b^2 = 2\,c^2$.

L'articolo di sintesi delle ricerche sul triangolo, pubblicato da Emile Vigarié nel 1887, non menziona alcuna ricerca nel senso del presente lavoro[8].

20. Allegato. Il quadrilatero delle trimediane

Per spiegare questa osservazione (anche se tutta questa piccola monografia ne è già un'illustrazione), mi servo ancora dell'esempio seguente, che all'epoca

7. L'osservazione 2 del paragrafo 3 si trova nella prima parte del testo, pubblicata sul numero 58, a pagina 18.
8. Si veda: Premier inventaire de la géométrie du triangle», *Mathesis suppl.*, 8, 9, 1888-1889, p. 1-27).

avevo considerato nell'idea di esplorare ciò che allora chiamavo «il teorema epistemologico» (vedere il paragrafo 1[9]). Bisognava partire da una configurazione geometrica molto carica di informazioni e dimostrare che essa conteneva un'intera famiglia di nuove proprietà. È forse il teorema di Morley sulle trisettrici degli angoli di un triangolo che mi ha suggerito l'idea di partenza, cioè di esaminare la configurazione determinata dalle sei rette uscite dai tre vertici e che suddividono ogni lato del triangolo in tre segmenti uguali (figura 12).

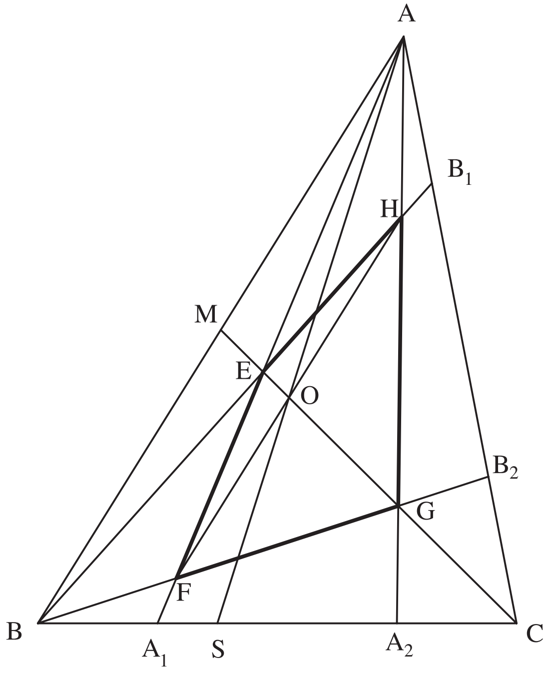


Figura 12

Se la mia congettura fosse corretta, nelle figure indotte si dovrebbero trovare proprietà enunciabili in un linguaggio geometrico semplice. La risposta della geometria ha sorpassato le mie speranze. La propongo qui senza dimostrazione; uno dei miei colleghi di allora si è divertito a redigerne una con tecniche della geometria analitica (un bellissimo esercizio!). Chiamo *trimediana* di un triangolo, detto triangolo generatore, una retta uscita da un vertice e che suddivide il lato opposto nel rapporto 1/2; così le trimediane uscenti da un vertice suddividono il lato opposto in tre parti uguali. Sia ABC un triangolo, AA_1, AA_2 le trimediane uscenti da A e BB_1, BB_2 quelle uscenti da B. La loro intersezione determina il quadrilatero EFGH, che chiamerò il *quadrilatero delle trimediane*. Possiamo stabilire les seguenti proprietà:

1. Una delle diagonali, qui EG, passa per il vertice C.
2. La diagonale EG è mediana del lato AB.
3. La seconda diagonale, qui FH, è parallela al lato AB.

9. Il paragrafo 1 si trova nella prima parte del testo, pubblicata sul numero 58, a pagina 9.

4. La retta che passa per A e per il punto di intersezione O delle diagonali taglia BC in un punto S che suddivide il segmento A_1A_2 nel rapporto 1/2 (e a sua volta è dunque trimediana del triangolo AA_1A_2). Ciò è applicabile *mutatis mutandis* ai punti B e O.

Si può ricominciare la costruzione con ciascuno dei due lati considerati e il lato AB. Si ottengono così due altri quadrilateri di trimediane. Le sei diagonali di questi tre quadrilateri possiedono le proprietà seguenti: tre di esse concorrono nel centro di gravità del triangolo iniziale e le altre tre sono parallele a ciascuno dei lati del triangolo. Se si chiama *triangolo delle trimediane* il triangolo formato da queste tre ultime diagonali, si ritrova la proprietà: il triangolo generatore e il triangolo delle sue trimediane sono simili. Non è meraviglioso?

A differenza del caso dei triangoli rituali, per i quali una ricerca approfondita mi ha mostrato che non sono probabilmente mai stati considerati, non mi sono occupato di sapere se il quadrilatero delle trimediane era già stato studiato. Nel mentre ho appreso che queste proprietà sono conosciute.

Bibliografia

Bernays P. (2003). *Philosophie des mathématiques*. Paris: Vrin, Mathesis, Introduction et traduction de Hourya Benis Sinaceur, 168-175.

Beth E. W. – Tarski A. (1956). A general theorem concerning primitive notions of Euclidean geometry. *Indagationes Mathematicae*, vol. 18, 1956, 468-474.

Dickson L. E. (1920). *History of the Theory of numbers*, vol. II *Diophantine Analysis*. New York: Chelsea Publishing Company, 1971. Première édition 1920. (Plus particulièrement 205 et chapitre XIV).

Kasner E. (1947). Neo-Pythagorean Triangles. *Scripta Mathematica*, vol. XIII, 1947, 43-47.

Pont J.-C. (1985). *Bazar épistémologique, conférence prononcée à la réception du Prix Arnold Reymond*. Lausanne: Librairie Payot.

Scott D. (1956). A symmetric primitive notion for Euclidean Geometry. *Indagationes Mathematicae*, vol. 18, 456-461.

Seidenberg A. (1962). The ritual origin of Geometry. *Archiv for history of exact sciences*, 488-527.

Seidenberg A. (1962). The origin of Mathematics. *Archiv for history of exact sciences*, vol. 18, 300-311.

3. Nascita e sviluppo del concetto di numero[1]

Silvio Maracchia[2]

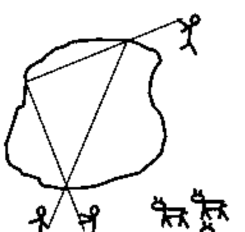
In the present article he takes in examination the birth of the number, considered element organizer of the human activity in every aspect of his. His gradual development (from the one to two, from two to three, from three to four and from four to five) is as many tappes of the development of the civilization. The subdivisions of the integers (equal, odd, triangular, first etc.) and the relative demonstrations, are then important conquests of the rational mathematics.

1. Sviluppo della matematica: esternismo contrapposto a internismo; continuismo contrapposto a discontinuismo

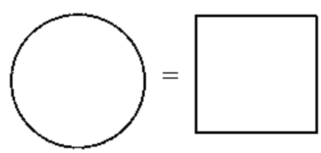
La matematica nasce con intenzioni pratiche: contare la numerosità di insiemi, misurare l'estensione di un territorio,…: questa è per gli esternisti la caratteristica della matematica e il motivo del suo successo.

Altri, invece, pensano che la ragione dello sviluppo della matematica vada cercata essenzialmente all'interno della matematica stessa: si comincia a «far matematica» quando si pongono problemi del tipo «costruire un quadrato equivalente a un cerchio dato», che hanno poi condotto allo studio di $\pi = 3,14159\ldots$

esternismo



internismo



$\pi = 3,14159...$

L'aspetto forse più significativo della matematica, che unisce queste due posizioni contrapposte è la sua capacità, rifacendosi a problemi di origine pratica, di svilupparsi poi in modo razionale. Spesso teorie matematiche trovano in un secondo tempo

1. Si tratta di un testo relativo alla conferenza, tenuta dall'autore a Castione (CH) il 28 agosto 2007, ricostruito da Piero Antognini sulla base di appunti personali, dei lucidi usati nella conferenza e di un precedente articolo del relatore (Maracchia, 1997). Alcuni riferimenti bibliografici citati in nota, soprattutto ai testi classici, sono ripresi da quell'articolo.
2. Dipartimento di Matematica, Università La Sapienza, Roma

applicazioni pratiche: un esempio è quello delle coniche, studiate da Apollonio, grazie alle quali dopo circa diciotto secoli Keplero riesce a determinare l'orbita dei pianeti[3].

La matematica deve il suo sviluppo soprattutto a problemi teorici. Si può ricordare ad esempio il *problema di Didone* o *problema isoperimetrico*: qual è la figura geometrica che a parità di perimetro ha l'area maggiore? Questo problema, già posto dai Greci[4], ha come soluzione intuitiva il cerchio, ma si dovette attendere il XIX secolo perché il matematico svizzero Steiner ne desse una dimostrazione[5].

Un altro modo di considerare nel corso della storia lo sviluppo della matematica è il continuismo o il discontinuismo. Per i continuisti la matematica è una sorta di dono divino, preesistente all'uomo, è un universo misterioso di cui gli uomini inseriti in un certo contesto temporale («Newton o suo nipote») man mano scoprono qualcosa. La logica discontinuista invece afferma che sono i geni (dunque «Newton, Euler…») che creano la matematica e la sviluppano quindi in modo irregolare, cioè discontinuo: se la matematica ha seguito un certo percorso è solo perché ci sono stati determinati personaggi che hanno fatto certe scoperte… Noi insegnanti, quando assegniamo un compito in classe, siamo continuisti: sappiamo che per il problema proposto le vie di soluzione si riducono a due o tre possibilità conosciute. In tempi brevi questa posizione continuista vale anche per lo sviluppo futuro della matematica, ma chi può dire cosa succederà su tempi più lunghi? Ad esempio, chi avrebbe potuto prevedere che conseguenze avrebbe prodotto la scoperta delle grandezze geometriche incommensurabili?

E ancora: gli Egiziani avevano una certa abilità in matematica (come ci testimonia ad esempio il *papiro Rhind* del 1600 a.C.) che era però certamente inferiore a quella dei contemporanei Babilonesi. Questo a riprova che la «scalata e la conquista della montagna matematica» avviene da più parti e in modo discontinuo.

2. Il numero ordinatore dell'Universo

Il vocabolo usato nelle varie civiltà per indicare il «numero» nasce molto dopo la nascita del numero stesso ma proprio per questo, dall'etimologia del termine scelto, possiamo trarre il significato che gli si è voluto attribuire.

L'origine del nome «numero» è probabilmente quella del termine sanscrito *namati*: «essere assegnato»; ma anche: «ente che distribuisce, che regola, che conta le quantità»[6]. Da questo derivano poi il greco *némo* (νεμω): «distribuisco, regolo, governo» oppure *nòmos* (νομος): «cosa assegnata, disposizione, legge»[7] e il latino *nu-*

3. Apollonio di Perga (262-190 a.C.); Johannes Kepler (1571-1630)
4. Secondo la leggenda *Didone*, regina di Tiro costretta all'esilio dal fratello Pigmalione si rifugiò presso re Iarba nel nord Africa per chiedere asilo. Iarba le promise che le avrebbe dato tanto terreno quanto poteva abbracciarne una pelle di toro. Didone non si scoraggiò ma tagliò la pelle in striscioline sottili e le unì in modo da formare una corda. Con essa recintò lo spazio nel quale sarebbe dovuta poi nascere Cartagine. Il problema chiede la forma che Didone avrebbe dovuto dare alla sua corda per abbracciare la massima area possibile.
5. Jakob Steiner (1796-1863). Nel caso di Didone, data la presenza della costa, la superficie massima venne ottenuta con una semicirconferenza.
6. Si veda (Natucci, 1954), p.35.
7. A questo secondo termine greco il *Dizionario Etimologica Italiano* di C. Battisti e G. Alessio fa risalire l'etimologia di «numero», giudicandola comunque non del tutto certa.

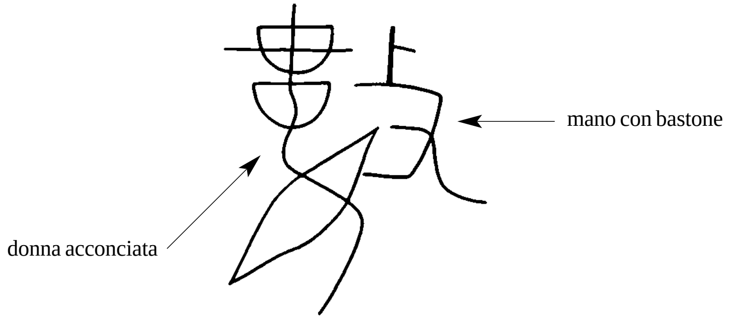
merus: «numero» ma anche «ordine, misura, ritmo, distribuzione» oppure *nemus*: «foresta, piantagione, filare».

I greci, però, usavano per numero il termine *aritmòs* (αριθμος) (da cui aritmetica) che vuol dire anche «ordine, censimento, armonia» ed è anche per questo che nella Bibbia un libro dell'Antico Testamento che si occupa di censimenti è intitolato «Aritmòi»: *I Numeri*.

Il numero viene considerato, dunque, un ordinatore, capace di operare (giuste) distribuzioni, di rispondere in maniera convincente a varie necessità del vivere insieme.

«*Se togliessimo il numero alla natura umana* – scrive Platone nell'Epinomide[8] – *non potremmo mai essere saggi. Mai, difatti, l'anima dell'essere vivente, che mancasse di ragione, potrebbe afferrare la virtù tutta quanta.*»

Per l'antica civiltà cinese la definizione di numero è più strettamente matematica e indica la capacità del numero di indicare la molteplicità. L'ideogramma cinese per indicare il numero, ma anche il calcolare e il contare, è formato da una mano con bastone, simbolo di «movimento» di «azione» e di una donna acconciata, simbolo di «frequenza» come ad indicare complessivamente nel numero un'azione ripetuta molte volte[9]. Non vi è dunque in Cina nel numero il senso dell'ordine, della distribuzione, della legge, ma quello della pluralità, dell'accrescimento[10].



3. Il numero dono divino

Da quanto visto prima, il numero è ritenuto troppo importante per essere soltanto una creazione umana e viene quindi addirittura considerato di origine divina.

Nel *Fedro* Platone ne attribuisce la paternità al dio egiziano Theut, che ne fa poi dono all'uomo assieme alla geometria, all'astronomia e alla scrittura[11]. Analogamente Eschilo fa dire al protagonista del *Prometeo legato* di aver tolto gli uomini dallo stato selvaggio con i doni del numero, «*sommo fra tutte le scienze*», e della scrittura[12].

8. Platone, *Epinomide* 977 c.
9. Cfr. G. Buffa, *Fra numeri e dita*, Bologna, Zanichelli, 1986, p.20.
10. Oggi in Cina per indicare il «numero» (sù) si usa un ideogramma che ha ancora una buona somiglianza con l'antico poiché ne è una sua stilizzazione. Lo stesso ideogramma con una pronuncia leggermente diversa (su) ha anche il significato di «contare».
11. Platone, *Fedro*, 274 d.
12. Eschilo, *Prometeo legato*, Secondo episodio.

Secondo Platone ed Eschilo numeri e scrittura vengono dunque «regalati» insieme, come ad accentuare la loro contemporaneità, vera o presunta che sia: questo sembra indicare che senza la scrittura i numeri avrebbero avuto poca strada da fare, oppure che il numero si sia trovato all'origine della scrittura, ne abbia cioè favorito la nascita.

Ancora Platone nel *Timeo* narra che il Demiurgo, per operare il passaggio da un primitivo caos, nel quale le cose erano mescolate senza alcuna regola, a una natura ordinata, adorna «*tutte le cose di forme e di numeri*[13]».

Per capire l'universo bisogna quindi conoscere la matematica; è proprio la matematica, la vera essenza della natura e le risposte a tutte le nostre domande si possono conoscere solo nella matematica. Il mondo non è pertanto soggetto ai capricci degli dei, ma a una regola che rappresenta la divinità stessa (per i Pitagorici la divinità è il numero stesso!) o alla quale le stesse divinità devono sottostare.

Anche per Sant'Agostino (354-430 d.C.) la matematica è un linguaggio divino, come testimoniano diversi suoi scritti. Da «La città di Dio»:

«*Tu hai tutto disposto con misura calcolo e peso.*» (XI,30).

Dalle «Confessioni»:

«*… Tu creasti le cose che quelli numerano.* »; «*…dallo studio del mondo creato…e la visibile testimonianza degli astri…e me ne splendeva il perché attraverso i numeri…*» (V,3).

Dal «De libero arbitrio»:

«*Come sono vere e immutabili le regole dei numeri così lo sono quelle della sapienza.*» (II,3;29)

4. Nascita ed evoluzione del numero

Si possono ipotizzare tre percorsi fondamentali che appartengono all'«*evoluzione storica*» della nascita del numero.

4.1 Le segnalazioni della *numerosità di particolari insiemi* di oggetti attraverso opportune indicazioni (tacche su ossa, graffi su pareti di grotte, ecc.).

Si tratta però di particolari artifici che hanno avuto una scarsa influenza sul numero vero e proprio. È difficile, inoltre, pensare a operazioni su insiemi («unione» e «sottrazione» eventualmente) e a «traduzioni» numeriche più o meno lontane ed è ugualmente difficile pensare a nomi dati a quelle particolari sequenze di segni.

Il famoso osso di lupo[14] su cui sono state trovate 55 tacche suddivise in due sezioni di 25 e 30 ciascuna, risale a 30'000 anni or sono. I numeri, il loro nome, il loro uso sono però assai più recenti, legati forse alle origini della scrittura o di poco anteriorim, quindi collocati tra il VI e il IV millennio a.C.

13. Platone, *Timeo,* 53 a-b.
14. Quest'osso fu trovato dall'archeologo *Karl Absolom* nel1937 durante scavi in Cecoslovacchia centrale. La fotografia (Bunt, Jones e Bedient, 1983), p. 2.

4.2 *I numeri scritti nel cielo* attraverso le misure celesti, le costellazioni, le orbite dei vari pianeti mobili, le evidenti ripetizioni dei fenomeni, avrebbero potuto indicare un ritmo, una scansione del tempo e dello spazio da trasferirsi poi nella pratica corrente per situazioni del tutto diverse ma sempre dettate da esigenze di tipo quantitativo e spaziale.

Secondo Giorgio De Santillana l'osservazione del cielo sarebbe già iniziata in epoche preistoriche[15], ma tutto ciò è improbabile, in quanto essa richiede tempo, che l'uomo primitivo, agricoltore o cacciatore che fosse, non aveva. Inoltre l'astronomia ha cominciato a svilupparsi solo quando i numeri e la geometria avevano raggiunto già un certo livello.

4.3 La *conquista dei numeri* rappresenta un lento percorso di graduale costruzione dell'uno, del due, del tre e così via. Si tratta di una conquista che passa attraverso la crescita della vita sociale del gruppo, con la creazione dei *nomi* dei vari numeri e con la successiva possibilità di astrarre via via questi dagli oggetti specifici. Come dice Bertand Russell tutto questo processo ha richiesto molto tempo: *«Devono essere state necessarie molte epoche storiche per scoprire che una coppia di fagiani e un paio di giorni erano entrambi espressioni del numero 2: il grado di astrazione qui implicito è ben lontano dal poter essere facilmente afferrato*»[16].

5. Importanza dei nomi dei numeri come inizio dell'astrazione

Dei tre percorsi ipotizzati è probabilmente l'ultimo che ha determinato la nascita del numero.

L'analisi storica, e più ancora quella psicologica, può essere arricchita con le osservazioni che sono possibili presso civiltà primitive ancora oggi esistenti o per lo meno esistenti allorché sono stati iniziati questi studi storici.

Ebbene, le analisi dei nomi attribuiti ai primi numeri naturali mostrano innanzi tutto che il grande pallottoliere a disposizione dell'uomo, le dita delle mani, non venne inizialmente considerato. Appare indicativo, ad esempio, il nome cinese «*er*» dato al *due*, nome che vuol dire anche «orecchi»: è ovvio pensare che per esprimere il numero si pensò a una coppia nota e familiare quale è appunto la coppia degli orecchi[17].

Uno

Rappresenta il soggetto stesso e tutto il suo mondo, ma anche la divinità e il bene.

15. Si veda (De Santillana, 1985).
16. Si veda (Russell, 1984), p.16. Probabilmente ci volle ancora altro tempo per considerare che anche un fagiano e un giorno rappresentano, insieme, un'espressione del numero 2 così come ogni altro paio di oggetti, reali o astratti, non uguali o, meglio, non necessariamente uguali.
17. L'ideogramma usato per il «due» è però differente del pittogramma usato per indicare gli «orecchi» e questo potrebbe voler dire che questo pittogramma non era ancora stabilito quando nacque il concetto del due oppure che vi fu un ripensamento riguardo alla scrittura dei numeri per razionalizzarla a prescindere dai loro nomi. Nel Tibet il nome dato al *due* vuol dire anche «ali» e presso gli ottentotti per il *due* viene usata la stessa parola che indica le «mani».

I Pitagorici hanno forse conservato questa prerogativa assumendo l'uno come indicatore dell'anima e della mente per la sua stabilità e fermezza o come sostanza, principio di ogni cosa.

Due

Rappresenta tutto ciò che è esterno, sconosciuto e quindi ostile, il male, la divisione.

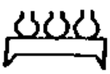
Matematicamente l'uno e il due sono nati insieme. Anzi il due chiarifica il significato numerico dell'uno. Da qui la grande importanza che, nello sviluppo del numero, ha avuto appunto il due, che può essere considerato il primo numero vero e proprio. Alcune antiche civiltà (o anche popoli primitivi attuali) consideravano questi due numeri già sufficienti per i loro conteggi dato che dopo il due, prima che si concretizzasse il successivo numero tre, vi era la moltitudine, i molti.[18]

Numericamente il due rappresenta la possibilità della divisione (in parti uguali), la separazione, ed è da queste operazioni che ha preso il suo nome.

Tre

Rappresenta il molto, l'oltre.

Presso i Sumeri, ad esempio, il tre («*esh*») vuol dire appunto anche «pluralità» e tre segni ripetuti sono un geroglifico che gli Egizi e gli Ittiti e i Cinesi usavano per indicare anch'essi la *pluralità*.



Tre brocche = diluvio (Egizi)

Tre alberi = foresta (Cinesi)

Gli antichi Greci, per indicare il «molto infelice, infelicissimo» usavano dire trisaqlioV (trisàtlios) cioè τρις–αθλιος che letteralmente vuol dire «tre (volte) infelice». E con τριπαλαι (tripàlai) = τρις–παλαι cioè «tre-un tempo» si vuole indicare una cosa molto remota, accaduta «molto tempo fa».

Anche presso i Romani «*ter*» sta spesso per «*molto, assai*», così «terfelix» vuol dire «felicissimo» e «bis terque», cioè «due e tre volte» sta per «molte volte».

Analogamente, nella lingua celtico-francese, ma ancora nel francese moderno il «*très*» premesso a qualsiasi aggettivo sta proprio per «molto» cioè porta al superlativo assoluto e anche in inglese viene attribuito a «*thrice*» il doppio significato di «tre volte» e di «molti».

Un vero e proprio numero si trova per il tre in un popolo dell'Oceania (stretto di Torres) che viene costruito con l'uno e il due[19].

18. Il vocabolario Pari dà *omi* (uno), *curiri* (due) e quindi *prica* che vuol dire molti; presso i Batacudo si ha addirittura *mokenam* per uno e poi *uraha* per molti.
19. Urapun = uno; okosa = due; okosa-urapun = tre; okosa-okosa = quattro; okosa-okosa-urapun = cinque; okosa-okosa-okosa = sei; e, per qualsiasi numero maggiore di sei: ras = folla. Si veda (Ifrah, 1984), p.17.

6. La numerazione sanscrita

Le origini dei nomi dei nostri numeri provengono dall'antica numerazione nella lingua sanscrita, al cui ceppo linguistico sono riconducibili diverse lingue indoeuropee.

numero	**nome**	**significato**
uno	enas, eka	questo, quello là
due	dvi, doi	dividere, separare
tre	trsh, tri	trapassare, penetrare, andare oltre (trans)
quattro	(e)ka-tr,	
catur, chatur	uno-tre	
cinque	panca(n), kankan	mano aperta
sei	sat	legato al mignolo
sette	sapta	seguente (il mignolo cioè anulare)
otto	asta	sporgente (medio)
nove	nava	cenno, mostrare (indice)
dieci	daca	due mani
cento	cata	
mille	sehastre	

Osserviamo i significati legati ai numeri uno e due visti in precedenza[20].

Si nota ancora una volta il significato attribuito al numero tre a testimonianza di una operazione che ricorda una precedente situazione in cui l'uno e il due erano i soli numeri conosciuti, sufficienti per una civiltà semplice.

Con il *quattro* si entra in una costruzione numerica più elevata poichè viene costruito con i numeri precedenti. Anche questo rappresenta un progresso notevole nello sviluppo del numero: si comincia in un certo senso a percorrere la strada dell'astrazione.

Infine è con il *cinque*, a testimonianza di un progresso numerico notevole, che si cominciano ad usare le dita delle mani per indicare i numeri e probabilmente per contare sempre più speditamente. L'uso delle dita viene però raggiunto solo dopo secoli (quanti?) di lento progresso e porta con sè la numerazione basata sul dieci come testimoniano anche i numeri *cento* e *mille* ugualmente presenti nella lingua sanscrita.

7. Sul numero dieci

Per Aristotele il fatto che sia i Greci sia i Barbari contino con la base numerica dieci non può essere casuale[21]: una circostanza che si verifica sempre non può risiedere che nella natura delle cose. Per spiegare la fortuna del dieci, dopo aver esaminato varie ipotesi di carattere aritmetico (il dieci comprende vari tipi di numeri: pari, quadrati, cubi, primi, composti; dieci è inoltre la somma dei primi quattro numeri), astronomico (sono nove i corpi mobili celesti e con la terra sono quindi dieci) e altre ancora, Aristotele osserva che forse il motivo va ricercato nell'essere dieci le dita delle mani.

20. Si veda (Ifrah, 1984), p.32 e (Dantzig, 1965), p. 20.
21. Aristotele (384-322 a.C.), *Problemi* libro XV,3.

La spiegazione di Aristotele non solo è convincente ma è anche suffragata dai fatti: una ricerca compiuta su centinaia di tribù di Indiani d'America ha portato al risultato che circa un terzo usava una numerazione a base decimale e quasi altrettanti a base quinaria o quinaria-decimale e un decimo una numerazione ventesimale; i restanti usavano infine un sistema basato sull'uno e sul due e cioè si trovavano ancora in una fase di prima evoluzione[22].

Qualche secolo dopo, un poeta latino, Ovidio nei *Fasti*, ripete lo stesso tema:

L'anno finiva quando la luna il suo decimo giro:
questo numero era allora molto pregiato;
o perché sono dieci le dita con cui noi contiamo
e nel decimo mese partorisce la donna;
o perché nel contare si va sino al dieci, da cui
incomincia un novello ordine di diecine.
Perciò Romolo cento dei cittadini divise
in dieci gruppi e fece dieci ordini di astati

Perciò serbò nell'anno il solito numero; e mesta
la moglie dieci mesi piange il marito morto[23].

8. Le «lista dei contrari» della scuola pitagorica

Già nella scuola pitagorica (VI sec. a.C.) il numero dieci era considerato sacro: per i Pitagorici infatti l'universo è retto da dieci coppie di principi uno contrario dell'altro[24]. Le coppie sono:

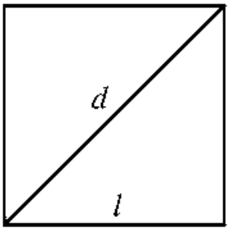
uno	molteplice
finito	infinito
dispari	pari
quadrato	rettangolo
maschio	femmina
buono	cattivo
quiete	movimento
destro	sinistro
diritto	curvo
luce	oscurità

Prescindendo dalle tre coppie *maschio-femmina*, *luce-oscurità*, *buono-cattivo*, la altre sette hanno una valenza matematica.

