In questo numero: seconda parte dell'omaggio a Francesco Speranza, firmata da G. Arrigo e E. Montella; musica e matematica, di D. Baggi; a proposito di una incredibile pubblicazione, di G. Mainini; su particolari giochi d'azzardo, di M. Cerasoli; ricerca e sperimentazione didattica, di G. Arrigo; giochi e quiz matematici, di A. Frapolli, del giocologo Ennio Peres e del maestro B. Mutti; passeggiate matematiche, di A. Steiner e G. Arrigo; segnalazioni e recensioni.

ISBN 978-88-86486-78-1
Fr. 18.–

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport

60

Bollettino dei docenti di matematica

Maggio
2010

Centro
didattico cantonale

A cura
del Laboratorio di didattica della matematica

Bollettino dei docenti di matematica

60

Maggio
2010

Ufficio
dell'insegnamento medio
Centro
didattico cantonale

Bollettino
dei docenti di matematica
60

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport

ISBN 978-88-86486-78-1

Bollettino dei docenti di matematica 60

Maggio
2010

Ufficio dell’insegnamento medio
Centro didattico cantonale

Indice

Prefazione

Il 7 febbraio scorso è morto Antonio Steiner. Se ne è andato così, in punta di piedi, per sua espressa volontà. Antonio è stato per noi un grande esempio che non scorderemo: matematico con spiccato interesse per la letteratura e la filosofia e inoltre, aggiungiamo noi, per la didattica. Amico sincero ed estimatore della nostra rivista, ci ha regalato diversi contributi. Le sue Passeggiate matematiche si concludono qui, con un ultimo significativo contributo.

Si inizia con la seconda parte dell'omaggio a Francesco Speranza, che completa l'articolo pubblicato sul numero 58, a pagina 71. La sezione Varia prosegue con l'interessante tema «Musica e Matematica», presentato da un grande specialista internazionalmente conosciuto e apprezzato, nonché persona molto vicina alla nostra rivista: Denis Baggi, informatico, attualmente attivo alla SUPSI (l'articolo continuerà sul prossimo numero). Giorgio Mainini ci stupisce parlandoci di un libro di recente pubblicazione che potrebbe affascinare il lettore sprovveduto, ma che agli occhi attenti di una mente matematica si presenta come una incredibile bufala zeppa di affermazioni errate e ingenue: lo pubblichiamo anche perché potrebbe costituire un buon esercizio di caccia all'errore per i nostri allievi. La sezione si conclude con una firma abituale, quella di Mauro Cerasoli, al quale siamo ancora più vicini, dopo la terribile catastrofe che un anno fa ha colpito la sua L'Aquila.

La parte dedicata alla didattica, questa volta, è interamente opera di Gianfranco Arrigo, che presenta due articoli. Il primo è il rapporto della ricerca da lui intrapresa sulle concezioni (e misconcezioni) dell'idea di casualità (di probabilità in senso matematico) che alberga nelle menti dei bambini della scuola elementare. La conclusione è un appello ai responsabili didattici di questo settore scolastico affinché rompano gli indugi e prevedano da subito nei programmi ufficiali una prima educazione al pensiero probabilistico, formazione che poi andrà convenientemente continuata nella scuola media e perfezionata nelle superiori in modo continuo, su tutto l'arco del ciclo di studi e non ridotta a ristretti episodi come capita attualmente. Il secondo articolo riferisce sulle sperimentazioni che l'autore sta sviluppando attorno al tema dell'educazione al calcolo numerico, argomento già introdotto nei numeri 40, 43 e 58 di questa rivista.

Anche in questo campo l'autore propone cambiamenti sostanziali: la soluzione dell'annoso problema dell'insegnamento degli algoritmi del calcolo scritto, la rivalutazione del calcolo mentale e l'integrazione dei moderni strumenti di calcolo e della scrittura matematica già nella scuola elementare o primaria, che dir si voglia.

Nella sezione Giochi, dopo l'immancabile e atteso nuovo quiz di Aldo Frapolli, ritroviamo, con particolare piacere, un grande dei giochi matematici: il giocologo per eccellenza, Ennio Peres, che ci regala una chicca relativa alla… telepatia egizia. Conclude Bernardo Mutti con un altro dei suoi giochi di apprendimento per gli allievi delle elementari.

Infine, per gli studenti delle superiori, Antonio Steiner e Gianfranco Arrigo propongono originali attività di trigonometria elementare.

Seguono le Passeggiate matematiche di Antonio Steiner e Gianfranco Arrigo con originali attività di trigonometria elementare.

Nelle segnalazioni si trovano il programma in anteprima del Convegno di Castel San Pietro Terme (Bologna) 2010, una prima informazione riguardante il Convegno in ricordo di Giorgio Tomaso Bagni che si terrà il primo ottobre 2010 a Treviso e recensioni da non perdere, che presentano anche recenti pubblicazioni di autori ticinesi.

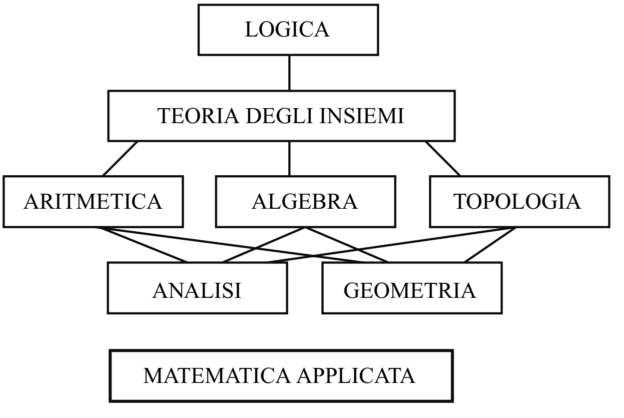
1. Ricordo di Francesco Speranza, a dieci anni dalla scomparsa

Gianfranco Arrigo, Edoardo Montella

Seconda conferenza[1]. L'insegnamento della geometria[2]

1. Introduzione di Francesco Speranza[3]

Possiamo tradurre con un grafico quella che, al giorno d'oggi, può essere considerata l'organizzazione interna della matematica[4].

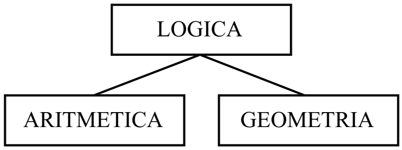


Bisogna tener conto però che, al nostro livello, la precedente è solo una delle possibili proposte di organizzazione della Matematica, perché le opinioni possono divergere.

---

1. La sintesi della prima conferenza, a cura di Gianfranco Arrigo, è pubblicata sul numero 58, alle pagine 71-76.
2. Note relative alla conferenza tenuta da Francesco Speranza a Lugano, il 25 novembre 1972, a cura di Edoardo Montella.
3. Gli interventi che Francesco Speranza ha effettuato in Ticino non sono mai state vere e proprie conferenze, ma nutriti scambi di idee preceduti da una sua introduzione.
4. Questo schema è riferito alla parte deterministica della matematica. Oggi, accanto ad aritmetica, algebra e topologia si inserisce la parte relativa a probabilità e statistica (ndr).

Per fare solo qualche esempio, si può contestare la subordinazione dell'Aritmetica e della Geometria alla Teoria degli insiemi, adoperando, invece, uno schema del genere:



Oppure, ancora, il grafo può essere iniziato dalla Teoria degli insiemi (lasciando fuori la Logica) e facendo, quindi, Teoria ingenua degli insiemi. (Sappiamo comunque per esperienza che anche lasciando la Logica fuori dalla porta, essa prima o poi rientrerà dalla finestra). Infatti, generalmente, si pensa che fare della Logica sia un discorso molto difficile, da riservare addirittura agli ultimi anni dell'università. Questo, però, vale esclusivamente se si vuole impostare un discorso assiomatico; in un lavoro a carattere didattico, invece, la situazione cambia completamente, e l'aiuto fornito dalla formalizzazione e dal simbolismo logico può portare a concrete facilitazioni.

Si potrebbero fare ancora altri esempi che metterebbero sempre meglio in luce la relatività di uno schema come il precedente. Il mettersi in un'ottica del genere, comunque, permette di chiarire le idee per trovare una strategia d'azione, in linea con la scelta effettuata tracciando il precedente schema.

Scelta che non è, ovviamente, arbitraria, ma trae la sua giustificazione da motivi che possiamo dire storici. In realtà, il nostro grafo è un albero (esiste, cioè, un **cammino** da seguire in esso); ma, al livello didattico, anche in trattazioni, dal tono molto elevato, come quella del Bourbaki, è molto difficile, e talvolta impossibile, seguire pedissequamente il cammino di cui sopra, e si finisce molto spesso per dover lavorare su esempi tratti da teorie non ancora sviluppate (e ciò dimostra ancora una volta, se ce ne fosse bisogno, che la Matematica non può essere considerata, e tanto meno insegnata, come un insieme di teorie staccate).

Per pervenire a un'esemplificazione, quanto sopra può interpretarsi così: partendo da alcuni assiomi, si ha la Logica; aggiungendone altri si ha la Teoria degli insiemi e così via. Ciò nella teoria; nella pratica didattica, invece, è difficile procedere così perché si deve procedere saltando un po' di qua e un po' di là, e per poter andare avanti si devono comunque avere in mano degli elementi, cioè degli «strumenti operativi» anche di teorie non ancora sviluppate.

In conclusione, potremmo affermare che, della pratica didattica della Matematica, ha più importanza il **come** si fa, e non il **cosa** si fa; cioè il metodo è più importante del contenuto.

E questo ci potrebbe anche indirizzare sulla differenza fondamentale tra la cosiddetta «Matematica moderna» e la cosiddetta «Matematica tradizionale»: in quest'ultima non si erano ancora messe in evidenza alcune fondamentali strutture e relazioni, perché non se ne era ancora compresa l'importanza (per esempio la struttura di relazione di equivalenza) e quindi non esisteva ancora una visione unitaria della materia.

La peculiarità, invece, dell'insegnamento della «Matematica moderna» sta proprio nel portare alla luce e nell'evidenziare queste strutture fondamentali, realizzando così la sopraddetta visione unitaria.

Non si può, comunque, pretendere che i ragazzi capiscano subito o afferrino immediatamente le strutture fondamentali, ma bisogna presentargliele in maniera adeguata e sotto diversi aspetti, con molti esempi di natura diversa, perché riescano a capirle bene.

A questo punto ci si può porre la domanda:

«Come si colloca la Geometria in quest'ottica?».

La Geometria potrebbe essere intesa come una specie di Protofisica, in quanto ha applicazioni nei campi più disparati. In generale la potremmo definire come «culturalizzazione estetica».

Bisogna, quindi, insegnando la Geometria, tener conto che essa serve al di fuori della Matematica.

Molte soluzioni sono state proposte per l'insegnamento della Geometria, ma sono tutte state criticate, proprio per la multiformità della materia, che possiede tante sfaccettature; per cui, probabilmente, non esiste una soluzione standard, unica, come vedremo meglio più avanti.

So non tenessimo conto delle applicazioni della Geometria al di fuori del campo strettamente matematico, potremmo addirittura pensarla come Dieudonné, e dire:

«À bas Euclide», «À bas le triangle».

Ma, per contro, se teniamo conto del peso che, nel discorso geometrico, hanno avuto i vari Euclide, Alberti, Brunelleschi,… potremmo anche dire:

«À bas Dieudonné», «Vive le triangle».

Al limite potremmo anche eliminare la Geometria dai programmi scolastici, sostituendola con qualche altra cosa, e sarebbe anche questa una scelta.

Così, però, perderemmo una notevole occasione di sintesi dei vari discorsi fatti precedentemente nelle altre branche della matematica (per esempio, è evidente, i legami tra Geometria, Algebra e Topologia sono fortissimi); è quindi difficile scorporare dal discorso matematico la Geometria.

Quindi: sì alla Geometria, ma come insegnarla?

Intendendo la Geometria come Protofisica, potremmo considerarla come: «organizzazione visiva in cui non si tiene conto della massa e del tempo». Non saremmo, però, come visto prima, più nell'ambito della matematica, e questo vale soprattutto al livello di alunni di Scuola Media, cioè in un'età intermedia, di transizione.

Come si vede, si conferma che non può esistere, non esiste, in questo campo, la «ricetta prodigiosa» pronta che risolve tutti i problemi. È possibile, piuttosto, tentare diverse strade (vedi, per esempio, le proposte della prima conferenza).

Per delimitare un po' di più il nostro problema, potremmo chiederci: vogliamo fare della Geometria un discorso di appoggio alla Matematica o svilupparla unitariamente come teoria a sé?

La prima possibilità potrebbe essere, evidentemente, il discorso tipico della scuola media.

Ancora qualcosa d'altro si può mettere in evidenza a proposito della Geometria: al limite potrebbe sembrare un mezzo complicato per dimostrare delle cose evidenti (è il caso della Geometria euclidea).

Perché la Geometria Euclidea è, sì, un discorso ipotetico deduttivo, ma che nasconde un fondo di ingenuità, perché pone come assioma fondamentale il credere a ciò che si fa.

Inoltre la Geometria euclidea diventa una specie di osservazione del modello fisico (Hilbert: il modello della Geometria euclidea è lo spazio cartesiano, che riconduce ai numeri reali), e questo modello è molto complicato.

A questo punto, quindi, può entrare, nel nostro discorso, la **microassiomatica** (studio di modelli finiti) che non solo non «dissacra» la Geometria, come qualcuno erroneamente pensa, ma permette di indagare assiomaticamente su modelli molto più semplici di quelli della Geometria euclidea. Cioè in pratica, si può fare tramite la microassiomatica lo stesso lavoro assiomatico, più preciso e più semplice, su modelli più semplici di quelli della Geometria euclidea.

2. Riassunto delle idee emerse durante la discussione

2.1

Se si vuol restare in un ambito sintetico, potremmo uscire dall'ambito della Geometria affine e metterci in quello della Geometria metrica (l'unica cosa di cui abbiamo bisogno è il postulato delle parallele).

Quanto sopra nel senso che, se ci si accontenta della Geometria affine, possiamo semplificare di molto le cose, perché la sua struttura è molto meno complessa di quella della Geometria metrica.

Così, per esempio, si può superare la difficoltà didattica delle rotazioni non di stesso centro (perché nella geometria affine non si parla di rotazioni).

2.2

Per quanto riguarda, poi, la questione dello spazio, è ancora più difficile, perché, a meno di non algebrizzare completamente la Geometria, si incontrano delle difficoltà dovute alla carenza dell'intuizione nel passaggio dal piano allo spazio.

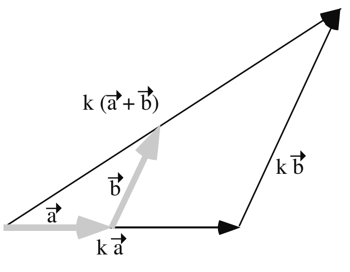
Per esempio, è facile che un allievo, alla domanda: «dato un piano e un punto fuori di esso, quante rette esistono passanti per il punto e parallele al piano?» se noi non facciamo delle esemplificazioni visive (per esempio con le mani), è facile che l'allievo risponda: «una!»

2.3

Nella trattazione dalla geometria vettoriale, avere alle spalle un retroterra geometrico aiuta molto nella trattazione, per vedere meglio tanti passaggi.

Esempio

Sotto l'assioma $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\,\vec{a}+k\,\vec{b}$ degli spazi vettoriali, si nasconde il Teorema di Talete, come si vede nel disegno.



Quindi per poter capire la fondatezza di questo assioma, bisogna conoscere il teorema di Talete.

Quindi ci si pone il problema: quali elementi bisogna avere in mano per poter introdurre un discorso di geometria più avanzato (geometria vettoriale, spazio vettoriale…)?

E questo si pone non solo per la geometria dello spazio, ma anche per la geometria del piano.

2.4

Un problema di base:

«Cosa si dà in più agli allievi con la Geometria, che non si possa ottenere con l'Algebra?

Soprattutto per quegli allievi che dopo non continuano».

A questa domanda si possono dare tantissime risposte, e tutte saranno senz'altro risposte soggettive.

Una delle risposte potrebbe essere:

Razionalizzazione dello spazio fisico, sensibile.

La Geometria infatti obbliga a un maggior spirito di autocritica, e questa sua difficoltà insita potrebbe essere da sola motivo didattico sufficiente per il suo insegnamento nelle scuole.

Anche la Fisica, però, è in fondo tentativo di razionalizzare, in un certo senso, lo spazio fisico, utilizzando lo strumento matematico-geometrico.

Anticamente (prima di Newton) la Fisica non aveva niente a che vedere con la matematica; dopodiché la si è matematizzata adoperando il modello euclideo dello spazio fisico, quindi la Geometria.

Con le moderne concezioni della Fisica, le interpretazioni dello spazio fisico sono cambiate, è saltata l'idea del continuo, dell'infinitamente divisibile; e quindi anche l'interpretazione dello spazio fisico (euclideo) non va più, è superata e così anche la Geometria. Cioè la Geometria euclidea va ancora bene per la matematica intesa come teoria, ma non va più bene, non è più applicabile nella Fisica.

2.5

Esemplificazione didattica (scuola superiore)

Tutti i discorsi fatti finora, potrebbero però sembrare molto teorici.

Come si può concretizzare il discorso sul programma di geometria da svolgere nelle scuole?

Possiamo provare a farlo, servendoci di un esempio:

«Definiamo per via affine che cos'è una traslazione».

(Sotto ci si può vedere, però, anche un'estensione al discorso metrico.)

Ovviamente, una traslazione sarà una biiezione del piano (rigato) in sé. Diamo, innanzitutto, la definizione di parallelismo. Si potrebbe essere indotti a dire che «due rette r,s sono parallele quando sono disgiunte ($r \cap s = \emptyset$)».

In questo modo, però, la relazione di parallelismo non è più di equivalenza, perché non gode della proprietà riflessiva.

Per superare lo scoglio, consideriamo una relazione di «parallelismo o coincidenza».

$(r\,\rho\, s) \Leftrightarrow (r \cap s = \varnothing \vee r = s)$

Questa relazione è, evidentemente, riflessiva, simmetrica e transitiva. Quindi è una relazione di equivalenza (le classi di equivalenza sono le **direzioni**).

Ritorniamo adesso alle traslazioni.

Si ha, denotando con τ una generica traslazione:

$\tau: \Pi \longrightarrow \Pi$

Proprietà:

1. le traslazioni trasformano rette in rette: $\forall r, \tau(r) = r' \quad (r, r' \text{ rette})$
2. le traslazioni trasformano rette in rette aventi la stessa direzione: $\forall r, \tau(r)\,\rho\, r$

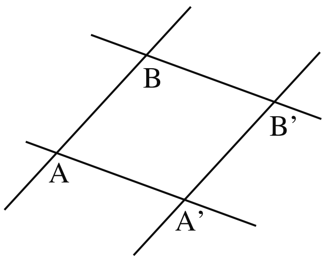
Queste due proprietà si possono compendiare in:

$\forall r \in \Gamma,\ (\tau(r) \in \Gamma) \wedge (\tau(r)\,\rho\, r)$ (Γ è l'insieme delle rette del piano)

Ma tutto ciò non basta a definire le traslazioni, perché anche le omotetie godono delle stesse proprietà.

La differenza fondamentale per caratterizzare le traslazioni è espressa da:

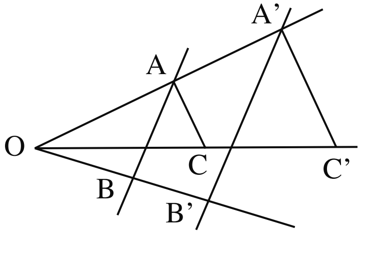
$\forall A, \forall B,\ AA'\,\rho\, BB'$



o anche

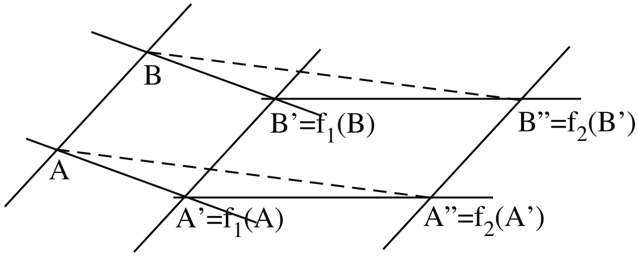
Per le dilatazioni f, invece, si ha:

1. $\forall r \in \Gamma,\ (f(r) \in \Gamma) \wedge (f(r)\,\rho\, r)$
2. $\exists O : \forall A,\ O \in AA'$



Si può anche dimostrare che non esistono altre trasformazioni che mutino rette in rette parallele a parte le traslazioni (insieme T), le dilatazioni (insieme D) e l'identità (I={i}).

A questo punto poniamoci un quesito di natura algebrica: rispetto alla composizione di biiezioni, l'insieme $T \cup D \cup I$ forma un gruppo?



$\boxed{AA" \, \rho \, BB"}$

Essendo, quindi, AA" ρ BB", l'insieme delle trasformazioni che mutano rette in rette parallele (ai sensi di quanto detto sopra) è chiuso rispetto alla legga di composizione di biiezioni (∘).

È poi evidente la verifica degli altri assiomi di gruppo.

$(T \cup D \cup I, \circ)$ è un gruppo.

Inoltre risulta pure facile rendersi conto che $(T, \circ)$ è anche un gruppo, mentre $(D, \circ)$ non è un gruppo.

Tutto ciò può essere visto in un'ottica analitica.

Le coordinate dei punti immagine secondo le trasformazioni che mutano rette in rette parallele sono determinate al seguente sistema:

$$\begin{cases} x' = a\,x + b \\ y' = a\,y + c \end{cases} \quad \text{con } a \neq 0$$

(altrimenti le trasformazioni non sarebbero invertibili)

Consideriamo ora la composizione di trasformazioni ∘:

$$x \xrightarrow{f} a\,x + b \xrightarrow{g} \alpha\left(a\,x + b\right) + \beta$$

$$g \circ f : \begin{cases} x \longrightarrow a\,\alpha\,x + \alpha\,b + \beta \\ y \longrightarrow a\,\alpha\,y + \alpha\,c + \gamma \end{cases}$$

Quindi la composizione è interna e ovunque definita; esiste l'elemento neutro: l'identità, per la quale a=1 e b=c=0.

Ogni trasformazione possiede la sua inversa:

$$f : x' = a\,x + b \longrightarrow f^{-1} : x = \frac{x'}{a} - \frac{b}{a}$$

La legge di composizione è associativa, quindi $(T \cup D \cup I, \circ)$ è un gruppo come avevamo stabilito anche per via non analitica.

Domandiamoci:

quali sono, fra le equazioni generali viste prima, le equazioni delle traslazioni?

Abbiamo le traslazioni ponendo a=1 nelle equazioni generali:

$$\begin{cases} x' = x + b \\ y' = y + c \end{cases}$$

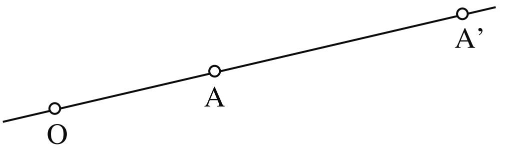
e ciò si potrebbe provare sia analiticamente (adoperando le proprietà del coefficiente angolare) sia geometricamente.

Quindi, se a$=\alpha=$1, le traslazioni formano gruppo; il prodotto di due traslazioni è sempre una traslazione.

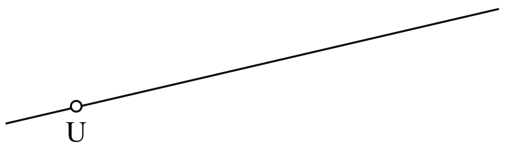
Non è vero, però, il viceversa.

Esempio: una traslazione può derivare dal prodotto di due omotetie. Per costruire due omotetie il cui prodotto sia una traslazione, si può operare così:

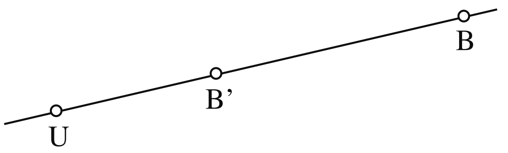
sia data un'omotetia di centro O



una retta e un punto U su di essa



costruiamo un'omotetia il cui rapporto tra i segmenti corrispondenti sia inverso di quello della prima omotetia



OA = UB'
OA'= UB

È facile provare che il prodotto di queste due omotetie è una traslazione, perché si avrà a=1.

Tutto quanto presentato finora è stato visto nell'ottica della geometria affine.

Dovendo fare lo stesso discorso nel campo dalla geometria metrica, le cose si complicherebbero un po', ma sono comunque fattibili, avendo cura di prendere certi accorgimenti.

3. Geometria nella scuola media

Facendo poi un discorso sulle trasformazioni centrato più specificamente sulla scuola media, una proposta valida potrebbe essere quella le cui tappe sono riassunte nel seguente schema:

Schema 1: Trasformazioni

TRASFORMAZIONI ⟶	visione dinamica visione globale possibilità di confronti
TRASFORMAZIONI ⟶	Partire da osservazioni, facili esperimenti e prove empiriche, con la partecipazione diretta e costante dell'alunno, così da esercitarvi le capacità di **intuizione** e lo spirito di ricerca (metodo induttivo). Consentono un aggancio (fondamentale in una **visione globale** dell'insegnamento) con le Osservazioni scientifiche, il Disegno e l'Educazione artistica.
TRASFORMAZIONI ⟶	In un primo momento (I media) introdurle come **movimenti** (visione dinamica) **empiricamente**. In un secondo momento (II e III media) **algebrizzarle** (collegandosi ai concetti di **funzione** e **legge di composizione**: composizione di trasformazioni e loro struttura). Microassiomatiche, isomorfismo di situazioni. In un terzo momento (IV media) **scientificizzarle** introducendole nell'ambito della geometria analitica. Tutto ciò ai sensi dell'insegnamento ciclico o a spirale. **Situazioni di ricerca**: in ognuno dei tre momenti.

Questa proposta, a parte i vantaggi didattici abbastanza evidenti di un insegnamento **ciclico**, ci permette di non rinunciare (nel primo momento) a un accenno agli **invarianti** fondamentale ai fini di un discorso geometrico di tipo **dinamico**.

L'unico inconveniente **potrebbe** presentarsi per le omotetie (è però possibile superarlo dandone un'immagine intuitiva tramite una pietra che, buttata in uno stagno, provochi dei cerchi concentrici che vanno via via dilatandosi; oppure con una piastra di ferro che, riscaldata, si dilata uniformemente).

3.1. Microassiomatica

Un ultimo problema. Dal momento che, facendo un discorso come il precedente, non si possono fare le dimostrazioni di classici teoremi euclidei ci si può chiedere:

«È proprio necessario **fare** queste dimostrazioni?»

Si potrebbe, invece, far nascere la convinzione che, per la struttura razionale, le dimostrazioni siano necessarie, ed eventualmente far vedere che è possibile farle ricorrendo all'algebra o ad altri campi.

In fondo:

è più importante (e necessario) **fare** queste dimostrazioni, quando poi (è provato che) gli allievi le dimenticano con estrema facilità o non è, piuttosto, più importante far vedere la struttura logica di queste dimostrazioni?

Esempio: Schema della dimostrazione per assurdo.

$A \Rightarrow B$ equivalente $\neg B \Rightarrow \neg A$

Se si entra in questo ordine di idee, è facile inserire bene il discorso sulle microassiomatiche, per giustificare ed evidenziare la **teoria assiomatica**.

Anche ciò può essere riassunto, se imperniamo il discorso sulla scuola media, in uno schema.

Schema 2: Microassiomatica

Elementi di una teoria
↓
Assiomi → completezza; → coerenza
Assiomi → MODELLI
↓
Teoremi → MODELLI
↓
Modelli → come supporto per le dimostrazioni; → come verifica della teoria

Preludio dell'**analisi di situazioni** (I ciclo) nel senso di preparare l'allievo sul piano dell'operatività: cioè si abitua l'allievo a un'attività di ricerca che ne sviluppa lo spirito critico e le capacità di osservazione.

Concretizzazione (nel II ciclo) inizialmente con modelli qualsiasi (cioè non geometrici) assegnando gli assiomi come «regole del gioco» (mini-giochi di carte o di dama, per esempio) e successivamente con modelli geometrici. È indispensabile un transfert di situazioni assiomatiche (assiomatizzate) su modelli diversi (cioè isomorfismo di situazioni) perché si possa giungere poi con sicurezza, eventualmente anche nelle scuole superiori, e non nella scuola media, al concetto di matematica come **scienza assiomatica** e quindi dare una concreta impostazione assiomatica agli studi di matematica susseguenti.

→ MICROASSIOMATICA

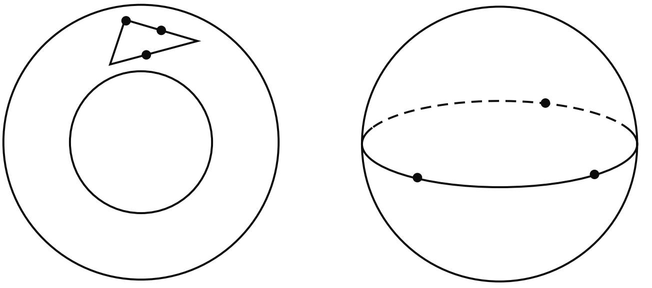
Applicazione immediata: visione assiomatica delle strutture algebriche

↓

Estrapolare (scuola superiore), con sufficiente facilità e con le necessarie basi e premesse, argomenti come: struttura di una teoria assiomatica, schemi di vari tipi di dimostrazione.

Ovviamente, ponendoci in quest'ottica, si deve arrivare a indagini approfondite sulle definizioni. Per esempio, volendo dare una definizione di triangolo:

– nel piano non si presentano problemi:
  «**regione racchiusa in una spezzata triangolare**»
  (differenziazione tra regione interna ed esterna)
– se ci poniamo, però, sulla sfera e sul toro, la nostra definizione non è più valida, perché, al limite, potremmo avere di queste situazioni:



dove i tre punti non servono a individuare un interno e un esterno.

Tutto ciò ci porta, almeno nell'ambito della singola classe, a sentire l'esigenza di definire bene tutto. Per esempio, alla domanda:

«Un parallelogrammo è o non è un trapezio?»

non è possibile rispondere se non si dà una definizione **precisa** e **univoca** di trapezio.

4. Conclusioni

In pratica tutto in matematica è relativo a certi sistemi di assiomi; per cui una cosa che vale in un sistema di assiomi, può non valere in un altro sistema.

Per esempio, per costruire assiomaticanente la teoria degli insiemi, si può partire dagli assiomi della logica e, dopo aver aggiunto l'assioma di appartenenza, si possono seguire diverse strade, il che, generalmente, scandalizza chi crede che la matematica sia una scienza assoluta, e non relativa.

Esempi di questa relatività possono essere tratti dalla cosiddetta **aritmetica modulare**:

$4 + 4 = 0 \pmod 8$

$4 + 6 = 3 \pmod 7$

In definitiva, tirando le somme, la suddetta relatività ci prova che ci sono **tante** strade, non **una** quindi, l'unico modo per trovare una «strada buona» è quello di sperimentarla personalmente, e ciò dipende essenzialmente dall'insegnante.

Trovare qualcosa che non funziona, e non chiuderci gli occhi sopra, può essere più positivo di trovare che tutto funziona bene!

2. Un modello (quasi) matematico della teoria musicale

Denis Baggi[1]

Knowledge of music, musicology and music theory is increasingly required from designers of multimedia environment, since digital entertainment and music is a sector second in economic importance only to that of oil. While this writing will not instantly transform a mathematician or computer scientist into a musician or musicologist, something that requires years of theoretical study and ear training, it offers a methodical, step-by-step explanation of the most important terms and techniques currently in use in the theory of music.

1. Premessa introduttiva

Questo scritto rappresenta un tentativo di chiarire alcuni aspetti della Teoria della musica per chi ne è digiuno, con procedure simili a quelle matematiche. In particolare, si cercherà di introdurre concetti nuovi solo derivandoli da concetti già trattati.

Questo modo di procedere non è sempre facile, perché a differenza di altre discipline la pratica musicale precede la teoria, la quale pertanto si rassegna a spiegare un concetto sulla base di altri non ancora spiegati. Inoltre non si escludono semplificazioni, errori o omissioni, che verranno condonati per la natura del tentativo di modellizzare a posteriori procedure note.

Concetti da specialisti quali l'*accordatura* verranno brevemente menzionati solo se rilevanti a quanto esposto, e per una discussione più approfondita si vedranno articoli già apparsi nel Bollettino [Ref.1]. Altri concetti – note, intervalli, accordi ecc. – sono trattati più in profondità, seppure con meno rigore, in [Ref.2], Capitolo 2, reperibile anche presso la biblioteca della SMASI, che con l'accluso CD-ROM permette l'audizione di tali concetti.

Da ultimo, valga l'ammonizione che per imporre questo tipo di ordine nell'esposto, che non è quello usuale delle scuole di musica, non si è tenuto conto dello sviluppo storico di questi concetti, preferendo una sequenza di argomenti indipendentemente da quando sono apparsi nella storia della musica. E che il lettore non si aspetti

1. Denis L. Baggi si è diplomato al Politecnico di Zurigo ed ha ottenuto il dottorato presso l'Università della California a Berkeley con una tesi in Informatica e Musicologia. Ha insegnato al Polytechnic Institute of New York e alla City University of New York, svolto ricerche presso i Bell Laboratories nel New Jersey, occasionalmente suonando il sassofono a New York. Presentemente è professore alla SUPSI di Manno, dove svolge ricerca in musica e informatica, e membro di comitati esecutivi della Computer Society dell'Institute of Electrical and Electronic Engineers (IEEE CS), responsabile per i contatti con le arti e le scienze umanistiche.

di diventare grazie a questo breve scritto un esperto di musica, il che richiede esperienza, bensì di essere in grado di comprendere i termini tecnici correntemente usati in musica e musicologia.

2. Le *note*, o la discretizzazione delle frequenze nell'ottava

Chiunque abbia provato a cantare la *melodia* di un brano di musica, o a riprodurla su di una tastiera, si sarà accorto che non ha a disposizione qualsiasi frequenza immaginabile, come è il caso della sirena, bensì solo frequenze distinte e *discrete,* in numero finito – il che, ad esempio nel canto, fa la differenza fra una persona *stonata* ed una che canta *giusto*. È interessante notare come quest'osservazione valga per quasi tutte le culture, a causa della necessità di avere a disposizione dei punti di riferimento per lo svolgimento della *narrativa musicale.*

Questa discretizzazione può essere effettuata nel modo seguente. Definiamo come assioma l'esistenza di una frequenza fissa di 262 Hz, o vibrazioni al secondo[2]. Chiamiamola «nota» e diamole il nome di Do. Ora, se raddoppiamo la frequenza, data la natura logaritmica dell'orecchio, si percepisce la stessa nota, ma «più acuta», come se la prima fosse cantata da un tenore maschile e la seconda da un soprano donna. Chiamiamo «ottava» l'intervallo fra le due frequenze, che ovviamente è 2, e chiamiamo Do_2 la nuova nota «acuta».

Ora supponiamo che, in modo più o meno coerente, si decida di aggiungere altre sei note comprese nell'interno dell'ottava, con frequenza crescente, a cui vengono dati nomi come nella serie seguente:

(1) Do-Re-Mi-Fa-Sol-La-Si-(Do_2)

I nomi sono arbitrari, ad esempio in inglese le note si chiamano C-D-E-F-G-A-B-(C), e vi sono ancora altri nomi diversi in francese e tedesco.

Ora definiamo come «diesis» un'*alterazione* della nota, o modifica della frequenza originale, che «la alza un po'», in modo che l'orecchio sia in grado di distinguere bene la nuova nota. Analogamente, definiamo come «bemolle» l'operatore inverso, ossia quello che abbassa «un po'» la frequenza. Entrambi vengono chiamati ***alterazioni*** o ***accidenti.*** Si ottiene pertanto un insieme di 21 note distinte. I simboli sono ♯ per il diesis e ♭ per il bemolle, mentre le denominazioni di queste alterazioni sono arbitrarie, ad esempio in inglese si chiamano «sharp» e «flat».

Quindi, per motivi che appariranno chiari più tardi, modifichiamo le frequenze in modo che Si♯=Do e Mi♯=Fa, ed anche che Do♭=Si e Fa♭=Mi. Ci restano così 17 note, in ordine di frequenza, che sono:

(2) Do-Do♯-Re♭-Re-Re♯-Mi♭-Mi-Fa-Fa♯-Sol♭-Sol-Sol♯-La♭-La-La♯-Si♭-Si-(Do_2)

2. Il perché di questa scelta verrà spiegato in seguito.

Il prossimo passo consiste nel ridefinire il tutto in modo che il diesis di ogni nota sia la stessa frequenza del bemolle della nota seguente. Così Do♯=Re♭, Sol♯=La♭, ecc. Pertanto restano solo 12 note distinte:

(3) Do-Do♯-Re-Re♯-Mi-Fa-Fa♯-Sol-Sol♯-La-La♯-Si-(Do_2)

oppure, scritto discendendo per le frequenze:

(4) Do_2-Si-Si♭-La-La♭-Sol-Sol♭-Fa-Mi-Mi♭-Re-Re♭-(Do)

Ora, per definire esattamente le note e le loro frequenze, facciamo in modo che tutti gli intervalli fra una nota e la prossima siano uguali. Ossia, viene suddivisa l'ottava in 12 intervalli uguali, chiamati ***semitoni***, da cui segue che un semitono è la radice dodicesima di 2, o 1.059463094. Ed è così che funziona la musica occidentale dal tardo '600 in poi. Analogamente, si definisce ***tono*** la distanza di due semitoni, pertanto è la radice sesta di 2 o 1.122462048.

Si noti che tutti questi passi sono più o meno arbitrari, anche se hanno radici storiche spiegabili. Ma che specialmente i passi che portano alle sequenze (2), (3) e (4) sono particolari e tipici della musica occidentale, e fanno parte del sistema di ***accordatura*** (o definizione delle note) ***temperato***, e non reperibili in altre culture, glorificato dalle composizioni di J.S. Bach nella raccolta *Das Wohltemperierte Klavier.*

Da esso deriva la frequenza della nota Do. Lo standard internazionale ISO 16 per l'accordatura di strumenti definisce la nota *La*, in inglese *A*, sopra il *Do centrale* della tastiera del pianoforte, a 440Hz. Ne segue pertanto che:

frequenza(Do_2)= 3 semitomi sopra il La= $440 * \left(\sqrt[12]{2}\right)^3$ = 523.2511306

poiché Do_2 si trova 3 semitoni sopra il La come da (3), frequenza che riportata un'ottava più in basso, cioè dividendo per 2, dà circa 262.

La vera scala sarebbe quella con 21 note distinte, ma in pratica molte di esse sono difficilmente distinguibili dal nostro orecchio, che si contenta di 12. Tuttavia, resta che in teoria Do♯ NON è uguale a Re♭, perché il primo è un'alterazione operata sul Do, e la seconda sul Re, e questo verrà dimostrato calcolando le frequenze «vere» discretizzate in modo diverso nel Paragrafo 6.

3. La scala diatonica

Se si considerano solo le note *non alterate* – ossia, niente diesis o bemolli, si nota che gli intervalli fra una nota e la prossima rispettano la seguente struttura:

(5) Do-Re-Mi-Fa-Sol-La-Si-(Do_2)
T T s T T T s

in cui *T* sta per tono e *s* per semitono. Una tale ***scala***, che consiste di un gruppo di 2 toni ed uno di 3 toni separati da 1 semitono, si chiama ***diatonica***, da una parola greca che significa «progredendo fra i toni». La si ritrova in molte culture, anche non occidentali, forse perché legata alla fisica e agli armonici, come vedremo nel Paragrafo 6.

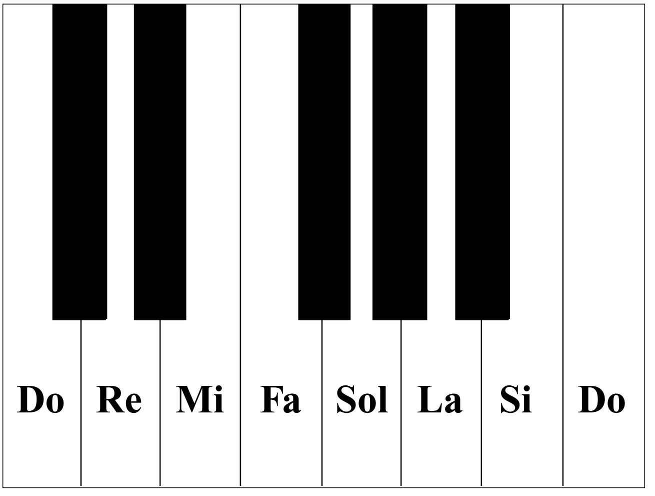


Figura 1 Un'ottava sulla tastiera ad es. di un pianoforte, visibile la scala diatonica grazie ai tasti bianchi, e le alterazioni dei tasti neri.

La figura 1 è la rappresentazione di un'ottava sulla tastiera di un pianoforte, organo e simili. È ben visibile la scala diatonica rappresentata dai tasti bianchi, con i suoi intervalli come in (5), mentre la alterazioni, diesis e bemolli, sono rappresentati da tasti neri[3]. Esistono strumenti antichi con tastiere larghe in cui vi erano tasti neri separati per i diesis e i bemolli, una tecnologia scomparsa.

4. I modi «Greci»

Data l'esistenza di 7 note, è possibile definire ben 7 scale diatoniche diverse scegliendo come origine una nota che non sia il Do. Queste scale definiscono i ***modi***, tradizionalmente con nomi ***greci***, che, almeno negli ultimi anni, sono stati definiti come segue:

ionico, partendo dal Do:	Do-Re-Mi-Fa-Sol-La-Si-Do
dorico, partendo dal Re:	Re-Mi-Fa-Sol-La-Si-Do-Re
frigio, partendo dal Mi:	Mi-Fa-Sol-La-Si-Do-Re-Mi
lidio, partendo dal Fa:	Fa-Sol-La-Si-Do-Re-Mi-Fa
missolidio, partendo dal Sol:	Sol-La-Si-Do-Re-Mi-Fa-Sol
eolio, partendo dal La:	La-Si-Do-Re-Mi-Fa-Sol-La
locrio, partendo dal Si:	Si-Do-Re-Mi-Fa-Sol-La-Si

3. In certi strumenti antichi i colori sono l'opposto.

Il modo *ionico* è uguale al modo *maggiore* della musica occidentale, e l'*eolio* corrisponde ad uno dei modi *minori* descritti nel Paragrafo 11.1. Il *dorico*, con la struttura TsTTTsT, ha la proprietà di essere invariato sotto l'operazione di *retrogressione* – ossia, partendo dalla fine verso l'inizio – e di *inversione* – ossia, ribaltando la struttura in modo speculare invertendo intervalli ascendenti in discendenti[4] – ed è molto usato nord Europa[5] e nel jazz modale. Il *frigio* appare in brani del medio-oriente, il *lidio* è la base di una teoria sul jazz ed è usato nella nostra musica popolare, il *missolidio* da Debussy in *Fêtes* ed anche in musiche popolari, ed il *locrio*, come tutti del resto, fa parte della teoria dell'improvvisazione nel jazz su date sequenze. Si ritrovano occasionalmente anche in musica occidentale antica e pretonale, ricuperato come fa J.S.Bach in certe cantate religiose[6].

5. Il ciclo delle quinte e l'algoritmo delle scale

Nonostante l'esistenza dei modi greci, antichi ed obsoleti, il problema di un musicista moderno che ha ben interiorizzato il modo maggiore con la sua sequenza TTsTTTs è: come riprodurre la stessa sequenza partendo da un'altra nota.

Per questo scopo, supponiamo un ordinamento in modo che l'origine dell'asse delle ascisse sia Do, e che i valori siano discretizzati in modo che ogni passo sia una *quinta*, ossia l'intervallo come fra Do e Sol – così chiamato perché, contando, comprende cinque note estremi compresi, Do-Re-Mi-Fa-Sol. Si definiscono poi anche la *seconda, terza, quarta, sesta, settima,* ecc., come già fatto per l'ottava, descritti nel Paragrafo 7. Otteniamo così:

(6) Do - Sol - Re - La - Mi - Si - ...
Fa♯ ____________________
Do♯ ________________
Sol♯ ____________
Re♯ ________
Do♯ ____

La prima nota di ogni riga è la prima di una scala nel modo maggiore, chiamata ***tonica***, e quelle sotto, che sono tutte un semitono sotto la loro tonica, sono quelle che bisogna *alterare* per riottenere la sequenza TTsTTTs. Così nella scala, o ***tonalità***, di La maggiore vi sono 3 diesis, Fa♯, Do♯ e Sol♯, che vengono detti *in chiave* perché nella notazione classica appaiono all'estrema sinistra dello spartito dove c'è la chiave, un'indicazione di come leggere le note spiegata nel paragrafo 10.

4. Le spiegazioni di queste operazioni sono ulteriormente descritte nel Paragrafo 13.
5. Come dimostrano i brani tradizionali inglesi *Greensleeves* e *Marlborough Fair*.
6. Ad esempio, in *Aus der Tiefe rufe ich, Herr, zu Dir.*

Analogamente, dall'altra parte dell'origine, si ottengono le scale con i bemolli:

(7) Sol♭ - Re♭ - La♭ - Mi♭ - Si♭ - Fa - Do
________________________________ Si♭
___________________________ Mi♭
_____________________ La♭
______________ Re♭
_______ Sol♭
Do♭

dove l'algoritmo è chiaro, e dove si legge immediatamente che la scala con 4 bemolli in chiave è La♭ con Si♭, Mi♭, La♭ e Re♭. In entrambe le figure sono mostrate solo le scale usate correntemente, e non ad esempio La♯ che è la «stessa» di Si♭ – si dice *enarmonica*.

L'algoritmo è chiamato ciclo *delle quinte* perché da ambo le parti si *chiude* come un cerchio, almeno nel sistema temperato: difatti, continuando *su per i diesis*, si ottiene Fa♯-Do♯-Sol♯-Re♯-La♯-Mi=Fa, e *giù per i bemolli* si raggiunge Do♭=Si.

Da ultimo, si noti che in una scala ad ogni nota viene assegnato un ***grado***, che corrisponde alla sua posizione nella scala. Così in Do maggiore, Re è il secondo grado, e La il sesto. Alcuni gradi sono talmente importanti da avere un *nome*, come la ***tonica*** citata sopra, il quinto grado o ***dominante***, il quarto o ***sottodominante***, mentre gli altri nomi per il secondo, terzo e sesto grado sono meno usati. Talvolta ci si riferisce al quarto grado con il termine ***sensibile discendente***, perché ad es. il Fa dista solo un semitono dal Mi, e ***sensibile ascendente*** per il settimo grado, perché il Si dista un semitono dal Do. Sono due note che svolgono un ruolo importante nell'accordo di *settima di dominante* descritto nel Paragrafo 8.

6. Origini dell'accordatura: perché *diesis* e *bemolli* sono distinti

Uno dei primi metodi per definire le note è attribuito a **Pitagora**. Si tratta, ancora una volta, del *ciclo delle quinte:* partendo da una nota, Do, si considera la nota con frequenza tripla – ottenuta ad esempio dividendo una corda in 3, o soffiando più fortemente in un tubo – la si riporta nell'ottava, e si ottiene così il Sol, il cui intervallo è dunque 3/2. Dal Sol si ottiene quindi il Re, il cui intervallo con il Do è 9/8, quindi il La, 27/16, poi il Mi, 81/64= 1.265625.

Vi sono problemi con quest'accordatura. Il Mi, che con il Do crea un intervallo di *terza*, è sufficiente vicino all'armonico di Do che ha 5 volte la frequenza e che, se riportato nell'ottava, avrebbe il valore 5/4=1.25: queste due frequenze vicine stridono, come ci si è accorti quando, dopo il rinascimento, si è iniziato a comporre musica con varie voci, o note, suonate assieme.

Inoltre, il ciclo delle quinte definito in tal modo non è *chiuso*. Salendo per i diesis come dal paragrafo 5, ci si accorge che il numeratore sarà sempre una potenza di 3 mentre il numeratore una potenza di 2, il che porta ad un valore di Si♯ di 531'441/ 524'288= 1.013643265 invece di 1, che dovrebbe essere Do. Analogamente, se discende per il ciclo delle quinte, i numeratori sono potenze di 2 e i denominatori potenze di 3, così Do♭=4096/2187= 1.872885231, mentre Si era 243/128= 1.8984375, e dunque le note non sono uguali. Dato che numeratore e denominatore non si semplificheranno mai, il numero di note generato è infinito, creando ***doppi diesis***, ***doppi bemolli***, e così via.

Dal Rinascimento in poi, riconosciuta l'importanza della *terza* e della *quinta*, si è provveduto a correggere il sistema pitagorico in vari modi, ad esempio con la seguente versione del **sistema a tono medio**, basato sugli *armonici*. Come precedentemente, definito il Do, il Do dell'ottava sopra è ottenuto dall'armonico che ha la frequenza doppia, dunque l'intervallo Do-Do_2 è 2.

Il Sol proviene dall'armonico con 3 volte la frequenza, e riportata la frequenza nell'ottava abbiamo 3/2. Il Mi dall'armonico con 5 volte la frequenza, e riportata la frequenza nell'ottava abbiamo 5/4. Il Fa è definito in modo che l'intervallo Fa-Do_2 è come quello Do-Sol, dunque 2: (3/2) = 4/3. Quindi il La è definito in modo che l'intervallo Fa-La sia come quello Do-Mi, dunque (4/3) * (5/4) = 5/3. Analogamente, il Si è tale che l'intervallo Sol-Si sia uguale a Do-Mi, dunque (3/2) * (5/4) = 15/8.

Si noti che tutti questi intervalli sono >1 e <2, perché all'interno dell'ottava, e semmai si riporta la nota all'interno dividendo per 2. Il Re viene dall'armonico con frequenza 9 volte il Do, ossia tale che Do-Sol è come Sol-Re, e dunque (3/2) * (3/2) = 9/4, riportato a 9/8. Per cui possiamo scrivere la seguente tabella:

Nota	Intervalli		Temperato
Do	1	1	1
Re	9/8	1.125	1.122462
Mi	5/4	1.25	1.259921
Fa	4/3	1.333333	1.3348399
Sol	3/2	1.5	1.4983071
La	5/3	1.666667	1.6817928
Si	15/8	1.875	1.8877486
Do_2	2	2	2

Tabella 1 Gli intervalli ed il loro valore

dove nell'ultima colonna è stato aggiunto quanto si ottiene con il sistema temperato, che mostra come in quest'ultimo il Re e il Sol sono in difetto, mentre il Mi, il Fa, il La e il Si sono leggermente abbondanti rispetto al valore della terza colonna.

Ora vediamo altre proprietà di questo sistema. Come dalla tastiera del pianoforte, troviamo i toni fra:

Do-Re: 9/8
Re-Mi: 5/4 / (9/8) = 10/9
Fa-Sol: (3/2) / (4/3) = 9/8
Sol-La: (5/3) / (3/2) = 10/9
La-Si: (15/8) / (5/3) = 9/8

e i semitoni fra:

Mi-Fa: (4/3) / (5/4) = 16/15
Do_2-Si: 2 / (15/8) = 16/15

e dato che 9/8 è circa 10/9, ecco (ri)trovata la sequenza TTsTTTs.

Ora, se definiamo il diesis come un'alterazione di un semitono in su, ed il bemolle come un semitono in giù, abbiamo:

Do♯= 1 * 16/15 = 1.066666667
Re♭= (9/8) / (16/15) = 135/ 128 = 1.0625

che sono pertanto note diverse. E lo stesso vale poi per tutte le altre note, al punto che ad esempio il Do♯ in una tonalità non è lo stesso di quello in un'altra.

In pratica, su strumenti con accordatura fissa e tastiera con 7 tasti bianchi e 5 neri come in figura 1, queste note sono le stesse, ma con strumenti quali gli archi, che sono il cuore dell'orchestra classica, è possibile fare la differenza, sia per il solista che per l'intera sezione. Nel caso in cui strumenti «fissi» suonino assieme ad altri, il sistema temperato richiede dei compromessi per fare in modo che la discretizzazione delle frequenze disturbi il meno possibile, e lì sta, tra l'altro, l'arte dei grandi interpreti.

7. Gli intervalli: due note assieme

Come visto negli esempi precedenti, l'***intervallo*** è la distanza musicale, o l'impressione di distanza, di due note, spesso suonate assieme. Vi sono 7 intervalli possibili nella scala. Il nome dell'intervallo indica la quantità di note fra le due note estreme, compresa la prima e l'ultima. Quindi l'intervallo, ad esempio, fra Do e Fa è una *quarta*, perché si conta Do-Re-Mi-Fa. La lista degli intervalli nell'ordine della loro importanza, con una suddivisione più precisa, è spiegata qui sotto.

L'intervallo fra Do e Sol è una ***quinta***. Alterandone una delle note – ossia, aggiungendo un diesis o bemolle – esso mantiene il nome, ma il suono cambia: ad esempio, Do-Sol♭, o Do♯-Sol, è sempre una quinta, ma per distinguerla viene chiamata ***diminuita***. Analogamente, l'intervallo Do-Sol♯ è una quinta ***eccedente***. Si noti che, a causa del sistema temperato, Do-Fa♯ ha esattamente lo stesso suono di Do-Sol♭, ma non è una quinta perché vi sono solo 4 note fra Do e Fa, ossia è una *quarta eccedente*.

Il secondo intervallo per importanza è la ***terza***, come ad esempio fra Do e Mi. Vi sono terze *maggiori*, quali Do-Mi, Fa-La, Sol-Si, e terze *minori*, quali Re-Fa, Mi-Sol, La-Do, Si-Re nella scala di Do maggiore. Evidentemente, una terza minore, come Do-Mi♭, contiene un semitono in meno della terza maggiore.

L'intervallo fra Do e Fa è una ***quarta***. Una quarta ***eccedente***, come quella fra Do e Fa♯, è possibile, ma una quarta diminuita ha poco senso, perché ad esempio fra Do e Fa♭ l'intervallo non si distingue da una terza maggiore.

Un intervallo importante è la ***settima***, come tra Do e Si. Per distinguerla da quella fra Sol e Fa, che contiene un semitono in meno ed è chiamata ***settima minore,*** come fra Do e Si♭, l'intervallo Do-Si viene chiamato ***settima maggiore***.

L'intervallo fra due note contigue è evidentemente una ***seconda***, come fra Do e Re, ed è lo stesso di un tono. Si dice che è una ***seconda maggiore***. Il semitono fra Do e Re♭ è una ***seconda minore*** (ma non fra Do e Do♯), mentre fra Do e Re♯ abbiamo una ***seconda eccedente***, che ha il suono di una terza minore, pur restando una seconda.

La ***sesta*** è l'intervallo fra Do e La, ossia l'***inversione*** della terza minore fra La e Do, in questo caso è una ***sesta maggiore***. Dato che quella fra Mi e Do ha un semitono in meno, è chiamata ***minore*** ed ha il suono di una quinta eccedente, come Do-La♯.

Per concludere, si parla pure di ***ottava*** e di ***unisono,*** la stessa nota. Oltre l'ottava si trova la ***nona*** (seconda sopra l'ottava), ***decima, undicesima, dodicesima*** (una quinta sopra l'ottava), e ***tredicesima***, con gli aggettivi del caso quali *diminuita* o *eccedente*, e che qui non verranno trattate.

Il tutto è riassunto nella seguente tabella:

Intervallo	Numero di semitoni	Esempio
unisono	0	Do – Do
seconda minore	1	Do – Re♭
seconda maggiore	2	Do – Re
seconda eccedente	3	Do – Re♯
terza minore	3	Do – Mi♭
terza maggiore	4	Do – Mi
quarta	5	Do – Fa
quarta eccedente	6	Do – Fa♯
quinta diminuita	6	Do – Sol♭
quinta	7	Do – Sol
quinta eccedente	8	Do – Sol♯
sesta minore	8	Do – La♭
sesta maggiore	9	Do – La
settima diminuita	9	Do – Si♭♭
settima minore	10	Do – Si♭
settima maggiore	11	Do – Si
ottava	12	Do – Do_2

Tabella 2 I tipi di intervallo, i semitoni contenuti e le loro note

in cui appaiono solo gli intervalli più importanti, o che hanno un senso.

8. Gli accordi, sovrapposizioni di terze

Benché già due intervalli possano suggerire l'armonia, come nelle invenzioni di Bach a due voci[7], il modello centrale dell'armonia classica è quello a parecchie voci, che formano un ***accordo***, che hanno almeno 3 note distinte, spesso 4, mentre ve ne sono anche con 5, 6 e 7 note con l'aggiunta di none, undicesime e tredicesime. Cominceremo con gli accordi di 3 note. Si può affermare che la musica occidentale si è data molta pena per sviluppare l'***armonia***, ossia l'arte di far suonare molti suoni assieme. Lo sviluppo è relativamente recente: la musica medievale, come il canto gregoriano, non ha armonia esplicita, e fino all'inizio del '700 la maestria armonica non era stata dominata pienamente – come dimostra l'aspetto fluttuante, e per noi strano, di opere musicali dal rinascimento fino al '600.

7. In realtà si può suggerire l'armonia anche con una sola voce.

Partendo da Do nella scala di Do maggiore, si può costruire un ***accordo maggiore*** con tre note, o ***triade***, aggiungendovi la terza maggiore, Mi, e la quinta, Sol. Si tratta dunque della sovrapposizione della *terza maggiore* fra Do e Mi e della *terza minore* fra Mi e Sol. Anche se quanto segue è probabilmente inesatto e soggetto ad interpretazione, si dice che la triade (tre note) maggiore abbia la sua origine nella fisica degli armonici: una corda che vibra, o un tubo che suona, mettiamo la nota Do, genera pure suoni con frequenze che sono multipli esatti della nota fondamentale, ed i primi armonici con note diverse da Do sono quello con tre volte la frequenza, Sol, e cinque volte la frequenza, Mi. La triade Do-Mi-Sol ha lo stesso suono di Fa-La-Do e di Sol-Si-Re, il che spiega il perché della definizione del La, del Si e del Re nel sistema mesotonico del Paragrafo 6.

La nota sulla quale è costruito l'accordo, in modo che le terze siano poste una sopra l'altra, viene chiamata la ***fondamentale***. Quindi l'accordo a quattro note contenente le note Mi-Sol-La-Do ha come fondamentale la nota La, perché l'accordo posto in posizione con terze sovrapposte appare come La-Do-Mi-Sol (come spiegato sotto, si tratta di un accordo di settima minore).

La triade può anche essere ***minore***, come nell'accordo Do-Mi♭-Sol, o La-Do-Mi. In questo caso, la posizione delle terze, maggiore e minore è invertita, la minore è in basso e la maggiore in alto. Nella scala di Do maggiore vi sono 3 possibili triadi minori, quella con fondamentale Re, quella sul Mi e quella sul La.

Vi sono altre triadi possibili: Si-Re-Fa, sovrapposizione di due terze minori, chiamata ***diminuita***, di cui, in Do, vi è solo il caso costruito sul Si come fondamentale. Introducendo un'alterazione che non appartiene alla scala, si può costruire una triade con sovrapposizione di due terze maggiore, chiamata ***eccedente***.

Sovrapponendo un'altra terza si crea un accordo a quattro note. Il più importante è quello dell'accordo maggiore con una terza minore in alto, come in Sol-Si-Re-Fa, chiamato accordo di ***settima di dominante***. Questo perché è l'accordo costruito sul quinto grado della scala, la dominante, in questo caso Sol nella scala di Do, che ha l'importante funzione di *risolvere sulla tonica*, l'ancora tonale della scala e punto di riposo finale del brano – la musica tonale si conclude quasi sempre sulla tonica. La risoluzione avviene grazie alla presenza, nell'accordo di settima di dominante, sia della *sensibile ascendente* Si che muove per mezzo tono a Do, che della *sensibile discendente* Fa che muove verso Mi. Ossia, l'intervallo di *quinta diminuita* fra Si e Fa «schiaccia» la terza maggiore Do-Mi dell'accordo di tonica, e permette all'accordo di settima di dominante di risolvere sulla triade maggiore costruita sulla tonica.

Se alla triade maggiore si aggiunge invece una terza maggiore, come in Do-Mi-Sol-Si, si ottiene un accordo di ***settima maggiore***. La settima in cima all'accordo maggiore è generalmente un abbellimento di origine melodica.

Una settima minore in cima ad un accordo minore, come in Re-Fa-La-Do, è chiamato accordo di ***settima minore***, ed ha di solito la funzione di risolvere sull'accordo di settima di dominante, di cui è una preparazione, o su di un altro accordo di settima minore, come quello con note La-Do-Mi-Sol.

Accordi ottenuti con una settima maggiore su di un accordo minore sono rari, e chiamato *minore con settima maggiore*. Non si aggiunge una terza su di un accordo aumentato: né una terza maggiore, che raggiungerebbe l'ottava della fondamentale, né una terza minore come in Do-Mi-Sol♯-Si, che ha uno strano suono. Esiste invece Do-Mi-Sol♯-Si♭ che ha la funzione di settima di dominante con quinta eccedente, tipico di canzoni del passato, operette ecc., e sfrutta il fatto che la quinta eccedente, in questo caso la nota Sol♯, funziona da sensibile addizionale.

Settime in cima ad accordi diminuiti sono molto usate, come nel caso di Si-Re-Fa-La, un accordo di settima semi diminuito; o come nell'accordo Si-Re-Fa-La♭, chiamato di ***settima diminuita***, in cui anche la settima è diminuita e non minore. Quest'accordo contiene solo terze minori e, compreso Do-Re♯-Fa♯-La, ce ne sono solo quattro in tutto in tutte le scale, e dato che sono comuni a tutte le tonalità e non hanno un carattere tonale proprio, possono pertanto venire usati per spostare il centro tonale e cambiare tonalità. Mentre l'accordo ***semi diminuito*** come Re-Fa-La♭-Do, con quinta diminuita e settima minore, appare di solito nel contesto del modo minore, fungendo da dominante secondaria di altri gradi come quello di settima minore in una scala maggiore.

Quindi vi sono gli accordi con la sesta in cima, come Do-Mi-Sol-La, che provengono da vecchie canzoni, operette, dall'industria di canzonette americane, e sono stati abusati specialmente negli anni '20 e '30, disprezzati da musicisti classici. Anche se l'accordo precedente ha lo stesso suono di La-Do-Mi-Sol -vi sono le stesse note – ha la funzione armonica di un accordo di tonica, e non di transizione con settima. La grande maggioranza degli accordi di sesta sono maggiori, sempre con sesta maggiore – come quella fra Do e La. La sesta ha solo un ruolo di abbellimento – come la settima maggiore, usata in periodi seguenti.

Perché poco pertinenti con testo, accordi con 9.na, 11.ma e 13.ma non verranno trattati: essi appaiono saltuariamente in musica classica, e generalmente gli intervalli superiori hanno più una funzione melodica che armonica.

9. Lo spartito musicale

Anche la notazione della musica si è evoluta nel tempo con l'*uso*, e non con un insieme di definizioni preesistenti. Inoltre, ogni epoca ed ogni compositore ha liberamente adottato nuovi simboli secondo le necessità, e molto spesso l'interprete, quando non era lo stesso autore, aveva accesso al compositore, mentre oggi la lettura dello spartito fa parte dell'insegnamento musicale.

La musica viene rappresentata nel ***pentagramma*** – così chiamato per le sue cinque righe – che è equivalente ad un piano cartesiano in cui l'asse delle ascisse rappresenta il *tempo*, e quello delle ordinate la *frequenza* o le note, entrambi discretizzati.

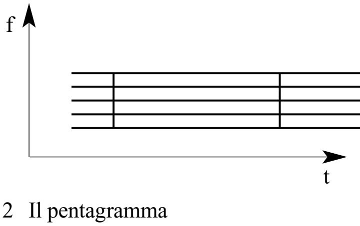


Figura 2 Il pentagramma

Le linee orizzontali rappresentano una griglia di riferimento per le note, e le barre verticali delimitano la ***misura*** o ***battuta***, ossia un intervallo di tempo di lunghezza fissa. Si noti che, contrariamente al testo scritto, la notazione musicale è *bidimensionale*, il che corrisponde bene alla musica occidentale che ha la *dimensione orizzontale*, ossia la sequenza di note o melodia nel tempo, e quella *verticale*, ossia l'insieme di note suonate assieme.

L'origine delle frequenze viene indicata dalla ***chiave***.

Figura 3 Chiave di *violino* o di *Sol*

La chiave di violino, o di Sol perché si tratta della lettera ***G*** stilizzata, indica la posizione della nota Sol al suo centro, ossia esattamente sopra la seconda riga contando dal basso, sopra al Do centrale, dunque con la frequenza di 392 Hz. Le note, indicate qui con un'*ellisse riempita di nero* e con una *stanghetta*, vengono alternativamente indicate sul *rigo* o nello *spazio* fra due righe, come segue:

Figura 4 La melodia Sol-La-Si-Do

L'indicazione numerica, una frazione, accanto alla chiave, indica il ***metro***, ossia la *quantità di unità temporali* nella battuta dal numeratore, e la *durata di ogni unità* dal denominatore. Nell'esempio il metro è di *quattro quarti*, indicato anche con il simbolo **C**. Altri tipici metri della musica occidentale sono 3/4 – valzer – 6/8, 2/2, 9/8 e più raramente in 5/4 o 7/4.

La durata di ogni nota è indicata dalla sua *forma*, come segue:

Figura 5 Rappresentazione della durata delle note

La prima rappresenta una nota ***intera***, chiamata anche ***breve***. La seconda è una ***metà*** o ***semibreve***. Con la stanghetta abbiamo il ***quarto***, e con una coda l'***ottavo***, e non indicate con due code il ***sedicesimo***, con tre il ***trentaduesimo***, e così via. Un *punto* a destra della nota indica un prolungamento di metà – dunque il ***quarto puntato*** dura tre ottavi – ed un altro punto prolunga di un'altra metà, e così via.

I due esempi a destra indicano che le note possono essere raggruppate, nel primo caso quattro sedicesimi con note Do-Re-Mi-Fa – illustrando pure che una nota può cadere fuori dal rigo, nel qual caso si aggiunge una stanghetta orizzontale – e tre ***terzine*** di ottavi, ossia tre ottavi compressi in un quarto.

Al posto delle note ci possono essere ***pause***, la cui durata viene indicata con un formalismo simile alla durata delle note, come segue:

Figura 6 Le pause

in cui la prima immagine corrisponde ad un intero, poi una metà, un quarto, un ottavo, e con più stanghette laterali il sedicesimo, trentaduesimo, ecc., inclusa anche la sintassi dei punti. La misura è sempre completa e contiene sempre il numero esatto di note o pause, in modo che la somma corrisponda ad una battuta intera.

La chiave di violino non è la sola usata correntemente. Molto usata è la ***chiave di basso*** o di Fa.

Figura 7 Esempio con la *chiave di basso* o *di Fa*

Il simbolo della chiave è una F stilizzata indicante che il rigo fra i due punti è la posizione della nota Fa sotto il Do centrale, dunque una frequenza di 175 Hz. Nell'esempio si nota l'indicazione del metro a 6/8 e due gruppi con le note Fa-Mi-Re e Mi-Fa-Sol.

Anche se vi sono altre chiavi, queste due sono le più usate nella letteratura pianistica.

Figura 8 Spartito per pianoforte

Questo perché il punto d'incontro delle due chiavi è proprio il Do centrale del pianoforte: nella figura si vede che la prima nota sotto il rigo nella chiave di violino è il Do centrale, mentre la nota appena sopra al Si rappresentato sopra al rigo della chiave di basso sarebbe il Do centrale. Ossia, il rigo inferiore rappresenta quanto si suona con la mano sinistra, e quello superiore la mano destra.

Altre chiavi sono usate per strumenti particolari – esempio: viola – ed inoltre, in uno spartito orchestrale con molti righi, la nota indicata suonata da uno strumento non è necessariamente quella con la frequenza dell'accordatura temperata, *chiamata da concerto,* perché esistono degli strumenti che ***traspongono***. Ad esempio, se su di una clarinetto detto in Si♭ lo strumentista diteggia il Do, la frequenza suonata è quella di Si♭. Ed esistono strumenti in Mi♭, in Re♭, in Fa, in Sol, in La, proprietà di cui il compositore deve tener conto.

Vediamo di *leggere* un esempio, indipendentemente dal suo valore musicale, ma per riassumere quanto visto.

Figura 9 Esempio didattico

Data la chiave di violino, la prima è un Fa sopra il Do centrale, dunque con frequenza 349 Hz, che dura un intero, ossia per tutta la battuta di 4 quarti. È seguita dalla pausa di un'intera battuta, quindi da un Sol che dura una metà, e da una pausa della stessa durata. Segue quindi un La di un quarto, una pausa di un quarto, un Si di un ottavo con pausa di un ottavo, un Do sedicesimo con pausa uguale, ed un Do che dura un ottavo, due ottave sopra il Do centrale, fuori dal rigo con due stanghette orizzontale, che completa la battuta. All'inizio della quinta battuta abbiamo un Sol sotto il Do centrale con due stanghette orizzontali seguito fa varie pause, e da un La quarto puntato che dura pertanto tre ottavi.

La durata delle note è pertanto riferita a unità musicali quali ad esempio il quarto, e la relazione con il ***tempo*** è data da una notazione sopra al rigo ed all'inizio del brano con un indicazione numerica che indica *il numero di quarti o* ***battiti*** *al minuto*. Non è sempre presente, nel qual caso sta all'interprete decidere il tempo. La notazione di battiti per minuto può essere riportata su uno strumento chiamato ***metronomo,*** in passato meccanico come un orologio o pendolo variabile, ed oggi elettrico, il quale batte un colpo al momento giusto per indicare al musicista la velocità. Normalmente la musica viene suonata a velocità da 40 a 500 battiti al minuto.

Le ***alterazioni*** o ***accidenti*** sono indicati con i simboli per il diesis ed il bemolle preposti alla nota, come segue:

Figura 10 Esempi di note alterate

L'esempio indica che la nota Si è stata alterata con un bemolle, e che la nota sull'ultima quarto è un Fa♯. Esistono anche il ***doppio diesis***, o 𝄪, ed il ***doppio bemolle***, 𝄫, usati in casi particolari, che alterano la nota due volte.

Oltre che sulla nota, le alterazioni possono anche apparire *in chiave*, ossia nello spazio fra la chiave e l'indicazione del tempo, come segue:

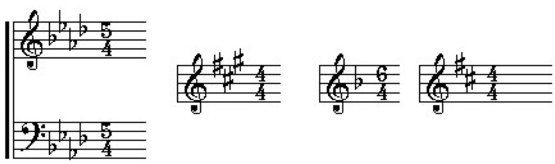


Figura 11 Alterazioni in chiave

Secondo le formule (6) e (7) del paragrafo 5, e quanto visto in questo paragrafo, il primo esempio indica che la scala o tonalità del brano per pianoforte è La♭, il secondo esempio indica la scala di La, il terzo Fa, ed il quarto la tonalità di Re. Questa lettura è però complicata dalle considerazioni dei modi, in particolare ***la relazione fra maggiore e minore*** nella musica occidentale, illustrata nel paragrafo 11.1.

Riguardo alla lettura della nota, essa va considerata alterata se l'accidente corrispondente appare in chiave, o fino alla fine della battuta se appare all'interno di essa. Un'alterazione può essere rimossa grazie ad un simbolo speciale, il ***bequadro*** indicato con il simbolo ♮ preposto alla nota, che la fa tornare *naturale.* Lo vediamo con un esempio:

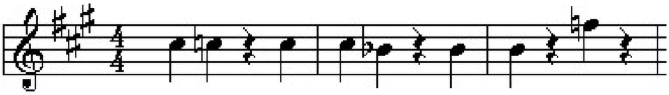


Figura12 Esempio di lettura degli accidenti

I tre diesis in chiave identificano la scala di Re, ed il primo Do nella prima battuta è diesis, perché così è indicato in chiave. Il secondo Do è naturale, dunque mezzo tono sotto il primo, a causa del segno ♮. L'ultimo Do è pure naturale, perché l'ultima modifica si mantiene per tutta la battuta. Il Do della seconda battuta è diesis per via della chiave, il Si è bemolle perché così specificato, e così è l'ultimo. Il Si della terza battuta è di nuovo naturale perché il bemolle termina con la battuta precedente. Il Fa della terza sarebbe diesis se non vi fosse nessuna notazione, ma per via del ♮ diventa Fa naturale. Tutto ciò può sembrare complicato, ma rende lo spartito leggibile e compatto, riducendo il numero dei segni, e per aiutare l'interprete si usano spesso indicazioni ridondanti.

10. La notazione degli accordi

10.1. La notazione classica e l'armonia a quattro voci

Benché la musica occidentale, tonale e classica, si distingua dalle altre per l'enfasi data all'***armonia***, ossia l'arte di assemblare note che suonano contemporaneamente, e cioè gli *accordi* del paragrafo precedente, il compositore di solito pensa non per accordi, bensì con ***voci*** che si muovono contemporaneamente. Questo ha dato origine, dal Rinascimento in poi, all'arte del ***contrappunto***, di cui vengono specificate varie ***specie.*** Vi si insegna dapprima la costruzione di una melodia chiamata ***cantus firmus***, a cui vengono aggiunte altre voci, facendo così risultare accordi. Per cui, la classificazione degli accordi del Paragrafo 8 è una derivazione *a posteriori* della teoria della composizione musicale, e serve più all'*analisi* della musica che alla composizione.

L'enfasi sugli accordi e sull'armonia è ottenuta grazie ad un modello ridotto della musica chiamata ***armonia a quattro parti***. Le parti, o voci, sono chiamate, andando dal basso verso l'alto nella scale delle frequenze, ***basso, tenore, alto e soprano***. Questi nomi si ritrovano nella designazione di strumenti e della voce umana, ma in questo contesto hanno un significato *strutturale*, ossia senza relazione al fatto che la voce del basso venga suonata da un flauto soprano e che il soprano venga reso da un basso tuba. Un esempio di brano costruito all'interno di questo modello è visibile nella figura che segue.

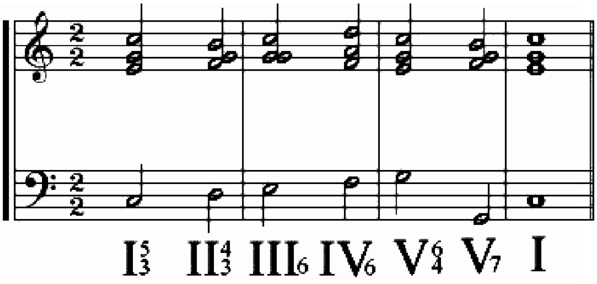


Figura 13 Brano in armonia a 4 parti, con cifratura degli accordi

Il metro è di solito 2 mezzi, talvolta 3 mezzi, e se vi sono quarti sono note di passaggio che quando appaiono sul secondo o quarto tempo non hanno importanza strutturale. Le note dell'accordo sono sempre 4, per cui spesso una è *raddoppiata* – nel primo accordo dell'esempio, il Do appare sia nel basso che nel soprano – per cui sono possibili solo accordi a 4 voci distinte – il che elimina gli accordi con 9a, 11ma ecc. In questo esempio, le parti sono in posizione ***stretta***, ossia tenore, alto e soprano sono il più possibile vicini ed i due righi cadono facilmente sotto la mano destra per quello con chiave di Sol e la sinistra per quello con chiave di Fa di un suonatore di tastiera.

La notazione degli accordi, o ***cifratura***, indicata sotto ogni accordo, ne determina il tipo. Il numero romano indica il *grado del basso* nella scala – così il secondo accordo ha la notazione con un II, perché il Re è il secondo grado. Possono seguire dei numeri sovrapposti, il cui significato si può desumere dalla seguente convenzione:

- $\substack{5\\3}$ si tratta di un accordo composto da 3.a e 5.a sul basso, dunque la fondamentale è il basso, che di solito viene raddoppiata; questo accordo è implicito e la notazione viene spesso omessa, salvo indicazioni con 3, 5 o 8 che indicano quale voce va posta nel soprano;
- 6 indica che la fondamentale è la sesta del basso, e l'accordo è chiamato ***primo rivolto***. Di solito non si raddoppia il basso, come nel caso del terzo accordo, ma un'altra voce, a parte eccezioni come nel caso del quarto accordo;
- $\substack{6\\4}$ indica che la fondamentale è la quarta del basso, e l'accordo è chiamato ***secondo rivolto***. Ha grande importanza come accordo precedente quello di settima di dominante che prepara, com'è il caso del quinto accordo;
- 7 accordo con terza, quinta e settima sul basso. Il caso del sesto accordo è quello della ***settima di dominante***, che risolve e forma ***una cadenza***. È un accordo con quattro note distinte; è il caso del secondo accordo della terza battuta;
- $\substack{5\\6}$ è il ***primo rivolto*** di un accordo di settima, dunque la fondamentale è la sesta sul basso e l'accordo consiste di terza, quinta e sesta;
- $\substack{4\\3}$ è il ***secondo rivolto*** di un accordo di settima, dunque la fondamentale è la quarta sul basso e l'accordo consiste di terza, quarta e sesta. Un esempio è il secondo accordo della figura;
- $\substack{4\\2}$ è il ***terzo rivolto*** di un accordo di settima, dunque la fondamentale è la seconda sul basso e l'accordo consiste di seconda, quarta e sesta.