22. Si veda: (Boyer, 1980), p. 3.
23. Publio Ovidio Nasone (43 a.C.-18 d.C.), *Fasti* III, vv. 121-128; 133-134. A titolo di curiosità si può inoltre osservare, che l'art. 89 del Codice Civile Italiano fa divieto alla donna di risposarsi «*se non dopo trecento giorni* (dieci mesi!) *dallo scioglimento, dall'annullamento o dalla cessazione degli effetti civili del precedente matrimonio...*». Non si tratta ovviamente della convenienza legata al lutto da osservare ma a problemi di eventuali gravidanze già in atto, ma è curioso che ritroviamo i dieci mesi di Ovidio.
24. Aristotele, *Metafisica* I,V,986 a.; si veda anche (Frajese, 1977), pp.15-20.

9. Scoperta delle grandezze incommensurabili; numeri diagonali e laterali

Dalla contrapposizione *dispari-pari*, forse con la prima dimostrazione matematica, deriva la scoperta dell'incommensurabilità tra lato e diagonale di un quadrato, con tutte le conseguenze del caso per l'esistenza della scuola pitagorica stessa!



Se l è la misura del lato di un quadrato e d quella della sua diagonale, allora per il teorema di Pitagora deve valere $d^2 = 2l^2$.

Se d e l fossero commensurabili tra loro, allora si potrebbe ammettere (rispetto a un'opportuna unità di misura) che d e l siano numeri naturali primi fra loro (cioè MCD(d;l)=1).

L'uguaglianza $d^2 = 2l^2$ implica che d^2 è pari e quindi anche d è pari (poiché un numero e il suo quadrato sono entrambi pari o entrambi dispari), cioè $d = 2m$ per un certo numero naturale m. Sostituendo quest'ultima uguaglianza in $d^2 = 2l^2$ si ottiene successivamente:

$$(2m)^2 = 2l^2; \quad 4m^2 = 2l^2; \qquad 2m^2 = l^2$$

La relazione ottenuta implica, analogamente a prima, che anche l^2 è pari e quindi l e d sono pari, in contraddizione con l'ipotesi che d e l sono primi fra loro.

Abbiamo dunque mostrato che d e l sono incommensurabili.

Teone di Smirne (vissuto probabilmente nella prima metà del II sec d.C.)[25] recupera l'insuccesso dei Pitagorici studiando la successione dei *numeri laterali* l_n e *diagonali* d_n, che tra l'altro permettono di ottenere una successione di numeri razionali convergenti verso $\sqrt{2}$.

Con la dimostrazione precedente abbiamo visto che: «Il quadrato di un numero non può essere il doppio di un quadrato». Si può constatare che in alcuni casi «il doppio di un certo numero quadrato differisce di 1, in più o in meno rispetto ad un altro numero quadrato».

$l_1 = 1$	$d_1 = 1$	$d_1^2 = 2 \cdot l_1^2 - 1$
$l_2 = d_1 + l_1 = 2$	$d_2 = d_1 + 2 \cdot l_1 = 3$	$d_2^2 = 2 \cdot l_2^2 + 1$
$l_3 = d_2 + l_2 = 5$	$d_3 = d_2 + 2 \cdot l_2 = 7$	$d_3^2 = 2 \cdot l_2^2 - 1$
$l_4 = d_3 + l_3 = 12$	$d_4 = d_3 + 2 \cdot l_3 = 17$	$d_4^2 = 2 \cdot l_2^2 + 1$
…		

Teone ci dice «e così di seguito…»; noi oggi utilizziamo le formule ricorrenti:

$$l_n = d_{n-1} + l_{n-1} \qquad d_n = d_{n-1} + 2 \cdot l_{n-1} \qquad d_n^2 = 2 \cdot l_n^2 + (-1)^n$$

25. Si veda (Loria, 1987), p. 468, pp. 834-837.

L'ultima uguaglianza si può dimostrare per induzione completa.

Per $n = 1$, come visto sopra, la relazione vale.

Supponendo ora che la relazione $d_n^2 = 2 \cdot l_n^2 + (-1)^n$, che equivale a $d_n^2 - 2 \cdot l_n^2 = (-1)^n$, valga per un certo numero n, e usando le formule ricorrenti per l_n e d_n si ottiene:

$$d_{n+1}^2 - 2 \cdot l_{n+1}^2 = (d_n + 2 \cdot l_n)^2 - 2 \cdot (d_n + l_n)^2 =$$

$$= d_n^2 + 4 \cdot d_n l_n + 4 \cdot l_n^2 - 2 \cdot d_n^2 - 4 \cdot d_n l_n - 2 \cdot l_n^2 =$$

$$= -d_n^2 + 2 \cdot l_n^2 = -(d_n^2 - 2 \cdot l_n^2) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$$

La relazione vale dunque anche per $n+1$.

Dall'uguaglianza $d_n^2 = 2 \cdot l_n^2 + (-1)^n$, dividendo per l_n^2 si ottiene

$$\left(\frac{d_n}{l_n} \right)^2 = 2 + \frac{(-1)^n}{l_n^2}$$

Questa relazione ci dice che $\lim_{n \to \infty} \frac{d_n}{l_n} = \sqrt{2}$.

Consideriamo alcuni termini della successione d_n / l_n:

$$1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \ldots$$

Si noti che 7/5 è l'approssimazione del rapporto tra diagonale e lato del quadrato usata da Platone nel suo famoso brano detto del «*numero nuziale*»[26].

10. Definizione di numero

È con la civiltà greca che il numero subisce una decisiva evoluzione passando da una concezione pratica, legata quasi esclusivamente agli insiemi di oggetti reali, ad una concezione razionale nella quale il numero può esistere al di là e al di sopra di tale corrispondenza.

La più antica *definizione* è dovuta a Talete di Mileto:

«*Numero è un sistema di unità.*»

Questa la definizione, che presuppone evidentemente quella di *unità*, verrà ripresa da molti filosofi e matematici successivi (come ad esempio Platone, Aristotele, Euclide, Diofanto, Al-Kuwarizmi, Leonardo Pisano, Cardano), almeno sino alle moderne definizioni di Cantor e di Russell e alla costruzione assiomatica di Peano.

I Pitagorici considerano il numero come qualcosa che si genera da se stesso e costituisce la stabilità delle cose del mondo.

26. Platone, *Repubblica*, 546 b-d

Per Cartesio il numero è un'astrazione, un modo di pensare, e anche Leibniz lo ritiene una figura incorporea derivata da un insieme di oggetti di natura qualsiasi.

Newton e successivamente Wallis considerano invece il numero come misura, cioè come una quantità riferita a ciò che di solito viene assunto come unità.

La definizione del numero presuppone pertanto quella dell'unità.

11. Definizione dell'unità

Per Aristotele *l'unità, l'uno, non è numero ma principio dei numeri,* per cui, afferma anche, bisognerebbe ipotizzarne la stessa esistenza[27]. È questa un'eccezione allo stile descrittivo della matematica greca, come ad esempio in Euclide:

«*Unità è ciò secondo cui ciascun ente è detto uno*»[28].

Si tratta di una definizione per astrazione di tipo cantoriano: l'unità è ciò che di comune hanno, per quanto riguarda la quantità, tutti gli insiemi che hanno un solo elemento. Questa definizione verrà ripresa da vari matematici, come ad esempio Tartaglia e Luca Pacioli.

Tartaglia inoltre considera l'unità indivisibile come il punto geometrico in Euclide.

12. Sullo zero[29]

Secondo lo storico della matematica Van der Waerden: «*Lo zero è la cifra più importante. Ci vuole un colpo di genio per trarre qualcosa dal niente, per dargli un nome e inventane un simbolo*»[30].

La storia antichissima dello zero ne delinea i suoi tre significati:

– *niente, nulla*
– *posto vuoto*
– *numero zero*

Lo zero matematico è inevitabilmente legato filosoficamente con il *nulla*, il vuoto, con ciò che non esiste e sul cui significato hanno riflettuto pensatori di ogni epoca, a cominciare da Aristotele. D'altra parte un vocabolo per indicare il *niente* è presente in quasi tutte le lingue. In greco ad esempio il *nulla* si indica con *oudèn* (οὐδέν).

I Babilonesi, già attorno al 300 a.C., usano un doppio cuneo per indicare un *posto vuoto*, cioè un simbolo separatore, nel loro sistema di numerazione in base sessanta.

27. Aristotele, *Analitici Secondi*, 76 a, 33-35.
28. Euclide, *Elementi*, prima definizione del libro VII (la seconda è: «*Numero è una pluralità composta da unità*».
29. Si veda (Maracchia, 2005).
30. Si veda (Van der Waerden, 1954), p.56.

I Greci, soprattutto gli astronomi a partire dal secondo secolo d.C., usano con lo stesso significato la lettera greca *o* (omicron).

I Maya, nel loro sistema di numerazione in base venti, dal 300 d.C. usano invece una conchiglia (o forse un occhio) come simbolo separatore.

Nel sistema di numerazione posizionale decimale degli indiani il vuoto numerico viene indicato con il termine sanscrito di *sunya*, che diventa poi il «vuoto» arabo *sifr* e l'occidentale *zephirum* di Leonardo Pisano nel 1200. Da quest'ultimo deriva poi «zero». Dalla *sifr* araba derivano anche i termini italiani «zefiro», con il significato di venticello leggero e «cifra».

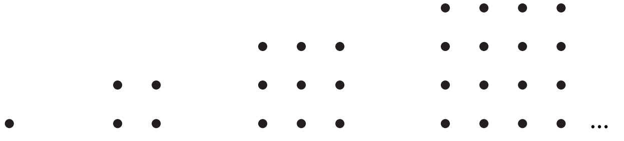
Il matematico indiano Brahmagupta nel VI sec. per primo considera lo zero come un vero e proprio *numero*; ne stabilisce le regole aritmetiche, lasciando inespressa la divisione a:0, tranne nel caso particolare 0:0 che considera uguale a 0. Sarà poi Bhaskara nel XII sec. a considerare il risultato di a:0 come la divinità (noi oggi diciamo «infinito»), perché non soggetto ad accrescimenti e diminuzioni.

13. Numeri quadrati e triangolari

Molte suddivisioni della matematica greca riguardanti i numeri si rifanno alla «lista dei contrari» della scuola pitagorica ricordata da Aristotele.

Dalla contrapposizione *dispari – pari* è possibile ad esempio ottenere l'altra contrapposizione *quadrato – rettangolo.*

Con la nota raffigurazione aritmo-geometrica pitagorica si mostra infatti che sommando i primi n numeri dispari si ottengono i *numeri quadrati*.

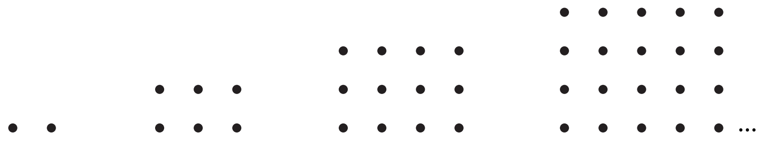


1   1+3 = 4   1+3+5= 9   1+3+5+7=16 ...

Oggi scriviamo[31]: $1+3+\ldots+(2n-1) = n^2$

31. Leonardo Pisano sfrutta questa proprietà per generare infinite terne pitagoriche. Infatti se $2n+1 = m^2$, si ha: $1+3\ldots+(2n-1) + (2n+1)= n^2 + m^2 = (n+1)^2$. Ad esempio da $m^2 = 2n+1= 25$, segue $n = 12$ e $12^2+ 5^2 = 13^2$

Analogamente sommando i primi n numeri pari si ottengono i *numeri rettangolari*.

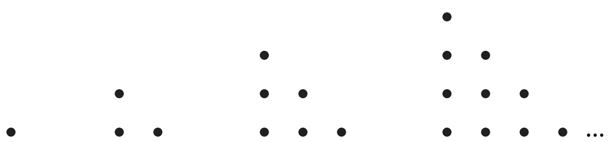


2 2+4 2+4+6 2+4+6+8 ...

Oggi scriviamo: $2+4+\ldots+2n = n \cdot (n+1)$

Gli antichi matematici greci si basavano sulla rappresentazione aritmo-geometrica pitagorica per mostrare delle proprietà dei numeri che con il nostro simbolismo richiedono solo la conoscenza della somma di n termini di una progressione aritmetica.

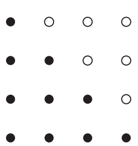
Ad esempio i *numeri triangolari* sono i termini della successione



1	1+2	1+2+3	1+2+3+4	...
1	3	6	10	...

Oggi scriviamo: $1 + 2 + 3 +\ldots+ n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Utilizzando la rappresentazione aritmo-geometrica è immediato osservare che la somma di due numeri triangolari consecutivi è un numero quadrato.



I numeri quadrati si possono dunque ottenere sommando i numeri naturali sino ad un certo numero (n) e diminuendo via via sino ad uno. Cioè:

$$1+ 2 + 3 + \ldots + (n-1) + \underline{n} + (n-1) + \ldots + 3 + 2 + 1 = n^2$$

Con il nostro simbolismo si verifica che

$$\frac{(n-1) \cdot n}{2} + \frac{n \cdot (n+1)}{2} = n^2$$

L'esempio dei numeri quadrati e triangolari ci mostra come, per i Pitagorici, geometria e aritmetica concorrevano alla crescita della matematica con un reciproco aiuto.

La classificazione dei numeri inizialmente operata dai Greci è stata molto dettagliata anche al di là dei cosiddetti *numeri poligonali*[32], di cui i numeri quadrati e quelli triangolari sono solo un caso particolare.

I numeri sono stati suddivisi, ad esempio, in *laterali*, *diagonali*, *eteromechi*, *circolari* ecc.; oppure, tenendo conto delle particolarità dei divisori, in numeri *primi*, *deficienti*, *eccedenti*, *perfetti*, *amici*, ecc.

14. Infinità dei numeri primi

Concludiamo accennando alla suddivisione fra *numeri primi* e *composti*. I libri VII, VIII e IX degli *Elementi* di Euclide sono dedicati alla teoria dei numeri. Nel libro VII vengono definiti numeri primi e composti.

Definizione 11.
Un numero primo è quello che è misurato soltanto dall'unità.

Definizione 13.
Un numero composto è quello che è misurato da qualche numero [diverso da 1].

Nel libro IX, si afferma:

Proposizione 20.
I numeri primi sono più di qualsiasi moltitudine assegnata di numeri primi.
(In altre parole, ci sono infiniti numeri primi.)

Per la sua brevità la dimostrazione che Euclide dà di questa proposizione è un classico e rimane a tutt'oggi (anche a detta di G.Hardy nel suo libretto *Apologia di un matematico*) una delle più belle dimostrazioni di tutta la matematica.

Euclide dimostra: dati i numeri primi *a*, *b*, *c* ne esiste almeno un altro. Infatti se il numero (a b c+1) è primo, la proposizione è dimostrata. Se (a b c+1) è composto, ha un divisore primo diverso da *a*, *b*, *c* (infatti dividendo con uno di essi si ha sempre resto 1). Questa conclusione si lascia applicare a qualsiasi lista data di numeri primi.

32. In generale l'n-esimo numero poligonale di ordine k è definito da

$$P_{k,n} = \sum_{i=1}^{n} (1+(i-1)(k-2)) = \frac{(k-2)\cdot n^2 - n(k-4)}{2}$$

Con $k=3$ si ottengono i numeri triangolari $P_{3,n} = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$;

con $k=4$ i numeri quadrati $P_{4,n} = n^2$; con $k=5$ i numeri pentagonali $P_{5,n} = \frac{n\cdot(3n-1)}{2}$ ecc.

Bibliografia

Barrow J. (2001). *Da zero a infinito, la grande storia del nulla.* Milano: Mondadori.

Boyer C. (1980). *Storia della matematica.* Milano: Mondadori.

Buffa G. (1986). *Fra numeri e dita*. Bologna: Zanichelli.

Bunt L., Jones P. e Bedient J. (1983). *Le radici storiche delle matematiche elementari.* Bologna: Zanichelli.

Dantzig T. (1965) *Il numero linguaggio della scienza*. 3ª ristampa 1985. Firenze: La Nuova Italia.

De Santillana G. (1985). *Fato antico*. Milano: Adelphi.

Frajese A. (1977). *Attraverso la storia della matematica*. Firenze: Le Monnier.

Gheverghese G.J. (2003). *C'era una volta un numero. La vera storia della matematica*. Milano: Il saggiatore.

Ifrah G. (1984). *Storia universale dei numeri*. Milano: Mondadori.

Kline M. (1991). *Storia del pensiero matematico.* Volume I *Dall'Antichità al Settecento.* Torino: Einaudi.

Loria G. (1987). *Le scienze esatte nell'antica Grecia*. Milano: Cisalpino-Goliardica.

Maracchia S. (1997). *Evoluzione storica del concetto di numero.* L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol.20AB n. 6, CRD «U. Morin» (pp. 682-710),

Maracchia S. (2005). *Storia dell'algebra*. Napoli: Liguori.

Natucci A. (1954). *Sviluppo storico dell'aritmetica generale e dell'algebra*. Napoli: Pellerano-Del Gaudio.

Russell B. (1984). *Introduzione alla filosofia matematica.* Milano: Longanesi.

Seife C. (2002). *Zero. La storia di un'idea pericolosa*. Torino: Bollati Boringhieri.

Van der Waerden B.L. (1954). *Science Awakening.* Groningen: Noordhoff.

1. Estensione del campo numerico e senso del numero nella scuola elementare: spunti teorici e proposte didattiche

Alberto Piatti, Ivo Dellagana[1]

In this paper, we report some recent results about the familiarity with numbers of primary school pupils. In the light of these results, we review critically the guidelines regarding the teaching of numbers in the primary schools of Southern Switzerland. The results indicate that the focus of the teaching of numbers in the primary school should be the acquisition of a number sense. To make our ideas clear, we propose several educational activities for the teaching of numbers, based on the concept of number sense, that are compatible with both the theoretical results and the official guidelines.

1. Introduzione

In questo articolo proponiamo alcuni spunti teorici, tratti principalmente da articoli comparsi recentemente su riviste scientifiche internazionali, utili per comprendere le principali problematiche matematiche e cognitive connesse con l'estensione del campo numerico nella scuola elementare. Il nostro intento è quello di fornire elementi di discussione e di riflessione e non quello di fornire un riassunto esaustivo dei risultati teorici presenti in letteratura. Nell'ultima sezione dell'articolo riportiamo pure alcune proposte didattiche: una per il primo ciclo basata sulle relazioni tra numeri (maggiore, minore e uguale), una per l'inizio del secondo ciclo centrata sulla retta dei numeri e infine un itinerario didattico per la quarta elementare sulle misure di valore. Lo scopo delle proposte didattiche in questo articolo è di mostrare come gli spunti teorici possano essere implementati nella pratica. I lettori interessati ad approfondire il discorso teorico sono invitati a consultare la bibliografia[2].

2. L'insieme dei numeri naturali

L'insieme dei numeri naturali, indicato con la lettera N, è l'insieme, $N=\{0,1,2,3,\dots\}$. Nella vita di tutti i giorni i numeri naturali sono utilizzati principalmente per contare (siamo 46 in classe), ordinare (questa scuola elementare è la quarta più grande nel distretto di Lugano) e nominare (sono arrivato con il bus numero 3). Nonostante le interpretazioni pratiche dei numeri naturali non pongano particolari problemi, l'esatta formulazione teorica dell'insieme dei numeri naturali è stato un proble-

1. Docenti del Dipartimento Formazione e Apprendimento (DFA), Scuola Universitaria Professionale della Svizzera Italiana (SUPSI), Piazza San Francesco, CH-6600 Locarno.
2. Gli autori ringraziano Mario Donati per la rilettura dell'articolo e per gli interessanti commenti.

ma controverso. In particolare nel corso del XIX secolo, Giuseppe Peano (1858-1932) ha proposto una serie di postulati che ogni definizione dell'insieme dei numeri naturali deve soddisfare:

1. Esiste un numero naturale, 0.
2. Ogni numero naturale a ha un numero naturale successore S(a) (intuitivamente S(a) = a + 1).
3. Non esiste un numero naturale il cui successore è 0.
4. Numeri naturali distinti hanno distinti successori: se a è diverso da b, allora S(a) è diverso da S(b).
5. Se una proprietà P è posseduta dallo 0 ed è posseduta anche dal successore di ogni numero naturale che possiede la proprietà P, allora la proprietà P è posseduta da tutti i numeri naturali (principio di induzione).

Una conseguenza importante e immediata di questi postulati è che l'insieme dei numeri naturali è infinito, visto che ogni numero naturale ha un successore. Apparentemente però questa visione si scontra con gli attuali programmi di scuola elementare del Ticino[3], secondo cui i numeri naturali devono essere introdotti gradualmente: in prima elementare i numeri fino al 20, poi fino al 100 in seconda, fino al 1000 in terza, oltre il migliaio in quarta e quindi fino ai milioni in quinta. Questa apparente contraddizione può essere risolta interpretando le disposizioni del programma in termini di familiarità e non di conoscenza.

Esiste un solo insieme N dei numeri naturali, che viene trattato a partire dalla scuola dell'infanzia e attraverso tutta la scuola elementare, dalla prima alla quinta. Il concetto di successore è alla base della definizione di N e quindi nessun limite va posto in nessuna classe ai numeri naturali. Le disposizioni programmatiche vanno invece intese come un'indicazione dell'ordine di grandezza dei numeri naturali con cui gli allievi devono acquisire familiarità, ovvero acquisire un senso del numero, come descritto nella prossima sezione. Estendere il campo numerico significa quindi far acquisire agli allievi familiarità con numeri più grandi di quelli che hanno normalmente utilizzato sinora, e non considerare un insieme diverso da quello considerato precedentemente.

3. Il senso del numero

Il *senso del numero* è un termine utilizzato in didattica della matematica per indicare una serie di competenze, più o meno intuitive, legate a un dato insieme numerico. Non esiste una definizione rigorosa di senso del numero: diversi autori hanno proposto diverse definizioni e diversi modi per verificare l'acquisizione di un senso del numero da parte degli allievi[4]. Una possibile definizione di senso del numero è «*una comprensione intuitiva dei numeri, della loro grandezza, delle loro relazioni e di come sono influenzati dalle operazioni*»[5]. Nonostante le diverse interpretazioni, esiste comunque un consenso internazionale sul fatto che l'acquisizione del senso del numero,

3. Divisione della scuola. *Programmi per la scuola elementare*. Bellinzona: USC. 1984.
4. Per una discussione teorica sul senso del numero vedi ad esempio (Greeno, 1991).
5. Definizione tratta da *www.learnnc.org/reference/number+sense*.

in particolare del numero naturale, sia uno degli obiettivi principali dell'educazione matematica nella scuola elementare. In questa sezione discutiamo brevemente le definizioni di senso del numero adottate in alcuni studi recenti.

Incominciamo con uno studio effettuato a Taiwan (Der-Ching et alt., 2008) per verificare la relazione tra acquisizione del senso del numero e risultati generali in matematica. Lo studio è stato effettuato su un campione di 1212 studenti di quinta elementare di regioni urbane e rurali di Taiwan. Gli autori di questo studio definiscono il senso del numero come «*a person's general under standing of numbers, operations, their relationships, and the ability to handle daily-life situations related to include numbers*», che può essere tradotto più o meno come «*la comprensione generale dei numeri, delle operazioni, delle loro relazioni e la capacità di trattare problemi della vita di tutti i giorni tramite un approccio numerico*». Gli autori hanno sviluppato una scala di misurazione del senso del numero basata su quattro aspetti principali.

1. Riconoscere la grandezza relativa dei numeri. Ad esempio, dati due numeri, essere in grado di identificare quale è il più grande. Oppure capire quale di due numeri è il più distante da un dato numero.
2. Utilizzare diverse rappresentazioni del numero. Ad esempio essere in grado di rappresentare un numero tramite simboli (notazione numerica), su una retta numerica e tramite parole-numero e di passare in maniera flessibile da una rappresentazione all'altra.
3. Giudicare la plausibilità di risultati prodotti da una calcolatrice (stima dei risultati). Ad esempio capire se il risultato ottenuto tramite un calcolo con la calcolatrice è verosimile o meno.
4. Riconoscere l'effetto delle diverse operazioni sui numeri. Ad esempio essere in grado di stimare il risultato di un calcolo.

Gli autori, considerando allievi alla fine della quinta elementare, hanno sviluppato un test per i numeri decimali in generale. Crediamo però che i quattro aspetti elencati sopra possano essere considerati anche per verificare la presenza di un senso del numero naturale. È importante notare che tutti gli aspetti considerati sopra fanno riferimento a competenze di ragionamento logico e non ad algoritmi effettuati con carta e penna. È quindi importante sviluppare e proporre agli allievi attività didattiche non legate alla semplice applicazione di algoritmi e tecniche note, per permettere loro di sviluppare queste competenze e quindi un senso del numero.

È pure importante notare che il terzo e il quarto aspetto della lista sopra sono strettamente legati ad attività di calcolo mentale, sia esatto che approssimato. Concentrarsi sul senso del numero evitando di soffermarsi su algoritmi di calcolo scritto come le operazioni in colonna non significa, infatti, evitare di risolvere i calcoli in maniera esatta, quanto mettere l'accento su tecniche di calcolo «ragionate», che possono portare a seconda delle necessità a risultati esatti o approssimati, piuttosto che su meccanismi che poco spazio lasciano al ragionamento logico.

Il secondo studio che consideriamo è stato effettuato negli Stati Uniti (Jordan et al., 2009). L'idea dello studio è quella di verificare se la presenza o meno di un senso del numero all'inizio della prima elementare possa essere utilizzata come indizio di possibili future difficoltà matematiche, verificate nello studio alla fine della prima e della terza elementare. Lo studio conclude che il senso del numero presente all'inizio della prima elementare è, in effetti, un importante indicatore, sia per i risultati alla fine della prima che per quelli alla fine della terza. Lo studio è interessante in quanto evidenzia la presenza del senso del numero in bambini di età prescolastica. Secondo gli autori dello studio, lo sviluppo del senso del numero inizia con la rappresentazione (mentale) precisa di piccole quantità e con la rappresentazione approssimata di quantità più grandi, ovvero la situazione che si riscontra solitamente all'inizio della scuola dell'infanzia. A partire da queste basi, il senso del numero si sviluppa ulteriormente attraverso competenze numeriche simboliche e verbali. La verifica della presenza di un senso del numero proposta dagli autori prende in considerazione diversi aspetti.