Vi sono altre indicazioni numeriche che hanno a che fare con i ***ritardi***, ossia il mantenimento di una o più note dell'accordo precedente in quello presente, che non avendo la stessa importanza strutturale non verranno menzionati. Nel modello di armonia a quattro voci vi sono convenzioni addizionali quali:

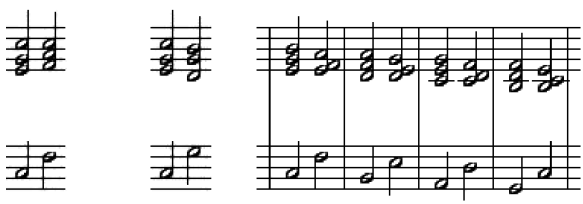


Figura 14 Condotta delle parti

La ***condotta delle parti*** prescrive che se in accordi successivi vi è una nota in comune, come il Do nel soprano nei due accordi del primo esempio, essa va tenuta nella stessa parte o voce, in questo esempio il soprano. Se ciò non è il caso, va favorito il ***moto contrario***, come nel secondo esempio. Ciò non va rispettato se si tratta di una ***progressione*** o di un modello che si ripete, come nel terzo esempio, in cui ogni nota del basso è armonizzata con un accordo di settima.

Vi sono inoltre alcune procedure che sono proibite.

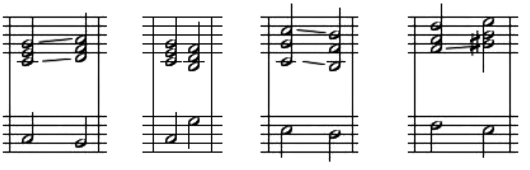


Figura 15 Esempi di realizzazione proibita: il primo, terzo e quarto

Il primo esempio della figura contiene ***quinte parallele***, ed il terzo ***ottave parallele***. Vanno evitate a causa dell'importanza della quinta e dell'ottava in tali tipi di accordi, che comprometterebbero l'eleganza e la varietà della condotta delle parti. Il secondo è accettabile perché la quinta fra Si e Fa nel secondo accordo è diminuita, e pertanto non si tratta di quinte parallele. Pure da evitare è il salto di ***seconda eccedente*** come nel terzo esempio, che può facilmente apparire nel modo minore, trattato nel Paragrafo 11.1.

I vantaggi di questa notazione sono:

- identificazione immediata del basso, e pertanto della posizione dell'accordo, ossia i *rivolti*,
- identificazione immediata della funzione armonica dell'accordo, non appena se ne desume la fondamentale.

Gli svantaggi sono:

- la notazione non permette di distinguere il *tipo* di accordo: ad esempio, V7 è un accordo di settima di dominante con terza maggiore e settima minore; II7 è un accordo con terza e settima minori; I7 è un accordo con terza e settima maggiori; e VII7 è un accordo con terza minore, quinta diminuita e settima minore,
- la notazione non rende l'armonia leggibile qualora vi sia un cambio di scala o *modulazione*, come trattato nel Paragrafo 11, perché l'accordo è descritto con il suo grado e non con le sue note.

Nonostante le sue pecche, si noti che questa notazione era usata negli spartiti per una tipica orchestra del '700 che consisteva di tre primi violini, tre secondi, due viole, due violoncelli, un contrabbasso – si noti come ciò rispecchi l'armonia a quattro parti – eventualmente qualche strumento a fiato, ed un clavicembalo che accompagnava il tutto. Lo spartito di quest'ultimo consisteva di una nota, il basso, con indicazioni numeriche come quelle spiegate sopra, che identificavano le parti superiori e dunque l'accordo.

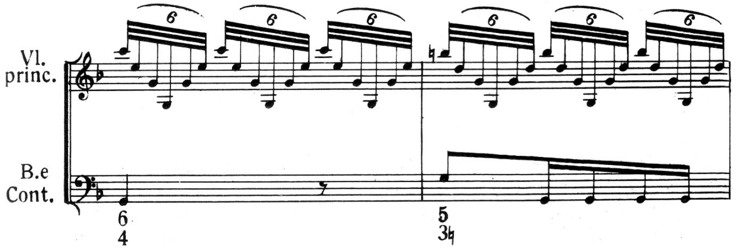


Figura 16 Estratto dalla *Caccia*, *Autunno, Le quattro stagioni*, di Antonio Vivaldi, battute 62-63. Parte superiore per violino solista, inferiore per clavicembalo con basso continuo. Segmento in Do Maggiore, notasi il bequadro (vedi Figura 12) perché la scala originale era Fa maggiore con un bemolle in chiave.

Tuttavia, per i motivi elencati sopra, nella musica popolare contemporanea si usa un'altra notazione focalizzata sulla fondamentale e sul tipo di accordo, e quindi indipendentemente dalla scala.

10.2. La notazione corrente

In essa, il primo simbolo, sempre presente, è una lettera maiuscola che rappresenta la nota della fondamentale dell'accordo secondo la notazione inglese. Non è difficile acquistarne la padronanza, ricordando che la lettera F corrisponde alla nota Fa, o memorizzando la seguente tabella:

C	D	E	F	G	A	B
Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si

Tabella 3 Corrispondenza fra inglese e italiano

La notazione si compone di:

- lettera maiuscola che identifica la fondamentale dell'accordo, senza alcun riguardo per la posizione, ossia il concetto di rivolto non esiste
- questa può essere seguita dal simbolo ♯ o ♭, che indica ovviamente l'alterazione
- se non segue più niente, si assume che l'accordo si componga di terza maggiore e quinta, così C indica la triade con Do-Mi-Sol, B indica Si-Re♯-Fa♯, ecc.
- la lettera m o il simbolo _ indicano che la terza dell'accordo è minore: ad es., D_ indica Re-Fa-La, Cm indica Do-Mi♭-Sol
- la lettera d indica un accordo diminuito: ad es., Cd contiene Do-Mi♭-Sol♭
- il numero 7 indica l'aggiunta di una settima minore: ad esempio, C7 indica Do-Mi-Sol-Si♭; la combinazione Dm7 indica pertanto Re-Fa-La-Do
- il simbolo Δ indica un accordo con l'aggiunta di una settima maggiore, così CΔ indica un accordo con Do-Mi-Sol-Si; per confondere le idee, lo stesso può anche essere scritto CM, o addirittura C7+
- il simbolo ϕ indica un accordo diminuito con settima minore, così Cϕ significa Do-Mi♭-Sol♭-Si♭, mentre Cd7 indica un accordo diminuito con settima diminuita, ossia Do-Mi♭-Sol♭-La – dove il La sta per Si♭♭

- alterazioni possono essere poste davanti ad ogni numero che rappresenta una nota, per chiarezza in parentesi, così si può avere C(♭5), ossia Do-Mi-Sol♭, e F7(♯5), ossia Fa-La-Do♯-Mi♭
- il numero 6 specifica l'aggiunta della sesta, popolare dall'Ottocento in poi (valzer di Vienna, operette), così E6 indica Mi-Sol♯-Si-Do♯
- è possibile aggiungere 9, 11, 13 che tratteremo solo con due esempi: E9, accordo di settima di dominante con nona aggiunta, ossia Mi-Sol♯-Si-Re-Fa♯, e C9(♯11)13, con le 7 note Do-Mi-Sol-Si♭-Re-Fa♯-La, settima di dominante sul Do con sovrapposta la triade sul Re.

Si noti ancora una volta che la sintassi non è stata definita a priori in modo rigoroso, ma segue l'uso. Questa notazione viene usata ad esempio per gli accordi accompagnatori quali quelli di chitarra, o nelle ***griglie armoniche*** del jazz. Queste sono delle tabelle in cui ogni quadratino rappresenta una *misura*, che contiene: un accordo, o due accordi separati dal simbolo / di cui il primo cade sul primo tempo ed il secondo sul terzo, o più accordi separati da una virgola, o il simbolo ⁒ che indica ripetizione. Ciò è facilitato dal fatto che nel jazz il metro è quasi sempre 4 quarti, ed in più – come nelle danze occidentali tipo valzer, gli inni, le canzoni popolari, molte arie d'opera – il brano è spessissimo un multiplo di 4 battute, nel jazz spesso 12 – griglia con 3 righe e 4 colonne – o 32 – griglia con 4 righe e 8 colonne.

La prossima tabella è la griglia di un brano alquanto elaborato del compositore[8], pianista e direttore d'orchestra di jazz *Thelonious Monk*, 1917-1982, *Ruby, My Dear,* descritta come *sentimento senza sentimentalismo,* composta nel 1948.

Fm7/B♭7	E♭M7	Gm7/ C7	FM7	B♭m7/E♭7	A♭M7/Fm7	B♭m7/AM7	E 7/E9(♭5)
Fm7/ B♭7	E♭M7	Gm7/C7	FM7	B♭m7/E♭7	A♭ M7/Fm7	B♭m7/AM7	E 7/E9(♭5)
AM7/F♯m7	Bm7/E7(♭9)	AM7	B♭6/G7	Cm7	Cm7/D7	E♭m7	E♭m7/E9
Fm7/B♭7	E♭M7	Gm7/C7	FM7	B♭m7/E♭7	A♭M7/Fm7	B♭m7/AM7	G♭ M7,B9/ B♭9

Tabella 4 Griglia di *Ruby, My Dear*

La scelta di questo brano deriva dal fatto che è opinabile quale sia la *tonalità del brano*, dato che, anche se la musica è chiaramente tonale – in contrasto con quanto trattato nel paragrafo 13 – essa cambia continuamente quasi ogni 2 battute. I passaggi come quelli delle prime due battute, della terza e quarta, e della quinta e sesta hanno il ruolo di una cadenza e nella loro scala verrebbero rappresentate con la notazione classica con II7 – V7 – I, e l'accordo con M7 della seconda, quarta e sesta battuta rappresenta la nuova tonica. Sarebbe pertanto quasi impossibile, ed in ogni modo non pagante, rappresentare questo brano con la notazione classica basata sui bassi, mentre importanti sono le note e le fondamentali di ogni accordo.

Per concludere, i vantaggi di questa notazione sono:

- identificazione immediata della fondamentale e della natura dell'accor-

8. Nel jazz, *compositore* non indica solo chi ha composto la musica, dato che tutti per definizione compongono il proprio brano anche se il tema è altrui, bensì un musicista che lascia un insieme coerente di opere proprie con tecniche musicali originali ed inedite, spesso con una teoria soggiacente.

do, indipendentemente dalla posizione – irrilevante – e dalla tonalità – che complicherebbe che cose

– identificazione immediata di tutte le note dell'accordo

mentre gli svantaggi sono:

– difficile identificazione della funzione armonica di un dato accordo; ad esempio, lo stesso accordo Dm7 ha un significato diverso nella tonalità di Do, in cui una nota melodica di passaggio potrebbe essere il Si, e nella scala di Fa, in cui la nota dovrebbe essere invece il Si♭

– talvolta la notazione che insiste sulla fondamentale rende l'interpretazione globale difficile, come nel seguente caso di una tipica progressione del jazz:

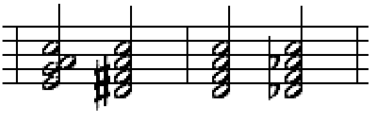


Figura 17 Tipica progressione del jazz

che verrebbe scritta in questo modo:

C6 – D♯d7 – Dm7 - D♭Δ

mentre in realtà si tratta solo di un accordo sul Do con sesta aggiunta di cui si fanno «scivolare» le due note basse di un semitono, poi ancora una volta di un semitono, ed infine la più bassa e la sua quinta, in pratica una manipolazione delle voci senza vera volontà di veramente cambiare l'accordo – difatti il Do superiore viene tenuto costante.

Malgrado tutto questo, la notazione riempie bene il suo compito ed è diffusa in molti spartiti dove appare in basso, e vi sono libri, i *fakebook*, con le griglie armoniche di brani di jazz per chi vuole apprendere ad improvvisarci sopra.

Da ultimo, ricordiamo che il Compact Disc unito al libro in [Ref. 2], disponibile presso la biblioteca della SMASI e pubblicato dalla SUPSI, contiene un programma per PC, *chords*, che dopo aver identificato la scheda MIDI del computer (o più di una se è il caso) permette di scrivere un accordo, lo suona, ne elenca le note, quante sono, ed il tipo di accordo. Esempio (con carattere Courier le risposte del programma, in carattere normale quanto scrive l'utente):

`? Cm7`

c-eb-g-bb, 4 notes, minor seventh chord

e lo risuona premendo il tasto ENTER. Esso tratta accordi da 3 a 7 note, e dà un messaggio di errore in caso di sintassi errata da parte dell'utente.

Continua sul numero 61.

Bibliografia

Baggi D. (1974) Realization of the Unfigured Bass by Digital Computer. *Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley*. Ann Arbor (Michigan): Xerox University Microfilms.
Baggi D. (1984). *Harmony Machine, a microprocessor-based system for real time automatic composition of pieces in four part harmony*. Brevetto US 4,468,998, 1984, vedi http://www.google.com/patents?id=V7l1AAAAEBAJ&dq=harmony+machine .
Baggi D. (1992). NeurSwing: a Connectionist Workbench for the Investigation of Swing in Afro-American Jazz. *Readings in Computer Generated Music*. Los Alamitos (California): IEEE CS Press. ISBN 0-8186-2747-6 (case) - ISBN 0-8186-2746-8 (microfiche. Libro compilato da D.Baggi. Vedi anche IEEE COMPUTER, luglio 1991, D.Baggi Ed., con CD audio, entrambi disponibili presso la biblioteca della SMASI (Lugano, CH).
Baggi D. (2001). Capire il jazz. Le strutture dello Swing. *Quaderni del CIMSI*. Manno: SUPSI.
Filipponi L. (2001). La matematica dei sistemi di accordatura. Uno studio sui rapporti tra matematica e musica. *Bollettino dei Docenti di matematica, 42 e 43*. Bellinzona: UIM. 83-103 e 95-106.
Friedman D. P. e Felleisen M. (1987). *The Little LISPer*. Cambridge (Massachusetts): MIT Press.
Hoyle F. (2003). *La nuvola nera*. Milano: Universale Economica Feltrinelli, 2003. Da *The Black Cloud*. (1957). Londra: Heinemann.
Pedron C. (1998). *Nuova serie di esercizi per lo Studio Progressivo del Basso senza numeri*. N.14847. Carish: Milano.
Siong Chua Y. (1991). Composition Based on Pentatonic Sacles: A Computer Approach. *IEEE Computer*. Guest Editor Denis Baggi. 67-71
Steele G. L. Junior (1984). *Common LISP, The Language*, Digital Equipment Corporation.
Zuckerkandl V. (1976). *Sound and Symbol. Music and the External World*. Princeton (New Jersey): University Press.

3. Il SATOR e la *Geometria sacra*

Giorgio Mainini

Il SATOR, detto anche *latercolo pompeiano*, è un tipo di quadrato magico non numerico.

Eccolo:

S	**A**	**T**	**O**	**R**
A	**R**	**E**	**P**	**O**
T	**E**	**N**	**E**	**T**
O	**P**	**E**	**R**	**A**
R	**O**	**T**	**A**	**S**

La sua «magia» sta nelle molte simmetrie che in esso si trovano (si può leggere dall'alto in basso o da destra a sinistra, è invariante rispetto alla simmetria centrale), nelle alternanze di vocali e consonanti che generano bei disegnini, nel mistero rappresentato dalle parole che contiene, anche se sembrano latine, nel fatto che si trovi sia su monumenti cristiani sia su edifici precristiani, ecc.

	A		**O**	
A		**E**		**O**
	E		**E**	
O		**E**		**A**
	O		**A**	

Schema delle vocali

S		**T**		**R**
	R		**P**	
T		**N**		**T**
	P		**R**	
R		**T**		**S**

Schema delle consonanti

Insomma, è un bell'oggetto che si presta a vari giochi.

Il problema è: per quale motivo e da chi e dove è stato inventato?

Le risposte non sono note, anche perché schemi analoghi sono stati trovati anche in quadrati che contengono altri caratteri, ad esempio ebraici o quechua.

Così, qualche tempo fa, essendo passato davanti a una libreria che esponeva un libro sul SATOR[1], sono entrato e l'ho comperato. Il sottotitolo (*Il segreto dei maestri costruttori*) mi ha creato qualche perplessità, ma ho soprasseduto.

Il testo si è rivelato appartenere alla grande famiglia delle Scoperte Fondamentali sulla Tradizione e sulle Conoscenze degli Antichi (le maiuscole si impongono, in questi casi), il che può anche essere interessante o, se non altro, curioso. Il fatto è che l'Autrice trova nel SATOR anche parecchia, troppa, matematica.

Prima scoperta

Dopo aver osservato che, forse, la spiegazione dei misteri del SATOR non è racchiusa nel senso delle parole ma nello schema stesso, ecco che l'Autrice comincia a costruire lo schema base, ottenuto unendo i centri delle caselle contenenti le lettere (figura 1):

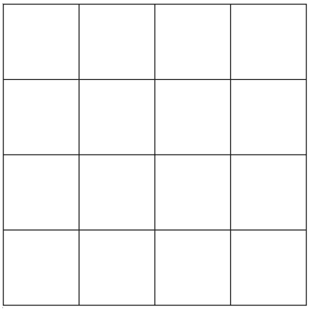


Figura 1 Schema base

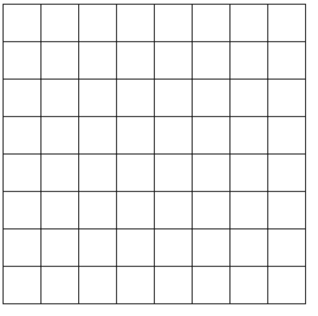


Figura 2 Schema 8x8

Osserva poi che dallo schema base se ne possono ottenere altri (figure 2, 3, 4):

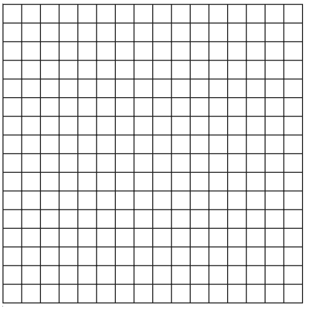


Figura 3 Schema 16×16

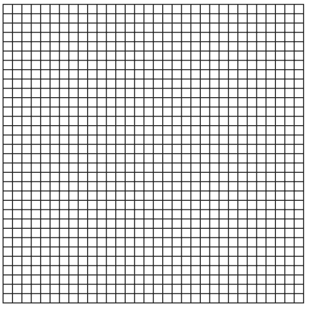


Figura 4 Schema 32×32

1. Lopardi M.G. (2008). *Il quadrato magico del SATOR - Il segreto dei maestri costruttori*. Roma: Edizioni Mediterranee.

Con questi schemi comincia a giocare, ed ecco alcuni risultati che ottiene, alla ricerca di regolarità celatevi dagli Antichi Sapienti.

Ottagono e fiore della vita

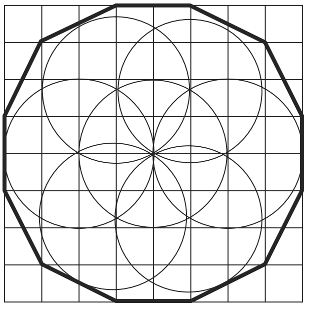


Figura 5 Ottagono

Che l'ottagono non sia regolare è fin troppo evidente: se ne sarebbe facilmente accorto anche l'Antico Saggio, Pitagora, tanto importante per chi mangia misticismo a colazione. Meno evidente è che delle sette circonferenze che disegnano il fiore della vita, quattro sono isometriche tra loro e altre tre lo sono fra loro, ma non tutte e sette sono isometriche. La differenza è piccola, ma c'è.

Con lo schema 16×16 non ottiene alcunché di regolare, e dunque passa a quello 32×32.

Pentagono regolare e stella a cinque punte

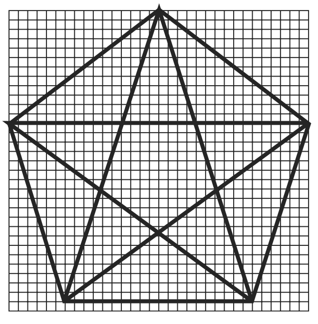


Figura 6 Pentagono

«Per il pentagono occorre una scacchiera più piccola, la 3232, perché i suoi lati siano uguali (…)».

Anche qui è facile stabilire che il pentagono non è regolare: il lato «in basso» è lungo 20 quadretti, mentre i due che da esso si dipartono misurano

$$\sqrt{6^2 + 19^2} = \sqrt{36 + 361} = \sqrt{397} \cong 19{,}92 \quad \text{quadretti}$$

Gli altri due, bravi bravi, misurano

$$\sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = 20 \text{ quadretti}$$

Ne consegue che gli angoli della stella non sono tutti isometrici, con buona pace dell'Autrice che scrive *«Unendo i vertici del pentagono ottengo la* ***stella a cinque punte*** *– tanto preziosa per i Pitagorici – in perfette proporzioni auree, il tutto senza uso del compasso né necessità di calcoli particolari oltre il mero computo dei quadratini».*

Esagono regolare e stella a sei punte

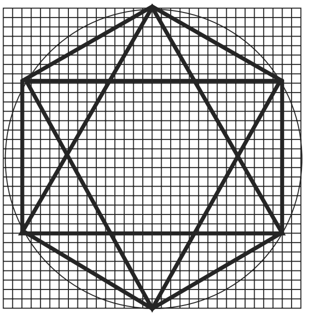


Figura 7 Esagono

La costruzione proposta è la seguente:

si tracciano due rette parallele, una otto quadretti sotto il lato «in alto» e una otto quadretti sopra il lato «in basso» dello schema; poi si traccia una circonferenza con il centro al centro del quadrato e con il raggio metà lato del quadrato. Si trovano i quattro punti di intersezione della circonferenza con le due rette e si uniscono opportunamente con i punti medi dei lati «in alto» e «in basso».

L'esagono che si ottiene è davvero regolare, anche se occorre un po' di geometria analitica per dimostrarlo. Il guaio è che i quattro punti di intersezione non sono punti di griglia: se non si usa il compasso è impossibile trovarli, anche se l'Autrice scrive *«Per l'esagono uso il compasso per facilitare (ma posso farne a meno) (…)».*

L'ettagono regolare e la stella a sette punte

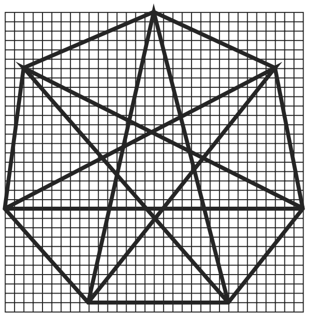


Figura 8 Ettagono

Scrive l'Autrice *«Anche l'eptagono è facilmente realizzabile contando i quadratini».*

«Eptagono», molto più classico del volgare «ettagono»…

Non sta scritto che l'eptagono è regolare, ma lo si deduce dagli sforzi fin qui profusi: basta un pochino di teorema di Pitagora per dimostrare che, invece, regolare non è.

A questo punto, soddisfatta di sé, l'Autrice scrive *«Forse sto appena intuendo il motivo per cui Platone non dava accesso alla sua scuola a chi ignorasse la geometria!»*

Platone di nome faceva Aristocle. Fu Aristone, un lottatore di Argo, suo maestro di ginnastica, a chiamarlo Platone (da *platos*, ampio), date le ampie spalle (altri danno del nome una derivazione diversa, come l'ampiezza della fronte o la maestà dello stile letterario): fosse vera la prima interpretazione, l'Autrice forse sarebbe potuta entrare, magari per apparecchiare e sparecchiare la tavola.

La Matrice

Ma c'è di meglio. Il quadrato, tutto sommato è una figura banale. Allora l'Autrice si diverte a complicarla. A partire dallo schema base, come detto ottenuto unendo i centri delle caselle del SATOR, costruisce la Matrice: *«…la **Matrice** della Dea tessitrice, che è senza forma… ma da cui emergono tutte le forme!»*, che talvolta, dottamente, è chiamata Matrix. La si ottiene unendo in tutti i modi possibili i punti che appartengono ai lati dello schema base. Eccola:

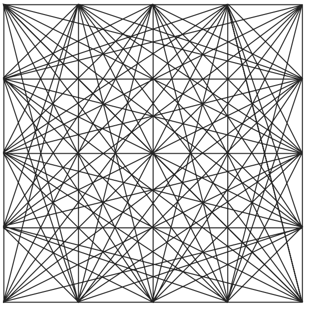


Figura 9 La Matrice

Può essere un buon esercizio di combinatoria determinare quanti sono i segmenti che la compongono. In realtà sono in numero sufficiente per potervi vedere di tutto: dalle cifre arabe allo schema della facciata di una basilica, dalle lettere, italiane o greche, a simboli religiosi (croce latina, croce dei Templari – e come potevano mancare i Templari?) alle piante di città [opportunamente scelte!], dalle forme dei rosoni gotici ai simboli massonici. Nel libro si trova una lunga trattazione di tutto questo e, purtroppo, altro ancora.

Il teorema di Pitagora

«Non poteva [sic] infine mancare la dimostrazione geometrica del *teorema di Pitagora*, secondo cui 'la somma della superfici [sic] dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente alla superficie [sic] del quadrato costruito sull'ipotenusa' e la sua preziosa *Tetraktys*, rappresentante il passaggio dall'Uno al quaternario della materia! [?]»

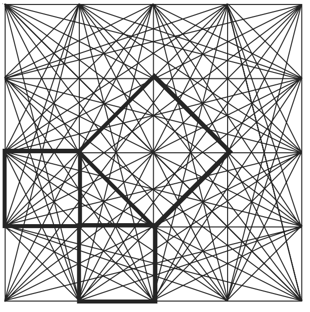


Figura 10 Teorema di Pitagora

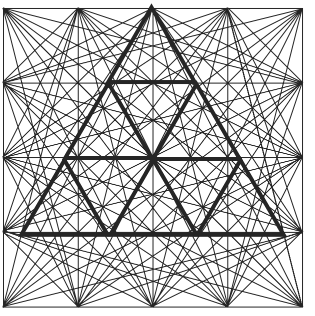


Figura 11 Tetraktys pitagorica

È ben chiaro che non c'è alcuna dimostrazione geometrica del teorema di Pitagora, perché il triangolo rettangolo è un caso particolare (è isoscele), ma più ancora perché non è portato alcun motivo per il quale l'area del quadrato grande, ammesso che sia davvero un quadrato (lo è, lo è!), sia la somma delle aree dei quadrati piccoli.

Così per la Tetraktys: prima di tutto perché non tutti i punti appartengono alla Matrice, come si può ben vedere, ma ancor più perché i triangoli che sembrano, a chi è di buona bocca, equilateri, equilateri non sono: quello grande e i quattro della seconda e terza fila sono solo isosceli e i cinque della prima fila sono addirittura scaleni.

La sezione aurea e il numero phi (φ)

Si pensi al numero aureo, che salta fuori un po' dappertutto[2]. Per quanto ci interessa qui, il numero aureo, φ, è la soluzione positiva dell'equazione

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad \text{cioè} \quad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1.61803$$

Non è difficile dimostrare che φ è un numero irrazionale.

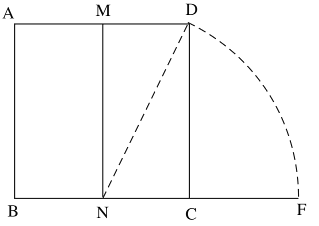


Figura 12 Costruzione del numero φ

2. Si veda ad esempio Livio M. (2003). *La sezione aurea*. Milano: Rizzoli.

ABCD è un quadrato di lato unitario,
M e N sono i punti medi dei lati AD e BC.
Risulta che

$$ND = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

e quindi

$$BF = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

Ora si considerino le seguenti figure, ricavate dalla matrice

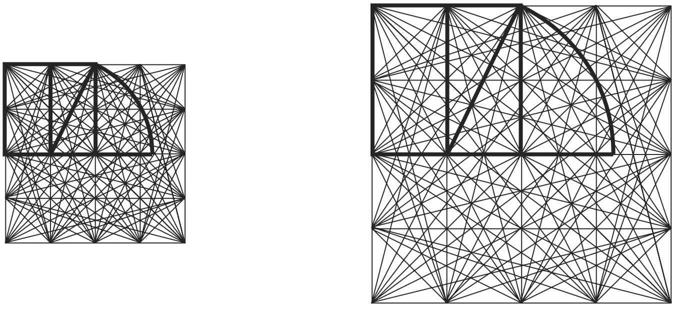


Figura 13 Il numero φ nella matrice

«Troppo facile, persino per me che non sono esperta nel campo delle scienze matematiche e neppure nel disegno rinvenire la dimostrazione geometrica [sic!] *della formula* [di φ] *nella Matrice! Basta* [fare come indicato nella figura sopra]. *La particolarità è che un incrocio della griglia mi permette l'individuazione del punto finale della diagonale proiettata senza bisogno di misurazione alcuna!».*

Il libro è corredato da una figura come quella a sinistra (figura 13): chissà perché è così piccola?

Nella figura grande, alla destra, anche a occhio si vede che il «punto finale della diagonale proiettata» non coincide con un punto della griglia.

Si può dimostrare senza fatica che la coincidenza di tale punto con un punto della griglia è da escludere in modo assoluto: anche se la Matrice fosse costruita non con i punti che suddividono i lati in quattro parti, ma con punti che li suddividono in n parti, n intero grande quanto si vuole, nessun punto della griglia coinciderebbe con quello che individua φ.

Infatti, se si suddivide il lato, supposto lungo 2, in 2n parti, ogni segmento risulterà lungo 1/n, razionale per definizione. Siccome φ razionale non è, nessun multiplo di 1/n sarà uguale a φ. E tanto basta. Ma, se, tanto per gradire, volessimo esercitarci con un po' di geometria analitica, si potrebbe procedere così.

Poniamo che la distanza fra due punti successivi di suddivisione sia 1 (uno). Allora ai punti sul lato «a sinistra» si possono assegnare coordinate cartesiane (0;0), (0;1), …, (0; n); a quelli sul lato «in basso» le coordinate (0;0), (1;0), …, (n,0); analogamente ai punti sul lato «in alto» e su quello «a destra».

Le rette che li congiungono avranno equazioni del tipo y = ax+b, dove sia a sia b saranno numeri razionali e risolvendo tutti i sistemi di due equazioni per trovare i punti di intersezione si troveranno inevitabilmente coppie di numeri razionali. Ma φ è irrazionale, dunque…

Difatti siano

B(b;0) un punto appartenente al lato «in basso», con $b \in \mathbb{N}$, $0 \le b \le n$,
S(0;s) un punto appartenente al lato «a sinistra», con $s \in \mathbb{N}$, $0 \le s \le n$,
A(a;n) un punto appartenente al lato «in alto», con $a \in \mathbb{N}$, $0 \le a \le n$,
D(n;d) un punto appartenente al lato «a destra», con $d \in \mathbb{N}$, $0 \le d \le n$.

Si prendano ad esempio le rette SA, BD e il loro punto di intersezione, $P(x_P;y_P)$.

Equazione di SA:

$$y = \frac{n-s}{a}x + s$$

Equazione di BD

$$y = \frac{d}{n-b}x + \frac{bd}{b-n}$$

da cui

$$P\left(\frac{a(bd-bs+ns)}{-n^2+bn+sn+ad-bs};\frac{d(bn+as-bs)}{-n^2+bn+sn+ad-bs}\right)$$

Il risultato ha un aspetto non del tutto gradevole, ma, date le ipotesi fatte su a, b, d, s, n, le coordinate sono certamente razionali. Di santa pazienza si può procedere per altri tipi di rette e relativi punti di intersezione.

Conclusione

La geometria trattata nel libro è spesso chiamata sacra. Addirittura: *«Il ‘numero d’oro’ racchiuderebbe* ***la Chiave della Conoscenza*** (…) *ma ho appena ripetuto che per i grandi del passato è la Chiave della Conoscenza, la Firma di Dio!»*

Per gli atei Dio non esiste e la cosa finisce lì. Ai teisti resta da sperare che il Creatore abbia progettato e costruito l’universo con competenze geometriche … laiche, se no poveri noi!

Si potrebbe cavarsela andandosene a dormire fra due guanciali, ma è un peccato perdere le buone occasioni: perché non mostrare agli allievi anche situazioni in cui si fanno affermazioni false e invitarli a trovare l’errore?

La faccenda può anche essere divertente.

4. Giochi d'azzardo markoviani

Mauro Cerasoli[1]

The game of the goose is the most famous Markovian dice game. A Markovian game is a game in which the state of a player at a given moment depends only on his preceding state and on the result of throwing one or more dices. In this paper, we present several versions of a new Markovian dice game and we illustrate how probability and linear algebra can be combined to analyze them from a mathematical point of view.

1. I giochi d'azzardo

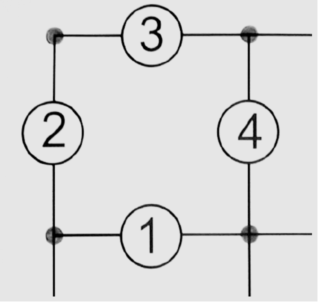
Per *gioco d'azzardo* si intende un gioco il cui esito dipende interamente dal caso. Ad esempio il gioco di testa e croce, del lotto o il bingo, la roulette, un qualsiasi gioco di dadi come ad esempio il Craps. Il termine *azzardo* viene dall'arabo «al zahr» che vuol dire appunto dado. Se i greci avessero avuto questa idea, si sarebbe detto *cubardo* visto che la parola cubo in greco significa proprio dado. I Greci con il termine cubo intendevano sia il dado per giocare che il solido geometrico «cubo». Questo a quanto riferisce Erodoto (*490-480* a. C.). Furono i Lidi a inventare il gioco dei dadi, come egli racconta nelle sue storie, vol. 1; 90. Molto probabilmente il grande storico dice il vero visto che in greco i Lidi sono detti *Λυβοι* e in latino *gioco* si dice *ludus*. Il termine greco per dado è *κυβος*, cioè cubo, e ciò vuol dire che i Greci non si erano accorti che un dado è qualcosa di più di un cubo (geometrico), è un cubo con le facce segnate: è un esempio fondamentale di ciò che oggi si chiama *variabile aleatoria*. Lo stesso Dante, nel Canto VI del Purgatorio, scrive: «*Quando si parte il gioco della zara, colui che perde vi riman dolente, ripetendo le volte e tristo impara…*».

A tutti è noto il famoso *gioco dell'oca* che nell'enciclopedia virtuale Wikipedia è ben descritto e illustrato. Esso è un gioco d'azzardo che ha la caratteristica di essere *markoviano*. Ciò vuol dire che il futuro del giocatore dipende da dove si trova ora e non dal passato, cioè da come ci è arrivato: dimmi dove sei e ti dirò dove andrai.

1. Docente di Calcolo delle Probabilità presso l'Università di L'Aquila dal '72 al 2002. Ha insegnato varie discipline matematiche anche nelle Università di Chieti, Salerno, Basilicata, Calabria, Roma 3. Dopo aver fatto ricerca in Teoria della Probabilità e Matematica Discreta, negli ultimi anni i suoi interessi sono rivolti alla divulgazione e alla didattica della Matematica con i software e alla organizzazione di convegni e gare matematiche. È presidente delle associazioni ADT e Mat^Nat (Matematica in Natura). Sito: www.webalice.it/mauro.cerasoli

2. Il gioco di Mat^Nat

I giochi che vogliamo presentare sono simili al gioco dell'oca ma non si svolgono su un percorso lineare. I possibili stati del gioco formano un grafo. Il più semplice è rappresentato nella seguente figura.



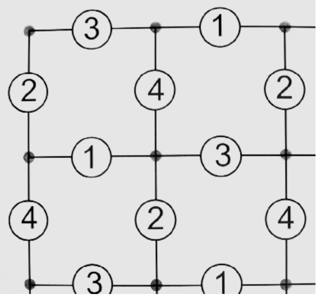
Le regole del gioco, che chiameremo *gioco della torre di Mat^Nat 4*, sono semplici:

a) ogni giocatore ha una pedina in un nodo: è la sua posizione di partenza; a turno lancia un dado: si sposta al nodo adiacente corrispondente al numero uscito se è 1, 2, 3 o 4;
b) se esce 5 o 6 resta dov'è;
c) perde chi viene buttato fuori, nel senso che esce un numero che non ha un nodo adiacente (ad esempio, se si è nell'ultimo nodo in basso a destra ed escono 2 o 3).

Supponendo di giocare con un dado equo, ogni arco ha probabilità 1/6 di essere attraversato. La probabilità di restare al proprio posto è 1/3. Nel gioco di Mat^Nat con 4 nodi a, b, c, d indichiamo con a il nodo in alto a sinistra, con b il nodo in alto a destra, con c il nodo in basso a sinistra, con d il nodo in basso a destra, con v il vuoto, lo stato di perdita. La *matrice di transizione* tra gli stati è

	a	b	c	d	v
a	1/3	1/6	1/6	0	1/3
b	1/6	1/3	0	1/6	1/3
c	1/6	0	1/3	1/6	1/3
d	0	1/6	1/6	1/3	1/3
v	0	0	0	0	1

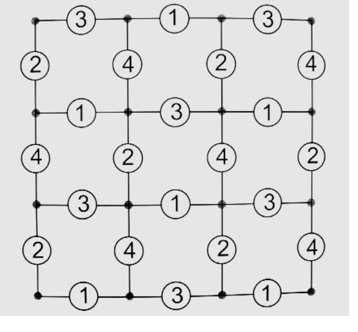
In questa matrice quadrata sono elencati gli stati a, b, c, d, v con le relative probabilità di transizione. Ad esempio, il numero 1/3 all'incrocio della riga d e della colonna v indica la probabilità di passare da d a v, cioè di perdere stando in d. La probabilità di passare dallo stato i allo stato j viene indicata con p(i,j). Nel gioco di Mat^Nat con 9 nodi



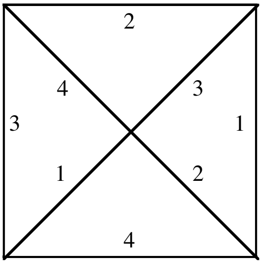
indicati con a (il primo in alto a sinistra), b (il secondo), c, d, e, f, g, h, i (l'ultimo in basso a destra) la matrice di transizione è

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	v
a	1/3	1/6	0	1/6	0	0	0	0	0	1/3
b	1/6	1/3	1/6	0	1/6	0	0	0	0	1/6
c	0	1/6	1/3	0	0	1/6	0	0	0	1/3
d	1/6	0	0	1/3	1/6	0	1/6	0	0	1/6
e	0	1/6	0	1/6	1/3	1/6	0	1/6	0	0
f	0	0	1/6	0	1/6	1/3	0	0	1/6	1/6
g	0	0	0	1/6	0	0	1/3	1/6	0	1/3
h	0	0	0	0	1/6	0	1/6	1/3	1/6	1/6
i	0	0	0	0	0	1/6	0	1/6	1/3	1/3
v	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

La figura seguente rappresenta il gioco su 16 stati



Si può immaginare un gioco di Mat^Nat su reticolati più complicati come triangoli, esagoni e pavimentazioni semiregolari. Un esempio è quello in cui si hanno cinque stati, i vertici di un quadrato e l'intersezione delle sue diagonali, come nella figura seguente.