1. Aspetti legati al conteggio, come ad esempio recitare correttamente la sequenza numerica, contare gli elementi presenti in insiemi di diversa grandezza, riconoscere la correttezza o la scorrettezza di procedure di conteggio usuali e non usuali.
2. Aspetti legati alla conoscenza del numero, come ad esempio capire, dati due numeri, quale è il più grande o il più piccolo, oppure sapere quale numero viene prima/dopo un dato numero, oppure sapere quale di due numeri è il più vicino a un dato numero.
3. Aspetti legati alle operazioni (addizione e sottrazione) presentati attraverso situazioni non verbali e verbali. Ad esempio un problema non verbale consiste nel mostrare al bambino un'insieme di gettoni, lasciare che li conti, coprire i gettoni, aggiungere o togliere dei gettoni e quindi chiedere al bambino quanti sono adesso i gettoni. Tipici problemi verbali sono invece problemi posti verbalmente, ad esempio *Sara ha m franchi, Andrea le regala n franchi, quanti franchi ha Sara alla fine?*

Un insegnamento importante di questo studio è che lo sviluppo del senso del numero è un processo che comincia nella prima infanzia e che continua lungo tutta la scuola elementare e oltre. È quindi importante sviluppare, nei primi anni di scuola elementare, attività didattiche che garantiscano la continuità tra scuola dell'infanzia e scuola elementare. Un altro aspetto che vale la pena di enfatizzare è il fatto che le operazioni sono solo un aspetto del senso del numero. Spesso, trattando i numeri naturali alle scuole elementari, viene messo l'accento sulle operazioni e sugli algoritmi numerici. Ma uno sviluppo del senso del numero richiede anche (e soprattutto) altri aspetti legati alla conoscenza del numero, alla sua rappresentazione, alla stima di risultati e quindi al calcolo mentale e infine alla risoluzione di problemi verbali e non-verbali concernenti numeri. Estendere il campo numerico significa permettere agli allievi di acquisire esperienza e quindi familiarità in tutti questi aspetti utilizzando numeri più grandi di quelli che normalmente sono abituati ad utilizzare.

4. La retta mentale dei numeri

Nella precedente sezione abbiamo detto che il senso dei numeri si sviluppa lungo tutto l'arco della scuola dell'infanzia e della scuola elementare. In questo senso, è interessante considerare come cambia, nel corso di questo sviluppo, il modo in cui il bambino si rappresenta mentalmente i numeri. In particolare, è interessante notare un cambiamento importante che si verifica intorno alla terza elementare. Per evidenziare questo cambiamento, riportato in (van Galen e Reitsma, 2008), dobbiamo però premettere alcune considerazioni teoriche di base. Esiste un effetto, chiamato SNARC (spatial-numerical association of response codes), confermato da centinaia di studi scientifici, che descrive l'associazione tra numeri e spazio nel ragionamento umano. In particolare, l'effetto SNARC evidenzia come le persone tendano ad associare i numeri piccoli con la sinistra e i numeri grandi con la destra. L'effetto SNARC è considerato in genere come la dimostrazione che gli umani hanno una rappresentazione mentale dei numeri come disposti su una linea orizzontale, con i numeri piccoli a sinistra ed i numeri grandi a destra[6]. Questa ipotetica linea orizzontale è chiamata in letteratura *mental number line*, ossia retta mentale dei numeri. La retta dei numeri è utilizzata anche formalmente in matematica per la rappresentazione dei numeri ed è alla base della rappresentazione grafica dei numeri. La retta mentale dei numeri e la retta dei numeri definita in matematica coincidono per quanto riguarda la direzione (da sinistra a destra), ma possono differire, a seconda dell'età, nella scala. La retta dei numeri utilizzata in matematica utilizza una scala lineare, per cui la distanza tra un numero e il suo successivo è sempre la stessa, indipendentemente dal numero. Nella retta dei numeri mentale dei bambini della scuola elementare, invece, spesso questa scala non è lineare ma la distanza tra due numeri consecutivi decresce con il crescere del numero. Per lungo tempo si è pensato che la scala utilizzata dai bambini fosse logaritmica, ossia che la distanza tra due numeri consecutivi diminuisse gradualmente con il crescere dei numeri e che questa si tramutasse lentamente in lineare seguendo lo sviluppo del bambino. Questa visione è stata messa in discussione da studi recenti, ad esempio da (Ebersbach et al., 2008) e (Moeller et al. 2009). Entrambi gli studi hanno evidenziato come in realtà la scala utilizzata dai bambini nella retta mentale dei numeri sia probabilmente lineare a tratti: per i numeri con cui il bambino ha familiarità la scala è correttamente lineare, mentre oltre un certo numero la distanza tra due numeri consecutivi diventa più piccola, pur rimanendo costante da lì in avanti.

Lo studio di (Ebersbach et al., 2008) ha messo in evidenza la relazione tra scala utilizzata nella retta mentale dei numeri e familiarità con i numeri. Una prima conclusione dello studio è che in effetti i bambini sono in grado di rappresentare in maniera lineare i numeri sulla retta mentale dei numeri fintanto che i numeri rientrano nell'ambito in cui i bambini hanno familiarità. Inoltre i bambini rappresentano in maniera lineare anche i numeri oltre la soglia di familiarità, ma fanno più fatica a riconoscere le differenze tra numeri grandi e quindi è come se la distanza tra numeri consecutivi oltre la soglia di familiarità diminuisse. Ricostruendo la scala utilizzata dai bambini nella loro retta mentale dei numeri e ricostruendo la soglia di familiarità, lo studio mostra che mediamente questa si situa intorno a 25 per i bambini di prima, attorno a 37 per i bambini di seconda e attorno a 342 per i bambini di terza. Questo conferma che le indicazioni presenti nel programma di matematica della scuola elementare in merito ai numeri con cui il bambino deve acquisire familiarità, ovvero fino al 100 in seconda e fino al 1000 in terza sono plausibili. Un'ulteriore conclusione dello studio smentisce

6. Vedi (van Galen e Reitsma, 2008) per una discussione più approfondita.

l'ipotesi secondo cui rappresentare le quantità con un numero scritto in maniera simbolica e tramite la rappresentazione grafica di un insieme con la stessa numerosità aiuterebbe il bambino ad utilizzare una scala lineare. I risultati ottenuti utilizzando entrambe le rappresentazioni oppure solo quella simbolica non differiscono, infatti, di molto. Gli autori considerano ciò come un'evidenza a favore del fatto che i numeri vengono rappresentati mentalmente nello stesso modo, indipendentemente dalla loro rappresentazione concreta.

Lo studio di (Moeller et al., 2009) sostiene pure l'ipotesi secondo la quale la scala utilizzata dai bambini nella retta mentale dei numeri sia lineare a tratti, ma a differenza dello studio precedente spiega questo fatto con le difficoltà dei bambini nel considerare insieme le decine e le unità. Lo studio prende in considerazione un campione di bambini di seconda elementare (la prima elementare in Austria, dove si è svolto lo studio) e l'insieme dei numeri naturali inferiori a 100. Gli autori mostrano che la scala utilizzata dai bambini può essere approssimata bene con una scala lineare fino al 10, e quindi nuovamente lineare, ma con una pendenza inferiore, dal 10 in avanti. Gli autori spiegano questo risultato con il fatto, dimostrato da numerosi studi scientifici, che i bambini tendono a considerare separatamente le unità e le decine ed in generale tendono a considerare numeri di più cifre considerando ogni cifra singolarmente. Ad esempio, per un bambino è più difficile verificare che

$47 < 62$,

piuttosto che

$42 < 57$,

poiché nel secondo caso sia la cifra delle unità che la cifra delle decine è minore, mentre nel primo caso no. Lo sviluppo secondo questi autori consiste quindi in una migliore integrazione di unità e decine per arrivare ad utilizzare la stessa scala lineare fino al 100. Questo sviluppo può essere supportato tramite situazioni didattiche che migliorino la familiarità del bambino con la notazione numerica simbolica di tipo posizionale.

Dopo queste premesse teoriche possiamo finalmente commentare lo studio di (van Galen e Reitsma, 2008) che concerne la capacità di associare i numeri con una posizione sulla retta mentale dei numeri nei bambini tra i 7 e i 9 anni di età e negli adulti. In particolare lo studio ha verificato due aspetti: (i) se un effetto SNARC, e quindi una rappresentazione mentale tramite una retta numerica sia già presente nei bambini di 7 anni e (ii) da che età in avanti la rappresentazione mentale dei numeri sulla retta numerica mentale diventa un automatismo.

Lo studio ha dimostrato che l'effetto SNARC è già presente nei bambini di 7 anni quando considerano problemi in cui la quantità rappresentata dal numero è rilevante e ha dimostrato che dai 9 anni, quindi a partire dalla fine della nostra terza elementare e fino all'età adulta, l'effetto SNARC viene attivato automaticamente alla vista di un numero, anche se la quantità rappresentata dal numero è irrilevante nella situazione che si sta considerando. Il cambiamento importante che avviene in terza elementare nella rappresentazione mentale del numero è quindi il passaggio a un automatismo.

Sulla base dei risultati illustrati sopra, possiamo concludere che proporre attività didattiche centrate sulla retta dei numeri può fornire al docente importanti indicazioni sullo sviluppo del senso del numero negli allievi ed in particolare sulla familiarità con i numeri e con la notazione posizionale.

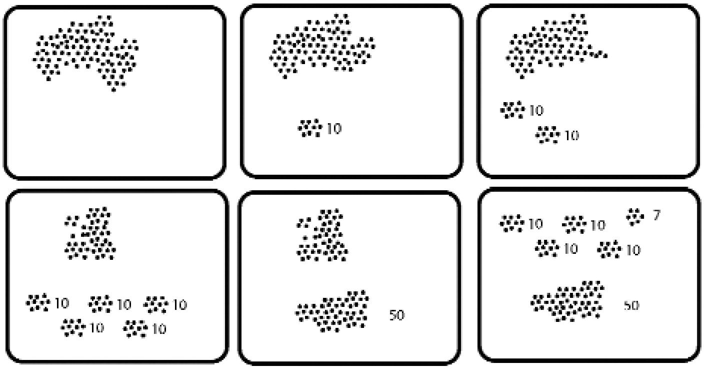
5. Alcune proposte didattiche

5.1. Un'attività di quantificazione

Uno degli aspetti fondamentali del numero in pratica è quello cardinale, ossia il numero come quantità di elementi in un insieme. Il determinare una quantità, ovvero rispondere alla domanda «quanti sono?», è fondamentale non solo considerando insiemi con pochi elementi, nell'ordine della decina, come solitamente svolto a scuola dell'infanzia e nel primo ciclo di scuola elementare, ma anche considerando insiemi più grandi, con cardinalità nell'ordine delle centinaia e delle migliaia.

Questo significa che attività incentrate sul conteggio possono essere proposte anche nel secondo ciclo e più in là. Negli anni superiori, lo scopo delle attività di conteggio è duplice: sviluppare strategie di conteggio più efficaci del semplice conteggio uno ad uno effettuato per piccole numerosità, e associare determinati numeri nell'ordine delle centinaia, migliaia o più, a determinate quantità reali, incrementando così la familiarità degli alunni con questi numeri.

È molto semplice proporre situazioni centrate sul conteggio: è sufficiente scegliere un insieme di oggetti, che possono essere concreti o astratti, manipolabili o non manipolabili, ecc. e chiedere ai bambini di determinare la quantità di oggetti ivi presenti. Ad esempio, in autunno, si potrebbe chiedere ai bambini di determinare il numero di castagne raccolte nel bosco durante una passeggiata. Si potrebbe prima chiedere ai bambini di stimare la quantità a occhio e scrivere la loro stima su un foglio. Quindi si potrebbe chiedere a un bambino di mettere da parte dieci castagne e quindi chiedere nuovamente ai bambini di determinare a occhio il numero di castagne. Si potrebbe continuare a eseguire aggruppamenti fino ad arrivare a poter determinare a occhio la quantità esatta, come illustrato nella seguente figura.



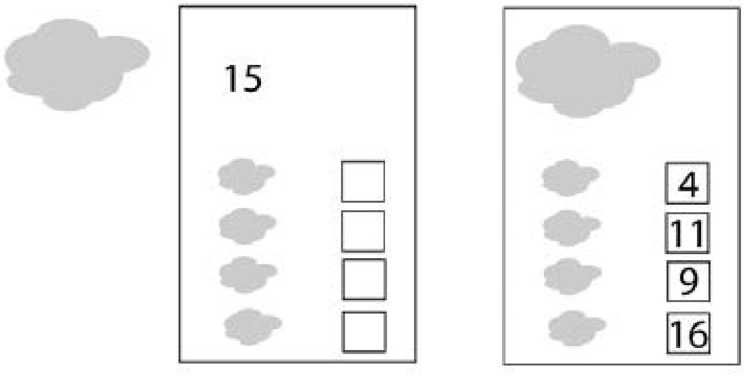
Per visualizzare le stime di tutti i compagni si potrebbe, alla fine di ogni turno, far indicare ai bambini la loro stima su una grande retta dei numeri. Con il passare dei turni le stime probabilmente si raggrupperebbero fino ad arrivare, nell'ultimo turno, a corrispondere tutte a un solo punto della retta dei numeri.

Questa attività, nonostante la sua semplicità, permette di affrontare numerosi concetti fondamentali del senso del numero, come gli aspetti cardinale e ordinale del numero, il concetto di stima e risultato esatto, la scomposizione, il raggruppamento, ecc.

5.2. Relazioni tra numeri in prima elementare: minore, maggiore e uguale

Uno degli aspetti fondamentali del senso del numero è la capacità di mettere in relazione diversi numeri. Le tre relazioni fondamentali tra numeri sono il minore (<), il maggiore (>) e l'uguale (=). Un numero A è minore di un numero B se, sulla retta dei numeri, A viene prima di B, sono uguali se si trovano nella stessa posizione e A è maggiore di B se, sulla retta dei numeri, A viene dopo B. Prima di inserire segni convenzionali, come ad esempio <,> e =, è importante che i bambini capiscano cosa significa mettere in relazione e capiscano le tre relazioni di base elencate sopra. Solo una volta che i concetti sono stati costruiti, ha senso introdurre una convenzione.

Una situazione che può essere proposta a una classe di prima elementare per introdurre le tre relazioni di base è la seguente. Si dividono i bambini a coppie, i bambini di una coppia giocano uno contro l'altro. I bambini ricevono un foglio e una nuvoletta di carta ritagliata, come rappresentato nella figura seguente.



Il primo bambino, scrive, senza far vedere all'altro, un numero tra 1 e 20 sul foglio (ad esempio il 15), e lo nasconde sotto la nuvoletta. Il secondo bambino può quindi scrivere dei numeri tra 1 e 20 nei riquadri disegnati sul foglio. Il primo bambino deve dire al secondo, per ogni numero che ha scritto, dove si trova il suo («è più grande di, è più piccolo di, è uguale a»). Il secondo bambino deve quindi indovinare il numero nascosto sotto la nuvoletta. Si cambiano quindi i ruoli e si continua il gioco. In una seconda fase, si chiede ai bambini di eseguire lo stesso gioco, però senza parlare. Il primo bambino è costretto a inventare dei segni per indicare quello che prima diceva a parole. Probabilmente ogni coppia inventerà tre segni per indicare i tre casi possibili. Una volta terminata la seconda attività, si possono mettere in comune i risultati mostrando alla lavagna i segni inventati dalle varie coppie. Si può così mostrare che, nonostante le differenze di simboli, tutti ne hanno usati tre. Anche in questo caso, si può chiedere ai bambini di rappresentare il proprio numero e quelli proposti dal compagno sulla retta dei numeri. In questo modo, viene ancor di più evidenziato il fatto che le possibili posizioni relative di due numeri sono tre. A questo punto, si può procedere con l'introduzione delle scritte «è più grande di, è più piccolo di, è uguale a» e/o con l'introduzione dei simboli convenzionali.

5.3. Un itinerario sulle misure di valore in quarta elementare

In questa sezione descriviamo in maniera sintetica un itinerario didattico, elaborato dagli studenti del DFA Isabella Reggi, Jennifer Baldinger e Stefano Bello, che illustra diverse attività che si possono proporre in una quarta elementare per familiarizzare i bambini con numeri nell'ordine delle centinaia e di conseguenza per permettere loro di acquisire un senso del numero per numeri più grandi di quelli che sono abituati a usare[7].

L'itinerario è basato sulle misure di valore e si pone come obiettivi generali di sviluppare e affinare nei bambini la capacità di stimare e confrontare il valore di diversi oggetti e di utilizzare strategie di calcolo mentale per determinare il valore di uno o più oggetti.

Abbiamo scelto di presentare questo itinerario per diversi motivi. In primo luogo, siamo convinti che per acquisire un senso del numero per i numeri in un certo campo numerico, sia necessario fare esperienza con questi numeri in ambiti della vita quotidiana. Le misure di valore sono uno degli ambiti in cui più spesso, nella vita quotidiana, si è confrontati con numeri nell'ordine delle centinaia e delle migliaia e quindi ben si prestano per fare esperienza con i numeri in terza elementare.

In secondo luogo, l'itinerario mostra bene come si possano utilizzare le misure come strumento per lavorare con i numeri. Nel programma di scuola elementare citato in precedenza, le misure sono riportate come un argomento a se stante, separato dall'argomento dei numeri. Questa suddivisione è fuorviante, in quanto dà l'impressione che i due temi vadano considerati separatamente. In realtà, la misura è uno degli strumenti fondamentali con cui noi assegniamo dei numeri ad oggetti reali. In altre parole, sono uno strumento privilegiato per creare modelli matematici della realtà e quindi per accumulare esperienza con i numeri nella pratica.

In terzo luogo, le misure di valore sono un campo in cui le operazioni (somma e/o moltiplicazione), sia stimate, sia svolte in maniera esatta, sia svolte con una calcolatrice, giocano un ruolo importante. Dunque, le misure di valore permettono un approccio completo, praticamente e teoricamente ben fondato, alle operazioni. È importante, infatti, ricordare che, come abbiamo evidenziato nelle sezioni precedenti, la conoscenza delle operazioni e la capacità di stima dei risultati sono due degli aspetti importanti del senso del numero che vanno acquisiti a scuola elementare.

Infine, le attività proposte permettono pure di affinare le capacità di ragionamento logico degli alunni, ad esempio attraverso la classificazione o l'ordinamento per valore di diversi oggetti. L'itinerario proposto consiste di 5 interventi. I prerequisiti dell'itinerario sono i seguenti.

1. Conoscenza di base delle monete e delle banconote svizzere.
2. Conoscere il concetto di composizione e scomposizione di numeri interi.
3. Essere a conoscenza del fatto che ogni oggetto ha un prezzo.
4. Eventualmente: conoscenza dell'uso della virgola.

Presentiamo ora i cinque interventi in dettaglio.

7. L'itinerario proposto è stato sviluppato nell'ambito del modulo applicativo *Matematica nel secondo ciclo: applicazioni didattiche,* con la guida dei docenti Mario Donati e Alberto Piatti. Il modulo è parte del quinto semestre della formazione dei futuri docenti di scuola elementare del DFA.

Primo intervento: baratto

Durante il primo intervento a ogni alunno viene consegnato un oggetto diverso. Viene data la consegna di trovare chi, tra i compagni, possieda un prodotto che abbia un valore simile al proprio («cosa vorresti in cambio del tuo oggetto?», «perché vale come il tuo?»). Dopo aver effettuato gli scambi, viene chiesto ai bambini di esplicitare verbalmente il motivo della loro scelta.

Questa attività è basata prettamente su aspetti di logica e in particolare sulla classificazione degli oggetti in base al valore. Il descrittore *valore* viene utilizzato in questo intervento in forma qualitativa (questi oggetti valgono entrambi poco), ma non ancora in maniera quantitativa (questi oggetti valgono entrambi circa due franchi). L'attività di classificazione qualitativa è necessaria per realizzare l'importanza di creare un criterio che permetta di classificare gli oggetti in base al loro valore, ovvero il *costo* di un oggetto.

Secondo intervento: scomposizione e composizione di un valore monetario in franchi

Lo scopo del secondo intervento è di approfondire la conoscenza delle banconote e delle monete svizzere. Ai bambini viene chiesto di creare scomposizioni e composizioni di valore tramite monete e banconote utilizzando materiali concreti («Come potresti pagarmi 137.50 franchi?», «Quanti soldi sono questi?»).

Questa attività riprende il concetto di scomposizione additiva già trattata a partire dalla prima elementare, ma introduce il vincolo supplementare dei valori rappresentati da monete e banconote. Le scomposizioni e le composizioni sono eseguite senza l'ausilio di calcoli scritti e quindi richiedono di mettere in atto delle strategie di calcolo mentale.

Terzo intervento: la stima del valore di…

Nel terzo intervento sono combinate le competenze toccate nei due interventi precedenti, inoltre viene introdotto il concetto di ordinamento per valore. L'intervento consiste in due attività. Nella prima attività i bambini vengono suddivisi in coppie e ciascuna coppia riceve alcuni oggetti. A turno, un bambino interpreta il mercante e propone un prezzo all'altro bambino che interpreta il cliente, il quale è chiamato a negoziare il prezzo con il mercante. Una volta stabilito un prezzo, il cliente deve pagare la somma stabilita di comune accordo tramite l'utilizzo di fac-simile di monete e banconote. Una volta terminata la prima attività, ogni coppia di bambini è chiamata ad ordinare gli oggetti ricevuti secondo il loro valore.

Quarto intervento: stima della spesa

Il quarto intervento consiste in un'attività di ricostruzione di uno scontrino. Da uno scontrino della spesa vengono eliminati alcuni dati: il nome del prodotto, il prezzo, e/o il valore totale. I bambini sono chiamati a ricostruire lo scontrino risalendo al possibile articolo partendo dal prezzo, al possibile prezzo partendo dall'articolo, a inserire articoli con relativi prezzi se un'intera riga è stata cancellata, ecc. In un primo tempo l'attività è proposta senza la possibilità di svolgere calcoli per iscritto oppure con la calcolatrice, i bambini devono quindi eseguire i loro calcoli a mente. Solo in un secondo tempo l'esattezza delle stime può essere verificata tramite questi mezzi. Gli scontrini possono essere facilmente creati con diversi livelli di difficoltà per adeguarsi ai bambini presenti in sezione.

Quinto intervento: il minestrone

Il quinto intervento parte dalla ricetta di un minestrone, che richiede una quantità data di tre ortaggi (carote, patate, zucchine). I bambini, attingendo alle informazioni presenti su un cartellone affisso in classe (esso presenta le azioni della settimana ad esempio, carote 1,10 CHF al kg, patate 1.70 CHF al kg, zucchine 3,20 CHF al kg), risalga, stimandolo, al prezzo totale della spesa. In un secondo momento, il prezzo ipotizzato viene verificato tramite la calcolatrice. Una seconda variante possibile dell'attività consiste nel chiedere di risalire al prezzo di un ortaggio, dati gli altri prezzi e il costo finale. Un'altra variante possibile consiste nel chiedere di risalire alla ricetta conoscendo il prezzo totale della spesa. Questa attività permette, nella sua variante di base, di sviluppare la capacità di effettuare moltiplicazioni e somme a mente. Nella seconda variante viene introdotta pure la divisione, anche se non in maniera esplicita. Infine, nell'ultima variante, viene proposto un problema con soluzioni multiple, che può essere molto stimolante per i bambini più competenti.

6. Conclusioni

Lo sviluppo delle competenze numeriche è un cammino che inizia alla scuola dell'infanzia e prosegue fino all'età adulta, lungo un itinerario che porta dai primi numeri cardinali fino all'intera retta dei numeri. È come se la retta dei numeri venisse popolata gradualmente di numeri, inizialmente conosciuti solo superficialmente, e poi sempre più profondamente, grazie all'acquisizione di un senso del numero. Acquisire il senso dei numeri in un dato campo numerico significa acquisire familiarità con i numeri dati attraverso attività di rappresentazione, messa in relazione, calcolo mentale e scritto, risoluzione di problemi e, soprattutto, attraverso un collegamento tra i numeri utilizzati e la realtà. È importante proporre alla scuola elementare itinerari sul numero che contemplino tutti gli aspetti del senso del numero, ad esempio attraverso situazioni di misura come proposto nell'itinerario didattico proposto alla fine dell'articolo, essendo sempre consapevoli che l'insieme numerico che si sta considerando non è un insieme a se stante, ma una parte della retta numerica.

Bibliografia

Der-Ching Y., Mao-Neng L. e Chin-I L. (2008). A study of the performance of 5th graders in number-sense and its relationship to achievement in mathematics. *International Journal of Science andMathematics Education*, 6:789-807.

Ebersbach M., Luwel K., Frick A., Onghena P. e Verschaffel L. (2008). The relationship between the shape of the mental number line and familiarity with numbers in 5- to 9-year old children: Evidence for a segmented linear model. *Journal of experimental child psychology*, 99:1-17.

Greeno J.G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3):170-218.

Jordan N.C., Glutting J. e Ramineni C. (2009). The importance of number sense to mathematics achievement in first and third grades. *Learning and Individual Differences*.

Moeller K., Pixner S., Kaufmann L. e Nuerk H. (2009). Children's early mental number line: Logarithmic or decomposed linear? *Journal of experimental child psychology*, 103:503-515.

van Galen M. S. e Reitsma P. (2008). Developing access to number magnitude: A study of the SNARC effect in 7- to 9-year-olds. *Journal of experimental child psychology*, 101:99-113.

2. Problemi scolastici nell'ottica del *problem solving*

Gianfranco Arrigo

In this paper, we focus on mathematical problems characterized by insufficient, redundant, irrelevant or incompatible data. Presenting the results of a research carried out in several primary schools of Lugano, we argue that the problem solving activities at the primary school should be proposed more frequently and carefully with respect to the current standard practice.

1. Introduzione

La letteratura concernente il concetto di problema è vastissima e abbraccia un ampio ventaglio di aspetti. La tematica è complessa al punto tale che risulta umanamente impossibile anche solo descrivere brevemente tutto quanto è stato concepito, osservato, sperimentato. Questo contributo è rivolto agli insegnanti di ogni grado scolastico e tratta dei problemi che si assegnano in classe. L'attenzione è posta sul tipo di problemi che stimolano l'allievo a intraprendere procedure indotte dalla mancanza di dati sufficienti oppure dalla sovrabbondanza degli stessi, particolarmente nel caso in cui alcuni dati si rivelino fra loro incompatibili.

I dati sono forniti da una sperimentazione eseguita da un gruppo di insegnanti delle scuole elementari della Città di Lugano, nell'ambito del corso di aggiornamento «Come far fronte alle difficoltà in matematica[1]».

2. Cenno agli aspetti teorici

Iniziamo da una prima doverosa distinzione: quella tra esercizio e problema (D'Amore, 1999).

«*Si ha un esercizio quando la risoluzione prevede che si debbano utilizzare regole e procedure già apprese, anche se ancora in corso di consolidamento. Gli esercizi dunque rientrano nella categoria delle prove a scopo di verifica immediata o di rafforzamento.*

Si ha invece un problema quando una o più regole o una o più procedure non sono ancora bagaglio cognitivo del risolutore; alcune di esse potrebbero essere proprio in quell'occasione in via di esplicitazione; a volte è la successione stessa delle operazioni risolventi a richiedere un atto creativo da parte del risolutore».

1. Il corso si è svolto nella primavera 2009, è stato condotto da G. Arrigo e G. Mainini e fa parte dell'offerta SMASI per gli insegnanti della scuola elementare.

Già nel 1945, il matematico ungherese George Polya, considerato un antesignano della teoria del *problem solving*, così si esprimeva (Polya, 1945)[2].

«Risolvere problemi significa trovare una strada per uscire da una difficoltà, una strada per aggirare un ostacolo, per raggiungere uno scopo che non sia immediatamente raggiungibile. Risolvere problemi è un'impresa specifica dell'intelligenza e l'intelligenza è il dono specifico del genere umano: si può considerare il risolvere problemi come l'attività più caratteristica del genere umano».

«(...) Quindi un insegnante di matematica ha una grande possibilità. Ovviamente, se egli impiegherà le sue ore di lezione a far eseguire dei calcoli ai suoi studenti, finirà per soffocare il loro interesse, arrestare il loro sviluppo mentale e sciupare l'opportunità che gli si presenta. Invece, se risveglierà la curiosità degli alunni proponendo problemi di difficoltà proporzionate alle conoscenze della scolaresca e li aiuterà a risolvere le questioni proposte con domande opportune, egli saprà ispirare in loro il gusto di un ragionamento originale».

Ecco che cosa ha scritto un altro famoso matematico, David Hilbert [1862-1943]:

«Finché un ramo di scienza offre un'abbondanza di problemi, allora è vivo; una mancanza di problemi prefigura l'estinzione o l'arresto di uno sviluppo indipendente».

Ora, anche se i problemi cui fa cenno Hilbert sono quelli della ricerca matematica, non c'è motivo per non estendere questa affermazione ai problemi scolastici.

Ci piace infine citare anche un passo del didatta F. Lester (1983):

«Un problema è un compito per cui l'individuo – o il gruppo che si confronta con esso – vuole o ha bisogno di trovare una soluzione; non c'è una procedura immediatamente accessibile che garantisca o determini in modo completo le soluzioni; l'individuo o il gruppo devono fare uno sforzo per trovare una soluzione».

Non credo si debba aggiungere altro: abbiamo precisato che cosa intendiamo con il termine «problema» e quale sia l'importanza della pratica dei problemi nell'educazione matematica.

Ora, come già detto, poniamo l'attenzione su un particolare genere di problema che presenta, rispetto a quelli tradizionali, anomalie riguardanti i dati. Sono problemi raramente proposti dagli insegnanti, che preferiscono problemi ed esercizi «ben congeniati», cioè con tutti i dati necessari e sufficienti, ben messi in rilievo nella consegna rigorosamente testuale. Li suddividiamo in due categorie:

– problemi con dati insufficienti
– problemi con dati sovrabbondanti

I primi potrebbero ancora essere distinti in due sotto-categorie: quelli in cui i dati esistono e si possono dunque cercare e quelli invece i cui dati possono essere «inventati» dal solutore.

Gli altri di nuovo possono essere di due tipi: quelli con dati coerenti e quelli con dati incompatibili.

2. Tutte le citazioni di questo paragrafo sono tratte da (D'Amore, 1999), testo fondamentale per chi desidera avvicinarsi alla didattica della matematica.

3. L'interrogativo di fondo e la metodologia adottata

Come reagiscono gli allievi di fronte a tali problemi? È questo l'interrogativo che ci siamo posti insieme agli insegnanti del corso sulle difficoltà in matematica. Per farci un'idea nostra, abbiamo deciso di effettuare una «mini-ricerca» in alcune classi delle scuole elementari. Gli insegnanti, inizialmente, erano piuttosto scettici sull'opportunità di una simile operazione; poi, discutendone, hanno accettato di provare. Hanno quindi ricevuto i testi di alcuni problemi che sono stati preventivamente analizzati durante il corso. A seconda della classe destinataria, i testi e i dati sono stati usati senza interventi o ritoccati, senza però tradire il significato didattico. Siamo riusciti a raccogliere dati nelle classi dalla terza alla quinta elementare[3]. Agli allievi è stata data una duplice consegna: cercare di risolvere ogni problema e redigere un commento in assoluta libertà. Secondo la maggior parte degli insegnanti, gli allievi si sarebbero trovati in seria difficoltà nel tentativo di risolvere e non avrebbero espresso granché nel commento.

4. Alcuni risultati

Fedeli alla domanda di fondo «come reagiscono gli allievi di fronte a questi problemi?», più che alle percentuali di riuscita, ci siamo interessati dei vari commenti espressi dagli allievi, commenti che abbiamo suddiviso in alcune categorie. Inoltre abbiamo ritenuto importante produrre esempi di risposte date dagli allievi: le abbiamo trascritte fedelmente, correggendo solo gli errori di ortografia. Negli enunciati dei problemi, i dati numerici indicati tra parentesi quadre sono semplificazioni apportate da qualche insegnante.

4.1. Problemi con dati insufficienti

1a) Laura e Marco vanno insieme al supermercato. Laura spende franchi 7,55 [8] e Marco spende franchi 18,75 [19]. Chi dei due alla fine ha più soldi in tasca?[4]

Tabella 1a)

1a)	Non si può risolvere	Non si può risolvere, con giustificazione pertinente	Ha più soldi Laura perché ha speso meno	Ha più soldi Marco	Totale allievi
f.a.	2	22	10	2	36
%	6	60	28	6	

Nonostante si ritenga, in generale, che un simile problema riveli subito la sua impossibilità, o, se si preferisce, la non pertinenza della domanda, abbiamo ottenuto un 34% di risposte contrarie. La maggior parte di questi allievi pensa che Laura, spendendo meno, si ritrovi alla fine con più soldi in tasca.

3. È stata coinvolta anche una classe seconda, per la quale è stato usato solo il problema «di Manuela» (vedere 4.2) adattato. I dati relativi non sono stati considerati in questo articolo.
4. Da un'idea di Bruno D'Amore; si veda ad esempio (D'Amore, 1999), pag. 111, ripreso in (D'Amore, 2003), pag. 21.

Soluzione: *«Ha più soldi in tasca Laura perché ha speso di meno»*.

Commento: *«Questo problema non è molto difficile perché chi spende di meno ha più soldi»*.

Una minoranza pensa che sia Marco ad avere più soldi (in generale, quindi anche alla fine) perché può permettersi di spendere di più.

Soluzione: *«Marco ha più soldi in tasca, può spendere di più, ha più soldi, prende più cose»*.

Commento: *«Secondo me non c'è il calcolo ed è abbastanza semplice»*.

Il calcolo: ecco un elemento fortemente presente nell'immagine mentale che gli allievi hanno del problema di matematica. Quando non c'è, o suscita disagio o lo si forza, realizzando così l'effetto «esigenza della giustificazione formale», per dirla con D'Amore[5]. Ecco un esempio:

«27–19=8 27–8=19 a Marco in tutto gli rimangono 8 fr e a Laura 19 fr».

L'allievo ha supposto che i due siano partiti con la stessa somma di franchi; perché proprio 27? Ma perché 27=19+8; anche il dato introdotto abusivamente viene così in un certo senso «giustificato».

1b) Dopo aver speso 65 franchi alla stazione di servizio e 670 franchi dal gommista, il signor Rossi va al bar dove beve un caffè e ne offre uno a un suo amico. Lascia al cameriere 70 centesimi [1 franco] di mancia. Quanto ha speso in totale?

Tabella 1b)

1b)	Non si può risolvere perché manca il prezzo del caffè	Non si può risolvere, senza giustificazione o con giustificazione non corretta	Risolve introducendo il dato mancante	Calcola la spesa tralasciando il caffè	Totale allievi
f.a.	11	4	3	16	34
%	32	12	9	47	

Circa un terzo degli allievi si limita a rispondere che manca un dato (il prezzo del caffè): risposta sicuramente accettabile, ma dettata dall'abitudine scolastica di considerare solo problemi con tutti i dati necessari per poter rispondere alla domanda. Solo una minoranza (3 allievi su 34) va oltre e si informa sul prezzo del caffè al bar e quindi risolve correttamente. Sappiamo che una delle differenze importanti tra il problema scolastico e il problema «reale» risiede appunto nel fatto che quest'ultimo si presenta il più delle volte senza dati (o con un numero insufficiente di dati). A differenza dei problemi «inventati» dagli insegnanti, i dati dei problemi reali esistono: basta andarli a cercare. Cercare dati è sicuramente anche un'attività formativa[6].

5. Si veda ad esempio (D'Amore, 2003), pag. 22.
6. Per un approfondimento, si veda (D'Amore, 2003), pag. 87.

Dei 3 allievi che hanno introdotto il prezzo del caffè, due hanno chiesto all’insegnante, mentre un terzo ha stabilito di fissare il prezzo a 70 centesimi, in modo da dare alla soluzione una «bella» struttura.

«85+670+(0,70 · 3)=757,10 In totale ha speso 757,10».

1c) Manuela sta organizzando la festicciola per il suo compleanno. Compera 30 paste a 2 franchi l’una, 30 lattine di bibita a 3,50 franchi l’una, 15 panini al prosciutto e 15 al salame. Quanti bimbi ha invitato?

Tabella 1c)

1c)	Non si può risolvere, con giustificazione pertinente	Non si può risolvere, senza giustificazione	Risponde 30 o 90 con giustificazione pertinente	Esegue un calcolo e ottiene 15 o 30 o 60 o 90 o 105	Risponde 30 o 15 perché «tutti i dati portano a 30 o a 15»	Totale allievi
f.a.	9	5	2	14	4	34
%	26	15	6	41	12	

Un terzo degli allievi risponde in modo accettabile: 9 allievi vedono l’impossibilità dovuta alla domanda non pertinente con i dati, mentre 2 allievi superano la difficoltà ipotizzando esplicitamente quante paste, lattine, panini prende ogni invitato.

A qualcuno dà fastidio il fatto che vi sono dati inutili.

Soluzione: *«Io non ho capito, cioè non so cosa fare»*.

Commento: *«Era molto difficile perché i bambini cosa c’entrano con i dolciumi?»*

Commento di un altro allievo: *«Lo trovo pieno di trabocchetti! Parlava di soldi e poi non c’entravano un bel niente»*.

La maggior parte non si accorge della non esistenza di una soluzione determinata e si lascia condurre dalla pratica scolastica o dal «buon senso».

Soluzione: *«Manuela ha invitato 30 bambini»*.

Commento: *«È stato facile perché tutti i dati portano a 30 bambini»*.

Ma ci sono anche i fantasiosi…

Soluzione: *«30+30+15+15=90*
Ha invitato 90 bambini».

Commento: *«Lo trovo abbastanza facile, ma mi sembra strano che abbia invitato 90 bambini»*.

… e pure i «dogmatici».

Soluzione: *«In questo problema non so il calcolo ma so la risposta. R: Manuela per il suo compleanno ha invitato 15 bambini»*.

Commento: *«Questo problema l’ho trovato molto difficile ma ce l’ho fatta»*.

Un allievo vuole a ogni costo usare tutti i dati del problema, si accorge che qualcosa non va e propone un aggiustamento del testo.

Soluzione: *«30 · 2 = 60   30 · 3,50 = 105*

Questo problema non si può fare, ma se il problema dicesse: ogni invitato ha mangiato, es. 2 paste e non ne sono rimaste, ecc.».

Commento: *«Questo problema è insensato, ma aggiungendo delle spiegazioni si potrebbe risolvere».*

Infine un allievo mostra una certa «verve» matematica: è l'unico che ipotizza l'esistenza di più soluzioni, anche se la cattiva abitudine scolastica gli fa scrivere che se vi sono più soluzioni il problema non è risolvibile: peccato.

Commento: *«Io credo che questo problema non si può fare perché i bambini possono essere meno di 30 e più di 15».*

4.2. Problemi con dati sovrabbondanti e incompatibili

2a) Dopo aver speso in un negozio franchi 5,70 [6], in un altro negozio 17,50[18] e 2 franchi di parcheggio, al signor Bernasconi rimangono in tasca 20 centesimi [1 franco]. Era partito da casa con 25 franchi. Quanto ha speso in totale?

Tabella 2a)

2a)	Calcola e rileva l'incompatibilità	Calcola e non si accorge dell'incompatibilità	Non capisce o sbaglia	Totale allievi
f.a.	12	12	10	34
%	35	35	30	

Le tre categorie di risposte incontrano circa la stessa frequenza (1/3). Chi rileva l'incompatibilità la esprime in modi diversi. Si va dalla risposta particolareggiata…

«Non si può fare perché io ho fatto 17,50+5,70+2,00 e mi è venuto 25,20 e dice che era partito con 25,00 e dice che gli rimane 20 centesimi perciò avrebbe 24,80 e non si può fare perché mi viene 25,20».

… alle risposte sbrigative.

«Non funziona perché nel calcolo viene un numero più grande di quello che dovrebbe essere».

«Non si può fare perché i centesimi sono sbagliati».

«Il calcolo è impossibile perché arriva il risultato sotto zero».

Chi non si accorge dell'incompatibilità si accontenta di un solo iter risolutivo: o addiziona le tre spese o deduce dalla somma iniziale ciò che rimane alla fine.

2b) Marco va al supermercato con 50 franchi in tasca. Spende franchi 8,30 [8] in pasticceria e franchi 25,70 [26] in macelleria. Alla cassa dà la sua banconota da 50 franchi e riceve il resto di franchi 15,50 [15]. Quanto ha speso in tutto?

Tabella 2b)

2b)	Calcola e rileva l'incompatibilità	Calcola e non si accorge dell'incompatibilità	Non capisce o sbaglia	Totale allievi
f.a.	14	12	8	34
%	41	35	24	

Rispetto al problema 2a), l'equilibrio fra le tre (stesse) categorie delle risposte si spezza a favore di chi rileva correttamente l'incompatibilità dei dati. Vediamo alcune risposte significative.

Soluzione: *«8,30+25,70=34,00 50–15,50=34,50*
Nella cassa vengono 50 centesimi in più».

Commento: *«Lo trovo un po' difficile perché è a trabocchetto».*

Commento di un altro allievo: *«Questo problema non si può risolvere perché è sbagliato il resto».*

È interessante vedere traccia di una sofferenza interna data dal fatto che non si può giungere alla soluzione. Come già detto, ciò deriva dall'abitudine scolastica.

Soluzione: *«In questo problema hanno dato il resto sbagliato e quindi non posso risolverlo».*

Commento: *«Questo problema lo trovo molto difficile perché devi fare combaciare i numeri e poi trovi il risultato».*

Come dire: se i dati non «combaciano», sto male.

Risultano infine preoccupanti alcune soluzioni sbagliate, come per esempio la seguente.

Soluzione: *«26–8=18 In tutto ha speso 18 franchi»*

Commento: *«Sono rimasta tanto a ragionare tanto* [sic!] *ma dopo ce l'ho fatta, era molto difficile».*

5. Conclusioni

Non può esserci che una conclusione, che suona anche da esortazione agli insegnanti perché propongano più spesso e con molta cura «veri» problemi. Oltre ai soliti esercizi (detti impropriamente problemi) che propongono un insieme di dati necessari e sufficienti, schemi risolutivi obbligati conosciuti dagli allievi e soluzioni uniche, occorre proporre in classe situazioni nuove, alla portata degli allievi ma che, per essere risolte – per rispondere cioè ad alcuni interrogativi esplicitamente o implicitamente presenti nella situazione stessa – richiedono di organizzare diversamente le conoscenze acquisite o di spingersi un po' oltre le stesse. Con riferimento a Vygotskij[7], occorre fare agire gli allievi nella *zona di sviluppo prossimale*, in quell'ambito, cioè, in cui gli allievi possono mobilitare determinate loro conoscenze e, se necessario con l'aiuto dell'insegnante, giungere alla costruzione di nuove conoscenze.

7. Lev Semënovič Vygotskij (1896-1934), psicologo bielorusso.

Per fare ciò è però indispensabile staccarsi dai tradizionali esercizi e considerare problemi i cui iter risolutivi non siano del tutto conosciuti dagli allievi, i cui dati non siano sempre necessari e sufficienti alla risoluzione, le cui soluzioni non siano necessariamente univoche, le cui domande non siano sempre pertinenti e nemmeno sempre esplicitate. Procedendo così si dà agli allievi una formazione matematica decisamente migliore, la possibilità di uscire dal tradizionale «problema scolastico» e di aprirsi verso problemi sempre più vicini a quelli della vita reale.

Anche l'immagine della matematica come disciplina scolastica ne può trarre grande beneficio e perdere non pochi di quei luoghi comuni che contribuiscono a dipingerla come un «male necessario», una disciplina tecnica senza alcun valore culturale.

Bibliografia

D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (2003). *Problemi di matematica nella scuola primaria*. Bologna: Pitagora.

Polya G. (1945). How solve it. [Traduzione italiana: Milano, Feltrinelli, 1967].

3. Percorso didattico sui quadrilateri

Sara Cataldi[1]

In this paper, we present an educational itinerary for the discovery of the properties of quadrilaterals and their classification in the first class of the secondary school. Furthermore, we propose a card game that can be used to summarize the activity and to verify and consolidate the competences developed by the pupils.

1. Cenni teorici

È indubbia l'importanza di rendere gli allievi attori nel loro processo di apprendimento.

Lo scriveva già Jean-Jacques Rousseau nel 1762 nella sua opera pedagogica *Émile, ou De l'éducation:*

«Nulla egli sappia [l'allievo] per averlo udito da voi, ma solo per averlo compreso da sé; non impari la scienza: la scopra. Se nella sua mente giungerete a sostituire l'autorità alla ragione, non ragionerà più; non sarà più che lo zimbello dell'opinione altrui».

Oggi queste parole appaiono ancor più dense di significato e suonano come un consiglio prezioso per gli insegnanti che spesso si vedono costretti a ripiegare su un insegnamento cattedratico. Eppure la società richede spiriti liberi, intraprendenti, autonomi, o sbaglio?

Cito ancora una massima di Bernard Sarrazy del Dipartimento di scienze dell'educazione dell'Università di Bordeaux:

«Credimi, dice il maestro all'allievo, osa utilizzare il tuo proprio sapere e imparerai».

E ancora Guy Brousseau, medaglia Klein:

«Affinché l'allievo costruisca la propria conoscenza, deve occuparsi personalmente della risoluzione del problema che gli è stato proposto nella situazione didattica; deve cioè implicarsi in tale attività.»

Il percorso didattico che propongo si prefigge appunto di portare gli allievi di prima media a costruire loro stessi la classificazione dei quadrilateri attraverso la scoperta delle proprietà di questi poligoni.

1. Insegnante di matematica e scienze alla Scuola media di Minusio, membro del comitato della SMASI.

Siamo nell'ambito della costruzione di un concetto. Si sa che tale costruzione avviene nel tempo attraverso la formazione e lo sviluppo di immagini mentali[2]. All'inizio l'immagine è forzatamente legata a situazioni particolari e contiene due tipi di informazioni: elementi varianti ed elementi invarianti. L'immagine viene rinforzata nel tempo dal susseguirsi di esperienze, rappresentazioni, esercizi risolti ed accettati dall'insegnante come corretti. Per contro, si ha uno sviluppo nel momento in cui una nuova sollecitazione risulta non coerente con l'immagine stessa. L'allievo vive ciò che nella letteratura viene indicato con l'espressione «conflitto cognitivo». Con l'aiuto dell'insegnante (in certi casi anche da solo), l'allievo modifica l'immagine stessa, la amplifica, la fa evolvere, conservando e rinforzando gli elementi invarianti ed eliminando a poco a poco quelli varianti. Il processo può svolgersi in più tappe, ciascuna delle quali ha origine appunto da un conflitto, fino a raggiungere l'immagine matematicamente corretta, detta anche «modello adeguato» del concetto. È quindi importante mettere gli allievi nelle migliori condizioni possibili affinché possano percorrere in prima persona questo iter, cercando da un lato di non bruciare le tappe (ogni crescita ha bisogno di tempo) e dall'altro di non lasciar cristallizzare immagini che non hanno ancora raggiunto lo stato di modello adeguato. Queste immagini, errate o incomplete, prendono il nome di «misconcezioni»[3] e, se sono fortemente radicate, risulta molto difficile correggerle.

Nell'apprendimento dei concetti relativi alle figure geometriche, i loro modelli possono essere rappresentazioni figurali accompagnate da descrizioni dell'oggetto attraverso l'enunciazione delle sue proprietà invarianti (es: lati paralleli, lati congruenti, diagonali perpendicolari, ...). L'insieme di proprietà (invarianti) necessarie e sufficienti costituisce ciò che il matematico chiama «definizione». In questo ambito è importante che gli allievi si rendano conto che un oggetto matematico può avere più di una definizione corretta. Saper riconoscere definizioni corrette equivalenti, è un obiettivo importante nella conoscenza dei concetti matematici ed è quello che mi sono prefissata programmando le attività che mi accingo a presentare. In secondo luogo ho cercato di condurre gli allievi a capire la necessità di individuare e condividere un lessico univoco. Ci occupiamo dell'insieme dei quadrilateri. Una volta individuate le proprietà e identificate quelle comuni a più quadrilateri, gli allievi formano gruppi di figure che verranno usati per costruire la classificazione.

A fine percorso viene proposto un gioco di carte, quale momento riassuntivo, di verifica e di consolidamento delle conoscenze acquisite.

2. Prerequisiti

Per affrontare le attività proposte, è necessario che gli allievi abbiano già acquisito i concetti di parallelismo, di perpendicolarità, di angolo retto e di congruenza geometrica.

2. Si veda D'Amore B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora, 145-165.
3. Si veda Sbaragli S. (2005). Misconcezioni «inevitabili» e misconcezioni «evitabili». *La matematica e la sua didattica.* Bologna: Pitagora, 1, 57-71.

3. Obiettivi

Il percorso ha i seguenti obiettivi:
- individuare le proprietà caratteristiche dei quadrilateri,
- scoprire come alcune proprietà siano comuni a diversi quadrilateri,
- raggruppare (classificare) i quadrilateri in base alle loro proprietà invarianti,
- definire in più modi uno stesso quadrilatero.

4. Descrizione del percorso

La durata dell'unità didattica è di 5-6 ore lezione così suddivise:
- Scheda 1: «I quadrilateri dispettosi», 1 ora lezione
- Scheda 2: Tabella descrittiva, 1 ora lezione
- Schede 3 e 4: «Famiglie dei quadrilateri» e «Famiglie dei quadrilateri, classificazione», 2 ore lezione
- Gioco di carte: «Gioco dei quadrilateri», 1-2 ore lezione

4.1. Attività 1

Gli allievi vengono suddivisi in gruppi di 4 e ad ogni gruppo vengono consegnate 4 schede e una busta. Ogni busta contiene 4 modellini di quadrilateri identici fra loro, uno per ogni allievo (rappresentanti un quadrato, un rettangolo, un rombo, un parallelogrammo qualunque o un trapezio), ritagliati da un cartoncino.

Agli allievi di ogni gruppo viene chiesto di discutere fra loro per scrivere sulla scheda, di comune accordo, una descrizione della figura ricevuta, senza però indicarne il nome.

A questo punto i gruppi si scambiano le schede e, in base alla descrizione presente sulla scheda ricevuta, cercano di scoprire di quale figura si tratta. Una volta individuata la figura, ne scrivono il nome e ne fanno un disegno.

Infine ogni scheda ritorna al proprietario. Ogni allievo incolla sul foglio la sua figura e verifica la correttezza del nome e del disegno indicato dal compagno dell'altro gruppo.

Scheda 1: i quadrilateri dispettosi[4]

Gruppo 1: ______________________________

Descrizione della figura misteriosa:

____

4. Le schede sono riprodotte fedelmente, tranne gli spazi da completare, che sono stati ridotti a una sola riga.

Gruppo2:

Nome della figura misteriosa:

Disegno della figura misteriosa:

Gruppo 1:
la figura misteriosa era

(incolla qui la tua figura)

Generalmente almeno un gruppo non indovina la figura misteriosa. A questo punto si discute, in forma plenaria, per individuare il motivo per il quale la figura non è stata individuata in modo corretto. Nel corso della discussione solitamente emerge che i motivi principali dell'insuccesso sono da ricondurre ad una descrizione non del tutto corretta, non comprensibile dal punto di vista lessicale, oppure non completa (non univoca).

4.2. Attività 2

Dall'attività precedente, si riscontra la necessità di individuare proprietà geometriche e di utilizzare una terminologia semplice, completa e condivisa da tutti per potere descrivere in modo univoco uno specifico quadrilatero. Coinvolgendo gli allievi si individuano di comune accordo le proprietà che si ritiene necessario considerare per descrivere i vari quadrilateri. A questo punto si consegna agli allievi la scheda 2 da compilare e successivamente se ne verifica, in comune, la correttezza.

Scheda 2: tabella

Gruppo:

Inserisci una crocetta in ogni casella corrispondente a una proprietà che pensi abbia la figura.

Figure / **Proprietà**	4 lati	4 lati congruenti	Lati opposti paralleli e congruenti	Almeno una coppia di lati paralleli	Due coppie di lati paralleli	Angoli opposti congruenti	4 angoli retti	2 diagonali congruenti	2 diagonali perpendicolari	2 diagonali che si intersecano a metà
Rettangolo										
Rombo										
Quadrato										
Parallelogr. qualunque										
Trapezio isoscele										
Trapezio rettangolo										
Trapezio scaleno										
Aquilone										
Altri quadrilateri										

4.3. Attività 3 e 4

A partire dalla scheda 2 è possibile costruire «passaporti» che riassumano a parole e mediante l'uso di immagini le proprietà necessarie per definire un dato quadrilatero. Le tre figure poste accanto ad ogni passaporto sono volutamente disegnate anche in posizioni non convenzionali per evitare misconcezioni.

Dal confronto dei vari passaporti emerge che fra le proprietà considerate ve ne sono alcune comuni a più quadrilateri, che possono quindi essere sfruttate per formare gruppi di figure. In questo modo gli allievi arrivano a concludere, ad esempio, che un quadrato è anche un rettangolo ed è anche un rombo (mentre non è necessariamente vero l'inverso).

A questo punto gli allievi sono pronti per costruire la classificazione finale dei quadrilateri (scheda 4).

Scheda 3: le famiglie dei quadrilateri

«Ciao ragazzi, sono il **quadrato**. Ho perso il mio passaporto e non so più quali sono i miei parenti fra i quadrilateri. Mi aiutate a ritrovarli? Grazie!»

Passaporto del QUADRATO (caratteristiche)
– lati
– angoli
– diagonali

Pensate che il rettangolo possa essere un parente del quadrato?...

Passaporto del RETTANGOLO (caratteristiche)
- lati
- angoli
- diagonali

Il rombo e il quadrato hanno qualche proprietà in comune?...

Passaporto del ROMBO (caratteristiche)
- lati
- angoli
- diagonali

Cosa puoi concludere pensando al quadrato, al rettangolo e al rombo?

Come rappresenteresti la situazione?

Conclusioni

«Ciao ragazzi, sono sempre io, il **quadrato**. Ora che ho scoperto di essere un parente del **rettangolo** e del **rombo**, vorrei scoprire se ho altri parenti fra i quadrilateri. Aiutatemi, per favore!»

Vediamo cosa conosci del parallelogrammo qualunque:

Passaporto del parallelogrammo qualunque (caratteristiche)
- lati
- angoli
- diagonali

Cosa hanno in comune i quadrati, i rombi, i rettangoli e i parallelogrammi qualunque?

Conclusioni

Quali trapezi conosci?

1) **TRAPEZIO** ______________________

Caratteristica

____

2) **TRAPEZIO** ______________________

Caratteristica

____

3) **TRAPEZIO** ______________________

Caratteristica

____

Passaporto del TRAPEZIO (caratteristiche)
– lati
– angoli
– diagonali

Conclusioni

____

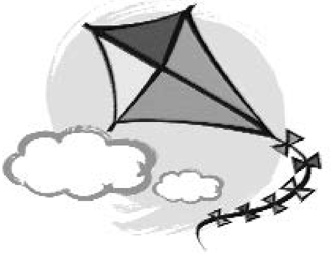
Pensi che i parallelogrammi siano dei trapezi?

____

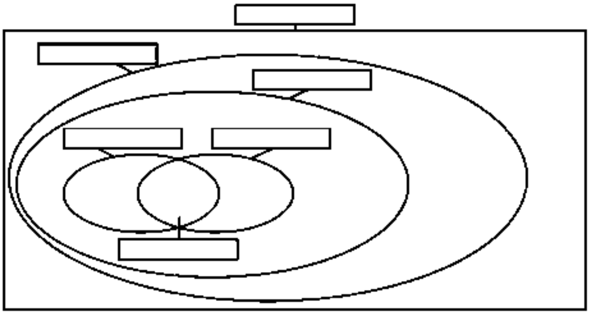
I trapezi sono parallelogrammi?

____

Dove metteresti tutte le figure con **4 lati**, ma che **non hanno alcuna coppia di lati paralleli**? Ad esempio, di chi è parente secondo te l’aquilone?