Gioco del quadrato

3. Probabilità di transizione in più colpi

Nei giochi precedenti abbiamo una matrice quadrata M costituita dalle *probabilità di transizione* da uno stato all'altro in un passo o colpo solo. Diciamo, per ogni lancio del dado. Una volta partito il gioco ci si chiede qual è la probabilità p(i,j,n) di andare da uno stato i di partenza a un altro stato j in n colpi. La risposta sorprendente è l'elemento nella stessa posizione, riga i, colonna j, però della matrice M^n potenza n-esima di M. Per n=2 si ha, per la formula delle alternative (o probabilità totali) che

$$p(i,j,2) = \sum_k p(i,k)\,p(k,j)$$

che corrisponde al prodotto di matrici. Ad esempio, la matrice M del primo gioco è

$$M = \begin{bmatrix} 2/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 2/6 \\ 1/6 & 2/6 & 0 & 1/6 & 2/6 \\ 1/6 & 0 & 2/6 & 1/6 & 2/6 \\ 0 & 1/6 & 1/6 & 2/6 & 2/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e le sue prime potenze, calcolate con *TI-InterActive!*, sono

$$M^2 = \begin{bmatrix} .1667 & .1111 & .1111 & .0556 & .5556 \\ .1111 & .1667 & .0556 & .1111 & .5556 \\ .1111 & .0556 & .1667 & .1111 & .5556 \\ .0556 & .1111 & .1111 & .1667 & .5556 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^3 = \begin{bmatrix} .0926 & .0741 & .0741 & .0556 & .7037 \\ .0741 & .0926 & .0556 & .0741 & .7037 \\ .0741 & .0556 & .0926 & .0741 & .7037 \\ .0556 & .0741 & .0741 & .0926 & .7037 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Chiedersi che cosa accade per n che tende all’infinito, costituisce il problema del comportamento asintotico della catena di Markov. Oggi, con i software a disposizione, è possibile rispondere anche a livello elementare, facendo calcolare direttamente le potenze ennesime della matrice di transizione. Spesso con pochi passi, in modo euristico, scopriamo se esiste il limite.

4. Il problema della rovina di un giocatore

In verità il gioco d’azzardo markoviano più classico è quello che portò al problema della rovina di un giocatore. Un giocatore d’azzardo, che possiede z euro, decide di sbancare il Casinò di Monte Carlo al tavolo della roulette. Pertanto gioca da solo contro il banco puntando ripetutamente un euro sul rosso. A ogni *rien ne va plus* del croupier sia p la probabilità che egli vinca un euro (per esempio p=18/37); supponiamo inoltre che il Casinò possegga a–z euro. Il nostro giocatore continua a puntare ininterrottamente fino a quando sbanca il Casinò, cioè raggiunge un capitale di a euro, oppure perde tutti i suoi z euro, cioè si rovina.

Si dice che il giocatore è nello stato i se ha un capitale i. Se per esempio a=4, gli stati possibili sono 0, 1, 2, 3 e 4. Posto q=1–p, la matrice di transizione è

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si potrebbe illustrare il fatto che una matrice simile modella il gioco del Tennis (Kemeny e Snell, 1960).

Sia u_z la probabilità che il giocatore si rovini, prima o poi, partendo da un capitale iniziale di z euro. Per la formula di Adamo, la successione u_z deve soddisfare la relazione di ricorrenza

$$u_z = p\, u_{z+1} + (1-p)\, u_{z-1}$$

con le condizioni iniziali $u_0=1$, $u_a=0$. Posto $p/(1-p) = v$, si dimostra che se $p \neq 1/2$, allora

$$u_z = \left(1 - v^{a-z}\right) \Big/ \left(1 - v^{a}\right)$$

Se invece $p = 1/2$ allora $u_z = 1 - z/a$.

Se $a = 2z$, cioè se il Casinò possiede un capitale uguale a quello del giocatore, la formula, una volta semplificata, diventa $u_z = 1/(1+v^z)$. Ora il rosso esce con probabilità p=18/37, quindi v=18/19. Pertanto $u_z \to 1$ quando $z \to \infty$. Ma non bisogna andare molto lontano perché, in particolare, risulta già $u_{86} \approx 99{,}05\%$. A parole: con 86 euro abbiamo una probabilità superiore al 99% di rovinarci, puntando un euro alla volta. Mentre, puntando tutti gli 86 euro una volta sola sul rosso, la probabilità di rovina è 19/37, circa il 51,35%. Morale della favola?

Un problema molto più difficile da risolvere nasce quando si fissa anche la partita in cui si vuole che il giocatore si rovini. Infatti *qual è la probabilità che il giocatore si rovini, cioè perda tutto, all'n-esima partita?* Con tecniche sofisticate di algebra lineare si può dimostrare che la probabilità di rovina $u_{z,n}$ è data dalla formula di Lagrange,

$$u_{z,n} = a^{-1}\, 2^n\, p^{(n-z)/2}\, q^{(n+z)/2} \sum_{1 \le k \le n-1} \cos^{n-1}(k\,\pi/a) \sin(k\,\pi/a) \sin(k\,\pi\, z/a)$$

Una bella formula, ma poco utile per i calcoli numerici. Infatti si ricorre a metodi di simulazione Monte Carlo appositamente inventati dai fisici durante gli anni 1943-45 in cui fu costruita la prima bomba atomica. Fu anche per questi motivi che furono costruiti i primi calcolatori elettronici.

5. I giochi d'azzardo della natura

Particolari giochi d'azzardo markoviani si hanno in natura come conseguenza delle leggi di Mendel. Il passaggio dei caratteri genetici da una generazione all'altra avviene secondo un processo markoviano. Supponiamo, come esempio, il *gene* di un individuo con due *alleli*: il dominante A (ad esempio il colore moro dei capelli) e il recessivo a (biondo). I tre *genotipi* possibili sono AA, Aa (in tali casi il *fenotipo* è A, la persona è mora) e aa (il fenotipo è a e la persona è bionda). Supponiamo che in una certa popolazione le percentuali dei tre genotipi siano rispettivamente p, q, r. Consideriamo il genotipo di una femmina che si accoppia a caso con un maschio di quella popolazione. Le leggi di Mendel ci permettono di scrivere le probabilità con cui nasce una figlia di genotipo rispettivamente AA, Aa e aa quando sono noti i genotipi dei genitori. Una delle leggi di Mendel afferma che ogni genitore dà al figlio uno solo dei due alleli. Se il genitore è *omozigote*, cioè ha genotipo AA oppure aa, allora trasmette con certezza rispettivamente l'allele A oppure a. Se invece è *eterozigote*, ha genotipo Aa, allora trasmette uno dei due alleli con probabilità 1/2. Il genotipo del figlio viene a formarsi con gli alleli dati da ciascun genitore. La seguente tabella riporta le probabilità con cui il figlio può avere quel genotipo.

Genitori			Figlio	
Madre	Padre	AA	Aa	aa
AA	AA	1	0	0
AA	Aa	1/2	1/2	0
AA	aa	0	1	0
Aa	AA	1/2	1/2	0
Aa	Aa	1/4	1/2	1/4
Aa	aa	0	1/2	1/2
aa	AA	0	1	0
aa	Aa	0	1/2	1/2
aa	aa	0	0	1

Le probabilità con cui il genotipo passa dalla madre alla figlia sono espresse nella seguente matrice di transizione. La prima colonna indica il genotipo della madre e la prima riga quello della figlia.

	AA	Aa	aa
AA	p+q/2	r+q/2	0
Aa	p/2+q/4	1/2	r/2+q/4
aa	0	p+q/2	r+q/2

Ad esempio, r+q/2 è la probabilità che la figlia nasca con genotipo Aa quando la madre ha genotipo AA. Se vogliamo conoscere la probabilità che la nipote abbia un certo genotipo, bisogna calcolare il quadrato di questa matrice.

$$M = \begin{bmatrix} p+\frac{q}{2} & r+\frac{q}{2} & 0 \\ \frac{p}{2}+\frac{q}{4} & 1 & \frac{r}{2}+\frac{q}{4} \\ 0 & p+\frac{q}{2} & r+\frac{q}{2} \end{bmatrix}$$

Si ottiene la matrice

$$M^2 = \begin{bmatrix} \frac{(2p+q)(2r+4p+3q)}{8} & \frac{(2p+q+2)(2r+q)}{4} & \frac{(2r+q)^2}{8} \\ \frac{(2p+q)(2p+q+2)}{8} & \frac{(2p+q)r}{2}+\frac{pq}{2}+\frac{q^2}{4}+1 & \frac{(2r+q)(2r+q+2)}{8} \\ \frac{(2p+q)^2}{8} & \frac{(2p+q)(2r+q+2)}{4} & \frac{(2r+q)(4r+2p+3q)}{8} \end{bmatrix}$$

Bibliografia

Baclawski K., Cerasoli M. e Rota G.C. (1990). *Introduzione alla Probabilità*. Bologna: Pitagora.
Cerasoli M. (1991). *Problemi risolti di calcolo delle Probabilità*. Milano: CEA.
Kemeny G. J. e Snell J. L. (1960). *Finite Markov Chains*. Toronto: D. Van Nostrand.

II. Didattica

1. Le misconcezioni degli allievi di scuola primaria relative al concetto di probabilità matematica Rapporto di ricerca

Gianfranco Arrigo[1]

This research is based on the results of about 2-3 hundred pupils of primary school who were questioned on simple probabilistic questions just before and immediately after a learning phase, and also one year later. Starting from the need of introduce in the compulsory school activities of education to probabilistic thinking, which is important for the formation of future citizens, it is assumed and showed that the concept of probability can already be learned in primary school, thus preventing the formation of wrong mental models which can at a later stage become serious obstacles to learning.

1. Introduzione

Correvano gli anni Settanta quando il tema della probabilità ha attirato l'attenzione dei molti insegnanti che aderivano con entusiasmo alla riforma «matematica moderna»[2]. Si ricorda particolarmente la settimana di studio della CIEAM, svoltasi a Bordeaux nell'estate del 1974, dedicata all'insegnamento della probabilità. I convegnisti erano ospitati nel campus dell'università, e dell'organizzazione locale facevano parte Nadine e Guy Brousseau, agli inizi della brillante carriera che tutti conosciamo. La signora Nadine, in particolare, accolse nella sua classe di scuola primaria un gruppo di partecipanti che ebbe la fortuna di assistere a una lezione sulla probabilità. Il gioco proposto agli allievi consisteva nell'«indovinare» il contenuto di una bottiglia nella quale vi era un numero noto di palline di due colori diversi. Non si conoscevano i numeri relativi alla distribuzione dei due colori. La bottiglia era foderata in modo che non se ne potesse vedere il contenuto, tranne nell'ultima parte del collo, nella quale, a bottiglia capovolta, poteva scendere una sola pallina. Eseguendo prove ripetute e osservando le frequenze di apparizione dei colori, i bimbi dovevano intuire il numero di palline dello stesso colore contenute nella bottiglia. Fatto questo, potevano aprire la bottiglia e verificare la correttezza della loro congettura. L'osservazione di questa lezione mostrò già allora che è possibile promuovere un'educazione al concetto di probabilità sin dalla scuola elementare. Sotto gli occhi di tutti era la dimestichezza con la quale i bimbi procedevano nella costruzione delle loro congetture e la naturalezza con la quale usavano termini del tipo «sicuro», «impossibile», «probabile». Dal punto di vista metodologico la lezione offriva un bell'esempio di apprendimento in situazione, argomento che successivamente, negli anni '80, Guy Brousseau sistemò teoricamente. Negli Atti di quella

1. Lavoro eseguito nell'ambito del NRD di Bologna.
2. L'impulso, molto forte, di questo movimento è stato dato in particolare dai congressi organizzati dall'OCDE, conosciuti come Colloqui internazionali di Parigi-Royaumont (1959) e di Zagabria-Dubrovnik (1960).

Rencontre si trova il fondamentale articolo dello stesso Brousseau (1974), nel quale l'autore riassume i risultati delle ricerche da lui condotte su questo tema.

Si può dire che la 26.a *Rencontre* della CIEAEM rappresentò, per i presenti, una forte stimolazione nella direzione dell'introduzione dell'educazione al pensiero probabilistico nella scuola elementare e media. Non solo, ma che questo apprendimento doveva avvenire attraverso un percorso didattico ricco di situazioni, diverse l'una dall'altra, proprio nella direzione più tardi indicata in particolare da Bruno D'Amore concernente la costruzione e lo sviluppo dei concetti matematici (D'Amore, 1999). È incredibile come, ripensando a quegli anni, si possano ritrovare, in germe, le grandi idee che sono state sistemate teoricamente nei decenni successivi.

In (Brousseau, 1974) l'autore sottolinea l'importanza dell'introduzione dell'insegnamento della probabilità già a partire dalla scuola primaria e presenta alcune riflessioni – sempre valide – sulle implicazioni didattiche di questo compito difficile e delicato. Brousseau, fra l'altro, scrive:

> «Un certa demistificazione, una certa comprensione e una certa pratica della statistica e della probabilità è diventata, per il cittadino, una delle condizioni per una società democratica e di conseguenza uno degli obiettivi dell'educazione».

Più in avanti si legge ancora:

> «Si può immaginare che l'uso cosciente dei modelli probabilistici sia ritardato dall'assenza di un linguaggio efficace sufficientemente familiare e dalla formazione esclusivamente determinista data dalla scuola. In questo caso è permesso sperare che un'azione pedagogica su alcuni punti nevralgici ben scelti permetterebbe uno sviluppo abbastanza rapido di nozioni già latenti nel bambino e pronte per essere esplicitate».

L'anno dopo, nell'estate del 1975, la Rencontre della CIEAM si tenne a Karlsruhe e in quell'occasione, fra i tanti personaggi presenti, si ricordano Hans Freudenthal, matematico tedesco naturalizzato olandese, che ha fornito contributi sostanziali anche alla storia e alla didattica della matematica (Freudenthal, 1968), Tamas Varga (1972, 1973) e Arthur Engel, dell'Università di Frankfurt am Main, molto noto per le sue ricerche sulle strategie del *problem solving* (Engel, 1973, 1999). Egli, in particolare, mostrò al pubblico come si possa rendere operativo un albero probabilistico, con l'aiuto di pedine che faceva correre lungo i rami, rispettando, a ogni diramazione, i rapporti di probabilità.

Sullo slancio di questi eventi, nell'anno scolastico 1976-77, in Ticino, si tenne un seminario, con sedute a scadenza quindicinale, dal titolo significativo «Seminario sul calcolo delle probabilità». L'iniziativa si prefiggeva soprattutto di sensibilizzare gli insegnanti su questo nuovo cantiere dell'insegnamento della matematica. Nella successiva realizzazione dei manuali scolastici per la scuola media ticinese[3], si cercò di integrare attività sulla probabilità con quelle più tradizionali. Nulla si è fatto finora nella scuola primaria.

Per capire meglio lo sviluppo dell'insegnamento del calcolo delle probabilità nella scuola, negli ultimi decenni, ci si può basare su ciò che è avvenuto in Fran-

3. Dal 1991 al 1994 furono pubblicati i manuali «Dimensione matematica I, II, III, IV» e dal 2004 al 2007 i successivi «Atolli matematici 1, 2, 3, 4» dall'editore Giampiero Casagrande, Lugano.

cia, sviluppo che ha poi influenzato, in misura diversa, la scuola di molti altri paesi, non solo europei.

Si fa riferimento agli articoli di due specialisti: Michel Henry (2000) membro dell'IREM dell'Università di Franche-Comté e Bernard Parzysz (2003), professore emerito dell'Università di Orléans, Laboratoire André Revuz (Université Paris-Diderot).

I due autori presentano e commentano i programmi ufficiali susseguitisi nel tempo. Di seguito, una sintesi desunta dai loro articoli.

1965 *Preliminari di analisi combinatoria – Principi del calcolo delle probabilità. Variabile aleatoria – Statistica applicata.*

Si tratta di un programma tipicamente tradizionale, la probabilità è definita come rapporto tra il numero dei casi favorevoli e quello dei casi possibili, con il sottinteso, non sempre dichiarato, che i casi possibili sono equiprobabili, ciò che ha fatto storcere il naso a molti puristi; giova ricordare che anche Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) cadde in questa confusione.

1970 *Spazi probabilistici finiti* (Ω, $P(\Omega)$, p)*. Applicazioni misurabili – Speranza matematica – Legge dei grandi numeri.*

Questo cambiamento radicale si allinea ai principi della riforma «matematica moderna» e pone come ragione principale il voler diminuire il più possibile il divario tra il sapere insegnato e quello accademico (*savoir enseigné* e *savoir savant*). L'approccio è di tipo assiomatico, il linguaggio usato in classe è decisamente formalizzato.

1982 *Combinatoria – Esempi di situazioni probabilistiche – Insieme finito dei risultati possibili – Calcolo delle probabilità con tecniche combinatorie – Numeri casuali – Statistica descrittiva.*

In questo periodo si assiste a un riflusso nei programmi scolastici di matematica. La statistica descrittiva viene proposta nelle prime classi del secondario superiore e il concetto di probabilità lo troviamo solo nelle classi terminali scientifiche. Nei testi programmatici fa capolino il termine «situazione», forse già nell'accezione proposta da Brousseau.

1986 *Combinatoria e probabilità – Statistica descrittiva.*

I documenti programmatici si staccano sempre più dal tradizionale elenco analitico di contenuti. L'obiettivo è di abituare gli allievi a descrivere, mediante il linguaggio elementare degli eventi, qualche esperienza casuale semplice e a usare le tecniche combinatorie per calcolare le probabilità. La statistica descrittiva è insegnata in tutte le classi del *collège*[4] con una funzione dichiaratamente sociale (*compréhension du fonctionnement de la société*), formativa e istituzionale (con l'accento sulla funzione interdisciplinare). Notiamo che nel testo del programma si parla di «abituare gli allievi» e di usare un «linguaggio elementare degli eventi». Tutto ciò sottintende un apprendimento in situazione che prevede anche fasi a-didattiche, nelle quali l'allievo costruisce e sviluppa le proprie immagini mentali.

1991 *Concetto frequentista di probabilità – Organizzazione, trattamento e rappresentazione di dati statistici grezzi – Uso delle funzioni statistiche di una calcolatrice programmabile (media e scarto tipo).*

L'uso della calcolatrice programmabile permette finalmente di poter affrontare in classe situazioni reali, nel caso specifico grandi collezioni di dati osservati e va-

4. Il *collège* è il termine usato in Francia per indicare la scuola secondaria di primo grado.

lori non «addomesticati». Inoltre la comodità tecnica offerta dalla calcolatrice permette all'allievo di risparmiare energie mentali che può spendere nella riflessione concettuale.

2000 Si aggiungono, solo per il settore liceale: *Statistica descrittiva e Statistica inferenziale.*

L'aspetto inferenziale – estrapolazione di parametri statistici dal campione alla popolazione – è svolto con metodo sperimentale, basato sulla simulazione di situazioni probabilistiche.

In Ticino lo stato attuale dell'insegnamento della probabilità si può così descrivere: i programmi della scuola elementare non prevedono nulla e in quelli della scuola media le attività combinatorie e probabilistiche sono previste come laboratorio matematico. Ritroviamo dunque l'idea di far lavorare gli allievi in situazione affinché possano costruire immagini mentali corrette. Purtroppo, però, non tutti gli insegnanti dedicano spazio sufficiente a queste attività e, per di più, dopo la scuola media, c'è un periodo di vuoto, corrispondente alle prime classi del liceo. L'idea di un insegnamento continuato del calcolo delle probabilità dalla prima alla quarta liceo non ha incontrato i favori degli insegnanti che hanno partecipato all'ultima riforma dei programmi.

Se ci riferiamo alla scuola primaria (in Svizzera, ma anche in altri paesi europei), il problema è ancor più arduo. Gli insegnanti, tranne qualche eccezione, non sono mai stati formati in questo campo e quindi, a giusta ragione, difficilmente accettano di proporre in classe attività di tipo probabilistico. Chi fra loro ha seguito qualche corso su questi argomenti non sempre ha il coraggio di proporre qualcosa in classe. In generale si considera la materia fuori dalla sfera euristica degli allievi. Qui sta il grande errore. In realtà i bambini sviluppano immagini mentali concernenti il concetto di probabilità già a partire dalla scuola dell'infanzia: scommettono, valutano i rischi prima di decidere, credono nella fortuna/sfortuna, stimano probabilità in modo soggettivo, ecc. Se tutto ciò non è accompagnato da un intervento educativo della scuola, può facilmente generare misconcezioni che col passare del tempo si radicano e diventano modelli parassiti, quindi tali da inibire nuovi apprendimenti. (D'Amore, 1999).

Diversi altri articoli hanno evidenziato l'importanza dell'introduzione precoce dell'insegnamento della probabilità nella scuola, accompagnata poi da una continuità curricolare. Ci si limita a segnalare l'intervento di Arrigo al Convegno di Castel San Pietro Terme, Incontri con la matematica N. 12 (Arrigo, 1998).

Già nella collana del primo[5] Progetto MA.S.E. si trova il volumetto di D'Amore (1986) dedicato alla probabilità e alla statistica: un'interessante raccolta di situazioni probabilistiche pensate per la scuola elementare. Nella prefazione l'Autore esprime già alcune idee di fondo che hanno sorretto anche la nostra ricerca. In particolare è significativo il seguente passaggio:

> «Le esperienze fatte ci mostrano che la "mentalità probabilistica" è insita nel modo di pensare comune, ma che va educata, aiutata a crescere per potersi affermare. Tante storture che l'adulto presenta non appena gli si chiede di ragionare su questioni combinatorie, su problemi di probabilità, o su aspetti statistici, sono appunto forse dovuti al fatto che la scuola si è sempre disinteressata di queste discipline».

5. All'interno del RSDDM di Bologna, sotto la direzione di Bruno D'Amore, Martha Isabel Fandiño Pinilla e Silvia Sbaragli, si sta lavorando al nuovo MA.S.E., una collana di testi sull'insegnamento della matematica nella scuola primaria che terrà conto anche dei risultati della presente ricerca.

Ma vi è di più: l'educazione al pensiero probabilistico, sfuggendo a necessità programmatiche molto precise (si pensi in particolare al raggiungimento di obiettivi rigorosamente definiti, come l'apprendimento delle tabelline in aritmetica o quello relativo alle formule per il calcolo di aree in geometria) si presta perfettamente a essere coniugato nei vari aspetti che, insieme, danno origine a un apprendimento completo (Fandiño Pinilla, 2008), risultando così squisitamente formativo del pensiero. Rinunciare a tutto ciò significa privare gli allievi di un'importante educazione.

Ora, non è una novità affermare che la scuola odierna, in generale, predilige l'apprendimento algoritmico e, in misura minore, quello concettuale. Basta fare il giro delle classi per rendersi conto di quello che gli insegnanti esigono prioritariamente dai propri allievi: acquisire automatismi, saper eseguire, conoscere schemi risolutivi di determinate classi di problemi, recitare definizioni ed enunciati di teoremi, ecc. Gli allievi stessi, magnifici interpreti del contratto scolastico, in gran parte non vogliono tanto sapere il «perché» delle cose, ma si interessano soprattutto di «come fare». Un apprendimento che nasce in questo contesto non può essere che superficiale e incompleto o ancora «non robusto» (Arrigo, 2007). Si sa che la capacità di eseguire un algoritmo, se non sostenuta da una comprensione concettuale, traballa facilmente non appena si presenta un ostacolo imprevisto e poi si dissolve in poco tempo. D'altra parte si sa pure che l'apprendimento concettuale non può certo essere ridotto a una semplice memorizzazione, per esempio mediante una formalizzazione precoce, ma va costruito con cura nel tempo e quindi non è immediatamente visibile, come certi programmi scolastici pretendono. Per l'apprendimento del concetto di probabilità matematica, o meglio per condurre gli allievi a raggiungere un primo livello di competenza, si ha a disposizione l'intero ciclo scolastico dell'obbligo. Si è fin qui accennato agli aspetti concettuale e algoritmico dell'apprendimento, ma sarebbe riduttivo fermarsi. La pratica di situazioni probabilistiche permette facilmente di considerare gli altri aspetti, non meno importanti, dell'apprendimento: lo strategico, il comunicativo e il semiotico.

L'aspetto strategico viene sviluppato negli allievi soprattutto mediante la pratica di veri problemi[6], in situazioni a-didattiche (D'Amore, 1999, 2003). Come si vedrà in seguito, l'insegnamento della probabilità nella scuola obbligatoria è proprio da svolgersi in questo modo.

L'aspetto comunicativo contribuisce al rafforzamento dell'apprendimento: argomentare a sostegno delle proprie convinzioni, così come capire, accettare o criticare le idee altrui sono comportamenti molto utili anche nell'apprendimento della matematica. Inoltre a questo aspetto è legata la possibilità degli insegnanti di mettere in luce due importanti elementi dell'apprendimento probabilistico: la rilevazione di eventuali misconcezioni di partenza o in corso di formazione e la valutazione delle capacità degli allievi di esprimersi in situazioni probabilistiche nelle quali è richiesto di prendere una decisione[7].

L'aspetto semiotico riguarda le rappresentazioni nei diversi registri semiotici con le relative operazioni di trattamento – all'interno di un registro – e di conversione da un registro all'altro (D'Amore, 2003).

6. Si ricorda in particolare la distinzione tra problema ed esercizio, ampiamente commentata nei testi citati.
7. Si vedano in particolare, più avanti, le situazioni degli item 2 e 3 del test di valutazione a distanza di un anno.

Già solo la rappresentazione della probabilità, nel semplice caso che i risultati possibili di una prova aleatoria siano equiprobabili e in numero finito, è un'ottima palestra per l'attivazione di queste operazioni. Per esempio, se si lancia un dado cubico ideale e ci si chiede qual è la probabilità di ottenere o 1 o 6, si può rispondere in diversi modi, usando registri diversi o rappresentazioni diverse all'interno dello stesso registro. Nel registro della lingua madre: «vi sono 2 possibilità su 6». Mediante conversione verso il registro frazionario: «la probabilità è 2/6», oppure mediante trattamento all'interno del registro frazionario «la probabilità è 1/3» o mediante conversione verso il registro decimale «la probabilità è $0,\overline{3}$», oppure ancora mediante conversione verso il registro percentuale «la probabilità è $33,\overline{3}\%$». Se pensiamo a studenti delle superiori, i registri sono altri e alcune conversioni diventano trattamenti all'interno di uno stesso registro. Per esempio i registri frazionario, decimale e percentuale possono essere fusi in un solo registro numerico da affiancare a quello insiemistico, a quello geometrico (probabilità come area) a quello della variabile aleatoria. Lo studente sceglierà l'uno o l'altro di questi registri a seconda della situazione che dovrà modellizzare, ma in ogni momento può essere costretto a operare conversioni o trattamenti.

Inutile sottolineare la ricchezza di questi cambi di rappresentazione, che, se ben curati e ripresi ogni volta che si fa un passo in avanti nell'apprendimento del concetto o nella risoluzione di un problema, contribuiscono ad affinare le relative immagini mentali.

2. Quadro teorico

Il primo testo importante volto non più all'arte di creare situazioni o semplicemente problemi relativi al concetto di probabilità, ma a riflettere sul «come» l'apprendimento avviene e da quali ostacoli può essere inibito, è senza dubbio quello di Piaget (1976) pubblicato anche in italiano con l'impegnativo titolo (tradotto alla lettera dall'originale francese) «La genesi dell'idea di fortuito nel bambino» e introdotto da Guido Petter. In esso lo psicologo svizzero presenta una numerosa raccolta di studi sperimentali compiuti in pieno stile personale su piccoli numeri di soggetti, rigorosamente suddivisi in tre stadi evolutivi: primo stadio dai 4 ai 7 anni, secondo dai 7 agli 11, terzo dopo gli 11-12 anni di età. La presente ricerca concerne esclusivamente la fascia dai 7 agli 11 anni, ma, non accettando per principio la rigida classificazione di Piaget, si terrà conto in parte anche di quello che egli attribuisce ai soggetti a partire dai 12 anni. Le prove usate da Piaget sono di 10 tipi e in ciascuno vengono presentati due insiemi (o collezioni) di gettoni che possono essere bianchi oppure recare una crocetta. La domanda posta ai soggetti è sempre questa: da quale collezione preferiresti pescare il gettone, se si vince solo pescando un gettone con la croce?

1) *Doppia impossibilità*: per esempio, una collezione di 2 gettoni e una di 3, tutti senza croce (0/2 e 0/3).
2) *Doppia certezza*: per esempio, una collezione di 2 gettoni e una di 4, tutti con la croce. (2/2 e 4/4)
3) *Certezza-impossibilità*: per esempio, una collezione di 2 gettoni crociati e una di 2 senza la croce. (2/2 e 0/2)
4) *Possibilità-certezza*: per esempio, una collezione 1/2 e una 2/2.
5) *Possibilità-impossibilità*: per esempio, una collezione 1/2 e una 0/2.

6) *Composizioni identiche*: per esempio, entrambe le collezioni 1/2.
7) *Proporzionalità*: per esempio, una collezione 1/3 e una 2/6.
8) *Ineguaglianza dei casi favorevoli e uguaglianza di quelli possibili*: per esempio, una collezione 1/4 e una 2/4.
9) *Ineguaglianze dei casi favorevoli e di quelli possibili, senza proporzionalità*: per esempio, 1/2 e 2/3.

In base ai risultati sperimentali, Piaget afferma che, mentre nel primo stadio (4-7 anni) «c'è un'assenza di confronto circa le relazioni quantitative in gioco», nello stadio successivo (7-11 anni) «il fanciullo confronta tra loro i casi favorevoli o sfavorevoli, ma non costruisce il rapporto tra i casi favorevoli e quelli possibili; si ipotizza un preesistente insuccesso per le questioni relative alla proporzionalità (…)».

Se però si esaminano più attentamente certi protocolli di ricerca riportati nel volume citato, si possono percepire nei soggetti l'esistenza di prime immagini mentali che vanno nella direzione della costruzione della proporzionalità.

Per esempio, di fronte alla scelta tra le collezioni 1/2 e 2/5, un soggetto reagisce così:

«Qui (2/5). – Perché? – Perché ce ne sono 2. – Allora? – No, qui (1/2) perché c'è una croce e uno senza croce e non ce ne sono più».

Piaget conclude che nei casi in cui siano uguali i numeri dei casi favorevoli oppure quelli dei casi possibili, i soggetti di 7-11 anni sanno rispondere correttamente; mentre i casi in cui questi numeri sono tutti diversi vengono capiti solo dopo i 12 anni di età.

Ma, leggendo attentamente i protocolli riportati da Piaget, si trova anche questo, relativo alla prova di tipo 7 (collezioni 1/3 e 2/6):

«(Posso pescare) in una (qualsiasi) delle due 1/3 o 2/6 perché è uguale: ogni volta per una croce ce ne sono due senza croce».

Si osserva come l'immagine mentale di proporzionalità stia formandosi e con essa anche quella di probabilità matematica.

Certo, siamo di fronte ad esempi semplici, con numeri facili da manipolare. Quando i numeri si fanno grandi, afferma Piaget, i soggetti di questo stadio evolutivo tendono a confrontare solo i casi favorevoli e a far coincidere maggiore probabilità con maggiori casi possibili.

Per quanto concerne le prove dei primi tre tipi, Piaget riconosce a questi allievi la capacità di capire i tre casi classici di evento sicuro, impossibile e possibile (o probabile, ossia con probabilità p tale che $0<p<1$).

In (Brousseau, 1974) l'autore propone un interessante confronto tra scommessa e predizione, due attività che costituiscono una potente motivazione alla riflessione probabilistica:

«Quando scommette, il bambino sceglie un'asserzione del tipo "tale evento si realizza", pur sapendo che in realtà potrebbe benissimo non realizzarsi. L'attitudine dello scommettitore esprime chiaramente che egli è cosciente di non disporre di alcun modello deterministico per poter prevedere la verità della sua asserzione. Il piacere della scommessa è proprio legato a questa incertezza. Al contrario, la predizione esprime una certa fiducia nel modello: il bambino formula, a proposito di ciò che accadrà, un'asserzione che crede fermamente che si realizzerà. La certezza si manifesta allora psicologicamente mediante una sorta di indifferenza nei confronti della realizzazione che non appare più come necessaria».

Efrahim Fischbein si occupa in modo particolare delle origini intuitive del pensiero probabilistico dei bambini (Fischbein, 1975). In un suo apprezzatissimo intervento al Convegno di Castel San Pietro Terme (1992) presenta risultati interessanti relativi a una ricerca che ha coinvolto 618 alunni di scuola elementare e di scuola media di Pisa ai quali è stato richiesto di risolvere alcuni problemi di probabilità. L'obiettivo principale è di ottenere una migliore comprensione dell'origine e della natura di alcuni ostacoli intuitivi in ambito probabilistico. Ecco alcuni risultati che ci tornano utili, tratti dall'articolo citato:

- «è stato identificato un fattore linguistico: sembra infatti che per molti ragazzi sia più difficile da capire il concetto di "evento certo" che quello di "evento possibile"; (…)
- nei problemi in cui intervengono numeri, le valutazioni di probabilità sono influenzate dalla grandezza dei numeri considerati: secondo i ragazzi, nei giochi aleatori, è più probabile ottenere numeri grandi che numeri piccoli;
- sembra che molti ragazzi siano incapaci di risolvere questioni di probabilità perché non riescono a considerare la struttura razionale di una situazione aleatoria: il caso è, per sé stesso, un fattore che "uguaglia" le probabilità (…)».

Daniel Kahneman, nato a Tel Aviv nel 1934, è noto per essere il secondo psicologo (il primo è stato Herbert Simon nel 1978) ad aver ottenuto il Premio Nobel in economia «per avere integrato risultati della ricerca psicologica nella scienza economica, specialmente in merito al giudizio umano e alla teoria delle decisioni in condizioni d'incertezza». Collaborò per anni con Amos Tversky, dimostrando che i processi decisionali umani violano sistematicamente alcuni principi di razionalità, mentre le teorie microeconomiche assumono che il comportamento degli agenti decisionali siano razionali e finalizzati a una massimizzazione dell'utile.

È interessante il libro redatto in collaborazione con due suoi colleghi (Kahneman, Slovic e Tversky, 1982), nel quale si tenta di descrivere comportamenti comuni dei soggetti relativamente a questioni probabilistiche. Ne indichiamo sinteticamente alcuni che possono rientrare nell'ottica del presente lavoro.

- Rappresentatività (cioè: la probabilità di un evento è valutata mediante estensione di esperienze personali anche in casi in cui queste non forniscono informazioni rilevanti).
- Casualità e attribuzione (cioè: frequentemente, nella valutazione di probabilità, il soggetto non si lascia influenzare né da elementi di conoscenza né da comportamenti osservati che possono tornare utili).
- Disponibilità (availability) (cioè: le probabilità di eventi facili da ricordare sono sovrastimate).

Ricco di spunti molto vicini ai vari aspetti della presente ricerca è senza dubbio l'articolo di Gagatsis, Anastasiadou e Bora-Senta (1997). In particolare vi si trova una sintesi delle ricerche sull'apprendimento del concetto di probabilità, dalla quale si riportano le più significative.

Stevenson e Weir (1959) mettono in risalto le difficoltà che insorgono nell'apprendimento delle probabilità.

Craig e Myers (1963) e più tardi Hawkins e Kapadia (1984) sostengono che allievi a partire dai 10 anni sono in grado di apprendere nozioni collegate alla probabilità.

Carfield e Ahlgen (1988), affermano che le difficoltà incontrate dagli studenti, quando essi trattano il concetto di probabilità, sono riconducibili alla intuitiva considerazione che gli studenti stessi hanno dei fenomeni probabilistici e statistici.

Pure interessante è l'articolo pubblicato sugli Atti del Convegno del Cairo (Bagni, Perelli D'Argenzio e Rigatti Luchini, 1999). In esso si pone l'accento sui primi approcci al concetto di probabilità degli studenti 16-17-enni. In particolare si rileva che questi soggetti, di fronte a semplici problemi di probabilità, tendono ad applicare intuitivamente la definizione laplaciana in ogni caso e, purtroppo, anche in assenza di equiprobabilità.

Si ritiene utile in questo contesto riportare la prima situazione proposta agli studenti. In una stanza vi sono tre tavoli. Su ciascuno vi sono due scatole chiuse, una bianca e l'altra nera, nelle quali si mettono caramelle di liquerizia e di menta.

Al giovane Pierino piacciono molto le caramelle di liquirizia, ma odia la menta.

Tavolo 1

Contenuto della scatola bianca: 50 caramelle di liquirizia e 60 caramelle di menta.

Contenuto della scatola nera: 30 caramelle di liquirizia e 40 caramelle di menta.

Domanda 1. Pierino vuole prendere a caso una caramella da una scatola. Pensi che sia meglio che la prenda dalla scatola bianca o da quella nera? [Risultati ottenuti: scatola bianca (corretto) 73%, scatola nera 19%, non rispondono 8%].

La maggior parte degli allievi risponde bene perché la probabilità di estrarre una caramella di liquirizia dalla scatola bianca è 50/110=0,45 mentre dalla scatola nera è 30/70=0,43.

Tavolo 2

Contenuto della scatola bianca: 60 caramelle di liquirizia e 30 caramelle di menta.

Contenuto della scatola nera: 90 caramelle di liquirizia e 50 caramelle di menta.

Domanda 2. Pierino vuole prendere a caso una caramella da una scatola. Pensi che sia meglio che la prenda dalla scatola bianca o da quella nera? [Risultati ottenuti: scatola bianca (corretto) 82%, scatola nera 10%, non rispondono 8%].

Una percentuale ancor più grande di allievi risponde bene perché la probabilità di estrarre una caramella di liquirizia dalla scatola bianca è 60/90=0,67 mentre dalla scatola nera è 90/140=0,64.