Scheda 4: famiglie di quadrilateri, classificazione



5. Gioco di carte: gioco dei quadrilateri

È possibile proporre il riassunto di un percorso didattico attraverso un gioco, coinvolgendo così, di nuovo in prima persona, gli allievi?

Questa è la domanda che mi sono posta e che mi ha portato a realizzare un gioco di carte quale momento conclusivo e riassuntivo di un percorso didattico: il percorso che porta gli allievi di prima media alla classificazione dei quadrilateri.

Il gioco vuole essere anche un tentativo di dare agli allievi una visione differente della matematica, quale materia che può essere appresa non solo grazie agli esercizi scolastici, bensì anche attraverso il gioco.

Il gioco ha i seguenti obiettivi:

– riconoscere le proprietà specifiche dei diversi quadrilateri
– abbinare le proprietà geometriche ai rispettivi quadrilateri
– consolidare la conoscenza della classificazione dei quadrilateri
– stimolare la collaborazione fra gli allievi

5.1. Descrizione delle carte da gioco

Occorrono 2 mazzi di carte, ciascuno composto di 20 carte:

– 10 carte «Immagine»:
carte rappresentanti diversi quadrilateri
(quadrato; rettangolo; rombo; romboide;
trapezio isoscele; trapezio scaleno; trapezio rettangolo;
aquilone; deltoide; quadrilatero generico)

– 10 carte «Proprietà»:
carte che indicano proprietà geometriche
(4 lati; 4 lati congruenti; almeno una coppia di lati paralleli;
2 coppie di lati paralleli; lati opposti paralleli e congruenti;
4 angoli retti; angoli opposti congruenti; diagonali congruenti;
diagonali che si intersecano a metà; diagonali perpendicolari)

5.2. Regole del gioco

Si tratta di un gioco a coppie nel quale un giocatore distribuisce 3 carte a testa (da tenere in mano) e poi dispone 4 carte sul tavolo scoperte (disposte in modo che si veda la figura o la proprietà indicata).

Ogni giocatore gioca a turno una delle carte che ha in mano. Se la carta usata indica una proprietà e sul tavolo è presente una figura che possiede tale proprietà, allora il giocatore può prendere la carta dal tavolo e metterla da parte insieme alla sua.

Allo stesso modo, se la carta giocata è una figura e sul tavolo è presente una carta con indicata una proprietà valida per la figura, il giocatore può prendere la carta dal tavolo e metterla da parte insieme alla sua.

Attenzione: con una carta «Immagine» si può prendere dal tavolo al massimo una carta «Proprietà» e viceversa.

Se con la carta giocata non si può prendere nessuna carta dal tavolo, allora questa carta viene messa sul tavolo a fianco delle altre.

Quando entrambi i giocatori hanno giocato a turno le tre carte che avevano in mano, vengono distribuite nuovamente tre carte a testa e il gioco continua fino a quando tutte le carte saranno state giocate.

Alla fine del gioco, le carte che sono rimaste sul tavolo verranno prese dal giocatore che per ultimo è riuscito a prendere una carta dal tavolo.

Assegnazione dei punti:

a) Il giocatore che alla fine della partita ha messo da parte il numero maggiore di carte riceve un punto
b) Quando un giocatore riesce a prendere dal tavolo una carta scoperta che era rimasta da sola, riceve un punto

Vince il giocatore che ha totalizzato più punti. Buon divertimento!

5.3. Esperienza in alcune classi di prima media

Ho proposto il gioco a diverse classi di prima media, quale riassunto del percorso di classificazione dei quadrilateri, e alla fine ho chiesto agli allievi di descrivere le loro impressioni. Il gioco ha riscontrato un buon gradimento e alcuni allievi hanno proposto anche delle varianti per l’uso delle carte, quali memory o rubamazzo. Ecco ulteriori commenti.

È stato bello, aiuta a studiare, io lo farei fare più spesso

Il gioco è molto interessante perchè può aiutare i ragazzi che non sono molto preparati con questo argomento.
Poi si può sempre migliorare anche gli sfondi.

Secondo me questo gioco è molto conveniente!

Questo gioco è interessante per la matematica, devi giocare bene a scopa, ma si potrebbe gioare a scala 40.
Il gioco è un ripasso di quello che abbiamo fatto quest'anno e si vede se un ragazzo è stato attento.

Ce jeu de carte est très Bien car il nous apprends la géometrie en jouent.

5.4. Commento finale

Ho potuto constatare che il gioco dei quadrilateri, svolto alla fine del percorso proposto, è risultato essere un'efficace modalità riassuntiva. Il gioco ha infatti suscitato negli allievi, dal più al meno abile, la necessità e la voglia di apprendere appieno le proprietà invarianti dei quadrilateri.

Gli allievi più deboli chiedevano spiegazioni ai compagni più abili e in questo modo colmavano le lacune. Gli allievi più abili, a loro volta, avevano l'opportunità di affinare le loro conoscenze e strategie di gioco e di condividerle con i compagni.

Fra gli allievi si è instaurato così un clima di cooperazione con un continuo scambio di informazioni e anche questo ha portato a un consolidamento globale delle conoscenze acquisite dalla classe.

4. Enumerazione e organizzazione nella scuola dell'infanzia[1]

Angela Carmeci

In this paper, we present the results of a research about the relationship between the organization skills of preschoolers and their ability in the enumeration of objects. The research has been carried out in four different sections of a kindergarten in Ticino and has involved 24 pupils. The results, in addition to the well-known correlation between proficiency in the enumeration of objects and regular spatial lay-out, indicate a strong correlation between organization and enumeration competences, also in case of random lay-out.

1. Premessa

Il presente lavoro è dedicato a un ambito purtroppo poco approfondito nella scuola dell'infanzia perché ritenuto eccessivamente arduo da affrontare con bambini di questo livello scolastico. Sono invece molte le teorie a sostegno del fatto che i bambini possiedono capacità matematiche precoci. È allora importante che l'insegnante sia cosciente dell'esistenza di queste potenzialità e cerchi di svilupparle proponendo situazioni didattiche adeguate.

Le esperienze maturate durante gli anni di studio all'ASP, grazie ai corsi e alle pratiche professionali, mi hanno permesso di conoscere alcuni aspetti teorici e una vasta gamma di modalità didattiche. Ritengo dunque interessante presentare questo argomento ai futuri docenti e a chi già insegna, per far sì che l'educazione matematica sia convenientemente realizzata fin dalla scuola dell'infanzia. L'idea di sviluppare la ricerca attorno al tema dell'enumerazione è scaturita da due riflessioni: da un lato questa attività è molto presente nella vita dei bambini, sia scolastica che extrascolastica; dall'altro si constata che spesso nell'analizzare gli errori commessi dai bambini in questo ambito si giunge a conclusioni affrettate. Per esempio, l'enumerazione viene sì associata al conteggio, ma spesso si crede che dipenda soprattutto dalla conoscenza della sequenza dei numeri. Come afferma Briand (1999) ciò non è sempre vero; infatti esistono situazioni dove l'enumerazione avviene senza conteggio. È quindi possibile asserire che attività di questo genere possano essere proposte presto ai bambini, anche quando non possiedono ancora capacità numeriche, favorendo così lo sviluppo delle loro strategie relative alla risoluzione di problemi. Come afferma Margolinas (2008), si ritiene che i bambini aventi buone capacità organizzative presentino meno difficoltà nello svolgere l'enumerazione, anche quando gli elementi della collezione si trovano disposti in modo casuale.

1. Si tratta di una sintesi del lavoro di diploma dell'ex-allieva dell'ASP Angela Carmeci, eseguito con la docente di riferimento Silvia Sbaragli, a conclusione dell'anno accademico 2008-2009.

Ho proposto quindi un'attività nella quale l'enumerazione interviene da sola, come suggerisce Briand (1999), non legata quindi ad altre conoscenze, quali ad esempio la sequenza dei numeri. Ho posto l'attenzione sulla disposizione degli oggetti, arrivando così a osservare tre elementi:

– quando questa è ordinata, rende il compito più facile;
– chi possiede buone capacità organizzative riscontra meno difficoltà, anche quando la disposizione è casuale;
– le strategie di ogni bambino sono differenti da quelle degli altri.

Le risposte alle domande di questa ricerca appoggiano sull'analisi dei risultati dell'attività proposta a un campione di riferimento di 24 bambini appartenenti a 4 sezioni: 12 aventi buone capacità organizzative e 12 meno (a detta delle insegnanti).

Un altro intento è dunque poter trasmettere ai docenti l'idea che, lavorando su questa particolare capacità, si possono aiutare i bambini a sviluppare strategie che concernono l'enumerazione e a rinforzare alcune conoscenze, fra le quali anche la corrispondenza termine a termine.

2. Quadro teorico

2.1. Introduzione

È importante sottolineare innanzitutto che, come scrive D'Amore (Marazzani, 2007, p. 13), affinché avvenga una vera costruzione di apprendimento concettuale il bambino deve essere coinvolto responsabilmente in tale costruzione. Più precisamente si intende che l'acquisizione di un determinato concetto, offerto come contenuto di riflessione e di scoperta, è possibile solo dal momento in cui esso è confacente al bisogno di apprendere. Per dirla con Vygotsky, è dunque necessario che il bambino si trovi nella «zona prossimale di sviluppo».

«È tra la zona di sviluppo effettivo e quella potenziale, in quella che si chiama «zona di sviluppo prossimale», che si deve giocare l'attività didattica» (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, 2004). In quest'area infatti vi sono quelle funzioni che non sono ancora mature nel bambino ma che sono in condizione di maturazione, se assistiti da giusti apporti dall'esterno.

«Dunque, la zona operativa della didattica è oltre la zona effettiva, ma prima della potenziale, cioè la zona dove l'apprendente può costruire conoscenza» (D'Amore et al., 2004).

Prima di procedere a un nuovo insegnamento, o comunque a una messa in situazione di lavoro, sarebbe didatticamente opportuno sapere quali convinzioni i bambini potrebbero avere riguardo a un dato argomento.

La competenza è la capacità di coordinare conoscenze, abilità e disposizioni interne motivazionali e affettive. Una stessa competenza, per il fatto di essere tale, si deve manifestare in situazioni differenti.

«È importante collegare l'idea di competenza alla componente relativa agli atteggiamenti e bisogna attribuirla allo studente (relativa cioè alla fase dell'apprendimento) e non all'insegnante (relativa cioè alla fase dell'insegnamento)» (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2003).

Inoltre, come afferma D'Amore (2004, pp. 53-79), è didatticamente vantaggioso fare in modo che il modello mentale (interno) che il bambino si è creato venga portato all'esterno. Venendo dunque a conoscenza del modello di ogni allievo, si ritiene che l'insegnante possa attivare strategie didattiche personalizzate e modificare così i modelli non perfettamente adeguati. Vi è però una difficoltà oggettiva a far emergere questo modello mentale nascosto. Per questo motivo si è giunti alla necessità di trovare strategie che mirino ad attivare un processo di esternazione del bambino dal contesto attuale, spingendolo a portare all'esterno ciò che ha in profondità.

2.2. Aspetti teorici legati al tema

È necessario dapprima definire con precisione il significato dei principali concetti legati ai due principali: enumerazione e conteggio.

2.2.1. L'enumerazione

Come spiega Briand[2] (1999), l'enumerazione è l'atto di organizzare una collezione che permette di percorrerla in modo sistematico e dunque controllato e ordinato. Essa non è «naturale» ma si costruisce, è una conoscenza che si riferisce all'esplorazione della collezione e che condiziona completamente il corretto svolgimento dell'attività. Ordinare significa scegliere un primo elemento e il suo successivo, mentre controllare vuol dire conservare la memoria della scelta precedente, sapere che si è percorso l'intera collezione. Per controllare una situazione di conteggio, il bambino deve mettere in atto questa conoscenza. L'enumerazione è necessaria al conteggio, ma non dipende dalla conoscenza della sequenza dei termini. Inoltre richiama la capacità di effettuare una corrispondenza biunivoca. La maggior parte dei bambini che si trovano a dover enumerare una collezione piuttosto numerosa procede trattando separatamente due sotto-collezioni: una meno numerosa, e dunque più facile da enumerare, e una più numerosa che richiede il ricorso alle due organizzazioni soggiacenti alla logica grafica, ovvero le righe e le colonne. Il riconoscimento di queste due organizzazioni permette di capire che la disposizione dei punti da enumerare è da considerare come un gioco di variabili e dunque tanto più questa disposizione è vicina a un'organizzazione facile da identificare come quella delle righe e colonne, quanto più l'enumerazione è semplice.

2.2.2. Il conteggio

Il conteggio è la coordinazione tra l'enumerazione e la conta, questa abilità di contare prevede 3 sottoabilità:

- conoscere vocaboli specifici (nomi dei numeri), ovvero conoscere la successione numerica;
- collegare ogni parola-numero con ciascun oggetto contato, più precisamente effettuare la corrispondenza biunivoca;
- dire l'ultima parola-numero come numero totale degli oggetti: cardinalità.

2. Vedere Margolinas, C. (2008). Ricerca e sviluppo per l'insegnamento della matematica nella scuola elementare: il caso dell'enumerazione. Atti del convegno di didattica della matematica 2008. Alta scuola pedagogica. p. 42.

Per fare ciò il bambino deve capire che l'ultima parola-numero detta nel conteggio corrisponde alla numerosità dell'insieme; tale capacità è acquisita verso i 5 anni. D'Amore (1994) individua tre comportamenti cognitivo-strategici necessari all'atto del contare:

– sapere che c'è un numero da cui iniziare e identificarlo con la parola «uno»;
– sapere che nel contare si devono usare i nomi dei numeri;
– conoscere questi nomi da usare ognuno al proprio posto, quello giusto.

Da parte sua, Briand (1999) rileva otto tappe essenziali nell'allievo:

– essere capace di distinguere due elementi diversi di un dato insieme;
– scegliere un elemento di una collezione;
– enunciare un termine («uno» o il successivo in una successione di termini-numeri);
– conservare la memoria della collezione degli elementi già scelti;
– conoscere la collezione degli oggetti non ancora scelti;
– ricominciare (per la collezione degli oggetti non ancora scelti) 2-3-4-5… finché la collezione degli oggetti da scegliere non è vuota;
– sapere che si è scelto l'ultimo elemento;
– enunciare l'ultimo termine-numero.

2.3. L'enumerazione e il bambino

I bambini si trovano già a partire dai 2-3 anni a confronto con situazioni che richiedono l'enumerazione. Questa può presentarsi da sola o associata ad altri elementi: è il caso delle variabili che portano ai problemi di organizzazione. Un tempo, come afferma Margolinas (2008), i bambini erano messi in situazione di dover gestire un gran numero di oggetti con uno spazio determinato (es. la selezione delle lenticchie). Questo faceva sì che le conoscenze specifiche, relative all'organizzazione, venivano imparate da tutti i bambini in situazioni sociali banali. Con l'evoluzione delle tecniche industriali, parecchie di queste attività sono scomparse e dunque, molto probabilmente, è al momento dell'ingresso nella scuola dell'infanzia che il bambino odierno entra per la prima volta in contatto con situazioni di questo genere.

3. Domande e ipotesi di ricerca

La mia attenzione si è focalizzata sulle variabili che influenzano la riuscita del bambino nella risoluzione di situazioni che richiedono l'enumerazione. Come sostiene l'autore Briand (1999), la disposizione dei punti da enumerare è da considerare come un gioco di variabili, quindi quanto più questa è vicina a un'organizzazione facile da identificare, come quella delle «righe e colonne», tanto più l'enumerazione è semplice. Ecco le domande della mia ricerca:

D.1 Disporre gli oggetti da considerare in file orizzontali e verticali invece di disporli in ordine casuale facilita il bambino nell'eseguire l'enumerazione?

D.2 È vero che i bambini con buone capacità organizzative incontrano meno difficoltà quando si trovano a confronto con l'enumerazione, anche quando essa presenta oggetti disposti non in righe e colonne?

D.3 Quali sono le strategie che mettono in atto i bambini della scuola dell'infanzia quando viene chiesto loro di enumerare raccolte di oggetti?

In base alla mia esperienza e alle nozioni teoriche considerate in precedenza, ipotizzo che:

I.1 La disposizione ordinata (righe e colonne) degli oggetti da considerare nel processo di enumerazione permette al bambino di non commettere errori, o di commetterne meno, rispetto a una disposizione casuale.

I.2 Nell'enumerare oggetti, anche quando questi sono disposti senza un determinato ordine prestabilito, i bambini con buone capacità organizzative commettono meno errori rispetto a quelli che possiedono minore capacità organizzativa.

I.3 Diversi bambini confrontati con il medesimo compito presentano strategie differenti che dipendono dal proprio modo di organizzarsi.

4. Situazione e metodologia di ricerca

4.1. Contesto

La ricerca è stata svolta in 4 sezioni di Scuola dell'Infanzia del Canton Ticino, unicamente con il terzo livello, dunque con bambini di età compresa tra i 5 e i 6 anni. Più precisamente mi sono recata nelle seguenti sedi: Agno, Castelrotto, Viganello-Albonago e Pazzallo, scelte casualmente fra quelle del Luganese.

4.2. Metodologia

Per trovare risposta alle domande della ricerca, ho pensato di svolgere un'unica attività suddivisa in due sottofasi, proposte nello stesso modo a tutti i 24 bambini. Durante lo svolgimento dell'attività i bambini sono stati ripresi con la telecamera e da parte mia non è stato fatto alcun intervento che potesse influenzarli. Inoltre, al termine, ho posto loro alcune domande per far sì che tentassero di esplicitare le strategie messe in atto. Questa richiesta di far emergere il modello interno risulta però difficile da realizzare (D'Amore, 1999, pp. 155-159): per questo motivo non ho insistito in modo particolare nei casi in cui i bambini non sapevano rispondere. È stato però molto interessante ascoltare le risposte di coloro che sono stati in grado di esplicitare i procedimenti e/o le sensazioni.

4.2.1. Tipo di ricerca

Ho deciso di intraprendere una ricerca qualitativa (usando strumenti non strutturati che permettono di rilevare materiale verbale, visuale e descrittivo) perché il mio scopo è di comprendere meglio la realtà studiata.

4.2.2. Limiti della ricerca

Il carattere qualitativo non permette di estrapolare i risultati a una popolazione più ampia. Ritengo però che i miei risultati possano essere un punto di partenza per ricerche più approfondite.

5. Descrizione delle fasi di ricerca

La raccolta dei dati si è svolta in due momenti. Il primo prevedeva l'analisi dei comportamenti dei bambini confrontati con l'enumerazione di una collezione con elementi posizionati in righe e colonne. Nel secondo, veniva richiesto il medesimo compito di enumerazione ma con gli oggetti disposti in modo casuale. Questi due momenti sono stati così pensati per poter confutare o corroborare le ipotesi alla base della ricerca:

– capire se una buona capacità organizzativa può aiutare nella risoluzione del compito;
– rilevare se l'ipotesi relativa alla disposizione degli oggetti sia valida o meno.

Per evitare che l'agire dei bambini fosse disturbato e/o influenzato dai compagni, l'attività è stata svolta singolarmente, in un luogo separato dal resto del gruppo. Inoltre, come già detto, al termine di ognuno dei due momenti sono state poste ai bambini alcune domande e, come precedentemente dichiarato, ogni singolo bambino è stato filmato; ciò ha permesso di ripercorrere l'attività di ognuno e di capire meglio le strategie messe in atto.

6. Risultati della ricerca e relative interpretazioni

Sono stati presi in considerazione i risultati di tutti i 24 bambini del campione. Per facilitare l'analisi presento i risultati e le relative interpretazioni considerando separatamente le due fasi dell'attività. I dati raccolti riguardo all'esecuzione del compito sono stati accompagnati dalle risposte dei bambini ad alcune domande poste al termine di ciascuno dei due momenti, per meglio capire se nell'eseguire l'attività fossero state messe in atto determinate strategie e in tal caso se queste fossero state utilizzate dai bambini consapevolmente o no.

6.1. Fase 1: «Mettere i ciondolini nelle scatolette»

Ogni bambino ha a disposizione 12 ciondolini e 12 scatolette di cartone chiuse da un pezzo di stoffa con un buco che non permette di visualizzare il contenuto. Deve inserire, attraverso il buco, un ciondolino in ogni scatoletta. Le scatolette sono disposte seguendo un allineamento 4x3.

L'analisi dei risultati renderà possibile una prima conclusione sulla riuscita dell'enumerazione con elementi disposti in ordine – per righe e per colonne – e una rilevazione delle strategie messe in atto dai bambini.

6.1.1. Correttezza nell'esecuzione dell'enumerazione

18 bambini (su 24) hanno eseguito correttamente l'enumerazione dei 12 elementi della collezione, disposti in righe e colonne: 9 bambini con buone capacità organizzative (secondo quanto asserito dalle insegnanti) e 9 con minori capacità. Dei 6 bambini che hanno commesso errori durante l'enumerazione, esattamente 3 hanno buone capacità organizzative. È però interessante notare, come figura nella tabella sottostante, la differenza che vi è tra le diverse sezioni prese in analisi; nelle prime due sezioni sono più bambini aventi meno capacità organizzative a svolgere correttamente il compito rispetto a coloro che possiederebbero maggiormente queste capacità (l'interpretazione da parte delle insegnanti relativa alle buone capacità organizzative corrisponde alla realtà?).

Nella terza e quarta sezione i risultati sono inversi; sono di più i bambini dichiarati con buone capacità organizzative a enumerare in modo corretto.

Tabella 6.1.1. Risultati relativi alla corretta enumerazione nelle diverse sezioni

	bambini III livello con buone capacità organizzative	bambini III livello con minore capacità organizzativa
Prima sezione	1	3
Seconda sezione	2	3
Terza sezione	3	2
Quarta sezione	3	1

6.1.2. Le strategie attuate

Presento di seguito i risultati riguardanti l'organizzazione messa in atto dai 18 bambini che hanno enumerato in modo corretto gli elementi della collezione. Di questi, 11 hanno messo in atto un'organizzazione di tipo «per righe e colonne»: 6 aventi buone capacità organizzative e 5 no. Mentre gli altri 7 bambini, di cui 3 con buone capacità organizzative e 4 no, hanno seguito un ordine casuale. I 6 bambini – di cui 3 aventi buone capacità organizzative – che non hanno effettuato correttamente l'enumerazione hanno proceduto in modo casuale. Come è possibile notare nella tabella sottostante, i casi in cui si è riscontrato il maggior numero di bambini organizzati «per righe e colonne» sono due: 3 bambini con meno capacità organizzative nella seconda sezione e 3 bambini con buone capacità nella quarta sezione.

Tabella 6.1.2. Risultati relativi all'organizzazione «per righe/colonne» nelle diverse sezioni nel caso della corretta enumerazione

	bambini III livello con buone capacità organizzative	bambini III livello con minore capacità organizzativa
Prima sezione	0	0
Seconda sezione	1	3
Terza sezione	2	1
Quarta sezione	3	1

Di seguito alcune considerazioni, in particolare sulle risposte dei bambini alla domanda finale: «*come hai fatto per ricordarti dove avevi già messo i ciondolini*?»

Prima sezione

In questa sezione è sorprendente notare che tutti i bambini con minori capacità organizzative hanno svolto correttamente l'enumerazione, sebbene non abbiano messo in atto alcuna organizzazione del tipo «per righe» o «per colonne». Per contro, solamente un bambino avente buone capacità organizzative – anch'esso però senza l'attuazione di una precisa organizzazione – ha eseguito correttamente l'attività. Le risposte alla domanda finale si suddividono in due categorie: chi cerca di dare una spiegazione descrivendo a parole e/o esprimendosi con i gesti e chi invece dichiara di non essere in grado di commentare. Questo è il caso del bambino con buone capacità e di 2 dei 3 bambini che possiedono minori capacità organizzative che per rispondermi alzano le spalle e dicono: «Boh». Mentre l'altro bambino avente poche capacità organizzative ha cercato di rispondere in modo pertinente. Le 2 bambine che non eseguono correttamente l'enumerazione seguono un percorso diverso anche se di tipo lineare «a biscia» e arrivano a commettere il medesimo errore: dimenticano una scatoletta e mettono 2 ciondolini in una stessa scatoletta. Inoltre, entrambe non riescono a rispondere alla domanda finale.

Seconda sezione

Anche in questo caso è interessante notare che tutti i bambini aventi minori capacità organizzative (stando a quanto dichiarato dalle insegnanti) sono stati in grado di svolgere l'attività senza commettere alcun errore, mentre tra coloro che possiederebbero maggiormente questa capacità siano 2 su 3 ad agire correttamente. Ciò che emerge bene dai dati di questa sezione è il fatto che 4 bambini su 5 di coloro che non hanno commesso errori hanno messo in atto un'organizzazione «per righe» o «per colonne», mentre la bambina che ha sbagliato ha proceduto in modo casuale. I bambini di questa sezione non sono riusciti a rispondere alla domanda finale. Mi hanno detto che non lo sapevano come avevano fatto a ricordare dove avevano già messo un ciondolino, o che non ricordavano, e alcuni hanno soltanto alzato le spalle. La bambina che ha commesso l'errore nell'enumerazione ha seguito un'esplorazione lineare «a biscia» che l'ha portata a dimenticare una scatoletta e a introdurre 2 ciondolini in una stessa scatoletta.

Terza sezione

I bambini con buone capacità organizzative hanno risolto il compito senza commettere errori e 2 su 3 hanno attuato un'organizzazione «per righe». Tra coloro che possiedono meno questa capacità, invece, 2 su 3 non hanno sbagliato l'enumerazione anche se solo 1 di loro ha applicato l'organizzazione «per righe». Sono dunque 3 i bambini che hanno seguito un'esplorazione casuale della collezione, di cui 2 non hanno commesso errori e solo 1 dovrebbe possedere buone capacità organizzative. Dunque si può supporre che questo bambino, nonostante non abbia proceduto né «per righe» né «per colonne», sia stato in grado di ricordare dove aveva già inserito i ciondolini, o abbia seguito un'altra strategia. Quanto all'altro bambino – con minori capacità organizzative – ci si può domandare se abbia avuto fortuna o se possa aver beneficiato di parecchie attività di questo tipo svolte con la docente titolare.

A questo punto occorre dire che un'altra ipotesi formulabile riguarda la relativa attendibilità delle informazioni date dalle docenti.

3 bambini sono riusciti a rispondere alla domanda finale: sono quelli che hanno adottato un'organizzazione «per righe» o «per colonne», 2 segnalati come aventi buone capacità organizzative.

La bambina che ha commesso l'errore ha anch'essa usato, come quelli della prima sezione, un'esplorazione lineare «a biscia» che l'ha portata a inserire 2 ciondolini in una stessa scatoletta e a dimenticarne una.

Quarta sezione

Si è verificata una situazione opposta a quella della prima sezione; infatti in questo caso tutti i bambini con buone capacità organizzative hanno svolto correttamente l'enumerazione. Inoltre questa è l'unica sezione nella quale tutti i bambini che hanno avuto successo hanno messo in atto un'organizzazione «per righe» o «per colonne». Fra coloro che avrebbero minori capacità organizzative, 1 bambino su 3 ha svolto correttamente e in modo organizzato il compito. Gli altri 2 non hanno seguito una particolare strategia e hanno commesso errori. La maggior parte dei bambini non è riuscita a rispondere alla domanda finale e le loro reazioni sono state di tipo gestuale (alzando le spalle) o verbali (dicendo «boh», «mi ricordavo» o «non lo so»). Un solo bambino è riuscito a esprimere correttamente il proprio pensiero.

Conclusione

Considerando i risultati è possibile affermare che la disposizione in righe e colonne facilita la riuscita dell'enumerazione senza errori o, in ogni caso, crea minori difficoltà rispetto a una disposizione casuale. Infatti, come sostiene Briand (1999), questa disposizione degli oggetti è vicina a un'organizzazione facile da identificare per i bambini. Dai dati raccolti si constata che in questa attività la maggior parte dei bambini ha eseguito correttamente l'enumerazione seguendo le righe e le colonne nell'esplorazione della collezione. La maggior parte dei bambini ha effettuato l'enumerazione in modo corretto sia di quelli dichiarati come aventi buone capacità organizzative sia degli altri. La maggior parte dei bambini che hanno eseguito correttamente l'enumerazione ha seguito un'organizzazione «per righe» o «per colonne». Sebbene inizialmente si possa sostenere che la riuscita dell'enumerazione non dipenda esclusivamente dalle capacità organizzative del bambino, va detto che l'attuazione di un'organizzazione «per righe» o «per colonne» facilita la riuscita del compito. Va comunque tenuto conto della relativa attendibilità dell'interpretazione delle capacità degli allievi da parte delle insegnanti.

Dai bambini sono emerse 8 diverse strategie di cui la maggior parte, ovvero 6, si basano su un'organizzazione «per righe». Ritengo importante sottolineare il fatto che 6 strategie su 8 sono state messe in atto, ciascuna, da un solo bambino, mentre le altre 2 da più bambini. Di queste, la prima strategia, ovvero *l'organizzazione «per righe» partendo dal basso a sinistra e andando verso destra procedendo riga per riga, ricominciando sempre da sinistra al termine di ogni riga*, è stata messa in atto da 3 bambini di cui 2 aventi buone capacità organizzative e 1 no. Mentre la seconda strategia, relativa *all'organizzazione «per righe e colonne» partendo dall'alto a sinistra e andando verso destra procedendo riga per riga, ricominciando sempre da sinistra al termine di ogni riga*, è stata eseguita da 2 bambini aventi entrambi buone capacità organizzative.

6.2. Fase 2: «Mettere le scatolette nei funghetti»

Al bambino viene presentato un piano sul quale sono disposti 12 contenitori (a forma di fungo) disposti apparentemente in modo casuale. Dovrà aprire un contenitore per volta e posizionare una delle 12 scatolette nelle quali ha precedentemente inserito i ciondolini, continuando così finché non ha sistemato tutte le scatoline nei 12 funghetti.

In questo capitolo verranno esposti i dati raccolti a seguito della seconda fase dell'attività proposta ai bambini delle 4 sezioni. Come per il capitolo precedente, anche in questo caso i dati verranno presentati mediante alcune tabelle e grafici riassuntivi. Questi dispositivi permetteranno di visualizzare 3 aspetti che emergono nello svolgere l'enumerazione nel caso in cui gli elementi da considerare sono disposti in modo casuale:

– il numero di bambini che effettua l'enumerazione correttamente o meno;
– il numero di errori commessi;
– se vengono messe in atto delle strategie e in tal caso quali.

6.2.1. Correttezza nell'esecuzione dell'enumerazione

11 bambini su 24 hanno eseguito correttamente l'enumerazione dei 12 elementi disposti in ordine casuale, senza commettere alcun errore, 6 aventi buone capacità organizzative, secondo le insegnanti. La differenza è minima ma è sorprendente notare che sono in maggioranza i bambini con minori capacità organizzative. Per quanto concerne gli altri bambini di questo gruppo, 4 hanno commesso 2 errori e altri 2 bambini ne hanno fatti 6. A commettere un solo errore invece sono stati più bambini con buone capacità organizzative, mentre degli altri nessuno è riuscito ad effettuare l'enumerazione commettendo solo un errore. Come è possibile vedere nel grafico, 5 bambini con buone capacità organizzative sono stati in grado di effettuare l'enumerazione senza commettere errori e 2 di loro ne hanno commesso soltanto 1. I rimanenti 5 di questo gruppetto si sono suddivisi, 1 per 1, tra i 2 e i 9 errori. È però interessante notare, come figura nella tabella sottostante, la differenza che vi è tra le diverse sezioni prese in analisi; nelle prime due si osservano più bambini aventi meno capacità organizzative che svolgono correttamente l'enumerazione, senza commettere alcun errore, rispetto agli altri. In queste 2 classi si nota che tra i bambini con buone capacità organizzative solamente 1 esegue correttamente l'enumerazione senza fare errori.

Nella terza e quarta sezione i risultati sono invertiti; sono di più i bambini con buone capacità organizzative a enumerare in modo corretto, commettendo al massimo 1 errore. Degli altri, la maggior parte, tranne 2 bambini che non fanno alcun errore, commette 2 errori e un bambino 6. Questi dati portano a chiederci quali possano essere le cause e a ipotizzare che effettivamente le buone capacità organizzative abbiano favorito la riuscita.

Tabella 6.2.1. Risultati relativi al numero di errori commessi nelle diverse sezioni

	bambini III livello con buone capacità organizzative							bambini III livello con minore capacità organizzativa						
	numero di errori							numero di errori						
	0	1	2	3	4	6	9	0	1	2	3	4	6	9
Prima sezione			1	1			1	2					1	
Seconda sezione	1				1	1		2		1				
Terza sezione	2	1								2			1	
Quarta sezione	2	1						2		1				

6.2.2. Le strategie attuate

Sono 15 i bambini che nell'enumerare i 12 elementi della collezione disposti in ordine casuale hanno cercato di mettere in atto una sorta di organizzazione del tipo «per righe» o «per colonne». Per 9 di loro tale modalità è risultata efficace perché non hanno commesso alcun errore. È curioso notare che tra coloro che hanno fatto 0 errori vi sono 4 bambini che possiederebbero minori capacità organizzative. Per i rimanenti 6 bambini, che hanno cercato di attuare una certa organizzazione, tale strategia non è stata totalmente efficace: hanno commesso 1 o più errori 3 bambini aventi buone capacità organizzative e 3 errori gli altri.

È interessante notare (vedi tabella 6.2.2) che tra i bambini con buone capacità organizzative ce ne sono 2 che commettono un solo errore e 1 che ne commette 6. Tra coloro che possiedono in minor misura questa capacità, 2 commettono 2 errori e nuovamente un solo bambino ne commette 6.

Gli 8 bambini che non hanno messo in atto un'organizzazione «per righe» o «per colonne» si suddividono in 2 gruppi equipotenti: 4 bambini aventi buone capacità organizzative e 4 no.

Quelli del primo gruppo commettono da 1 a più errori, mentre 2 bambini appartenenti al secondo gruppo commettono da 1 a più errori e 2 non ne commettono.

Si nota ancora che nelle prime due sezioni i bambini che tentano un'organizzazione sono pochi: 3 nella seconda sezione e addirittura soltanto 1 nella prima. Nelle altre due sezioni sono molto di più i bambini che mettono in atto un'organizzazione «per righe» o «per colonne»: 5 nella terza sezione e tutti i bambini della quarta sezione.

Sono però emerse dai bambini altre strategie: esplorazioni del tipo «circolare», «per gruppi» o «a biscia». Questi metodi sono risultati a volte efficaci, com'è il caso di 2 bambini con minori capacità organizzative che esplorando in questo modo la collezione sono riusciti a non commettere errori. In altre occasioni invece le strategie si sono rivelate inadeguate e hanno causato errori. Tra coloro che hanno sbagliato l'enumerazione mettendo in atto queste strategie vi sono sia bambini con buone capacità organizzative sia bambini che ne hanno meno. Di nuovo questi risultati portano a riflettere sull'attendibilità della valutazione fatta dai docenti.

Tabella 6.2.2. Risultati relativi all'organizzazione «per righe/colonne» nelle diverse sezioni nel caso della corretta enumerazione

	bambini III livello con buone capacità organizzative							bambini III livello con minore capacità organizzativa						
	numero di errori							numero di errori						
	0	1	2	3	4	6	9	0	1	2	3	4	6	9
Prima sezione								1						
Seconda sezione	1					1		1						
Terza sezione	2	1								1			1	
Quarta sezione	2	1						2		1				

Di seguito alcune considerazioni, in particolare sulle risposte dei bambini alle domande finali:

– «era più facile ricordarti dove avevi già messo i ciondolini qui (indico il piano dove vi erano le scatoline) o ricordarti dove avevi già messo le scatoline qui (indico i funghetti)?»
– «come facevi per ricordarti dove avevi già messo la scatolina?»

Prima sezione

È sorprendente vedere che tra i bambini aventi buone capacità organizzative – oltre alle 2 bambine che già avevano commesso degli errori nella prima fase –, anche il bambino che in quell'occasione non aveva sbagliato è incorso in 2 errori. Invece coloro che possiedono meno tale capacità – e che già nel primo momento avevano effettuato correttamente l'enumerazione – anche in questo caso sono riusciti tutti a eseguire il compito senza errori, tranne un solo bambino. Anche per quanto riguarda questa seconda fase, le risposte dei bambini alle domande finali si suddividono in due categorie:

– chi cerca di dare una spiegazione descrivendo a parole e/o mostrando con i gesti il proprio procedimento,
– chi dice di non essere in grado di spiegare.

Solo 2 bambini (di cui 1 solo avente buone capacità organizzative) dicono di non ricordare come hanno fatto. Gli altri bambini (di cui 2 con buone capacità organizzative) sono riusciti a farsi capire mostrando anche con i gesti il percorso seguito. Esemplificando:

KN, alla domanda «*Dov'era più facile ricordarti?*», indica i funghetti.

Le domando: «*Come mai?*» e lei risponde: «*Perché facevo così*» e con il dito indica funghetto dopo funghetto seguendo le righe anche se effettivamente non ha fatto così.

JN, alla domanda «*Quale fase è stata più facile?*», risponde indicando i funghetti e quando gli domando come mai, risponde così:

«*Perché ho fatto una riga dopo l'altra*» e intanto indica le righe seguite.

I bambini che hanno commesso errori generalmente hanno alzato 1 o più funghetti 2 o più volte durante il percorso seguito accorgendosi in questo modo di aver già inserito la scatoletta. Una sola bambina ha invece esplorato 11 funghetti correttamente commettendo errore al momento dell'inserimento dell'ultima scatoletta e, prima di trovare il funghetto ancora vuoto, ha rialzato tutti i funghetti precedentemente riempiti.

Seconda sezione

Osservando i dati di questa sezione si notano alcuni risultati sorprendenti. Anche in questo caso, 2 bambini su 3, fra coloro che presentano meno capacità organizzative, sono stati in grado di svolgere il compito senza commettere errori, mentre solo un bambino avente buone capacità organizzative è riuscito a inserire tutte le scatolette senza sbagliare. È inoltre importante notare che, dei 2 bambini con minori capacità organizzative, 1 ha seguito un'esplorazione «lineare a biscia» mentre l'altro ha identificato le righe come il bambino avente buone capacità organizzative. Anche una bambina con buone capacità organizzative ha cercato di seguire le colonne nell'esplorazione dei funghetti ma, ciononostante, ha commesso diversi errori. Tra i bambini che hanno cercato di dare una risposta alle domande finali, tutti hanno espresso che la fase più facile da svolgere è stata quella delle scatolette, tranne 2 bambini che dicono che entrambe lo erano. 4 bambini su 6 hanno comunicato verbalmente, aiutandosi con gesti, il percorso seguito. Per esempio:

MS alla domanda: «*Come facevi per ricordarti dove avevi già messo la scatoletta?*» risponde: «*Così*» e inizia a ripercorrere le scatolette toccandole e procedendo «per righe». Osservando il modo di agire di LA si può dire che il bambino sembra effettui una corrispondenza termine a termine tra le scatolette e i funghetti. Alla domanda di quale fase fosse stata la più facile, risponde:

«*Tutti e 2*» e alla domanda:

«*Come facevi per ricordarti dove avevi già messo le scatolette nei funghetti?*» risponde:

«*Ho fatto zig e zag le righe, però sono sparsi e non in quel modo*». Ho allora domandato:

«*In quel modo come?*» e LA ha risposto: «*A righe*».

Terza sezione

I risultati ottenuti dai bambini di questa sezione sono opposti rispetto a quelli della prima sezione: tutti i bambini con minori capacità organizzative non sono riusciti a effettuare l'enumerazione senza commettere errori, mentre 2 bambini su 3 di coloro che possiedono buone capacità hanno svolto l'attività correttamente. Entrambi hanno messo in atto un'organizzazione «per righe» e/o «per colonne» come anche l'altro bambino con buone capacità, che però ha fatto un errore. Anche 2 bambini con minori capacità hanno cercato di seguire tale organizzazione, ma nella loro esplorazione hanno commesso alcuni errori. Quasi tutti i bambini sono risusciti a rispondere alle domande finali, riuscendo anche a fare commenti riguardo alla disposizione delle scatolette e dei funghetti. Inoltre tutti e 5 i bambini dicono che la fase più facile per loro è stata quella dei ciondolini da inserire nelle scatolette dando motivazioni simili. Un esempio:

OA dice: «*Perché qui (indica i funghetti) non sono proprio bene in fila*». Nel suo agire si nota proprio la ferma intenzione a voler seguire le colonne; infatti quando comincia la terza fila apre il primo funghetto in alto, poi con la mano si avvicina all'ultimo della fila, ma prima di alzarlo si sposta e apre quello in mezzo in modo da continuare la colonna iniziata.

Quarta sezione

È interessante notare che tutti i bambini di questa sezione hanno cercato di organizzarsi «per righe» e/o «per colonne» con buoni risultati per quasi tutti; infatti solo 2 di loro, di cui solo 1 aventi buone capacità organizzative, hanno commesso errori. Al contrario però dei bambini della sezione precedente, essi non sono riusciti a esprimersi al riguardo: hanno detto solo che tra le 2 fasi la più semplice era quella dei ciondolini da inserire nelle scatolette.

Molto interessante è stato l'agire di un bambino, che dopo aver inserito la prima scatoletta, ne prende in mano 2 e apre 2 funghetti, in seguito prende 3 scatolette e le inserisce aprendo un funghetto alla volta per poi prendere altre 3 scatolette e questa volta aprire 3 funghetti e inserire solo dopo una scatoletta alla volta e infine richiudere.

Conclusione

Considerando i risultati e le risposte dei diversi bambini, è possibile asserire che la disposizione ordinata degli oggetti da enumerare facilita la riuscita del compito. Inoltre, come affermato dalla Margolinas (2008), si è notato che riuscire ad applicare strategie «per righe» e/o «per colonne» e riuscire a riconoscere questa organizzazione, anche quando gli elementi della collezione sono disposti in modo casuale, permette al bambino di affrontare più facilmente il compito e di commettere meno errori dimostrando così buone capacità organizzative. Questo è accaduto anche ad alcuni bambini che, a detta dell'insegnante, possiedono meno capacità organizzative, come il caso di Julien della prima sezione.

7. Risposte alle domande

Attraverso l'analisi dei dati è ora possibile dare una risposta precisa a ogni domanda di ricerca e confrontare le ipotesi inizialmente formulate con quanto realmente accaduto.

Domanda 1. *Disporre gli oggetti da considerare in file orizzontali e verticali facilita il bambino nell'eseguire l'enumerazione rispetto a una disposizione casuale?*

Si nota che il numero di bambini che ha eseguito correttamente il compito nella prima fase è maggiore di quello degli allievi che non hanno commesso errori nella seconda parte, nella quale erano confrontati con una disposizione casuale degli elementi. Inoltre chi ha commesso sbagli nell'enumerazione durante la prima fase li ha commessi pure, in quantità maggiore, nella seconda. Ci si accorge anche che alcuni bambini, che non avevano sbagliato nella prima fase, commettono errori nella seconda. È quindi corroborata la prima tesi secondo la quale *la disposizione ordinata (righe e colonne) degli oggetti da considerare nel processo di enumerazione permette al bambino di non commettere errori, o di commetterne meno, rispetto alla disposizione casuale*.

Domanda 2. *È vero che i bambini con buone capacità organizzative (dichiarate dalla docente titolare) presentano meno difficoltà quando si trovano a confronto con l'enumerazione, anche quando essa presenta oggetti disposti disordinatamente?*

Si constata che in due sezioni i bambini che hanno avuto meno difficoltà – non commettendo errori o commettendone un numero minore –, sono coloro che possiedono buone capacità organizzative; nelle altre due, invece, hanno avuto migliore riuscita i bambini che, a detta dall'insegnante, possiederebbero minori capacità organizzative. Anche qui sorgono dubbi sull'attendibilità della valutazione delle capacità dei bambini da parte delle docenti.

La seconda ipotesi secondo la quale *nell'enumerare oggetti, anche quando questi sono disposti senza un determinato ordine prestabilito, i bambini con buone capacità organizzative commettono meno errori rispetto ai bambini che possiedono meno capacità organizzative* è dunque corroborata solo in parte.

È però vero che, come sostiene Briand (1999), la disposizione dei punti da enumerare è da considerare come un gioco di variabili e quindi tanto più questa è vicina a un'organizzazione facile da identificare, come quella delle righe e colonne, quanto più l'enumerazione è facile. Dunque i bambini che riescono a trovare una sorta di organizzazione di questo genere, anche quando la disposizione è disordinata, avranno meno difficoltà nello svolgere il compito e questo dimostra che essi possiedono buone capacità organizzative. Durante l'attività sono riusciti a trovare questa organizzazione sia alcuni bambini che possiederebbero buone capacità organizzative sia alcuni degli altri.

Domanda 3. *Quali sono le strategie che mettono in atto i bambini della scuola dell'infanzia quando viene chiesto loro di enumerare raccolte di oggetti?*

Dalle tabelle riassuntive è possibile constatare che nella prima fase le modalità attuate dai bambini nella risoluzione del compito sono diverse; per quanto concerne l'organizzazione «per righe» o «per colonne» si presentano 8 sistemi; sono emerse anche altre strategie dei bambini. Anche per quanto riguarda la seconda fase, il modo di agire dei bambini risulta diverso tra di loro; c'è chi si è organizzato cercando chi delle righe, chi delle colonne, altri considerando gli oggetti a gruppetti e altri ancora agendo casualmente. Si può dunque asserire che l'ipotesi relativa a questa domanda secondo la quale si è previsto che *diversi bambini confrontati con il medesimo compito presentano strategie differenti tra di loro, che dipendono dal proprio modo di organizzarsi*, sia stata confermata dai risultati dell'osservazione.

8. Conclusione

Ripensando alle finalità del progetto di ricerca, posso sostenere che quanto svolto si è rivelato efficace per dare risposta ai quesiti posti inizialmente. Tali considerazioni finali sono possibili attraverso l'analisi dei dati raccolti, ma non sono estendibili a tutta la popolazione perché, come precedentemente dichiarato, la ricerca è stata svolta con un numero esiguo di bambini. Risulta dunque spontaneo affermare che, dati i risultati differenti da sezione a sezione, sarebbe interessante svolgere questa attività in altre classi e con più bambini anche all'interno di un medesimo gruppo. Per quanto concerne la prima domanda di ricerca, relativa alla maggiore facilità nell'esecuzione dell'enumerazione quando gli oggetti sono disposti in modo ordinato, e all'ultima, concernente l'esistenza di strategie differenti da bambino a bambino, i risultati hanno permesso la conferma delle ipotesi iniziali. L'ipotesi concernente la seconda domanda, invece, è stata solo in parte avvalorata: infatti solo in alcuni casi è risultato che i bambini con buone capacità organizzative sono riusciti meglio a svolgere la seconda fase dell'attività rispetto agli altri. È però importante sottolineare il fatto che le modalità per determinare le buone capacità organizzative degli allievi da parte delle docenti titolari non sono state le medesime. Questo ha dunque portato ad avere un campione di riferimento non del tutto attendibile ai fini di una risposta valida alla domanda. Per rendere più attendibile il gruppo-campione, sarebbe stato più opportuno esplicitare all'inizio gli elementi caratterizzanti i bambini con buone capacità organizzative, per esempio sotto forma di formulario da far compilare alle docenti. Mostrare quindi che in alcuni casi la buona capacità organizzativa si è rivelata davvero un aiuto per i bambini e constatare il fatto che, non solo la concezione di questa capacità è diversa da docente a docente, ma che su di essa si può lavorare in più ambiti, vuole esser uno stimolo ad affrontare con maggiore attenzione questo tema alla scuola dell'infanzia. È quindi importante invitare i docenti a lavorare in questa direzione perché ciò costituirebbe un aiuto allo sviluppo delle capacità innate dei bambini e contribuirebbe ad affinare i loro mezzi per meglio affrontare le situazioni della vita quotidiana. Infatti il bambino «deve organizzare logicamente in suoi propri modelli tutto quel che lo circonda e che gli accade» (D'Amore et al., 2004, p. 15) e, come sostiene ancora D'Amore (2004), è anche alla scuola dell'infanzia che, grazie alle attività scolastiche, si affinano questi modelli formati spontaneamente.

«Saper «tradurre» una sensazione (il modello interno) in una produzione esterna che gli altri possano comprendere» (D'Amore et al., 2004, p.23) risulta difficile sia perché richiede un ampio bagaglio linguistico sia per il fatto che è richiesta capacità di astrazione. Questo ostacolo si è verificato durante la raccolta dati in alcuni bambini che hanno faticato nel far emergere il loro pensiero e che sono riusciti più facilmente ad effettuare un confronto tra le 2 situazioni proposte. Solo pochi bambini, soprattutto coloro le cui docenti hanno lavorato sull'organizzazione, sono riusciti a esplicitare le loro azioni, mostrando una certa consapevolezza.

In conclusione dunque è possibile affermare non solo che le ipotesi della ricerca sono state confermate, ma che i risultati ottenuti permettono di far sì che il contenuto di questo lavoro porti i docenti a riflettere sull'importanza del proprio ruolo nello sviluppo cognitivo dei bambini.

9. Possibili approfondimenti

A mio avviso possono essere molti i possibili sviluppi di questa ricerca e diverse le vie ancora da esplorare. Svolgendo l'analisi mi sono spesso trovata confrontata con dati che suggerivano possibili approfondimenti, soprattutto in relazione alla tematica della capacità organizzativa e della sua influenza nella risoluzione dei compiti di enumerazione. In questa ricerca si è posto l'accento su una sola variabile, ovvero la disposizione degli oggetti (ordinata o casuale) ma, come viene esplicitato nel testo, ve ne sono molte altre che entrano in gioco quando si è confrontati con l'enumerazione, per esempio: la mobilità degli oggetti, la natura degli oggetti, la quantità degli stessi e la dimensione dello spazio a disposizione. Si potrebbe dunque pensare di effettuare più attività nelle quali queste variabili vengano messe in gioco singolarmente al fine di osservare ad esempio se ve ne sia una in particolare che influenzi la riuscita più di altre. Inoltre ho notato che i primi due bambini ai quali ho proposto l'attività, appoggiando il piano con i funghetti sul tavolo dove non era possibile girarci intorno, hanno avuto maggiori difficoltà rispetto a chi aveva il piano appoggiato per terra. Sarebbe dunque interessante sviluppare una nuova ricerca, partendo dall'ipotesi «*il bambino non compie errori, o ne fa meno, quando svolge il compito in modo da poter girare intorno al piano sul quale sono posti i funghetti*». Un altro possibile approfondimento potrebbe consistere nel constatare se i bambini che hanno attuato una determinata strategia lo hanno fatto in modo consapevole o meno. Più precisamente, si potrebbe proporre agli stessi bambini il medesimo compito a distanza di una settimana e osservare se la strategia attuata la prima volta si ripresenta anche in seconda battuta.

Bibliografia

Coggi C. e Ricchiardi P. (2005). *Progettare la ricerca empirica in educazione*. Roma: Carocci editore.

D'Amore B. e Fandiño Pinilla M.I. (2007). Dalla conoscenza alla competenza nell'educazione matematica. In: Benini AM. Orlandoni A. *Matematica. Ricerca sul curricolo e innovazione didattica*. Napoli: Tecnodid.

D'Amore B. e Fandiño Pinilla M.I. (2004). Cambi di convinzione in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. *La matematica e la sua didattica,* 3, 27-50.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. e Marazzani I. (2004). «Esercizi anticipati» e «zona di sviluppo prossimale»: comportamento strategico e linguaggio comunicativo in attività di problem solving. *La matematica e la sua didattica,* 2, 71-95.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Gabellini G., Marazzani I., Masi F. e Sbaragli S. (2004). *Infanzia e matematica. Didattica della matematica nella scuola dell'infanzia* (pp. 15-79). Bologna: Pitagora.

D'Amore B. e Fandiño Pinilla M.I. (2003). «Competenze»: obiettivo per chi costruisce il proprio sapere. *La matematica e la sua didattica*, 3, 327-338.

D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora, 155-159.

Ifrah Georges (1983). *Storia universale dei numeri*. Arnoldo Mondadori Editore.

Margolinas, C. (2008). Organizzazione, spazi, enumerazione: conoscenze nella scuola dell'infanzia. *Atti del convegno: Incontri con la matematica n. 22. Didattica della matematica e azioni d'aula*. Bologna: Pitagora.

Margolinas C. (2008). Ricerca e sviluppo per l'insegnamento della matematica nella scuola elementare: il caso dell'enumerazione. *Atti del convegno di didattica della matematica 2008.* Alta Scuola Pedagogica: Locarno. 42.

Margolinas C. (2008). Sapersi organizzare, fa parte della matematica? *Atti del convegno: Incontri con la matematica n. 22. Didattica della matematica e azioni d'aula*. Bologna: Pitagora.

Marazzani I. (2007). *I Numeri grandi. Esperienze di ricerca e sperimentazione nella scuola dell'infanzia e primaria*. Trento: Erickson, 13.

Martini B. (2007). Riflessioni critiche sul concetto di competenza. *Pedagogia più Didattica,* 0, 101-106.

5. Uso didattico di metodi dell'Aritmetica vedica

Giorgio Mainini

The author proposes some calculation methods of vedic arithmetic, with the corresponding generalization, that can be used as alternative activities in symbolic arithmetic.

«Matematica vedica è il nome dato all'antico sistema di matematica che fu riscoperto nelle scritture Veda[1] da Sri Bharati Krsna Tirthaji Maharaja (1884-1960) tra il 1911 e il 1918. Secondo i suoi studi, tutta la matematica è basata su 25 *sutra* o *formule di parole* o *aforismi*. Un esempio di sutra è "Verticalmente e attraverso". Queste "*formule di parole*" descrivono il modo in cui la mente lavora naturalmente, pertanto sono di grande aiuto nel guidare lo studente verso il "più appropriato" metodo di soluzione (virgolette mie)». Così si legge nelle presentazioni della matematica vedica in quasi tutti i testi e siti in internet che trattano l'argomento. Sul fatto che si tratti davvero dell'«antico sistema… riscoperto nelle scritture Veda» l'A. non si pronuncia, pur avendone personalmente fieri dubbi[2]. Cercando con Google con le chiavi «matematica vedica» o «vedic mathematics» si trovano quasi esclusivamente siti elogiativi. Con più fatica si può arrivare a

· www.tifr.res.in/~vahia/dani-vmsm.pdf
· www.new.dli.ernet.in/rawdataupload/upload/insa/INSA_1/20005afd_1.pdf

che, invece, criticano abbastanza duramente l'opera base, il libro «Vedic Mathematics» dello swami Sri Bharati.

Questo contributo si prefigge uno scopo ascrivibile alla «didattica A»[3]: Veda o non Veda, i metodi proposti funzionano, anche se con qualche limitazione pratica, come si vedrà. Interessante è vedere *perché* funzionano, e qui la matematica «solita» è di grande aiuto, grazie alla sua scrittura simbolica: in pratica grazie al calcolo letterale. Siccome il calcolo letterale non sta nella *top ten* degli allievi, può essere utile dargli una spinta applicandolo a qualcosa che sembra magico per togliergli il velo di magia.