Questi allievi mostrano di saper applicare con sicurezza la definizione laplaciana di probabilità, non lasciandosi ingannare dai numeri grandi (fenomeno riscontrato già da Piaget riguardante soggetti più giovani e riproposto in seguito da Fischbein).

Tavolo 3

Ora il contenuto delle due scatole bianche dei tavoli 1 e 2 viene versato nella scatola bianca del tavolo 3 e il contenuto delle scatole nere dei tavoli 1 e 2 viene versato nella scatola nera del tavolo 3.

Domanda 3. Pierino vuole prendere a caso una caramella da una scatola. Pensi che sia meglio che la prenda dalla scatola bianca o da quella nera? [Risultati ottenuti: scatola bianca 63%, scatola nera (corretto) 23%, non rispondono 14%]

La maggior parte degli studenti cade su questa domanda. Nell'articolo citato si sostiene che la causa principale di questo insuccesso è di tipo affettivo: le scatole bianche sono risultate «vincenti» in entrambe le situazioni precedenti, dunque si tende a scegliere quella bianca anche nel tavolo 3. Si ritrova qui anche il fenomeno della rappresentatività di Kahneman e le affermazioni 1 e 9 proposte all'ICME 11 come si vedrà più avanti. Infatti gli studenti, che pure sono in grado di applicare la definizione di Laplace, di fronte a un'operazione «fisica», quella del mescolare i contenuti delle urne di stesso colore, abbandonano la logica fin qui applicata con successo, per seguirne un'altra che può avere anche radici nell'esperienza extra-scolastica, ma che purtroppo è errata. Cioè: essendo state identificate nelle scatole bianche quelle che danno maggiori probabilità di successo nei tavoli 1 e 2, sarà ancora la bianca quella che darà maggiori probabilità nel tavolo 3. Una sola occhiata alla situazione numerica avrebbe permesso di rispondere senza eseguire alcuna divisione:

- contenuto della scatola bianca: 110 caramelle di liquirizia, 90 di menta;
- contenuto della scatola nera: 120 caramelle di liquirizia, 90 di menta. La scatola nera dà maggiori probabilità di pescare una caramella di liquirizia.

Secondo Jean Claude Girard dell'IUFM di Lione (Commission Inter-IREM statistique et probabilités, 2001), la formazione di immagini mentali relative alla casualità è più delicata e richiede ancora più tempo di quanto ce ne voglia, per esempio, in geometria. Occorre quindi proporre molto presto agli allievi attività proprie alla creazione di queste immagini mentali. «Ricerche recenti hanno mostrato che gli allievi del *collège* possono utilizzare la simulazione per costruire esperienze equivalenti: alcuni esempi di fenomeni probabilistici possono essere proposti [già nel *collège*] nella prospettiva di fare apparire regolarità».

Il Congresso ICME 11, 2008, tenutosi a Monterrey (Messico) ha dedicato un'intera sezione all'insegnamento del calcolo delle probabilità.

Questi lavori di gruppo sono stati stimolati da un elenco di 10 affermazioni assai significative:

1. la gente comune[8] usa la propria esperienza per valutare la probabilità in modo molto casuale,
2. la gente comune tratta l'informazione in modo parecchio incompleto
3. la gente comune tratta l'informazione lasciandosi influenzare dagli eventi salienti,
4. la gente comune incontra grosse difficoltà nel valutare probabilità molto piccole o molto grandi,
5. la gente comune non assegna la probabilità 0 all'evento impossibile né la probabilità 1 a quello certo,
6. la gente comune associa certezza e impossibilità a eventi fisici piuttosto che a eventi logici,

8. Termine generico per indicare chi non ha seguito una corretta formazione probabilistica.

7. la gente comune assegna le probabilità 50%-50% ai due eventi legati al lancio di una qualsiasi moneta,
8. la gente comune assegna equiprobabilità a situazioni sconosciute,
9. la gente comune si dimostra incoerente quando assegna e valuta probabilità,
10. la gente comune si comporta in modo sovra-additivo.

Fra i lavori prodotti nel congresso si considera particolarmente interessante per la presente ricerca quello di Chiesi e Primi (2008). In esso si può leggere: «L'educazione probabilistica è legata all'euristica cognitiva. L'applicazione di metodi euristici conduce talvolta a risultati ragionevoli, ma la loro attivazione può anche produrre errori sistematici (Kahneman, Slovic, & Tversky 1982)».

Uno di questi errori è detto *gambler's fallacy* (errore del giocatore d'azzardo[9]). Per esempio, se si lancia 4 volte una moneta e si ottiene una sequenza di 4 «croci», il soggetto pensa comunemente che nel prossimo lancio il risultato «testa» abbia più probabilità di verificarsi. Il fatto che vi sia equiprobabilità tra i due risultati possibili non viene più considerato. È forte il sentimento che «testa» debba apparire per equilibrare la proporzione. In altre parole, tale soggetto cade in errore a causa della concezione (errata) che, in una successione di prove ripetute, la probabilità di un evento dipenda dai risultati verificatesi precedentemente.

3. Qualche riferimento storico-epistemologico

Gli antichi Greci conoscevano bene gli astragali, ossicini del tarso di piccoli animali. Probabilmente la conoscenza proveniva dall'Asia e si è diffusa in tutto il mondo dalla Russia alla Polinesia fino alle regioni polari, dove gli eschimesi giocano con ossicini di delfino.

L'astragalo ha 4 posizioni di equilibrio, dunque è un dado a 4 facce, ma, a differenza del dado cubico, le facce non hanno tutte le stesse probabilità di realizzarsi: nel modello ideale, due facce hanno probabilità 0,4 e le altre due probabilità 0,1.

Fra le varie combinazioni possibili, si ricorda il «colpo di Venere» consistente nell'ottenere 4 risultati diversi lanciando simultaneamente 4 astragali. Si hanno anche notizie sull'uso degli astragali da parte di stregoni, indovini, consiglieri di potenti i quali verosimilmente mantenevano segreta la distribuzione non uniforme delle probabilità, in modo da pilotare i risultati.

Una data fondamentale di inizio di una vera attività matematica attorno al concetto di probabilità può essere il 1654, anno in cui, grazie a una disputa tra giocatori d'azzardo, vengono coinvolti due matematici francesi: Blaise Pascal e Pierre de Fermat.

Si racconta che Antoine Gombaud, Cavaliere de Méré, un nobile francese con la passione per il gioco d'azzardo, abbia richiamato l'attenzione di Pascal su un gioco che propone di lanciare un paio di dadi 24 volte e relativo problema consistente nel trovare la probabilità che si verifichi almeno un «doppio 6».

9. Si è preferito adottare questa traduzione perché lo stesso effetto crea, nel gioco del lotto o anche della roulette, la fiducia nell'apparizione dei cosiddetti «numeri ritardatari».

Questo e altri problemi posti da de Méré portano Pascal e Fermat a uno scambio epistolare, nel quale i principi fondamentali della teoria della probabilità vengono formulati per la prima volta.

Lo scienziato olandese Christiaan Huygens, conosciuto soprattutto per i suoi studi sul pendolo, viene a conoscenza di questa corrispondenza e dopo pochi anni (1657) pubblica un piccolo testo, il primo libro che non sia mai stato stampato sulla probabilità, intitolato *De ratiociniis in ludo aleae* (Sui ragionamenti nel gioco dei dadi), nel quale, fra l'altro, introduce il concetto di speranza matematica.

Nello stesso periodo, Gerolamo Cardano scrive il suo *Liber de ludo aleae* (Libro sul gioco dei dadi), dapprima stampato in soli 200 esemplari («la mia copia è la n. 34» ebbe a dire) e tirato su carta a mano di puro straccio appositamente fabbricata in Germania, finemente rilegato con legatura rigida in carta marmorizzata. Da giocatore d'azzardo incallito, Cardano inizia ad applicare il calcolo matematico al gioco stesso, contribuendo così alla ricerca dei suoi colleghi transalpini. Il libretto di Cardano si fa conoscere al mondo intero solo sette anni dopo la sua morte, nel 1663, per i tipi di Ioannes Antonius Huguetan & Marcus Antonius Ravaud inserito nell'*Opera omnia*.

La teoria della probabilità si sviluppa rapidamente durante il XVIII secolo: dapprima con lo svizzero Jakob Bernoulli (1654-1705), che fonda la legge dei grandi numeri, e il francese Abraham De Moivre (1667-1754), al quale è legato il teorema limite centrale, poi, nel 1812, con la pubblicazione del libro *Théorie analytique des probabilités* di Pierre de Laplace, che introduce la distribuzione binomiale di probabilità e la sua approssimazione con la distribuzione normale. Laplace applica le idee probabilistiche a molti problemi scientifici e pratici. Anche Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) dà il suo contributo giungendo alla formulazione della distribuzione normale, conosciuta anche come «distribuzione di Gauss-Laplace», che costituisce uno dei cardini su cui si fonda la teoria statistica.

Basandosi sui lavori di parecchi matematici, fra i quali i russi Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821-1894), che dimostra la disequazione sulla quale si basa la stima statistica della media, e Andrei Andreyevich Markov (1856-1922), noto soprattutto per lo studio di semplici processi stocastici che prendono il nome di «catene di Markov», il russo Andrey Nikolaevich Kolmogorov nel 1933 fonda la teoria assiomatica del calcolo delle probabilità. Da quel momento la probabilità diventa una branca fondamentale della matematica.

4. Il problema alla base della ricerca

Come si è messo in risalto nell'introduzione di questo rapporto, il calcolo delle probabilità e la statistica si insegnano quasi esclusivamente nelle scuole superiori, causando da una parte un evidente scompenso nella formazione del futuro cittadino e dall'altra conseguenze negative rilevanti sulla qualità dell'apprendimento. Non è una novità affermare che il cittadino di oggi si confronta sempre più spesso con questioni basate su dati statistici, sull'interpretazione che se ne fa – molte volte arbitraria –, su inferenze statistiche azzardate o volutamente falsate per giustificare l'ingiustificabile. Basta leggere un giornale o seguire un telegiornale per rendersi conto come, spesso, chi sa (una élite) approfitta dell'ignoranza della gente comune per raggiungere propri scopi, non sempre eticamente corretti.

Per esempio, nelle previsioni del tempo, ci vengono propinate una serie di affermazioni, mitigate, ogni tanto, dall'avverbio «probabilmente», ma non si fa mai accenno a stime di probabilità. Eppure basterebbe poco per dare un'idea della probabilità delle varie previsioni, magari in forma percentuale. Se si dice che domani sarà una giornata soleggiata al 95% è un conto, se lo sarà solo al 60% è un'informazione ben diversa. Il pubblico non è in grado di dare un senso alla probabilità? Certo: ma tacendo non gli si offre alcuna possibilità di farsi un'esperienza e quindi di costruirsi un senso della probabilità del realizzarsi di un dato evento. Siamo di fronte a un ciclo vizioso: non si comunica perché il destinatario non sarebbe in grado di capire, ma, non comunicando, si lascia quest'ultimo nell'ignoranza.

L'esempio delle previsioni meteorologiche è estendibile a gran parte dell'informazione che ci viene propinata dai media: a partire dagli indici di gradimento dei programmi televisivi, ai sondaggi di opinione su temi di attualità, alle proiezioni dei risultati delle votazioni politiche, alle ricerche di mercato, ai delicati test che si fanno sui medicinali, allo scottante problema dell'inquinamento e via dicendo.

Si sa che i moderni metodi statistici si basano sull'inferenza di determinati parametri campionari all'intera popolazione. L'estrapolazione, per esempio, della media del campione a quella della popolazione è un'operazione di una certa arbitrarietà, che comporta un margine di rischio, o, se si preferisce, una stima dell'attendibilità. Ora, rischio e attendibilità sono valori di probabilità, calcolabili grazie ai procedimenti di questa disciplina. Ma di questo non si fa cenno che raramente e si presentano al pubblico determinati risultati così ottenuti come se fossero deterministici.

Tutto ciò conduce a una prima conclusione: oggi, il cittadino che partecipa alla vita sociale e politica in uno stato democratico non può fare a meno di concetti basilari legati al calcolo delle probabilità. Ecco quindi che si impone una prima necessità: educare al concetto di probabilità i giovani della scuola obbligatoria.

Ma vi è anche una ragione pedagogica a favore di questa introduzione. Prendiamo come esempio l'aritmetica e la geometria, argomenti classici che da sempre vengono affrontati già a partire dalla scuola dell'infanzia. Ciò significa che gli allievi, nel percorso scolastico obbligatorio, accumulano un'importante esperienza su questi temi. Quando giunge il momento di perfezionare le immagini mentali fino a farle diventare modelli adeguati con un minimo di formalizzazione, ci si può basare su un terreno preparato. Questo non succede invece per la probabilità, se nella scuola primaria e nella secondaria di primo grado non si propongono attività di questo tipo. L'insegnante della scuola superiore, e spesso anche il docente universitario, si vedono costretti a costruire l'apparato formale senza potersi fondare su alcuna esperienza precedente. Risultato: gli studenti incontrano serie difficoltà nel dare senso ai concetti che devono apprendere. Ecco perché, di solito, il calcolo delle probabilità e la statistica creano seri problemi a chi li deve portare agli esami.

La scuola di base si trova quindi di fronte a un nuovo compito nell'insegnamento della matematica: è necessario dare agli allievi una congrua educazione al pensiero probabilistico.

Si può già iniziare nella scuola primaria? Se sì, in che modo? Come esposto in precedenza, esistono importanti studi ed esperienze che affermano non solo l'importanza ma anche la fattibilità di tale introduzione, ma l'istituzione scolastica sembra essere sorda nei confronti di questa problematica. La presente ricerca vorrebbe dare un nuovo contributo in questa direzione.

Siccome nell'ambito del NRD[10] di Bologna si è lavorato in modo approfondito sulle misconcezioni, si è scelto di lavorare, all'inizio, sul curricolo nascosto degli allievi della scuola primaria, in particolare sulla rilevazione di eventuali misconcezioni preesistenti, e poi sulla possibilità di correggerle mediante un'opportuna azione didattica.

5. Domande di ricerca

Ogni domanda è riferita ai bambini della scuola primaria, sia a quelli che non sono stati educati al concetto di probabilità, sia a quelli che hanno seguito una formazione della durata di uno-due anni.

D1. Di fronte a una semplice prova aleatoria con due risultati equiprobabili, ripetuta un numero 2n di volte, il bambino si aspetta che ogni risultato appaia n volte?

D2. In che misura il bambino crede nella fortuna? Oppure: in che misura il bambino pone maggior fiducia nel manifestarsi dell'evento a lui favorevole e gli assegna probabilità maggiore di quella oggettiva?

D3. In situazione di scommessa o di predizione, il bambino si lascia influenzare da aspetti affettivi o da esperienze vissute, in misura tale da modificare visibilmente i valori oggettivi di probabilità?

D4. In una successione di (n–1) prove aleatorie che hanno dato risultati conosciuti, il bambino si lascia influenzare da questi nello stimare la probabilità di realizzazione di un evento nell'n-esima prova?

D5. Il bambino è in grado di stimare correttamente la probabilità di un evento composto (per esempio nel caso di due estrazioni da un'urna senza rimessa)?

D6. Mediante un'opportuna azione didattica è possibile correggere le misconcezioni relative alle domande D1, D2, D3 e D4 e fare in modo che il bambino padroneggi semplici situazioni probabilistiche, compreso quelle del tipo indicato nella domanda D5? Se sì, in che modo l'insegnante può operare?

6. Ipotesi di ricerca

I1. Si stima che le misconcezioni relative alle prime quattro domande di ricerca siano presenti in larga misura nei bambini della scuola primaria che non sono stati minimamente educati al concetto di probabilità. Tali misconcezioni si possono ritrovare anche fra gli adulti, in modo molto esplicito: basti pensare al citato *gambler's fallacy* o alla cieca fiducia che il tifoso assegna all'evento «la squadra del cuore vince il derby».

I2. Si ipotizza che, in larga misura, il bambino non sia in grado di stimare correttamente la probabilità di un evento composto, anche dopo aver seguito una formazione in classe.

10. Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica del Dipartimento di matematica dell'Università di Bologna, diretto da Bruno D'Amore.

I3. Si pone molta fiducia in un'azione didattica mirata alla correzione delle misconcezioni considerate. Si ipotizza che, grazie a ciò, una percentuale significativa di bambini riesca a correggere le misconcezioni trasformandole in modelli mentali adeguati.

7. Descrizione della situazione e della metodologia di ricerca

Le insegnanti che hanno partecipato alla ricerca non avevano mai affrontato questo tema in classe e quasi tutte non avevano mai avuto l'occasione di avvicinarsi al calcolo delle probabilità.

All'inizio, nel 2006, è quindi stato necessario mettere in atto una fase di formazione strettamente dedicata a loro. Si sono sfruttate in parte le occasioni d'incontro – prima fra tutte il convegno di Castel San Pietro Terme –, in minor misura corsi teorici ad hoc e prevalentemente la trasmissione di materiali di apprendimento via Internet.

La seconda fase è consistita nel sottoporre singolarmente tutti gli allievi delle classi interessate (e che non avevano mai avuto alcun insegnamento scolastico sulla probabilità) a un test per determinare le loro concezioni e capacità di partenza, in relazione alle citate domande di ricerca. Hanno partecipato al test iniziale 381 allievi dalla classe terza alla quinta, sparsi un po' ovunque in Italia.

La terza fase, svoltasi durante l'arco di un anno scolastico (poi prolungato per permettere ad altre insegnanti di partecipare con le loro classi) è consistita in un'azione didattica, liberamente condotta dalle insegnanti, avente lo scopo di introdurre correttamente gli allievi nel mondo probabilistico, con particolare riguardo ai problemi e alle ipotesi di ricerca. La raccomandazioni date alle insegnanti sono state soprattutto di tipo metodologico: sviluppare un apprendimento in situazione, prevedendo ampi momenti di attività a-didattica, ponendo principalmente l'attenzione sullo sviluppo di immagini mentali adeguate e sulla correzione di misconcezioni. Solo una parte delle insegnanti ha potuto e saputo svolgere questa fase importante quanto delicata.

Dopo alcuni mesi dalla conclusione della fase di apprendimento, gli allievi, o meglio i 127 che hanno potuto usufruire di un insegnamento adeguato, sono stati sottoposti a un secondo test, per valutare le stesse cose del test iniziale, ma costruito in modo che l'allievo non si accorgesse di ciò (le situazioni sono isomorfe, ma hanno veste diversa; l'ordine dei problemi e delle relative domande è diverso).

Il confronto tra i due test avrebbe dovuto permettere di valutare l'opportunità di introdurre un insegnamento della probabilità già nella scuola elementare.

A distanza di un altro anno gli stessi allievi sono stati sottoposti a un ultimo test allo scopo di valutare due aspetti:

1. se l'apprendimento conseguito attorno al concetto di probabilità è duraturo;
2. come reagiscono gli allievi di fronte a domande aperte, per loro del tutto nuove.

8. Risultati di ricerca

Confronto tra i due test e commento[11]

	TEST INIZIALE		TEST FINALE		DELTA
NUMERO ALLIEVI TESTATI	381		127		
1. Le figurine 3. Palla campo					
circa la metà	66	**30.6%**	9	**7.1%**	
esattamente la metà	49	**10.8%**	6	**4.7%**	
non puoi dire nulla di sicuro	257	**58.6%**	112	**88.2%**	**29.6%**
2. Gioco dell'oca 5. Pari o dispari?					
conta la fortuna	162	**47.7%**	14	**11.0%**	
non ha ragione	97	**27.9%**	47	**37.0%**	**9.1%**
non so	122	**24.3%**	65	**51.2%**	
3. Lancio di una monetina 4. Che cosa pescherò?					
più probabile A	26	**3.6%**	3	**2.4%**	
più probabile B	26	**9.9%**	5	**3.9%**	
stessa probabilità	327	**86.5%**	119	**93.7%**	**7.2%**
4. Lancio di un dado 6. Pesca la carta					
ripetuto ha più probabilità di uscire	95	**27.0%**	21	**16.5%**	
ripetuto ha la stessa probabilità di uscire	162	**37.8%**	74	**58.3%**	**20.4%**
ripetuto ha meno probabilità di uscire	117	**34.2%**	32	**25.2%**	
5. Scommettiamo? 2. Bel tempo si spera					
scommessa contraria	44	**8.1%**	9	**7.1%**	
scommessa favorevole	139	**35.1%**	100	**78.7%**	**43.6%**
scommessa soggettiva	192	**55.9%**	18	**14.2%**	
6. Bianco o nero? 1. Righe o quadretti?					
AA	15	**8.1%**	1	**0.8%**	
BB	25	**3.6%**	2	**1.6%**	
AB o BA	138	**46.8%**	54	**42.5%**	**-4.3%**
nessuna è più probabile delle altre	202	**41.4%**	70	**55.1%**	

Ogni problema ha un titolo ed è preceduto da un ordinale che indica la posizione nel foglio dei dati. I problemi dei due test sono stati accoppiati secondo il criterio dell'isomorfismo. Il primo titolo è del problema del test iniziale, il secondo del test finale. La colonna intestata «DELTA» riporta la differenza tra la percentuale di riuscita del problema del secondo test e quella del primo. Se la differenza è positiva significa che si è avuto un progresso; sono interessanti le differenze con valori assoluti più grandi.

La maggiore differenza si è avuta nella coppia (5;2). I bambini che hanno cambiato opinione si sono liberati da influenze soggettive, anche affettive, e si sono comportati oggettivamente, scegliendo l'evento che ha maggiore probabilità di verificarsi. La percentuale di riuscita raggiunta nel secondo test, quasi l'80%, è molto buona e a questo risultato ha contribuito in modo determinante l'azione didattica.

11. I testi originali delle prove di valutazione sono riprodotti nell'Appendice.

Anche la coppia (1;3) ha dato un buon risultato. È notevole e soddisfacente il fatto che circa il 30% dei bambini cambino opinione sulla frequenza di apparizione in una sequenza limitata di prove di Bernoulli con distribuzione di probabilità 50%-50%, portando così la riuscita fino a quasi il 90%. Scegliere la risposta «non puoi dire nulla di sicuro su come saranno le figurine prese» è dimostrazione di possedere già una buona conoscenza della casualità.

Nella coppia (4;6) il miglioramento scende al 20%, e la riuscita si attesta a un 60% scarso. Qui si vede come in una sequenza limitata di prove di Bernoulli con distribuzione equiprobabile, la stima della probabilità dell'n-esima prova sia ancora significativamente condizionata dai risultati precedenti (*gambler's fallacy*).

La coppia (2;5) vuole valutare in quale misura giochi la soggettività nella stima della probabilità, in rapporto alla credenza nella fortuna/sfortuna. Qui le cose vanno male: la percentuale di riuscita è leggermente migliorata (dal 28% al 37%, ma quest'ultimo valore è decisamente insoddisfacente. L'esperienza extra-scolastica ha creato una misconcezione – credere nella fortuna/sfortuna – che risulta difficile da eliminare.

Nella coppia (3;4) il miglioramento appare lieve (7%), ma le percentuali di riuscita sono altissime (nel secondo test si attestano al 94%). Questo ci suggerisce che, nel caso di prove aleatorie come quelle di (2;5), ma non influenzate da un'esperienza precedente o da fattori affettivi, gli allievi non hanno dubbi e riconoscono l'equiprobabilità.

Significativo è pure il risultato della coppia (6;1): si sono ottenute percentuali di riuscita inferiori al 50% e addirittura un regresso, seppur minimo, dalla prova iniziale al secondo test. Se ne deduce che la determinazione della probabilità di eventi composti è fuori della portata degli allievi della scuola primaria e in ciò ci si allinea alle conclusioni di Piaget.

Risultati e commenti del test a distanza[12]

L'item nr. 1 propone due urne: A con 5 palline bianche e 3 nere, B con 8 palline bianche e 8 nere. Si vince se si estrae una pallina bianca. Da quale conviene pescare?

Item nr. 1	**frequenze assolute**	**percentuali**
NUMERO ALLIEVI TESTATI	127	
sceglie A e determina le probabilità	40	**31.5%**
sceglie A e stima le probabilità	53	**41.7%**
sceglie A senza giustificazione pertinente	19	**15.0%**
sceglie B perché vi sono più bianche	15	**11.8%**

Il risultato appare soddisfacente, se si osserva che ben l'88% sceglie l'urna più conveniente. La maggior parte si accontenta di stimare le probabilità in gioco, ma circa 1/3 le determina correttamente, frutto questo di un buon apprendimento. È notevole il fatto che non pochi allievi giungono persino a trasformare le frazioni in percentuali. Solo il 12% cade nella misconcezione già rilevata da Piaget secondo la quale maggiori casi favorevoli equivale a maggiore probabilità.

12. I testi originali sono riprodotti nell'Appendice.

L'item nr. 2 pone gli allievi di fronte alla decisione se prendere l'ombrello oppure no, sapendo che i meteorologi prevedono una probabilità di pioggia compresa tra il 30% e il 60%.

Item nr. 2	**frequenze assolute**	**percentuali**
NUMERO ALLIEVI TESTATI	125	
prendo l'ombrello, con interpretazone probabilistica	57	**45.6%**
prendo l'ombrello per sicurezza	37	**29.6%**
prendo l'ombrello senza giustificazione	8	**6.4%**
NON prendo l'ombrello, con interpretazone probabilistica	15	**12.0%**
NON prendo l'ombrello senza giustificazione	8	**6.4%**

Gli allievi si sono trovati di fronte a una situazione aperta: dal punto di vista oggettivo può avere ragione sia chi decide di prendere l'ombrello, sia chi decide di no. L'attenzione può allora essere posta sul come gli allievi sono giunti alla decisione. Si osserva che il 58% (45.6+12.0) degli allievi basa la propria risposta su risultati probabilistici correttamente ottenuti. Anche buona parte del 30% di soggetti che si è basata sulla semplice riflessione logica «che piova o no, è meglio avere l'ombrello» ha eseguito calcoli o stime di probabilità per poi aggrapparsi alla soluzione più sicura.

L'ultimo item, il nr. 3, ha proposto agli allievi una situazione del tutto nuova: tre urne A, B e C con i seguenti contenuti:

urna A, 3 palline bianche e 3 nere
urna B, 6 palline bianche e 4 nere
urna C, 4 palline bianche, 2 nere e 4 dal colore sconosciuto (bianco o nero).
Si vince se si estrae una pallina bianca. Da quale urna conviene scegliere?

Item nr. 3	**frequenze assolute**	**percentuali**
NUMERO ALLIEVI TESTATI	115	
scelgo la A	3	**2.6%**
scelgo la B perché ho più probabilità che nella A e più sicurezza rispetto alla C	58	**50.4%**
scelgo la B, con stima o determinazione delle probabilità	18	**15.7%**
scelgo la C, con stima o determinazione delle probabilità e accettazione del rischio	18	**15.7%**
scelgo la C, senza giustificazione	11	**9.6%**
posso scegliere C o B a seconda se voglio rischiare o no, con stima o determinazione delle probabilità	7	**6.1%**

Questa situazione è ancor più aperta della precedente per il fatto che il contenuto dell'urna C è indeterminato. L'urna A, assolutamente da non scegliere, è stata preferita da 3 allievi, una minoranza trascurabile. La maggior parte ha scelto la B sia perché è ovviamente preferibile alla A sia perché dà più sicurezza della C. Il 16% che ha scelto la C in conseguenza di un calcolo della probabilità massima di vincere pescando da questa urna e dichiarando di voler rischiare ha dimostrato di sapersi destreggiare ottimamente, così pure come il 6% che non ha deciso per l'una o l'altra delle urne B o

C, ma ha descritto oggettivamente la situazione delle diverse probabilità in gioco. Senza una congrua azione didattica, difficilmente questi risultati si sarebbero ottenuti.

9. Risposte alle domande di ricerca

R1. Circa il 40% dei bambini privi di un'educazione alla probabilità crede che, su 2n prove di Bernoulli equiprobabili, ciascuno dei due risultati possibili debba per forza apparire n volte (con piccoli margini di «errore»). Dopo l'azione didattica questa percentuale si riduce al 12%.

R2. Solo circa 1/3 dei bambini non crede nella fortuna/sfortuna o non si lascia influenzare da aspetti soggettivi. L'azione didattica ha migliorato di poco questa percentuale, ma si nota un significativo passaggio dal credere nella fortuna/sfortuna alla perplessità (nel secondo test la risposta «non so» è scelta da una metà abbondante di allievi).

R3. Con una certa sorpresa si può osservare – vedere le coppie di problemi (3;4) e (5;2) come siano stati pochi i bambini che, anche inizialmente, non si sono lasciati influenzare né dall'esperienza vissuta né (in misura maggiore) da fattori affettivi nell'assegnare la probabilità ai risultati possibili di una semplice prova aleatoria.

R4. Nel test iniziale il 40% circa di allievi non cade nella misconcezione *gambler's fallacy*, secondo la quale, in una sequenza di prove di Bernoulli equiprobabili, si pone più fiducia nell'apparizione dei cosiddetti «risultati ritardatari». L'azione didattica ha avuto buon esito perché ha portato questa percentuale al 60%.

R5. Meno della metà dei bambini riesce a stimare correttamente la probabilità di un evento composto, ma quel che più conta, dopo l'azione didattica la situazione è addirittura peggiorata. Si può ipotizzare che almeno parte delle risposte corrette siano dovute al caso.

R6. Globalmente l'azione didattica si è rivelata molto incisiva. Particolarmente significativi sono i risultati del test a distanza che mostra come l'apprendimento si sia conservato anche dopo circa un anno dall'azione didattica condotta nelle classi. Circa i 3/4 dei bambini di fronte a una situazione probabilistica della quale si conoscono tutti i dati necessari assumono un atteggiamento oggettivo e stimano o determinano esattamente le probabilità in gioco (item nr. 1). Ma il risultato più eclatante è stato raggiunto negli item 2 e 3, che presentano situazioni aperte, nelle quali occorre non solo saper calcolare le probabilità, ma anche essere in grado di valutare fattori di rischio. Ebbene, nell'item 2 i soggetti che hanno avuto un comportamento corretto sono il 64% e nel 3 questa percentuale sale addirittura all'88%.

10. Conclusioni

I risultati di questa ricerca ci suggeriscono alcune importanti conclusioni relative all'introduzione dell'educazione al pensiero probabilistico già nella scuola primaria. La cosa non è solo possibile e opportuna – come lo dimostra l'esperienza fatta con le classi –, ma addirittura necessaria. Da tempo si va dicendo che, nella scuola secondaria, è ora che si abbandoni il tradizionale asse aritmetica-geometria, struttura portante degli attuali programmi, e lo si sostituisca con lo schema triangolare aritmetica-geometria-probabilità (Arrigo, 1999). È però giunto il momento per fare altrettanto anche nelle classi del secondo ciclo della scuola primaria. Il nuovo apprendimento non deve però essere inteso come raggiungimento di obiettivi specifici di tipo concettuale o algoritmico, ma come acquisizione di un modo di pensare diverso da quello deterministico. In questo senso, occorre far compiere agli allievi una certa esperienza nell'agire in ambito probabilistico. È fondamentale che gli allievi acquisiscano il senso della probabilità matematica, ripulito dalle eventuali misconcezioni formatesi nell'esperienza di vita extra-scolastica, che giungano insomma a quella competenza – se ci si consente di usare un termine così impegnativo – che hanno mostrato di possedere gran parte degli allievi che abbiamo sottoposto al test a distanza di un anno dal periodo di apprendimento. Per poter realizzare questo cambiamento, occorre che gli insegnanti siano adeguatamente preparati. Non è necessario che diventino profondi conoscitori del calcolo delle probabilità, ma che siano in chiaro sul concetto e che acquisiscano una certa esperienza nel creare situazioni probabilistiche corrette e idonee allo sviluppo mentale dei loro allievi. Col tempo e grazie alla pratica in classe devono poi diventare abili e attenti nella rilevazione di misconcezioni e quindi essere pronti ad agire allo scopo di trasformarle in immagini mentali corrette. Ci sono riuscite in modo soddisfacente le insegnanti che hanno partecipato alla, accettando dapprima di intraprendere un minimo di formazione teorica e poi impegnandosi con le proprie classi al fine di formare adeguatamente i propri allievi. Ciò dimostra almeno che – da parte degli insegnanti – l'introduzione dell'educazione al pensiero probabilistico non è affatto impossibile. Se poi si considera il lato allievo, allora qualsiasi dubbio che si possa avere scompare, perché da un lato si è mostrato l'importanza di poter intervenire presto sulle misconcezioni, dall'altro si sono ottenuti risultati più che soddisfacenti e, ciò che non è secondario, si sono visti allievi impegnarsi con grande piacere.

Nell'introduzione di questo rapporto si è attirata l'attenzione sull'importanza di un'educazione probabilistica generalizzata, rispondente ai bisogni di una società come quella odierna e veramente democratica. Questo è un compito che la scuola obbligatoria deve assumersi. La presente ricerca si unisce a quelle che sostengono la fattibilità e l'importanza di iniziare già nella scuola primaria.

Ringraziamenti

I dati sperimentali sui quali si è basata la presente ricerca sono stati prodotti da un gruppo di insegnanti che hanno partecipato in misura diversa, secondo la loro disponibilità. In particolare hanno dato un contributo indispensabile e di ottima qualità Lucia Baldazzi, Elisabetta Bertazzi, Luisita Colucci, Erika D'Ambrosio, Erminia Dal Corso, Barbara Dalla Noce, Margherita Francini, Giuseppe Grasso, Andrea Guidotti, Giuliana Liverani, Ketty Marabini, Lorella Maurizi, Tiziana Minazzi, Annarita Monaco e Vita Ramone.

A tutte e a tutti va un grande e sentito ringraziamento.

Si ringrazia in modo particolare Bruno D'Amore per i preziosi consigli e Giorgio Mainini per la lettura della bozza.

Bibliografia

Anastasiadou S. e Chadjipantelis T. (2008). The role of representations in the understanding of probabilities in tertiary education. *Atti del congresso ICME 11, 2008*.

Arrigo G. (1998). L'educazione al pensiero combinatorio e probabilistico. *Atti del Convegno Incontri con la matematica, 12*. Bologna: Pitagora. 3-8.

Arrigo G. (1999). Educazione al pensiero probabilistico: scuola media e primo biennio superiore. *Bollettino dei docenti di matematica, 38*. Bellinzona: UIM. 43-60.

Arrigo G. (2007). Robustezza degli apprendimenti. Un contributo alla valutazione della competenza. *La matematica e la sua didattica*, 4. Bologna: Pitagora. 471-479.

Bagni G.T., Perelli D'Argenzio M. P. e Rigatti Luchini S. (1999). A paradox of Probability: an experimental educational research in Italian High School. *Proceedings of the International Conference on Mathematics Education into the 21st century.* Cairo (Egitto): A. Rogerson Ed. III, 57-61

Brousseau G. e Briand J. (1974). Généralités sur l'enseignement des probabilités au niveau élémentaire. *Actes de la 26e rencontre de la CIEAEM*. Bordeaux: IREM de Bordeaux. 66-80

Carfield J. e Ahlgeen A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: Implication for research. *Journal of Research in Mathematics Education* 19. 44-63.

Chiesi F. e Primi C. (2008). Primary School Children's and College Students' Recency Effects in a Gaming Situation. *Proceeding of ICME 11, Monterrey (Messico)*.

Commission Inter-IREM statistique et probabilités. (2001). *Autour de la modélisation en probabilités*. Besançon: PUFC.

Craig G.J. e Myers J.L. (1963). A Developmental Study of Sequential Two Choice Decision Making. *Child Development* 34. 483-490.

D'Amore B. (1986). *Probabilità e statistica. Progetto MA.S.E., vol. III*. Milano: Franco Angeli.

D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (2003). *Problemi di matematica nella scuola primaria*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della didattica della matematica*. Bologna: Pitagora. 50-61.

Engel A. (1973). *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Bd I & II*. Stuttgart: Klett.

Engel A. (1999). *Problem-solving strategies*. New York: Springer.

Engel A., Varga T. e Walser W. (1972). *Jeux de combinatoire, de probabilités et de statistiques*. Paris: OCDL.

Fandiño Pinilla M.I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica*. Trento: Erickson

Fischbein E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht (Olanda): D. Reidel Publishing Company.

Fischbein E. (1992). Fattori che influenzano le valutazioni di probabilità nei bambini e negli adolescenti. *Atti del Convegno di Castel San Pietro Terme*. Bologna: Pitagora.

Freudenthal H. (1977). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, Band I & II, 2. durchgesehene Auflage. Stuttgart: Klett.

Gagatsis A., Anastasiadoy S. e Bora-Senta E. (1997). Errori commessi da studenti greci di Matematica in questioni di probabilità. *Bollettino dei docenti di matematica, 35*. Bellinzona: UIM. 87-102.

Hawkins e Kapadia. (1984). Children's conceptions of probability, a psychological and pedagogical review. *Educational studies in Mathematics*. 349-377.

Henry M. (2000). Perspectives de l'enseignement de la statistique et des probabilités. *Gazette des Mathématiciens*, 84. Paris: SMF Publications.

Kahneman D. Slovic P. e Tversky A. (1982) *Judgment Under Uncertainty: Heuristics and Biases*. New York e Cambridge: Cambridge University Press.

Parzysz B. (2003). L'enseignement de la Statistique et des probabilités en France: évolution au cours d'une carrière d'enseignant (période 1965-2002), in *Probabilités au lycée*, (pp. 9-34). Paris: Brochure APMEP 143.

Piaget J. (1976). *La genesi dell'idea di fortuito nel bambino*. Introduzione di Guido Petter. Roma: Newton Compton. 93-148.

Stevenson e Weir. (1959). Variables Affecting Children's Performance in a Probability Learning Task. *Journal of Experimental Psychology* 5T. 403-412.

Varga T. (1973). *Giochiamo alla matematica!* Firenze: Organizzazioni speciali.

Appendice

Test iniziale

1. **Le figurine**

Paolo ha delle figurine dei Pokemon in una scatola. Metà di queste figurine sono uguali alle tue e metà, invece, sono diverse. Paolo ti regala delle figurine, ma le devi prendere dalla sua scatola ad occhi chiusi.

Secondo te capita sicuramente che:

- circa la metà delle figurine che hai preso sia diversa dalle tue e quindi aumenti così la tua collezione
- esattamente la metà delle figurine sia diversa
- non puoi dire nulla di sicuro su come saranno le figurine prese.

2. **Gioco dell'oca**

Luca si ritiene un giocatore fortunato. Dice che quando tira lui il dado, il 6 (che è il risultato migliore) esce più spesso.

Che cosa ne pensi?

- che ha ragione: il risultato può dipendere dalla fortuna di chi tira il dado
- che non è vero
- non so

3. **Lancio di una monetina**

Se lanci una moneta:

- è più probabile che esca Testa
- è più probabile che esca Croce
- può uscire Testa oppure Croce con la stessa probabilità.

4. **Lancio di un dado**

Sara lancia un dado ed esce 5. Lo lancia un'altra volta ed esce ancora 5. Se lo lancia ancora, che cosa ti aspetti?

- che il 5 ha più probabilità di uscire
- che il 5 ha sempre la stessa probabilità di uscire
- che il 5 ha meno probabilità di uscire.

5. **Scommettiamo?**

Ci stai a scommettere con un tuo amico che la tua squadra del cuore vinca la prossima partita:

- anche se hai poca probabilità di vincere
- solo se hai molta probabilità di vincere
- scommetti sempre sulla vittoria della tua squadra

6. **Bianco o nero?**

In un sacchetto ci sono due palline nere e due palline bianche. Senza guardare peschi due palline.

Secondo te, è più probabile che:

- escano due palline nere
- escano due palline bianche
- esca una pallina bianca e una nera
- nessuno di questi risultati ha più probabilità dell'altro

Test finale

1. **Righe o quadretti?**

È il primo giorno di scuola e hai nella cartella i quaderni nuovi, due a righe e due a quadretti. Frughi nella cartella e senza guardare ne prendi due a caso.

È più probabile che ti trovi in mano:

- due quaderni a righe
- un quaderno a righe e uno a quadretti
- due quaderni a quadretti
- nessuna di queste possibilità è più probabile dell'altra.

2. **Bel tempo si spera**

Scommetti con un tuo compagno che il giorno della gita scolastica non pioverà solo se:

- la televisione ha previsto che ci sarà bel tempo
- la televisione ha previsto pioggia
- scommetti in ogni caso perché quando vai in gita è sempre bel tempo.

3. **Palla campo**

Fai parte di un gruppo di bambini che vogliono organizzare una partita di palla campo. Il gruppo è formato da 20 bambini, metà molto bravi a giocare e metà un po' meno bravi. Per formare le due squadre di 10 bambini ciascuna si estraggono i nomi a sorte.

Secondo te capita certamente che:

- esattamente 5 bambini di ogni squadra sono bravi a giocare
- ci saranno circa 5 bambini bravi a giocare
- non puoi dire nulla di sicuro su come saranno suddivisi i bambini bravi a giocare nelle due squadre.

4. **Che cosa pescherò?**

In un sacchetto ci sono una pallina rossa e una blu.

Se peschi una pallina senza guardare:

- può uscire la pallina rossa oppure quella blu con la stessa probabilità.
- è più probabile che esca la pallina rossa
- è più probabile che esca la pallina blu.

5. **Pari o dispari?**

Marco quando scommette a pari e dispari sceglie sempre pari perché secondo lui esce più spesso.

Che cosa ne dici?

- non so
- Marco non ha ragione
- Marco ha ragione perché lui è fortunato

6. Pesca la carta

In un mazzo di carte ci sono quattro assi, uno di cuori, uno di fiori, uno di quadri e uno di picche. Chiara sceglie a caso una carta e pesca l'asso di cuori.

Rimette questa carta nel mazzo e rimescola.

Sceglie di nuovo una carta ed esce ancora l'asso di cuori.

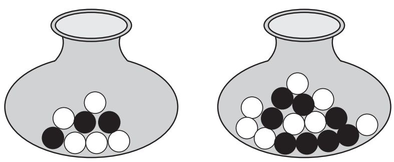
La rimette nel mazzo e mescola le carte.

Se sceglie di nuovo una carta, che cosa ti aspetti?

- che l'asso di cuori ha sempre la stessa probabilità di uscire
- che l'asso di cuori ha più probabilità di uscire
- che l'asso di cuori ha meno probabilità di uscire.

Test a distanza di un anno

1. Quale urna?



urna A urna B

Peschi a occhi chiusi da un'urna a tua scelta. Se la pallina è bianca vinci.

Da quale urna ti conviene pescare? Perché?

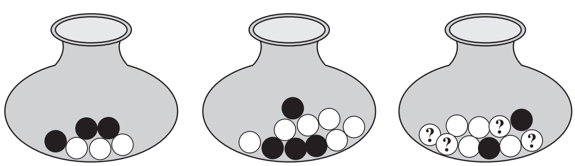
2. Pioverà o non pioverà?

Domani andrai con i tuoi compagni a fare una passeggiata nel bosco.

Secondo le previsioni meteorologiche, la probabilità che domani piova varia tra il 30% e il 60%.

Ti conviene portare l'ombrello? Perché?

3. Da quale urna peschi?



urna A urna B urna C

Peschi a occhi chiusi da un'urna a tua scelta. Se la pallina è bianca vinci. Da quale urna ti conviene pescare? Perché?

2. Il calcolo a scuola: sperimentazione di un nuovo progetto didattico (2)[1]

Gianfranco Arrigo

This article reports the testing of calculation in primary school, which is being extended to a large number of classes. This second part of the research is a follow-up of the article that appeared in this magazine in May 2009 (issue 58). It focuses on the learning of mental calculation and on the introduction of mathematics writing in second and third year classes in Verbania and Pray (Biella).

1. Le sperimentazioni in corso

Attualmente i cantieri sperimentali si trovano in tre zone: Giulianova-Teramo, Pray (Biella) e Verbania.

A Giulianova-Teramo le insegnanti interessate fanno capo a Maddalena Creati. Purtroppo, a causa del tragico evento che ha investito l'Abruzzo, il lavoro di sperimentazione ha dovuto lasciare il posto a esigenze superiori, per cui non possiamo per il momento mostrare i lavori relativi a queste classi, che quest'anno sono giunte in quarta. Sappiamo che ora stanno recuperando e che lavorano già con la calcolatrice. Siamo sicuri che la loro splendida volontà avrà il sopravvento su tutto.

In questo numero presentiamo alcune produzioni degli allievi verbanesi e biellesi. In queste scuole la sperimentazione è partita in alcune classi di seconda e di terza. Come abbiamo già scritto, l'ideale è partire in seconda accentuando il lavoro di scomposizione additiva dei numeri e introducendo le prime scritture in riga, eventualmente usando già qualche parentesi. Si può anche partire in terza, recuperando comodamente nel corso dell'anno ciò che non è stato fatto in seconda. Abbiamo notizie di qualche inserimento parziale delle attività relative al nostro progetto sul calcolo in classi quarte e quinte, ma, pur essendo contenti di sapere che qualcosa di utile possa essere fatto anche partendo solo nelle classi terminali della scuola primaria, non possiamo considerarle classi sperimentatrici. Nel Biellese possiamo contare su un folto gruppo di insegnanti. Fra quelle che hanno contribuito con materiali diversi al presente articolo, citiamo Luisa Ghisio (che si è inserita nella nostra ottica con una classe quarta), Giovanna Giubelli e Nadia Barberis Vignola. Inoltre, nell'Istituto comprensivo di Pray, vi è pure la possibilità di curare la continuità del progetto nella scuola media, grazie anche all'infaticabile Maurizio Candeago. Sono altrettanto numerose le insegnanti di Verbania che partecipano alla sperimentazione. Possiamo contare su parecchie classi, so-

1. Le basi teoriche del nuovo progetto per l'insegnamento del calcolo nella scuola dell'obbligo si trovano in (Arrigo, 2000).

prattutto di seconda, le cui insegnanti fanno capo a Marina Giacobbe, Lorella Maurizi e Tiziana Minazzi. Il 19 marzo scorso si è tenuta nell'Aula magna dell'Istituto Tecnico Superiore di Industrializzazione L. Cobianchi di Verbania una serata informativa dedicata ai genitori. Oltre un centinaio i presenti. Tutti hanno mostrato vivo interesse nei confronti della sperimentazione, ponendo così solide basi al lavoro intrapreso. Sappiamo infatti quanto sia importante poter contare su genitori che conoscono e approvano le grandi linee di un rinnovamento come questo.

2. Sintesi del curricolo relativo all'educazione al calcolo numerico nella scuola primaria[2]

Classe seconda

- Eseguire mentalmente semplici somme di più numeri sfruttando il fatto che le proprietà commutativa e associativa permettono di iniziare dall'addendo desiderato e proseguire come si vuole, facendo solo attenzione di prendere tutti gli addendi una e una sola volta.
- Usare la scrittura in riga, in particolare il segno di uguaglianza.
- Riconoscere gli addendi che, sommati, danno multipli di 10, di 100 ecc.
- Eseguire mentalmente semplici sottrazioni

Classe terza

- Eseguire mentalmente semplici moltiplicazioni usando la scomposizione e la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione e alla sottrazione.
- Riconoscere i fattori che moltiplicati danno multipli 10, 100, 1000, ecc.
- Calcolare mentalmente semplici espressioni con i numeri naturali, verbalizzare le procedure di calcolo con la scrittura in riga e (eventualmente) usare anche la calcolatrice.

Classe quarta

- Eseguire mentalmente semplici divisioni mediante scomposizione del dividendo e/o mediante sottrazioni successive del divisore o di semplici multipli del divisore.
- Eseguire mentalmente semplici espressioni numeriche (addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni) e verbalizzare le strategie usate mediante scrittura matematica.
- Eseguire con la calcolatrice singole operazioni aritmetiche e calcolare espressioni numeriche, se possibile senza reintrodurre dati o risultati parziali (usare le parentesi, la memoria di deposito, i comandi «=» e «1/x»).
- Distinguere multipli e divisori, riconoscere un numero primo, esplicitare la struttura moltiplicativa di un numero.

---

2. Si attira l'attenzione del lettore sul fatto che questo progetto curricolare concerne solo l'educazione al calcolo numerico e come tale è una parte propria di quello, più ampio, relativo alla cosiddetta aritmetica elementare.

– Tradurre la soluzione di un problema in una scrittura matematica in riga, stimarne il risultato, eseguire il calcolo con una calcolatrice, confrontare il risultato con la stima e interpretare il risultato rispetto alla situazione.

Classe quinta

– Usare la proprietà invariantiva per eseguire mentalmente (eventualmente usando la scrittura in riga) determinate divisioni.
– Usare la scomposizione moltiplicativa per eseguire mentalmente (eventualmente usando la scrittura in riga) determinate moltiplicazioni e divisioni.
– Eseguire le quattro operazioni con sicurezza (anche combinate in un'espressione numerica), valutando l'opportunità di ricorrere al calcolo mentale, al calcolo scritto in riga o alla calcolatrice.
– Tradurre la soluzione di un problema in una scrittura matematica in riga, stimarne il risultato, eseguire il calcolo con una calcolatrice, confrontare il risultato con la stima e interpretare il risultato rispetto alla situazione.

3. Esempi tratti dalle sperimentazioni

Si tratta quasi esclusivamente di calcoli comprendenti addizioni e sottrazioni sviluppati mentalmente ed espressi con la scrittura in riga, dapprima senza e poi con l'uso delle parentesi. La moltiplicazione può intervenire già in seconda nelle forme più semplici, a dipendenza delle conoscenze degli allievi e viene poi ripresa e approfondita in terza.

Gli esempi che mostreremo di seguito sono tutti tratti dai lavori delle classi seconde di Verbania e delle classi terze di Pray. Queste attività sono state svolte nella prima parte dell'anno scolastico, quindi non abbracciano l'intero lavoro dell'anno.

3.1. Uso di rettangoli al posto delle parentesi

$$32 + 9 = \boxed{32 + 8} + 1 = 40 + 1 = 41$$

3.2. Una prima abbreviazione: aggiungere decine intere

2**8** + 30 = **58** 1**3** + 40 = **53** **47** + 50 = 9**7**
(I bambini osservano: la cifra delle unità non cambia)

3.3. Introduzione delle scatolette delle decine e delle unità

$$35 + 27 + 14 = \overset{\text{da}}{\boxed{30 + 20 + 10}} + \overset{\text{u}}{\boxed{5 + 7 + 4}} = \overset{\text{da}}{\boxed{60 + 10}} + \overset{\text{u}}{\boxed{6}} = 76$$

3.4. Addizioni in riga con l'uso delle parentesi

8 + 3 + 4 + 6 + 7 + 2 = (8 + 2) + (3 + 7) + (4 + 6) = 10 + 10 + 10 = 30

Semplificazione: gli allievi possono segnare direttamente le coppie di numeri da associare, per esempio:

$8 + \boxed{3} + 4 + 6 + \boxed{7} + 2 = 10 + 10 + 10 = 30$

17 + 29 + 14 + 31 + 6 = 17 + (29 + 31) + (14 + 6) = 17 + 60 + 20 = 97

Commento

Anche se la sequenza presentata ha una sua logica evidente, non è detto che si debba sempre seguirla. Inoltre in questa presentazione non si accenna all'importante fase di manipolazione, che le insegnanti sanno svolgere molto bene. Sottolineiamo il fatto che l'abilità nel calcolo dev'essere costruita nel tempo, rispettando i ritmi dei singoli allievi: non c'è alcuna ragione di forzare i tempi, ma è indispensabile curare la consapevolezza dell'allievo a ogni passaggio. La scrittura in riga aiuta la comprensione perché mette in risalto la struttura intrinseca del procedimento di calcolo. Non deve però diventare una palla al piede: gli allievi che hanno capito possono presto abbreviare la scrittura e in seguito fare a meno di scrivere il calcolo. Si ritornerà però alla scrittura in riga ogni volta che ci si troverà di fronte a un errore concettuale o a una difficoltà al momento insormontabile.

Con l'addizione si può poi continuare, per esempio così:
300 + 200 = 500
58 + 400 = 458
370 + 250 = (300 + 200) + (70 + 50) = 500 + 120 = 620
165 + 383 = (100 + 300) + (60 + 80) + (5 + 3) = 400 + 140 + 8 = 548
(…)

Quando si affrontano per la prima volta questi calcoli può essere necessario tornare alla fase di manipolazione o alla rappresentazione con le casette (si aggiunge quella delle centinaia simboleggiata con h) e si può andare anche oltre il migliaio (k). La grandezza dei numeri non deve far paura: se si è ben capito il procedimento di addizione, si procede per analogia. L'uso dei simboli u, da, h, k per indicare unità, decine, centinaia e migliaia non è strettamente necessario, ma prima o poi, quando si dovranno imparare le unità di misura del Sistema Internazionale, diventeranno indispensabili, quindi meglio introdurli il più presto possibile.

3.5. Sottrazioni di decine intere

6**0** – 20 = 4**0**   4**7** – 30 = 1**7**   9**4** – 60 = 3**4**

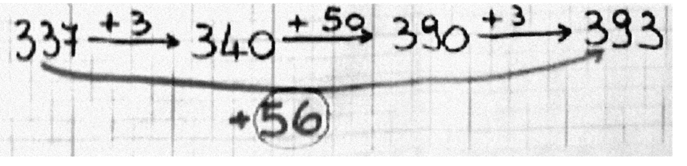
3.6. Sottrazioni

13 – 7 = (13 – 3) – 4 = 10 – 4 = 6
94 – 9 = (94 – 4) – 5 = 90 – 5 = 85
85 – 26 = (85 – 20) – 6 = 65 – 6 = 59

Commento

Anche qui non ci occupiamo dell'aspetto concettuale e ci concentriamo solo sullo sviluppo delle capacità di calcolare. Le insegnanti di Pray, operando con le classi terze, hanno introdotto subito l'altro modo di procedere, cioè partire dal sottraendo e raggiungere il minuendo mediante addizioni successive. La schematizzazione mediante percorso frecciato o, se si preferisce, mediante operatori additivi ha anche il pregio di eliminare il pericolo di usare scorrettamente i segni di uguaglianza.

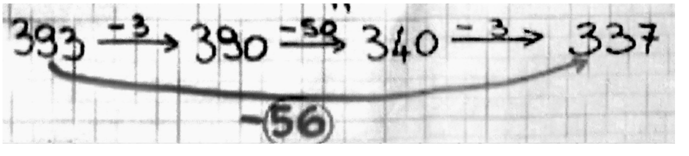
Ecco uno schema del calcolo 393 – 337.



Questi allievi usano gli operatori sottrattivi anche in sostituzione della scrittura in riga. Per esempio, la stessa sottrazione 393 – 337 può essere fatta in riga:

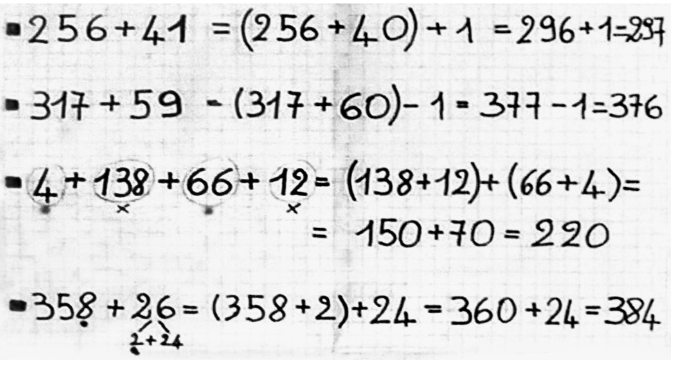
((393 – 300) – 30) – 7 = (93 – 30) – 7 = 63 – 7 = 56

ma anche applicando lo schema degli operatori.



Qui siamo di fronte a una importante conversione dal registro della scrittura in riga (aritmetico-algebrico) a quello dei percorsi frecciati (iconico-schematico), ciò che contribuisce a rinforzare l'apprendimento.

È anche importante stimolare gli allievi alla ricerca di metodi alternativi a quelli già visti. In questo modo le attività di calcolo offrono parecchie occasioni per sviluppare la creatività dei bambini e per operare tutti insieme riflessioni metacognitive: oltre all'aspetto formativo, entra in scena il lato emozionale che agisce positivamente sul clima di classe e, se ben curato dall'insegnante, rafforza la fiducia dell'allievo in se stesso. Ecco di seguito alcuni esempi di metodi diversi usati dagli allievi di Pray (classe terza).



Possiamo notare l'uso corretto delle parentesi che, quando non sarebbero necessarie nella logica della scrittura matematica, vengono usate per evidenziare i passaggi importanti del calcolo.

Ecco qualche esempio di ricerca di metodi alternativi, preso dai lavori degli allievi di terza:

436 + 237 = (400 + 200) + (30 + 30) + (6 + 7) = 600 + 60 +13 = 673
436 + 237 = (436 + 240) – 3 = 676 – 3 = 673
436 + 237 = (436 + 234) + 3 = 670 + 3 = 673

356 – 48 = (356 – 50) + 2 = 306 + 2 = 308
356 – 48 = (356 – 46) – 2 = 310 – 2 = 308

$$48 \xrightarrow{+2} 50 \xrightarrow{+300} 350 \xrightarrow{+6} 356$$

356 – 48 = 2 + 300 + 6 = 308

14 × 12 = (14 × 10) + (14 × 2) = 140 + 28 = 168
14 × 12 = (10 × 12) + (4 × 12) = 120 + 48 = 168
14 × 12 = (14 × 5) + (14 × 7) = 70 + 98 = 168
14 × 12 = (8 × 12) + (6 × 12) = 96 + 72 = 168

3.7. Quando la mente può battere la calcolatrice in velocità

Quando si racconta ai genitori la nostra intenzione di potenziare il calcolo mentale e di educare gli allievi all'uso corretto e opportuno della calcolatrice, di solito qualcuno obietta di considerare contraddittori i due obiettivi. In questi casi ripetiamo che per usare opportunamente la calcolatrice occorre prima di tutto avere la necessità di eseguire sequenze di operazioni non banali con numeri «non addomesticati». Nasce allora l'esigenza di essere in grado di stimare il risultato restituito dalla macchina. La stima dev'essere forzatamente eseguita a mente su dati arrotondati, quindi su numeri facili da dominare mentalmente. La conoscenza dei vari casi «facili da calcolare» è una componente essenziale dell'operazione di arrotondamento. In seconda si può fare poco in questa direzione, ma in terza è sicuramente possibile, come si nota nel seguente calcolo eseguito dagli allievi di Pray:

4 + 138 + 66 + 12 = (4 + 66) + (138 + 12) = 70 + 150 = 220

Al momento in cui gli allievi sanno eseguire semplici moltiplicazioni (in seconda, ma ancor meglio in terza), si possono affrontare anche situazioni come la seguente, tratta da un lavoro dei verbanesi:

4 + 8 + 3 + 6 + 9 + 4 + 2 + 1 = (4 + 6) + (8 + 2) + (9 + 1) + (3 + 4) =
= 10 + 10 + 10 + 7 = 37

5 + 5 + 5 + 7 + 7 + 5 + 5 + 5 + 5 + 7 + 5 + 7 + 7 = (5 × 8) + (7 × 5) =
= 40 + 35 = 75

Chi si accinge a eseguire il calcolo con la calcolatrice immette uno dopo l'altro i vari addendi, deve concentrarsi su di essi per evitare di saltarne uno oppure di inserire due volte lo stesso: non riesce a introdurre nemmeno la metà degli addendi nel tempo impiegato da chi calcola a mente sia se quest'ultimo opera solo mentalmente sia se scrive gli ultimi passaggi.

Nel secondo calcolo, invece di scrivere
$(5 \times 8) + (7 \times 5)$
si può scrivere l'espressione equivalente
$5 \times 8 + 7 \times 5$

Occorre però che gli allievi conoscano la cosiddetta «gerarchia delle operazioni aritmetiche». Si può introdurla già in seconda? Stando ai lavori di alcuni allievi di Verbania parrebbe di sì. Ecco un loro calcolo:

$$4 + 7 \times 4 + 6 = 4 + 28 + 6 = 28 + 10 = 38$$

3.8. Situazioni additive in seconda

Le capacità relative al calcolo non devono rimanere fine a loro stesse, come conoscenza acquisita e memorizzata in una sorta di memoria ROM, ma devono poter essere mobilitate ogni volta che l'allievo si trova a dover affrontare situazioni di questo genere. Così la conoscenza evolve e diventa competenza, almeno a un primo livello elementare. Nasce allora un nuovo compito per l'insegnante: creare, costruire situazioni adatte, stimolanti, avvincenti che permettano agli allievi di usare le loro conoscenze per poter rispondere a determinati interrogativi che nascono dalla situazione stessa; domande, curiosità che, nel caso ideale, dovrebbero essere formulate dagli allievi stessi e che comunque ogni insegnante è in grado di proporre. Ne vediamo alcune, tolte dai copiosi materiali messi a disposizione dalle insegnanti sperimentatrici.

Raccolta nel bosco (classe seconda)

Giovannino è andato nel bosco a fare una passeggiata.

Durante il cammino ha raccolto 44 castagne, 22 noci, 36 nocciole, 38 ghiande per il suo scoiattolino, 11 funghi della specie amanita muscaria e 25 boleti.

Il nonno è molto contento della raccolta, ma i funghi amanita muscaria sono velenosi perciò bisognerà buttarli.

Quali domande ti suggerisce questa storiella?

Fra le domande possibili ce ne sono almeno due che richiedono competenze di calcolo.

1) Quanti frutti del bosco ha raccolto Giovannino?
2) Quanti frutti del bosco conserva il nonno?

Calcolo relativo alla domanda 1:
$44 + 22 + 36 + 38 + 11 + 25 = (44 + 36) + (22 + 38) + (11 + 25) =$
$= (80 + 60) + 36 = 140 + 36 = 176$

Calcolo relativo alla domanda 2:
176 – 11 = (176 – 6) – 5 = 170 – 5 = 165

Ferri che passione![3] **(classe seconda)**
La strega Pasticcia confeziona dei golfini per i suoi gattini.
Ogni golfino ha 6 bottoni sul davanti e 4 bottoni in totale sulle maniche.
La strega vuole confezionare 8 golfini ma si accorge di non avere più bottoni.
Qui la domanda sorge spontanea: quanti bottoni almeno deve comperare?
Questo problema si presta a diverse soluzioni:

$6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 =$
$= (6 \times 8) + (4 \times 8) = 48 + 32 = 80$

Oppure si può calcolare subito quanti bottoni occorrono sul davanti, poi quanti sulle maniche e infine sommare i due numeri ottenuti, il che sfocia direttamente nel calcolo

$(6 \times 8) + (4 \times 8) = \ldots$

oppure ancora (e questa appare come il modo più astuto di procedere), accorgersi che su ogni golfino vanno cuciti 6+4=10 bottoni e quindi il calcolo può essere eseguito così:

$(6 + 4) \times 8 = 10 \times 8 = 80$

3.10. Considerazioni delle insegnanti

Ne proponiamo una sintesi riproducendo fedelmente quanto da loro scritto.

«Per calcolare i bambini possono inizialmente usare dei gettoni con valori diversi: 100, 10, 1. In questo modo è più semplice scomporre e comporre i numeri per effettuare i calcoli. L'uso dei gettoni aiuta molto i bambini che hanno difficoltà».

«Oltre al calcolo scritto [in riga, ndr] *svolgo anche del calcolo orale utilizzando serie di numeri brevi perchè i bambini fanno fatica a memorizzare troppi numeri non scritti».*

«Per introdurre gli esercizi di calcolo e quindi l'uso di semplici espressioni aritmetiche, di solito utilizzo una situazione problema. Ritengo sia utile per dare un senso al calcolo».

«Prima di introdurre le parentesi ho provato a collegare con i pastelli colorati decine con decine e unità con unità, ma i bambini pasticcioni (e io ne ho molti) facevano confusione. Allora ho provato a introdurre la parentesi tonda, solo quella per non creare confusione; ai bambini ho spiegato che il calcolo dentro la parentesi è quello che va fatto per primo».

3. Liberamente tratto dal libro di Maria Luisa Bigiaretti, *Gatto più gatto meno, problemi di gattematica*, Nicola Milano Editore, Bologna 2000, un testo che presenta simpatici problemi che si prestano ad essere risolti con semplici espressioni numeriche.

«Siccome ho lavorato sia su addizione che sottrazione ho pensato anche di introdurre la prova della sottrazione. La cosa difficile da far capire ai bambini è che se il risultato dell'addizione non corrisponde al primo termine della sottrazione non è detto che sia sbagliata l'addizione, è più probabile che ci sia un errore nella sottrazione. Insomma se non ci sono corrispondenze il calcolo va riverificato da capo».

«Dopo aver proposto la moltiplicazione come "scorciatoia" di un'addizione ripetuta, sia io che la mia collega abbiamo proposto ai bambini la tabella della moltiplicazione completa e osservato in particolare la commutatività. Su questa proprietà abbiamo lavorato proponendo esercizi del tipo

$3 \times 5 \times 2 =$, $2 \times 6 \times 3 =$, $1 \times 5 \times 4 =$, $6 \times 2 \times 3 =$, (…).

Abbiamo lasciato i bambini liberi di lavorarci come meglio credevano sia scrivendo i risultati parziali sia facendo il calcolo a mente, oppure usando pastelli colorati per collegare i fattori da moltiplicare per primi».

«Alcuni bambini trovano da soli strategie diverse di scomposizione; a volte applicano la procedura di scomposizione senza scriverla.

Alcuni bambini scompongono anche quando non si dovrebbe, per esempio

$4 \times 3 = (4 + 0) \times (3 + 0) = 12$ *(caso interessante!)*

Ho affrontato da poco la sottrazione perché mi sembrava di creare confusione con la scomposizione: $47 - 35 = (47 - 30) - 5 = \ldots$

Infatti dovendo svolgere esercizi di sottrazione con la richiesta di eseguirle come volevano, i bambini hanno risposto così:

la maggior parte $45 - 35 = 10$

alcuni $45 - 35 = 45 - (30 + 5) = 40 - 30 + 5 = 15$*».*

L'osservazione precedente testimonia che l'uso delle parentesi, specialmente nel caso della sottrazione, rappresenta una reale difficoltà. Secondo quanto osservato finora possiamo affermare che l'introduzione delle parentesi in seconda può essere proposta, ma con cautela, senza pretendere che tutti gli allievi imparino a usarle correttamente: ci sarà tempo sufficiente nei tre anni successivi per acquisire e perfezionare questa capacità.

«Con il lavoro sul calcolo mentale abbiamo pensato a che cosa succede nella nostra mente quando calcoliamo il risultato di una operazione o di una sequenza di operazioni.

Abbiamo scoperto che...

- *la mente di ognuno di noi «funziona» in modo diverso e pertanto si possono usare strategie diverse per risolvere una stessa espressione numerica;*
- *tutte le strategie corrette vanno bene, ma se osserviamo con attenzione un determinato procedimento di calcolo, scopriamo che una strategia può funzionare meglio di un'altra.*

Quindi prima di eseguire un calcolo...

lo osservo bene e scelgo la strategia che va meglio in quel caso;

oppure

- *scelgo la strategia che nella mia mente funziona meglio».*

L'ultima osservazione è stata formulata dalle insegnanti di Pray e si riferisce quindi alla classe terza. Essa rende bene il principio metodologico che si dovrebbe sempre seguire in questi casi, ossia:

- accettare tutte le strategie (purché corrette) adottate dagli allievi;
- far conoscere a tutti gli allievi le diverse strategie corrette;
- discutere con la classe per cercare di capire quali strategie appaiono essere le migliori (le più comode, le più sicure);
- lasciare libertà agli allievi di usare le strategie che meglio si adattano alle caratteristiche del singolo.

In questo modo, senza forzare la mano a nessuno, nel corso degli anni, ogni allievo perfezionerà il proprio modo di calcolare e soprattutto lo farà suo, secondo le proprie capacità.

«La stessa operazione viene svolta applicando le varie strategie, suggerite dagli alunni: ci rendiamo conto che lo stesso risultato può essere raggiunto attraverso "strade" differenti e riflettiamo sul fatto che è importante analizzare con attenzione il calcolo, prima di decidere quale tecnica adottare (i bambini tendono a essere precipitosi e a usare la prima strategia che viene loro in mente)».

«All'interno della classe ho riscontrato quanto segue:

- *si delineano 3 gruppi e 3 livelli di competenze: i "creativi" si divertono a trovare vie alternative e in alcuni casi anche abbastanza interessanti; i "ripetitivi" tendono ad usare (e a ripetere) poche strategie, ma possono migliorare con l'allenamento; gli alunni con problemi di apprendimento si sentono al sicuro con il calcolo in colonna;*
- *ogni bambino mostra di possedere una o più strategie preferite;*
- *i più abili hanno il merito di trascinare il gruppo;*
- *il calcolo in colonna è svolto con più facilità, quando è preceduto dalle numerose attività di calcolo mentale e in riga;*
- *il calcolo costituisce un'occasione per parlare di matematica e diventa creativo e interessante;*
- *un alunno, con difficoltà di memorizzazione, sta cercando di applicare le strategie della moltiplicazione, per ricavare i risultati delle tabelline».*

Significativo il declassamento del calcolo in colonna: relegato a «stampella» per gli allievi in difficoltà o per chi cerca sicurezza: un aiuto mnemonico, che può soddisfare sul piano dell'efficienza a breve termine, ma che rimane escluso dalla comprensione concettuale.

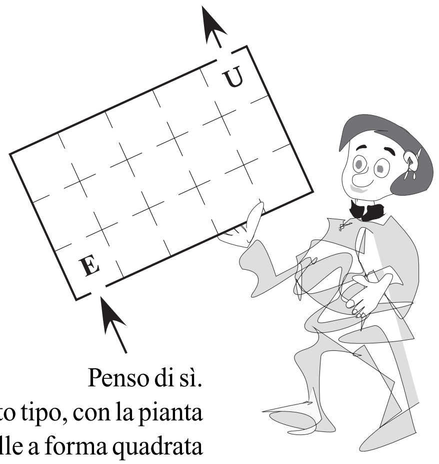
Quiz numero 43

Aldo Frapolli

Mio caro Moore, bentornato!
Sei stato in vacanza per un po', …
che cosa mi racconti?

Ciao Archie,
ti propongo di tornare al Quiz nella sua accezione originaria,
quella cioè… in cui la risposta è legata ad un'idea geniale,
necessaria per superare l'ostacolo senza doversi perdere in
troppi calcoli e considerazioni.

L'idea mi piace.
Ne hai uno carino?



Penso di sì.
Prendi un «labirinto» di questo tipo, con la pianta
di forma rettangolare, costituita di celle a forma quadrata
comunicanti tra loro solo attraverso dei passaggi situati sui lati.

Vediamo un po'!
Fammi provare con un labirinto
di 5x3 celle, ...

L'entrata è situata in corrispondenza di un vertice
qualsiasi del rettangolo e l'uscita
in corrispondenza del vertice opposto.
La consegna è: entrare e… raggiungere l'uscita del
labirinto, dopo essere transitato esattamente una volta
in ogni cella e senza mai uscire dal perimetro!
Nell'esempio che ti mostro è facile, …
ma secondo te si può percorrere in questo modo
un labirinto formato di 80 celle?

Lasciate Archie ai suoi tentativi e provate anche voi!
Esisterà almeno un labirinto formato di 80 celle, percorribile nel modo descritto da Moore? Se sì, quanti ce ne sono?
La migliore soluzione, fra chi vorrà proporre una risposta, magari accompagnata da una generalizzazione con un numero $c = n \cdot m$ di celle, verrà premiata con una copia del libro di B. Colin, *Sherlock Holmes e le trappole della logica*.

Soluzione del Quiz numero 42

La coincidenza di avere il numero **42** del Bollettino in questo anno **2010** ha provocato una scintilla «fruttuosa». Sono arrivati contributi di varia natura, sia da studenti di scuola media e di liceo che si sono lasciati coinvolgere dai loro docenti, sia da docenti amanti del Quiz, interni o esterni alla scuola. Quasi tutti, chi in un modo chi in un altro, hanno individuato il numero cercato: nei prossimi 2010 millenni, ossia entro la data 2'012'000 ci saranno **ancora 1183 doppionumeri**.
La maggior parte ha lavorato in modo sistematico, su casi concreti, per giungere al conteggio finale. Alcuni hanno proposto anche considerazioni generali interessanti.
Molti hanno visto che la lunghezza della stringa destra [ℓ] di un doppionumero è importante e hanno giocato su questo fatto.
Vi proponiamo di seguito una sintesi di vari interventi parziali.

In generale vale:

ℓ	Minimo	Massimo	Frequenza assoluta
1	2**1**	18**9**	9
2	2**01**	198**99**	99
3	2**001**	1998**999**	999
4	2**0001**	19998**9999**	9999
…			
n	2.10^n+1	$2.(10^{2n}-10^n)+(10^n-1)$	10^n-1

Entro questo millennio, cioè con date x ≤ 2'999

ℓ	Minimo	Massimo accettabile	Frequenza assoluta
1	2**1**	18**9**	9
2	2**01**	28**14**	14
3	2**001**	2**001**	1
		Totale	**24**

Entro i prossimi 2010 millenni, cioè nei primi 2012 millenni, cioè con x ≤ 2'011'999

ℓ	Minimo	Massimo accettabile	Frequenza assoluta
1	2**1**	18**9**	9
2	2**01**	198**99**	99
3	2**001**	1998**999**	999
4	2**0001**	202**0100**	100
		Totale	**1207**

Per concludere quindi, nei prossimi 2010 millenni si verificheranno ancora
1207–24 = 1183 date sottoforma di doppionumeri.
Qualcuno ha notato che un qualsiasi doppionumero è multiplo di un «doppionumero minimo», cioè del tipo 21, 201, 2001, ... , o in generale, $2\cdot10^n+1$, con $n \in \mathbb{N}$, come si vede riassunto nella tabella seguente:

ℓ	Minimo	successivi	formula
1	**21**	42, 63, 84, ..., 189	$21\cdot k$, con k=1,...,9
2	2**01**	402, 603, ... ,19899	$201\cdot k$, con k=1,...,99
3	2**001**	4002, 6003, 8004, ..., 1998999	$2001\cdot k$, con k=1,...,999
...	...		
n	2.10^n+1		$(2.10^n+1)\cdot k$, con k=1,..., 10^n-1

Per questo motivo li ha battezzati «doppionumeri generatori» o «d-generatori». Osservando la particolare forma di questi «d-generatori» di lunghezza $\ell+1$, $\ell \in N$, qualcun altro ha notato, sommando le cifre, che sono tutti multipli di 3: infatti
$21=3\cdot7$, $201=3\cdot67$, $2001=3\cdot667$, $20001=3\cdot6667$, ...

Riguardo a questo aspetto, un gruppo di liceali ha anche fatto notare che i doppionumeri formano in generale dei segmenti di successioni aritmetiche di primo termine e ragione identici, pari a 21, 201, 2001, ... , a seconda della lunghezza della stringa destra.
E questo permette poi di trovare facilmente anche la loro scomposizione in fattori primi.
Il contributo più completo e articolato è però sicuramente quello proposto dal collega di redazione Paolo Hägler, docente di matematica presso ICEC di Bellinzona, che vi proponiamo di seguito in una forma leggermente adattata.

Se x è un doppionumero, esso è, per definizione, graficamente scritto da due parti distinte, una sinistra (che chiameremo s(x)) ed una destra (che chiameremo d(x)). Consideriamo quindi queste due parti come delle stringhe. Ad esempio s(42) = 4, s(2001) = 2, s(2010) = 20, d(42) = 2, d(2001) = 001 e d(2010) = 10.
Il valore numerico di una stringa x può essere descritto mediante una funzione v: $x \mapsto v(x)$; quindi avremo ad esempio: v(s(42)) = 4, v(s(2001)) = 2, v(s(2010)) = 20, v(d(42)) = 2, v(d(2001)) = 2, e v(d(2010)) = 10.
Un doppionumero è tale per cui v(s(x)) = 2v(d(x)).
Siccome per ogni x, se consideriamo la stringa come un numero, v(s(x)) = s(x) e v(s(x)) = 2(v(d(x)), ogni doppionumero è definito da una distinta stringa d(x), e ad ogni stringa d(x) possiamo far corrispondere un doppionumero x. Di conseguenza i doppionumeri sono infiniti.
La grandezza di un doppionumero dipende in primis dal numero di cifre della sua stringa destra. Quindi definiamo la funzione c che conta il numero c(x) di cifre della stringa destra del numero x. Così ad esempio c(42) = 1, c(2001) = 3 e c(2010) = 2.
Abbiamo quindi, per ogni doppionumero x, la relazione x = v(s(x)).10^(c(x)) + v(d(x)).
Una prima proprietà interessante dei doppionumeri è che, per ogni valore c(x), essi formano una progressione aritmetica di ragione e di primo termine uguali a $2\cdot10$^c(x)+1.
In effetti x = v(s(x))$\cdot$10^(c(x)) + v(d(x)) = 2v(d(x))$\cdot$10^(c(x)) + v(d(x)) =
= v(d(x))(2$\cdot$10^(c(x)) + 1).
Come corollario deduciamo che tutti i doppionumeri con lo stesso c(x) sono multipli del doppionumero x_0 con c(x) = c(x_0) e v(d(x_0)) = 1.
Cerchiamo ora gli anni, tra lo 0 ed il 2010, che sono dei doppionumeri.
Se c(x) = 1, avremo d(x) ≤ 9 e quindi x ≤ 189 e di conseguenza abbiamo 9 anni (21, 42, 63, 84, 105, 126, 147, 168, 189).
Se c(x) = 2, avremo x ≤ 19899. Per ottenere dei numeri inferiori a 2010, dovremo avere x ≤ 10, e quindi abbiamo altri 10 anni (201, 402, 603, 804, 1005, 1206, 1407, 1608, 1809 e 2010).

Se $c(x) = 3$, avremo $x \leq 1998999$. Per ottenere dei numeri inferiori a 2010 dovremo avere $x \leq 1$, e quindi abbiamo un ventesimo (ed ultimo) anno, il 2001.
In questo millennio ci saranno ancora 4 anni, tutti con $c(x) = 2$. Si tratta degli anni 2211, 2412, 2613 e 2814.
Nei primi 2010 millenni, ossia fino all'anno 2'009'999, ci sono 1207 anni doppionumeri: i 9 con $c = 1$, i 99 con $c = 2$, i 999 con $c = 3$ e 100 con $c = 4$ (fino a 2'000'100).
Una seconda proprietà interessante dei doppionumeri è che sono tutti dei multipli di 3. In effetti, calcolando in modulo 3 abbiamo:
$x = v(d(x))(2\cdot 10\hat{}(c(x)) + 1) = v(d(x))(2\cdot 1\hat{}(c(x)) + 1) = v(d(x))(2\cdot 1+ 1) = 0$
Grazie al corollario precedente, vediamo di concentrarci ora solo sugli x con $v(d(x)) = 1$. Si tratta dei numeri 21, 201, 2001, 20001, eccetera. Questi sono multipli di 3 un po' particolari, in quanto $21 = 3\cdot 7$, $201 = 3\cdot 67$, $2001 = 3\cdot 667$, $20001 = 3\cdot 6667$, eccetera, ossia sono tutti dei numeri della forma $3\cdot\left[1+6\cdot\sum_{i=0}^{c(x)-1}10^i\right]$

Se li si osserva come somme parziali dei termini di una successione numerica, si nota facilmente che ognuno di essi può essere visto come la somma dei primi 6 termini di una progressione aritmetica di primo termine 1 e ragione r, con $r = \dfrac{-1+6\cdot\sum_{i=0}^{c(x)-1}10^i}{5}$

Così ad esempio, essendo $r = 1$ per $c = 1$, $r = 13$ per $c = 2$, $r = 133$ per $c = 3$, $r = 1333$ per $c = 4$, … , avremo che:

- 21 è la somma dei primi 6 numeri naturali (per comodità non contiamo lo 0), ossia $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$;
  42 (il suo doppio) è la somma dei primi 6 numeri pari, ossia $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12$;
  63 (il triplo di 21) è la somma dei primi 6 multipli di 3, ossia $3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18$; e così via fino a 189.
  Gli altri multipli non sono necessariamente doppionumeri (210, 2100, …) anche se alcuni come il 1407 e il 14007 lo sono.
- 201 è la somma dei primi 6 termini della progressione aritmetica di ragione 13 e primo termine 1:
  in effetti $201 = 1 + (1 + 1\cdot 13) + (1 + 2\cdot 13) + (1 + 3\cdot 13) + (1 + 4\cdot 13) + (1 + 5\cdot 13) = 1 + 14 + 27 + 40 + 53 + 66$ (si dice anche che 201 è il sesto numero 13-gonale).
- 2001 è la somma dei primi 6 numeri della progressione aritmetica di ragione 133 e primo termine 1:
  in effetti $2001 = 1+(1 + 1\cdot 133) + (1 + 2\cdot 133) + (1 + 3\cdot 133) + (1 + 4\cdot 133) + (1 + 5\cdot 133) = 1 + 134 + 267 + 400 + 533 + 666$ (si dice anche che 2001 è il sesto numero 133-gonale). E così via.

Personalmente ho trovato molto intrigante l'ultimo risultato evidenziato da Paolo Hägler. Esso permette, ad esempio, di scomporre additivamente il numero 2010 in una forma esteticamente «bella», giocando con i multipli di 10 e di 13. Eccola:
$2010 = 10 + (10 + 13\cdot 10) + (10 + 13\cdot 20) + (10 + 13\cdot 30) + (10 + 13\cdot 40) + (10 + 13\cdot 50)$
Non mi resta che complimentarmi con tutti coloro che ci hanno scritto e che con i loro stimoli e risultati hanno contribuito ad approfondire un pochino la struttura di questi simpatici numeri, e augurare buon divertimento a chi vorrà continuare.

2. Telepatia egizia

Ennio Peres

Premessa

Nel corso della storia dell'Umanità, sono stati messi a punto diversi procedimenti per eseguire l'operazione aritmetica della moltiplicazione. Gli Egizi, in particolare, ne avevano ideato uno, basato su un meccanismo piuttosto elaborato, ma funzionale. Qui di seguito, riporto un'applicazione, relativa al prodotto tra 35 e 42, tratta dal papiro del contabile Ahmes (circa 1900 a.C.) e descritta nel libro *Giochi di aritmetica e problemi interessanti* (Sansoni), di Giuseppe Peano.

35	+	42
17	+	84
8		168
4		336
2		672
1	+	1344
		1470

- Nella prima riga della colonna di sinistra, si scrive il numero 35;
- siccome questo numero è dispari, accanto ad esso si pone un segno «+» e lo si decrementa di 1;
- si divide per 2 il risultato (34), ottenendo 17 che va scritto nella riga successiva;
- siccome questo numero è dispari, si pone accanto ad esso il segno «+» e lo si decrementa di 1;
- si divide per 2 il risultato (16), ottenendo 8 che va scritto alla riga successiva;
- siccome questo numero è pari, lo si divide direttamente per 2, ottenendo 4 che va scritto alla riga successiva;
- siccome questo numero è pari, lo si divide direttamente per 2, ottenendo 2 che va scritto alla riga successiva;

- siccome questo numero è pari, lo si divide direttamente per 2, ottenendo 1 che va scritto alla riga successiva;
- siccome questo numero è dispari, si pone accanto ad esso il segno «+»; se lo si decrementasse di 1, si otterrebbe 0 e, quindi, la prima parte del procedimento termina;
- nella prima riga della colonna di destra, si scrive il numero 42;
- nella riga successiva della stessa colonna, si scrive il doppio di questo numero (84);
- in ognuna delle righe successive, si scrive il doppio del valore contenuto nella riga precedente, tante volte quante sono le righe della colonna di sinistra (168; 336; 672; 1344).
- si sommano tutti i numeri della seconda colonna che sono preceduti dal segno «+» (42+84+1344 = 1470) e si ottiene il prodotto cercato: 35×42 = 1470.

Una tale intricata procedura consente l'impostazione di uno spettacolare gioco di magia matematica che va eseguito di fronte a un pubblico composto da più di sette persone. Per rendere più scorrevole il suo svolgimento, è consigliabile procurarsi otto penne e otto taccuini. Inoltre, è opportuno avere a disposizione una calcolatrice tascabile, per poter accelerare, all'occorrenza, l'effettuazione dei calcoli meno semplici (e garantirne la correttezza...).

Modalità di esecuzione

1. Prendete per voi un taccuino e una penna.
2. Scegliete sette spettatori tra il pubblico e fateli disporre in piedi, vicino a voi, uno accanto all'altro, con il viso rivolto verso le altre persone presenti.
3. Attribuite un numero d'ordine a ciascuno di questi spettatori (contando da sinistra verso destra) e abbozzate sul vostro taccuino uno schema analogo al seguente.

Spettatore	**1°**	**2°**	**3°**	**4°**	**5°**	**6°**	**7°**
Resto							
Quoziente							

4. Consegnate un taccuino e una penna a ciascuno dei sette spettatori selezionati.
5. Pregate uno qualsiasi di loro di pensare a un numero intero N, non maggiore di 100.
6. Fatevi comunicare il numero che ha scelto e trascrivetelo nella prima casella della terza riga del vostro schema.

Spettatore	**1°**	**2°**	**3°**	**4°**	**5°**	**6°**	**7°**
Resto							
Quoziente	N						

7. Chiedete al primo spettatore di scrivere sul proprio taccuino, un altro numero intero M, non maggiore di 100, a sua scelta, senza comunicarvelo.
8. Chiedetegli anche di effettuare il prodotto P tra il suo numero M e quello N che era stato scelto all'inizio e di scrivere il risultato ottenuto, senza comunicarvelo, su un altro foglio del proprio taccuino (ad esempio, se: N = 83 e M = 21, deve calcolare: P = 83×21 = 1743).
9. Chiedetegli, inoltre, di mostrare il numero M alla persona che si trova alla sua destra e invitate questa a calcolare il doppio di tale numero, trascrivendo il risultato su un foglio del proprio taccuino.
10. Chiedete, in successione, a ciascuno degli altri spettatori di compiere un'azione analoga alla precedente. Al termine, la situazione finale deve essere simile a quella indicata nel seguente schema.

Taccuino	**1°**	**2°**	**3°**	**4°**	**5°**	**6°**	**7°**
Numero	M	2×M	2^2×M	2^3×M	2^4×M	2^5×M	2^6×M

Nel nostro caso, essendo M = 21, si deve avere questa situazione finale.

Taccuino	**1°**	**2°**	**3°**	**4°**	**5°**	**6°**	**7°**
Numero	21	42	84	168	336	672	1344

11. Chiedete a ciascuno dei sette spettatori di pensare intensamente al numero che ha scritto sul proprio taccuino e passate lentamente davanti a loro, affermando di essere in grado di captare le onde cerebrali emesse dalle loro menti.
12. Fate notare al pubblico che voi ignorate quale numero ha scelto il primo spettatore e che, quindi, non potete conoscere né i valori ricavati dagli altri, né quello del prodotto P, tra M e N; detto questo, cominciate a eseguire alcuni rapidi calcoli sul vostro taccuino.
13. Al termine, indicate alcuni dei sette spettatori e invitate ciascuno di loro a fare un passo avanti, mostrando al pubblico il numero che aveva scritto sul proprio taccuino.
14. Eseguite la somma S dei vari numeri così resi noti e pregate il primo spettatore di rivelare il valore P del prodotto tra M e N, che aveva calcolato in precedenza.
15. Con grande sorpresa di tutti i presenti, fate notare che i valori S e P sono identici.

Accorgimenti da seguire

Per riuscire a individuare gli spettatori da indicare, dovete svolgere le seguenti semplici operazioni.

- Dividete N per 2, ricavando il quoziente intero Q_0 e il resto R_0 di tale operazione.

Trascrivete Q_0 nella seconda casella della terza riga e R_0 nella prima casella della seconda riga.

Spettatore	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°
Resto	$R_0 = R[N/2]$						
Quoziente	N	$Q_0 = Q[N/2]$					

- Proseguite con lo stesso criterio, dividendo per 2, ogni volta, il quoziente intero ricavato al passo precedente. Alla fine, lo schema completo dovrà assumere il seguente aspetto.

Spettatore	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°
Resto	$R_0 = R[N/2]$	$R_1 = R[Q_0/2]$	$R_2 = R[Q_1/2]$	$R_3 = R[Q_2/2]$	$R_4 = R[Q_3/2]$	$R_5 = R[Q_4/2]$	$R_6 = R[Q_5/2]$
Quoziente	N	$Q_0 = Q[N/2]$	$Q_1 = Q[Q_0/2]$	$Q_2 = Q[Q_1/2]$	$Q_3 = Q[Q_2/2]$	$Q_4 = Q[Q_3/2]$	$Q_5 = Q[Q_4/2]$

Considerando che il valore di N non è maggiore di 100, il risultato dell'operazione $Q_6 = Q[Q_5/2]$ è, in ogni caso, uguale a 0; quindi, non è necessario trascriverlo.

- Nel nostro caso, essendo N = 83, dobbiamo ottenere la seguente situazione finale (dove, avendo effettuato sempre delle divisioni per 2, il valore di ogni resto ottenuto è uguale solo a 0 o a 1).

Spettatore	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°
Resto	1	1	0	0	1	0	1
Quoziente	83	41	20	10	5	2	1

- Marcate ogni numero d'ordine che si trova nella stessa colonna contenente un resto uguale a 1.

Spettatore	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°
Resto	1	1	0	0	1	0	1
Quoziente	83	41	20	10	5	2	1

Al termine di queste operazioni, indicate gli spettatori i cui numeri d'ordine coincidono con quelli che avete marcato. Nel nostro esempio, gli spettatori che dovete indicare sono: il 1°, il 2°, il 5° e il 7°. Eseguendo la somma S dei numeri che questi spettatori avevano scritto sui loro taccuini, si ottiene effettivamente il prodotto P = N×M, come qui evidenziato.

Taccuino	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°
Numero	21	42	84	168	336	672	344

S = 21+42+336+1344 = 1743
P = 83×21 = 1743

Spiegazione del trucco

La serie di divisioni per 2, effettuata sul numero N e sui successivi quozienti interi ottenuti, coincide con l'algoritmo che serve a convertire in binario un numero scritto in notazione decimale (incredibile, ma vero: gli Egizi conoscevano già la numerazione in base 2!).

In effetti, se si prende in considerazione la successione dei resti ottenuti nell'esempio preso in esame caso, abbiamo che:

$83_{10} = 1100101_{2.}$

In generale, quindi, se N non è maggiore di 100, possiamo porre:

$N = R_6\times2^6+R_5\times2^5+R_4\times2^4+R_3\times2^3+R_2\times2^2+R_1\times2^1+R_0\times2^0$.

Di conseguenza, il valore di $P = M\times N$, può essere così indicato:

$P = M\times(R_6\times2^6+R_5\times2^5+R_4\times2^4+R_3\times2^3+R_2\times2^2+R_1\times2^1+R_0\times2^0)$.

da cui si ricava

$P = M\times R_6\times2^6+M\times R_5\times2^5+M\times R_4\times2^4+M\times R_3\times2^3+M\times R_2\times2^2+M\times R_1\times2^1+$
$+M\times R_0\times2^0$.

Quindi, in pratica, il valore di P è uguale alla somma di tutti i prodotti di M per una potenza di 2, che sono moltiplicati per un valore di R_K uguale a 1 (per K = 0, 1, ..., 6).

Nel nostro caso, infatti, abbiamo:

$P = 21\times1\times2^6+21\times0\times2^5+21\times1\times2^4+21\times0\times2^3+21\times0\times2^2+21\times1\times2^1+$
$+21\times1\times2^0$

$P = 21\times64+21\times16+21\times2+21\times1 = 21\ (64+16+2+1) = 21\times83 = 1743$.

Bibliografia

Gardner M. (1978). *Carnevale matematico*. Bologna: Zanichelli.
Ghersi I. (1967). *Matematica dilettevole e curiosa*. Milano: Ulrico Hoepli.
Giacardi L. e Roero S.C. (1979). *La matematica delle civiltà arcaiche*. Torino: Stampatori.
Lombardo Radice L. (1971). *La matematica da Pitagora a Newton*. Roma: Editori Riuniti.
Peano G. (1983). *Giochi di aritmetica e problemi interessanti*. (Copia anastatica da: Paravia, Torino 1925). Firenze: Sansoni..
Peres E. (1986). *Giochi matematici*. (Ristampa anastatica 2007). Roma: Editori Riuniti.
Peres E. e Serafini S. (2006). *L'elmo della mente*. Milano: Salani.
Tosatti di Sorbara P. (1878). *L'amico delle conversazioni*. Roma: Iacobelli. (2008, copia anastatica da: Tipografia Pontificia e Arcivescovile dell'Immacolata Concezione, Modena).

3. Apprendere giocando Giochi geometrici e aritmetici

Bernardo Mutti[1]

Introduzione

«Apprendere giocando» non è solo uno slogan assai diffuso, ma anche una concreta possibilità di variare, almeno ogni tanto, l'attività didattica in classe. Quando poi il gioco è centrato su aspetti concettuali importanti dei programmi scolastici, la cosa si fa ancor più interessante. Questa proposta continua le presentazioni, pubblicate nei numeri precedenti[2], di giochi mirati all'apprendimento per le classi della scuola elementare.

Gioco H: Riconoscere gli angoli

Materiale:
- tavola doppia con il disegno dei diversi tipi di angoli
- serie di angoli ritagliati corrispondenti a quelli della tavola
- mazzo di carte da gioco con i nomi degli angoli.

Importante: è opportuno che gli angoli vengano disegnati e colorati da allievi ed allieve almeno una volta e che prima di iniziare il gioco si verifichi, con l'aiuto delle carte o del goniometro, la misura degli angoli segnati sulle figure.

Modalità di gioco

Ogni giocatore riceve una tavola da gioco e una serie completa di angoli ritagliati.

Ogni due giocatori hanno a disposizione un mazzo di carte che vanno mescolate prima di ogni giocata.

A turno ognuno solleva una carta dal mazzo, la analizza, prende la figura indicata e la posa sulla figura corrispondente della tavola.

1. Maestro pensionato, animatore nella scuola elementare, membro attivo della SMASI.
2. Vedere BDM nr. 58, 95-100 e nr. 59. 117-120.

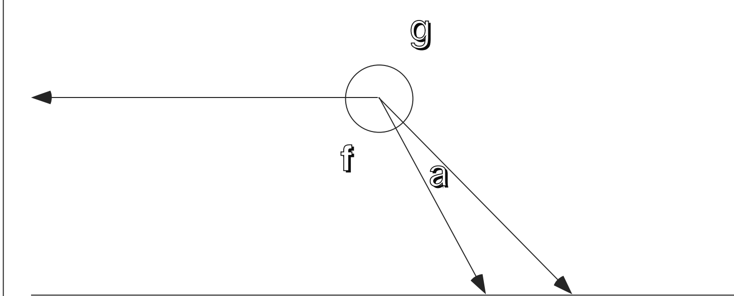
Le carte con l`indicazione dei gradi autorizzano a prendere anche più angoli fino a ottenere la misura richiesta.

Le carte senza l`indicazione dei gradi autorizzano a prendere un solo angolo per volta.

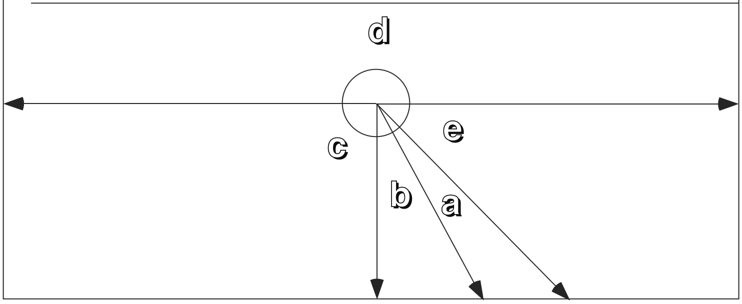
Vince chi per primo completa i due angoli giro. Occorre quindi imparare a riconoscere gli angoli.

N.B: chi sbaglia a prendere in mano l’angolo corretto deve rimetterlo sul tavolo e perde il proprio turno.

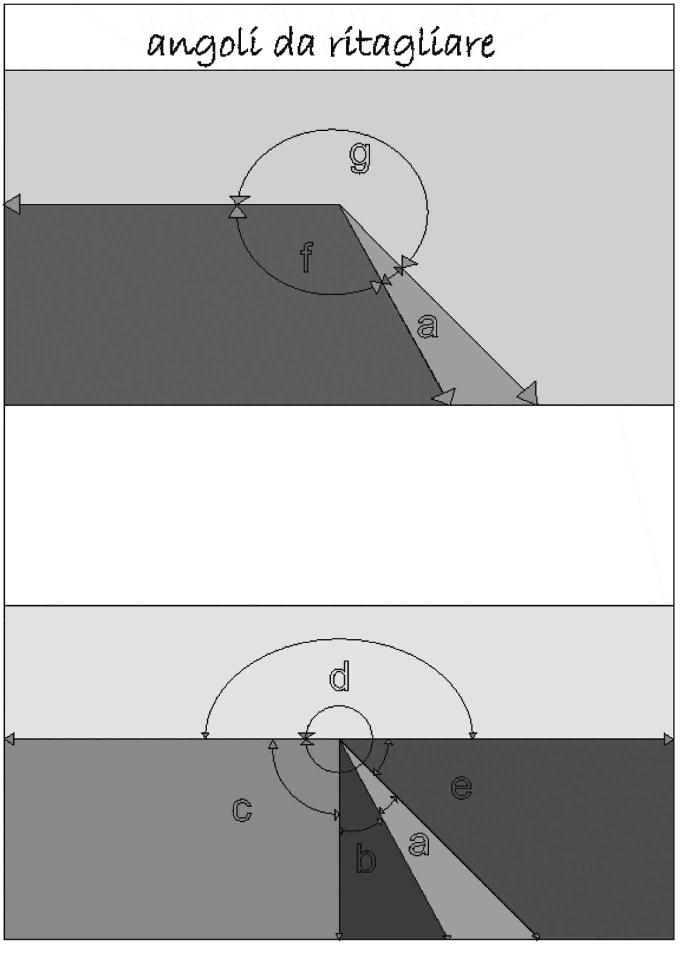
TAVOLA PER GIOCO ANGOLI



Angoli convessi: $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$	(a+b+c+d+e)(a)(b)(c)(d)(e)(f) (a+b)(b+c)(a+e)(f+a)
Angoli concavi: $180^\circ < \beta < 360^\circ$	(g)(d+c)(d+e)(d+e+a)(d+e+a+b) (d+c+b)(d+c+b+a)(g+a)
Angolo retto (90°)	(c)(b+a+e)
Angolo piatto (180°)	(d)(c+b+a+e)
Angolo acuto: $0^\circ \leq \gamma < 90^\circ$	(a)(b)(e)(a+b)(a+e)
Angolo ottuso: $90^\circ < d < 180^\circ$	(f)(c+b)(c+b+a)(f+a)
Angolo giro:	360°



Angoli da ritagliare



Carte da gioco

ANGOLO OTTUSO 119°	ANGOLO OTTUSO 135°	ANGOLO OTTUSO
ANGOLO ACUTO 16°	ANGOLO ACUTO 29°	ANGOLO ACUTO 45°
ANGOLO ACUTO 16°	ANGOLO ACUTO	ANGOLO ACUTO 45°
ANGOLO CONCAVO 225°	ANGOLO CONCAVO 241°	ANGOLO CONCAVO
ANGOLO PIATTO 180°	ANGOLO RETTO 90°	ANGOLO CONVESSO
ANGOLO OTTUSO 119°	ANGOLO OTTUSO 135°	ANGOLO OTTUSO
ANGOLO ACUTO 16°	ANGOLO ACUTO 29°	ANGOLO ACUTO 45°
ANGOLO ACUTO 16°	ANGOLO ACUTO	ANGOLO ACUTO 45°
ANGOLO CONCAVO 225°	ANGOLO CONCAVO 241°	ANGOLO CONCAVO
ANGOLO PIATTO 180°	ANGOLO RETTO 90°	ANGOLO CONVESSO

1. Pane e… trigonometria

Antonio Steiner, Gianfranco Arrigo

1. Viaggio in pallone

Il mattino presto, un passante osserva dal molo, da un'altezza a dal livello dell'acqua, un pallone aerostatico nel cielo sotto un angolo α e nello stesso istante lo vede riflesso nella superficie dell'acqua sotto un angolo β.

«È possibile – si chiede – determinare la posizione del pallone conoscendo i soli dati a, α, β?»

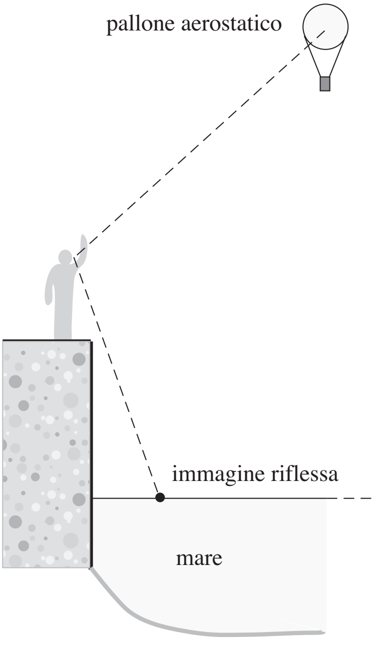


Figura 1 La situazione

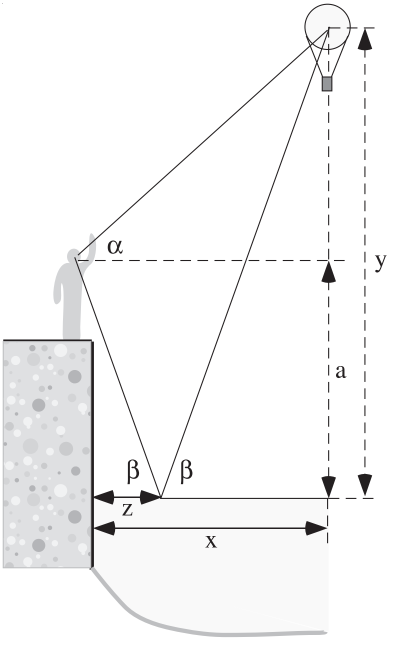


Figura 2 Il modello matematico

Questo problema, tirato fuori da vecchi scaffali polverosi, non ha certamente la pretesa di porsi come esempio di problema trigonometrico. Il senso delle «passeggiate» è di presentare ogni volta alcuni spunti tematici, con la speranza di fare cosa gradita agli insegnanti che cercano di variare ogni anno le proprie proposte didattiche. La situazione ci sembra interessante e, tutto sommato, simpatica, vagamente vacanziera. Ha anche il non trascurabile vantaggio di richiedere conoscenze unicamente sulla cosiddetta trigonometria del triangolo rettangolo.

Dal punto di vista didattico, riteniamo importante distinguere la situazione dal suo modello matematico. Dare subito agli studenti il modello matematico significherebbe togliere gran parte del valore formativo. Allo studente spetta il compito di costruire il modello matematico basandosi sulla descrizione della situazione, volutamente espressa in linguaggio comune e precisata, quel tanto che basta, dalla figura 1.

La figura 2 mostra un possibile modello matematico della situazione. In esso, la posizione del pallone è determinata dalle lunghezze x e y. La variabile z gioca un ruolo ausiliario.

Usando questo modello si può sviluppare, fra gli altri, il seguente iter risolutivo.

$$y - a = x \cdot \tan\alpha \qquad y = x \cdot \tan\alpha + a$$

$$y = (x - z)\tan\beta \qquad z = \frac{a}{\tan\beta} \qquad y = \left(x - \frac{a}{\tan\beta}\right)\tan\beta = x\tan\beta - a$$

Uguagliando le due espressioni trovate per y, si ottiene l'equazione
$x \cdot \tan\alpha + a = x \cdot \tan\beta - a$
che ha la soluzione

$$x = \frac{2a}{\tan\beta - \tan\alpha}$$

e infine si può determinare y

$$y = \frac{2a}{\tan\beta - \tan\alpha} \cdot \tan\beta - a = a\,\frac{\tan\beta + \tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha}$$

2. Divertimenti… pitagorici

Da un ricordo di Antonio.

Circa cinquant'anni fa partecipai per la prima volta a un Congresso internazionale che si svolse a Londra, all'Imperial College. La mia conferenza fu seguita da due personaggi che mi diedero un significativo incoraggiamento: erano il mio maestro Rolf Herman Nevanlinna (1895-1980) e il suo allievo Lars Ahlfors. La sala gremita di gente era quella in cui George Pólya (1887-1985) provava nuovi metodi didattici: non diceva alcuna parola, solo disegnava figure alla lavagna, lanciando rapide occhiate all'auditorio. L'applauso fu poco convinto. Rientrato a casa, volli seguire le sue orme e giunsi alla figura finale (figura 3), accompagnata da un'altra, esplicativa (figura 4).

Ne uscì il Teorema del coseno:

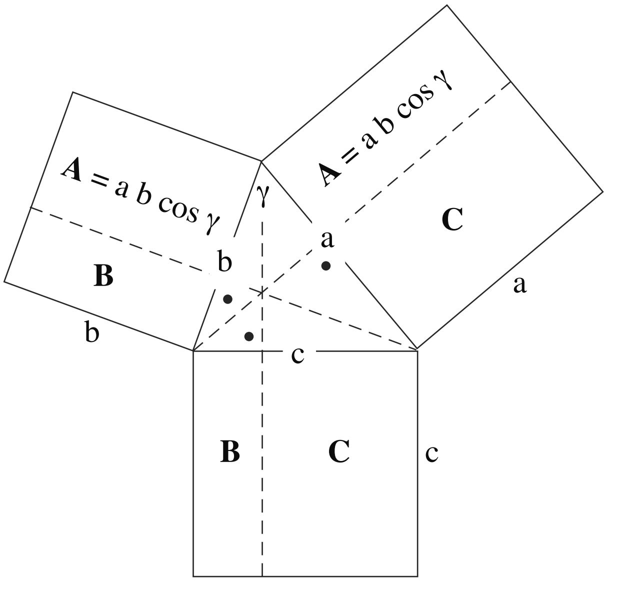


Figura 3 Teorema del coseno

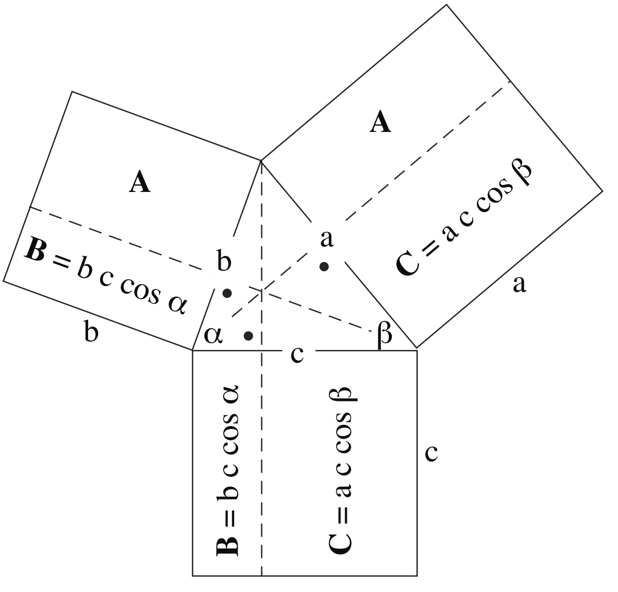


Figura 4 Spiegazione

1. Matematica ed esperienze didattiche[1]

Convegno Nazionale n. 24: *Incontri con la Matematica*
Castel San Pietro Terme (Bologna)
6-7-8 novembre 2010

Conferenze

Venerdì 5 novembre, Centro Congressi Artemide Life

Tutti gli ordini scolastici

14.30-15.30 Inaugurazione alla presenza delle Autorità del mondo politico ed accademico; saluti di: Sara Brunori (Sindaco di Castel San Pietro Terme); Ivano Dionigi (Magnifico Rettore dell'Università di Bologna); Giorgio Bolondi (Presidente della C.I.I.M. dell'U.M.I.); Carla Ida Salviati (Direttore delle riviste La Vita Scolastica e Scuola dell'Infanzia).

15.30-16.30 **Giorgio Bolondi** (Università di Bologna): È possibile migliorare i risultati di apprendimento degli allievi? Dalla valutazione all'intervento didattico.

16.30-17.00 Intervallo.

17.00-18.00 **Maria del Carmen Chamorro** (Università Complutense, Madrid): L'innovazione educativa come prevenzione al fallimento scolastico in matematica. Il caso della divisione.

18.00-19.00 **István Lénárt** (ELTE Università di Budapest): Geometria della carta contro geometria dell'arancia: confronto tra geometria del piano e della sfera (traduzione dall'inglese di Alessandro Gambini).

Sabato 6 novembre, Centro Congressi Artemide Life

Scuola Primaria, Secondaria di primo e di secondo grado

14.30-15.30 **Colette Laborde** (IUFM, Université Joseph Fourier, Grenoble): Uso della didattica per progettare attività informatiche e interattive di matematica nella scuola primaria: la collana 1-2-3... Cabri.

1. Direzione: Bruno D'Amore, Martha I. Fandiño Pinilla e Silvia Sbaragli. Organizzazione: Associazione «Incontri con la matematica» con la collaborazione dell'assessorato alla cultura del comune di Castel San Pietro Terme e di Formath.

15.30-16.30 **Pietro Di Martino** (Università di Pisa): «È la prima volta che scrivo queste cose»: il rapporto con la matematica nei racconti degli studenti.
16.30-17.00 Intervallo ed estrazione a sorte omaggi Media Direct.
17.00-18.00 **Silvio Maracchia** (Università di Roma I, La Sapienza): Non si può parlar male della matematica: l'avventura dei Sofisti.
18.00-19.00 **Stefano Beccastrini** (RSDDM di Bologna): La storia della matematica sugli schermi del cinema.

Sabato 6 novembre, Salone delle Terme (Albergo delle Terme)

Scuola dell'Infanzia

14.30-15.30 **Irene Foresti** (RSDDM di Bologna): La progettazione curricolare della matematica nella scuola dell'infanzia.
15.30-16.30 **Elena Fascinelli** (RSDDM di Bologna): «Adesso ti spiego!». I bambini raccontano mappe e rappresentazioni grafiche.
16.30-17.00 **Intervallo.**
17.00-18.00 **Ines Marazzani** (NRD di Bologna): I bambini, la matematica e le rappresentazioni semiotiche.
18.00-19.00 **Anna Aiolfi e Monica Bellin** (1° Circolo di Spinea, VE): Vendere, comprare, produrre: il mondo dell'economia nelle esperienze dei bambini. Riflessioni delle insegnanti di scuole dell'infanzia e primaria.

Seminari

Sabato 6 novembre, Aula Magna (Istituto Alberghiero)

Seminari per la Scuola dell'Infanzia

8.30-9.15 **Francesco A. Costabile** e **Annarosa Serpe** (Università della Calabria): La «prima matematica» con INF@ 0.1: un'esperienza monitorata nell'anno scolastico 2007/08.
9.15-10.00 **Elena Fascinelli** (RSDDM di Bologna): Mondrian, fra colori e geometria.
10.00-10.45 **Anna Aiolfi** (SdI Andersen di Spinea 1°, VE): Lavorare con le mani, pensare con i numeri.
10.45-11.30 **Anna Angeli** e **Mariangela Di Nunzio** (RSDDM di Bologna): In viaggio con Paperino nell'arte della matematica.
9.00-14.00 sono aperte le mostre e i laboratori.

Sabato 6 novembre, Centro Congressi Artemide Life

Seminari per la Scuola Primaria e Secondaria di primo grado

8.30-9.00 **Fabiola Tota** (IC Fontanile di Anagnino, RM): Gli orologi ritmici.
9.00-9.30 **Giancarlo Navarra** (GREM di Modena): Ipotesi per un curricolo verticale nella prospettiva dell'early algebra nella scuola primaria e secondaria di primo grado.

9.30-10.15 **Mario Ferrari** (Università di Pavia): Le tabelle servono anche nella scuola media?

10.15-10.45 **Stefania Neri** e **Serena Laghi** (IC di Castrocaro, FC): Contare e raccontare.

10.45-11.15 **Stefano Furlati, Claudia Paoletti** (Oltremare di Riccione) e **Silvia Sbaragli** (NRD di Bologna): Trasformazioni geometriche in natura.

11.15-11.45 **Giovanni G. Nicosia** (RSDDM di Bologna): Studenti di cultura cinese a scuola: un incontro di visioni e tradizioni matematiche.

11.45-12.15 **Sezione Mathesis di Pesaro**: Tutte le strade portano… al quadrato: le tante definizioni di quadrato.

12.15-12.45 **Giuseppe Dino Baldi** e **Carlotta Cubeddu** (Giunti Scuola Digitale): La LIM in classe: insegnare la matematica nella scuola primaria e media con la Lavagna Interattiva.

9.00-14.00 Sono aperte le mostre e i laboratori.

Sabato 6 novembre, Sala Giardino (Hotel delle Terme)

Seminari della Sezione: Disagio nei processi di apprendimento

8.30-9.15 **Massimo Baldacci** (Università di Urbino): La struttura del curricolo e la logica della progettazione didattica.

9.15-10.00 **Brunetto Piochi** (Università di Firenze): Insegnamento della matematica e alunni in difficoltà: quali strategie nel contesto classe?

10.00-10.45 **Pier Giuseppe Rossi** (Università di Macerata): Metodi di indagine per analizzare le modellizzazioni degli studenti e le modellizzazioni degli insegnanti.

10.45-11:15 **Adriana Davoli** (MaPES di Milano): Un curricolo pensato per prevenire gli ostacoli più comuni nell'apprendimento dell'aritmetica.

11.15-11.45 **Stefano Giacovelli, Anna Marantonio, Gaetano Vallone** (Istituto A. Serpieri di Bologna) e **Lorenza Barbieri** (Cooperativa «La Dolce» di Bologna): Facciamo un disegno? Sì, di matematica o di fisica?

9.00-14.00 sono aperte le mostre e i laboratori.

Sabato 6 novembre, Salone delle Terme (Albergo delle Terme)

Seminari per la Scuola Secondaria di secondo grado

8.30-9.00 **Mario Puppi** (Liceo E. Majorana di Mirano, VE): I sistemi di Lindenmayer: dalla struttura delle alghe alla forma delle piante.

9.00-9.45 **Maura Iori** (NRD di Bologna): Componenti iconiche, indicali e simboliche nelle rappresentazioni semiotiche.

9.45-10.15 **Patrizia Betti** (Liceo L. Respighi di Piacenza), **Nicoletta Nolli** (Liceo G. Aselli di Cremona), **Daniela Rognoni** (Liceo T. Taramelli di Pavia) e **Maria Reggiani** (Università di Pavia): Collaborare in rete preparando l'esame di stato.

10.15-10.45 **Sylviane Beltrame** e **Gregorio Torretta** (Liceo Marinelli di Udine): Didattica laboratoriale in matematica (come creare schede di laboratorio per le proprie classi).

10.45-11.15 **Lorenzo Armaroli** e **Massimo Intelisano** (GSSMMM, Bologna): Elementi di crittografia.
11.15-11.45 **Federica Ferretti** e **Alice Lemmo** (GSSMMM, Bologna): Architettura come espressione della forma.
11.45-12.15 **Ombretta Locatelli** (Collegio San Carlo di Milano) e **Alessandra Brena** (Matematita di Milano): MATh.en.JEANS: un anno di esperienza.
12.15-12.45 **Bonaventura Paolillo** (Liceo A. Galizia, Nocera Inferiore - Università di Salerno): Le serie telescopiche in rapporto alla cinematica del punto.
9.00-14.00 Sono aperte le mostre e i laboratori.

Domenica 7 novembre, Aula Magna (Istituto Alberghiero)

Seminari per la Scuola dell'Infanzia
8.30-9.15 **Lucia Scotti** e **Eleonora Belli** (SdI Fratelli Grimm di Piacenza): Mappe, pirati, decine, unità. Un'esperienza alla Scuola dell'Infanzia.
9.15-10.00 **Anna Cerasoli** (L'Aquila): Il Segreto di Pollicino: esperienze reversibili.
10.00-10.45 **Alessandra Montanari Lughi** (RSDDM di Bologna): Un'esperienza dalla Terra alla Luna.
10.45-11.30 **Patrizia Renzetti** (DFA-SUPSI, Locarno): Giochi matematici per la scuola dell'infanzia.
9.00-14.00 Sono aperte le mostre e i laboratori.

Domenica 7 novembre, Centro Congressi Artemide Life

Seminari per la Scuola Primaria
8.30-9.00 **Antonia Tordella** (SP E. Rosso di Monterosi, VT): Gioco… Metria. Una passeggiata «ricrea-attiva» tra forme e colori.
9.00-9.30 **Serafino Caloi** (SP di Tregnago, VR): Fare matematica alla scuola primaria: problemi e soluzioni.
9.30-10.15 **Alessandro Gimigliano** (Università di Bologna): Le parole della geometria: definizioni, dimostrazioni.
10.15-10.45 **Nadia Vecchi** (RSDDM di Bologna): Pillole di Storia: dai Sumeri ai Romani.
10.45-11.15 **Anna Cerasoli** (L'Aquila): Matematica leggera e nutriente (seconda parte).
11.15-11.35 **Barbara Mallarino** (SP E. De Amicis di Savona): Dalla «divisione di cose» alla «divisione»: un'esperienza in terza elementare.
11.35-12.00 **Roberto Grossa** (Lab Multimedia FDA, Università IUAV di Venezia) e Giuliana Farisatto (SP F. Petrarca, II Circolo di Mirano, VE): Geometrie in movimento e un calendario multiculturale.
9.00-14.00 Sono aperte le mostre e i laboratori.

Domenica 7 novembre, Sala Giardino (Albergo delle Terme)

Seminari per la Secondaria di primo grado
8.30-9.15 **Elio Motella** (Verbania): La ricostruzione delle immagini mentali.

9.15-10.00 **István Lénárt** (ELTE Università di Budapest): Geometria della carta contro geometria dell'arancia: confronto tra geometria del piano e della sfera (traduzione dall'inglese di Alessandro Gambini).

10.00-10.45 **Francesca Morselli** (Università di Genova) e **Monica Testera** (IC di Carcare, SV): Attività argomentative nella scuola secondaria di primo grado: cronache di un'esperienza italo-francese.

10.45-11.30 **Alessandro Gimigliano** (Università di Bologna): Definizioni e dimostrazioni nella scuola media.

11.30-12.15 **Michele Pertichino** (Università di Bari) e **Annamaria Troccoli** (SM «A. Manzoni» di Rutigliano, BA): «Non ci siamo persi, ...stiamo cercando strade alternative come pionieri!»: la Matematica per orientarsi.

9.00-14.00 Sono aperte le mostre e i laboratori.

Domenica 7 novembre, Salone delle Terme (Albergo delle Terme)

Seminari per la Scuola Secondaria di secondo grado

8.30-8.50 **Paolo Longoni** (Laboratorio didattico di Matematica e Filosofia, BG), **Gianstefano Riva** (Liceo Maironi da Ponte di Presezzo, BG) ed **Ernesto Rottoli** (Istituto Secco Suardo, BG): Alla ricerca della qualità.

8.50-9.10 **Carlo Maturo** (Liceo A. Nobel di Torre del Greco, NA): Un'invenzione profonda: i morfismi.

9.10-10.00 **Stefano Beccastrini** e **Paola Nannicini** (RSDDM di Bologna): Cinema e matematica. Sulle tracce di una tardiva ma crescente amicizia.

10.00-10.30 **Luigi Tomasi** (Liceo P. Paleocapa di Rovigo - Università di Ferrara): Conoscenze e abilità matematiche al termine della scuola secondaria di II grado: la proposta di un Syllabus di Matematica.

10.30-11.00 **Maria Lucia Lo Cicero** (Università di Palermo): Insegnamento/Apprendimento del concetto di funzione e delle sue rappresentazioni epistemologiche e semiotiche.

11.00-11.30 **Stefania Teresa Morrone** (ITC Padre A.M. Tannoia di Ruvo di Puglia, BA): La matematica sul quotidiano: lettura e interpretazione dei grafici sui giornali.

11.30-12.00 **Manuela Moscucci**, **Maria Piccione** (Università di Siena) e **Antonella Fatai** (Liceo F. Petrarca di Arezzo): Preparazione al test d'ingresso della Facoltà di Scienze in modalità e-learning.

9.00-14.00 sono aperte le mostre e i laboratori.

Mostre e laboratori (Istituto Alberghiero)
Sabato 6 e domenica 7 novembre, dalle 9.00 alle 14.00

Scuola dell'infanzia

- Commissione Economia 1 Circolo di Spinea: Il mondo dell'economia visto con gli occhi dei bambini: esperienze di un curricolo in continuità tra la scuola dell'infanzia e la scuola primaria.
- Il Cielo e la Terra coordinato da Claudio Zellermayer e Mariela Petta: Un universo di matematica: Il ladro di stelle.

- Gruppo «A scuola con matematica si fa rete» (Monza e Brianza): Percorsi matematici in continuità.
- Anna Maria Foresi (AIMC di Macerata): Matematicando dai tre ai quattordici anni.
- Lucia Scotti e Eleonora Belli (SdI Fratelli Grimm di Piacenza): Mappe, pirati, decine, unità. Un'esperienza alla Scuola dell'Infanzia.

Scuola primaria

- GIUNTI Scuola (Firenze): L'uso della lavagna interattiva nella scuola.
- MEDIA DIRECT: Robotica LEGO, Polydron e microscopia.
- Commissione Ecomonia 1 Circolo di Spinea: Il mondo dell'economia visto con gli occhi dei bambini: esperienze di un curricolo in continuità tra la scuola dell'infanzia e la scuola primaria.
- IC di Motta S. Giovanni (RC) coordinato da Giancarlo Navarra (GREM di Modena): Percorsi di Apprendimento ArAl: dalle attività nelle classi alla costruzione di oggetti ipertestuali per favorire negli insegnanti l'approccio alla didattica dell'aritmetica e dell'algebra nella prospettiva dell'early algebra.
- Sezione Mathesis di Pesaro: Se muovi le mani muovi il cervello: mostra di modelli dinamici.
- Il Cielo e la Terra coordinato da Claudio Zellermayer e Mariela Petta: Un universo di matematica: Il lampionaio; Il popolo di Stonehenge; Il paese dei quadrati; Talete e la Piramide.
- Liliana Del Papa (SP di Camerano, AN), Genny Corti (SP di Cingoli MC), Helga Fiorani, Luana Salvatori e Sara Polini (studentesse Università di Macerata) coordinate da Maria Pia Saitta (Macerata): Gioco e scopro con il Contafacile.
- Roberto Grossa (Lab Multimedia FDA, Università IUAV di Venezia) e Giuliana Farisatto (SP F. Petrarca, II Circolo di Mirano, VE): Geometrie in movimento e un calendario multiculturale.
- Failoni Loreta e Maestranzi Erica (IC di Val Rendena, TN): Giallo alla Villa.
- Stefano Furlati e Claudia Paoletti (OLTREMARE di Riccione) con la collaborazione del Gruppo Forlimatica (Forlì) e Silvia Sbaragli (NRD di Bologna): Trasformazioni geometriche in natura.
- Gruppo «A scuola con matematica si fa rete» (Monza e Brianza): Percorsi matematici in continuità.
- Anna Maria Foresi (AIMC di Macerata): Matematicando dai tre ai quattordici anni.
- Liceo Torricelli, il Tavolo della Scienza e la Palestra della Scienza (Faenza): La Bottega matematica.
- István Lénárt (ELTE Università di Budapest): Geometria della carta contro geometria dell'arancia: confronto tra geometria del piano e della sfera (traduzione dall'inglese di Alessandro Gambini).
- Carlo Barufi (Università di Bolzano): Esperienze visuali in ambito matematico.
- Vanna Pratesi (SP Don Milani di San Giovanni Valdarno): Lo Zero Birbante.

Scuola secondaria di primo grado

- Renzo Baldoni (Mateureka): 500 + 1: De Divina Proportione.
- MEDIA DIRECT: Robotica LEGO, Polydron e microscopia.
- IC di Motta S. Giovanni (RC) coordinato da Giancarlo Navarra (GREM di Modena): Percorsi di Apprendimento ArAl: dalle attività nelle classi alla costruzione di oggetti ipertestuali per favorire negli insegnanti l'approccio alla didattica dell'aritmetica e dell'algebra nella prospettiva dell'early algebra.
- Il Cielo e la Terra coordinato da Claudio Zellermayer e Mariela Petta: Un universo di matematica: Talete e la Piramide; Il codice di Eratostene.
- Ivan Graziani (IC di Civitella di Romagna, FC): Matematica in mostra.
- Loreta Failoni e Erica Maestranzi (IC di Val Rendena, TN): Giallo alla Villa.
- Paola Ferioli, Pietro Nannetti e Valentino Giuseppe (FORMA GIOVANI, San Giovanni in Persiceto e San Pietro in Casale, BO): MatEco.
- Stefano Furlati e Claudia Paoletti (OLTREMARE di Riccione) con la collaborazione del Gruppo Forlimatica (Forlì) e Silvia Sbaragli (NRD di Bologna): Trasformazioni geometriche in natura.
- Gruppo «A scuola con matematica si fa rete» (Monza e Brianza): Percorsi matematici in continuità.
- Anna Maria Foresi (AIMC di Macerata): Matematicando dai tre ai quattordici anni.
- Sezione Mathesis di Pesaro: Se muovi le mani muovi il cervello: mostra di modelli dinamici.
- Maria Flavia Mammana e Carmela Milone (Università di Catania): I grafi: alla scoperta di un percorso possibile.
- Liceo Torricelli, il Tavolo della Scienza e la Palestra della Scienza (Faenza): La Bottega matematica.
- István Lénárt (ELTE Università di Budapest): Geometria della carta contro geometria dell'arancia: confronto tra geometria del piano e della sfera (traduzione dall'inglese di Alessandro Gambini).
- Maria Pia Saitta (ITIS di San Severino, MC): Gioco e scopro con il Contafacile: i sistemi di numerazione.

Scuola secondaria di secondo grado

- Renzo Baldoni (Mateureka): 500 + 1: De Divina Proportione.
- MEDIA DIRECT: Robotica LEGO, Polydron e microscopia.
- Paola Ferioli, Pietro Nannetti e Valentino Giuseppe (FORMA GIOVANI, San Giovanni in Persiceto e San Pietro in Casale, BO): MatEco.
- Maria Flavia Mammana e Mario Pennisi (Università di Catania): Dai quadrilateri ai tetraedri: alla ricerca di sorprendenti analogie.
- V G Liceo Linguistico «Giovanni da San Giovanni» (San Giovanni Valdarno) e Attilio Ferrini (RSDDM di Bologna): Molto Rumore per Nulla: La Storia dello Zero.
- Liceo Torricelli, il Tavolo della Scienza e la Palestra della Scienza (Faenza): La Bottega matematica.
- Lorenzo Armaroli, Gloria Bartolini, Silvia Beghelli, Laura Branchetti,

Daniela Dal Santo, Donatella Dragoni, Federica Ferretti, Massimo Intelisano, Eugenio Laghi, Alice Lemmo, Luca Montelpare, Lucia Pasqualini e Marta Venturini (GSSMMM, Bologna): Alcuni spunti di storia della matematica ad uso culturale e didattico.

- István Lénárt (ELTE Università di Budapest): Geometria della carta contro geometria dell'arancia: confronto tra geometria del piano e della sfera (traduzione dall'inglese di Alessandro Gambini).

Laboratorio di Teatro matematico per tutti i livelli

- Antonella Castellini, Alfia Lucia Fazzino e Rosa Santori (Scuola L. da Vinci di Poggibonsi, SI): Trilogia di matematica.

Manifestazioni di contorno
Sabato 6 novembre, Centro Congressi Artemide Life

Teatro filosofico-matematico per tutti, ore 13.00-13.40: IV A del Liceo Socio Psico Pedagogico «V. Carducci» di Forlimpopoli (FC) coordinate da Alessandra Carloni: A scuola con Pitagora.

Sabato 6 novembre, Salone delle Terme (Albergo delle Terme)

Intrattenimento per tutti ore 21.00: La Compagnia della Scatola di Einstein (Giorgio Häusermann e Marco Calò): I giocattoli della «Scatola di Einstein».

Chiusura
Domenica 7 novembre, Salone delle Terme (Albergo delle Terme)

Per tutti i livelli scolastici

12.15-12.30 Manifestazione di chiusura del convegno presso il Salone delle Terme.

Informazioni

Il Convegno è aperto a tutti, non essendo a numero chiuso, qualsiasi sia il giorno d'arrivo. L'iscrizione avviene direttamente durante il Convegno. Non si accettano pre-iscrizioni. La segreteria organizzativa centrale addetta alle iscrizioni avrà sede presso l'Albergo delle Terme, viale delle Terme 1113; sarà aperta venerdì 5 novembre dalle ore 11 alle ore 18 e sabato 6 novembre dalle ore 8 alle ore 18. Gli Atti, pubblicati da Pitagora Ed. Bologna, a cura di Bruno D'Amore e Silvia Sbaragli, saranno disponibili fin dal giorno della inaugurazione. I Convegnisti dovranno provvedere per conto proprio alla prenotazione alberghiera. Poiché si prevede un afflusso notevole, si consiglia di provvedere al più presto. La segreteria declina ogni responsabilità per mancato alloggiamento. Per ogni altra informazione, rivolgersi a:

Carla Bernardoni, Ufficio Cultura
Comune di Castel San Pietro Terme, Piazza XX Settembre 3
40024 Castel San Pietro Terme BO
Tel. 051 6954198 · Fax 051 6954180 · Feriali ore 8.30-13.30
e-mail: cultura@cspietro.it; silvia.sbaragli@infinito.it
siti: http://www.dm.unibo.it
http://www.cspietro.it
http://www.dm.unibo.it/rsddm

2. Didattica della Matematica al centro tra Ricerca e Prassi Convegno in ricordo di Giorgio Tomaso Bagni

1. ottobre 2010, Collegio Vescovile PIO X, Borgo Cavour 40, Treviso[1]

Programma

9.00 Inscrizione al convegno
9.30 Presentazione delle iniziative (Mario Ferrari, Università di Pavia):
– la raccolta Bagni
– il premio Bagni
– questo convegno
10.00 Interventi delle autorità e della famiglia Bagni
10.30 Prima conferenza (Fulvia Furinghetti, Università di Genova):
La storia nella didattica della matematica
11.30 Seconda conferenza (Bruno D'Amore, Università di Bologna):
La ricerca in didattica della matematica
12.30 Pausa pranzo
14.00 Relazione della commissione giudicatrice del premio Bagni
(F. Arzarello, F. Furinghetti, R. Iaderosa)
14.30 Illustrazione delle ricerche dei tre premiati
16.00 Terza conferenza (Diana Bitto, Mathesis Udine)
Archeologia della matematica
17.00 Quarta conferenza (Claudio Bernardi, Università La Sapienza di Roma)
La matematica nella riforma Gelmini
18.00 Chiusura del convegno

Ai partecipanti, su richiesta, sarà rilasciato un attestato di partecipazione.

Gli Atti del Convegno saranno pubblicati sulla rivista «L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate» in un numero speciale del 2011.

1. Per informazioni: tel. (0039) 0422 411725; fax (0039) 0422.412166
mail: piox@collegiopiox.com

3. Recensioni

Sfard A. (2009). ***Psicologia del pensiero matematico. Il ruolo della comunicazione nello sviluppo cognitivo***. Presentazione dell'edizione italiana di Bruno D'Amore**. Trento: Erickson. Pagg. 368, euro 24**. La prima edizione originale UK in lingua inglese di questo libro è del 2008.

Siamo di fronte ad un'opera profonda e dotta, di altissimo spessore culturale e dunque di grande coraggio, che riassume, in breve ma con dettagli attraenti e significativi, la vita di intenso lavoro, analisi critica e notevole creatività di una delle grandi menti che hanno contribuito a dare credibilità scientifica e internazionale a quella disciplina che in Italia va sotto il nome di «didattica della matematica».

Come non ricordare subito, infatti, uno dei più celebri articoli di Anna Sfard, del 1991, che tutti noi ricercatori abbiamo più volte citato: Sulla doppia natura delle concezioni matematiche: riflessioni su processi e oggetti come diverse facce di una stessa medaglia[1].

In questo famoso articolo, l'Autrice svolgeva un'analisi epistemologica esemplare nella quale si evidenzia come nello sviluppo formativo dei concetti della matematica vi siano sempre due momenti, quello di una concezione «operativa» (il concetto pensato come strumento) e poi quello di carattere analitico o strutturale (lo stesso concetto pensato come oggetto in sé stesso specifico di studio). E come ciò avvenga sia nella storia del pensiero, cioè nello sviluppo della storia della matematica, sia nella costruzione apprenditiva dell'individuo.

Se prendiamo come esempio i numeri o le equazioni, si vede bene come tale concetti siano presenti nella storia fin dall'antichità ma come strumenti, in modo operativo, assai prima che di essi fossero date definizioni, fossero analizzati dunque come oggetti stessi specifici di interesse per il pensiero matematico. Nel caso delle

1. Sfard A. (1991). Sulla doppia natura delle concezioni matematiche: riflessioni su processi e oggetti come diverse facce di una stessa medaglia. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 22, 1-36. Maggiori informazioni sulla bibliografia e sulla ricerca di Anna Sfard possono essere trovate nella sua pagina web personale, all'URL: http://construct.haifa.ac.il/~annasd/sfard.htm. Nella sua pagina web si trovano anche alcuni articoli in linea.

equazioni, per esempio, usi operazionali sono presenti fin dal -3000, ma per una definizione di tale concetto ed un suo studio strutturale specifico come oggetto in sé si deve aspettare il Rinascimento.

Si ha come un'alternanza dialettica e quindi analitica, critica, tra processi ed oggetti che permette uno sviluppo per così dire in verticale; si presenta un processo, prima o poi lo strumento che gli ha dato origine viene analizzato come concetto in sé, come nuovo oggetto della matematica che merita di essere studiato; su questo si innesta un nuovo meccanismo di costruzione del pensiero che genera concetti di natura sempre più elevata. Tra questi due momenti non c'è opposizione o contraddizione, anzi, come appunto diceva l'Autrice perfino nel titolo, sono «due facce della stessa medaglia». Da un punto di vista epistemologico, è necessario riuscire a cogliere di un concetto i due aspetti, operativo e oggettuale, per costruirlo appieno, nella sua interezza concettuale, e per assumerlo poi nella sua globale profondità culturale.

Da questo ragionamento non è escluso l'aspetto didattico, dato che anche l'apprendimento manifesta questa doppia necessità psicologica e cognitiva per elaborare la conoscenza.

Questo articolo si inserisce nel progetto globale di ricerca di Anna Sfard. Come lei stessa ci dice, infatti, la sua ricerca «si rivolge allo studio del pensiero dell'essere umano in generale e del pensiero matematico in particolare». La sua ispirazione nasce dalla critica alla «tradizionale dicotomia tra pensiero e parlato», e qui il riferimento ai due giganti Wittgenstein e Vygotskij è d'obbligo. L'Autrice definisce il pensiero come «forma individualizzata di comunicazione interpersonale», e conia il termine *commognizione (commognition)*, coraggiosa combinazione di *comunicazione e cognizione.* «Il principio commognitivo implica che la comunicazione verbale, con la sua proprietà distintiva di autoreferenza ricorsiva, può essere la fonte primaria dell'abilità, presente solo negli esseri umani, di accumulare la complessità del loro agire nel passaggio da una generazione alla successiva».

La creazione di questa linea di pensiero si basa su un'assidua e densa ricerca empirica nella quale la Sfard analizza con dettagliata perspicacia, assai concretamente esemplificata nel libro, lo sviluppo dei discorsi matematici; qui il termine «sviluppo» va interpretato in maniera duplice: nella vita dell'individuo, nel corso della storia. Il punto focale dell'analisi del discorso matematico si specifica tutto attorno al «processo di oggettivazione» dunque di quei «meccanismi discorsivi che portano alla emergenza di nuovi oggetti matematici». Gli esempi dei quali si serve l'Autrice sono principalmente «lo sviluppo del discorso algebrico, il ruolo della discorsività nei numeri negativi, il primo discorso numerico, il discorso matematico di studenti con disabilità di apprendimento e di studenti considerati particolarmente portati per la matematica e il discorso professionale di insegnanti di matematica della scuola superiore».

Le sue ricerche si sono svolte principalmente in Israele, in Canada e negli Stati Uniti; nel libro sono riportati lunghi, significativi ed intensi scambi di battute tra soggetti diversi, a volte interviste a volte dialoghi, all'interno di vari discorsi matematici. La loro analisi è di straordinaria lungimiranza, di intensa lucidità. Tutti noi possiamo apprendere molto da questi esempi.

L'Autrice, titolare di una cattedra all'Università di Haifa, affiliata all'Università del Michigan (cattedra di Didattica della matematica) e all'Istituto dell'Educazione dell'Università di Londra, ha sempre dichiarato in maniera esplicita e straordinariamente lucida, che i suoi interessi di ricerca riguardano la cognizione in matematica, «nella quale il pensiero in generale e il pensiero matematico in particolare sono concepiti come una forma particolare di comunicazione»; il discorso matematico ed il suo sviluppo, concepito «attraverso sia lo sviluppo storico sia l'apprendimento individuale all'interno di contesti istituzionali e della vita quotidiana». È sulla base dei risultati della ricerca empirica che propone i successivi sviluppi teorici.

A me piace molto sottolineare la coraggiosa, incredibile semplicità dell'obiettivo di partenza della ricerca della Sfard, dichiarata da lei stessa: «quali sono le caratteristiche della matematica che la rendono così difficile da essere appresa», il problema numero uno, problema ancora oggi. È per arrivare a dare la risposta a questo quesito che per decenni ha studiato la natura delle concezioni matematiche, rifiutando il fatto, da molti assunto come frettolosa spiegazione, che le difficoltà specifiche della matematica dipendono dal fatto che la disciplina ha alla base un substrato di regole logiche che la rendono sfuggente e inafferrabile. Inoltre, se è vero che l'astrazione matematica non è la sola astrazione possibile, ci si deve chiedere: «in che cosa l'astrazione matematica differisce da altri tipi di astrazione, nella sua natura, nel modo in cui si sviluppa e nelle sue funzioni ed applicazioni?».

Sono domande poste con una semplicità ma con una consapevolezza che colpiscono e alle cui risposte Anna Sfard dedica questo libro, sfruttando le sue competenze in matematica e in fisica, ma anche in storia, filosofia, e linguaggio, come lei stessa dichiara. Io aggiungerei che da questo libro trapelano competenze notevoli in psicologia ed in tutto quel che concerne il linguaggio, in tutti i suoi molteplici aspetti.

Emerge dai suoi studi, pubblicati in numerosi articoli ma focalizzati in questo libro, che l'Autrice dedica il suo sforzo a delineare e dirimere la complessità che lega nell'essere umano l'apprendimento ed il pensiero creativo, dando un ruolo costitutivo al linguaggio: «Il pensiero dell'essere umano è un caso particolare dell'attività comunicativa». In questo approccio, nello specifico dell'analisi del pensiero matematico, l'origine degli oggetti della matematica e il passaggio (transizione) dal pensiero operazionale a quello strutturale (reificazione), non possono non entrare questioni che hanno a che fare con la semiotica e con l'analisi del discorso; il che ha portato la Sfard a studiare il ruolo (cognitivo) della metafora, «il problema di costruire un focus comune nella comunicazione matematica» e l'analisi della cognizione attraverso l'analisi del discorso.

Ad Anna Sfard interessano anche gli impegni istituzionali e operativi, tanto è vero che ha concretizzato i suoi risultati per quanto concerne l'insegnamento e l'apprendimento dell'algebra di base, ha partecipato allo sviluppo di nuovi curricoli di matematica per la scuola secondaria superiore israeliana ed è stata direttrice del *Israeli Journal for Mathematics teachers*.

Ecco, questo libro è tutto ciò. Lei, l'Autrice, suggerisce a chi si interessa di didattica della matematica di impegnarsi nella II parte del libro, più specifica, ma io suggerisco invece una lettura capillare, globale, dettagliatissima.

Ogni Lettore lo farà da sé, ma io amo sottolineare alcuni punti nevralgici, quelli che mi hanno colpito di più.

Nel primo capitolo, tra l'altro, l'analisi comparativa del pensiero dei due giganti già ricordati, Vygotskij e Wittgenstein, con riferimenti espliciti al detto, al dichiarato, e perfino all'implicito; ciò le permette di giungere alla definizione: «il pensiero è la versione individualizzata della comunicazione interpersonale», che risolve tanti problemi, dato che rinvia ad una interazione comunicativa in cui una persona interpreta i ruoli di tutti gli interlocutori.

Nei capitoli da 1 a 4, si «racconta» la storia del pensiero umano e delle sue interpretazioni, ma al contempo si crea un linguaggio adatto allo scopo, passando attraverso le controversie tra apprendimento e risoluzione dei problemi e le ambiguità linguistiche, e proponendo la visione comognitiva, già prima ricordata, come risorsa per «curare» i dilemmi e le incertezze. Se è vero che «il linguaggio non è l'unico mezzo attraverso il quale la comunicazione e quindi il pensiero possano aver luogo», la fonte principale della forma di vita umana è la comunicazione verbale.

La prima parte ha dunque uno sviluppo che ancora non entra nella didattica della matematica e nelle sue specificità, serve solo (solo!) per impostare il problema da un punto di vista molto più generale: linguaggi, discorsi, comunicazione, specificità umana… Ma poi, nella seconda parte, si entra nel vivo, eliminando una vecchia diatriba su matematica come linguaggio sì – matematica come linguaggio no. L'Autrice propone la matematica come un tipo speciale di discorso per il quale l'approccio commognitivo ha un potere analitico, esplicativo, strutturale eccezionale. Da qui in poi, chiunque sia interessato alla nascita del pensiero matematico, alla sua comunicazione, al potere discorsivo, non vorrà perdere più una sola parola. Nel capitolo 5 troverà la rappresentazione commognitiva della matematica come una forma di comunicazione ben definita; nel capitolo 6 una disanima sulla natura e sulle origini del discorso matematico; qui la cosa si fa sempre più interessante, dato che Anna Sfard propone che la matematica sia da intendersi come un sistema autopoietico, cioè tale da stimolare il suo stesso sviluppo e produrre i suoi stessi oggetti; nel capitolo 7 si esaminano i modi della comunicazione matematica che sono unici e specifici; nel capitolo 8 se ne analizzano i vantaggi. Ma, con la consapevolezza e la sincerità che sono tipici dei veri ricercatori, l'Autrice specifica ed analizza, nel capitolo 9, i problemi rimasti aperti e quelli nuovi che la sua analisi lucida apre.

Alcune delle celebri e fondamentali dicotomie del pensiero, del linguaggio, della comunicazione, della cognizione, dell'apprendimento… vengono qui riproposte, ricordate, studiate e rese evidenti, grazie ad una cura minuziosa e straordinariamente efficace che viene messa nell'analisi del discorso matematico, esemplificato in diverse occasioni (talvolta con difficoltà di traduzione, prima dall'ebraico all'inglese e pi dall'inglese all'italiano). Tutti gli usuali termini ricorrenti negli studi recenti di didattica vengono esposti e studiati: concetto, oggetto (della matematica e del discorso matematico), difficoltà d'apprendimento, misconcezione, astrazione, reificazione, oggettivazione, soggettivazione, comunicazione, discorso monologico e dialogico, semiotica, linguaggio, pensiero, mente… Credo che nessuno studioso, nessun ricercatore, nessun insegnante attivo sfugga all'appello: almeno uno di questi termini è stato da lui usato nel recente passato, per un articolo, per una comunicazione o anche solo per una riflessione.

Sono certo dunque che questo libro costituisca una straordinaria occasione di riflessione per tutti noi, insegnanti, ricercatori, studenti, come dicevo all'inizio, perché può essere letto (o studiato) da varie angolazioni, con diverse prospettive e con differenti necessità: una riflessione sul proprio lavoro di ricerca, una analisi lucida e decisiva su alcuni termini ricorrenti ma non sempre incisivamente delineati o definiti.

Mi piace far notare la sincerità e allo stesso tempo la lungimiranza dell'Autrice, riportando l'ultima riga del libro, molto significativa e densa: «(…) uno dei punti più importanti da ricordare nella conclusione di questo libro è che la storia che ha raccontato non è finita prima che ne inizi una nuova». (B. D'Amore)

Arrigo G., D'Amore B., Sbaragli S. (2010). ***Infiniti infiniti.*** **Trento: Erickson. Pagg. 284, euro 19,50, ISBN 978-88-6137-569-7**

L'infinito (matematico) è una brutta gatta da pelare. Se si chiede ad una persona, seppure colta, che cosa è, difficilmente si otterrà una risposta corretta. E non c'è da meravigliarsi: la sua storia o, meglio, la storia dei tentativi che filosofi e matematici hanno fatto per darne una definizione accettabile, lo sta a dimostrare. Se poi si pensa alla distinzione tra infinito in atto e infinito in potenza, di aristotelica origine, le cose si complicano ancor più. Se ne è reso ben conto, appunto, Aristotele che, tagliando la testa al toro, ha intimato ai matematici di occuparsi solo di quello in potenza e di lasciar perdere quello in atto. Lo stesso grande Euclide, nei suoi Elementi, si fa scrupolo di seguire i dettami dello stagirita: in geometria non parlando mai di rette ma solo di segmenti prolungabili fin che si vuole, e in aritmetica non dicendo che i numeri primi sono infiniti ma solo che se ne può sempre trovare uno più grande. Bisogna arrivare al XIX secolo per accettare l'infinito in atto, con Cantor e colleghi. Si è trattato di uscire dall'apparente contraddizione già individuata da Galileo (i numeri quadrati sono solo una parte dei naturali, eppure sembrano essere altrettanto numerosi: come fa una parte ad essere uguale al tutto?) assumendola come definizione di insieme infinito: un insieme è infinito se si può metterlo in relazione biunivoca con una sua parte propria. La storia dei tentativi esperiti è affascinante e il libro di Arrigo, D'Amore e Sbaragli la percorre, sia pure e inevitabilmente per sommi capi, in modo chiaro ed esauriente. Si ritrovano quindi i nomi di Talete, di Pitagora, di Parmenide, di Zenone (con i suoi famosi/famigerati paradossi), di Anassagora, dei già nominati Aristotele ed Euclide, di Archimede (con il suo metodo di esaustione), rappresentanti della scuola greca ed ellenistica. Poi, dopo il periodo romano durante il quale di infinito non si occupò più nessuno, si arriva ai XIII e XIV secoli, con la rinascita culturale di cui siamo debitori agli Arabi, e infine ai secoli che vanno dal XV al XIX quando la matematica non poteva più fare a meno dell'infinito e del suo contraltare: gli «infinitesimi» (le virgolette sono d'obbligo). Si pensi anche solo a Newton e Leibniz. Convinti come siamo dell'importanza di conoscere la storia di un concetto per meglio afferrarlo, fosse solo per questa parte il libro merita un'attenta lettura, facilitata anche da due Appendici: «Biografie in ordine alfabetico» e «Sintesi delle correnti filosofiche citate nel corso del testo, in ordine alfabetico». La parte centrale, in senso tipografico, del testo rende conto delle ricerche svolte dagli autori con allievi di età comprese tra i 3-4 anni e i 19 e con insegnanti. E qui si vede in modo lampante come certe misconcezioni si trasmettono, per così dire, di padre in figlio: quelle degli allievi sono sovrapponibili a quelle degli adulti. E di nuovo si osserverà come la storia possa aiutarci: se tante imprecisioni sono state commesse dai grandi, come non ammettere gli errori dei nostri allievi?

Né deve spaventare l'argomento: dalla IV di copertina citiamo *«Questo libro ha la pretesa di proporre riflessioni molto elementari sull'infinito matematico a tutti coloro che vorranno farle proprie».*

Il 4 marzo scorso il libro è stato presentato al pubblico nell'Aula Magna del DFA della SUPSI di Locarno.


Ha introdotto Diego Erba.


Gianfranco Arrigo ha illustrato la parte storico-filosofica.


Sivia Sbaragli ha presentato gli aspetti didattici.

Mainini G. (2009). ***Navigando in matematica per mozzi, marinai e nostromi.*** **Bologna: Pitagora. Prefazione di Gianfranco Arrigo. Pagg. 160, euro 14, ISBN 88-371-1781-7**

Questo interessante libro costituisce un *unicum* per diverse ragioni. Prima di tutto perché l'opera offre una sequenza, ordinata e no, di attività matematiche divertenti e stimolanti, che possono essere adattate alle classi della scuola primaria e secondaria di ambo i gradi, poi perché la fonte di ispirazione è la Grande Rete, cioè *internet*, che costituisce da tempo il territorio privilegiato dell'attività matematica dell'Autore. Chi conosce bene Giorgio Mainini sa che, matematicamente, è un autodidatta e che, sorretto da grande passione, continua a produrre lavori matematici da buon cultore. Basterebbe sfogliare qualche numero di questa rivista per rendersi conto della qualità e della mole dei lavori che lui propone. Ma l'interesse per questo suo sforzo editoriale è ancora maggiore se si tiene conto del fatto che egli si rivolge agli insegnanti con lo scopo di raggiungere gli allievi: perché la sua preoccupazione maggiore è proprio quella di cercare di rendere piacevole e stimolante la matematica anche a quegli allievi che di solito vengono considerati «deboli». Questa in sostanza è anche la filosofia del *Bollettino dei Docenti di Matematica*, del quale l'autore è pure redattore, e della *Società Matematica della Svizzera Italiana* che lo vede membro molto attivo del comitato. Una matematica, la sua (la nostra) viva, fatta di intuizione e ragionamento, costruita coscientemente insieme agli allievi, liberata in misura ragionevole da quei pesanti fardelli tecnici che purtroppo la tradizione continua a imporre a molti insegnanti.

Questo credo pedagogico è costantemente presente nei commenti che, di tanto in tanto, l'Autore inserisce fra le numerose proposte di problemi. Oltre all'aspetto utilitario del libro – che può interessare gli insegnanti alla ricerca di nuovi spunti didattici – sottolineiamo il messaggio indirizzato agli insegnanti, affinché non si lascino troppo imbrigliare dai non pochi condizionamenti scolastici, dalle cattive abitudini e dall'inerzia didattica.

Chi è chiamato a insegnare matematica deve continuamente formarsi e perfezionarsi, sia accrescendo le proprie conoscenze matematiche in senso lato – in particolare interessandosi anche dei relativi aspetti storici, filosofici, epistemologici e didattici – sia affrontando in prima persona i problemi matematici che la pratica dell'insegnamento non smette mai di esplicitare. Un tale percorso professionale non è facile da intraprendere, ma se ci sono le condizioni iniziali minime – interesse e curiosità – la cosa è fattibile: lo dimostra anche questo libro. A spianare la strada verso il successo, contribuiscono poi lo scambio di idee ed esperienze con i colleghi – per esempio, la frequentazione di convegni di didattica della matematica –, i corsi di formazione continua di tipo disciplinare e… la navigazione in *internet* alla ricerca dei più avvincenti siti matematici.

Il 31 marzo scorso il libro è stato presentato al pubblico nella sala della Biblioteca Comunale di Sorengo.

Ha introdotto Gianfranco Arrigo.

Ha parlato l'autore Giorgio Mainini.

Maracchia S. (2009). ***Delitto in casa pitagorica e altri racconti.*** **Trieste: Goliardica editrice. Copertina e figure interne di Flavio Maracchia, detto Chito. Pagg. 130, euro 12,60. ISBN 978-88-88745-16-9.**

Come si può dedurre dal titolo, si tratta proprio di un libro di racconti. Sì, perché Silvio Maracchia, conosciuto nei nostri ambienti come matematico e dotto specialista in storia della matematica, ebbene, è anche scrittore. Una ragione in più per leggere questo libro: conoscere l'altra faccia di Silvio. Il libro propone sei racconti:

Delitto in casa Pitagora (che dà il titolo alla raccolta)
L'ipotesi di Goldbach: un'avventura in mezzo al mare
Prima dell'esame: ovvero l'incubo delle tavole
Inferno o Paradiso?
Gödel e il colibrì
La polifonia dell'Universo ovverosia il sogno di un matematico

Insomma, sono racconti, sì, ma la matematica e soprattutto i matematici sono sempre presenti, anche se in modo discreto, a volte impercettibile. Il racconto più scientifico, anche il più ricco di riferimenti storici, è il primo, nel quale l'Autore propone una personale riedizione del delitto consumato, si dice, fra i Pitagorici, sullo sfondo della scoperta dell'incommensurabilità. L'azione si svolge a Crotone e la trama non ha nulla da invidiare ai più celebrati romanzi gialli: c'è un cadavere, è evidente che si tratta di omicidio, vi sono gli indiziati e chi è chiamato a condurre le indagini è proprio lui «quell'uomo» il «maestro», Pitagora. Non vi dico chi è l'assassino: ci mancherebbe…

Degli altri racconti non dirò nulla di preciso, perché il libro ognuno lo deve gustare fino in fondo; solo che Silvio ci ha messo molta fantasia in più, come nella creazione di un particolare paradiso per matematici. Vi immaginate se, dopo morti, giungeste in un mondo (l'altro mondo) nel quale, quando scrivete una formula o un'affermazione matematicamente corretta, questa rimane incisa, altrimenti scompare? Quanti dubbi potreste sciogliere, quante congetture o ipotesi cambierebbero essenza, quante soddisfazioni potreste togliervi! (G. Arrigo)

Progetto grafico
Bruno Monguzzi
Prestampa
Taiana
Stampa
Veladini

Redazione
Laboratorio di didattica della matematica
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera

Telefono
091 814 18 21/22/24
Fax
091 814 18 19
gianfranco.arrigo@span.ch

Amministrazione
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera
Fax
091 814 18 19

Esce due volte all'anno
a maggio e a dicembre

Abbonamento annuo
SFR 30
€ 16