Chi volesse esempi meno semplici di quelli mostrati in seguito può ottenere informazioni sia *online* sia procurandosi una copia di «Vedic Mathematics», otte-

1. I due periodi vedici della matematica indiana vanno dal 1200 a.C. al 900 a.C. e dal 700 a.C. al 400 a. C.
2. In effetti Tirthaji aveva un M. A. in matematica.
3. v. D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

nibile presso la matoteca della SMASI, in Via Torricelli 19 a Lugano. E ce n'è per tutti i gusti: dalla divisione di numeri e di polinomi alla loro fattorizzazione, dalla soluzione di equazioni di vario tipo a quella di sistemi, dalla derivazione all'integrazione, dall'elevazione a potenza all'estrazione di radici ad altro ancora.

Tutto da 9 e l'ultimo da 10
per sottrarre da potenze di 10.
Esempio
1000 – 357 = 643
Ogni cifra di 357 viene sostituita dal suo complemento a 9, tranne l'ultima, di cui si scrive il complemento a 10.
In generale: ogni cifra del sottraendo viene sostituita dal suo complemento a 9, tranne l'ultima, di cui si scrive il complemento a 10
Esempio
10'000 – 1049 = 8951
Se il sottraendo è «troppo corto» si completa con degli 0 a sinistra
Esempio
1000 – 83   diventa   1000 – 083 = 917

Esempio semigenerale
1000 – (100 x + 10 y + z) =
= 900 – 100 x + 90 –10 y + 10 –z =
= 100 (9–x) + 10 (9–z) + (10–z)

In generale, con una qualunque potenza di 10:

$$10^n - (10^{n-1} a_{n-1} + 10^{n-2} a_{n-2} + \ldots + a_0) =$$
$$= 9 \cdot 10^{n-1} + 9 \cdot 10^{n-2} + \ldots + 10 - 10^{n-1} a_{n-1} - 10^{n-2} a_{n-2} - \ldots - a_0 =$$
$$= 9 \cdot 10^{n-1} - 10^{n-1} a_{n-1} + 9 \cdot 10^{n-2} - 10^{n-2} a_{n-2} + 10 - a_0 =$$
$$= 10^{n-1} \left(9 - a_{n-1}\right) + 10^{n-2} \left(9 - a_{n-2}\right) + \ldots + \left(10 - a_0\right)$$

Verticalmente e attraverso
con numeri minori di 10…
conoscendo la tavola di moltiplicazione fino a 5 · 5.
Esempio
8 · 7
8 è di 2 minore di 10 e 7 è di 3 minore di 10.
Si scrive

$$\begin{array}{ccc} 8 & & 2 \\ & \times & | \\ 7 & & 3 \\ \hline \mathbf{5} & & \mathbf{6} \\ \hline \end{array}$$

Risultato: 56, dove il 6 viene da 2 · 3 (verticalmente) e il 5 viene da 8 – 3 = 7 – 2 (attraverso)

In generale, per moltiplicare due numeri minori di 10, si sottrae il complemento a 10 di un numero dall'altro numero, si moltiplicano i complementi e si scrivono i risultati uno accanto all'altro.

Ci può essere un riporto.

Esempio

$7 \cdot 6$

$$\begin{array}{ccc} 7 & & 3 \\ & \times & | \\ 6 & & 4 \\ \hline 3 & & {}_{1}2 \\ \hline \mathbf{4} & & \mathbf{2} \\ \hline \end{array}$$

Risultato: 42

Controesempio:

$7 \cdot 2$

$$\begin{array}{ccc} 7 & & 3 \\ & \times & | \\ 2 & & 8 \\ \hline 2-3 & & 3 \cdot 8 \\ \hline -1 & & {}_{2}4 \\ \hline \mathbf{1} & & \mathbf{4} \\ \hline \end{array}$$

Cioè si deve sapere quanto fa $3 \cdot 8$, con buona pace del «conoscendo la tavola di moltiplicazione fino a $5 \cdot 5$», e un pochino di calcolo in $\mathbb{Z}$.

In generale si ha

$$\begin{array}{ccc} a & & 10-a \\ & \times & | \\ b & & 10-b \\ \hline \mathbf{b-(10-a)} & & \mathbf{(10-a) \cdot (10-b)} \\ \hline \end{array}$$

Il risultato è

$\mathbf{10 \cdot (b-(10-a)) + (10-a) \cdot (10-b)} = 10 \cdot (b-10+a) + (10-a) \cdot (10-b) =$

$= 10\,b - 100 + 10\,a + 100 - 10\,b - 10\,a + a\,b = \mathbf{a\,b}$

come si voleva, eventualmente con la condizione aggiuntiva (sottintesa?) che sia

$b - (10 - a) > 0$, cioè $a + b > 10$

Siccome a e b sono minori di 10, si può anche scrivere

$(10 - x)(10 - y) = 100 - 10\,y - 10\,x + x\,y = 10\,[10 - (x + y)] + x\,y$

che non è altro che un caso particolare di

$(k - x)(k - y) = k^2 - k\,y - k\,x + x\,y = k\,[k - (x + y)] + x\,y$

Nell'esempio sta scritto che «il 5 viene da $8 - 3 = 7 - 2$»: è un caso che le due sottrazioni diano la stessa differenza?

In generale si ha

$a - (10 - b) = a + b - 10$ e anche $b - (10 - a) = a + b - 10$

No, non è un caso.
È pure vero che
$a - (k - b) = a + b - k$ e anche $b - (k - a) = a + b - k$
Il fatto di scegliere $k = 10$ dipende dalla notazione posizionale in base 10. Ne consegue che il primo esempio

$$\begin{array}{lcr} 8 & & 2 \\ & \times & | \\ 7 & & 3 \\ \hline \mathbf{5} & & \mathbf{6} \\ \hline \end{array}$$

potrebbe benissimo diventare

$$\begin{array}{lcr} 8 & & 4 \\ & \times & | \\ 7 & & 5 \\ \hline \mathbf{3} & & {}_{\mathbf{1}}\mathbf{8} \\ \hline \mathbf{4} & & \mathbf{8} \\ \hline \end{array}$$

in base 12. Allora **4 8** andrebbe letto come $4 \cdot 12 + 8 = 56$

…e «di poco» minori di 100
Esempio
$88 \cdot 98$
88 è di 12 minore di 100 e 98 è di 2 minore di 100.
Si scrive

$$\begin{array}{lcr} 88 & & 12 \\ & \times & | \\ 98 & & 2 \\ \hline \mathbf{86} & & \mathbf{24} \\ \hline \end{array}$$

Risultato: 8624

In generale:
$(100 - x)(100 - y) = 10'000 - 100y - 100x + xy =$
$= 100[100 - (x + y)] + xy$, analogamente a sopra.

A complemento: moltiplicazione di due numeri «di poco» maggiori di 100
Esempio
$103 \cdot 104 = 10712$
La risposta è in due parti, 107 e 12:
$107 = 103+4 = 103+3$
$12 = 3 \cdot 4$.
Allo stesso modo
$107 \cdot 106 = 11342$
dove $113 = 107 + 6 = 106 + 7$ e $42 = 7 \cdot 6$

Che cosa vuol dire «di poco»?

In generale si ha $(100 + x) \cdot (100 + y) =$

$= 10000 + 100\,y + 100\,x + x\,y = 10'000 + 100 \cdot (x+y) + x\,y$

Il metodo proposto chiede di scrivere, uno accanto all'altro, i due numeri $100 + (x+y)$ e $x\,y$.

Di conseguenza, sia $(x+y)$ sia $x\,y$ devono avere al massimo due cifre. Quindi «di poco» significa che x e y devono sottostare alle due condizioni appena scritte. Dunque è un «di poco» per modo di dire, come mostra l'esempio

$198 \cdot 101 = 19998$

con $199 = 198 + 1$ e $98 = 98 \cdot 1$

Per uno di più di quanto precede

Per elevare al quadrato numeri che finiscono in 5

Esempio

$75^2 = 5625$

La risposta è in due parti, 56 e 25:

$56 = 7 \cdot (7+1)$

25 è fisso

Esempio

$105^2 = 11025$

$110 = 10 \cdot (10+1)$ 25 è fisso

In generale si ha

$(10\,x + 5)^2 = 100\,x^2 + 100\,x + 25 = 100\,x\,(x+1) + 25$

$x\,(x+1)$ giustifica il «uno di più di quanto precede»; moltiplicando per 100 si ottiene un numero intero di centinaia al quale si può comodamente aggiungere 25 ottenendo un numero che finisce con il 25 «fisso».

Metodo per moltiplicare numeri di 2 cifre, aventi la prima cifra uguale e le seconde due che sommano 10

Esempio

$32 \cdot 38 = 1216$

La risposta è in due parti, 12 e 16:

$12 = 3 \cdot (3+1)$

$16 = 2 \cdot 8$

Esempio

$81 \cdot 89 = 7209$

$72 = 8 \cdot (8+1)$

$09 = 1 \cdot 9$ (occorrono sempre 2 cifre)

In generale si ha

$$(10\,x + a) \cdot [10\,x + (10 - a)] = 100\,x^2 + 100\,x - 10\,a\,x + 10\,a\,x + 10\,a - a^2 =$$
$$= 100 \cdot x \cdot (x + 1) + a \cdot (10 - a)$$

Come sopra, x (x+1) giustifica l’espressione «uno di più di quanto precede»; moltiplicando per 100 si ottiene un numero intero di centinaia al quale si può comodamente aggiungere a (10–a) che sicuramente ha al massimo due cifre: se ne ha una sola si accosta uno 0 a sinistra e il gioco è fatto.

Un metodo elegante per moltiplicare due numeri di 2 cifre

Esempio

$21 \cdot 23 = 483$

$$
\begin{array}{cccc}
2 & & 1 & \\
| & \times & | & \\
2 & & 3 & + \times \\
\hline
\mathbf{4} & \mathbf{8} & \mathbf{3} & \\
\hline
\end{array}
$$

Tre passaggi:

1. si moltiplica verticalmente a sinistra: si avrà la prima cifra del prodotto,
2. si moltiplica in croce (attraverso) e somma: $2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 8$: si avrà la cifra di mezzo,
3. si moltiplica verticalmente a destra: si avrà l’ultima cifra.

Ci possono essere riporti.

Esempi

$21 \cdot 26 = 546$

$$
\begin{array}{cccc}
2 & & 1 & \\
| & \times & | & \\
2 & & 6 & + \times \\
4 & {}_{1}4 & 6 & \\
\hline
\mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{6} & \\
\hline
\end{array}
$$

$56 \cdot 84 = 4704$

$$
\begin{array}{cccc}
5 & & 6 & \\
| & \times & | & \\
8 & & 4 & + \times \\
40 & {}_{6}8 & {}_{2}4 & \\
\hline
40 & {}_{7}0 & 4 & \\
\hline
\mathbf{47} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \\
\hline
\end{array}
$$

In generale si ha

$$(10\,a + x) \cdot (10\,b + y) = 100\,a\,b + 10\,a\,y + 10\,b\,x + x\,y =$$
$$= 100\,a\,b + 10\,(a\,y + b\,x) + x\,y$$

Se si applica lo schema vedico nel caso generale si ha

$$
\begin{array}{cccc}
a & & x & \\
| & \times & | & \\
b & & y & + \times \\
\hline
a\,b & a\,y+b\,x & x\,y & \\
\hline
\end{array}
$$

dove si vede bene che

xy	occupa il posto delle unità	da cui	$1 \cdot xy$
ay+bx	occupa il posto delle decine	da cui	$10 \cdot (ay+bx)$
ab	occupa il posto delle centinaia	da cui	$100 \cdot ab$

eventualmente con riporti dalle unità alle decine e dalle decine alle centinaia.

Moltiplicare per 11

un numero di 2 cifre…

Esempio $26 \cdot 11 = 286$

Tra le cifre del numero si scrive la somma delle sue cifre: 2 (2+6) 6

Ci può essere riporto.

Esempio $78 \cdot 11 \rightarrow 7\ (7+8)\ 8 \rightarrow 7\ ({}_1 5)\ 8 \rightarrow 858$

In generale

$11\ (10\ x + y) = (10 + 1)\ (10\ x + y) = 100\ x + 10\ y + 10\ x + y =$

$= 100\ x + 10\ (x+y) + y$

…o di 3 o più cifre

Esempi

23**4** · 11 = 2574

2 (2+3) (3+4) **4**

In generale

$11\ (100\ \mathbf{x} + 10\ y + \mathbf{z}) = (10 + 1)\ (100\ x + 10\ y + z) =$

$= 1000\ x + 100\ y + 10\ z + 100\ x + 10\ y + z =$

$=1000\ \mathbf{x} + 100\ (x+y) + 10\ (y+z) + \mathbf{z}$

5263**4** · 11 = 578974

5 (5+2) (2+6) (6+3) (3+4) **4**

In generale

$11\ (10^n \mathbf{x_n} + 10^{n-1} x_{n-1} + 10^{n-2} x_{n-2} + \dots + 10 x_1 + \mathbf{x_0}) =$

$= (10 + 1)\ (10^n x_n + 10^{n-1} x_{n-1} + 10^{n-2} x_{n-2} + \dots + 10 x_1 + x_0) =$

$= 10^{n+1} x_n + 10^n x_{n-1} + 10^{n-1} x_{n-2} + \dots$

$\dots + 10^2 x_1 + 10 x_0 + 10^n x_n + 10^{n-1} x_{n-1} + \dots + 10 x_1 + x_0 =$

$= 10^{n+1} \mathbf{x_n} + 10^n\ (x_{n-1} + x_n) + 10^{n-1}\ (x_{n-2} + x_{n-1}) + \dots + 10\ (x_0 + 10 x_1) + \mathbf{x_0}$

Naturalmente occorre tener conto degli eventuali riporti.

Metodo per dividere per 9

un numero di 2 cifre…

23 : 9 = 2 (quoto) e resto 5

Il quoto è la prima cifra e il resto la somma delle cifre.

…e con più di 2 cifre

Esempio

231 : 9 = 25 (quoto) e resto 6

quoto 25:

la prima cifra, 2, è la prima cifra del dividendo

la seconda, 5, è la somma delle prime due cifre del dividendo
resto 6:
è la somma di tutte le cifre del dividendo.
Ci possono essere riporti.

Esempio

6547 : 9 = 727 (quoto) e resto 4

Formazione del quoto provvisorio

6 prima cifra del quoto = prima cifra del dividendo,
11 = 6+5 «seconda» cifra» del quoto
15 = 6+5+4 «terza cifra» del quoto

6 (11) (15) , 6 ($_1$1) ($_1$5) , 6 ($_1$2) 5 , 7 2 5 , 725

Resto provvisorio

22 = 6+5+4+7

ma il resto deve essere minore di 9, dunque

22 = **2** · 9 + 4

Quoto definitivo: 725+**2** = 727
Resto definitivo: 4

Ed ecco perché funziona (RP = resto provvisorio; RD = resto definitivo):

$$\frac{6547}{9}=\frac{6000+500+40+7}{9}=\frac{6\cdot(900+90+9)+6+5\cdot(90+9)+5+4\cdot(9+1)+7}{9}=$$

$$=(6\cdot 100+6\cdot 10+6)+(5\cdot 10+5)+5+4+\frac{6+5+4+7}{9}=$$

$$=6\cdot 100+(6+5)\cdot 10+(6+5+4)+\underbrace{\frac{6+5+4+7}{9}}_{\text{RP}}\rightarrow \qquad \text{(A)}$$

$$\rightarrow 6 \quad (6+5) \quad (6+5+4)\,\&\,\text{RP}\rightarrow$$

$$\rightarrow 6 \quad (11) \quad (15)\,\&\,\frac{22}{9}\rightarrow 6 \quad (11) \quad (15)\,\&\,\frac{18+4}{9}\rightarrow$$

$$\rightarrow 6 \quad (11) \quad (15)\,\&\,\frac{18}{9}+\frac{4}{9}\rightarrow 6 \quad (11) \quad (15)+2\,\&\,\underbrace{(4:9)}_{\text{RD}}\rightarrow$$

$$\rightarrow 6 \quad ({}_1 1) \quad ({}_1 5)+2+0\,\&\,4\rightarrow$$

$$\rightarrow 6 \quad ({}_1 2) \quad (5)+2\,\&\,4\rightarrow$$

$$\rightarrow 725+2\,\&\,4\rightarrow$$

$$\rightarrow 727\,\&\,4$$

Chi sarà giunto sin qui sarà tanto gentile da lasciarmi scrivere «lascio il caso generale alla buona volontà del lettore».

Nella riga (A) si vede che il resto della divisione di un numero per 9 è dato dalla somma delle sue cifre, ridotta modulo 9. Quindi, se la somma delle cifre è congruo a zero modulo 9, il numero è divisibile per 9, secondo il ben noto criterio. Si può a questo punto generalizzare: un numero scritto in base b è divisibile per (b–1) se la somma delle sue cifre è congrua a zero modulo (b–1).

Quiz numero 42: Un 2010 speciale

Aldo Frapolli

Caro Joe,

siamo giunti al Quiz numero 42, alla vigilia dell'anno 2010. Hai notato quanto sono speciali questi due numeri?

Li ho battezzati ***«doppionumeri»***. Perché?

Se separi in due parti la sequenza delle cifre di un numero naturale qualsiasi maggiore di 9, ottieni una sua suddivisione in due sequenze di cifre di lunghezza inferiore.

Così ad esempio il numero 2301 possiede le seguenti diverse suddivisioni: (s = 2; d = 301), (s = 23; d = 01) e (s = 230; d = 1), dove ***s*** è il nome della sequenza di sinistra, che chiamo anche *stringa sinistra*, e ***d*** è il nome della sequenza di destra, contenente la cifra delle unità, che chiamo anche *stringa destra*.

Il *valore di una stringa* è il numero naturale usuale suggerito dalla sequenza di cifre stessa; nel caso in cui una stringa inizi con degli zeri, il suo valore è uguale a quello della stringa privata di tali zeri. Così ad esempio il valore di s = 230 è 230, quello di d = 01 è 1.

Per me un *«doppionumero»* è un numero naturale che possiede una suddivisione del tipo descritto, in cui la stringa sinistra ha un valore che è il doppio di quello della stringa destra, come appunto nel caso del 2010 (s = 20; d = 10) e del 42 (s = 4; d = 2) ... ma pure di 20010 (s = 20; d = 010), 201 (s = 2; d =01) oppure 40002 (s = 4; d = 0004), … tanto per fare qualche altro esempio significativo.

Mio caro Archie, quando mi hai anticipato questa tua domanda… ti confesso che non ci ho dormito la notte. Però ho scoperto che dall'anno 0, nel nostro calendario, ci sono state solo 20 date con le stesse caratteristiche di numeri come 42 o 2010. In questo millennio è la seconda volta che si incontra un numero di questo tipo e puoi facilmente verificare che ciò accadrà ancora esattamente quattro volte.

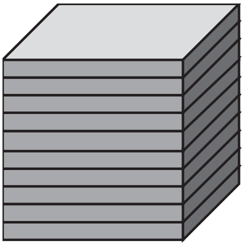
Se volessi ti potrei dire ad esempio quanti ce ne saranno nei prossimi 2010 millenni. Ma c'è di più! Analizzandoli, ho scoperto che i tuoi *«doppionumeri»* godono di interessanti proprietà. Ad esempio si possono …

Alto là, Joe!

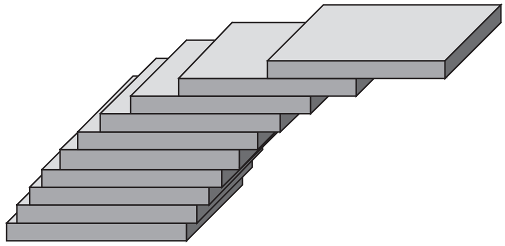
Lasciamo ai lettori il piacere di determinare quanti sono i *«doppionumeri»* fra le date dei prossimi 2010 millenni ma specialmente il gusto della scoperta di qualcuna delle loro proprietà, magari diverse o più interessanti delle tue.

Il libro premio questa volta sarà per chi proporrà il numero cercato oltre alla proprietà dei *«doppionumeri»* ritenuta più interessante dalla redazione.

Soluzione del Quiz numero 41



Cubo sezionato



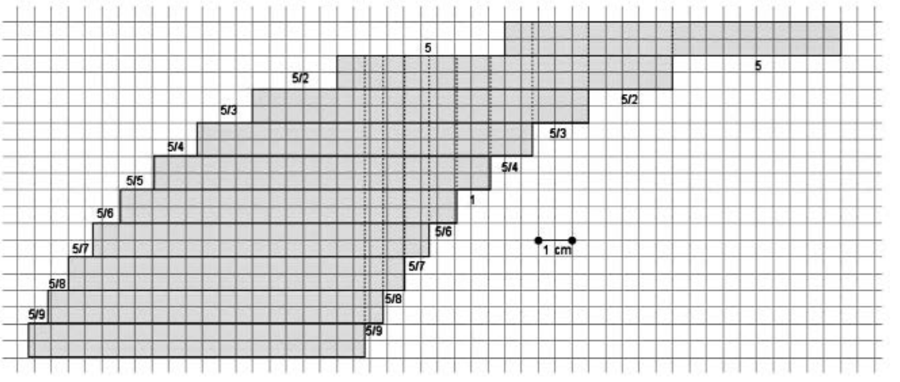
Cubo armonico

Il cubo armonico, prisma con 80 vertici, 42 facce e 80 spigoli, costruito a partire dal cubo sezionato in 10 prismi equivalenti («fette») come indicato nello schizzo introduttivo, ha saputo risvegliare la curiosità di non pochi lettori.
Colpisce per la sua apparente instabilità, con quella «fetta» posta in alto che sembra dover essere incollata per non cadere. Eppure si può costruire per davvero, come insegna una semplice legge fisica che regola l'equilibrio di un corpo.
Fra le soluzioni pervenuteci vi presentiamo quella di Luca Frangella, docente di fisica in un Liceo di Brescia, che si è aggiudicato il libro di Michael Guillen, *Le 5 equazioni che hanno cambiato il mondo – Potere e poesia della matematica*.
Rivolgiamo un caldo invito ai docenti a raccogliere i non pochi spunti didattici suggeriti in modo più o meno implicito dal Quiz. Ad esempio, visto che la serie armonica è divergente, perché non immaginare di tagliare il cubo in un numero di «fette» sempre più grande, per giungere ad avere una sporgenza sempre più grande della «fetta superiore» rispetto alla «fetta di base»? Così un possibile rilancio potrebbe essere: «quanti tagli sono necessari per avere una sporgenza pari a 10 volte lo spigolo del cubo»? I numeri razionali in gioco sono interessanti e, entro certi limiti, potrebbe essere stimolante eseguire le somme lavorando con la forma frazionaria. Buon divertimento.

Al solutore vanno i complimenti della redazione per la chiarezza e per la completezza del suo contributo che proponiamo di seguito.

Indicando con A_{ca} la misura della superficie totale del cubo armonico e con A_c la misura della superficie del cubo originario possiamo affermare che $A_{ca} > A_c$
La loro differenza è la somma delle aree delle porzioni di faccia che rimangono scoperte a seguito dello spostamento delle nove fette.
Tutte le porzioni hanno una dimensione in comune, ovvero lo spigolo del cubo; rimane da calcolare quanto sporge ogni fetta.

Proponiamo la figura seguente che visualizza la situazione vista di profilo:



Notiamo la perfetta simmetria fra le sporgenze formatesi a sinistra e a destra del cubo originario. È un risultato noto della fisica che un corpo soggetto alla forza peso rimane in equilibrio fin tanto che la verticale passante per il suo baricentro intercetti la base d'appoggio.

Quando spostiamo la prima fetta, dobbiamo fare in modo che il suo peso sia ripartito equamente rispetto al bordo destro della fetta d'appoggio sottostante. In tal modo ci assicuriamo che il baricentro della prima fetta cada proprio su tale bordo. Questa è la condizione limite affinché la prima fetta rimanga in equilibrio.
Quando spostiamo anche la seconda fetta, dobbiamo fare in modo che il peso delle prime due fette sia ripartito equamente rispetto al bordo destro della terza fetta.
Generalizzando, il peso delle fette sovrastanti deve essere ripartito equamente a sinistra e a destra del piano verticale individuato dal bordo destro della fetta d'appoggio sottostante.

Data per scontata una distribuzione omogenea della massa, possiamo basarci sulla lunghezza delle fette per ricercare la condizione limite di equilibrio.

Operiamo il primo spostamento in modo che la lunghezza della prima fetta sia ripartita equamente rispetto al bordo destro della seconda fetta. In sostanza spostiamo la prima fetta verso destra di 5 cm.

La somma delle lunghezze della prima e seconda fetta è 2 * 10 cm = 20 cm. Prendendo come riferimento il bordo destro della seconda fetta, tale lunghezza totale è così ripartita: a sinistra 5 cm (prima fetta) + 10 cm (seconda fetta) = 15 cm, a destra 5 cm (prima fetta). Per ottenere la condizione limite di equilibrio dobbiamo far scivolare sulla terza fetta il blocco formato dalla prima e dalla seconda fetta, fin quando il piano verticale passante per il bordo destro della terza fetta non ripartisca equamente la lunghezza totale delle prime due fette: 10 cm a sinistra e altrettanti a destra. Bisogna dunque spostare verso destra la seconda fetta fin quando non si guadagnano in totale 5 cm. Poiché questi 5 cm vanno ripartiti fra le prime due fette, lo spostamento deve essere di 5/2 cm = 2,5 cm.

Adesso bisogna far scivolare sulla quarta fetta il blocco delle fette soprastanti (prima, seconda e terza). La lunghezza totale delle prime tre fette è 3*10 cm = 30 cm. Rispetto al bordo destro della terza fetta, tale lunghezza è così ripartita: a sinistra 2,5 cm (fetta 1) + 7,5 cm (fetta 2) + 10 cm (fetta 3) = 20 cm, a destra 7,5 cm (fetta 1) + 2,5 cm (fetta 2) = 10 cm. Dobbiamo quindi far scivolare verso destra la terza fetta in modo che si guadagnino nuovamente 5 cm. Questi 5 cm vanno ripartiti su tre fette, per cui lo spostamento dovrà essere di 5/3 cm.

Generalizzando, la condizione limite di equilibrio è rispettata ogni qualvolta si fa scivolare la n-esima fetta verso destra di un tratto pari a 5/n cm, con n = 1,......,9; infatti la decima fetta rimane ferma.

L'insieme delle misure, espresse in cm, delle sporgenze a destra del cubo individua, a meno del fattore 5, una **successione armonica** troncata:

{5, 5/2, 5/3, 5/4, 5/5, 5/6, 5/7 , 5/8, 5/9} = { 5 · 1/n | n = 1,.....,9}

Stessa cosa dicasi per le sporgenze sul versante sinistro del cubo.

Adesso possiamo calcolare la somma delle aree delle porzioni di faccia sporgenti, che indichiamo con As.

Vale:

$$As = 2 \cdot \sum_{n=1}^{9} \left(\frac{5}{n} \cdot 10 \right) = 100 . \sum_{n=1}^{9} \left(\frac{1}{n} \right) \qquad (cm^2)$$

Si ottiene la **serie armonica** troncata al nono addendo, che coincide con il così detto nono numero armonico:

$$\sum_{n=1}^{9} \left(\frac{1}{n} \right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} ... + \frac{1}{9} = \frac{7129}{2550}$$

Di conseguenza As = 712900/2520 ≅ 283 (cm^2); l'area totale del cubo armonico è dunque:

$A_{ca} = A_c + As \cong 600 + 283 \cong 883$ (cm^2).

2. Apprendere giocando
Giochi geometrici e aritmetici

Bernardo Mutti[1]

Introduzione[2]

«Apprendere giocando» non è solo uno slogan assai diffuso, ma anche una concreta possibilità di variare, almeno ogni tanto, l'attività didattica in classe. Quando poi il gioco è centrato su aspetti concettuali importanti dei programmi scolastici, la cosa si fa ancor più interessante. Nel seguito presenterò alcuni giochi di competizione che concernono sia la conoscenza delle figure geometriche piane, sia quella dei numeri relativi e del piano cartesiano.

Gioco E: simmetrie e domino dei poligoni

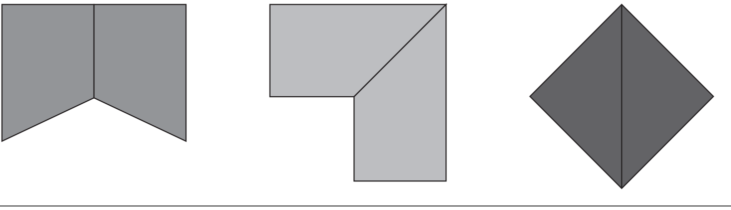
Materiale:

2 serie o più di modellini di figure geometriche (triangoli e quadrilateri di diversa forma, grandezza e colore) con o senza i segni della griglia.

N.B. considerare solo le figure con area maggiore di 3 quadratini (della griglia) in modo da avere figure sufficientemente grandi.

Prima modalità di gioco

Disporre le figure geometriche congruenti l'una accanto all'altra in modo simmetrico.



1. Maestro pensionato, animatore nella scuola elementare, membro attivo della SMASI.
2. La prima parte di questo contributo è pubblicata sul numero 58, a pagina 95.

Seconda modalità di gioco

A turno 2 giocatori o 2 gruppi di giocatori devono formare una catena di coppie di figure geometriche simmetriche.

Ogni giocatore o gruppo di giocatori ha a disposizione una serie di forme geometriche.

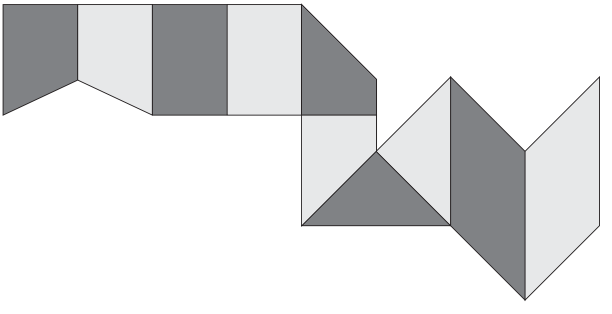
Il primo giocatore (nel caso di gioco a gruppi) sceglie la prima figura e la dispone su un grande tavolo o per terra.

Il secondo giocatore deve prendere la forma gemella e disporla accanto in modo simmetrico.

Il giocatore successivo prende una nuova forma che abbia almeno un lato congruente a quella appena messa e la dispone accanto in modo che i due lati congruenti coincidano.

Il gioco continua con la stessa modalità fino al completamento della catena facendo in modo che i giocatori si alternino regolarmente.

Vince chi per primo completerà la catena senza errori.

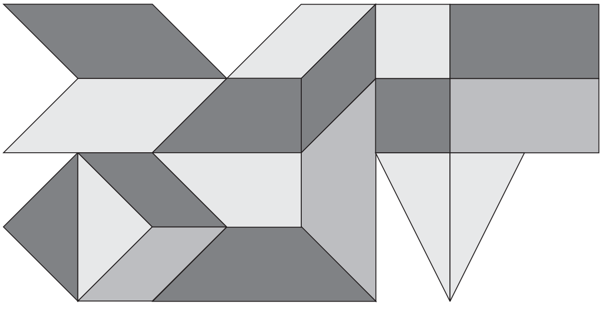


N.B. Nel caso in cui ci siano solo due giocatori, valgono le stesse regole di disposizione dei pezzi.

N.B. Qualora dovesse avanzare qualche pezzo è possibile inserirlo all'interno della catena.

Terza modalità di gioco

Il gioco può essere svolto anche seguendo unicamente le due direzioni principali della griglia, con le stesse regole del gioco precedente: si ottiene una sorta di Domino dei poligoni, come si vede nella figura seguente.



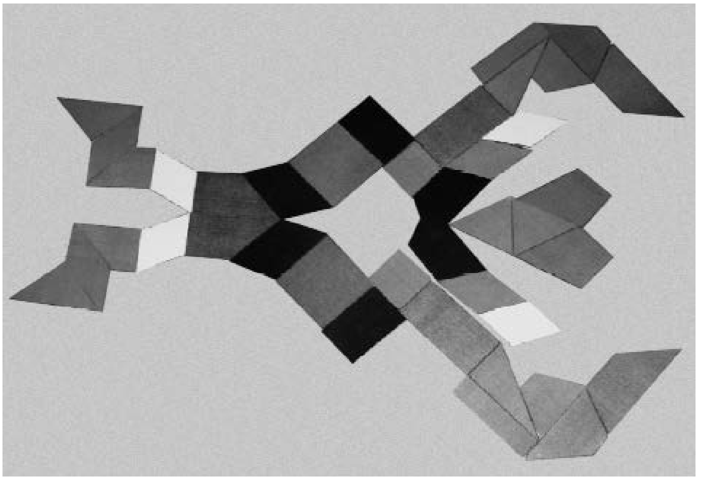
Gioco F: alla scoperta di un unico asse di simmetria

Materiale: serie di modellini cartacei di poligoni (vedi giochi di simmetria precedenti).

Partecipanti: 2 giocatori o 2 gruppi di giocatori.

Modalità di gioco

- Il primo giocatore unisce simmetricamente una prima coppia di figure «gemelle-congruenti, scelta a caso.
- Il secondo giocatore prende altre due figure congruenti; una la sistema a destra della prima coppia di figure unendo i due lati congruenti e l'altra a sinistra della prima coppia in modo simmetrico.
- I partecipanti successivi, alternativamente, procederanno allo stesso modo nella costruzione delle due catene simmetriche di poligoni fino a esaurimento delle figure (vedi per esempio la figura seguente, realizzata da quattro allievi di 3° elementare delle scuole di Lugano Lambertenghi[3]).



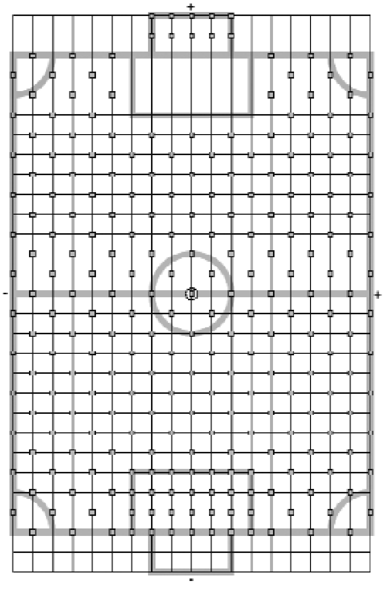
Durante l'esercitazione e alla fine il docente, assieme agli allievi, valuterà la correttezza del lavoro cercando di far scoprire la simmetria dell'intera figura, precisando l'asse di simmetria.

Gioco G: giochiamo a calcio

Materiale:

Griglia su tavola rappresentante un campo da calcio (quadretti in cm 2x2). Alcuni nodi non sono contrassegnati, altri segnati con una forma geometrica colorata; i lati del campo recano i segni + e – in modo da definire un orientamento analogo a quello del piano cartesiano (vedi figura seguente)

3. La figura è stata realizzata nel corso di uno dei Pomeriggi matematici organizzati dalla Società Matematica della Svizzera Italiana (SMASI).



Una pedina che funge da pallone.

Variante a) Un dado che indichiamo con A sulle cui facce appaiono i segni + e – e uno o più dadi sulle cui facce appaiono i numeri naturali da uno a sei[4]. (Si lanciano contemporaneamente ottenendo un numero intero relativo.)

Variante b) Due dadi numerati di colore diverso; al primo si dà un valore positivo e al secondo un valore negativo. Si lanciano contemporaneamente e con i numeri che appaiono si esegue un'operazione prevista – una qualsiasi operazione aritmetica ottenendo un numero intero relativo.)

Giocatori: 2 allievi

Modalità di gioco

– Mettere il pallone al centro – Sorteggiare il giocatore che inizia – Stabilire a sorte il possesso del campo: il giocatore (x) lancerà i dadi quando il pallone è sugli incroci semplici mentre il giocatore (y) lancerà i dadi quando il pallone è sugli incroci contrassegnati.
– A turno si fanno due lanci; chi ha lanciato i dadi muove il pallone dapprima in orizzontale poi in verticale a seconda del risultato ottenuto. In caso di rete il pallone viene rimesso al centro campo.
– Variante a) Quando il pallone esce da uno qualsiasi dei lati del campo, il turno passa all'avversario che tira il pallone dal punto in cui è uscito.
  Variante b) Quando il pallone esce ai lati del campo il pallone passa all'avversario che lo tirerà dal punto in cui è uscito, anche se l'incrocio appartiene al giocatore che ha buttato fuori il pallone. Quando il pallone esce a fondo campo si applica la regola del gioco del calcio: calcio d'angolo o rimessa dal fondo.

4. In commercio si possono anche trovare dadi con più di 6 facce recanti numeri naturali oltre il 6.

1. Per gli amanti della geometria alla Euclide Teorema sul triangolo dei piedi delle altezze

Antonio Steiner, Gianfranco Arrigo

Enunciato

Fra tutti i triangoli inscritti in un triangolo acutangolo, il triangolo dei piedi delle altezze[1] ha perimetro minimo.

Prima dimostrazione

Questa dimostrazione fu trovata da H.A. Schwarz. Vediamola[2].

Consideriamo un triangolo acutangolo ABC e lo ribaltiamo lungo il lato BC: otteniamo il triangolo A_1BC. Facciamo la stessa cosa con il triangolo A_1BC rispetto all'asse CA_1 e otteniamo A_1B_1C e così via ottenendo nell'ordine i triangoli $A_1B_1C_1$, $A_2B_1C_1$, $A_2B_2C_1$ e $A_2B_2C_2$. Questi triangoli hanno a due a due un lato in comune e uno è il simmetrico dell'altro (vedi la figura 1). Il triangolo $\alpha\beta\gamma$ dei piedi delle altezze viene successivamente ribaltato nei triangoli $\alpha\beta_1\gamma_1$, $\alpha_1\beta_1\gamma_2$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$, $\alpha_2\beta_3\gamma_3$, $\alpha_3\beta_3\gamma_4$, $\alpha_4\beta_4\gamma_4$ e di conseguenza i punti α, β_1, γ_2, α_2, β_3, γ_4, α_4 sono allineati e la lunghezza del segmento $\alpha\ldots\alpha_4$ è doppia del perimetro del triangolo $\alpha\beta\gamma$.

Ora, se abc è un qualunque altro triangolo inscritto nel triangolo ABC, che, sottoposto alla successione di simmetrie assiali si trasforma in ab_1c_1, $a_1b_1c_2$, $a_2b_2c_2$, $a_2b_3c_3$, $a_3b_3c_4$, $a_4b_4c_4$. Quindi la lunghezza della spezzata $ab_1c_2a_2b_3c_4a_4$ risulta uguale al doppio del perimetro abc.

Siccome, però, BC e B_2C_2 sono paralleli e i segmenti αa e α_4a_4 sono isometrici, allora il doppio del perimetro di $\alpha\beta\gamma$ è uguale alla lunghezza del segmento aa_4 e quindi è minore della lunghezza della spezzata $ab_1c_2a_2b_3c_4a_4$ e del doppio del perimetro del triangolo abc.

1. Si intende altezza in senso euclideo, cioè il segmento che contiene un vertice e perpendicolare al lato opposto.
2. Vedere Jacob Steiner, Gesammelte Werke, Band II, pag. 45, No. 7 e pag. 238, No. 64. II. 3. Rudolf Sturm, Bemerkungen und Zusätze zu Steiner zu Steiner's Aufsätzen über Maximum und Minimum, Journal für reine und angewandte Mathematik, Band 96, pag. 62.

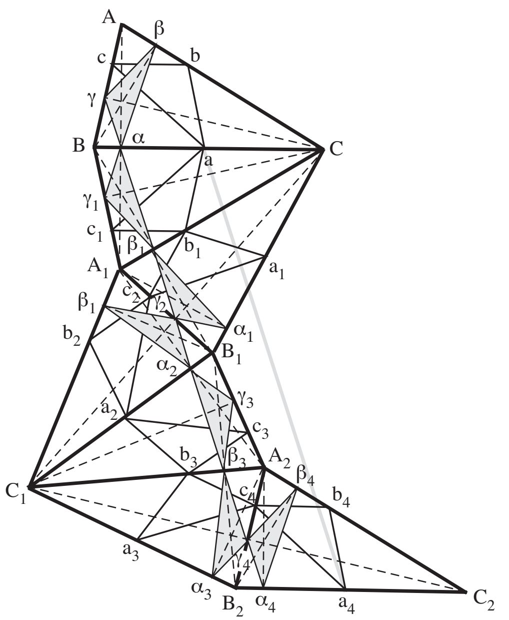


Figura 1

Seconda dimostrazione

Quest'altra è dovuta a Féjer[3]. Si compone di due parti.
Consideriamo la figura 2.

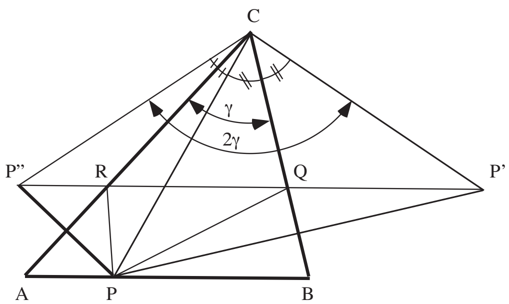


Figura 2

Da essa ricaviamo che:

- Fissato a piacimento P su AB, il perimetro del triangolo PQR è uguale alla lunghezza del lato P'P" del triangolo equilatero P'P"C avente l'angolo (2 γ) che diventa minimo quando è minima la lunghezza |CP'|=|CP"|=|CP|.
- La lunghezza di CP diventa minima quando CP è perpendicolare ad AB, ciò che dimostra il teorema.

3. Lipót Féjer, all'anagrafe Leopold Weiss, nome che cambiò in omaggio alla cultura ungherese. Studiò matematica a Budapest e a Berlino dove fu allievo di Hermann Schwarz. Diede importanti contributi alla teoria delle serie di Fourier.

V. Segnalazioni

1. Premio «Giorgio Tomaso Bagni»

Per onorare la memoria di Giorgio Tomaso Bagni, è stata fatta una raccolta di fondi che ha permesso l'organizzazione di un premio per giovani ricercatori in didattica della matematica.

I versamenti possono ancora essere effettuati con bonifico bancario alla Veneto Banca di Crespano del Grappa con il seguente IBAN:

IT 57 P 054 1861 6500 1457 0108303

oppure attraverso il Banco Posta del C.R.D.M.U.M.
IBAN: IT 89 I 076 0112 0000 0001 5052319

oppure utilizzando il conto corrente postale del Centro:
CCP N. 15052319
Associazione CRDUM INSEGN. MATEM. SCIENZE INTEGR.
Via San Giacomo 4, 31017 Paderno del Grappa (TV).
Mettere sempre la causale «Giorgio Bagni».

Bando del premio

ARTICOLO 1

Al fine di ricordare la figura del professor Giorgio Tomaso Bagni, il Centro Ricerche Didattiche «Ugo Morin», gestore, per il 2010, dei fondi raccolti, bandisce tre premi, rispettivamente di 2 500, 1 500 e 1 000 euro, per articoli di ricerca in didattica della matematica di giovani studiosi.

ARTICOLO 2

I lavori devono essere stati pubblicati negli ultimi cinque anni in una rivista nazionale o internazionale che preveda un sistema di referaggio o come capitolo di un libro internazionalmente importante sempre sottoposto a refereraggio, e devono trattare un argomento di ricerca in didattica della matematica. Tutti gli autori degli articoli non devono aver compiuto 40 anni alla scadenza del bando.

ARTICOLO 3

La Commissione giudicatrice è costituita dai professori

- Arzarello Ferdinando, Dipartimento di Matematica, Università di Torino, via Carlo Alberto 10, 10123 Torino;
- Furinghetti Fulvia, Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Genova, via Dodecaneso 35, 16146 Genova;
- Iaderosa Rosa, via XXV Aprile 5, 20090 Cesano Boscone, Milano

ARTICOLO 4

La domanda deve essere presentata, in carta libera, da uno degli autori dell'articolo e sottoscritta da tutti gli autori e va indirizzata al Centro di Ricerche Didattiche «Ugo Morin», via San Giacomo 4, 31017 Paderno del Grappa TV. Nella domanda devono essere indicati il titolo del lavoro presentato, i nomi degli autori, il domicilio e il recapito telefonico al quale l'autore che presenta la domanda intende ricevere eventuali comunicazioni; la data ed il luogo di nascita, la residenza, il numero di codice fiscale e il recapito telefonico di tutti gli autori. Ogni autore può presentare o sottoscrivere al massimo due domande. Ogni domanda deve riguardare un solo lavoro. I lavori dovranno essere spediti ai singoli membri della Commissione e dovranno pervenire entro il 31.3.2010. Il giudizio della Commissione è inappellabile.

ARTICOLO 5

I premi saranno consegnati durante un convegno che si svolgerà, in onore del professor Bagni, nella prima settimana di ottobre 2010 nella città di Treviso. Nel caso di pubblicazioni in collaborazione il premio sarà equamente diviso tra tutti gli autori. Durante il convegno gli autori degli articoli premiati dovranno illustrare le loro ricerche. Gli articoli premiati, o una loro rielaborazione, saranno pubblicati negli Atti del convegno.

2. Recensioni

Bruno D'Amore (2009). Giocare con la matematica. Bologna: Gedit-Archetipolibri. Pagg. 105, 17 euro. ISBN 978-88-89891-25-4. Prefazione di Ennio Peres.

Il matematico, filosofo ed epistemologo Ludovico Geymonat (1908-1991), nel presentare una moderna edizione dei *Ludi Rerum Mathematicarum* di Leon Battista Alberti (1404-1472), sottolinea che lo scopo principale dell'Autore «è quello di illustrare al più vasto numero di persone colte gli interessantissimi compiti che la matematica può assolvere nonché gli ingegnosi artifici che è in grado di suggerirci nelle più varie situazioni concrete» (L.B. Alberti, *Ludi matematici*, Guanda, Milano, 1980, pag. 9).

Questa frase di Geymonat potrebbe perfettamente introdurre il libro *Giocare con la matematica* di Bruno D'Amore, uno dei più importanti studiosi di didattica della matematica del panorama scientifico internazionale, docente presso le università di Bologna, Bolzano e presso l'Alta Scuola Pedagogica di Locarno, direttore della Scuola di Dottorato di Ricerca in Edicación Matemática presso l'Università Distrital di Bogotà, Colombia, ideatore e direttore del Convegno nazionale «Incontri con la Matematica» che dal 1987 riunisce annualmente a Castel San Pietro Terme, alle porte di Bologna, legioni di insegnanti (nel 2008 i partecipanti al convegno furono 1800).

Il prezioso volume della casa editrice bolognese Gedit-Archetipolibri propone una rassegna di cento giochi che spaziano in settori diversi della matematica: dalla teoria dei grafi alla geometria piana e solida, dalla topologia alla teoria dei numeri e l'elenco sarebbe lungo. Giochi sempre stimolanti, vivaci e sorprendenti, in una parola giochi *divertenti*. Lo stesso Bruno D'Amore afferma: «la parola "gioco" evoca subito l'altra automaticamente connessa "divertimento"; dunque, immediatamente, uno che propone un gioco spera che chi decida di risolverlo si diverta. Ma la collana editoriale che scelgo questa volta ha fini didattici. Infatti, spero ardentemente che il mio lettore sia in molti casi un insegnante e che decida di proporre questi (o altri) giochi matematici ai suoi allievi. Decidere per ogni gioco quale sia il livello scolare giusto, l'età giusta non è banale: mi affido all'esperienza di chi legge. Ma che il gioco matematico entri decisamente nella prassi scolastica, nella speranza che il giovane studente, giocando, apprenda, sì, ne sono ancora convinto» (pag. XIV).

In linea con l'impostazione teorica che guida la ricerca in didattica della matematica, Bruno D'Amore delinea quindi un… gioco che collega e coinvolge tre partecipanti ideali: il sapere matematico, l'allievo e l'insegnante.

Qualcuno potrebbe chiedersi se ogni processo di insegnamento-apprendimento della matematica, in senso lato, possa basarsi principalmente su attività di tipo ludico. Lasciamo la risposta alle parole dello stesso Bruno D'Amore (pag. XIV): «certo, non tutta la matematica si apprende giocando; per carità, sarebbe ingenuo auspicarlo o crederlo; ma che, tra le mille applicazioni di questa nostra disciplina vi sia anche questa, perché tacerlo ai giovani?».

Giocare con la matematica è un libro che «fa bene» alla matematica. Il lettore potrà impegnarsi nella risoluzione dei giochi proposti e confrontare la propria soluzione con quella suggerita dall'Autore. Potrà insomma comprendere che la matematica non è un blocco granitico e minaccioso di regole o di esercizi noiosi e ripetitivi «là fuori», da contemplare e da digerire faticosamente, ma è una disciplina creativa, bella, entusiasiamante. (Giorgio T. Bagni)

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2009). Zero. Aspetti concettuali e didattici. Trento: Erickson. Pagg. 122, euro 16. ISBN 978-88-6137-481-2.

Che lo zero sia un concetto – anzi un campo concettuale, nell'accezione di Gérard Vergnaud – lo sapevamo. Bruno stesso ce lo ha ricordato parecchie volte in articoli, relazioni, chiacchierate informali. Queste idee, col passare del tempo, si sono sviluppate, arricchite e intrecciate con altri aspetti matematici, storici ed epistemologici. Ed ecco apparire, puntuale, un nuovo testo di questi due prolifici autori, proprio dedicato a tale affascinante tematica. Personalmente lo saluto con particolare piacere perché, secondo me, è proprio questo il genere di pubblicazione che più si adatta alla formazione continua degli insegnanti. Cioè: un libro agile, che si può leggere e apprezzare a diversi livelli di competenza, scientificamente inappuntabile, ricco di informazioni e di stimoli distribuiti su un ampio ventaglio culturale. Già, perché l'insegnante, oggi, con i mille e uno oneri che si ritrova, ha sempre meno tempo, disposizione d'animo e strumenti che gli permettano di selezionare e intraprendere letture formative di un certo impegno. Ben vengano quindi sussidi come questo che con dotta semplicità conduce il lettore attraverso percorsi ricchi di matematica, di filosofia, di storia e di didattica senza che il lettore sia costretto a interrompere la lettura per andare a sfogliare altri libri, per sapere che cosa significa quel determinato termine specialistico, o chi è quel tale personaggio citato. Sfogliando questo testo, in poche ore di lettura, ognuno può dare una sistemazione alle proprie idee, magari disordinatamente sparse nella mente o incomplete, relative al concetto matematico dello zero. Il tono scelto dagli autori per colloquiare col lettore è rassicurante e rigorosamente realistico, nel senso che né si sacrifica il rigore alle (pretese?) necessità della divulgazione – come purtroppo succede in altre pubblicazioni – né si scoraggia lo stesso con complicate presentazioni formali. Dove le cose si fanno delicate e complesse, il lettore viene informato subito e la presentazione si arresta. Chi proprio desidera approfondire, trova un'ampia elencazione bibliografica. Il nostro insegnante può sempre continuare la lettura senza perdere nulla. Saprà allora apprezzare ancora di più i parecchi consigli e le esortazioni a evitare cattive abitudini e luoghi comuni scorretti entrati purtroppo nella prassi didattica e cause importanti di misconcezioni e insuccessi nell'apprendimento della matematica. Nessuno si deve offendere apprendendo che cose finora considerate «al di sopra di ogni sospetto» siano in realtà veri e propri errori o fonte di confusione per gli allievi. Non è mai tardi per correggere la propria attività didattica: ogni miglioramento, anche piccolo, è preziosissimo perché permette di evitare situazioni di apprendimento patologiche causate da aspetti didattici. Con ciò si offre un prezioso regalo alla formazione dei giovani, soprattutto a quella iniziale, propria dei bimbi in età prescolastica e dei primi anni della scuola primaria. Anche loro trovano spazio in questo volumetto: una quindicina di pagine presentano le loro idee spontanee sullo zero e sull'uso che ne fanno. Testimonianze preziose, abilmente raccolte dagli autori con l'aiuto di alcuni collaboratori del RSDDM di Bologna.

L'ultimo capitolo propone una importante e documentata riflessione sulle difficoltà incontrate dagli allievi attorno allo zero. La conoscenza delle cause possibili degli errori aiuta l'insegnante a capire meglio la natura degli stessi, condizione necessaria per un idoneo intervento di recupero.

Concludo con l'auspicio – e quasi con la certezza – che questo ennesimo sforzo degli autori incontri l'interesse di tutti quelli che hanno a cuore la formazione culturale dei giovani, in particolare quella matematica, la cui importanza non sempre viene capita da chi dovrebbe. (G. Arrigo)

De Nuccio S. (2009). Lezioni di matematica dagli scritti di Évariste Galois. Vol. 2, parte II. Campobasso: Edizioni Goliardiche. Vol. I pagg. 495, euro 39. ISBN 88-88171-92-4. Vol. II pagg. 592, euro 45. ISBN 978-887873-075-5.

Sul numero 56 del BDM si trova una recensione dei volumi 1 e 2 (prima parte). Con questo nuovo librone gli Autori continuano l'interessantissima pubblicazione. Come già i precedenti, il presente testo s'impone all'attenzione degli insegnanti di matematica per la ricchezza degli spunti offerti, per i numerosi riferimenti bibliografici e per la serietà della ricerca perseguita con grande costanza.

Dalla nota degli autori:

«Le due lezioni, tratte dai compiti scolastici di Evariste Galois, si offrono come punti di partenza per percorsi storici e disciplinari nell'aritmetica e nella geometria. Quelle poche pagine manoscritte raccolgono gli sviluppi di millenni di matematica, e questo volume ne spiega il contenuto in maniera sistematica e continua, sulla scia dell'evoluzione temporale, seguendo i testi originali di vari autori del passato, da Pitagora a Gauss».

Le proposte si inseriscono bene nella matematica che si tratta nelle scuole superiori, ma anche l'insegnante di scuola media può trovare interessanti spunti da adattare a quel livello scolastico. Dopo aver sfogliato questi volumi ritengo difficile che un insegnante possa ancora sostenere di non sapere dove attingere per procurarsi nuovi materiali didattici, nuove idee, nuove possibilità per interessare gli studenti. (G. Arrigo)

Progetto grafico
Bruno Monguzzi
Prestampa
Taiana
Stampa
Veladini

Redazione
Laboratorio di didattica della matematica
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera

Telefono
091 814 18 21/22/24
Fax
091 814 18 19
gianfranco.arrigo@span.ch

Amministrazione
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera
Fax
091 814 18 19

Esce due volte all'anno
a maggio e a dicembre

Abbonamento annuo
SFR 30
€ 16

Bollettino dei docenti di matematica
59

In questo numero: ricordo di Giorgio Tomaso Bagni, la seconda parte del contributo di J.-C. Pont; storia della matematica di S. Maracchia; vari aspetti didattici di A. Piatti - I. Dellagana, G. Arrigo, S. Cataldi, A. Carmeci e G. Mainini; giochi proposti da A. Frapolli e B. Mutti; matematica a cura di A. Steiner - G. Arrigo; recensioni.

ISBN 978-88-86486-75-0
Fr. 18.–

Repubblica e Cantone Ticino
Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport