A cura
del Laboratorio di didattica della matematica

Bollettino dei docenti di matematica

61

Dicembre
2010

Ufficio
dell'insegnamento medio
Centro
didattico cantonale

Bollettino
dei docenti di matematica
61

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell’educazione,
della cultura e dello sport

© 2010
Divisione della Scuola
Centro didattico cantonale

ISBN 978-88-86486-80-4

Bollettino dei docenti di matematica 61

Dicembre
2010

Ufficio dell'insegnamento medio
Centro didattico cantonale

Indice

Prefazione

Il numero 61 si apre con la seconda parte dell'articolo di Denis Baggi sulla matematizzazione della teoria musicale; la prima parte è apparsa sul numero 60, con alcune imprecisioni che sono corrette alla fine di questa seconda parte. La sezione Varia continua con un pezzo di Mauro Prevostini che si sofferma sui rapporti tra matematica e informatica. La sezione si completa con due articoli che si rifanno alla Mostra San Gaku, creata dalla SMASI, rassegna sulla matematica classica giapponese che, dopo aver esordito in settembre a Villa Saroli nell'ambito della manifestazione «cult 10» della Città di Lugano, sta facendo il giro in diverse scuole del Canton Ticino: un articolo descrittivo è firmato da Gianfranco Arrigo e uno concettuale da Annick Horiuchi, parigina.

La parte dedicata alla didattica è la più sostanziosa di questo numero. I primi due articoli sono le sintesi dei lavori di diploma di due colleghi che hanno conseguito l'abilitazione all'insegnamento della matematica lo scorso mese di giugno. Christian Pitta offre un lavoro su matematica e affettività, mostrando una non comune sensibilità pedagogica nel riflettere sulle difficoltà che comporta il processo di insegnamento-apprendimento della matematica. Alan Bucciarelli si occupa dell'insegnamento della probabilità al liceo proponendo l'accattivante sottotitolo *De Finetti vs Laplace*, che svela l'intenzione di presentare l'interpretazione soggettivista della probabilità come complemento alle più diffuse concezioni classica e frequentista.

Infine Dario Silvestro presenta una interessante situazione didattica relativa all'applicazione pratica del concetto di similitudine dei triangoli, che comprende progettazione, misurazione sul terreno e calcolo della larghezza del laghetto di Muzzano.

Non poteva mancare l'abituale quiz di Aldo Frapolli nella sezione dedicata ai giochi, che continua con due presentazioni in ricordo del grande Martin Gardner, recentemente scomparso. Il primo omaggio, redazionale, ricorda la figura dell'autore per antonomasia dei giochi matematici. Il secondo porta la firma illustre di Ennio Peres, amico ed estimatore della nostra rivista.

Il numero chiude con le segnalazioni di due convegni sulle difficoltà dell'apprendimento: quello del GRIMeD – che si svolgerà a Castel San Pietro Terme – e quello organizzato dal Dipartimento Formazione e Apprendimento della Scuola Universitaria Professionale della Svizzera italiana a Locarno.

Infine troviamo un paio di di interessanti recensioni. A tale proposito ribadiamo che le nostre recensioni concernono unicamente libri che abbiamo letto e giudicato meritevoli di segnalazione, soprattutto perché utili per l'insegnamento.

1. Un modello (quasi) matematico della teoria musicale[1]

Denis Baggi[2]

Knowledge of music, musicology and music theory is increasingly required from designers of multimedia environment, since digital entertainment and music is a sector second in economic importance only to that of oil. While this writing will not instantly transform a mathematician or computer scientist into a musician or musicologist, something that requires years of theoretical study and ear training, it offers a methodical, step-by-step explanation of the most important terms and techniques currently in use in the theory of music.

11. Cambiamento di tonalità

11. 1. La relazione maggiore-minore

Dei 7 modi possibili, nell'armonia tonale classica sono stati ritenuti solo il ***maggiore***, uguale allo ionico (Paragrafo 4) ed il ***minore***, quasi uguale all'eolio. In una data tonalità maggiore, il ***relativo minore*** è una scala con (quasi) le stesse note il cui primo grado si trova una terza minore sotto la tonica del maggiore. Così il relativo di Do maggiore è La minore, quello di La♭ maggiore è Fa minore, ecc.

Il che implica che la tonalità indicata dagli *accidenti in chiave* può invece riferirsi al relativo minore. Ossia, se per esempio vi sono 4 diesis in chiave, la tonalità può essere sia quella di Mi maggiore (vedi (6) nel Paragrafo 5) o anche Do♯ minore. È spesso possibile distinguere fra i due osservando l'ultimo accordo del brano, che quasi sempre è la tonica, oppure osservando le alterazioni descritte qui di seguito.

1. La prima parte dell'articolo è pubblicata sul numero 60 di questa rivista. Si veda anche l'errata corrige nell'appendice di questa seconda parte.
   Presso la Biblioteca della SMASI (Lugano, via Torricelli 19) è disponibile un CD con il testo completo di questo articolo e degli *hyperlinks*, indicati da parole evidenziate in blu in modo che posizionandovi sopra il puntatore *mouse* e *cliccando* si possono *udire* tutti i suoni e i concetti musicali descritti – quali *note*, *intervalli*, *accordi* e le *sequenze* delle figure. Esso contiene inoltre una versione aggiornata del programma *chords* che in più permette l'identificazione automatica di tutte le periferie MIDI di un computer e la scelta, con manuale in inglese.
2. Denis L. Baggi si è diplomato al Politecnico di Zurigo ed ha ottenuto il dottorato presso l'Università della California a Berkeley con una tesi in Informatica e Musicologia. Ha insegnato al Polytechnic Institute of New York e alla City University of New York, svolto ricerche presso i Bell Laboratories nel New Jersey, occasionalmente suonando il sassofono a New York. Presentemente è professore alla SUPSI di Manno, dove svolge ricerca in musica e informatica, e membro di comitati esecutivi della Computer Society dell'Institute of Electrical and Electronic Engineers (IEEE CS), responsabile per i contatti con le arti e le scienze umanistiche.

Nel modo minore vengono alterate alcune note secondo le seguenti convenzioni, come in questo esempio di La minore, relativo minore di Do maggiore:

(8) La-Si-Do-Re-Mi-Fa-Sol♯

in cui il Sol di Do maggiore viene alzato di un semitono per creare una *sensibile* a imitazione del maggiore, e permettere una cadenza V-I con l'accordo di settima di dominante, in questo caso sul Mi. Questo modo si chiama ***minore armonico***, appunto per il suo utilizzo nell'armonia. Si noti pure che in questo *modo* l'accordo sulla tonica, La-Do-Mi, è ***minore***, ciò che dà il carattere al brano.

Tuttavia, in una melodia, il passaggio Fa-Sol♯ genera un intervallo di *seconda eccedente*, dal brutto suono come indicato nella Figura 15 del Paragrafo 10.1 – a parte certi modi orientali e moreschi – per cui si altera anche il sesto grado come segue:

(9) La-Si-Do-Re-Mi-Fa♯-Sol♯

Questo modo si chiama ***minore melodico ascendente*** ed è pertanto usato in sequenze melodiche ascendenti. Data una certa pesantezza nel caso di melodie discendenti, si preferisce eliminare tutti gli accidenti come segue:

(10) La-Sol-Fa-Mi-Re-Do-Si-La

che viene chiamato ***minore melodico discendente***, ed è identico all'eolio.

In un brano di musica si passa spesso dal maggiore al relativo minore e viceversa, e basta *alterare il quinto grado* ed usarlo come se fosse la terza della nuova dominante, come nell'esempio seguente:

Figura 17 Passaggio da Do maggiore al relativo minore La minore

Si noti che, dato che il Sol♯ non è in chiave, esso va indicato nella battuta – almeno la prima volta che lo si usa in battuta, come dalle convenzioni della Figura 12, Paragrafo 9. Questo movimento dal maggiore al relativo minore non è considerato come un vero proprio cambiamento di tonalità, e difatti gli accidenti in chiave non cambiano.

11.2. La modulazione

Si tratta di un vero e proprio ***cambiamento di tonalità***. Il contesto cambia, come se lo sfondo di una pittura cambiasse da azzurro a rosa, per cui i gradi vengono ricalcolati nella nuova tonalità raggiunta.

Nel modello dell'armonia a 4 voci, e nella musica non oltre il primo '700, non si può modulare a qualsiasi tonalità, bensì solo a quelle chiamate ***vicine***, ossia che non richiedono l'aggiunta di più di un diesis o di un bemolle agli accidenti già in chiave. Prendendo l'esempio di Do Maggiore, essere sono:

- Sol maggiore, che richiede l'aggiunta di un diesis, Fa♯ (vedi (6), Paragrafo 5)
- Fa maggiore, che richiede l'aggiunta di un bemolle, Si♭ (vedi (7), Paragrafo 5)

Si noti che le toniche di queste scale, la *dominante* e la *sottodominante* (Paragrafo 5) sono i soli gradi su cui si costruisce un accordo maggiore nella scala di partenza. La modulazione avviene introducendo nel brano l'alterazione che richiede il cambiamento di scala:

Figura 18 Modulazione da Do maggiore a Sol maggiore

In questo esempio, essa avviene sul secondo tempo della seconda battuta, indicando chiaramente il cambiamento dell'ambiente tonale, sancito dalla cadenza finale.

Figura 19 Modulazione da Do maggiore a Fa maggiore

Lo stesso avviene nell'esempio della Figura 19, in cui il Si♭ nella seconda e terza battuta indica chiaramente la modulazione a Fa-maggiore.

Data la stretta parentela fra una tonalità maggiore ed il relativo minore, modulazioni di questo tipo sono possibili verso i relativi minori della dominante e sottodominante:

– Mi minore, che richiede l'aggiunta di un diesis, Fa♯
– Re minore, che richiede l'aggiunta di un bemolle, Si♭

In tal caso, l'aggiunta dell'accidente viene interpretata come modulazione al relativo minore e vengono aggiunte le alterazioni del minore armonico.

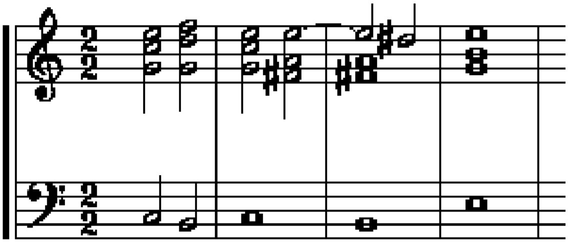


Figura 20 Modulazione da Do maggiore a Mi minore

Viene dunque aggiunto il Re♯ sul secondo tempo della terza battuta nel soprano per il passaggio dominante-tonica.

Figura 21 Modulazione da Do maggiore a Re minore

Anche in questo caso, la modulazione è indicata dall'introduzione del Si♭ sul secondo tempo della seconda battuta, e la cadenza finale necessita il Do♯ nel soprano del secondo accordo della terza battuta.

In armonie più progredite è possibile modulare da ogni tonalità a qualsiasi altra, usando accordi diminuiti ed aumentati come cerniera perché presenti in più scale contemporaneamente, che distraggono l'orecchio dal cambiamento del contesto armonico. Fino ad arrivare a brani che consistono di modulazioni continue, come nel brano della Tabella 4 del paragrafo 10.2, ed addirittura all'assenza di tonalità, come trattato nel Paragrafo 13.

12. Cenni sulla teoria tonale di Schenker

Si tratta di un metodo analitico interessante, anche se non universalmente accettato, che ha avuto una certa popolarità in America. È stato definito dal compositore e musicologo Heinrich Schenker, 1868-1935, di origine germanica, ed applicato alla musica di Bach, Beethoven, Händel, Scarlatti, Chopin, per metterne bene in evidenza il ***carattere tonale***.

La teoria si basa su modelli analitici e strutturali di un brano di musica, ognuno dei quali viene ottenuto riducendolo dal precedente con la rimozione di caratteristiche decorative non essenziali, con manipolazioni grafiche dello spartito, omissione di note e segmenti non strutturali, e così via. L'analisi parte dalla musica come composta, l'**Oberfläche**. Eliminandovi note di passaggio e non essenziali, ripetizioni, prolungamenti, e raccogliendone gruppi si passa al livello **Vordergrund**. Da esso, con un processo simile, si ottiene il **Mittelgrund** e finalmente l'**Hintergrund**.

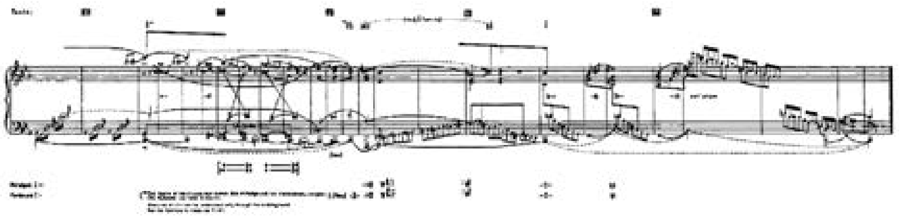


Figura 22 Segmento del ***Vordergrund*** dello Studio in Do Minore, Op.12, No.12, Federico Chopin, secondo Schenker

La figura 22, di non facile comprensione, è un esempio di come vengono rimosse, congiunte ed enfatizzate certe note. Alla fine di questo processo, resta l'**Ursatz** di cui si indica solo il soprano ed il basso, e che ha sempre una delle forme seguenti:

Figura 23 ***Ursatz*** o prototipi tonali, secondo Schenker

Ossia, si tratta sempre di una *discesa del soprano* dalla *terza*, *quinta* o *ottava* della tonica, avente come contrappunto nel basso il passaggio *tonica-dominante-tonica*. Per cui Schenker afferma la proprietà della musica tonale:

«Condizione necessaria e sufficiente affinché un brano di musica sia tonale è che la sua struttura sia rappresentabile con uno degli *Ursatz* o prototipi». Vi è una certa autoreferenza in questa definizione poiché la riduzione analitica va fatta secondo il metodo di Schenker!

Intuitivamente, si può affermare che la teoria di Schenker è una glorifica dell'armonia tonale, perché sottolinea l'importanza di due elementi fondamentali: la *scala diatonica* nel soprano, e la progressione *tonica-dominante-tonica* che è la base dell'armonia. Si noti che le sinfonie con tre movimenti sono appunto costruite con questo schema, un movimento sulla tonica, quello centrale sulla dominante e quello finale sulla tonica. Sempre intuitivamente, si potrebbe dedurre che i secoli di sviluppo dell'armonia tonale sono serviti a definire questo schema, per dare al compositore il controllo *globale* di un brano – un po' come lo scrittore che in una storia o romanzo segue uno schema: preparazione – clima dell'avventura – risoluzione finale, quasi alla lettera secondo Freud.

In ogni modo, a parte certe pecche dell'analisi schenkeriana, quali la poca importanza data alla sottodominante, secondo chi scrive rappresenta la differenza fra una musica composta con procedure localmente giuste ma che non «raccontano una storia», come è possibile fare con programmi informatici, ossia una musica che «non arriva al dunque». Vi è un po' di questa sensazione all'ascolto di musiche pre-tonali dal medioevo in poi. Il controllo globale dell'opera è sicuramente una preoccupazione di tutti gli artisti, e nella musica tonale è rappresentata dagli elementi sottolineati da Schenker, il cui metodo è stato applicato anche a musiche non tonali.

13. Musica non tonale

13.1. La dodecafonia

Durante lo sviluppo dell'armonia tonale, i compositori osarono, da Bach a Beethoven passando per Mozart, introdurre note e suoni sempre più lontani dai semplici modelli dell'armonia a quattro voci e modulare rapidamente a tonalità lontane grazie ad accordi diminuiti o aumentati, che esistendo contemporaneamente in varie scale possono servire da transizione. Ossia, ci si rese conto che, in gran parte grazie al sistema temperato, era possibile porre in relazione fra loro suoni non soltanto come nell'armonia a quattro voci e come negli esempi dei paragrafi 10 e 11, bensì tutte le note, se usate in maniera appropriata.

Si scoprì in tal modo l'***armonia cromatica***, già con Chopin – che non a caso era un pianista e vedeva l'equivalenza di diesis a bemolli sotto le sue dita premendo un tasto in più. Il precursore dell'arte è Richard Wagner (vedi *Tristano e Isotta*), che aprì la strada ai suoi discepoli Gustav Mahler e Richard Strauss, e la cui armonia ispirò un cambiamento abbastanza radicale, anche se sempre tonale, a Claude Debussy ed alle sue atmosfere eteree. È pure il momento in cui si affacciano al balcone del centro della grande musica tonale, dominato da Italia, Austria e Germania, anche compositori della periferia dell'Europa, dalla Francia del nord alla Russia, Finlandia, Norvegia, Inghilterra, Spagna, paesi la cui cultura musicale conservava modi ed accordi non assoggettati all'armonia classica – ad esempio, il dorico in Inghilterra, influenze arabe in Spagna, orientali in Russia.

È nel ventesimo secolo che ci si pone dunque la domanda di come comporre senza la tensione tonale generata dalla cadenza dominante-tonica, tanto decantata da Schenker, e cioè eliminando ogni riferimento a un centro tonale, la tonica. Per ottenere questa rimozione di tutti i legami armonici si introduce il concetto di ***serie***.

La serie è un insieme di 12 note, nessuna delle quali può essere risuonata senza che prima tutte e 12 siano state suonate (si può ripetere una nota, anche la sua ottava, come enfasi, ma non risuonarla qualche posizione dopo). In tal modo, si evita all'orecchio di captare o identificare un riferimento come nella musica tonale. Anzi, le serie più «perfette» in questo senso sono quelle che possiedono tutti e 6 gli intervalli possibili fra le note – non si distingue fra intervallo ascendente o discendente, per cui una quarta è lo stesso di una quinta e vi sono pertanto solo 6 intervalli possibili contenenti da 1 a 6 semitoni. Non si distingue fra diesis e bemolle – anche se nella scrittura si tende a seguire una prassi già usata nell'armonia tonale, ossia l'uso della notazione con diesis in caso di ascesa, come Re-Re♯, e bemolle in discesa, come Si-Si♭. Si noti inoltre che, data una serie, essa genera pure la sua *retrogressione* – ossia, la serie suonata dalla fine verso l'inizio – la sua *inversione* – ottenuta rivoltando gli intervalli, ad esempio Do-Mi♭ diviene Do-La(sotto) – e la *retrogressione dell'inversione,* per cui per ogni serie ve ne sono quattro.

Un esempio di serie è quella di Paul Glass (Paragrafo 13.2), già identificata da Webern. Il compositore americano Andrew Imbrie desiderava comporre con una di queste serie che cominciasse con tre note da lui scelte, e ne trovò tre in un libretto di serie con tutti gli intervalli calcolate da computer.

I grandi maestri della dodecafonia sono Schönberg, Berg e Webern, anche se la tecnica è stata usata anche da molti altri, ad esempio Stravinski. Ma non si può dire che la dodecafonia abbia avuto un grande successo di pubblico. Secondo chi scrive, uno dei motivi consisterebbe nella difficoltà per un non-specialista di comprendere dove sta la tensione e lo sviluppo in un brano dodecafonico, che sembra un insieme di note senza logica, mentre la cadenza tonale è radicata e ben compresa. Il che è illustrato dalla seguente storiella che gira nei circoli musicali: un padre appassionato di musica atonale, convinto che l'attaccamento alla musica tonale fosse frutto di condizionamento, dava il latte al suo neonato con musiche di Schönberg, Webern, Boulez e glielo toglieva al suono di Bach, Vivaldi, Mozart. Il risultato fu che da adulto odiava il latte.

Allo stato attuale vi sono molte proposte nella musica «seria», che soffre di una crisi comune a tutte le altre, come quello che segue.

13.2. Il sistema di Paul Glass

Paul Glass è un compositore americano residente in Ticino, noto specialmente per musiche da film. Nel corso dei suoi esperimenti di composizione si imbattè nella domanda: è possibile creare una sequenza di 84 note in modo che sia contemporaneamente un insieme di 12 scale diatoniche e un insieme di 7 serie dodecafoniche.

Figura 24 Una sequenza di Paul Glass

La figura 24 indica come si procede. Le scale diatoniche sono indicate in basso con la lettera della tonica nella notazione inglese (C, B, ecc.) e la serie dodecafonica numerata in alto. Supponiamo di partire con la scala di Do maggiore, 7 note.

Per completare la serie occorrono ancora Do♯, Re♯, Fa♯, Sol♯ e La♯. Le tre scale che contengono tali note sono Si, Do♯ e Fa♯, e scegliamo Si che completa la serie. Però in tal caso vi sono due note che eccedono e travasano nella prossima serie, ossia Mi e Si. Per cui la scala delle seconda serie a partire dalla terza nota non deve contenerle, e tale è ad esempio la scala di Do♯. In tale modo si ottengono 9 note e per completare la serie mancano Re, Sol e La: una scala che le contiene è Si♭, che pertanto eccede con le quattro note S♭, Do, Mi♭ e Fa nella terza serie. Per continuare, occorre dunque una scala che non contenga queste note, ad esempio Re. Per completare la serie, manca solo il Sol♯, presente ad esempio nella scala di La. E così, con note che determinano la prossima scala, è possibile continuare per tentativi raggiungendo tutte e 84 le note, e nel caso della figura si ottiene la ***serie di scale***:

(11) C-B-C♯-B♭-D-A-E♭-A♭-E-G-F-F♯
Do-Si-Do♯-Si♭-Re-La-Mi♭-La♭-Mi♯-Sol-Fa-Fa♯

Questa serie ha la notevole proprietà di essere *invariante sotto retrogressione,* ossia ha lo stesso suono se suonata dall'inizio alla fine, e contiene tutti gli intervalli da 1 a 6 semitoni da una nota alla prossima, esattamente due volte a causa della *simmetria*. Permette dunque una composizione con la minor referenza possibile a intervalli diatonici e centri tonali. Inoltre la sua *inversione speculare* ha le stesse proprietà:

(12) Do-Do♯-Si-Re-Si♭-Re♯-La-Mi-La♭-Fa-Sol-Sol♭

Meno ovvio è che anche la scala cromatica soddisfa alle condizioni di Glass:

(13) Do-Do♯-Re-Re♯-Mi-Fa-Fa♯-Sol-Sol♯-La-La♯-Si

ma ha però lo svantaggio di contenere un solo intervallo fra nota e nota, il semitono.

Ancora meno ovvio è il fatto che, se al punto in cui vi è scelta fra le scale possibili, certe scelte non permettono di completare la sequenza. Per esempio, nel caso della Figura 24, se come seconda scala si fosse scelto F♯, il processo non continuerebbe per mancanza di soluzione, e occorrerebbe tornare indietro e scegliere Si o Do♯, un processo che in gergo informatico si chiama *backtracking.*

Per quanto riguarda la composizione, le regole della dodecafonia si applicano nel senso di dare libertà di scelta della nota all'interno di ogni segmento visibile nella figura. Il numero di note contenuto in ogni segmento risulta essere, secondo la Figura 24:

7, 5, 2, 7, 3, 4, 7, 1, 6, 6, 1, 7, 4, 3, 7, 2, 5, 7

il che permette qualsiasi ordine delle note nel segmento, eccettuata la ripetizione di una prima che tutte siano state usate.

Per cui il compositore si pose la domanda: vi sono altre serie di questo tipo, quali e quante? E con quali proprietà rispetto a *simmetria* e *completezza di intervalli*?

Per rispondere è stato scritto dall'autore nel 1985 un programma informatico nel linguaggio LISP (vedi Paragrafo 14) con operatori quali: calcola le scale che contengono date note, calcola le scale che non contengono date note, sempre con la conoscenza della scala cromatica, di intervalli e così via. L'algoritmo principale è un ciclo che trova tutte le 12 scale diatoniche e dunque una sequenza che soddisfa le condizioni imposte dalle 7 serie dodecafoniche, dunque tutte le sequenze possibili.

Il risultato inaspettato è stato il seguente:

- vi sono esattamente 1'200 sequenze di Glass distinte e la loro inversione, dunque un totale di 2'400
- fra tutte, 144 sono simmetriche
- fra tutte, 420 contengono tutti gli intervalli

I risultati sono multipli di 2, 3, 5 e 7, il che potrebbe suggerire l'esistenza di una spiegazione geometrica del metodo. Il programma è stato testato non solo con il modo maggiore come nella Figura 23, ma con altri, inclusi alcuni con un numero di note diverso da 7, e ciò ha prodotto il seguente risultato:

- le sequenze di Glass esistono solo per i modi greci: ionico, dorico, frigio, lidio, missolidio, eolio, e locrio, e sono sempre le stesse indipendentemente dal modo scelto
- modi alterati quali il minore armonico e il minore melodico ascendente non generano alcuna soluzione (funziona per il minore melodico discendente che è uguale all'eolio), e lo stesso vale per modi medio-orientali con 7 note, e per modi con un numero di note diverso da 7 – quest'ultimo risultato è raggiungibile intuitivamente.

Dunque le sequenze di Glass sono strettamente legate alle proprietà della scala diatonica, ossia quelle contenenti un gruppo di due toni e uno di tre separati da semitoni. Il metodo di Glass è stato usato nelle sue composizioni, e la lista indica anche la sequenza adoperata secondo la classificazione del programma di questo autore:

- Fuchs Variations for Cello Solo, 1983, Serie no. 866 (la sequenza (12))
- Extemporaneous Concerto for Piano and Orchestra, 1982, Series no. 1398 (11), pianista Jan Fryderyk Dobrowolski ©, registrato a Colonia nel 1982 (si notino le 12 scale suonate come accordo di 7 note all'inizio e riprese nel finale)
- Five Piano Pieces, 1984, Serie no.1398
- The late Nancy Irving, musica da film, 1984, Serie no. 866
- Pianto della Madonna, from Jacopone da Todi, 1986, Serie no. 866
- De' Spiriti Miei, Quando mi vedette, da Guido Cavalcanti, 1987, Serie no. 683
- String Quartet I, 1988, Serie no. 783
- Lamento dell'acqua, 1990, Serie no. 763
- Sinfonia N.4, 1992. Serie no. 994
- Quan Shi Qu, 1994, Serie no.683

L'esistenza delle sequenze di Glass ha conseguenze importanti per un compositore di musica atonale, perché permette una definizione e concatenazione di serie dodecafoniche che effettuano una transizione omogenea, garantendo un controllo della struttura complessiva del brano – come definito da Schenker per la tonalità. Glass ha composto con questo sistema dei brani che esprimono, anche per un ascoltatore non sofisticato, la stessa profondità di emozione, tensione e sviluppo, generalmente associato alla musica tonale, e non a quella atonale, anche se chiaramente il brano non è tonale. Lo svantaggio del metodo potrebbe consistere nelle costrizioni imposte al compositore, nell'assenza di forti contrasti per l'omogeneità dell'opera – vi è perfino qualcosa che ricorda una cadenza fra la settima e l'ottava scala in (11). Tuttavia, il progetto ha un grande interesse teorico, e dimostra inoltre in che modo l'informatica e la programmazione simbolica possano essere usate non solo per la ricerca, ma in modo produttivo per la soluzione di problemi musicali.

13.3. La scala pentatonica

Si tratta semplicemente di una scala con solo 5 note e di solito è quella senza le *sensibili*, ad esempio:

(14) Do-Re-Mi-Sol-La

La si trova in canti antichi, e in quasi tutte le culture del mondo. Gli esempi più noti in occidente sono il *Valzer delle candele* scozzese, dal vero titolo *Auld Lang Syne* – armonizzato però con tutte le note disponibili nella scala, accidenti compresi, che ne nasconde la natura – *Loch Lomond* sempre scozzese, *Nella vecchia fattoria* o *Old Macdonald had a farm.* Viene di solito associato alla Cina, in cui i toni sono associati a *colori*, *figure politiche*, *pianeti*, *direzioni* e *elementi.* Compositori occidentali se ne sono serviti per dare un tocco orientale, come Puccini nella *Turandot* o il più modesto Ketelbey nel *Giardino di una pagoda cinese.* Può essere riprodotto facilmente suonando solo i tasti neri del pianoforte. Sono possibili 5 modi, compreso il maggiore di (14), e il minore partendo dal La.

È probabilmente l'uso della scala pentatonica e del passaggio da maggiore a minore come descritto nel paragrafo 11.1, ma nell'ambito pentatonico, che dà un colore speciale alla musica andina, di Perù e Bolivia, ma anche Ecuador, Cile e Argentina settentrionali, che si pensa derivi dalla musica dell'impero Inca.

Degna di menzione è anche la scala usata per l'accordatura del Koto giapponese, uno strumento a corde, che suona nel modo seguente:

(15) Mi-Fa-La-Si-Do

che a differenza di (14) sembra insistere proprio sulle sensibili. Alla musica pentatonica è dedicato un articolo del numero di una rivista curata dall'autore [Ref.3].

13. 4. La scala a sei toni

Si tratta semplicemente della scala a toni uguali:

(16) Do-Re-Mi-Fa♯-Sol♯-La♯

Data l'assenza di toni e semitoni come in una scala diatonica, manca un centro tonale come nella scala cromatica a 12 note di (3). Evidentemente di tali scale ve ne sono solo due in un sistema di accordatura temperato. La si ritrova usata in ambienti tonali avanzati per effetti speciali, come nella musica di Debussy.

14. Introduzione al linguaggio LISP

Il LISP – acronimo per LISt Processing – è un formalismo matematico definito per il trattamento di *funzioni ricorsive di espressioni simboliche.* Quasi mezzo secolo fa è stato realizzato come *linguaggio di programmazione informatico*, e dato che le sue caratteristiche non derivavano da considerazioni tecnologiche legate a circuiti elettronici, ma hanno base matematica, ha introdotto concetti nuovi nell'informatica, che appaiono all'avanguardia ancora oggi.

Questo breve paragrafo non ha l'intenzione di insegnare la programmazione in LISP, ma di illustrarne alcuni concetti di base, e in particolare quelli della *definizione primitiva*, ignorando tutte quelle funzioni e strutture informatiche che sono state aggiunte per facilitare la vita al programmatore «normale» – vedi la fine di questo paragrafo. Questo modello si differenzia nettamente dalla pratica di programmazione corrente grazie alle seguenti caratteristiche:

– non vi sono *effetti secondari*, ossia niente assegnazioni come in $x \leftarrow a+1$
– non vi sono *variabili* (solo *parametri formali*)
– non vi sono *cicli* (tipo `for i=1 to 10`) né trasferimenti (tipo `goto`)
– ogni espressione ha un *valore* (come in una funzione matematica), e non vi sono sottoprocedure ma solo *funzioni*, naturalmente *ricorsive*
– *dati* e *programm*i hanno la stessa struttura, quella di un'*espressione simbolica.*

L'ultimo punto implica che se *dati e programmi* hanno la stessa forma, è possibile costruire un programma che ne costruisce un altro, e al limite che si *autocostruisce.* Inoltre, le operazioni – i «calcoli» – avvengono su simboli[3] e non necessariamente su numeri.

L'***espressione simbolica*** è definita in questo modo (ricorsivo):

– come ***atomo***, ad esempio A, B, SOL♯, ATOMO_LUNGO, 1024, 1.4132
– come ***lista di atomi,*** ad esempio (A B C), (DO RE MI FA SOL LA SI)
– come ***lista di espressioni simboliche,*** ad esempio
(SONATA (MOZART) (SOL-MAGGIORE (SOL LA SI DO RE FA♯)))
fra cui si distingue la costante special NIL o (), unità atomica e lista vuota.

Si distingue in una lista la ***testa***, il primo elemento, e la ***coda***, ossia la lista che resta togliendo la testa.

La ***valutazione*** avviene sempre dall'interno dell'espressione verso l'esterno, assumendo che la testa sia un ***operatore*** – sia predefinito che definito dal pro-

3. Non è un caso che i primi programmi per la risoluzione simbolica, e non numerica, di equazioni – ad esempio l'integrazione simbolica – siano stati realizzati in LISP.

grammatore – seguito da argomenti, a loro volta valutati, eccetto se preceduti dall'apostrofo ', che indica ***quotato*** o *soppressione della valutazione*. Per questo motivo, espressioni aritmetiche appaiono come nella *notazione polacca prefissa*, a differenza di come si scrive normalmente[4].

Esempi:
(+ 2 3) → 5
(/ (* 2 3) 9) Æ 0.666666
(TESTA '(A B C)) → A
(CODA '(A B C)) → (B C)
(SCALA 'MI-MAGGIORE) → (MI FA♯ SOL♯ LA SI DO♯ RE♯)
(QUINTO-GRADO (NOTE 'MI-MAGGIORE)) → SI
(NOTE(SETTIMA(QUINTO-GRADO (NOTE 'MI-MAGGIORE)))) →
→ (SI RE♯ FA♯ LA)
(FONDAMENTALE '(LA DO RE FA)) → RE

Pertanto la programmazione in LISP consiste della definizione di funzioni che si chiamano l'una l'altra ricorsivamente fino a quando la soluzione viene trovata. Le chiamate avvengono in modo ***eterarchico*** invece che gerarchico, come quando, nella valutazione della testa di una lista di argomenti, una funzione attivata dall'ultima richiama la funzione principale per farle valutare la coda.

Vi sono parecchie conseguenze di questo approccio, quali:

– la facilità di operare su simboli invece che solo su numeri come di consueto,
– il fatto che le chiamate delle funzioni non seguono un ordine prestabilito, ma avvengono in funzione della struttura del problema da risolvere, per cui l'analisi può avvenire in un *albero* la cui profondità non è nota in partenza, come nel gioco degli scacchi.

È per questi motivi che il LISP è stato il linguaggio di prima scelta per problemi di *intelligenza artificiale*[5] e, come afferma questo autore, per la modellizzazione della musica e della musicologia. Difatti, Arnold Schönberg afferma: «La musica non dipende soltanto dall'acustica ma anche dalla logica e da quelle leggi particolari che risultano dalla combinazione di tono e melodia», ossia della manipolazione di simboli.

Ma vediamo ora qualche esempio di come si programma in LISP, espresso non in codice, ma con una notazione descrittiva.

Problema 1. Data una lista L come (A B C), scrivi una funzione ULTIMO-ELEMENTO che trova l'ultimo elemento della lista. Algoritmo:

ULTIMO-ELEMENTO (L)
· se la coda di L è vuota, allora ritorna la testa di L
· altrimenti ritorna (ULTIMO-ELEMENTO (coda di L))

4. E a differenza di un noto calcolatore scientifico con notazione polacca postfissa.
5. Un sistema, pure con simboli e liste, il PROLOG degli anni '80, ha avuto meno diffusione a causa di certi automatismi più evoluti che nel LISP, ma di difficile controllo – vedi fallimento del programma Quinta Generazione giapponese.

La valutazione della funzione traversa dunque L come segue:
ULTIMO-ELEMENTO di (A B C) → ULTIMO-ELEMENTO di (B C) → ULTIMO-ELEMENTO di (C) → C

Problema 2. Conta quanti sono gli elementi di una lista.
Soluzione:

CONTA(L)
· se la lista è vuota, ritorna 0
· altrimenti ritorna 1 + CONTA (coda di L)

Vediamo: se L è (A B C), abbiamo:
CONTA di (A B C) → 1 + CONTA di (B C) → 1 + 1+ CONTA (C) → 1 + 1 + 1 + CONTA (()) → 1 + 1 + 1 + 0 → 3

Si noti che questa dimostrazione, chiamata *trace*, può essere eseguita direttamente dal sistema.

Problema 3. Data una lista di 3 note, trova qual è la fondamentale.
La soluzione richiede alcune funzione ausiliarie, quali PERMUTA e il predicato TERZE-P che ritorna «sì» o «no» se due note rappresentano una terza.
Soluzione:

FONDAMENTALE (ACCORDO)
· se TERZE-P fra prima e seconda nota è «sì», e TERZE-P fra seconda e terza nota è «sì», ritorna la prima nota
· altrimenti ritorna FONDAMENTALE di PERMUTA(ACCORDO)

Tracing:
FONDAMENTALE di (MI SOL DO) → FONDAMENTALE di (SOL DO MI) → FONDAMENTALE di (DO MI SOL) → DO

Da ultimo, in onore alla totale trasparenza del LISP e alla sua ricorsività innata, mostreremo la struttura del sistema di valutazione di un programma scritto sotto la forma di espressioni simboliche:

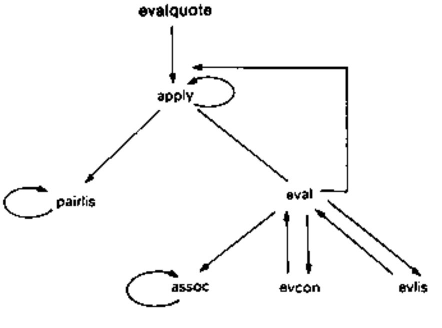


Figura 25 L'interprete LISP e la sua struttura eterarchica

Ciò significa che, date le funzioni di base, è possibile costruire lo stesso sistema di valutazione del LISP in LISP, un esercizio dato di solito agli allievi principianti, e che può essere risolto con non più di circa 22 righe di codice.

Questa metodologia, di esprimere algoritmi su espressioni simboliche rappresentanti concetti musicali, è stata usata in cinque progetti di teoria musicale:

- ***identificazione delle sequenze di Glass***, vedi paragrafo 13.2;
- ***realizzazione del basso senza numeri*** [Ref.4]: è un problema dell'armonia a quattro voci in cui è dato il basso e si chiede di «realizzare» le altre tre parti; il programma risolveva gli esercizi del classico testo [Ref.5];
- ***Common Music***, insieme di funzioni per la modellizzazione della teoria musicale, che permette di identificare la tonalità dagli accidenti in chiave, trovare il grado di una nota, l'intervallo fra due note in quella scala; tutte le permutazioni di una lista di note; la fondamentale di un accordo, ed il tipo dell'accordo, di *trasporre* una melodia da una scala in un'altra, non pubblicato;
- ***NeurSwing*** [Ref.6], un sistema che, data una griglia armonica calcola ciò che va suonato da una sezione ritmica jazz con piano, basso e batteria, diverso a ogni giro, e con controllo analogico dello stile; suonato in tempo reale tramite sintetizzatore MIDI, realizzato con reti neuronali nel linguaggio C, ma con le tecniche del LISP;
- ***chords,*** programma che dalla cifratura di un accordo ne identifica note, tipo, e lo suona, come descritto nel Paragrafo 10.2; scritto nel linguaggio C usando le tecniche del LISP;
- ***macchina armonica*** [Ref.7], uno strumento realizzato con un circuito consistente di un microprocessore a 8 bit con programma da 2 Kbyte, memoria da 256 Bytes, con incorporato sintetizzatore a 4 voci, pulsantiera tipo telefono e interruttori; permette di comporre e suonare in tempo reale brani a 4 voci, selezionando progressioni tipiche dell'armonia a 4 voci: 5 periodiche, 2 scale, 2 modulazioni, e cadenza finale; programmato in linguaggio macchina per il processore 6800, usando le tecniche del LISP.

Da ultimo, si noti che l'evoluzione, anche commerciale, del LISP ha portato al COMMON LISP negli anni '80 [Ref.8], con un insieme completo di funzioni come quelle che si ritrovano nei linguaggi comuni oltre a quelle tipiche del LISP e per assicurarne la compatibilità fra piattaforme. Un'altra versione è lo SCHEME [Ref.9], più vicino all'originale e usato per l'insegnamento. Circolano pure versioni ridotte come XLISP, gratuito e che non occupa più di un vecchio disco floppy da 5¼", sorgenti comprese, dunque trasportabile su altre piattaforme.

15. Cenni sul protocollo MIDI

MIDI, o ***Musical Interface for Digital Instruments***, è un protocollo di comunicazione fra strumenti elettronici, quali tastiere, sintetizzatori di suono, e computer. Consiste essenzialmente di ***due fili*** su cui viaggiano impulsi elettrici corrispondenti a byte trasmessi in modo seriale.

Lo standard venne definito nel 1982 per semplificare i collegamenti fra apparecchi elettronici per fare musica. Uno strumento completo può possedere tre prese di collegamento: IN, a cui collegare per esempio una tastiera[6] per far suonare il sintetizzatore interno; OUT, da cui prelevare ad esempio il segnale della tastiera interna; THRU, un passaggio da cui transitano i segnali MIDI di vari strumenti esterni per altri, identificati con un indirizzo proprio. Un pianoforte MIDI le contiene di solito tutte e tre: un sassofono solo OUT, ed un computer IN – per registrare da una tastiera esterna – e OUT – per riprodurre un brano con un sintetizzatore esterno – e talvolta THRU.

Un apparecchio MIDI gestisce 16 ***canali***, i cui comandi transitano tutti sullo stesso cavo, e che permettono di attribuire uno strumento diverso a ogni canale. Vi sono parecchi segnali MIDI, di cui menzioneremo i più importanti quali esempi, con vari argomenti, di solito da 1 a 3 bytes, talvolta molti di più come nei *messaggi*. Il più importante è NOTE-ON, e ha la seguente sintassi con 3 bytes:

9X nota velocità

La seconda cifra del primo byte, in esadecimale, indica il canale, dunque avremo 90 per il canale 1 e 9F per il 16.mo. Il secondo byte indica la nota, Do centrale è uguale a 60 in decimale, e ogni aumento di 1 è un semitono in su. Il terzo byte rappresenta l'intensità con cui va generata la nota, che può essere il volume di quella nota indipendentemente dal volume globale, e varia da 0 a 127. Vi è un comando simile NOTE-OFF, che però ha lo stesso significato di velocità 0.

Altri comandi servono a: cambiare lo strumento – il numero assegnato a uno strumento è stato standardizzato con la *General MIDI* del 1991; attivare controlli di una tastiera, quali i pedali del pianoforte, la rotella per variare l'altezza dell'accordatura, la rotella del vibrato, la pressione sul tasto dopo il primo colpo, e così via.

Questi messaggi sono indipendenti dal tempo e sono generati all'istante, da una tastiera o da un programma come *chords* menzionato nel paragrafo 10.2. Per suonare un brano completo nel tempo, MIDI definisce un formato per gli archivi, che oltre a tutte le indicazioni MIDI contiene anche l'indicazione dell'istante.

Event List - Track 1

Trk	Hr:Mn:Sc:Fr	Meas:Beat:Tick	Chn	Kind	Values		
1	00:00:00:00	1:1:000	1	Note	C 6	100	2:000
1	00:00:00:00	1:1:000	1	Note	G 5	100	2:000
1	00:00:00:00	1:1:000	1	Note	E 5	100	2:000
1	00:00:00:00	1:1:000	1	Note	C 4	100	2:000
1	00:00:01:06	1:2:000	1	Note	B 5	100	2:000
1	00:00:01:06	1:2:000	1	Note	G 5	100	2:000
1	00:00:01:06	1:2:000	1	Note	F 5	100	2:000
1	00:00:01:06	1:2:000	1	Note	D 4	100	2:000

Figura 26 Esempio di rappresentazione di messaggi MIDI in un sequencer

6. Il posto di una tastiera può essere assunto da *strumenti MIDI* di varie forme: sassofono, chitarra, tromba... suonati normalmente ma che al posto di un suono generano segnali MIDI.

La figura 26 è un esempio di come vengono rappresentati i messaggi MIDI dal tipico sequencer Cakewalk, un programma in grado di creare e riprodurre archivi MIDI su di un computer, e che permette di comporre un brano sul pentagramma. Tutti gli esempi delle figure dei Paragrafi 10 e 11 sono stati realizzati con esso. L'esempio è la prima battuta della Figura 26: si riconoscono le 4 note del primo accordo, nella colonna a sinistra in «Values», mentre la seconda colonna è la velocità, 100, e l'ultima la durata, 2 quarti o una metà. Trk, la prima colonna, indica il canale 1, pianoforte, seguono le indicazioni temporali legate al tempo, quindi quelle espresse in funzione di battuta – Meas – battito – Beat – e Tick – che in questo caso sono 60 per battito. Dunque le prime 4 note cadono sul primo battito, e le prossime 4 sul secondo tempo di due metà.

Il MIDI è un protocollo popolare e relativamente semplice. Chi scrive ha spesso invitato il pubblico, in conferenze, a distinguere fra una registrazione autentica per pianoforte e uno strumento MIDI, e la media del riconoscimento è del 50%.

Il MIDI ha permesso una facile diffusione della musica con archivi molto compatti – tre ordini di grandezza in meno rispetto all'audio registrato. Permette anche dei giochi come quello suggerito da un membro della SMASI[7]. In un romanzo di fantascienza [Ref.10] appare una nuvola intelligente fra terra e sole, che comunica con gli umani e il cui stadio di progresso scientifico è superiore a quello dell'umanità. A parte la musica, che non le era conosciuta. Analizzando l'Hammerklaviersonata di Beethoven, la nuvola suggerisce che debba essere suonata 30% più veloce, un'impossibilità per un pianista. Con un file MIDI e un sequencer il cambiamento di tempo è immediato, e anche se alcuni passaggi sembrano artificiali perché ultraveloci, la resa permette di valutare la saggezza della nuvola extraterrestre!

Tuttavia, anche se adatto a pianoforti, organi ecc. ad accordatura fissa, il MIDI è fortemente deficitario per strumenti che permettono di controllare il suono: a fiato – vari tipi di attacchi – archi – come viene sollecitata la corda – ecc. Pur permettendo un ascolto di brani esistenti per orchestra, in alcuni casi con buoni risultati, sarebbe forse consigliabile di evitare di inserire lo spartito di un brano esistente in un sequencer, e favorire invece la composizione di nuovi brani in funzione dello strumento elettronico disponibile, mascherando i difetti del MIDI, come è possibile fare con software più avanzato.

16. Conclusioni

Non c'è dubbio che l'armonia tonale classica rappresenti uno dei massimi successi della cultura occidentale, un po' come la prospettiva e la ritrattistica dell'arte figurativa rinascimentale, dato che, pur volendo evitare ogni imperialismo culturale, essa rappresenta un modello utile a quasi tutte le culture musicali, comprese quelle, e sono la maggioranza, che non usano varie voci contemporaneamente.

Tuttavia, i raggiungimenti di quest'arte sono stati ottenuti al costo di grandi sacrifici d'espressione dell'arte musicale occidentale. Ci si è ridotti a un numero fisso di frequenze discretizzate nell'ottava, da cui è impossibile sfuggire, ignorando quarti di tono e altre frequenze comuni ad esempio in oriente. Ci si è limitati a soli due

7. Conversazione privata con Giorgio Mainini.

modi, in contrasto sia con la tradizione europea antica che con la ricchezza dei modi della musica dell'India, ad esempio. I ritmi sono stati ridotti a poche e semplici scelte quali 2/2, 2/4, 3/4, 4/4, 6/8, 9/8, ignorando la ricchezza ritmica dei Balcani e la poliritmia della musica africana. I timbri variati e le inflessioni strumentali sono stati proibiti, come nel caso del bel canto e delle sue sonorità retoriche, imponendo a tutti gli strumentisti ad avere lo stesso suono, l'opposto di quanto ricerca il creatore nel jazz, dove ogni musicista è immediatamente identificabile, sia per la sonorità che per la «storia che racconta». Tutto questo per esaltare e sottolineare l'assemblaggio di suoni, enfatizzando l'armonia, una specie di estetica pura che rimuove quel messaggio emozionale che va oltre alla musica, presente nei canti popolari di tutto il mondo, per fare un esempio quelli afro-americani. E la reazione del pubblico non si è fatta attendere, preferendo per l'intrattenimento musicale prodotti di altre culture, con più enfasi ritmica; ciò è drammatico se si pensa che l'ultimo ballo popolare senza influenze non occidentali è il valzer viennese, dopo di che sono quasi tutti di origine africana.

La musica occidentale, e la sua sorella scientifica, la musicologia, ha il merito di aver illuminato discipline al di fuori della musica. Secondo un musicologo di aderenza tonale [Ref.11], sia il concetto del suono che quello del tempo musicale ha radici nella percezione del suono e della musica. Ad esempio, anche se innumerevoli brani di musica di ogni tipo – la *Primavera* di Vivaldi, l'*Internazionale*, *O sole mio*, la *Quinta Sinfonia* di Beethoven – iniziano prima del primo battito della prima battuta, dopo un attimo l'orecchio si sincronizza e identifica istintivamente il primo battito – perfino in persone che non ne sono coscienti.

Quanto al mondo tonale, esso rappresenta secondo questo teorico i primi passi per la definizione di una nuova geometria basata su criteri uditivi, a differenza di quella corrente basata su quanto si vede. Ad esempio, mentre nello spazio due corpi solidi sono localizzati e impenetrabili, nel mondo tonale un suono occupa tutto lo spazio, e se ne può aggiungere un altro, e un altro ancora, ecc. È evidente dunque che le leggi geometriche dello spazio auditivo sono diverse da quelle del visivo. Lasciamo ai matematici il compito di sviluppare queste nuove geometrie.

17. Referenze

[1] Lauro Filipponi, *La matematica dei sistemi di accordatura – Uno studio sui rapporti tra matematica e musica*, Bollettino dei Docenti di matematica, No. 42, Maggio 2001, pag. 83-103, e No. 43, Dicembre 2001, pag. 95-106.

[2] Denis Baggi, *Capire il jazz – le strutture dello Swing*, Quaderni del CIMSI, SUPSI, Manno, 2001.

[3] Yap Siong Chua, *Composition Based on Pentatonic Sacles: A Computer Approach*, IEEE Computer, luglio 1991, p. 67-71, Guest Editor Denis Baggi.

[4] Denis Baggi, *Realization of the Unfigured Bass by Digital Computer*, Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley, pubblicata da Xerox University Microfilms, Ann Arbor, Michigan, 1974.

[5] Carlo Pedron, *Nuova serie di esercizi per lo Studio Progressivo del Basso senza numeri*, Carish, Milano, Italia, N. 14847

[6] Denis L. Baggi, *NeurSwing: a Connectionist Workbench for the Investigation of Swing in Afro-American Jazz*, in ***Readings in Computer Generated Music***, IEEE CS Press, Los Alamitos, CA - Washington - Brussels - Tokyo, ISBN 0-8186-2747-6 (case) - ISBN 0-8186-2746-8 (microfiche), agosto 1992. Libro compilato da D.Baggi. Vedi anche IEEE COMPUTER, luglio 1991, D.Baggi Ed., con CD audio, entrambi disponibili presso la biblioteca della SMASI.

[7] Denis L. Baggi, *Harmony Machine, a microprocessor-based system for real time auto-*

matic composition of pieces in four part harmony, brevetto US 4,468,998, 1984, vedi http://www.google.com/patents?id=V7l1AAAAEBAJ&dq=harmony+machine .
[8] Guy L. Steele Junior, *Common LISP, The Language*, Digital Equipment Corporation, 1984.
[9] Daniel P. Friedman, Matthies Felleisen, *The Little LISPer*, MIT Press, 1987.
[10] Fred Hoyle, *La nuvola nera*, Universale Economica Feltrinelli, 2003, da *The Black Cloud*, Heinemann, Londra, 1957.
[11] Victor Zuckerkandl, *Sound and Symbol – Music and the External World*, Princeton University Press, 1976.

Appendice: errata corrige della prima parte[8]

p. 25, ultima riga della sequenza (6):
la nota deve essere un La♯, e non un un Do♯

p. 26, secondo paragrafo dopo la sequenza (7):
... Fa♯-Do♯-Sol♯-Re♯-La♯-Mi♯=Fa – la penultima nota è Mi♯, e non Mi.

p. 32, sotto la figura 5:
... Con la stanghetta e annerito, abbiamo il ***quarto...*** (anche la metà ha la stanghetta)

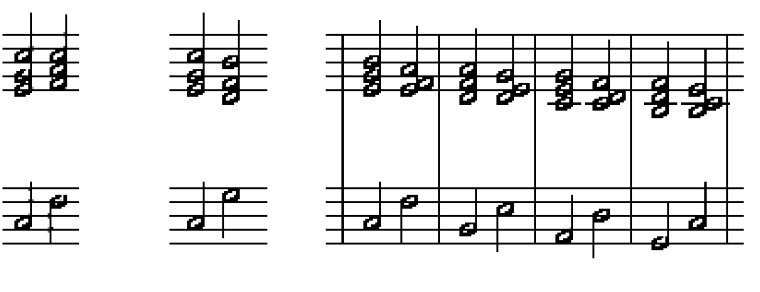
p. 34, prima del secondo paragrafo:
All'inizio della quinta battuta abbiamo un Sol sotto il Do centrale che dura un trentaduesimo con due stanghette orizzontali seguito fa varie pause, e da un La quarto puntato che dura pertanto tre ottavi.

p. 36, spiegazione della cifratura 7:
... accordo con terza, quinta e settima sul basso. Il caso del sesto accordo è quello della ***settima di dominante***, che risolve e forma ***una cadenza***. Anche se può avere pertanto quattro note distinte, spesso si tralascia la quinta e si raddoppia il basso, come nel caso del secondo accordo della terza battuta

è il primo rivolto...

p. 36, Figura 14: nel secondo accordo del secondo esempio, l'*alto* – terza nota contando dal basso – dovrebbe essere un Fa, non un Sol.

Nell'esempio errato, il Sol è comune ad entrambi gli accordi e pertanto non vi è moto contrario.



8. Vedere il numero 60 di questa rivista, da pagina 21 a pagina 42.

2. Matematica per informatici e informatica per matematici

Mauro Prevostini[1]

Mathematics and informatics (or computer science) are disciplines very connected to each other. Informatics is based on mathematics fundamentals and applies them to several areas of the advanced research and everyday life. Just think to the automatic elaboration of information which is present everywhere even if we don't perceive it.

There are usually many discussions about which kind of mathematics may be useful to the informaticians or which informatics concepts and tools could help a mathematician. This is a very interesting topic that I will try to develop without any ambition to give an exhaustive answer, but with the goal to provide the reader some thinking tools through small examples.

La matematica e l'informatica sono due discipline scientifiche molto legate tra loro. L'informatica applica i concetti fondamentali della matematica a molti aspetti della ricerca avanzata e della vita di tutti i giorni. Basti pensare all'elaborazione automatica delle informazioni – da cui la parola «informatica» fusione delle parole: informazione e automatica – che è presente in ogni momento della nostra quotidianità anche se non sempre ce ne accorgiamo.

Si discute spesso su che tipo di matematica sia utile agli informatici oppure quali concetti e strumenti informatici possano essere di ausilio ad un matematico. È un tema molto interessante e spesso dibattuto che cercherò di sviluppare senza nessuna pretesa di dare una risposta esauriente ma con l'obiettivo di fornire ai lettori alcuni spunti di riflessione attraverso piccoli esempi.

La matematica per gli informatici

Avrete certamente già sentito parlare di logica matematica, analisi numerica, teoria della computabilità (o calcolabilità), linguaggio formale, matematica discreta, teoria dei grafi, crittografia, probabilità e statistica.

Essi sono solo alcuni degli aspetti che compongono i fondamenti matematici dell'informatica, disciplina giovane che ha sviluppato le sue radici iniziali in am-

1. Laureato in ingegneria elettrotecnica presso il Politecnico Federale di Zurigo nel 1994. Ha lavorato come progettista di reti telematiche alla Banca della Svizzera italiana. Dal 1997 al 2001 è stato responsabile del gruppo di test e integrazione presso il dipartimento di ricerca e sviluppo della Fantastic Corporation, azienda/startup internazionale, con sede a Manno e Zugo, produttrice di software nel settore della distribuzione di contenuti multimediali su banda larga. Dal 2001 lavora presso l'Università della Svizzera italiana, dapprima come Project Manager per la realizzazione della Facoltà di Scienze informatiche di cui, dal 2004, ricopre la funzione di Program Manager. Dal 2005 è membro di comitato di ated-ICT Ticino, l'associazione degli informatici del Canton Ticino. Nel corso del 2008 è stato il coordinatore dell'iniziativa informatica08 per il Ticino.

bito accademico soprattutto nei dipartimenti di matematica all'interno delle facoltà di scienze di alcune tra le università più prestigiose del mondo. In seguito diventata «indipendente», l'informatica ha comunque mantenuto uno stretto ed inscindibile rapporto con la sua «antenata».

Gli albori dell'informatica risalgono a circa sessant'anni fa, quando i ricercatori dell'epoca, per risolvere problemi matematici in modo automatico, utilizzavano calcolatori grandi come un appartamento ma molto meno veloci e potenti di un telefonino dei giorni nostri.

L'applicazione della matematica attraverso l'informatica ha aperto le porte alla risoluzione di innumerevoli problemi di varia natura. Basti pensare alle simulazioni al computer, che permettono di riprodurre condizioni ambientali impossibili da ottenere in laboratorio, oppure di simulare anni di ricerche in pochi secondi.

La simulazione informatica è, ad esempio, molto importante nell'ambito della medicina, che attraverso le **scienze computazionali**, permette di sviluppare algoritmi in grado di simulare e visualizzare vari comportamenti. Ad esempio quelli degli organi vitali del corpo umano dando la possibilità ai ricercatori di compiere esperimenti virtuali (figura 1). I risultati ottenuti vengono in seguito applicati all'essere umano evitando test rischiosi sulle persone prima di conoscerne gli effetti, a volte nocivi e pericolosi per la salute.

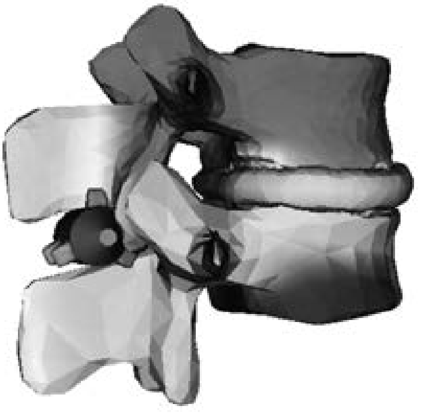


Figura 1 Modelli biomeccanici eterogenei. Stenosi spinale trattata inserendo uno spaziatore tra due vertebre (*cortesia del Prof. Rolf Krause, Istituto di Scienze Computazionali della Facoltà di Scienze informatiche dell'Università della Svizzera italiana di Lugano*)

Un altro esempio è l'applicazione dei calcoli statistici nell'ambito dell'**informatica finanziaria**. Le analisi finanziarie vengono da tempo svolte con l'ausilio del calcolatore che in un batter d'occhio è in grado di generare analisi e previsioni di andamenti borsistici e quindi fornire un supporto a coloro che devono decidere. A tal proposito esistono degli strumenti informatici comunemente chiamati DSS (Decision Support System).

Altri settori applicativi dell'informatica prevedono quasi sempre la presenza di una o più **reti di computer** (figura 2) che, connessi tra loro, permettono in particolare di velocizzare la comunicazione tra le persone e quindi la disponibilità quasi immediata di qualsiasi tipo di informazione. Internet ne è l'esempio più eclatante. Ebbene, alla base di Internet troviamo alcuni dei fondamenti che citavamo all'inizio di questo nostro piccolo viaggio, ovvero la **matematica discreta** ed in particolare la **teoria dei grafi** che permette ad esempio di capire quale sia il percorso più corto all'interno di una rete informatica per trasferire un'informazione dal punto A al punto B.

Figura 2 Reti di computer

Abbiamo accennato poco fa alla comunicazione e allo scambio di informazioni e quindi come non pensare alla **sicurezza ed alla protezione dei dati**? Anche questo un tema tra i più attuali nell'informatica. Facile ormai intuire che anche in questo caso la matematica è fondamentale, in particolare grazie alla **crittografia** che permette lo scambio di dati in maniera sicura, ovvero impedendo che terze persone possano intercettare informazioni sensibili e utilizzarle per scopi illeciti. L'informatica applicata alla crittografia permette all'utente di proteggere i propri dati in modo trasparente e automatico semplicemente componendo una serie di codici attraverso una tastiera.

Un esempio banale è l'appropriazione illecita delle credenziali che consentono di accedere al proprio conto bancario attraverso un collegamento Internet. Per evitare che questo accada, la comunicazione tra l'utente e l'istituto bancario attraverso un browser avviene in maniera cifrata. Durante questa operazione vengono utilizzati algoritmi crittografici complessi seguendo i principi di chiave pubblica e privata che si basano ad esempio sulle funzioni *hash*. Si tratta di funzioni iniettive che permettono una corrispondenza tra una stringa di lunghezza arbitraria – che potrebbe essere una password – ad una stringa di lunghezza predefinita che risulterà essere illeggibile ed incomprensibile agli occhi del truffatore.

Per un'ampia panoramica dei fondamenti matematici dell'informatica si segnala la seguente pagina web http://it.wikipedia.org/wiki/Fondamenti_matematici_dell'informatica.

L'informatica per i matematici

Dagli albori dell'informatica i matematici la utilizzano per eseguire simulazioni e calcoli complessi. Un esempio classico è l'utilizzo dello strumento informatico per determinare con sempre maggior precisione il valore di pi-greco oppure del numero di Euler. Con il passare degli anni la complessità delle simulazioni progettate dai matematici ha avuto uno sviluppo esponenziale favorendo lo sviluppo di strumenti software molto avanzati e sofisticati.

Vale anche la pena ricordare il contributo dell'informatica alla matematica teorica, per esempio nella dimostrazione di congetture come quella dei quattro colori (vedi http://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_dei_quattro_colori), oppure come l'informatica abbia permesso di comprendere meglio nuovi oggetti matematici come i frattali (http://it.wikipedia.org/wiki/Frattale) permettendone dapprima la visualizzazione e poi l'esplorazione.

Date queste premesse proviamo ora a capire che tipo di informatica può essere utile ad un matematico.

A tal proposito credo sia opportuno dividere il discorso in due parti. Dapprima è necessario capire quali siano i **concetti fondamentali dell'informatica** ed in secondo luogo illustrare alcuni **strumenti** che offre l'immenso panorama.

L'informatica, oltre ad avere i suoi fondamenti ben radicati nella matematica, possiede concetti fondamentali propri che vengono insegnati in tutte le facoltà universitarie. Uno di questi è innanzitutto individuabile nei **fondamenti della programmazione** che spiegano come scomporre ed analizzare un problema, presentano le tecniche di ricorsione, astrazione e iterazione, e introducono alla programmazione di base in cui si imparano i cicli iterattivi, le strutture dei dati e gli algoritmi.

Come tutti sanno un programma informatico è composto da una serie di istruzioni, comunemente chiamata codice (figura 3), che, detto in maniera molto semplice, permettono alla persona che le assembla di dire al calcolatore che cosa deve fare.

```
#include <iostream>
void main()
{
  cout << «Hello World!» << endl;
  cout << «Benvenuti alla programmazione C++» << endl;
}
```

Figura 3 Classico esempio di codice C/C++ per scrivere «Hello World» a monitor.

Il calcolatore a sua volta eseguirà in maniera sequenziale o parallela, a dipendenza del programma, questi ordini, e al termine verrà chiamato a produrre un risultato. Acquisire le solide basi dei fondamenti della programmazione permette ai progettisti di individuare l'approccio migliore alla risoluzione di un problema e di programmare le attività della macchina in maniera efficace. Fondamentale è l'applicazione dei **diagrammi di flusso** (o **algoritmi**) (vedi figura 4), altro concetto alla base dell'informatica, che permette di applicare un metodo per risolvere un problema che può essere realizzato da un programma informatico.

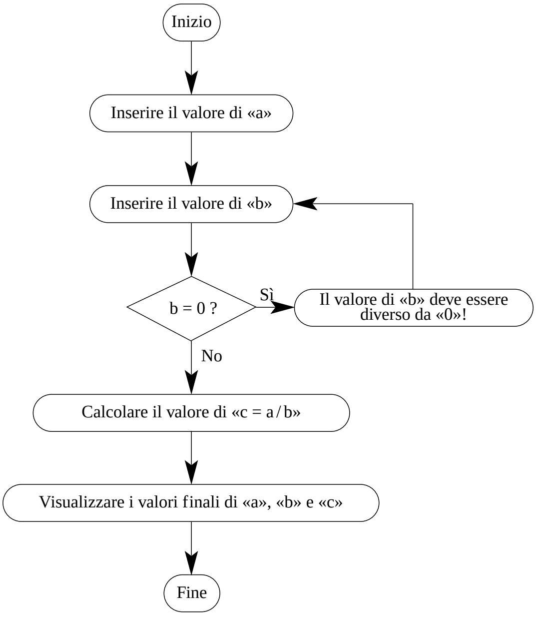


Figura 4 Esempio di un semplice diagramma di flusso che impedisce la divisione per zero di un numero.

Per fare in modo che le istruzioni che forniamo alla macchina vengano eseguite correttamente, nella maggior parte dei casi, è necessario tradurre il nostro codice in un linguaggio ad essa comprensibile. Ecco che sono fondamentali a questo proposito i **compilatori**, software particolari dedicati a questa funzione che permettono lo sviluppo e l'esecuzione di programmi in modo indipendente dalla macchina che decidiamo in seguito di utilizzare.

Oltre a ciò, possedere una conoscenza generale dei **sistemi operativi** è un altro tema importante per un matematico in quanto gli permette di capire in che modo vengono eseguiti i programmi su un calcolatore, il quale, senza il sistema operativo, sarebbe solamente un ammasso di inutili circuiti elettronici.

Inoltre la conoscenza di come funzionano le **reti di computer**, già citate in precedenza, è fondamentale per qualsiasi tipo di strumento informatico. Al giorno d'oggi ogni computer, telefonino o sistema informatico è collegato in rete e dialoga con altri sistemi scambiando una moltitudine di dati in maniera automatica.

Non va dimenticato che alla base di qualsiasi soluzione informatica vi è l'applicazione delle metodologie per la loro realizzazione. L'apprendimento di questi metodi viene dato in particolare dall'**ingegneria del software,** disciplina che si propone di definire i processi produttivi di una soluzione informatica in modo tale che essa soddisfi i bisogni dell'utente, sia sicura, affidabile e manutenibile. In particolare l'ingegneria del software, che viene insegnata presso le università, fornisce gli strumenti di base al progettista in modo tale che sia in grado di: organizzare in maniera ottimale i progetti di sviluppo del software, analizzare i requisiti che una soluzione deve possedere, verificare che la soluzione finale soddisfi tali requisiti solitamente proposti dall'utente/cliente.

E veniamo infine all'universo degli strumenti informatici. In commercio, oppure scaricabili liberamente dalla rete, è presente tutta una serie di applicativi utili in ambiti come la simulazione, il calcolo integrale, probabilistico o statistico, oppure in aree molto più avanzate a livello di ricerca scientifica che spaziano dalla visualizzazione tridimensionale alle scienze della vita.

Un matematico, ma non solo, riesce facilmente ad usufruire di strumenti per l'elaborazione di formule di una certa complessità grazie ai **fogli di calcolo** come quelli di Excel oppure gli Spreadsheets di OpenOffice. Se le esigenze sono più ambiziose sono disponibili strumenti del calibro di **MatLab** oppure **Octave**, quest'ultimo scaricabile gratuitamente, che permettono di eseguire operazioni complesse di calcolo numerico e analisi statistica, di visualizzare il comportamento di funzioni, di elaborare matrici oppure di realizzare algoritmi. Ad esempio Octave può essere utile nello studio di successioni numeriche di numeri irrazionali come pi-greco che presentano un numero infinito di decimali, oppure nella ricerca dei numeri primi, o ancora nello studio e simulazione di algoritmi di crittografia. In particolare GNU Octave è un linguaggio di alto livello (*high-level language*), compatibile con Matlab, che permette, attraverso un'interfaccia utilizzabile tramite linee di comando, la risoluzione di problemi lineari e non-lineari. Inoltre permette di risolvere problemi comuni di algebra lineare e di realizzare grafici e funzioni (figura 5). Può essere esteso e personalizzato attraverso righe di codice scritte nel linguaggio proprietario di Octave oppure è in grado di caricare moduli scritti in C/C++, Fortran e altri **linguaggi di programmazione**.

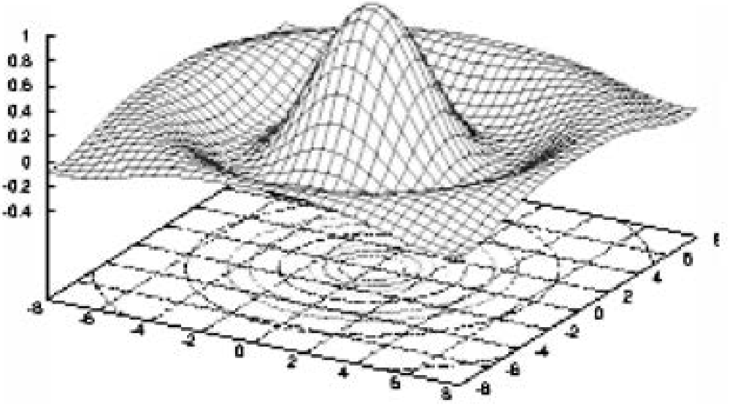


Figura 5 Esempio della visualizzazione di una funzione complessa con Octave

I linguaggi di programmazione sono infatti spesso utili al matematico per realizzare soluzioni personalizzate di qualsiasi natura e non solamente legate ad Octave. Tuttavia, per poter sfruttarne al meglio le potenzialità, il matematico dovrebbe acquisire soprattutto le competenze di ingegneria del software e dei fondamenti della programmazione. Il connubio di competenze matematiche di alto livello abbinate a quelle dell'informatico specializzato forma un profilo professionale molto ricercato in particolare nel settore delle scienze computazionali.

Conclusione

Abbiamo dunque visto come l'informatica abbia i suoi fondamenti ben radicati nella matematica ma d'altro canto possegga concetti propri molto utili al matematico.

Concludendo è utile ribadire l'intima simbiosi che esiste fra la scienza maestra e la figlia più giovane grazie alla quale, la matematica ha ritrovato una seconda giovinezza che si contretizza in innumerevoli applicazioni ad uso quotidiano.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare la SMASI, in particolare Giorgio Mainini e Gianfranco Arrigo, per l'opportunità datami attraverso la preparazione di questo articolo. Ringrazio inoltre Antonio Taddeo, Enrico Gulfi e Roberto Vitalini per le loro revisioni e per avermi dato qualche interessante spunto di riflessione.

3. La SMASI presenta la Mostra San Gaku Tra arte e scienza, la matematica tradizionale giapponese durante il periodo di Edo (1603-1868)

Gianfranco Arrigo[1]

The Southern Switzerland Mathematical Society (SMASI), during the biennial "The month of Culture" organized by the City of Lugano, offers an exhibition on Japanese mathematics dating back to the period between the seventeenth and the mid-nineteenth century. The term San Gaku means the wooden painted boards dealing with mathematical topics. These boards can still be seen in many Japanese temples and they represent a substantial review of classical Japanese mathematics.

Introduzione

La Società Matematica della Svizzera Italiana (SMASI) da qualche anno partecipa alla rassegna biennale «Il mese della cultura» organizzato dalla Città di Lugano. Il tema di quest'anno è il Giappone. La SMASI ha colto l'occasione per approfondire le poche conoscenze che di solito si hanno alle nostre latitudini sullo sviluppo storico della matematica nelle culture extra-europee. Un bel gruppo di lavoro composto di soci e spinto dalla determinazione di Maurice D. Froidcoeur e di Emanuele Delucchi, si è messo all'opera già nella scorsa primavera, così che la mostra ha potuto essere realizzata e presentarsi ufficialmente al pubblico l'8 settembre, il giorno stesso dell'apertura ufficiale del Mese della cultura, nel padiglione Limonaia di Villa Saroli.

Questa gradita coincidenza ha fatto sì che molta gente venuta per seguire l'inaugurazione di «mese cult10» – così è stata denominata la manifestazione di quest'anno (vedi figura 1) – ha avuto la sorpresa di poter visitare una mostra dai contenuti matematici e storici, che pochi avrebbero immaginato di vedere… e di godersi. Proprio così, infatti quel giorno, molti intervenuti hanno dovuto ammettere che la matematica presentata in questo modo piace, soddisfa e qualcuno ha usato persino l'espressione «entusiasma».

Figura 1 I due enti promotori della mostra.

1. Presidente della Società Matematica della Svizzera italiana (SMASI).

Anche gli oratori ufficiali intervenuti alla cerimonia di apertura «di mese cult10», nell'ordine il prof. Renato Reichlin, responsabile del settore spettacoli del Dicastero Attività Culturali della Città di Lugano, e la capodicastero on. Giovanna Masoni hanno avuto parole di elogio per la nostra realizzazione. A conclusione è intervenuto il presidente della SMASI che ha illustrato in grandi linee il significato della mostra stessa.

Figura 2 Il padiglione Limonaia di Villa Saroli che ha ospitato la mostra dall'8 al 26 settembre.

Figura 3 Particolare dell'entrata della mostra. In alto un San Gaku nostrano. Sul portone a sinistra il nome della società e a destra San Gaku, in giapponese.

Nelle tre settimane di apertura nell'accogliente Limonaia (vedi figura 2) si è recato un pubblico parecchio eterogeneo e questo ha fatto piacere ai realizzatori, perché la SMASI in questi anni è molto attenta a promuovere un'immagine della matematica ben diversa da quella di solito concepita dalla gente comune. La matematica, se praticata in un ambiente adatto e vissuta liberamente – per esempio senza la necessità assoluta di raggiungere determinati risultati e nemmeno l'ansia di essere continuamente valutati – può dare grandi soddisfazioni anche a persone che non si ritengono adatte a questo tipo di attività. Praticando la matematica ci si può divertire sviluppando nel contempo diverse capacità mentali molto utili nella vita corrente e arricchendo la propria formazione culturale in un ambito fondamentale e non sempre sufficientemente conosciuto.

Figura 4 L'on. Giovanna Masoni in visita alla mostra segue le spiegazioni del presidente.

Figura 5 Il pubblico si è potuto avvalere delle spiegazioni di un membro della SMASI, sempre presente negli orari di apertura.

Per la SMASI queste affermazioni non rimangono solo nel roseo mondo delle buone intenzioni, ma ogni tanto si concretizzano. Ciò avviene regolarmente durante i corsi offerti agli insegnanti, nei pomeriggi matematici che la società offre sia alle classi della scuola elementare sia agli studenti delle scuole medie, come anche in occasioni particolari come appunto la mostra *San Gaku*. L'attenzione però va anche al pubblico in generale al quale la SMASI offre la possibilità di recarsi nella sua sede luganese di via Torricelli 19: alcuni locali contenenti la Matoteca – una biblioteca specializzata ma anche ricca di testi divulgativi – e salette attrezzate per lavori individuali o di gruppo con possibiltà di usare le apparecchiature informatiche[2].

2. La sede è aperta al pubblico tutti i mercoledì dalle 17 alle 19. È possibile usufruire dei suoi servizi in altri momenti su prenotazione. Tutti i servizi sono gratuiti.

Il quadro teorico della mostra[3]

Mentre nella nostra area geografica, dopo il sistema di numerazione romano, si impone quello posizionale a base dieci, rappresentato con le dieci cifre comunemente dette arabe – perché importato dall'Africa settentrionale – ma in realtà di origine indiana, i giapponesi assumono la numerazione decimale cinese, rappresentata con le cifre *sangi*.

Da noi, grazie all'opera *Liber Abaci* di Leonardo Pisano, detto il Fibonacci, datata 1202, il sistema di numerazione decimale – con i relativi algoritmi di calcolo, che a scuola sono detti «calcoli in colonna» – si espande gradatamente nei secoli successivi e soppianta completamente l'uso dell'abaco.

In Giappone, l'opera per certi versi equivalente è del 1592, porta la firma di Suanfa Tongzong e un titolo significativo che può essere tradotto in *Trattato sistematico di aritmetica*. Occorre notare che questi metodi di calcolo permettevano anche la risoluzione di equazioni polinomiali, comprese quelle di terzo grado, da noi pienamente risolte grazie a Girolamo Cardano che le inserisce nel suo trattato *Ars Magna*. Si sa che in realtà il metodo gli viene trasmesso da Niccolò Tartaglia[4], ma che forse il suo scopritore è un tale di nome Scipione dal Ferro. Siamo nel XVI secolo, che segna l'inizio di un grande sviluppo della matematica occidentale, grazie appunto alla generale adozione del nuovo modo di scrivere i numeri e di calcolare e all'introduzione della *scrittura algebrica*, della quale si ricorda protagonista il francese François Viète (1540-1603).

La nascita della matematica classica giapponese è solitamente fatta coincidere con la pubblicazione, nel 1627, dell'opera *Jinko-ki* (Trattato immutabile). A partire dal 1615, lo shogun Tokugawa trasferisce la capitale da Kyoto a Edo (l'odierna Tokyo) e impone una drastica riduzione delle relazioni con l'estero. Questo periodo storico, che si protrae fino al 1868 (tanto per fissare le idee) viene ricordato con l'appellativo di «Grande Pace» e genera lo sviluppo autonomo di una matematica propriamente giapponese, detta *wasan*.

La figura più rappresentativa della matematica *wasan* è Seki Takakazu (1642-1708). Figlio di un samurai, mostra un talento precoce per la matematica che studia da autodidatta partendo da testi cinesi e dal citato *Jinko-ki*. Seki anticipa non pochi problemi elaborati poi dai matematici occidentali. Per esempio, è il primo a usare i determinanti per risolvere sistemi di equazioni lineari e nel 1685 propone un metodo di risoluzione delle equazioni razionali intere che circa un secolo dopo, in Occidente, è presentato dall'inglese William Horner. Insieme al suo allievo Takebe Katahiro affronta il problema del calcolo di lunghezze e aree di figure curvilinee; i due perfezionano metodi di calcolo denominati *Enri*, che potrebbe essere tradotto *Principio del cerchio*. Tutto ciò senza usare il concetto di integrale indefinito, come si sa messo a punto in Occidente da Leibniz e Newton più o meno nello stesso periodo, il XVII secolo.

All'inizio della «Grande Pace» molti samurai, ormai senza occupazione, sono inviati ad amministrare le campagne. Vi portano anche conoscenze tecniche, tradizioni culturali e abitudini sociali fino a quel tempo limitate alla corte imperiale. Fon-

3. Per un approfondimento si veda ad esempio l'articolo che segue, a firma Annick Horiuchi.
4. In una nota poesia, i cui primi versi sono: *«Quando che 'l cubo con le cose appresso / Se agguaglia à qualche numero discreto / Trovan dui altri differenti in esso»*.

dano scuole e trasmettono le conoscenze alle popolazioni. Fra queste, anche parecchie tecniche della matematica *wasan*. Ben presto, alle pareti dei templi, accanto agli *Ema* (tavolette di legno dedicate alle divinità) cominciano ad apparire altre tavolette dipinte, di argomento matematico, dette *San Gaku*, che potremmo tradurre *Riquadri (o tavolette) di matematica*. Essi propongono alla riflessione del visitatore uno o più problemi corredati dalle soluzioni o teoremi con dimostrazione. Nella loro valutazione, anche l'aspetto estetico è importante al punto che i *San Gaku* sono vere e proprie opere d'arte pittorica. Le figure dominanti sono i cerchi, le sfere e il ventaglio, tipiche della tradizione giapponese. I *San Gaku* sono soprattutto importanti veicoli di divulgazione scientifica che testimoniano pure una notevole coscienza didattica. Mediante queste tavolette, gli studenti delle campagne comunicano le proprie abilità ai maestri delle grandi scuole di Edo, alla ricerca costante di nuovi talenti.

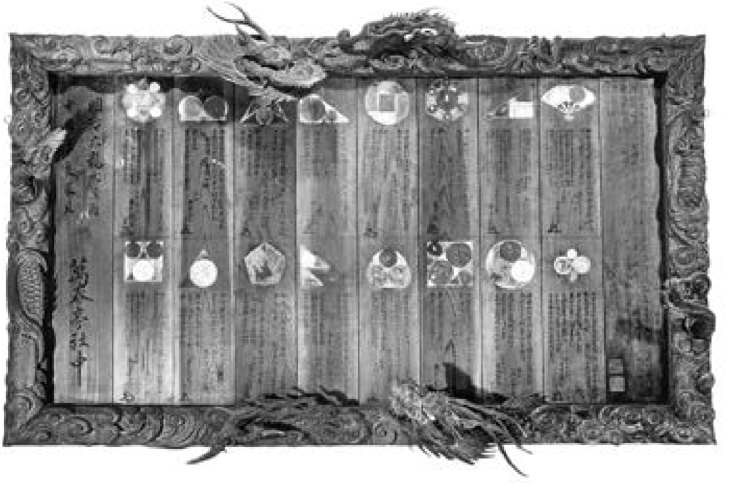


Figura 6 *San Gaku* esposto nel 1873 da Iria Shinjun al tempio di Katayamahiko a Murahisagun (Okayama). Foto di Hidetoshi Fukagawa.

La struttura della mostra

Il corpo principale della mostra si compone di 24 pannelli suddivisi in tre parti.

La prima parte illustra le radici cinesi della matematica classica giapponese. Fra l'altro, il visitatore interessato può scoprire le cifre *sangi*, imparare qualche manipolazione basilare del soroban – l'abaco giapponese – e persino seguire un metodo originale per la risoluzione di un'equazione di terzo grado.

La seconda parte, più sostanziosa, presenta in grandi linee il corpo dei risultati della matematica *wasan*. Un pannello, in particolare, propone l'enunciato del problema cosiddetto «di Josephus», la cui prima attestazione nota è un manoscritto del 1046, conservato nella biblioteca del monastero di Einsiedeln. All'insegnante può interessare anche il pannello successivo sul quale è riportata una versione scolastica, ben più recente, dello stesso problema. Il visitatore ideale non si darà pace prima di aver trovato una soluzione…

In questa sezione si trova può ammirare anche un *San Gaku* che propone un bel problema di geometria piana. In realtà si tratta di una copia di un *San Gaku* esposto nel 1805 al santuario di Sakurai (Aichi), effettuata dagli allievi di Hidetoshi Fukagawa, collega che non finiremo mai di ringraziare per l'aiuto concreto offertoci con grande entusiasmo. Il problema chiede di determinare il raggio di un cerchio (arancione), i lati di un quadrato (rosso) e di un triangolo equilatero (blu) in funzione dei raggi dei cerchi dati (bianco e giallo), tangenti tra di loro e a una data retta[5].

Figura dominante di questo periodo è il già citato matematico Seki Takakazu (1642-1708). Di lui si presenta in modo particolare il calcolo dell'area di due triangoli «ricurvi» ottenuti sezionando un cilindro di rotazione mediante tre piani. Per dare un'idea più precisa del problema, nel pannello successivo si presenta la soluzione con le tecniche occidentali del calcolo integrale.

L'ultima parte è dedicata ai tempi nostri. Cioè, ci si è posti la domanda: di tutta la matematica *wasan*, quali risultati potrebbero ancora rivestire un interesse attualmente? Si presentano due esempi: il lemma di Haruki che permette di ridimostrare il cosiddetto «teorema della farfalla» e il teorema, detto «cinese[6]»

«Consideriamo un qualsiasi quadrilatero inscritto in un cerchio. Scegliamo una diagonale e consideriamo la somma dei raggi dei cerchi inscritti ai due triangoli così ottenuti. Tale somma non dipende dalla diagonale scelta».

L'itinerario scolastico della mostra

08.11-19.11.2010	Scuola Media Bellinzona 2
22.11-03.12.2010	Collegio Papio, Ascona
06.12-17.12.2010	Scuola Media Agno
24.01-28.01.2011	Scuola Media Breganzona
31.01-04.02.2011	Scuola Media Massagno (Scuola Media Lugano-Besso)*
07.02-18.02.2011	ICEC Bellinzona
14.03-18.03.2011	Scuola Media Minusio
21.03-01.04.2011	Scuola Media Gravesano
04.04-16.04.2011	SUPSI - DFA Locarno
09.05-20.05.2011	Scuola Media Morbio (Scuola Media Balerna)*

* Non ospitano la mostra, ma le classi interessate si recano nella sede ospitante.

Si ringraziano

Raiffeisen, Tectel SA, Casagrande Fidia Sapiens Editori Associati, Associazione Ticinese Scuola Attiva, Società Demopedeutica, Hidetoshi Fukagawa, Tony Rothman, Nicolas Delerue, Padre Odo Lang Klosterbibliothek Einsiedeln, Stiftsbibliothek St Gallen, Princeton University Press.

5. Si veda la figura 1 dell'articolo che segue.
6. Sussiste ancora l'influenza delle origini, quantomeno nel chiamare «cinesi» molti teoremi da noi comunemente riconosciuti «giapponesi».

4. La geometria: al servizio degli dei in Giappone?

Le tavolette con problemi matematici appese sotto le avantetti dei templi a poco a poco hanno visto la loro funzione sostituita da preoccupazioni di pubblicità e di dimostrazione di forza[1]

Annick Horiuchi[2]

Today, a conscious traveler can still come across examples of ex-voto which are hanging discreetly under the awnings of Buddhist temples or Shinto shrines; their mathematical content, recognizable by their geometric shapes, leaves no room for doubt, even among those who are not familiar with Japanese characters.

Oggi, un viaggiatore attento può ancora scoprire, appesi discretamente sotto gli avantetti dei templi buddisti o dei santuari *shinto* (una religione animista fondata su credenze nelle divinità locali dette *Kami*), esemplari di ex-voto il cui contenuto matematico, riconoscibile dalle figure geometriche, non lascia adito a dubbi, anche in coloro ai quali non sono familiari gli ideogrammi giapponesi. Questi ex-voto sono *sangaku* o «tavolette matematiche» (vedi la figura 1), conservate ancora a centinaia nell'arcipelago: secondo le ultime stime ce ne sarebbero 813.

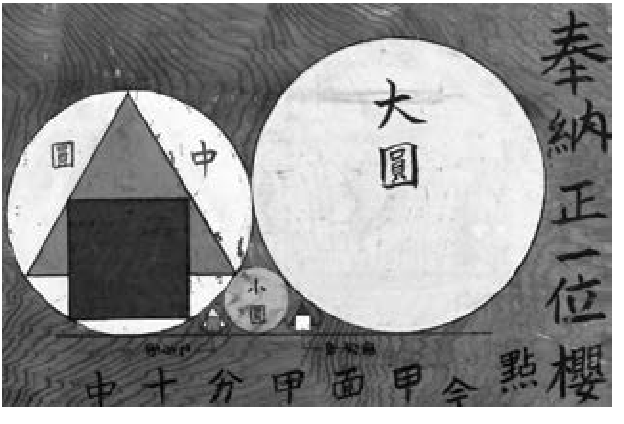


Figura 1 Replica di un San Gaku esposto nel 1805 al santuario di Sakurai (Aichi), effettuata dagli allievi di Hidetoshi Fukagawa. Il problema chiede di determinare il raggio del cerchio arancione, i lati del quadrato rosso e del triangolo (equilatero) blu in funzione dei raggi dei cerchi bianco e giallo. (Gentile concessione di Hidetoshi Fukagawa)

1. Traduzione di Giorgio Mainini. Le figure non sono le stesse dell'articolo originale.
2. Annick Horiuchi dirige il gruppo di ricerche sul Giappone in scienze sociali e umane (GREJA) all'Università di Parigi VII. Vedi anche A. Horiuchi, *Les mathématiques peuvent-elles n'être que pur divertissement? – Une analyse des tablettes votives à l'époque d'Edo*, in *Extrême-Orient, Extrême-Occident*, vol. 20, pp. 134-151, 1998 e *Les Mathématiques*, Belin-Pour la Science, 1996.

Le tavolette visibili oggi risalgono a non prima del XIX secolo, ma si sa che la pratica era già corrente alla metà del XVII secolo. Erano molte migliaia le tavolette che sarebbero state appese all'epoca degli *shogun*[3] Tokugawa (tra il 1600 e il 1868), ma la maggior parte è scomparsa senza lasciare traccia. Per lungo tempo si è creduto che i *sangaku* fossero opera di matematici dilettanti che avrebbero espresso con il loro gesto l'ardente desiderio di migliorare o anche la loro felicità di avercela fatta. Vedremo che studi recenti sfumano questo punto di vista.

Che cosa si trova nelle tavolette? Il loro contenuto e la loro forma sono rimasti sostanzialmente identici dall'epoca in cui sono apparse: si tratta sempre di testi di problemi, proposti da qualcuno, con o senza la soluzione. Questi hanno enunciati relativamente succinti e sono ispirati, nella maggioranza dei casi, da composizioni geometriche complicate, nelle quali quadrati, cerchi o ellissi (e anche sfere e cubi) si intrecciano e si intersecano armoniosamente per il maggior piacere degli occhi.

Le tavolette a geometria variabile

Le soluzioni, quando ci sono, si presentano in forma di ermetici elenchi di operazioni che non lasciano intravedere il ragionamento e il calcolo che le sostengono. I problemi dei *sangaku* sono di difficoltà variabile: alcuni si risolvono facilmente con qualche calcolo algebrico semplice, altri richiedono strumenti di analisi molto più elaborati. I maestri giapponesi erano certamente molto esperti nel campo delle figure nidificate e ciò permetteva loro di distinguere istantaneamente i problemi veramente difficili dalle varianti di problemi noti.

Perché i matematici hanno scelto luoghi sacri per appendervi le loro tavolette? Esse appartengono a una categoria più vasta di oggetti, detti *ema*, che significa «cavalli dipinti». A partire dal secolo VIII gli adepti buddisti o *shintoisti* sostituiscono a poco a poco i sacrifici di cavalli vivi con il dono di tavolette dove l'animale sacro è

3. Il grado di *shogun* è equivalente a quello di generale, cioè ufficiale di più alto grado nell'esercito. L'imperatore del Giappone da Kyoto concedeva questo titolo ai leader delle spedizioni militari contro coloro che non riconoscevano la sua autorità; a partire da Minamoto no Yoritomo (shogun dal 1192), il titolo divenne invece ereditario e cominciò a designare il capo di un tipo di governo militare, bakufo o shogunato. Gli shogun da Yoritomo in poi furono tutti discendenti del clan Minamoto, anche se nel caso del clan Tokugawa tale discendenza, sostenuta dalla famiglia, non è comprovata da fonti storiche. Secondo la Costituzione del Giappone, l'Imperatore (*tenno*, letteralmente «sovrano celeste». Il termine *mikado*, che significa letteralmente «la Porta», era usato nella letteratura di lingua inglese per riferirsi all'imperatore del Giappone: questo uso è ormai obsoleto) è il simbolo della nazione giapponese e dell'unità del suo popolo. È a capo della famiglia imperiale del Giappone. Secondo l'attuale costituzione, l'imperatore è una figura simbolica e cerimoniale della monarchia costituzionale; è, nel mondo, l'unico imperatore in carica. Il ruolo dell'imperatore del Giappone ha sempre oscillato tra quello di un capo religioso di alto grado, con grandi poteri simbolici, e quello di autentico regnante imperiale. È esistito un autentico culto imperiale (l'*arahitogami*) che vedeva l'imperatore come discendente delle divinità. Fino al 1945, i monarchi giapponese sono sempre stati, formalmente, comandanti militari. Tuttavia, contrariamente a quanto accadeva per i monarchi occidentali, essi nella pratica non agivano come tali. Gli imperatori giapponesi sono stati quasi sempre controllati da altre forze politiche, in misura minore o maggiore.

rappresentato (vedi figura 2). Con il passare del tempo, questi «cavalli dipinti» si sono liberati dal legame con l'animale per rappresentare temi profani come scene di battaglia o personaggi celebri. Ciononostante, le tavolette mantengono un fine religioso, nel senso che sono appese o per senso di riconoscenza o per sollecitare l'aiuto dei buddha o di qualcuna delle migliaia di divinità *shinto*.

Figura 2 *Ema* dal tempio di Uchiko, diciannovesimo secolo. (© Nicolas Delerue)

Ma anche questa funzione non è più sentita come indispensabile a partire dai secoli XV e XVI. Artisti in erba usano le tavolette per farsi conoscere e, sotto il regno degli *shogun* Tokugawa, periodo che qui ci interessa, ammirare i «cavalli dipinti» entra a far parte della visita ai templi, alcuni dei quali si dotano di gallerie dedicate proprio a queste nuove forme artistiche. Quanto più il luogo è celebre e frequentato, tanto più i *sangaku* esposti sono numerosi. Per esempio, il tempio di Asakusa a Tokyo, conserva tuttora 215 tavolette, alcune delle quali considerate opere d'arte. Così, non c'è da meravigliarsi se giovani matematici ambiziosi, ma squattrinati, abbiano fatto capo a questo supporto per farsi conoscere.

In effetti, all'inizio del XVII secolo la matematica nell'arcipelago ha il vento in poppa. Riunificato sotto l'autorità dello *shogun* Tokugawa, il Giappone è all'alba del più lungo periodo di pace della sua storia. Grazie a opere importate dalla Cina o riscoperte sugli scaffali delle biblioteche, le tradizioni scientifiche si costruiscono o ricostruiscono su nuove basi. La matematica fa parte del grande movimento che ricorda il Rinascimento in Occidente. Le ricerche in matematica raggiungono la vetta negli ultimi decenni del XVII secolo con l'apparizione del grande matematico Seki Takakazu (?-1708) e del suo non meno brillante discepolo Takebe Katahiro (1664-1739). È nel campo delle tecniche di soluzione algebrica che i progressi sono più spettacolari. Con Takebe i giapponesi esplorano anche il terreno dell'analisi infinitesimale. Questo interesse per la scienza del calcolo si traduce in una crescita delle pubblicazioni in questo campo e nel proliferare di «scuole» di matematica, dove accorrono gli studiosi alla ricerca di un insegnamento completo.

Figura 3 Ritratto del matematico Seki Takakazu.

All'epoca le scuole non sono luoghi dove si tengono corsi collettivi. Gli studenti sono spesso lasciati a sé stessi per risolvere i problemi e il maestro si accontenta di indicare a ciascuno qualche traccia di riflessione. Ciononostante il legame che unisce lo studente alla scuola è molto più forte ed esclusivo di quanto lo sia oggi. Una delle ragioni è la seguente: ogni scuola vigila gelosamente sul suo *corpus* di conoscenze, che non rivela se non con il contagocce e solo ai più meritevoli. Quindi i metodi di soluzione più elaborati sono riservati a una piccola cerchia di discepoli. Solo quelli che avranno raggiunto un livello di conoscenze equivalente o superiore a quello del maestro potranno, a loro volta, aprire una scuola, e uno solo di loro succederà al maestro alla testa della scuola. Nella capitale Edo, l'antico nome di Tokyo, la scuola detta di Seki gode del massimo prestigio. Anche se Seki non ne è il fondatore, questa scuola è l'unica a detenere l'integralità dell'opera del grande maestro, opera peraltro pubblicata solo in parte. Il *corpus* della scuola comprende anche le opere degli illustri discepoli che gli sono succeduti e che hanno approfondito i suoi metodi.

Una simile organizzazione, rigida e chiusa verso l'esterno, non ha sempre raccolto l'unanimità dei matematici. Alcuni, persino nel seno della scuola di Seki, optano deliberatamente, senza tema di biasimo, per una larga diffusione delle conoscenze. Alla fine del XVIII secolo la regola del segreto è sempre meno rispettata, per la pressione di una forte domanda di educazione nel paese, soprattutto nelle zone rurali. La logica economica spinge le scuole a ingrandirsi e a estendere la loro influenza in regioni lontane. A questo scopo si mettono in contatto con i maestri di provincia o inviano maestri itineranti incaricati di reclutare clientela e di condurla verso la capitale. Di conseguenza la capacità di una scuola di farsi conoscere lontano e in fretta diventa una sfida della massima importanza. È in questo contesto socio-economico che le tavolette conoscono un successo straordinario. Si possono allora distinguere schematicamente tre funzioni delle tavolette.

Il ruolo delle tavolette

La prima funzione, probabilmente la più antica, è quella di far conoscere i giovani talenti isolati e sconosciuti. Per costoro, appendere la soluzione di un problema difficile in un luogo molto frequentato è un modo efficace di attirare l'attenzione su di sé. Così ha fatto il matematico Aida Yasuaki (1747-1817) quando decide di farsi conoscere nella capitale. Aida è un *samurai* originario di Yamagata, pieno di ambizioni ma senza risorse, che ha imparato la matematica da un piccolo maestro di campagna. Nel 1781 espone la sua prima tavoletta nel santuario del monte Atago che, all'epoca, era uno dei punti di ritrovo favoriti dai matematici. Il suo obiettivo è raggiunto, perché quando, qualche tempo dopo, bussa alla porta di Fujita Sadasuke (1734-1807), rappresentante ufficiale della scuola di Seki, il suo nome è già noto.

Figura 4 Ritratto del matematico Aida Yasuaki

A questo punto interviene la seconda funzione delle tavolette: quella di lanciare sfide e sottomettersi alle critiche. La leggenda narra che, quando Aida si presenta davanti al più anziano Fujita per chiedergli di prenderlo come suo allievo, il maestro esige che egli corregga l'errore che ha commesso nella soluzione del problema di Atago. Questa umiliazione è all'origine di un conflitto storico che opporrà, per interposti discepoli, i due matematici per tutta la vita. Per tutta la sua carriera (2000 fascicoli redatti in 30 anni!), Aida pubblicherà senza tregua «rettificazioni» ai problemi risolti da Fujita, il quale, da parte sua, non si toglierà il piacere di «rettificare» le «rettificazioni» del suo avversario. Questa guerra dichiarata alla scuola di Edo, di gran lunga la più prestigiosa, ha permesso ad Aida di costruire la propria reputazione. Sul piano scientifico è difficile designare il vincitore, perché c'è stata molta malafede da una parte e dall'altra. Il problema di Aida all'origine della polemica non presentava alcun errore, ma soltanto qualche goffaggine, dovuta a una cattiva padronanza del vocabolario tecnico. In questa lotta spettacolare si leggono soprattutto il gusto smodato per la «giostra matematica» e il ruolo assunto dalle tavolette nella comunicazione fra i dotti. In un'epoca nella quale non esistono periodici, le tavolette consentono ai matematici di tenersi al corrente dei problemi alla moda e di reagire rapidamente alle sfide. Le sfide più frequenti concernono problemi senza soluzione, detti «problemi ereditati», o, in giapponese, *idai*.

Tuttavia, anche i problemi già risolti possono dar luogo a lotte. Quando la soluzione è giudicata maldestra e pesante, facente ricorso a una equazione di grado inutilmente alto, essa può essere oggetto di una «rettificazione» da parte di un altro, gesto che sarà vissuto come un'umiliazione da chi l'ha proposta. La «rettificazione» poteva essere scarabocchiata su un foglio di carta e attaccata alla tavoletta. Una stessa tavoletta poteva talvolta subire molte rettificazioni o parecchie osservazioni da parte dei matematici.

L'intensa attività intorno alle tavolette appare nelle raccolte di problemi che vedono la luce verso il 1790. La prima raccolta di questo tipo, intitolata *Trattato matematico delle tavolette sacre* (1789), è pubblicata da Fujita, il grande maestro della scuola di Seki. Ci si trovano numerosi enunciati di problemi esposti nel santuario del monte Atago, specialmente di quelli che erano stati occasione di lotte conclusesi a vantaggio della scuola di Seki.

Le soluzioni proposte dalle altre scuole subiscono invariabilmente il supremo affronto di essere giudicate «fuori strada». Il successo della raccolta, seguita da edizioni più complete, è prova di quanto sia importante, per le scuole dell'epoca, mostrare la loro supremazia nel campo delle tavolette. Per raggiungerla, non si esita a ricorrere a metodi disonesti, quali l'introduzione di errori nelle soluzioni dei concorrenti per poi attribuirsi il merito di averli corretti.

La funzione pubblicitaria

Ciò ci conduce direttamente alla terza funzione delle tavolette: la pubblicità delle scuole. Tutti i testi dei problemi nella raccolta di Fujita sono firmati, ma si tratta di solito di sconosciuti. I loro nomi sono preceduti da qualche elemento che renda conto dell'influenza della scuola: per un *samurai* della capitale si indicherà il suo feudo, per un contadino o un commerciante il suo paese d'origine… Più che le identità degli autori, relegate alla fine della tavoletta, i testi mettono principalmente in evidenza il nome del maestro e la sua ascendenza. Così, nel primo fascicolo del *Trattato delle tavolette sacre*, tutti i problemi sono attribuiti a discepoli di Fujita, presentato come «il quarto della stirpe dei rappresentanti della scuola di Seki». Sorge allora la domanda se non si tratti in realtà di autori di facciata, e se non sia lo stesso maestro all'origine di tutti i problemi, tanto più che la soluzione proposta brilla sempre per un alto grado di concisione.

Una cosa è certa: le tavolette, reali o fittizie, contribuiscono alla promozione della scuola nella capitale. Il lungo elenco di discepoli che si sgrana sulle tavolette dimostra la sua influenza nel Paese e la difficoltà dei problemi risolti offre una prova luminosa del suo alto livello di competenza.

Le tavolette matematiche sono presenti anche nelle campagne. Il loro ruolo non è però identico a quello che hanno nella capitale, come mostrano i diari di viaggio lasciati da Yamaguchi Kazu. Nato nel 1780, Yamaguchi è l'alfiere della scuola di Hasegawa, a Edo, che si fa conoscere negli anni intorno al 1830 con la pubblicazione di una serie di manuali che rompono con la tradizione del segreto e si distinguono per la loro qualità pedagogica. Tra il 1817 e il 1822 Yamaguchi compie tre viaggi che lo portano rispettivamente nella penisola di Chiba, nel Nord-Est dell'Hanshu, e nelle regioni del Sud-Ovest fino all'isola di Kyushu. Durante i suoi lunghi viaggi, Yamaguchi scrive un diario dettagliato, che ci fornisce indicazioni supplementari sull'uso delle tavolette.

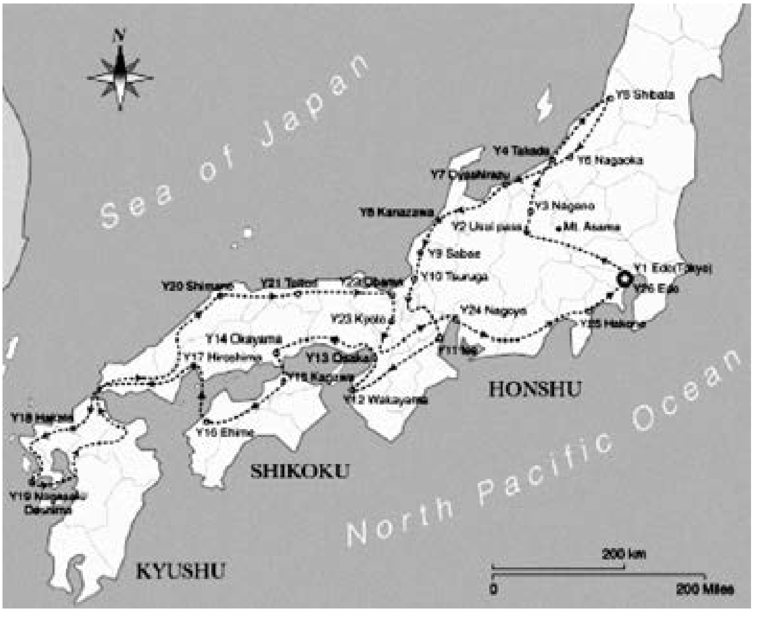


Figura 5 Illustrazione del viaggio che Yamaguchi Kanzan compì tra il 1817 e il 1822 (Princeton University Press)

I maestri itineranti e le tavolette

La procedura di Yamaguchi, di dirigersi immancabilmente verso i templi e i santuari quando arriva in un villaggio, svela che le tavolette segnalano la presenza di un maestro di matematica nella località. Indice che la pratica della matematica è ben diffusa nella prima metà del XIX secolo è che Yamaguchi prende nota nel suo diario di viaggio della presenza di problemi ex-voto che, però, raramente lasciano risalire fino ai maestri locali. Le informazioni assunte dagli abitanti sono più affidabili. Yamaguchi constata spesso un evidente scadimento tra la reputazione di cui gode il maestro locale e la sua reale competenza: il viaggiatore si prende un maligno piacere nel provocare il suo avversario tirando fuori dalla manica uno dopo l'altro una serie di problemi difficili.

I viaggi di Yamaguchi si concludono con una messe di giovani talenti. In una lettera al suo mastro nella capitale lo mette al corrente del desiderio dei suoi nuovi discepoli di appendere una tavoletta in una regione «lontana», cioè, senza dubbio, a Edo. Dalla lettura della missiva si capisce che l'offerta di una tavoletta è un affare complesso: sono necessarie una riflessione e una collaborazione attiva da parte dei responsabili della scuola. La corrispondenza tra Yamaguchi e Hasegawa, suo superiore, mostra che il contributo dello studente alla redazione delle tavolette è nulla e che è a Yamaguchi che spetta l'intero compito di concepire e risolvere i problemi, lavoro che svolge con la massima cura. Il compito di Hasegawa consiste nella confezione materiale della tavoletta e nella sua esposizione nel luogo più adatto. Dalla lettera non si ricava alcuna indicazione sull'aspetto finanziario dell'operazione, ma si intuisce che il suo peso influisce molto nel negoziato.

Anche se gli studi recenti danno delle tavolette un'immagine molto più prosaica e più utilitaristica di quella che per lungo tempo si è immaginata, resta il fatto che le tavolette sono le magnifiche vestigia di un tempo felice, quando i templi e i santuari servivano da punti di incontro e di comunicazione tra matematici di tutte le provenienze, e dove giovani matematici «dilettanti» pieni di sacro furore venivano a sfidare i maestri in carica.

1. Matematica e affettività Difficoltà nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica

Christian Pitta[1]

The article presents a study made during the master in teaching mathematics at secondary school. It deals with the way in which emotions influence the learning of students and what the emotional causes of failure in solving mathematical problems are.

1. Introduzione

Molte teorie cognitive contemporanee condurrebbero a credere che l'essere umano sia incapace di provare emozioni. Fino a poco tempo fa, la scienza cognitiva descriveva gli esseri umani come creature senza passioni che pensano e agiscono razionalmente e freddamente: in realtà essi sono generalmente frustrati, adirati, gioiosi, ansiosi e anche timorosi quando devono affrontare problemi complessi, come per esempio un programma per computer ricalcitrante, un cliente esasperato, una mano di scopa difficile, o un problema matematico.

Quando gli studenti devono risolvere una situazione matematica non nota hanno reazioni che includono spesso emozioni. Se lavorano su un problema per un periodo prolungato di tempo, la risposta emozionale spesso diventa particolarmente intensa. Molti iniziano a lavorare sul problema con entusiasmo, trattandolo come un gioco; con il passare del tempo, però, le loro reazioni diventano via via più negative. Spesso appaiono tesi, inclini a tentare di risolvere il problema ripetutamente, perdendo gradatamente fiducia a ogni tentativo infruttuoso. Per contro, se ottengono una soluzione al problema, esprimono sentimenti di soddisfazione e di gioia.

Data l'intensità delle risposte emotive che un problema può generare, è piuttosto sorprendente notare come ancora poca attenzione venga dedicata allo studio del ruolo giocato dalle emozioni e dall'affettività nell'apprendimento. Recenti ricerche hanno permesso di progredire nella comprensione dei processi cognitivi, che sono certamente molto importanti per risolvere problemi matematici: anche l'influenza di fattori emozionali su questi processi cognitivi merita però di essere studiata in dettaglio. Lo scopo del mio lavoro è di procedere in questa direzione, individuando quali fattori emotivi aiutano o frenano le prestazioni nel *problem solving* matematico.

1. Sintesi del lavoro di diploma in didattica della matematica. SUPSI, Dipartimento della formazione e dell'apprendimento (DFA), Locarno. Docente di riferimento: Silvia Sbaragli. Anno accademico 2009-2010.

2. Quadro teorico

2.1. La mente emozionale

Nel suo celeberrimo libro, Goleman (2005) asserisce che la mente emozionale è molto più rapida di quella razionale come conseguenza del fatto che la mente umana si è evoluta nel corso della sua storia da un cervello primitivo che prediligeva una risposta emotiva. Solo successivamente si sarebbe formata la neocorteccia che permette all'uomo di ragionare su informazioni che sono comunque sempre transitate prima dal cervello emotivo. È estremamente importante che questa sequenza di trattare le informazioni che arrivano dagli organi di senso sia mantenuta perché la sopravvivenza in condizioni estreme richiede una rapidità di risposta immediata. La mente emozionale è assai più veloce di quella razionale, perché passa all'azione senza neppure fermarsi un attimo a riflettere sul da farsi e non permette alla mente pensante di riflettere analiticamente. L'uomo che si soffermava troppo a lungo a riflettere di fronte ad un predatore, per esempio, aveva minore probabilità di sopravvivenza e dunque di trasmettere i geni che determinano la lentezza nell'agire.

Alla mente razionale appare sconcertante questo modo di agire immediato e semplificato della mente emozionale, la quale, per contro, si sente sicura e forte. La rapidità decisionale, infatti, deve per forza sacrificare l'accuratezza perché si basa fondamentalmente solo sulle prime impressioni reagendo agli aspetti più vistosi. Il grande vantaggio è che la mente emozionale può leggere una situazione in un istante, producendo quel giudizio intuitivo immediato che ci dice spesso se un percorso risolutivo è più elegante o più intricato. La mente emozionale è una sorta di radar per scoprire un pericolo senza aspettare l'intervento della mente razionale. Lo svantaggio è che questi giudizi intuitivi, verificandosi in una frazione di secondo, possono essere erronei o malaccorti.

Concludendo, la mente razionale ha bisogno di più tempo rispetto alla mente emozionale per registrare le impressioni e reagire: il primo impulso è dettato dal cuore e non dal cervello.

2.2. Aspetti emozionali

In passato la matematica era insegnata senza tener conto in modo esplicito degli aspetti emozionali che un allievo provava. Spesso le emozioni distruttive che un allievo provava erano considerate dai docenti come qualcosa d'inevitabile, anzi venivano usate per giustificare il fallimento di certi interventi di recupero che si focalizzavano solo ed esclusivamente sulle conoscenze. Purtroppo alcuni allievi accusano blocchi psicologici oppure assumono comportamenti irrazionali e stati d'ansia, che un insegnante non riesce a controllare perché esulano dalle proprie conoscenze professionali. Di fronte a questi casi, molti docenti desistono, ritenendo di aver cercato di fare tutto il possibile, impotenti di fronte agli aspetti emotivi. Chi adotta un approccio di questo genere alle difficoltà di apprendimento non considera quanto la ricerca più recente in neuroscienze e psicologia evidenzia: esiste un rapporto molto fitto tra i processi cognitivi e quelli emozionali (Magri e Mancini, 1991).

Esiste inoltre una relazione fra la capacità di provare emozioni e la capacità di prendere decisioni di fronte a un problema matematico. Il libro di McLeod e Adams (1989) mette in luce come la ricerca sul *problem solving* matematico si sia focalizzata sul ruolo dell'affettività mentre in passato l'interesse era incentrato solo su fattori cognitivi.

In questo ambito emerge quindi un legame fortissimo fra una capacità razionale e una capacità di provare emozioni nell'attività del *problem solving*.

Spesso le emozioni hanno origine da un'interpretazione di un dato evento e non direttamente da quell'evento. In questo caso la componente cognitiva svolge un ruolo essenziale permettendo di comprendere l'origine cognitiva di emozioni come la pietà, l'ira e il senso di colpa. A tutti per esempio sarà sicuramente già capitato di ripensare a un certo evento e di riprovare emozioni forti.

Se ne deduce che non è l'attività matematica in sé a scatenare emozioni negative nell'allievo, ma piuttosto è la sua interpretazione di tale attività che risente delle sue convinzioni, dei suoi gusti e delle sue attitudini.

Questa interpretazione dell'esperienza matematica si evolve nel tempo e inizialmente dà soprattutto origine a reazioni emotive semplici, spesso associate all'insegnante o all'argomento trattato cioè a fattori mediatori. Con il passare del tempo però il bambino comincia a dare significato alle sue attività, mettendole in relazione l'una con l'altra, ad anticipare così le esperienze future. Egli interpreta gli atteggiamenti del docente e dei compagni costruendosi teorie per spiegare questi comportamenti. Costruisce quindi schemi di riferimento che gli permettono di individuare se ha avuto successo o no in un'attività matematica; si forma in altre parole determinate convinzioni su cosa significhi andar bene o male in matematica, e su quali ne siano le cause. Le attività matematiche non vengono più definite quindi semplicemente come gradevoli o spiacevoli, ma sono valutate secondo quegli schemi che il bambino si è costruito: di conseguenza ritiene di fare bene o male in matematica in relazione a ciò che si era immaginato.

L'immagine che un ragazzo si fa della matematica arricchisce anche la varietà di emozioni associate a essa, promuovendo la comparsa di emozioni più complesse come la paura, l'ansia, l'ira e la frustrazione, ma anche chiaramente la soddisfazione.

Se ne deduce perciò che le emozioni provate da un allievo durante le lezioni di matematica, anche quelle maggiormente negative, non sono più ostacoli incontrollabili all'apprendimento, ma segnali che danno indicazioni su come l'allievo interpreta l'esperienza matematica. A questo punto l'insegnante di matematica può usare questi segnali per sapere quale immagine della matematica un allievo si è costruito e per modificare tale immagine effettuando attività didattiche mirate (Zan R., 2007).

2.3. Senso di auto-efficacia

Nella teoria concernente l'auto-efficacia, Bandura (2000) concepisce la mente come uno strumento in grado di produrre un'azione in relazione all'ambiente e al soggetto. Egli ritiene che la sua consapevolezza gli consenta di poter influenzare gli eventi e di considerarli in maniera positiva, mentre il percepirli al di fuori della propria portata comporta ansia, apatia o depressione. Il senso di auto-efficacia che deriva da tale consapevolezza diventa come un modo di rapportarsi alla realtà, che nasce e si alimenta con l'esperienza e come tale rientra tra i più importanti meccanismi di autoregolazione. Bandura (2000) ha anche dimostrato che le modifiche in positivo della percezione delle proprie competenze migliora il livello delle prestazioni, il tono dell'umore, l'efficienza dei processi di pensiero, il senso di benessere e, non ultima, la condizione stessa di salute. Queste modifiche sono estremamente legate alle esperienze effettuate in specifici ambiti di attività o in determinati tipi di prove e situazioni anche matematiche.

Il senso di efficacia personale deriva dalla convinzione di essere in grado di fronteggiare un determinato evento e si spiega con il «funzionamento» dell'uomo, cioè attraverso l'azione integrata di quattro tipi di processi principali: cognitivi, motivazionali, affettivi e decisionali. (D'Ambrosio e al., 2003).

3. Domande di ricerca

D1. Come può un insegnante osservare le emozioni degli allievi che provano sentimenti negativi nei confronti della matematica, sentimenti tradizionalmente ritenuti sfavorevoli all'apprendimento?

D2. Da dove proviene la mancanza di autostima o di perseveranza che sfocia nella frustrazione e che cosa ha influito sul suo insorgere?

D3. Che cosa può fare l'insegnante in aula per riuscire a incidere sugli aspetti affettivi legati all'apprendimento?

D4. L'intervento dell'insegnante attento alla dimensione emotiva degli allievi quale effetto ha sull'apprendimento e sulla valutazione degli allievi?

4. Ipotesi di ricerca

I1. L'osservazione tradizionale si limita agli aspetti delle conoscenze e delle capacità procedurali, che vengono verificati attraverso compiti scritti o interrogazioni; coerentemente anche la valutazione.

Allargare il ventaglio delle osservazioni e quindi anche delle interpretazioni possibili richiede anche di ampliare il processo di esplorazione e di conseguenza di permettere valutazioni più attendibili e complete.

I2. Le difficoltà scolastiche che gli studenti incontrano sono spesso riscontrabili negli atteggiamenti negativi come la mancanza d'interesse, determinazione, motivazione, la presenza di insicurezza e fatalismo (con conseguente delega all'insegnante della responsabilità dell'apprendimento) e nelle emozioni negative quali noia, paura e ansia.

I3. In funzione dell'osservazione effettuata, l'insegnante potrebbe migliorare la propria pratica in classe scegliendo sequenze didattiche che mirino a diminuire l'influenza emotiva sul processo di apprendimento.

I4. Uno dei motivi del fallimento dell'approccio tradizionale di rimediazione alle difficoltà è il tipo di intervento di recupero standard, in genere non basato su processi mirati di osservazione e interpretazione che contemplino le emozioni provate dagli allievi di fronte a problemi matematici. Tenendo conto di quest'ultimo aspetto l'insegnante arricchirebbe notevolmente le sue capacità di rimediazione.

5. Metodologia di ricerca

Il processo di osservazione che ho effettuato quest'anno si riferisce a una classe di quarta media al corso base di matematica. Gli allievi che compongono questa classe sono nove, cinque dei quali frequentano il corso pratico a causa di diffuse difficoltà espresse in diverse materie.

Inizialmente ho proposto agli allievi un tema nel quale essi dovevano raccontare quale fosse il loro rapporto con la matematica dalle elementari a oggi e come esso si fosse evoluto. In questo modo intendevo scoprire quali erano le convinzioni degli allievi ed elaborare strategie per il recupero.

In seguito ho proposto un questionario che mi permettesse di approfondire quali fossero le attribuzioni di fallimento e di successo espresse solo parzialmente nei temi, ma anche di capire se le difficoltà venivano percepite dall'allievo come un problema da superare oppure no.

Inoltre ho voluto capire cosa provassero gli allievi durante diversi tipi di sequenze didattiche e quali, fra queste, fossero le attività didattiche più adeguate per un intervento di recupero.

Per perseguire questo scopo ho svolto un compito alla lavagna spiegando come si sarebbe dovuto eseguire e ho chiesto di scrivere come si sentissero durante lo svolgimento dello stesso.

In un'altra occasione ho dato un compito analogo da eseguire però individualmente, e ho voluto che gli allievi indicassero quali emozioni provassero cercando di riconoscere cosa eventualmente li bloccava nella risoluzione della situazione posta.

Infine ho proposto un problema che gli studenti dovevano risolvere in gruppo esprimendo il loro giudizio anche su questo tipo di attività.

In seguito al processo di osservazione e di ricerca ho pensato e messo in atto diversi modi di rimediare alle difficoltà emerse, applicando regole condivise con la classe, lavorando sull'utilitarismo della matematica e infine cercando di migliorare lo scarso senso di auto-efficacia insita negli allievi.

6. Risultati di ricerca

6.1. Il tema

Ho proposto il seguente tema: «Considerazioni e riflessioni sul mio rapporto con la matematica, come si è evoluta dalle elementari a oggi». Di seguito riporto quanto hanno scritto gli allievi del corso base che ho avuto modo di seguire durante l'anno. Ho voluto quindi ricostruire il loro tipo di rapporto con la matematica, come si è evoluto nel tempo, e com'è visto e vissuto.

Da molti temi appare evidente che le valutazioni negative vengono percepite dagli studenti come valutazioni sulle proprie capacità più che sulle prestazioni date e hanno quindi come effetto la rinuncia a priori a utilizzare le risorse possedute, perché si convincono di non avere capacità sufficienti. Elenco qui di seguito alcuni estratti dei temi che mettono in luce il sentimento di rassegnazione e impotenza maturato nel tempo.

«La matematica è una materia molto ampia ed è una delle materie più difficili, se non la capisci subito».

«Per me è la materia più difficile, e non riesco a capire come certe persone la trovino divertente. [...] Dopo poche settimane dall'inizio della scuola era diventato un incubo, perché già non capivo quasi niente».

«Innanzitutto ciò che penso sulla matematica è che non è a portata di tutti, nel senso c'è gente che la capisce e gente che non la capisce».

«Il mio rapporto con la matematica diciamo che è sempre stato piuttosto scarso e incomprensibile. Incomprensibile nel senso di dire che purtroppo, e non capisco perché, spesso i miei risultati dell'esperimento non corrispondono all'impegno, allo studio che ho dato e che sempre darò».

«Alle elementari capivo bene la matematica e prendevo delle belle note, ma da quando sono alle medie è cambiato tutto a partire dalla prima media perché ho iniziato a fare fatica a capire le cose [...]».

Quasi la totalità degli allievi attribuisce il proprio fallimento in matematica a cause quali le lacune di base o la difficoltà della materia. Il fatto che vengano avvertite come non controllabili dall'allievo ha come conseguenza la scarsa fiducia nel ruolo dell'impegno e favorisce quindi l'instaurarsi di un atteggiamento passivo, scarsamente responsabile, nei confronti dell'apprendimento.

Diversi scritti dimostrano che il senso di fatalismo e rassegnazione deriva da un processo e non da un preconcetto innato nell'allievo. La matematica sarebbe una materia piacevole e interessante se il soggetto non si dovesse scontrare con ostacoli che gli impediscono di sentirsi realizzato. L'immagine della matematica dunque viene costruita nel tempo in funzione della riuscita scolastica.

«A me da piccolo mi piaceva tanto la matematica perché non lo so [...] di solito in classe ero il primo ad alzare la mano. In prima media non mi piaceva poi così tanto, stavo peggiorando».

«Alle elementari sono sempre stata brava. Mi piaceva e riuscivo a capire tutto molto bene».

«Al secondo anno però ho cambiato docente, e finalmente ci capivo qualcosa. Questo mi dava molte soddisfazioni perché sentivo che potevo farcela».

«Spesso alle elementari mi asciugavo le lacrime perché non riuscivo a risolvere le difficoltà che avevo in matematica».

«La matematica sinceramente l'ho sempre odiata, ma magari la odiavo perché non capivo quasi niente [...]».

Come esposto anche nel libro di Tobias (1998), gli allievi pensano che potrebbero fare molti mestieri diversi nel loro futuro a dipendenza da quanta matematica conoscono e da quanto sono sicuri delle loro conoscenze. È diffusa l'idea che vi sia un rapporto tra la matematica e le opportunità professionali e che sia proprio la conoscenza dell'algebra e della geometria l'elemento discriminante tra i lavori non specializzati o di basso livello e le posizioni meglio retribuite e più aperte ad avanzamenti di carriera.

Questa idea è sentita dagli allievi del corso base che non mancano di esprimersi in questa direzione:

«Insomma onestamente potrei venire a dire che la matematica non serve a niente, ma secondo me è essenziale come il pane».

«La matematica è importante perché la trovi in quasi tutti i mestieri».

Spesso nascono negli allievi convinzioni auto-debilitanti in cui gioca un ruolo centrale il comportamento dell'insegnante, con una forte componente affettiva, associata in particolare a emozioni negative. Queste aumentano con il tempo d'intensità, si consolidano, e provocano un'associazione automatica alla matematica. Gli estratti dei temi che trascrivo di seguito mostrano come una parte degli allievi si deresponsabilizza dal punto di vista dell'apprendimento, altri interiorizzano le difficoltà ma le addebitano dell'insegnante che non sarebbe stato in grado di svolgere il suo mestiere. Altri esprimono un legame affettivo tra sé stessi e il docente che, se interrotto (quando si cambia docente), costa fatica, perché si devono riallacciare da capo i rapporti cercando di capire com'è fatto il nuovo docente e cosa egli desidera.

«Il mio livello base riguardo alla matematica era inferiore rispetto a tutti i miei compagni. Questo non era del tutto colpa mia, ma anche del docente delle elementari che non aveva svolto tutto il programma correttamente, e io ero impreparata».

«In seconda media non capivo le cose perché c'era un altro prof e spiegava diversamente e così anche in terza».

«Per me quest'anno è diventato noioso forse perché siamo in meno allievi [...] anche perché è cambiato il prof ma tanto è da 4 anni che cambia il docente».

«In prima media ho cominciato ad avere qualche problema, probabilmente perché il modo di insegnare era molto diverso».

«Nella seconda media è andata bene, perché il nostro professore era basato sul calcolo. Dunque era come se fosse dalla mia parte [...] A partire dalla quarta media il nuovo professore è stato il migliore. Quello del livello A non mi piace affatto».

6.2. Il questionario sugli atteggiamenti

Il questionario con le relative domande si trova in allegato (Allegato 1).

Alla domanda 1 gli allievi dovevano rispondere se la matematica piacesse oppure no. Dalle risposte emerge che la matematica viene vissuta in maniera prevalentemente negativa. A volte non è capita e questo genera nervosismo e tristezza, oppure gli allievi esprimono un sentimento di costrizione e, dato che è una materia indispensabile, deve piacere anche se si verifica esattamente il contrario. Ancora una volta gli allievi pongono l'accento su quella mancanza del senso di auto-efficacia già espressa precedentemente nei temi.

«Sì e no. Perché quando non capisco delle cose non mi piace».

«No, non mi è mai piaciuta, perché tante volte ho bisogno di aiuto e non capisco, e questo mi rende un po' triste e nervosa».

«La matematica mi piace, ma a volte tende a essere un po' noiosa. Perché è importante e ti deve piacere anche se non ti piace perché è indispensabile».

Con la domanda 2 si chiedeva se preferivano fare gli esercizi o studiare la teoria, e gli allievi in genere non si sono schierati per un metodo o per l'altro. Ad alcuni piace fare gli esercizi per verificare se hanno capito la teoria mentre altri riconoscono l'importanza di quest'ultima come momento indispensabile per l'apprendimento. Emerge bene come la teoria venga vissuta quale momento vero e proprio dell'apprendimento mentre gli esercizi sono considerati soprattutto il luogo in cui verificare quanto hanno capito. Gli esercizi sono quindi uno strumento che permette loro di provare piacere se riescono, ma anche nervosismo e tristezza se invece non ce la fanno, delegando al docente la responsabilità del loro apprendimento, che deve verificarsi quando egli spiega la teoria.

«Mi piace fare gli esercizi perché con gli esercizi ti puoi allenare e provare a capire quello che non sapevi».

«[...] la teoria mi serve per risolvere gli esercizi e quindi entrambe».

«Fare gli esercizi perché posso capire se ho veramente capito la teoria».

Dalle risposte alla domanda 3, sulle difficoltà che gli allievi hanno in matematica, emergono due fattori. Il primo è sostanzialmente il sentimento di rassegnazione:

«nei test vado sempre male».

«[...] quando non capisco una cosa lascio perdere e non richiedo al docente».

«Sì, nelle cose tanto e troppo logiche, e io prima che capisco...».

mentre il secondo tipo di difficoltà è il non sapere nemmeno che cosa impedisce d'imparare. Infatti, alcuni ragazzi non hanno saputo indicare dove riscontrassero difficoltà e ostacoli nell'apprendimento.

Con la domanda 4 si chiedeva se agli allievi piacesse non avere difficoltà e per quale motivo. In questo caso hanno dato diverse risposte che si riassumono nuovamente con quanto emerso già nei temi:

– hanno ribadito il concetto d'importanza e utilitarismo della matematica;

«Sì perché la matematica è importante e mi piacerebbe andare bene e capirla».

«Sì così sarei più bravo e avrei un lavoro migliore».

– se riuscissero senza difficoltà, allora gli piacerebbe anche la materia;

«Certo! sarebbe un sogno! perché se riuscissi ad avere risultati migliori e non avrei difficoltà mi piacerebbe anche la materia». [Irene]

Alla domanda 5 dovevano spiegare quali erano i motivi del successo dei compagni che riescono bene in matematica. I motivi sono sostanzialmente:

– quelli che riescono in matematica sono sempre stati bravi;

«Quelli che sono bravi in matematica secondo me lo sono sempre stati».

– i bravi s'impegnano costantemente e di più;

«Se sono bravi è perché si impegnano».

«Il motivo del loro successo è perché si impegnano costantemente».

Tutti gli allievi hanno espresso nella risposta alla domanda 6 il desiderio di andare bene a scuola sia perché i genitori e l'insegnante sarebbero contenti, sia perché loro stessi ci tengono e questo li farebbe sentire più sicuri. Inoltre andare bene in matematica aumenta, secondo loro, la possibilità di essere promossi e di sentirsi più padroni della materia, anche se le opinioni sono meno nette rispetto a quelle precedenti. In pochi invece ritengono che la matematica sia un indice d'intelligenza e questo non pregiudicherebbe più di quel tanto le opinioni dei compagni su di loro.

Se vige una certa chiarezza sui possibili motivi per cui uno studente potrebbe andare bene in matematica, regna invece una certa indecisione sulle attribuzioni di fallimento, come dimostrano le risposte alla domanda 7. Le uniche risposte date con una certa maggioranza e presa di posizione della classe sono proprio quelle concernenti le difficoltà dovute a fattori emotivi, la scarsa intelligenza (che potrebbe essere diversa da quella necessaria in matematica), e la constatazione che la matematica è una materia difficile.

Tutti gli altri motivi che spiegano le loro difficoltà in matematica, come lo scarso impegno, la sfortuna, le richieste eccessive del docente, il metodo di studio sbagliato, le lacune di base e lo studio insufficiente, non sarebbero invece la causa dei loro problemi verso la materia.

Gli allievi si sentono dunque di ammettere la necessità di studiare molto siccome la materia è difficile e di impegnarsi parecchio, ma, dato che dato che ritengono di avere una scarsa intelligenza o per lo meno diversa da quella necessaria, non riescono nell'intento. Inoltre non reputano che le loro difficoltà dipendano dalle lacune di base: si sentono preparati, supportati dal fatto che il loro metodo di studio non lo considerano sbagliato, e che le richieste del docente non appaiono loro nemmeno eccessive.

L'allievo rappresentativo medio che emerge dall'analisi di questo questionario sembra quello che s'impegna e studia abbastanza bene la materia per essere promosso e per soddisfare sé stesso ma anche genitori e insegnanti. Andare bene in matematica non significa affatto per lui essere più o meno intelligente dei compagni ma semplicemente avere un'intelligenza diversa. Probabilmente il fatto che incontra difficoltà è dovuto alla scarsa volizione nell'affrontare questioni matematiche.

Credo che di nuovo sia evidente come nella classe regnino una certa rassegnazione e una sorta di fatalismo, alle quali gli allievi difficilmente credono di poter rimediare perché hanno già dato tanto senza raggiungere il minimo risultato.

6.3. Strategie didattiche

In questo capitolo vorrei approfondire, da un punto di vista affettivo ed emotivo, qualche strategia didattica normalmente messa in atto da molti insegnanti, per capire meglio cosa provino gli studenti durante le diverse attività.

6.3.1. Lezione frontale

La lezione frontale possiede una lunga tradizione e indubbi vantaggi, specialmente quando si vogliono offrire molte informazioni a un gran numero di persone. Ho provato a risolvere alla lavagna qualche problema sulle equazioni, in maniera che gli allievi potessero consolidare il loro apprendimento sull'argomento. Durante lo svolgimento gli allievi dovevano annotare cosa stessero provando in quel momento, riflettendo sui propri pensieri, ragionamenti ed emozioni.

Da una parte sono emerse sensazioni tutto sommato positive, espresse dalle seguenti frasi:

«Mi sono sentito soddisfatto e i calcoli li ho capiti abbastanza bene».
«Mi sento soddisfatto di me stesso e ho capito».
«La 13,14,15 erano più o meno facili e l'ho capita!!!:-)».

accompagnate anche da quelle opposte:

«Cavolo non mi sono impegnato e non ho capito».
«Nooo!! queste cose non le capisco!! Non capisco niente».
«Non ho capito tanto bene perché il prof andava troppo veloce».

In questo modo di fare lezione il docente spiega tutti i passaggi, per cui chi riesce a seguire prova soddisfazione sentendosi bene nell'attività. Purtroppo anche chi riusciva a seguire il ritmo del docente poteva trovarsi in difficoltà in certi momenti e sentirsi perso.

Credo che il riassunto di quello che un allievo prova in una lezione di tipo frontale l'abbia fatta chi ha scritto:

«Bello, non dovrò sforzarmi ma dovrò solo ascoltare. Ma non sto capendo niente».

Gli allievi provano una certa soddisfazione se riescono a seguire bene e a ricopiare, capendo quello che stanno facendo senza investire molte energie. In questi casi si può dire che il senso di auto-efficacia viene stimolato. Purtroppo il ritmo del docente non sempre può corrispondere a quello degli allievi, determinando momenti in cui i ragazzi non seguono e non hanno la possibilità di capire quello che il docente sta facendo. Un'attività di questo tipo non credo sia consigliata, perché non permette la rielaborazione, la discussione, il confronto, lo scambio, insomma l'apprendimento. La lezione frontale presenta limiti che possono essere superati, se le si affiancano altri tipi di approccio, tra i quali l'apprendimento individuale o il lavoro di gruppo.

6.3.2. Apprendimento individuale

Ho poi proposto situazioni simili a quella precedente, ma da svolgere individualmente: durante la risoluzione gli allievi avrebbero dovuto scrivere che cosa provassero in quel momento. È subito apparso evidente come tutti si trovassero in palese difficoltà, anche chi pensava di aver capito tutto grazie ai problemi risolti e spiegati alla lavagna dal docente. Alcune delle annotazioni sono:

«Non sono sicura al 100% perché non so se posso fare questi passaggi».
«La cosa che mi blocca è che non so che passaggi devo fare vado in panico e non riesco a risolverlo».
«Nel 1. esercizio non ho capito bene».
«Mi sono confuso ma dopo ci ho pensato che faceva [...]».

Alcuni si sentivano talmente persi che non hanno saputo scrivere niente a proposito.

È del tutto evidente che allievi di questo genere, se lasciati da soli, non riescono a gestirsi, addirittura provando panico e blocchi come accade a uno di loro.

Questo tipo di attività è sicuramente utile solo in fase di assestamento di un apprendimento tecnico, come la risoluzione di equazioni, per esempio. Nella prima fase di apprendimento di un procedimento, può già nascere insicurezza e un basso senso di auto-efficacia. Senso che nelle lezioni frontali sembrava essere stimolato, ma nell'apprendimento individuale rischia di peggiorare sensibilmente. L'allievo percepisce quel sentimento che bene è emerso dai temi e dal questionario: non credere di avere lacune di base, ma di non essere abbastanza intelligente da mettere in atto il proprio apprendimento. Sembra che in passato i docenti abbiano operato molto in questa direzione, effettuando lezioni frontali o dialogate per poi consegnare problemi da risolvere. In questi casi l'allievo non può costruirsi le competenze che gli servono per risolvere un problema; in poche parole non si è operato in una direzione costruttivista. Secondo tale teoria, la conoscenza è costruzione delle conoscenze: una costruzione individuale, ma anche sociale. La lezione frontale non si colloca nella concezione costruttivista, anche se correlata a una buona impostazione pedagogica e didattica, che prevede l'utilizzo di schemi, lucidi, e registri semiotici diversi (verbale, visivo, audiovisivo,…).

6.3.3. Lavori di gruppo

La concezione costruttivista sottolinea che l'apprendimento avviene attraverso il confronto delle varie mappe cognitive presenti nella mente di ogni studente e nel gruppo classe. L'insegnante può stimolare l'apprendimento, attraverso la pratica del prendersi cura di come ciascuno e di come la propria classe, elabora, costruisce e ricostruisce le mappe cognitive comuni. [Andrich e al., 2001]

In queste attività gli allievi vengono confrontati con problemi nuovi nell'ambito del laboratorio matematico. Le attività di laboratorio sono particolarmente indicate per mettere alla prova e lasciar ampio spazio agli allievi di sviluppare ulteriormente capacità quali: l'analisi, la sintesi, il ragionamento per deduzione, quello per induzione, l'intuizione e l'invenzione matematica. Nel laboratorio si lavora anche alla realizzazione di obiettivi non prettamente cognitivi, come lo sviluppo del gusto estetico, l'abitudine all'utilizzo del ragionamento logico anche fuori da un contesto matematico e all'esercizio della precisione (nell'uso dei termini, nel disegno geometrico, nel calcolo), l'interesse verso la risoluzione e la creazione di problemi, l'atteggiamento verso la problematizzazione dei fatti della vita e la riflessione metacognitiva. [Gruppo disciplinare di matematica, 2007]

Anche per questo tipo di attività didattica gli allievi si sono espressi indicando cosa provassero quando dovevano risolvere per gruppi un problema di laboratorio nuovo e difficile.

«Nel lavoro di gruppo mi è piaciuto perché comunque abbiamo lavorato anche divertendoci. Mi è anche piaciuto lavorare in gruppo perché se hai dei problemi ti possono aiutare i compagni e riesci a lavorare meglio».

«Era positivo il poter lavorare in gruppo e non singolarmente».

«…La prima cosa è stato che potevamo lavorare insieme e discuterne. La seconda cosa è stata che gli esercizi potevano essere per tutti più semplici».

«Mi è piaciuto lavorare in gruppo, dato che con il prof (docente dell'anno precedente) *non si faceva questo tipo di attività».*

La potenzialità di questo tipo di attività emerge molto bene ed è enorme. I lavori di gruppo vengono vissuti bene dagli allievi come un momento anche ricreativo nel quale ognuno dà il proprio contributo alla soluzione. La discussione stimola particolarmente la metacognizione sui processi cognitivi che un allievo ha effettuato perché deve spiegare a un suo compagno. Le competenze elencate prima, ma anche il senso di auto-efficacia in questo caso, vengono incrementate, così come la responsabilizzazione del proprio apprendimento (devoluzione). Il docente svolge il ruolo di consulente e animatore della discussione e non viene più visto dagli allievi come il trasmettitore di conoscenze.

7. Rimediazione

Dalla teoria e dai risultati della ricerca è emersa la necessità di considerare anche aspetti affettivi, in particolare quelli legati alla motivazione, quali il senso di auto-efficacia e il piacere di apprendere. Un elemento cruciale per il funzionamento di un corso che si propone di intervenire soprattutto a livello metacognitivo e affettivo-motivazionale è l'assunzione piena, da parte degli allievi, della responsabilità dell'apprendimento. [Ashman e Conway, 1991]

Il primo passo è stato quello di aiutare gli allievi a interpretare in modo costruttivo il proprio fallimento, suggerendo nello stesso tempo nuove direzioni da seguire, in modo da favorire il successo e aumentare la fiducia nel docente e nella metodologia proposta. Ho dunque fatto in modo che gli allievi mi vedessero come un docente che va incontro alle loro esigenze cercando di creare un ambiente di classe migliore, grazie a un contratto didattico chiaro ed esplicito. In seguito ho cercato di aumentare la motivazione degli allievi proponendo loro situazioni i cui contenuti matematici sarebbero potuti diventare utili nella loro professione futura. E infine ho cercato di agire sul senso di auto-efficacia proponendo situazioni-problema che gli allievi dovevano risolvere aiutandosi tra di loro lavorando per gruppi durante le attività di laboratorio.

7.1. Contratto didattico

Molti studenti affermavano di fornire durante una verifica scritta una prestazione che non corrispondeva alla propria preparazione a causa di emozioni negative, come ansia o addirittura panico. Ho pensato di alleviare il peso di una valutazione tradizionale, che si fonda solo ed esclusivamente su prove scritte, per inserirvi anche l'atteggiamento, la partecipazione in classe e i compiti. Inoltre, date le potenzialità delle attività svolte a gruppi, ho pensato d'inserire anche questo momento nella valutazione così da poter avere un triplice beneficio: valorizzare un'attività che permetteva di rimediare a una visione della matematica e a un senso di auto-efficacia negativi, creare un clima di classe di rispetto e collaborazione fra gli allievi e infine alleggerire il peso delle verifiche scritte. A tale proposito ho voluto che gli allievi mi scrivessero cosa provano quando devono affrontare una verifica scritta. Ecco alcuni estratti:

«(Durante la prova scritta) *ero confuso perché a casa gli esercizi erano "sembrano" facili ma a scuola erano difficili*».

«Durante il test ero molto ansiosa, ma non solo durante, anche nei giorni precedenti al test. Ero agitata perché questo espe mi poteva "cambiare" il futuro, come passare ai livelli attitudinali».

«Durante il test ho avuto paura di fare l'esercizio sbagliato o di prendere 3».

«È la sicurezza in me stessa che non ho. Ho paura di fare male gli esercizi».

Si tratta in definitiva di un contratto elaborato dal docente insieme agli allievi, nel quale si fissano le modalità di valutazione di ogni allievo.

7.1.1. Obiettivo del contratto

L'intervento che ho messo in atto tende da un lato a sviluppare la riflessione metacognitiva degli studenti e la loro capacità di attivare strategie di controllo, dall'altro a rimuovere la visione distorta della matematica e lo scarso senso di auto-efficacia che sono alla base di atteggiamenti negativi. L'obiettivo è dunque quello di aiutare gli allievi a capire se stanno progredendo e a riflettere sul proprio atteggiamento in classe. In questo modo viene particolarmente stimolata nel soggetto la riflessione sul proprio operato, riflessione che permetterebbe di individuare che cosa ostacola i ragazzi nell'apprendimento e quali provvedimenti, suggeriti puntualmente dal docente, si potrebbero prendere per eliminare questi ostacoli. Inoltre il contratto permette al docente di ottenere un ambiente di lavoro più sereno in aula e alunni più concentrati.

7.1.2. Svolgimento

Ho cominciato chiedendo agli allievi che cosa volevano che valutassi e, con opportuni stimoli, la classe ha convenuto che si dovessero valutare tutti i modi con cui lavorano: partecipazione in classe, test, lavori a gruppi e compiti da svolgere a casa.

Poi si è fissato quanto ogni modalità di lavoro contasse ai fini della valutazione finale certificativa. In questo caso ho imposto dei limiti minimi e massimi e, discutendo con loro, abbiamo stabilito che il 30% della nota finale fosse da attribuire all'atteggiamento e partecipazione in classe, un altro 30% ai test, il 25% ai lavori di gruppo e il restante 15% ai compiti da svolgere a casa. Il risultato di questo lavoro è il contratto che si trova nell'allegato 2.

Alla fine di ogni lezione dedicavo qualche minuto ad assegnare le note sull'atteggiamento e partecipazione, e sui lavori di gruppo quando venivano svolti. In questo modo ho avuto la possibilità di richiamare chi non si comportava bene e premiare invece chi partecipava attivamente con interventi pertinenti. Anche i compiti venivano valutati e, quando li restituivo, davo anche le note. Così facendo potevo richiamare chi li aveva eseguiti male e lodare chi li aveva svolti correttamente.

La nota di comportamento e partecipazione non vuole punire chi non partecipa: se un ragazzo rimaneva attento durante la lezione ma non interveniva, allora gli veniva assegnato «sufficiente», mentre se oltre a non partecipare disturbava i compagni ed era richiamato, riceveva ogni volta un segno meno «–» alla lavagna. Questo metodo permetteva al ragazzo di rendersi conto di quante volte disturbava e di come non riusciva a rimanere concentrato in confronto ai compagni, come del resto suggerisce Blum (2008). Se un allievo invece partecipava e sbagliava l'intervento, ma l'intenzione era propositiva, non veniva punito con segni negativi ma nemmeno premiato con segni positivi, per mantenere una sorta di neutralità. Se invece qualche allievo interveniva in modo pertinente e corretto era premiato con un segno positivo «+» alla lavagna. Circa ogni tre o quattro settimane consegnavo agli allievi un riassunto di tutte le loro note con il calcolo della nota finale. In questo modo potevano monitorare il proprio andamento.

7.1.3. Valutazione dell'attività proposta

Credo che l'attività in buona misura abbia funzionato, perché mi ha permesso di ottenere un clima sufficientemente adatto a svolgere lezioni efficaci; inoltre, mi ha permesso di prendere in considerazione le esigenze degli allievi in maniera seria e mi ha posto sotto una luce diversa rispetto a quanto sperimentano i docenti delle altre materie. Spesso in matematica, purtroppo, si effettuano valutazioni solo ed esclusivamente tramite i lavori scritti e poi, generalmente, si arrotonda per difetto o per eccesso in base a come un allievo ha partecipato o lavorato in classe. Ho trovato molto strano che alcuni allievi, che in classe dimostravano di aver compreso alcuni concetti, poi, durante le verifiche scritte, facessero fatica a dimostrare quanto avevano appreso. Credo sia necessario relativizzare l'importanza di una verifica scritta, importanza che è molto marcata in allievi deboli come quelli di un gruppo base di matematica. La valutazione proposta valorizza le attività svolte durante le lezioni e quindi dà una visione più completa e profonda dell'allievo. Accade che allievi molto «scolastici» possano studiare moltissimo prima di un test e ottenere quindi buoni risultati ma poi, in classe, non dimostrare interesse o spiccate capacità d'inventiva e collaborazione. Valutando invece anche questi aspetti, vengono valorizzati alcuni allievi che magari non hanno grandi competenze tecniche, ma che riescono a produrre ragionamenti interessanti partecipando in classe o in gruppo.

La valutazione dei compiti ha aiutato gli allievi a responsabilizzarsi e a imporsi attività di routine settimanali, in modo da sviluppare un senso di equilibrio e di abitudine al lavoro.

7.1.4. L'attività dal punto di vista degli allievi

Il contratto è nato fondamentalmente da un'esigenza degli allievi e quindi è stato accolto piuttosto bene, perché si sono sentiti partecipi nella definizione dei criteri e inoltre hanno potuto mettersi per un momento nei panni di un docente che deve decidere cosa e come valutare. Hanno reputato opportuno esaminare tutto: comportamento e partecipazione, lavori di gruppo e compiti, ma non volevano più fare test: sono scesi a un compromesso quando ho spiegato loro che hanno bisogno di una qualche prova scritta che testimoniasse il loro apprendimento, dimostrando quindi che quel tipo di valutazione fosse imprescindibile.

Insieme abbiamo poi anche deciso il peso di ogni nota e anche in quel caso ho dovuto fissare un minimo del 30% per le verifiche scritte perché altrimenti, avrebbero scelto di farle contare meno. Hanno inoltre stabilito, dopo una breve discussione, che il comportamento e la partecipazione sono molto importanti, così come i lavori di gruppo, mentre non hanno ritenuto particolarmente rilevanti i compiti a casa.

All'inizio gli allievi non erano spesso d'accordo con le note che davo alla fine di ogni lezione, pretendendo quindi una valutazione più alta. È stato molto importante giustificare sempre e per ogni singolo caso il motivo di quella nota; riferendosi alle azioni o agli interventi concreti di ognuno. Ho potuto veramente constatare, con il passare delle settimane, come le lamentele diminuissero e come gli allievi sviluppassero la capacità di autovalutarsi usando i miei criteri. Gli alunni sono addirittura riusciti a comprendere le logiche che stavano alla base della mia valutazione e, a volte, mi hanno corretto per aumentare la loro nota, ma a volte (raramente) sono incredibilmente intervenuti per farmela abbassare.

L'effetto del segno «–» alla lavagna ha ovviamente provocato emozioni contrastanti: da un lato un evidente malessere, dall'altro il desiderio di migliorarsi, correggendo l'atteggiamento inadeguato. È importante che il docente sia sempre attento alla relazione con gli allievi, in modo che il segno «–» non sia percepito come un giudizio globale sulla persona, bensì contestualizzato a un determinato atteggiamento in un dato momento. È pur vero che nonostante questo, ci sono un paio di allievi che non riescono proprio a contenersi e, purtroppo, accumulano segni negativi lezione dopo lezione. Nei loro confronti è stato più funzionale un richiamo alla fine delle lezioni, che spiegasse la loro situazione. Ma a tutti gli altri questo metodo ha permesso di regolarsi e di realizzare effettivi miglioramenti, non solo dal punto di vista dell'atteggiamento in classe ma anche da quello dell'apprendimento.

I segni positivi venivano dati a chi faceva interventi pertinenti e corretti premiando così, chi partecipava e stava attento e concentrato sulla lezione. In un certo senso, gli allievi si sentivano in dovere di partecipare, creando in questo modo un ambiente favorevole a una discussione libera.

7.2. Esercizi legati alle professioni

Ho sempre pensato che in una certa misura si può andare incontro alle curiosità di alcuni allievi e per questa via ottenere un maggiore interesse, requisito necessario per creare un clima di lavoro propizio. A tal fine ho proposto agli allievi di scegliere manuali di calcolo professionale, dedicati alle professioni alle quali sono maggiormente interessati. In essi gli allievi scelgono alcuni problemi da risolvere e presentare alla classe.

7.2.1. Obiettivo dell'attività

L'obiettivo principale è permettere agli allievi di capire quale tipo di competenze matematiche sono richieste per una data professione. Viene così stimolata la riflessione sul loro futuro e sul senso della scuola media come istituzione necessaria e obbligatoria che consente a tutti di rincorrere con successo le proprie aspirazioni professionali.

7.2.2. Svolgimento

Ogni allievo sceglie un volume del calcolo professionale di una professione alla quale si sente maggiormente interessato, poi lo porta a casa e da esso estrae i problemi che ritiene rappresentativi. Ho consegnato una scheda (vedi allegato 3) dalla quale potevo capire se l'allievo aveva veramente scelto il volume della professione desiderata: in caso contrario doveva esprimere che tipo di attività gli sarebbe piaciuto fare.

Gli allievi affrontano gli esercizi a casa e poi, una volta risolti, li riportano a scuola per presentarli alla classe. Prima della presentazione ho provveduto a fornirne alcune copie a tutta la classe in modo che tutti potessero lavorare sullo stesso compito.

Dopo che il singolo allievo ha consegnato gli esercizi concernenti la professione scelta, il docente gli consegna una seconda scheda (vedi allegato 3) in cui lo invita a riflettere sull'attività appena svolta e sulla sua attinenza con la professione scelta e inoltre, gli chiede di valutare se queste esercitazioni lo hanno aiutato a comprendere quali sono le competenze matematiche proprie di quella professione. Gli allievi sono inoltre invitati a fare una riflessione anche sulle competenze matematiche delle professioni scelte dai compagni.

Tutti gli allievi sembrano aver già scelto la professione che intendono abbracciare dopo la quarta media. Una classe di questo tipo si presta bene per un'attività di questo genere, poiché tutti gli allievi sono orientati verso un tirocinio o una scuola professionale.

7.2.3. Valutazione dell'attività didattica proposta

L'attività ha avuto un discreto successo, dato che 5 allievi su 9 hanno potuto prendere un libro relativo alla professione che intendono praticare dopo le scuole medie, mentre i restanti 4 allievi hanno dovuto scegliere una professione diversa o affine. Il contenuto dell'attività era pertanto solo parzialmente coerente con gli interessi degli allievi. Ho trovato interessante che gli allievi abbiano potuto portare a casa i libri da consultare; hanno così potuto osservare e sperimentare in prima persona le competenze richieste per svolgere quel dato mestiere. È emerso che le competenze matematiche richieste sono per ogni professione le stesse e che, quindi, la scelta di una professione rispetto a un'altra non è pregiudizievole, come in genere si pensa.

In questa particolare attività il mio ruolo di docente è rimasto invariato perché, fondamentalmente, si è trattato pur sempre di svolgere esercizi di matematica anche se incentrati su determinate professioni. Per questo motivo il mio ruolo ha assunto solo parzialmente sfaccettature da orientatore, che mi hanno permesso di pormi sotto una luce diversa.

7.2.4. L’attività dal punto di vista degli allievi

L’attività è stata accolta molto bene all’inizio, anzi erano stati proprio gli allievi a chiedermi quale tipo di calcoli avrebbero dovuto affrontare una volta terminato l’apprendistato per questa o quella professione.

Devo ammettere che sono rimasti entusiasti quando hanno visto che mi ero interessato a loro e che gli avevo procurato libri interessanti. Mi hanno riferito che nessun altro docente si era occupato del loro futuro e in un certo qual modo mi ero avvicinato a loro e ai loro interessi. Poi, avendo il libro a casa, credo che gli alunni abbiano riflettuto sulla loro professione e sulle loro competenze: infatti, in tre casi è capitato che, quando mi hanno portato gli esercizi svolti, mi hanno anche detto che il compito era stato più difficile di quanto si aspettassero. Generalmente quest’attività ha permesso di rinforzare il loro interesse verso la professione scelta e di riflettere sul loro futuro.

Per contro, chi non ha potuto risolvere problemi riguardanti la professione desiderata non ha potuto cogliere appieno il senso dell’attività e gli è sembrato di svolgere un’esercitazione abituale.

7.3. Lavori di gruppo

Il quadro teorico mette in evidenza la necessità di dedicare spazio ad attività di *problem solving*. L’analisi dei temi e dei questionari sulle difficoltà evidenziano che la causa del fallimento, più che una cattiva gestione delle conoscenze, è la decisione a priori, anche inconscia di non utilizzarle. L’intervento che intendo mettere in atto mira a superare l’atteggiamento di fatalismo evidenziato, con il *problem solving* come metodo per prendere decisioni. Il lavoro a gruppi stimola infatti a risolvere problemi assumendosi il peso delle proprie scelte, favorendo quindi il passaggio della responsabilità dell’apprendimento dall’insegnante all’allievo.

L’ambiente migliore in cui svolgere questo tipo di attività è certamente il laboratorio matematico al quale dedichiamo circa un’ora alla settimana o ogni quindici giorni. In queste attività ho dovuto agire come supporto esterno, stimolando la riflessione e i processi risolutivi degli allievi con domande opportune, ma senza dare risposte né correggere gli errori, rispettando i tempi degli allievi. Questo ha dato enfasi all’attività, e richiamato fin dall’inizio l’assunzione di responsabilità da parte degli allievi, che dovevano attivare sui propri comportamenti determinati processi di controllo, senza delegarli a me.

Il lavoro collaborativo in matematica è molto importante non solo perché lo scambio di opinioni favorisce il sorgere di nuove idee e quindi il pensiero creativo, ma anche perché costringe a spiegare le proprie idee, ad argomentare, in definitiva ancora una volta ad assumere responsabilità.

8. Conclusioni

Per quanto riguarda i risultati, occorre dire che osservare un cambiamento di atteggiamento richiede in genere tempi più lunghi rispetto ai cambiamenti riguardanti le conoscenze. Nonostante il poco tempo investito, i cambiamenti evidenziati dalla maggior parte degli allievi, a qualche mese di distanza, sono da considerare soddisfacenti.

Dalla lettura dei temi è emerso che gli studenti del corso base, in generale, hanno un atteggiamento di fatalismo nei confronti dell'apprendimento, che può avere radici in un certo tipo di convinzioni sulla matematica e su di sé. Ciò non interessa tanto e solamente gli aspetti cognitivi, quanto il legame profondo fra aspetti cognitivi, metacognitivi e affettivi e mi suggerisce di cercare di superare gli abituali metodi di rimediazione.

Il questionario inoltre ha specificato che lo studente che ha alle spalle ripetuti fallimenti in matematica spesso trasferisce la sua percezione di fallimento alla matematica in generale. Questa percezione può essere associata a uno scarso senso di auto-efficacia e a convinzioni negative su di sé (non sono in grado, non sono abbastanza intelligente); altre volte la causa del fallimento è scaricata all'esterno (materia difficile, insegnante che non spiega bene). Entrambe le attribuzioni sono fatte risalire a cause percepite come non controllabili, e impediscono quindi d'investire risorse necessarie al successo.

L'intervento di recupero messo in atto con il contratto didattico ha migliorato la gestione degli eventi, vale a dire tutte quelle esperienze, nelle quali l'allievo ha potuto affrontare con relativo successo determinate situazioni e dalle quali ha ricevuto un esplicito feedback sulle proprie capacità e sul fatto che siano state utilizzate bene o male. Lo sviluppo del senso di auto-efficacia, conseguente a esperienze positive di gestione della classe, comporta il consolidarsi degli strumenti cognitivo-comportamentali e di autoregolazione, necessari agli allievi per pianificare e per mettere in atto comportamenti adeguati alla pratica delle situazioni-problema.

Le situazioni-problema da risolvere a gruppi ha favorito negli allievi l'osservazione di persone simili, i compagni, che riescono a raggiungere i propri obiettivi o ad affrontare situazioni problematiche attraverso l'impegno e l'azione personale. Nell'osservatore cresce così la convinzione di possedere le abilità necessarie per una buona riuscita in situazioni analoghe: ne consegue un'influenza positiva perché chi riesce funge da modello per chi invece ha difficoltà. A questo punto l'allievo bisognoso di aiuto può riceverlo dal compagno, che a sua volta trae profitto perché lo spiegare i propri processi contribuisce al loro rafforzamento.

I modi appena descritti di operare in classe tengono conto degli aspetti emotivi e ampliano l'osservazione e l'interpretazione non solo delle conoscenze espresse nelle verifiche scritte, ma in tutte le occasioni in cui un allievo fornisce prestazioni matematiche. Spesso gli allievi riescono ad esprimersi meglio e a valorizzarsi durante attività svolte in gruppo che, se tenute nella debita considerazione, possono permettere una valutazione degli allievi migliore di quella ottenibile con il metodo «classico», basato fondamentalmente solo sui lavori scritti. Trovo sia stato importante poter giudicare anche questi aspetti per fornire una valutazione più estesa. Trovo sia stato importante poter giudicare anche questi aspetti per fornire una valutazione più estesa. L'allievo si sente così maggiormente gratificato nel suo lavoro e sviluppa un senso di auto-efficacia che gli permette di cambiare atteggiamento nei confronti della materia, assumendosi la responsabilità del proprio apprendimento senza scaricarla sul docente.

Bibliografia

Andrich S., Miato L. e Polito M. (2001), Il superamento della lezione frontale: apprendimento cooperativo e le risorse del gruppo classe. *Materiali del 3° Convegno «La Qualità dell'integrazione nella scuola e nella società»*. Trento: Erickson

Ashman A., Conway R. (1991). *Guida alla didattica metacognitiva per le difficoltà di apprendimento.* Trento: Erickson.

Bandura, A. (2000), *Autoefficacia: teoria e applicazioni.* Trento: Erickson

Blum P. (2008). *Sopravvivere nelle classi difficili. Manuale per gli insegnanti.* Trento: Erickson.

D'Ambrosio M., Scucimarra G., Vertucci P. (2003). Aspettative su di sé e azione nel ritardo mentale: lo sviluppo del senso di autoefficacia attraverso la T.O. *Intervento al Convegno «Teoria e Prassi della Terapia Occupazionale».* Ercolano (NA), 25-26 ottobre 2003

Goleman D. (2005). *Intelligenza emotiva.* Milano: Biblioteca Universale Rizzoli.

Gruppo disciplinare di matematica (2007). *Piano di formazione di matematica. Allegato 1: Aspetti metodologici.* Bellinzona: Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport.

Magri T., Mancini F. (1991). *Emozione e conoscenza. Prospettive filosofiche, psicologiche e cliniche.* Roma: Editori Riuniti.

McLeod D.B., Adams V.M. (1989). *Affect and mathematical problem solving: a new perspective.* New York: Springer.

Tobias S. (1998). *Come vincere la paura della matematica.* Milano: Longanesi & C.

Zan R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire.* Milano: Springer.

Appendice

1. Sintesi delle domande del «Questionario atteggiamenti»

1. Ti piace la matematica? Perché?
2. Ti piace di più studiare la teoria o fare gli esercizi? Perché?
3. Hai difficoltà in matematica? Di che tipo?
4. Ti piacerebbe non avere difficoltà? Perché?
5. Pensa ai tuoi compagni/e che riescono bene in matematica. Secondo te, qual è (o quali sono) il motivo del loro successo?
6. Qui sotto c'è un elenco di possibili motivi per cui uno studente potrebbe desiderare di andare bene in matematica. Per ciascuno di essi valuta se per te si tratta di un motivo molto importante / abbastanza importante / poco importante / per niente importante.
   a) I miei genitori sarebbero contenti.
   b) Ci tengo ad andare bene a scuola.
   c) Mi sentirei più intelligente.
   d) L'insegnante sarebbe più contento.
   e) Mi sentirei più sicuro/a di me.
   f) Avrei più possibilità di essere promosso/a.
   g) Mi sentirei più padrone/a della materia.
   h) I miei compagni mi giudicherebbero più in gamba.
   – ALTRO (specificare).

7. A cosa attribuisci le tue difficoltà in matematica?
   a) Scarsa intelligenza.
   b) Intelligenza di tipo diverso (da quella necessaria).

c) Scarso impegno.
d) La materia é difficile.
e) Sfortuna.
f) Le richieste del docente sono eccessive.
g) Metodo di studio sbagliato.
h) Lacune di base.
i) Studio insufficiente.
l) Fattori emotivi.
– ALTRO (specificare).

2. Contratto didattico

Il docente è disposto a non considerare l'andamento che la classe ha avuto finora, se questa dimostra di migliorare sia l'atteggiamento sia il profitto durante il secondo semestre. Se gli allievi riescono a dimostrare nella seconda metà dell'anno che quanto fatto finora è stato appreso, il docente terrà conto solo degli apprendimenti raggiunti. In caso contrario il docente chiaramente non potrà fare a meno di segnalare la situazione nel libretto finale.

La nota finale dopo una contrattazione con gli allievi sarà calcolata considerando i seguenti fattori:

1. **Comportamento e partecipazione in classe:** dopo ogni lezione il docente dà una nota ad ogni allievo, servendosi di segni «+» o meno «–» scritti per ogni allievo alla lavagna in modo da permettergli di capire se partecipa in modo positivo oppure si dedica alle chiacchiere o a disturbare i compagni con argomenti che non riguardano la lezione.

La nota di comportamento e partecipazione conta per il 30% della nota finale.

2. **Lavori scritti:** Viene mantenuto il vecchio modo di valutazione tramite prove scritte che data le difficoltà di alcuni allievi ad affrontare una prova del genere, vengono ridimensionate dal punto di vista valutativo e contano così per il 30% della nota finale. Il numero di prove giudicato equo è 3.

3. **Lavori di gruppo:** Anche i lavori di gruppo vengono valutati dal docente che prende nota di ragionamenti intuitivi, di partecipazione e collaborazione da parte di tutti i membri del gruppo. Ognuno all'interno del gruppo svolge il ruolo che gli viene assegnato, oppure cerca di rendersi utile come meglio può affinché tutto il gruppo funzioni bene. Alla fine dell'attività il docente s'impegna a comunicare come ha lavorato il gruppo e come, se caso, potrebbe migliorare. La nota dei lavori di gruppo conta per il 25% della nota finale.

4. **Compiti:** I compiti servono ad ogni allievo per fissare determinati concetti e per mettersi alla prova in vista di una verifica scritta. Ogni allievo s'impegna a fare i compiti anche con un compagno evitando di copiare in modo evidente ma soprattutto inutile. Devono essere fatti almeno il 60 % dei compiti per avere la sufficienza. Il docente concede che il 20 % dei compiti, per motivi vari, possono non essere fatti o non consegnati nel giorno stabilito.

3. Questionario sulla matematica nelle professioni

- Tra circa cinque o sei mesi la scuola media finisce e quindi non sarai più obbligato ad andare a scuola. Sai già cosa fare? Se non hai ancora le idee in chiaro cosa ti piacerebbe fare?
- Anche se non sembra che la matematica entri in tantissime professioni, sfogliando i testi portati in classe dal docente puoi costatare che riguardano proprio il calcolo relativo a una data professione. Scegli il testo che riguarda maggiormente la professione che ti interessa. Se non lo trovi, lascia che i compagni prendano il volume della professione che intendono svolgere e di quelli che restano scegli la professione che ti interessa di più. Quale volume hai preso?

Ora puoi portare a casa il volume e svolgere esercizi che ti sembrano più significativi per la tua scelta professionale. Gli esercizi scelti non devono essere per forza i più difficili, ma cerca di prendere i più significativi. Li mostrerai al docente che farà delle copie anche per i tuoi compagni perché verranno poi svolti dalla classe intera durante le lezioni di matematica. Tu sarai lo specialista di quella professione e insieme al docente aiuterai dapprima i compagni a risolverli e poi darai la soluzione.

4. La matematica nelle professioni

- Gli esercizi che hai scelto ti è sembrato che avessero a che fare con la tua professione? Fai almeno un esempio per spiegarti.
- Questi esercizi ti hanno aiutato a capire meglio quali competenze matematiche richiede la tua professione? Spiega cosa hai dovuto fare negli esercizi, facendo una lista del genere di calcolo che hai dovuto svolgere.
- La professione che vuoi fare o che hai dovuto scegliere rispecchia ancora quello che ti immaginavi? Ti sembra in qualche modo diversa?
- I tuoi compagni hanno scelto altre professioni e anche tu hai dovuto svolgere quegli esercizi. C'è stata una professione diversa dalla tua che ti è piaciuta? Quale?
- Hai avuto l'impressione che le competenze matematiche per la tua professione fossero diverse rispetto alle altre? In pratica quale tipo di calcoli hai dovuto fare nel tuo caso? (calcolo letterale, equazioni, percentuali, geometria piana, geometria solida, notazione scientifica, etc.)
- Delle cose trattate in classe quali erano quelle che sono servite maggiormente per fare il calcolo professionale di tutte le professioni?
- Ti senti di dire che se scegli una professione piuttosto di un'altra allora sarai più in grado di riuscire considerando solo l'aspetto di calcolo e matematico?
- Su quali argomenti dovresti insistere per sentirti competente nella tua professione?
- Su quali argomenti invece ti senti già competente nella tua professione?

2. L'insegnamento della probabilità al liceo De Finetti vs Laplace[1]

Alan Bucciarelli

In high school probability is mostly taught using the classical approach. The aim of this research is on the one hand to investigate a possible relationship between this didactical approach and the lack of interest displayed by most students for the subject of probability, and on the other hand if a completion of the classical approach using De Finetti's subjective approach, could provide a renewed interest in the study of probability.

1. Introduzione

In questo lavoro analizzerò il tema dell'insegnamento della probabilità al liceo. Mi concentrerò soprattutto sull'approccio soggettivista alla probabilità come possibile strumento per motivare maggiormente gli studenti verso questa disciplina.

Rispetto agli approcci classici, che definiscono la probabilità solamente in maniera operativa senza darne un significato semantico, l'impostazione soggettivista di Bruno De Finetti oltre a dare un significato al concetto di probabilità, ingloba le altre impostazioni come casi particolari, risultando applicabile a qualsiasi situazione d'incertezza e completando quindi in modo convincente il concetto di probabilità. Inoltre, con lo strumento della scommessa coerente, permette di ritrovare gli assiomi di Kolmogorov che rappresentano le basi assiomatiche della probabilità, universalmente condivise dai matematici.

Da qui il titolo un po' provocatorio di matrice pugilistica De Finetti vs. Laplace, inteso non come scontro didattico vero e proprio fra due diverse concezioni della probabilità volto a determinarne un solo vincitore, quanto piuttosto come rivalutazione di De Finetti in opposizione al classicismo imperante nella probabilità scolastica come il solo «significato» di probabilità di un evento. Non si tratta quindi di sostituire una concezione con un'altra quanto piuttosto di ampliare la percezione del concetto di probabilità.

Dopo aver presentato le mie fonti d'ispirazione e il quadro teorico di riferimento, mi dedicherò a una parte introduttiva sulle origini storiche della probabilità (cap.3). Questo sarà seguito dalla presentazione delle ipotesi e dalla congettura di ricerca (cap.4). In seguito (cap.5) descriverò nel dettaglio come intendo procedere nella mia analisi e infine (cap.6) presenterò i risultati della ricerca. Le conclusioni con relative riflessioni finali saranno presentate nell'ultimo capitolo (cap.7). Per ovvi motivi di tempo

1. Sintesi del lavoro di diploma in didattica della matematica. SUPSI, Dipartimento della formazione e dell'apprendimento (DFA), Locarno. Docente di riferimento: Michele Impedovo. Anno accademico 2009-2010.

legati alle ore limitate a mia disposizione durante il periodo di pratica professionale, e al campo ristretto sui cui effettuare lo studio, una sola classe quarta di liceo, la mia analisi potrà costituire soltanto un primo spunto di riflessione attorno al tema e non ha la pretesa di fornire risposte assolute. Come si potrà vedere, ho potuto comunque ricavare risultati che a parer mio sono molto interessanti.

2. Fonte di ispirazione e quadro teorico di riferimento

L'ispirazione per questo lavoro è nata da due avvenimenti. Il primo è stata la reazione degli studenti all'affermazione del docente nel corso di una lezione di pratica professionale al Liceo di Bellinzona. Quando infatti il docente ha proposto agli studenti di ripassare il tema del calcolo delle probabilità, la reazione della classe è stata generalmente negativa.

Il secondo avvenimento è stata la scoperta di Bruno de Finetti durante il corso di didattica disciplinare del prof. Michele Impedovo, presso il DFA della Supsi di Locarno, nel quale si è parlato di Bruno De Finetti e del suo modo di intendere la probabilità. L'idea di associare la parola «soggettivo» a un concetto matematico mi ha ispirato per questo lavoro. Ho creduto infatti che potesse essere interessante vedere sul campo se con questo tipo di approccio soggettivista alla probabilità, si riesca a motivare e interessare maggiormente gli studenti verso un'area della matematica decisamente poco amata.

Per la mia analisi mi sono basato soprattutto sulle opere di Bruno De Finetti (1980), Romano Scozzafava (1988 e 2010) e W.Feller (1968).

3. Scuole di pensiero

3.1. Concezione classica

Questa è la definizione che risale a Pierre-Simon Laplace[2] ed è comunemente chiamata *definizione classica*.

Def. *La probabilità del verificarsi di un evento è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli all'evento e il numero dei casi possibili, purché questi ultimi siano tutti equiprobabili.*

Esempio 1. Nel lancio di un dado non truccato la probabilità che si verifichi l'evento «esce un numero pari» è il rapporto

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\quad \text{cioè il } 50\%.$$

Questa concezione ha il vantaggio che riporta il calcolo delle probabilità alla «semplice» attività del contare i casi favorevoli e i casi possibili e per alcune situazioni è certamente un approccio sensato (dadi, monete, carte sono tra gli esempi più

2. Pierre Simon-Laplace (Beaumont-en-Auge, 23 marzo 1749 – Parigi, 5 marzo 1827) matematico, fisico e astronomo francese. È considerato il massimo scienziato del periodo napoleonico.

comunemente portati). Ma questa definizione non è esente da critiche e punti deboli. Non è chiaro per esempio come determinare l'equiprobabilità degli eventi. Inoltre nell'uso dell'accezione equiprobabile si usa la stessa parola che si vuole definire, cioè la probabilità. Non viene spiegato quindi cosa sia la probabilità ma se ne da una «definizione» operativa. Ci si può poi chiedere cosa succede se i casi possibili siano infiniti. Inoltre, non tutte le situazioni di incertezza rientrano all'interno di questo schema. Non sarebbe possibile ad esempio, valutare in modo classico la probabilità che il titolo azionario della Novartis domani scenda di 2 punti percentuali, oppure che l'anno prossimo il Berna vinca di nuovo il titolo svizzero di *hockey*.

3.2. Concezione frequentista

Questa definizione risale a Richard Von Mises[3].

Def. *La probabilità di un evento è il limite a cui tende la frequenza relativa dell'evento al crescere del numero degli esperimenti.* Detto altrimenti, se A è l'evento, la probabilità di A è il limite

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

dove n_A è la frequenza dell'evento A, n è il numero di esperimenti.

Esempio 2. Se in una successione di $m = 1000$ osservazioni di neonati si rappresenta ogni nascita di un bambino di sesso maschile con un evento E_i, e si verificano $k = 256$ di tali eventi (cioè nascono 526 maschi e 474 femmine), la probabilità $P(E)$ di nascita di un maschio si valuta uguale a $\frac{526}{1000}$.

Il pregio di questa definizione è che non presuppone l'equiprobabilità degli eventi. Essa presenta purtuttavia un notevole difetto: si deve presupporre che l'esperimento sia ripetibile più volte, idealmente infinite, sotto le stesse condizioni. Questo crea notevoli ostacoli poiché se nell'esempio precedente la ripetibilità dell'esperimento ha un senso (molte nascite), questo non è più vero se si vuol rispondere alla domanda circa la probabilità che vi sia vita su Marte. È piuttosto difficile immaginare un gran numero di esperimenti in tal senso… Oppure, se si vuole valutare la probabilità che l'Inter vinca la finale di Champions League, è piuttosto difficile pensare di poter ripetere la partita un gran numero di volte sotto le stesse condizioni, e osservare la frequenza di vittoria.

Infine, anche questo approccio non chiarisce quale sia il significato della probabilità, fornendone solo una definizione operativa.

Come si è visto, sia l'approccio classico sia quello frequentista sono applicabili a tutta una serie di casi particolari: simmetria delle situazioni (equiprobabilità) e ripetibilità di un esperimento. Purtuttavia, in molte situazioni di incertezza questi due tipi di impostazione non sono di grande aiuto. Ed è proprio in questo margine d'inapplicabilità che si inserisce l'interpretazione della probabilità di scuola soggettivista, che vide in Bruno de Finetti un convinto sostenitore e promulgatore.

3. Richard Von Mises (Lemberg, 19 aprile 1883 – Boston, 14 luglio 1953) è stato un matematico, ingegnere e accademico austriaco naturalizzato statunitense. Ha dato importanti e pionieristici contributi nel campo della meccanica dei fluidi, della aerodinamica, della aeronautica, della statistica e di teoria della probabilità.

3.3. Definizione soggettivista

3.3.1. La semantica: la probabilità come grado di fiducia

Nel 1970 Bruno de Finetti[4] propose una definizione della probabilità che facesse a meno delle ipotesi di fondo dell'approccio frequentista (ripetibilità idealmente infinita degli esperimenti) e classico (equiprobabilità degli eventi).

Secondo la definizione di De Finetti, la probabilità di un evento è il *grado di fiducia* che un individuo ripone nel verificarsi di quell'evento. Si assiste qui a un radicale cambio di concezione: definire la probabilità come il grado di fiducia riposto in un evento significa che la probabilità perde la sua presunta oggettività, che si cercava di ricavare dai precedenti approcci, e diventa *soggettiva* a colui che valuta il verificarsi dell'evento. Potremmo dire, per riprendere un concetto fondamentale in quella meccanica quantistica che tanto deve al calcolo delle probabilità, che la probabilità dipende dall'*osservatore*, cioè da colui che deve valutare la probabilità dell'evento. A pensarci bene, l'idea di probabilità come grado di fiducia, è forse quella più vicina all'idea di valutare la probabilità secondo il senso comune. Se infatti chiedessimo a una persona della strada di valutare la probabilità che la sua squadra del cuore vinca il prossimo scudetto, la risposta sarebbe quasi certamente del tipo «l'80%», oppure «8 su 10». I ragionamenti che ha fatto per dare questa risposta sono di tipo istintivo, basati sulle sue personali convinzioni circa la sua squadra. È infatti poco verosimile che egli abbia pensato a qualcosa del tipo «casi favorevoli/casi possibili», oppure che abbia pensato di ripetere 1000 volte il campionato sotto le stesse condizioni.

L'idea centrale di probabilità come *grado di fiducia* trova un'autorevole conferma nella *Guide to the Expresion of Uncertainty and Measurement*, che, pubblicata a Ginevra nel 1993, riguardo al modo di esprimere le incertezze sperimentali afferma:

> «In contrasto con il punto di vista della probabilità basato sulla frequenza, un punto di vista altrettanto valido è quello che sostiene che la probabilità è una misura del grado di fiducia nel verificarsi di un evento A. Per esempio se si afferma che il grado di fiducia in A è 0.5 significa che un individuo ritiene indifferente la scelta fra: (1) ricevere una somma S se A si verifica e niente se A non si verifica; (2) ricevere S se A non si verifica e niente se A si verifica».

D'accordo per la definizione che ne chiarisce il contenuto semantico, rimane il problema di come renderla operativa e disporre di uno strumento che permetta di *«controllarne la valenza logica con una adeguata sintassi: questo strumento è il concetto di scommessa coerente»*. (Scozzava, 2010)

3.3.2. La sintassi: la scommessa coerente

De Finetti fornisce due criteri per controllare la valenza logica del contenuto semantico della definizione di probabilità: il primo è quello della penalizzazione, il secondo riguarda il concetto di scommessa coerente. Questo lavoro è basato

4. Bruno de Finetti (Innsbruck, 13 giugno 1906 – Roma, 20 luglio 1985) è stato un matematico e statistico italiano, noto soprattutto per la formulazione della concezione soggettiva operazionale della probabilità.

sul secondo criterio, per una completa spiegazione del primo criterio si rimanda all'opera di De Finetti (1980).

Utilizzando il criterio della scommessa coerente, la probabilità secondo la scuola soggettivista diviene quindi:

Def. *La probabilità di un evento è il prezzo che un individuo ritiene equo pagare per ricevere 1 se l'evento si verifica, 0 se l'evento non si verifica.*

In modo da rendere concretamente applicabile la definizione si aggiunge un criterio di coerenza: *le probabilità degli eventi devono essere attribuite in modo che non sia possibile una vincita o una perdita certa. In altre parole, scommettitore e banco devo essere disposti a «scambiarsi di posto».*

Esempio 3. Se sono disposto a scommettere 75 fr sulla vittoria di Federer contro Nadal agli Open di Francia per vincerne 100 fr, significa che io attribuisco alla vittoria di Federer una probabilità di 0.75, cioè del 75%. Il mio grado di fiducia sull'evento vittoria di Federer è in questo caso piuttosto alto.

Esempio 4. Mia moglie è incinta. Sarà maschio o femmina? L'approccio classico direbbe 50% (o è maschio o è femmina) ma il mio grado di fiducia mi dice altrimenti (per la forma della pancia della futura mamma, per il fatto che non è stata una gravidanza difficile, in altre parole per le informazioni in mio possesso) e sono disposto a pagare 90 fr con la speranza di vincerne 100.

3.4. Definizione assiomatica

Prima della definitiva sistemazione dal punto di vista assiomatico, per la quale bisognò comunque attendere fino agli inizi del novecento, (1933) la probabilità visse quindi di concezioni anche radicalmente diverse. Era abbastanza logico a questo punto che per i matematici vi fosse la necessità di gettare basi solide sulle quali innestare il discorso probabilistico e sulle quali vi fosse uniformità di vedute. Per dirla in linguaggio matematico, occorreva assiomatizzare il concetto di probabilità.

Questo risultato fu raggiunto da Andrey Nikolaevic Kolomogorov[5] nel 1933 con il suo *Grundbegriffe der Wahrscheinilckeitsrechnung*. Contrariamente alle concezioni classiche e frequentista che non si curavano di spiegare cosa è la probabilità dandone solamente una interpretazione operativa, Kolmogorov (1933) da una definizione assiomatica della probabilità, a prescindere da come questa venga calcolata. In questa nuova concezione della probabilità non si chiarisce ancora quale sia il contenuto semantico della probabilità ma se ne danno le regole sintattiche alle quali ogni probabilità deve obbedire.

5. Andrej Nikolaeviã Kolmogorov (Tambov, 25 aprile 1903 – Mosca, 20 ottobre 1987), è stato un matematico russo. Compì importanti progressi in diversi campi accademici, tra cui la teoria delle probabilità, la topologia, la logica intuizionista, la turbolenza, la meccanica classica e la complessità computazionale. Nel 1922 trovò una serie di Fourier che diverge quasi ovunque, che gli valse la fama nel mondo. Nel 1925 conseguì la laurea e, iniziate le ricerche sotto la supervisione di Luzin, pubblicò 8 articoli tra cui quello che diverrà la pietra miliare del calcolo delle probabilità.

Vediamo la definizione assiomatica in breve, per una visione completa si rimanda alla lettura dell'originale, Kolmogorov (1933). Quelli che seguono sono i tre assiomi di base sui quali è costruita la probabilità secondo Kolmogorov.

Def. Siano Ω lo spazio dei risultati di un esperimento casuale, A una sigma-Algebra su Ω, P una misura P: $A \to \mathbb{R}$. P è una probabilità se sono soddisfatti i seguenti assiomi

i) $P(A) \in [0;1]$

ii) $P(\Omega) = 1 \quad ; \quad P(\varnothing) = 0$

iii) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,,\; A_i \cap A_j = \varnothing, \quad \forall i \neq j$ (additività finita)

nel caso n=2 la iii) diventa

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2), \quad A_1 \cap A_2 = \varnothing$$

Concludendo, un'osservazione interessante è che in fondo nessuno dei precedenti approcci esclude l'altro. In particolare, l'approccio assiomatico è parallelo a tutti gli altri, tanto più che Kolmogorov non fornisce un modo per calcolare le probabilità. Il vantaggio dell'approccio di De Finetti potrebbe consistere nel permettere di abbracciare un più vasto numero di situazioni siccome non necessita né dell'equiprobabilità, né della ripetibilità di un esperimento, idealmente infinite volte, sotto le stesse condizioni. In linea di principio, utilizzando l'interpretazione soggettivista si può attribuire un valore di probabilità a qualsiasi situazione di incertezza.

Ma anche qui, De Finetti non rigetta quanto fatto dai classici o dai frequentisti, anche perché nella sua definizione di probabilità resta il problema di come valutare la posta da mettere in gioco per incassare l'importo unitario. Egli infatti ritiene indispensabile poter ricorrere ad altre metodologie per ricavare il valore della *puntata* se necessario, anche in modo classico o frequentista. Per lui, il nocciolo della questione sta nell'utilizzare tutte le informazioni possibili per dare una valutazione della probabilità nel modo più completo e coerente possibile. In questo senso si nota come il termine *soggettivo* non significhi *arbitrario*.

4. Ipotesi e congettura di ricerca

4.1. Premessa: la probabilità a scuola

Come si è visto, la probabilità è entrata relativamente tardi a far parte della storia della matematica. Il cammino che ha seguito è stato poi tutt'altro che lineare, facendo scaturite varie concezioni, vari modi di interpretarla. A questo punto ci possiamo chiedere quale impatto abbia avuto la natura ambigua di questo fondamentale concetto nel suo insegnamento a scuola. Non ho certo l’ambizione di fornire in questo poco spazio una risposta definitiva ed esauriente a questa domanda, anche perché va sottolineato che il campione su cui svolgo la ricerca non è rappresentativo dell’intera istituzione scolastica ticinese, bensì riferita ad una realtà circoscritta. È possibile tuttavia giungere a diverse interessanti conclusioni studiando il microcosmo di una classe del quarto anno di Liceo. Parte di quello che esporrò qui di seguito lo si ritroverà nelle spiegazioni relative al capitolo 4 sulle ipotesi e congetture di ricerca.

I programmi cantonali per la scuola media superiore in Ticino prevedono che il calcolo delle probabilità sia parte integrante del percorso formativo di uno studente liceale riconoscendone quindi da un lato l’importanza disciplinare, e dall’altro l’indubbio valore culturale. A livello di programmazione il calcolo delle probabilità viene solitamente inserito nell’anno di terza liceo.

A detta dei docenti, negli esami di maturità la probabilità, contrariamente ad altri argomenti (si pensi ad esempio alla geometria vettoriale o allo studio di funzioni), non è però sempre presente. Posso solo azzardare in questa sede qualche possibile risposta sul motivo di questa mancanza. Forse perché, seppur prevista dai piani di formazione, è un tema che viene o trattato marginalmente o più spesso tralasciato, e nella migliore delle ipotesi, trattato in misura tal da non ritenerne opportuno l’inserimento nell’esame di maturità. Oppure perché anche se svolta secondo i programmi, non la si ritiene una nozione indispensabile ai fini di una valutazione complessiva delle competenze e conoscenze di uno studente di quarta liceo.

Probabilmente, per il fatto che non vi sia ancora un percorso didattico comune sul quale la maggior parte dei docenti si trova d’accordo, la tendenza è quella di trattare la probabilità con approcci diversificati, a discrezione del docente che prediligerà un aspetto piuttosto che un altro: in alcuni casi diventa dunque calcolo combinatorio (con tutte le difficoltà che questo tema porta con sé), mentre per altri è soprattutto statistica e per altri ancora è una misura su insiemi opportuni. Questo per quel che riguarda le opinioni personali dei docenti sulla probabilità. Mentre sul fronte dell’insegnamento la maggior parte dei docenti utilizza l’impostazione classica.

Dal punto di vista degli studenti invece, è possibile che, mancando una condivisione didattica attorno al tema con una conseguente trattazione così variegata, possano crearsi fraintendimenti, oppure essere fonte di difficoltà e disaffezione per l’argomento. Privilegiando un approccio piuttosto che un altro si può infatti correre il rischio di inciampare in quello che Brousseau (1997) definisce un ostacolo didattico.

Pensiamo ad esempio al calcolo combinatorio usato massicciamente nell’approccio classico. È notoriamente un argomento ostico e difficile. È quindi abbastanza logico che se un docente propone la probabilità in senso classico puntando molto sul calcolo combinatorio questo porta con sé il pericolo di una identificazione da parte dello studente dell’approccio usato con il concetto stesso. Ciononostante, l’approccio classico è quello ritenuto maggiormente diffuso per trattare la probabilità a scuola. Si troverà conferma di questa ipotesi più avanti nella presente ricerca, quando presenterò i dati raccolti in seguito a un’indagine svolta all’interno dell’istituzione scolastica in cui svolgo la pratica professionale. È proprio a partire da quanto osservato sul campo che ho potuto formulare le ipotesi di ricerca per questo lavoro e la relativa congettura di ricerca.

4.2. Ipotesi di ricerca

Questo lavoro prende avvio dalla premessa che gli studenti liceali in genere non amano molto il calcolo delle probabilità. Per averne conferma ho dialogato con la classe nella quale ho svolto la ricerca e le risposte hanno largamente confermato questa premessa di partenza. Ciò ha portato alla mia personale ipotesi di ricerca che fa da guida al presente lavoro: gli studenti liceali vivono male il calcolo delle probabilità e una possibile causa potrebbe essere da ricercare nell'approccio didattico usato per insegnarlo. Per avere conferma di questa ipotesi mi sono basto sui dati raccolti dopo aver consegnato un questionario investigativo al corpo insegnante del Liceo di Bellinzona, composto di 12 docenti.

Il questionario si proponeva di far emergere da un lato quali sono le opinioni personali dei docenti riguardo al calcolo delle probabilità e al suo vissuto a scuola (sempre dal punto di vista dei docenti) e dall'altro di mettere in luce quale fosse l'approccio didattico maggiormente utilizzato per l'insegnamento della probabilità.

4.3. Congettura di ricerca

La congettura che sta alla base del lavoro è che sia possibile rimotivare e interessare maggiormente gli studenti affrontando il calcolo delle probabilità presentando anche un approccio di tipo soggettivista, in modo da ampliare il discorso probabilistico inserendolo in un quadro più generale che non quello basato sulla definizione classica «casi favorevoli/casi possibili». Come si vedrà dalle risposte degli studenti, a molti di loro manca un significato di che cosa sia la probabilità. Gli approcci classico e frequentista non chiariscono il significato semantico della probabilità ma spiegano come la si calcola e, infatti, per alcuni studenti, la probabilità è «un calcolo». L'approccio soggettivista permette di giungere a una visione più generale del concetto di probabilità fornendone nel contempo anche un significato. Inoltre, l'approccio soggettivista, non essendo in contrasto con le altre concezioni di probabilità, permette di ritrovare i tre assiomi di base della probabilità a partire da un concetto familiare a tutte le persone, quale quello di scommessa e di inglobare al tempo stesso le situazioni stereotipate dell'approccio classico come casi particolari. Un approccio al pensiero probabilistico che includa anche la definizione soggettivista, allargando il discorso anche al punto di vista storico-culturale, e sfruttando un percorso che aggiunga a quanto visto con l'approccio classico il noto concetto di scommessa, può sicuramente avere, a parer mio, importanti ricadute positive in ambito didattico.

5. Metodologia

5.1. Scelta delle classi

Il lavoro coinvolge una classe quarta di corso non approfondito presso il Liceo Cantonale di Bellinzona dove sto svolgendo il periodo di pratica professionale. Si tratta di 20 studenti che hanno in parte già affrontato il discorso probabilistico nell'anno di terza. Il fatto che la classe abbia già trattato la probabilità mi ha permesso di avere a portata di mano la situazione ideale per svolgere una ricerca di questo tipo. Non si è trattato di introdurre ex-novo la probabilità, ma di lavorare con una classe che aveva già una visione oggettiva della probabilità, limitata a quei casi stereotipati che rientrano nell’approccio classico e di provare ad aggiungere la visione più ampia dell’approccio soggettivista. Dal lato pratico questa conoscenza di base della classe mi ha aiutato, visto il poco tempo a mia disposizione per evidenti fattori contingenti legati al numero limitato di ore di lezione. Per quanto riguarda invece la mia analisi, come si vedrà più avanti, questa conoscenza a priori ha comportato per alcuni studenti una certa resistenza ad accettare una concezione nuova della probabilità, fattore questo che mi ha aiutato a confermare l’ipotesi di ricerca, fornendomi i presupposti ideali per tentare di stimolare un rinnovato interesse per l’argomento grazie all’approccio soggettivista.

5.2. La probabilità per gli studenti

Non ho ritenuto necessario indagare sulle opinioni che gli studenti hanno della probabilità tramite un questionario perché avevo la possibilità di dialogare direttamente con la classe. Ho quindi posto loro la semplice domanda: «Ti piace il calcolo delle probabilità? Perché?» e ho raccolto le loro risposte nella tabella 1. L’analisi segue nel capitolo 6.

5.3. La probabilità per i docenti (questionario Q1)

Il questionario Q1 (vedi allegato) è stato distribuito ai 12 docenti dell’Istituto con l’obiettivo da un lato di rilevare le opinioni del corpo insegnante riguardo al calcolo delle probabilità, e dall’altro di far emergere quale fosse l’approccio maggiormente usato per l’insegnamento di questo argomento. Ciò mi ha permesso di ricavare l’ipotesi di ricerca e di trovare lo spunto per formulare la congettura sui cui innestare il presente lavoro.

5.4. Costruzione e attuazione dell’intervento didattico

Ho pensato a un percorso didattico sull’arco di 6 ore lezione. La classe aveva già trattato la probabilità in terza e questo mi ha permesso di sfruttare le loro conoscenze pre-acquisite sull’argomento per metterli di fronte situazioni di incertezza in cui risulta poco sensato utilizzare gli approcci classico e frequentista.

L’obiettivo era duplice: far nascere da un lato l’esigenza di ampliare la concezione di probabilità per poter avere modo di confrontarsi con situazioni nuove, e dall’altro di portare gli studenti a ritrovare le tre regole/assiomi della probabilità attraverso il concetto di scommessa coerente e di riconoscere che le impostazioni di probabilità precedenti non perdono di validità, ma acquistano una luce nuova a seconda di quante e quali informazioni l’individuo possiede per valutare la probabilità di un evento. In un primo tempo ho quindi sottoposto alla classe una domanda per avviare il discorso, il che mi ha permesso poi di continuare la discussione e incanalarla nel concetto definettiano di probabilità soggettiva. Per una visione completa e dettagliata di questo itinerario si rimanda all’allegato 2 e alla presentazione dei risultati nel capitolo 6. L’allegato 3, contiene le tracce dell’allegato 2, che ho distribuito alla classe in modo da permettere agli studenti di seguire la lezione senza dover ricopiare per intero l’allegato 2, che ho distribuito alla fine delle lezioni come riassunto completo di quanto svolto.

5.5. Valutazione della valenza formativa dell'intervento didattico

Ho creduto utile avere un riscontro di quanto svolto con la classe sia da un punto di vista qualitativo sia quantitativo.

Per avere informazioni di carattere qualitativo ho sottoposto alla classe il questionario Q2. (allegato 4). L'obiettivo era di rilevare se la concezione soggettivista avesse contribuito in qualche misura ad ampliare la visione della probabilità, ad arricchire le loro conoscenze sull'argomento, mettendo in luce il ruolo fondamentale dello stato di informazione di chi valuta una probabilità per sottrarla dalla presunta oggettività con cui spesso è identificata. Per avere un riscontro quantitativo, invece, ho elaborato alcuni esercizi che ho sottoposto alla classe (allegato 5) con l'obiettivo di verificare da un lato se fosse passato il concetto di scommessa coerente e dall'altro se fosse chiaro che la probabilità soggettiva non è un nuovo approccio che sostituisce la concezione classica, ma un completamento della stessa, da usare quando le altre impostazioni non sono di grande utilità. I risultati dell'intervento didattico verranno presentati e discussi nel prossimo capitolo.

6. Risultati della ricerca e analisi

6.1. La probabilità per gli studenti

Le domande hanno fornito spunti per un'analisi preliminare molto interessanti. Qui di seguito, la tabella 1 illustra in forma schematica i risultati emersi, raggruppati per tipologie di risposta.

Domanda	**Risposte**	**Perché**	**Frequenza assoluta**
1. Ti piace la probabilità?	**sì**	È interessante, si parla di dadi, carte e monete.	3
	no	È poco concreta, i problemi sono troppo diversi e le formule di calcolo combinatorio non sempre ti aiutano. Inoltre non ho mai capito bene cosa sia la probabilità.	9
	abbastanza	Abbastanza, anche se a volte, pur sapendo cosa fare, non ero molto in chiaro di cosa stessi facendo.	8

Tabella 1

Dalle risposte degli studenti emergono alcuni punti molto interessanti che in parte confermano alcune delle ipotesi iniziali del mio lavoro. La premessa iniziale secondo cui gli studenti liceali, relativamente al campione considerato, non amano molto il calcolo delle probabilità emerge molto chiaramente da quanto dichiarato dagli studenti stessi. Anche coloro che pur non disdegnano questo argomento non mostrano grandi entusiasmi, segno che anche costoro non sembrano aver riconosciuto la portata dell'argomento e la sua valenza scientifica e culturale. Il punto più importante che emerge chiaramente dalle risposte riportate è quello relativo al significato di probabilità, che appare generalmente insufficientemente capito e al fatto che la probabilità sembra venir molto spesso identificata con il calcolo combinatorio. Questo ultimo aspetto emerge dalla risposta in cui gli studenti parlano di formule che, sebbene viste ed esercitate, spesso non aiutano a risolvere il problema. Qui essi fanno in realtà riferimento proprio al calcolo combinatorio.

6.2. La probabilità secondo i docenti

Illustrerò quanto emerso dalle risposte dei docenti alle domande del questionario tramite la tabella riassuntiva che segue. Il questionario è stato consegnato a tutto il corpo insegnante per un totale di 12 docenti. Sono stati ritornati 8 formulari, il tasso di risposta è stato quindi di circa il 66%, che può già essere considerato un riscontro indicativo che legittima qualche conclusione.

Domanda	**Risposte**	**Frequenza assoluta**
1. Perché insegnare la probabilità?	Perché è prevista dai piani cantonali	1
	È importate per il dopo liceo	4
	Fornisce un modo nuovo di pensare	4
2. La insegni volentieri?	Sì	3
	Non particolarmente	3
	Abbastanza	2
3. Come valuti, a livello di spendibilità culturale la probabilità rispetto ad esempio alla geometria vettoriale?	Alta	5
	Media	2
	Non bisogna fare classifiche tra un argomento e l'altro	1
4. Perché la probabilità è il primo tema che salta se si è tirati con il tempo?	Abitudine	1
	È un argomento più isolato rispetto ad altri e quindi più facilmente eliminabile	3
	Ha tempi di trattazione tropo lunghi e finirebbe con il venire svolta a scapito di altri temi temi	4
5. Come vivono gli studenti la probabilità?	In generale piuttosto male, gli interessati sono pochi	3
	Dopo un primo interesse subentrano molto spesso demotivazione e distacco	4
	Come vivono tutte le altre materie	1
6. Su quale approccio poni l'accento per insegnare la probabilità?	Classico/frequentista. Ma la vera natura della probabilità è assiomatica	3
	Classico. Ma la vera natura della probabilità è assiomatica	5
	Soggettivista	0

Tabella 2

Per quel che riguarda le opinioni personali dei docenti sulla probabilità, dalle risposte non emerge una passione particolare per quest'area della matematica, e questo è un dato piuttosto significativo. Le motivazioni spaziano dalla personale formazione del docente alle difficoltà di programmazione didattica. Si riconoscono alla probabilità importanza formativa e valenza culturale, ma poi in molti casi si ammette di non insegnarla molto volentieri e che non deve comunque venire svolta a scapito di altri argomenti considerati, implicitamente, forse più importanti.

Per quel che attiene invece a considerazioni puramente didattiche, credo emerga abbastanza chiaramente quale sia la metodologia usata per affrontare il discorso probabilistico. Tutti i docenti intervistati, infatti, affrontano il calcolo delle probabilità utilizzando in prevalenza l'interpretazione classica/frequentista, relegando l'interpretazione soggettivista ad una semplice curiosità storica.

Nessun docente tra gli intervistati, dunque, tratterebbe o ha trattato la probabilità utilizzando il concetto di scommessa coerente della scuola soggettivista. In questo senso si può ritrovare l'ipotesi di ricerca, e cioè che il distacco e il disinteresse degli studenti verso la probabilità possa essere una conseguenza della prassi didattica comunemente usata per insegnare la probabilità. Del resto, come si vedrà in 6.1, parecchi studenti hanno risposto che, se a livello operativo si capisce che cosa fare, manca però una riflessione sulla semantica del concetto di probabilità. Ma questo potrebbe essere facilmente spiegabile visto che per i docenti la vera natura della probabilità è assiomatica, quindi esente da ogni tentativo di spiegazione ontologica. E come visto in 3.1, nè l'approccio classico nè quello frequentista forniscono una spiegazione su che cosa sia la probabilità. L'approccio assiomatico non si pone nemmeno la domanda circa la semantica del concetto poiché secondo questa concezione la probabilità è una qualunque misura che obbedisce a determinati assiomi, quindi a determinate regole sintattiche.

6.3. Intervento didattico

6.3.1. Scommesse coerenti, assiomi della probabilità

La domanda di partenza è stata che cosa fosse per gli studenti la probabilità e senza esitazione hanno risposto che per loro era un calcolo. Ho quindi chiesto loro di utilizzare questo «calcolo» per rispondere alle domande 1-6 (allegato 2).

Dalle risposte degli studenti e dalla discussione che ne è scaturita ho avuto modo di notare come in un certo senso sia già presente la propensione a ragionare in termini soggettivi davanti a determinate situazioni di incertezza. Questo conferma la tesi di De Finetti, secondo cui la visione soggettiva della realtà è quella in ultima analisi più vicina al sentire comune, che vive nell'osservatore, non in una presunta realtà oggettiva all'infuori di chi valuta una situazione di incertezza. Infatti, anche di fronte all'esempio 3, sono pochi gli studenti che hanno risposto usando l'approccio classico «casi favorevoli/casi possibili» che darebbe la probabilità del 50%. Eppure questa è una classica situazione che si affronta quando si tratta la probabilità classica. Se la domanda viene posta all'infuori del contesto classico, ecco emergere del tutto spontaneamente un approccio di tipo soggettivo, sebbene non ancora formalizzato all'interno di una teoria organica di probabilità soggettiva.

Uno studente, per rispondere all'esempio 1 ha detto che *«occorre conoscere il calcio e che la risposta dipende dalle informazioni che uno ha e dal suo «sentire» la partita»*.

Un'altra interessante osservazione all'esempio 4 è arrivata da una studentessa la quale ha risposto che *«teoricamente la probabilità sarebbe 1/11 perché considerando le note possibili 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5, 5.5, 6, la nota favorevole è 4.5 quindi un caso su undici, ma che nella realtà sapeva che non era così»*.

Uno studente ha obiettato che le note non erano solo quelle, ma che bisognava trovare un posto anche ad esempio per il 3.75, oppure per il 3.25.

La risposta è stata che era un esempio e che si potevano aggiungere tutte le gradazioni di nota desiderate, i casi possibli c'erano comunque tutti. Questo esempio mostra un tipico approccio classico al problema. Nell'esempio 5 uno studente si è dichiarato (forse) inconsapevolmente frequentista dicendo che è sufficiente andare in un prato e raccogliere fiori finché non si trova un quadrifoglio. Se fosse necessario raccogliere 1000 fiori prima di trovare un quadrifoglio significa che la probabilità è di 1/1000. Una sua compagna è intervenuta dicendo che prima di raccogliere bisognerebbe essere sicuri che ci siano almeno dei trifogli, perché dove non ci sono trifogli non ci sono nemmeno quadrifogli. In questa osservazione si può intravedere il concetto di quali e quante informazioni si dispongono per valutare una probabilità. E come si è visto, le informazioni che un individuo possiede sono un aspetto fondamentale dell'approccio soggettivista.

A questo punto della discussione si era in una *impasse*; c'era concordanza sulla soggettività di queste situazioni di incertezza e sul fatto che fosse poco sensato applicare i metodi classici o frequentisti. Restava da stabilire come determinare una valutazione numerica di questa soggettività.

A questo punto ho dato agli studenti la definizione di De Finetti circa il grado di fiducia e ho poi continuato introducendo dapprima il concetto di scommessa. Gli studenti sono subito apparsi interessati e incuriositi, e qualche esempio è bastato per creare il terreno favorevole all'introduzione della coerenza. Infatti, dopo aver stabilito che secondo la definizione soggettivista, quanto maggiore è il mio grado di fiducia tanto maggiore è l'importo che riterrei equo puntare, uno studente ha infatti obiettato che se lui dovesse scommettere una certa somma su un evento che reputerebbe molto probabile, per guadagnare molto dovrebbe puntare poco, cosicché la differenza tra incasso e puntata sarebbe molto grande. Una sua compagna ha aggiunto che sarebbe un po' come barare. Ho allora proposto una simulazione di scommessa sull'evento «domani pioverà» contro uno studente che avrebbe fatto da banco. Io avrei scommesso 1 franco per incassarne 50. Se però lo studente mi avesse chiesto di scambiarmi con lui io non avrei accettato. Scambiare di posto nella scommessa avrebbe significato per me incassare 1 franco con la prospettiva di pagarne 50. E siccome io ero molto convinto del verificarsi dell'evento, sarebbe stato molto probabile che avrei perso 50 franchi. A questo punto è apparsa chiara la necessità di regolare la scommessa in modo da non creare situazioni di chiaro vantaggio, perché se io reputo un evento molto probabile, secondo de Finetti, dovrei puntare molto. Ho dunque accennato all'idea di un'autorità superiore che funge da giudice per la scommessa in questo senso: lo scommettitore e il banco devono essere disposti a scambiarsi di posto. E se nell'esempio della scommessa tra prof e studente io non sono disposto a rischiare 50 fr con la prospettiva di incassarne 1, cioè a passare dall'altra parte della scommessa, significa proprio che è perché ritengo l'evento «domani pioverà» molto probabile; il mio importo di partenza pari a 1 franco non corrisponde alla vera fiducia che io attribuisco al verificarsi dell'evento.

In seguito siamo passati alla coerenza legata alla scommessa che garantisce guadagno certo o perdita certa per cercare di vedere dove conducesse la coerenza. L'obiettivo era quello di ritrovare gli assiomi di base della probabilità. Gli esempi 8), 9), 10) e 11) hanno permesso di raggiungere questo scopo. Gli studenti si sono in genere mostrati interessati e mi sono sembrati piuttosto sorpresi nel vedere che a partire dal concetto di scommessa coerente si ricavano le stesse regole che si trovano in tutti gli altri approcci, e questo ha contribuito a rafforzare la plausibilità dell'impostazione soggettivista.

Il concetto di scommessa coerente ha creato una vivace discussione e ha contribuito anche a riflettere sulla differenza tra scommessa ritenuta equa e scommessa coerente. Si è giunti alla conclusione che l'equità non ha nulla a che vedere con la coerenza. Questo ha contribuito ancora di più a cogliere l'aspetto soggettivo della probabilità. La problematica delle scommesse coerenti si è subito spostata sulle scommesse vere e proprie, come quelle su eventi sportivi simili agli esempi della lezione.

Sfruttando ad esempio le quote date dai Bookmakers sulla finale di Champions League di quest'anno (es.12 dell'allegato 2), si è cercato di risalire alle probabilità di vittoria di ciascuna squadra.

La riflessione in classe ha portato a concludere che, in generale, la probabilità soggettiva su un evento è, secondo le quote del bookmaker, il rapporto «1/quota».

È sorta la domanda se questo tipo di scommesse sul calcio siano scommesse coerenti. Per una prova ho proposto alla classe di verificare l'assioma iii) della probabilità sull'esempio Inter vs Bayern ed è stato trovato che la somma delle probabilità non è uguale a 1. L'es.13, ha permesso di completare il discorso, allargando la questione al caso in cui l'unione di due eventi non è una partizione dello spazio dei risultati (in questo esempio si contempla anche il pareggio). Quindi, in conclusione, le probabilità che scaturiscono dalle quote stabilite dal bookmakers non verificano gli assiomi iii) e iv): la scommessa non può dirsi coerente. Questo è in sintonia con l'idea che il banco vince sempre! A questo punto uno studente ha rilanciato la questione su come debbano essere le quote in modo da garantire una scommessa coerente.

Qui il discorso si è fatto estremamente interessante perché ha portato a riflettere su che tipo di probabilità si annidi dietro le quote dei bookmakers. Ci siamo fermati alla conclusione che le quote eque vengono decurtate di un fattore $\alpha \left(\alpha \in \left]0\,;1\right[\right)$ in modo che risulti $Q(E) = (1-\alpha)\cdot q(E)$ dove (E) è la quota fissata dall'allibratore, mentre q(E) sarebbe la quota equa. Indagare oltre questo aspetto potrebbe essere una interessante fase di sviluppo attorno al tema.

Due osservazioni particolarmente interessanti sono arrivate alla fine da parte di due studenti. Il primo chiedeva se per valutare una probabilità occorra quindi sempre scommettere. Il secondo ha aggiunto che a lui è sembrato che il concetto di scommessa serva per capire cosa sia la probabilità ma che in ogni caso gli mancava come valutarla, come scegliere l'importo da puntare. Ho proposto allora alla classe di rispondere al semplice quesito del lancio di una moneta, però applicando il punto di vista soggettivista. La domanda era di valutare la probabilità soggettiva che dopo un lancio si presenti testa. La richiesta di valutare la probabilità in modo soggettivo ha creato un attimo di smarrimento tra gli studenti, perché in quanto visto fino ad allora non c'era alcuna formula per il calcolo della probabilità soggettiva. La discussione che ne è scaturita ha portato a chiedersi se la moneta fosse truccata oppure no, e come si sarebbe risolto il problema in caso di moneta truccata. Questo ha contribuito a rinforzare la percezione soggettiva della probabilità, purché in accordo con gli assiomi dedotti dalla coerenza. È stato allora proposto di assegnare le probabilità di $1/4$ a testa $3/4$ a croce indipendentemente dal fatto che la moneta fosse o no truccata, concludendo che le probabilità potrebbero essere queste se un individuo le giudicasse per sé attendibili. La probabilità classica pari a $1/2$ è risultata in modo del tutto naturale come caso particolare in cui tutti condividono le medesime informazioni e assegnano quindi la medesima probabilità, scommettendo tutti lo stesso importo.

Infine, per rispondere alla domanda dello studente circa l'effettiva attuazione della scommessa, ho proposto gli esempi che hanno poi portato alla discussione in classe. Questo ha permesso di concludere che la scommessa è da intendersi a livello ipotetico, senza l'obbligo di scommettere veramente, essa vuole essere un mezzo per capire che cosa sia la probabilità. Il criterio della scommessa coerente è l'attuazione operativa della probabilità, quando questa è intesa come grado di fiducia che un individuo ripone sul verificarsi di un evento.

6.4. Valutazione dell'impianto didattico

6.4.1. Feed-back degli studenti

Ho raccolto nella tabella che segue le tipologie di risposta alle domande del questionario Q2 (allegato 4), consegnato ai 20 studenti della classe.

Domanda	Risposte	Frequenza assoluta
1. Cosa ne pensi dell'approccio soggettivista per insegnare la probabilità?	È interessante filosoficamente ma meno preciso da calcolare. Però è un un buon approccio. E l'idea di scommessa aiuta a farsi un'idea più completa della probabilità.	5
	È un modo diverso di parlare di probabilità, mi è piaciuta perché è molto legata alla realtà. L'idea di scommessa è davvero originale.	13
	Non mi è piaciuto. Utilizzare una scommessa rende la cosa troppo difficile da calcolare, perché ci possono essere risultati diversi per lo stesso problema.	2
2. Ti è sembrato interessante oppure no?	Sì, molto, ha mostrato il punto di incontro tra matematica e filosofia.	6
	Sì, perché dà una visone più ampia di probabilità, mostrandone un altro aspetto. Inoltre spiega che cosa è la probabilità.	11
	Così così, non ho ben capito a cosa serve un approccio diverso se poi si ritrovano le stesse regole di prima.	3
3. In questo approccio si usa il termine «soggettivo». Secondo te crea confusione?	No, forse un pò all'inizio per via che siamo abituati all'oggettività vista l'anno scorso. Ma poi si capisce che uno non esclude l'altro.	11
	No, anzi, ha mostrato un lato soggettivo della probabilità che non conoscevo. Mi è piacuto usare la scommessa per spiegare che cosa è la probabilità.	5
	Un po', la matematica cerca l'oggettività. Anche se interessante questo approccio mi sembra troppo teorico.	4
4. Qual è secondo te la differenza sostanziale tra probabilità classica e probabilità soggettiva?	L'approccio clasico dà per scontato che la probabilità esiste. L'approccio soggettivista invece, dà anche una spiegazione di che cosa è la probabilità.	8
	La probabilità classica non è applicabile a tante situazioni reali mentre la probabilità soggettiva si può applicare a qualunque situazione.	8
	La probabilità soggettiva è una definizione, mentre la probabilità classica è un calcolo.	4
5. Ma allora, secondo te, la probabilità è oggettiva o soggettiva?	Soggettiva perché è il grado di fiducia che una persona dà a un certo evento.	10
	Può essere tutte e due le cose, dipende dalla situazione.	7
	La probabilità per me rimane oggettiva, altrimenti ci sono risultati diversi e non un unico risultato uguale per tutti.	3

Tabella 3

Dalle risposte si può osservare quanto segue. L'impostazione soggettivista alla probabilità in genere ha riscontrato un generalizzato interesse. Gli studenti hanno particolarmente apprezzato il fatto che questo approccio fornisce un significato al concetto di probabilità, che per molti era ancora poco chiaro. L'idea di probabilità come grado di fiducia è apparsa accattivante, sensata e in stretto contatto con la realtà. Anche l'idea di scommessa ha suscitato curiosità verso il tema, in particolar modo ha contribuito a risvegliare l'interesse per la materia in quegli studenti che solitamente non mostrano particolari passioni per la matematica, mi riferisco ai 5 studenti della domanda 3, che durante tutto l'arco delle lezioni su questo tema hanno mostrato interesse e hanno partecipato alle discussioni in classe. Sicuramente per questi allievi, quando si tratterà di calcolare il valore numerico con l'approccio classico le cose potrebbero magari riapparire complicate, ma vedere la probabilità sotto la lente della scommessa li ha riavvicinati alla matematica, e potrebbe essere un buon inizio per affrontarla con spirito nuovo. D'altro canto alcuni ammettono di fare fatica a staccarsi dall'impostazione classica alla quale sono abituati, segno che il modello di probabilità oggettiva è molto radicato e che non bastano poche lezioni sul soggettivismo per far accettare la validità di un altro metodo. Interessanti sono anche le motivazioni di carattere filosofico secondo le quali, sebbene interessante a livello di spiegazione del significato, l'approccio soggettivista resta più che altro una riflessione di carattere filosofico-speculativo. Questi studenti non hanno forse ben capito che il metodo soggettivista non fornisce nuove formule per il calcolo della probabilità, nonostante gli esempi visti. Per altri studenti invece, l'approccio soggettivista è stato da un lato interessante ma dall'altro in contrasto con la loro idea di oggettività della matematica. Questo aspetto è emerso molto bene anche dalla discussione in classe. Ad alcuni sembra impossibile che un nuovo approccio non sia accompagnato da nuove formule per cui è risultato difficile accettare l'idea di vedere la probabilità da un altro punto di vista. Per altri questo aspetto è apparso invece chiaro e hanno accettato che il soggettivismo inglobi le altre impostazioni, valide come metodi di valutazione numerica. A questo proposito, ho notato inoltre una certa reticenza, almeno in prima istanza, per alcuni ad accettare l'idea che la probabilità concepita secondo l'impostazione classica possa essere vista come un utile criterio di valutazione numerica per l'impostazione soggettivista. È forse questa la sfida che potrebbe venir raccolta anche in futuro, avendo più tempo a disposizione per impostare un progetto più ampio, che permetta agli studenti di assimilare l'impostazione completa di probabilità, inclusa la componente soggettivista.

6.4.2. Esercitazioni finali

Il testo delle esercitazioni finali è contenuto nell'allegato 5.

Nella tabella 4 sono raccolti i risultati delle esercitazioni finali, raggruppati per tipologia di risposta.

Domande	Risposte	Frequenza assoluta
Es. 1	Risolto correttamente	13
	Non risolto correttamente	2
	Risolto parzialmente corretto	5
Es. 2	Risolto correttamente	18
	Non risolto correttamente	2
	Risolto parzialmente corretto	0
Es. 3	Risolto correttamente	14
	Non risolto correttamente	3
	Risolto parzialmente corretto	3
Es. 4	Risolto correttamente	12
	Non risolto correttamente	3
	Risolto parzialmente corretto	5

Tabella 4

Dalla tabella possiamo osservare che globalmente l'impianto didattico ha prodotto negli studenti un aumento di conoscenza che sono poi stati in grado di rendere operativo in situazioni mai viste prima. Negli es.1,3 e 4, che volevano verificare quanto fosse chiara l'idea di scommessa coerente, la gran parte degli studenti ha mostrato di sapersi muovere bene con la nuova impostazione di probabilità vista in classe. Hanno saputo interpretare e utilizzare il concetto di scommessa coerente per rispondere alle domande in modo molto positivo con qualche esitazione nella domanda 4, probabilmente a causa della difficoltà di determinare il valore della posta in gioco (2 fr + 5 fr = 7 fr), che per alcuni è sembrata forse non direttamente collegata a quanto visto in classe. Anche l'es.1 ha raccolto un esito globalmente positivo sebbene si presenti qualche incertezza. Per quel che riguarda l'es. 2, invece, che mirava a determinare se agli studenti fosse chiaro che l'approccio soggettivista non debba venire necessariamente applicato a ogni situazione che potrebbe venir più facilmente risolta con i metodi già noti, la maggioranza degli studenti ha risposto correttamente, utilizzando un tipico approccio classico. Questo mostra come sia risultato chiaro che l'approccio soggettivista è vantaggioso utilizzarlo, proprio in quelle situazioni in cui le altre impostazioni falliscono. Non è quindi un metodo nuovo che soppianta le altre concezioni di probabilità, da applicarsi a qualsiasi situazione in cui occorra valutare una probabilità.

A fronte di risultati in buona sostanza positivi ci sono purtuttavia anche alcune incertezze e riposte che mostrano come per certi studenti la probabilità secondo l'impostazione soggettivista sia comunque difficile da maneggiare. Forse a causa dell'argomento stesso, la probabilità, che, per dirla con uno studente «è e resta difficile, a prescindere da quale prospettiva la si guardi». In questo senso anche con un approccio soggettivista non si è riusciti a ottenere una motivazione e un interesse maggiori.

7. Conclusioni e riflessioni finali

7.1. Risposta alla congettura di ricerca

La ricerca ha messo in luce che un'impostazione soggettivista della probabilità può produrre risultati positivi in una classe di quarta liceo. Credo di poter affermare che la congettura di partenza secondo cui la visione soggettivista della probabilità possa motivare e avvicinare maggiormente gli studenti alla probabilità abbia trovato in gran parte conferma. Un aspetto particolarmente positivo è a mio avviso rappresentato dai 5 studenti che in questo breve scorcio di probabilità definettiana hanno ritrovato l'interesse perduto nella materia, ciò che ha permesso loro di sentirsi parte del gruppo classe e di partecipare alle discussioni che si sono prodotte durante le lezioni.

A una gran parte degli studenti l'approccio soggettivista ha fornito il tassello mancante per completare il mosaico probabilista, ha contribuito a spiegare che cosa è la probabilità dandone una concezione semantica anziché solamente l'aspetto operativo come succede in genere per gli altri approcci. D'altro canto l'impostazione soggettivista ha mostrato di non essere in contrasto con gli altri approcci, e se questo per alcuni studenti ha contribuito ad ampliare la visione sulla probabilità, per altri ha creato un momento di confusione. Confusione che può essere dovuta a svariati fattori quali l'impatto di un modo così diverso di vedere la probabilità in cui si usa l'aggettivo «soggettivo», il mescolarsi di due mondi apparentemente opposti, quello oggettivo tipicamente matematico secondo gli studenti, e quello soggettivo, più vicino forse ad altre discipline che non alla matematica, la forza del modello oggettivo di probabilità classica oramai fortemente radicato. Due sono stati gli aspetti che gli studenti hanno trovato particolarmente positivi: poter dare un significato al concetto di probabilità attraverso l'impostazione soggettivista e l'utilizzo del criterio della scommessa. Questo ha permesso di vedere la probabilità da un altro punto di vista, altrettanto plausibile e sensato visto che ha consentito di ritrovare quegli assiomi che stanno alla base della probabilità e che gli studenti già conoscevano.

7.2. Riflessioni finali

La ricerca non aveva l'ambizione di fornire risposte generali e definitive. Voleva essere un primo spunto di riflessione attorno al tema della probabilità soggettiva in una classe di liceo. Quello che è emerso, però, ritengo sia significativo perché ha messo in evidenza come sia possibile interessare e motivare gli studenti verso il calcolo delle probabilità, presentando loro un lato della probabilità ancora troppo spesso tralasciato o presentato solo come curiosità storica. Certo l'impostazione soggettivista non fornisce un nuovo modo di calcolare la probabilità ma mette chi valuta la probabilità in un'ottica diversa, soprattutto in quelle situazioni dove gli altri approcci sono del tutto inappropriati. Come avevamo dimostrato, questo crea motivazione nello studente, che non ha l'impressione di dover trovare una risposta per forza uguale a quella di altri, ma deve invece trovare la sua risposta, purché coerente con le informazioni a sua disposizione. Lo fa sentire attore partecipe di un processo di apprendimento e non solo traduttore di una presunta realtà oggettiva e di conseguenza lo spinge a riflettere più a fondo. Tutto questo non ha certo l'intenzione di giudicare in senso negativo quanto fatto dai docenti del campione considerato, anche perché la probabilità classica non perde la sua importanza come valutazione numerica. Ma un fatto è incontestabile: nessuno dei docenti intervistati ha mai trattato in classe l'impostazione soggettiva della probabilità. Spero pertanto che questa piccola ricerca abbia fornito spunti per una riflessione in una direzione diversa, che forse in futuro meriterebbe di essere se non approfondita, perlomeno considerata.

Bibliografia

Brousseau G. (1997). *Theory of Didactical situations in mathematics*. Amsterdam: Springer Netherlands.
Cerasoli M. (1995). *Atti del convegno su Epistemologia, Storia e Didattica della matematica*. Università di Trieste.
De Finetti B. (1980). Probabilità, in *Enciclopedia*. Torino: Giulio Einaudi.
De Finetti B. (1970). *Teoria delle Probabilità*. Milano: Giuffrè Editore.
Feller W. (1968). *An introduction to Probability Theory and it's Applictions*. Princeton: John Wiley & Sons.
Kolmogorov A.N. (1933). *Grundlagen der Wahrscheinlickeitsrechnung*. Berlin: Springer Verlag.
Scozzafava R. (1988). Per un insegnamento fusionista della probabilità e della statistica nelle scuole secondarie. *Matematica oggi: dalle idee alla scuola*. Genova: Ed. F.Furinghetti.
Scozzafava R. (2010). *Incertezza e probabilità*. Bologna: Zanichelli.

Appendice

Sintesi dei questionari

Questionario Q1

Domanda 1
Perché insegnare la probabilità?
Domanda 2
La insegni o la insegneresti volentieri? Perché?
Domanda 3
A livello di spendibilità culturale, come valuti il calcolo delle probabilità rispetto ad esempio alla geometria vettoriale?
Domanda 4
Perché, secondo te, alcuni argomenti sono ritenuti parte fondamentale del bagaglio matematico di uno studente liceale, mentre il calcolo delle probabilità è spesso il primo tema che salta quando si è «tirati» con il tempo?
Domanda 5
Come vivono gli studenti il calcolo delle probabilità?
Domanda 6
Approccio frequentista, approccio classico, approccio soggettivista. Su quale dei tre poni maggiormente (o porresti maggiormente) l'accento quando insegni il calcolo delle probabilità? Perché?

Questionario Q2

Nelle scorse lezioni abbiamo parlato di probabilità secondo l'approccio soggettivista introducendo i concetti di grado di fiducia e di scommessa coerente.

1. Che cosa ne pensi di questo modo per spiegare il concetto di probabilità?
2. Ti è sembrato interessante oppure no? Perché?
3. In questo approccio alla probabilità c'è il termine «soggettivo». Secondo te, questa soggettività contribuisce a dare della probabilità una visione diversa, oppure crea solo confusione? Perché?
4. Secondo te, qual è la differenza sostanziale tra la probabilità di tipo classico e quella di tipo soggettivista?
5. Ma allora, secondo te, la probabilità è oggettiva o soggettiva? Perché?

Alcuni esercizi assegnati

Es.1

Elena vorrebbe pagare 1 franco a sua mamma per guadagnarne 10 se nella prossima interrogazione di italiano prenderà almeno 5. Sua madre le chiede di fare cambio ma lei non accetta.

– Qual è la probabilità soggettiva che Elena attribuisce all'evento «nella prossima interrogazione di italiano prenderò almeno 5?
– Se Elena fosse disposta a scambiare il suo ruolo con la madre, quale sarebbe la sua valutazione di probabilità per l'evento «nella prossima interrogazione di italiano prenderò almeno 5»?

Es.2

Sul tavolo A ci sono 5 buste di cui 3 contengono un premio. Sul tavolo B ci sono 10 buste di cui 4 contengono un premio.

Quale tavolo scegliere?

Es.3 Vero o falso?

a) Se la probabilità soggettiva che Luigi attribuisce all'evento «domani non pioverà» è 0.7, allora egli è disposto a pagare 70 centesimi per incassare 1 franco nel caso in cui domani non pioverà.
b) Se Lorenzo attribuisce alla vincita del cavallo Bellezza una probabilità del 70%, pur sapendo che nelle ultime corse non ha mai vinto, ciò significa che non è un individuo coerente nel senso della probabilità soggettiva.
c) La definizione di probabilità soggettiva è più generale di quella classica perché si può applicare anche nei casi in cui quest'ultima non si può applicare.

Es.4

Etienne e Athena scommettono sulla gara di nuoto tra i due loro compagni Yanosh e Aline. Etienne scommette 5 franchi su Aline e Athena scommette 2 franchi su Yanosh. Si tratta di una scommessa coerente? Quali sono le probabilità soggettive che Etienne e Athena attribuiscono all'evento sul quale scommettono? Si tratta di una commessa coerente? Perchè?

3. Misurazione della larghezza del lago di Muzzano coi triangoli simili Una proposta per le quarte medie

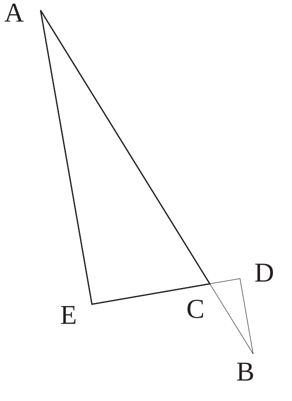
Dario Silvestro[1]

È possibile misurare la larghezza del lago di Muzzano senza disporre di imbarcazioni e nastri avvolgibili lunghi centinaia di metri?

Certamente!

Ricordiamoci dei triangoli simili e dei criteri di proporzionalità che essi contengono.

Risolvi questo semplice problema:
siano i triangoli AEC e BDC simili tra loro.
Si conoscono le lunghezze:
CD = 5 cm EC = 20 cm CB = 50 cm
Calcola la misura di AC.



Risoluzione

$$r = \frac{|EC|}{|DC|} = \frac{20}{5} = 4$$

Rapporto:
|AC| = 50 · 4 = 20 (cm)

1. Insegnante di matematica alla Scuola Media Parsifal, Sorengo-Cortivallo.

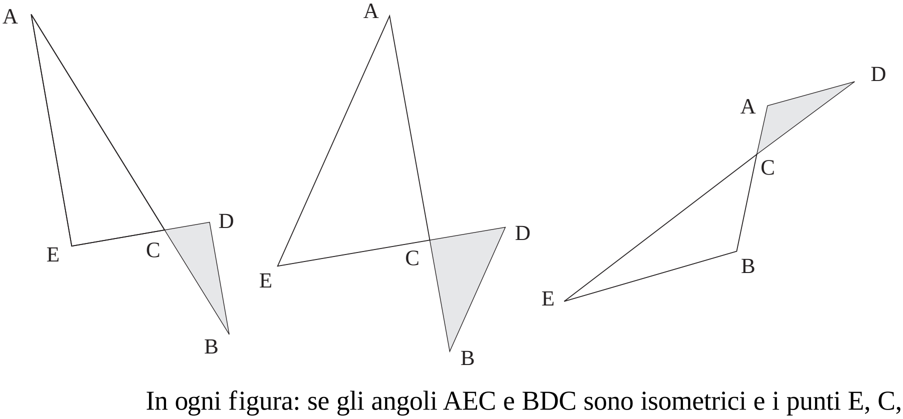
Riproduciamo questa situazione sul terreno nei pressi del lago; per capire meglio osserviamo la cartina seguente:

Se riuscissimo a tracciare sul terreno le parti disegnate in giallo, ad esempio srotolando dei nastri colorati e misurando le loro distanze con un metro avvolgibile, il problema sarebbe identico al precedente ed avremo tutte le misure necessarie per calcolare la distanza rossa, senza dover attraversare il lago!

Affinché il ragionamento funzioni è però necessario che i triangoli ACE e BCD simili tra loro.

Per esserlo bisogna che l'angolo CDB e l'angolo AEC abbiano la stessa misura.

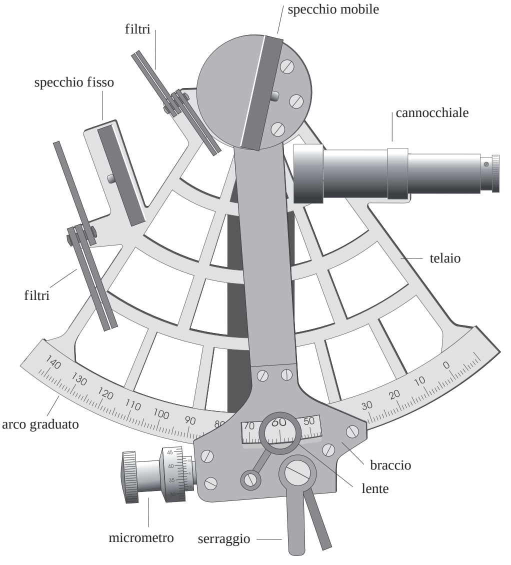
Infatti se questi due angoli sono isometrici poco importa come tracciamo i restanti lati, purché i punti ECD giacciano sulla stessa retta.



In ogni figura: se gli angoli AEC e BDC sono isometrici e i punti E, C, D sono allineati, il triangolo AEC è simile al triangolo BDC.

Questa cosa è facile da realizzare disegnando su un foglio di carta utilizzando il goniometro, ma come riuscire fuori all'aperto, tracciando sul terreno dei triangoli enormi?

La soluzione è data da uno strumento chiamato **sestante**.



Esso permette di misurare con estrema precisione l'angolo sotteso tra due punti. Vediamo passo passo come muoverci sul terreno.

1. Vai in un punto qualsiasi lungo la riva e pianta un bastone che chiamiamo punto C. Cerca con lo sguardo un punto sull'altra sponda e chiamalo A. Spostati per una ventina di metri verso sinistra e pianta un bastone nel punto E. Segna con un nastro colorato un segmento per terra, che congiunge C con E (la linea gialla). Con un altro pezzo di nastro segna un segmento che dal punto C prosegua verso il prato in modo che sia la continuazione del segmento AC (il tratto bianco a partire da C verso il prato).

2. Misura col sestante l'angolo AEC

3. Spostati di pochi passi partendo da C in direzione opposta ad E (verso destra quindi), pianta un paletto e chiamalo punto D; misura un angolo isometrico al precedente (nell'esempio 82°) come vedi nel prossimo disegno.

4. Adesso col nastro colorato segna l'angolo fino a incrociare il segmento dell'altro nastro già sul terreno (in pratica segna sul terreno la linea rossa). Chiama B il punto dove i nastri si incrociano.

5. Hai ottenuto triangoli simili. Se misuri col metro avvolgibile EC, CD, CB possiedi tutti gli elementi per misurare AC, cioè la larghezza del lago.

   Eseguiamo i calcoli:
   Angolo CBD= Angolo AEC=82° misurato col sestante
   CB=22,8 m CD=2,2 m EC=24,2 m

$$r = \frac{|EC|}{|CD|} = \frac{24,2}{2,2} = 11$$

$$|AC| = 22,8 \cdot 11 = 250,8 \text{ (m)}$$

La misura reale del tratto AC è di 257m (misurata al computer tramite il righello incorporato nel programma di Google Earth). Questo significa che abbiamo fatto un errore di 6,8m.

Si tratta di un errore grande o piccolo?

Per valutarlo bisogna considerare l'errore relativo, cioè il rapporto tra l'errore commesso e la lunghezza totale del segmento da misurare.

Errore relativo di misurazione in %:

$$\frac{6,8}{257} \cdot 100 \cong 2,6\,\%$$

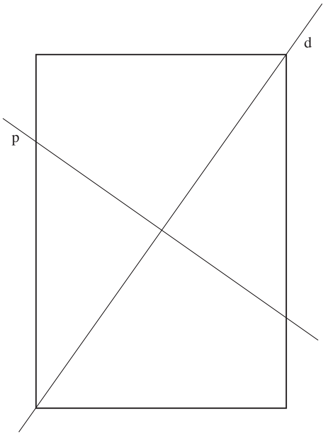
Un piccolo errore!

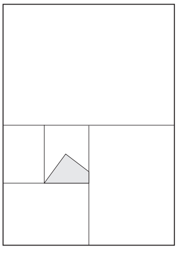
Quiz numero 44: Una frazione di A0

Aldo Frapolli

Cari amici del QUIZ,
vi siete già soffermati su qualcuno dei tanti segreti
custoditi dal rettangolo rappresentato da un foglio di formato A4?

Vi propongo di penetrarne uno, riflettendo sulla figura che si ottiene al termine di due semplicissime piegature consecutive effettuate su di un foglio A4: la prima lungo una sua diagonale, la seconda lungo la retta perpendicolare a tale diagonale e passante per il centro di simmetria.





Dovete tener presente due informazioni relative ad un rettangolo che rappresenta un foglio di formato A0:

– è un rettangolo di area 1 m²
– se lo si piega lungo l'asse di simmetria del suo lato più lungo si ottiene un rettangolo, corrispondente al foglio di formato A1, simile al rettangolo di formato A0.

Facendo la medesima operazione sul formato A1 si ottiene il formato A2.
Continuando in modo analogo vengono generati i fogli di formato A3, A4, A5, …

Ma ecco la domanda:
quale frazione rappresenta l'area della figura ottenuta con le due piegature menzionate all'inizio rispetto all'area del rettangolo di formato A0?

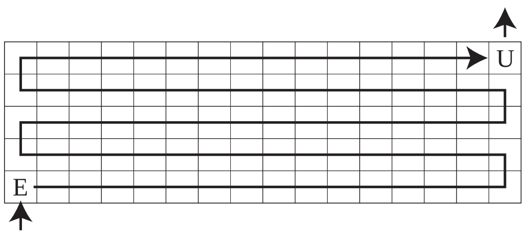
A voi… «il foglio A4»!

Come sempre premieremo la soluzione più originale e completa con un bel libro.

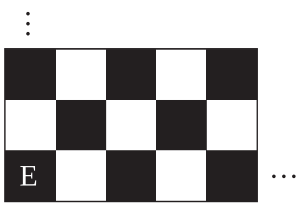
Soluzione del Quiz numero 43

Di labirinti del tipo proposto, composti di 80 celle, ne esistono esattamente cinque. Sono quelli con dimensioni 1x80, 2x40, 4x20, 8x10 e 16x5, ottenibili ad esempio a partire dalla fattorizzazione $80=2^4 \cdot 5$ (quelli ottenuti per simmetria, commutando le dimensioni, sono equivalenti).
Se escludiamo il labirinto triviale 1x80, che come tutti i labirinti composti di una sola colonna è sicuramente percorribile, l'unico labirinto che ammette di essere attraversato secondo le condizioni poste risulta essere quello di dimensioni 16x5.
Per quale motivo?

È facile dimostrare che il labirinto 16x5 può essere percorso almeno in un modo, come illustrato nello schema a lato:



Più impegnativo è invece convincersi, e convincere gli altri, che tutti i restanti labirinti citati non sono percorribili.



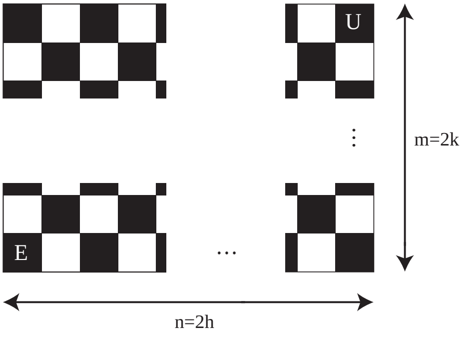
«Idea geniale» (...quella a cui alludeva Archie): coloriamo le celle del labirinto di nero (1) e di bianco (0), in modo alternato, iniziando dalla cella di entrata E. Otteniamo quindi una specie di scacchiera in cui, se indichiamo con c(A) il colore di una qualsiasi cella A, vale c(E)=1.

Immaginiamo ora di attraversare n celle con partenza da E, cioè di compiere n passaggi, e di ritrovarci infine in una cella che indichiamo con F.

Ragionando sui colori delle celle è facile ricavare la seguente proprietà:
se n è pari allora c(F)=0 e viceversa.

Per contrapposizione logica vale quindi che:
n è dispari se e solo se c(F)=1 (*).

Supponiamo ora di avere un labirinto percorribile, di dimensioni nxm, con n e m entrambi pari.
Allora, siccome n·m è pari, il numero di celle del labirinto è pari. Inoltre la cella di uscita U, situata nel vertice opposto del reticolo, è necessariamente di colore nero, ovvero c(U)=1 (siccome nei due vertici adiacenti a E ci sono celle di colore bianco come mostrato nella figura a lato).



Per la proprietà (*) segue che il numero di celle attraversate per giungere in U è dispari, ma ciò costituisce una contraddizione con il fatto che il numero di celle da attraversare è pari.
Quindi se n e m sono entrambi pari il labirinto corrispondente non è percorribile.
Ed è questo il caso dei labirinti «2x40», «4x20», «8x10».

Lasciamo ai lettori più esigenti e curiosi la generalizzazione del risultato.

2. Ricordando Martin Gardner

On May 22nd Martin Gardner died. Many of us got to know him thanks to his column "Giochi Matematici" in the magazine "Le Scienze" or because of any of his mathematical puzzle books. The editors of the Bollettino have decided to pay him tribute by publishing a biography which appeared in *The New York Times* on May 24th and an article by Ennio Peres dedicated to him.

Il 22 maggio ultimo scorso Martin Gardner è morto. Molti di noi l'hanno conosciuto per la sua rubrica «Giochi matematici» sulla rivista «Le Scienze» o per qualcuno dei suoi libri di enigmi matematici. La redazione di questo Bollettino ha pensato di pubblicarne una biografia e un articolo di Ennio Peres.

Gardner, seppur noto in tutto il mondo, fu profondamente statunitense: per questo motivo, piuttosto di scriverla noi, abbiamo preferito tradurre quella pubblicata sul *The New York Times* del 24 maggio[1].

Ringraziamo il dottor Denis Baggi per la revisione della traduzione.

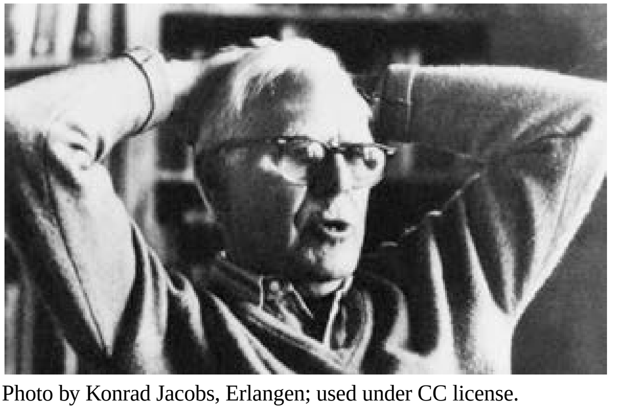


Photo by Konrad Jacobs, Erlangen; used under CC license.

Biografia[2]

Martin Gardner, che ha stuzzicato molti cervelli con enigmi matematici su *Scientific American* per un quarto di secolo e che coltivò la sua curiosità inquieta scrivendo più di 70 libri su argomenti diversi come la magia, la filosofia e le finezze di

1. Si veda il sito http://www.nytimes.com/2010/05/24/us/24gardner.html.
2. Lo scritto è di Douglas Martin, tradotto in italiano da Giorgio Mainini.

Alice nel Paese delle Meraviglie, è morto il 22 maggio a Norman, in Oklahoma, all'età di 95 anni. Visse gli ultimi anni in una casa per anziani, come ha comunicato suo figlio James nel confermarne la morte.

Martin Gardner ha scritto anche romanzi, poesie, critiche letterarie e cinematografiche, nonché libri di problemi. Fu voce importante nel confutare le teorie pseudoscientifiche, dall'ESP[3] ai dischi volanti, e così prolifico e di interessi tanto vasti che i critici hanno insinuato che si trattasse di parecchie persone.

I suoi scritti di matematica hanno affascinato una generazione di matematici, ma egli non ha mai seguito un corso universitario in questa disciplina. Anche se si dice che l'unica cosa che questo eclettico non sapesse fare era suonare musica con una sega, sembra certo che sarebbe stato in grado di farlo, e bene. «*Martin Gardner è uno dei grandi intelletti di questo paese nel XX secolo*», ha detto Douglas Hofstadter, il noto scienziato cognitivo. W.H. Auden, Arthur C. Clarke, Jacob Bronowski, Stephen Jay Gould e Carl Sagan erano grandi ammiratori di Gardner. Vladimir Nabokov lo ha citato nel suo romanzo *Ada* come *«un filosofo inventato»*, e un asteroide prende il nome da lui.

Gardner ha sostenuto che in realtà la sua vita non era poi così interessante. *«L'ho vissuta principalmente nel mio cervello»*, disse al giornale *The Charlotte Observer* nel 1993.

La sua era una intelligenza chiarificatrice: disse che il suo talento consisteva nel porre buone domande e riferire le risposte in modo chiaro e incisivo. In *Annotated Alice* del 1960, Gardner letteralmente distrusse il suo eroe, Lewis Carroll, il quale scrive di un «pomeriggio d'oro» nella prima riga di *Alice nel paese delle meraviglie*, un riferimento preciso a una giornata di canottaggio sul Tamigi, ma Gardner rilevò che il giorno 4 luglio 1862 era, in verità, *«fresco e piuttosto umido»*.

Le domande di Gardner sono state spesso di natura matematica. Ad esempio, qual è la particolarità del numero 8'549'176'320? Come ha spiegato in *The Incredible Dr. Matrix* del 1976, il numero è formato dalle dieci cifre disposte in ordine alfabetico inglese[4].

Il titolo di un libro da lui pubblicato nel 2000, scelto in modo da provocare i fondamentalisti religiosi – *Did Adam and Eve Have Navels? (Adamo ed Eva avevano l'ombelico?*) – suggerisce che il primo uomo e la prima donna avevano avuto cordoni ombelicali, ma non diede nessuna risposta alla domanda.

«Gardner ha una sorta di vecchio spirito americano, alla XIX secolo, stile Oliver Wendell Holmes: autodidatta, dogmatico, irritabile e del tutto senza paura di essere imbarazzato», scrisse Adam Gopnik sulla *The New York Times Book Review* nel 1999.

---

3. Secondo Wikipedia (http://it.wikipedia.org/wiki/Percezione_extrasensoriale), viene chiamata ***percezione extrasensoriale*** o ***ESP*** (acronimo dell'espressione inglese *Extra-sensory perception*) ogni ipotetica percezione che non possa essere attribuita ai cinque sensi. Un sinonimo diffuso a livello popolare è anche ***sesto senso***. L'uso di questo termine sottintende la ipotetica esistenza di canali di informazione estranei e sconosciuti alla scienza e, infatti, gran parte degli studi al riguardo si muovono al di fuori del metodo scientifico. Le percezioni extrasensoriali vengono chiamate in modi diversi a seconda della loro natura:
   - capacità di prevedere il futuro (precognizione),
   - capacità di percepire visivamente cose non visibili naturalmente (chiaroveggenza),
   - capacità di comunicare con il pensiero (telepatia).
4. In italiano sarebbe 5'298'467'310.

Martin Gardner nacque il 21 ottobre 1914 a Tulsa, nell'Oklahoma, dove il padre, un geologo del petrolio, aveva fondato una compagnia petrolifera. Da ragazzo amava i trucchi magici, gli scacchi, la scienza e la raccolta di puzzle meccanici.

All'insaputa di sua madre, imparò a leggere osservando le parole sulla pagina mentre lei gli leggeva i libri di Oz di L. Frank Baum. Da adulto, scrisse un seguito a *Il meraviglioso mago di Oz* di Baum, intitolato *Visitors From Oz*, in cui Dorothy incontra personaggi dei libri di *Alice* e Geraldo Rivera[5].

Gardner studiò filosofia all'Università di Chicago, dove si laureò nel 1936. Nel 1937 tornò in Oklahoma per diventare redattore assistente per le questioni del petrolio nel giornale *The Tulsa Tribune* a 15 dollari a settimana. Rapidamente annoiatosi, tornò all'Università di Chicago, dove lavorò nelle relazioni stampa e vendendo nel suo tempo libero «kit magici».

Entrò in marina e servì su di un cacciatorpediniere. Mentre faceva il turno di notte, concepì trame pazze per alcune storie, tra cui *The Horse on the Escalator* («Il cavallo sulla scala mobile»), venduto poi alla rivista *Esquire*.

Dopo un periodo di lavoro come redattore di *Humpty Dumpty*, una rivista per bambini, Gardner iniziò una lunga collaborazione con lo *Scientific American* con un articolo nel 1956 sugli esaflexagoni, strisce di carta che possono essere ripiegate in modo da rivelare nuove facce oltre alle due già presenti sulla parte anteriore e posteriore. Quando l'editore gli suggerì di scrivere una rubrica di giochi matematici, egli colse al volo l'occasione.

Per questo lavoro, Gardner si precipitò nelle rivendite di libri usati per trovare materiale sugli enigmi matematici, metodo che usò per anni per essere appena in tempo per la scadenza mensile. *«Il numero di problemi che ho inventato io, lo si può contare sulle dita di una mano»*, ha detto al *Times* l'anno scorso.

Douglas Hofstadter, che prese il suo posto allo *Scientific American*, disse che Gardner raggiungeva risultati eleganti attingendo a discipline che vanno dalla logica alla filosofia della scienza e alla letteratura, e aggiunse: ha trasmesso la «qualità magica della matematica».

Gardner, che visse a Hastings-on-Hudson, a nord di New York, per la maggior parte degli anni durante i quali scriveva per *Scientific American*, lasciò la rivista nel 1981. Due anni più tardi iniziò una rubrica nello *Skeptical Inquirer*, «Notes of a Fringe Watcher», che continuò a scrivere fino al 2002. Aveva già iniziato a battere su questo chiodo, dissacrando le pseudoscienze, nel suo libro *Fads and Fallacies in the Name of Science*. Ha quindi contribuito a fondare il «Committee for the Scientific Investigation of Claims of the Paranormal»[6]. Nella *The New York Review of Books*, Stephen Jay Gould, il noto biologo evolutivo, definì nel 1982 Gardner *«il faro più luminoso a difesa della razionalità e della buona scienza contro il misticismo e l'anti-intellettualismo che ci circondano»*.

Ma Gardner ha prodotto anche molto di più, come ad esempio le edizioni commentate di «Casey at the Bat» e «The Night Before Christmas». Nei suoi scritti filosofici, Gardner ha respinto la metafisica speculativa perché non poteva essere dimo-

5. Geraldo Rivera – nato Gerald Michael Riviera – è un avvocato, giornalista, scrittore e reporter americano famoso per i suoi talk-show~~s~~ sensazionalistici.
6. A cui si rifà il CICAP, Comitato Italiano per il Controllo delle Affermazioni sul Paranormale.

strata né logicamente né empiricamente. Combattè la religione in saggi e in un romanzo nel quale descrisse il suo viaggio personale di allontanamento dal fondamentalismo, *The Flight of Peter Fromm* del 1973. In ultima analisi non trovò alcun motivo per credere in qualcosa di religioso, a parte il desiderio umano di evitare la «disperazione profonda», per cui affermava di credere in Dio.

Dopo aver lasciato lo *Scientific American*, Gardner visse per molti anni a Hendersonville, nella Carolina del Nord. Sua moglie, nata Charlotte Greenwald, morì nel 2000. Oltre al figlio James, residente a Norman, lascia un altro figlio, Thomas, di Asheville, Carolina del Nord, e tre nipoti. Nonostante tutti i successi che ebbe nel confutare coloro che approfittano della credulità della gente, o forse proprio per questo, a volte non potè trattenersi dallo scherzare. In una rubrica di *Scientific American* scrisse che dimorare in piramidi poteva migliorare tutto, dall'intelligenza alle prodezze sessuali. In un'altra invitò i lettori a festeggiare il primo giorno di aprile.

«Non ho fatto altro che divertirmi per tutta la vita», disse in un'intervista allo *Skeptical Inquirer* nel 1998, *«e ho perfino avuto la fortuna di essere pagato per questo»*.

Libri disponibili in italiano

- *Enigmi e giochi matematici vol. I*, Sansoni, 1967 (*Hexaflexagons and Other Mathematical Diversions: The First «Scientific American» Book of Puzzles and Games*, University of Chicago Press, 1959; ristampato, 1988)
- *Enigmi e giochi matematici vol. II*, Sansoni, 1968 (*The Second «Scientific American» Book of Mathematical Puzzles and Diversions*, University of Chicago Press, 1961; ristampato, 1987)
- *Enigmi e giochi matematici vol. III*, Santoni, 1969 (*New Mathematical Diversions: More Puzzles, Problems, Games, and Other Mathematical Diversions*, Simon and Schuster, 1966; ristampato dalla Mathematical Association of America, 1995)
- *Lewis Carroll, Alice, introduzione e note di Martin Gardner*, Longanesi, 1971 (*The Annotated Alice*, Bramhall House Clarkson Potter, 1960)
- *Indovinelli nello spazio: dove camminando con le proprie gambe si attraversa il sistema solare*, Zanichelli, 1972 (*Space Puzzles: Curious Questions & Answers about the Solar System*, Pocket Books, 1972)
- *Enigmi e giochi matematici vol. IV*, Sansoni, 1975 (*Unexpected Hangings, and Other Mathematical Diversions*, Simon & Schuster 1968; ristampato dalla University of Chicago Press, 1991)
- *Enigmi e giochi matematici vol. V*, Sansoni, 1976 (*The Sixth Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions*, Simon & Schuster, 1971)
- *Nel nome della scienza*, Transeuropa, 1999 (*Fads and Fallacies in the Name of Science*, Dover, 1957)

5. Geraldo Rivera – nato Gerald Michael Riviera – è un avvocato, giornalista, scrittore e reporter americano famoso per i suoi talk-show~~s~~ sensazionalistici.
6. A cui si rifà il CICAP, Comitato Italiano per il Controllo delle Affermazioni sul Paranormale.

- *Carnevale matematico*, Zanichelli, 1977 (*Mathematical Carnival: A New Round-up of Tantalizers and Puzzles from «Scientific American»*, Knopf Publishing Group, 1975)
- *Show di magia matematica. Ancora rompicapo, giochi, passatempi, trucchi e altre arguzie tratte da «Scientific American»*, Zanichelli, 1980 (*Mathematical Magic Show*, Vintage 1977; ristampato dalla Mathematical Association of America)
- *Circo matematico*, Sansoni, 1981 (*Mathematical Circus*, Vintage 1979; ristampato dalla Mathematical Association of America)
- *L'incredibile dottor Matrix*, Zanichelli, 1982 (*The Incredible Dr. Matrix: The World's Greatest Numerologist*, Charles Scribner's Sons, 1976)
- *L'universo ambidestro. Nel mondo degli specchi, delle asimmetrie, delle inversioni temporali*, Zanichelli, 1984 (*The Ambidextrous Universe: Mirror Asymmetry and Time-Reversed Worlds*, Dover, 1980)
- *Martin Gardner, Enigmi da altri mondi*, Sansoni, 1986 (*Puzzles from other worlds*, Vintage, 1984; collezione di articoli tratti dall'«Isaac Asimov's Science Fiction Magazine»)
- *Ah! Ci sono! Paradossi stimolanti e divertenti*, Zanichelli, 1987 (*Aha! Gotcha: Paradoxes to Puzzle and Delight*, W.H. Freeman & Company, 1982)
- *Enigmi e giochi matematici*, BUR Biblioteca Univ. Rizzoli, 2001 (ristampa di *Enigmi e giochi matematici vol I-II* della Sansoni)
- *Scienza, imposture e abbagli. Discorsi su Gödel, esagrammi magici, Cappuccetto Rosso e altri temi matematici e pseudoscientifici*, Hoepli, 2005 (*Are Universes Thicker Than Blackberries?: Discourses on Gödel, Magic Hexagrams, Little Red Riding Hood, and Other Mathematical and Pseudoscientific Topics*, W. W. Norton & Company, 2003; raccolta di articoli tratti dalla rubrica «Notes of a Fringe Watcher» e altro)

I libri elencati sopra sono una fonte praticamente inesauribile di stimoli per l'insegnante che desideri uscire dal seminato. Il lavoro è semplificato dal fatto che di qualsiasi problema (meglio: situazione) trattato, Gardner fornisce sempre la soluzione, consentendo così di valutarne il livello di difficoltà.

Invito al mondo di Gardner

Il primo contributo di Gardner sullo *Scientific American* riguarda, come scritto nella biografia tradotta sopra, gli esaflexagoni. In italiano lo si trova come primo capitolo di *Enigmi e giochi matematici*, vol. I, citato in bibliografia. Non posso fare a meno di rimandarvi il lettore, anche se potrà avere qualche difficoltà a reperirlo perché, purtroppo, l'edizione è esaurita e non esistono ristampe (a mia conoscenza e a tutt'oggi)[7]. In esso è contenuta una chicca che ricopio fedelmente: la matematica, al di là delle facile retorica, può ***veramente*** divertire.

7. Un copia di questo volume e di altri dello stesso autore si trova nella Matoteca della SMASI, sita, come si sa, a Lugano in via Torricelli 19.

Fra le centinaia di lettere ricevute sull'argomento dei flexagoni, le due che seguono sono le più divertenti. Esse apparvero sui numeri di marzo e maggio dello *Scientific American* del 1957.

Egregio signore,

sono rimasto affascinato dall'articolo intitolato «I Flexagoni» del fascicolo di dicembre. Ci sono bastate solo sei o sette ore per incollare l'esaesaflexagono nel modo appropriato, ma da quel momento esso è stato per noi una fonte di continua meraviglia.

Però è sorto un problema. Questa mattina uno dei nostri compagni se ne stava a flettere l'esaesaflexagono tranquillamente quando la punta della sua cravatta è rimasta incastrata in una delle sue pieghe. Ad ogni successiva piegatura la cravatta restava sempre più presa nel flexagono. Alla sesta volta egli è completamente scomparso nel suo interno.

Abbiamo continuato a inflettere quell'affare come pazzi senza poterne trovare traccia, ma in compenso abbiamo trovato una sedicesima configurazione dell'esaesaflexagono.

Ecco ora la nostra domanda: la sua vedova ha diritto agli assegni di lavoro per la durata della sua assenza o è possibile dichiararlo legalmente morto subito? Restiamo in attesa del vostro parere.

NEIL UPTEGROVE
Allen B. DuMont Laboratories, Inc. Clifton, N. J.

Egregio signore,

la lettera nel numero di marzo alla vostra rivista in cui si lamentava la scomparsa di un collega dai Laboratori Allen B. DuMont «dentro» un esaesaflexagono ha risolto un nostro mistero.

Un giorno, mentre passavamo il tempo a flettere il nostro più recente esaesaflexagono, restammo stupiti nel vedere che da esso usciva una striscia di materiale multicolore. Continuando a flettere l'esaesaflexagono, alla fine spuntò fuori uno straniero che masticava gomma americana.

Sfortunatamente era molto debole ed evidentemente per una mancanza di memoria era incapace di raccontarci come fosse finito tra noi. La sua salute ora si è rimessa con la nostra dieta nazionale di *porridge*, *haggis* e *wisky* ed egli è diventato una vera mascotte del reparto, rispondendo al nome di Eccles.

Il nostro problema è se dobbiamo restituirlo e con quale sistema. Purtroppo Eccles ora trema alla sola vista di un esaesaflexagono e si rifiuta assolutamente di farsi «flexagonare».

ROBERT M. HILL
Del Royal College of Science and Tecnology, Glasgow, Scozia.

Per finire, tre problemi, uno logico, uno aritmetico e uno strettamente matematico. Diamo la soluzione del problema 2, mentre per gli altri invitiamo il lettore a consultare i volumi citati.

Problema 1(parafrasato da *Paradossi della probabilità*,
Enigmi e giochi matematici, vol. I)

L'enunciato

A1 = «Tutti i corvi sono neri»

è logicamente equivalente a

A2 = «Tutti gli oggetti non-neri sono non-corvi»,

e l'enunciato

B1 = «Tutti i corvi sono bianchi»

è logicamente equivalente a

B2 = «Tutti gli oggetti non-bianchi sono non-corvi».

Quindi un qualunque oggetto rosso, o blu, o giallo, insomma né nero né bianco, in forza di A2, rinforza la probabile verità di A1, ma, in forza di B2, rinforza la probabile verità di B1.

Come la mettiamo?

Problema 2 (da *Altri nove problemi*, *Enigmi e giochi matematici*, vol. III[8])

The Square Root of Wonderful (La radice quadrata di meraviglioso) era il titolo di una commedia data a Broadway. Se ogni lettera di WONDERFUL rappresenta una diversa cifra (zero escluso) e se OODDF, nello stesso codice, rappresenta la radice quadrata, qual è dunque la radice quadrata di «Wonderful»?

Supplemento mio: quali parole italiane potrebbero sostituire «Wonderful»?

Problema 3 (da *Limiti delle serie infinite*, *Enigmi e giochi matematici*, vol. V[9])

Notoriamente, la serie armonica è divergente. La serie che si ottiene da quella armonica cancellando tutti i termini contenenti la cifra 9 è divergente o convergente?

Soluzione del problema 2

Se OODDF è la radice quadrata di WONDERFUL, quale numero rappresenta? O non può essere maggiore di 2, perché si avrebbe un quadrato di dieci cifre. Non può essere 1 perché in nessun modo un numero che comincia per 11 può avere un quadrato in cui la seconda cifra è 1. Perciò O deve corrispondere a 2.

WONDERFUL deve essere compreso tra i quadrati di 22’000 e 23’000. Il quadrato di 22 è 484; il quadrato di 23 è 529. Dato che la seconda cifra di WONDERFUL è 2, concludiamo che WO = 52.

Quali valori delle lettere di 22DDF danno un quadrato uguale a 52NDERFUL? Il quadrato di 229 è 52’441; il quadrato di 228 è 51’984. Perciò OODD è o 2299 o 2288.

Usiamo ora una scappatoia basata sul concetto di radice numerica. La somma delle cifre di WONDERFUL (sappiamo che lo 0 è escluso) è 45, che a sua volta dà per somma 9, la sua radice numerica. La sua radice quadrata deve avere una radice numerica che, elevata al quadrato, dà un numero con radice numerica 9. Le sole radici numeriche che soddisfano questo requisito sono 3, 6 e 9. Perciò OODDF deve avere radice numerica 3, 6 o 9.

F non può essere 1, 5 o 6 perché ognuna di queste cifre darebbe una F alla fine di WONDERFUL. I soli possibili completamenti di 2299F e 2288F che rispondono al requisito della radice numerica sono 22998, 22884 e 22887.

Il quadrato di 22887 è 523’814’769, l’unico che va bene con la parola di codice WONDERFUL.

8. Vedi nota 5.
9. Vedi note 5 e 6.

3. Magie matematiche di Martin Gardner

Ennio Peres

Ho affrontato la mia breve, ma intensa, esperienza di professore di materie scientifiche, con la ferma convinzione che il ricorso a proposte ludiche consentisse di affrontare in maniera piacevole la soluzione di problemi di varia complessità e rappresentasse, quindi, uno strumento di motivazione allo studio molto più coinvolgente di quell'arido e intricato guazzabuglio di passaggi algebrici che, tradizionalmente, deprime e scoraggia la maggioranza degli studenti di ogni ordine e grado.

In particolare, per creare un clima giocoso e coinvolgente in classe, a volte eseguivo un gioco di magia matematica, senza spiegarne il trucco, ma invitando i miei alunni a scoprirlo. L'innata tendenza umana a svelare l'arcano, li spingeva ad applicarsi con molto impegno in tale ricerca e, soprattutto, venivano indotti a collegare in maniera più concreta i concetti astratti con l'esperienza pratica, dovendo necessariamente interpretare in chiave matematica ogni singolo passo dell'esibizione alla quale avevano assistito.

Per tali motivi, mi sono trovato sempre in perfetta sintonia con il pensiero di Martin Gardner, la cui posizione in merito alla didattica della matematica emerge chiaramente da questa sua dichiarazione:

«Mi è sempre sembrato che il modo migliore per rendere interessante la matematica agli studenti e ai profani sia quello di accostarvisi con uno spirito giocoso. Sta di fatto che il miglior modo di tener sveglio uno studente è presentargli giochi matematici interessanti, enigmi, trucchi, battute, paradossi, modelli, limerick o una qualsiasi delle centinaia di cose che gli insegnanti ottusi tendono a evitare perché paiono loro frivole [...] Nessuno dice che un insegnante non debba fare altro che divertire i propri studenti. Deve esserci un interscambio tra serietà e divertimento: quest'ultimo tiene desto l'interesse, mentre la serietà giustifica il divertimento».

Mi ha sempre affascinato la rara capacità di Martin Gardner di riuscire a visitare, con la leggiadria di un giocoliere, anche le più complesse branche della matematica e ho trovato un'autentica miniera di spunti preziosi nella sua straordinaria produzione editoriale. Nelle applicazioni didattiche, però, mi sono trovato spesso a dover integrare le sue spiegazioni, dichiaratamente rivolte a un lettore già in possesso di buone conoscenze matematiche. Qui di seguito, riporto alcuni esempi di giochi, tratti dal suo fantasmagorico repertorio, che ho rivisitato nell'intento di far apprezzare la raffinata ingegnosità su cui si basano, anche a un pubblico di non iniziati.

1. **Il nome famoso** (da *Enigmi e giochi matematici* vol. I; capitolo 10: *Giochi matematici con le carte*)

Modalità di svolgimento

1. Porgete un mazzo di carte a uno spettatore e invitatelo a mischiarlo più volte; poi, fornitegli le seguenti istruzioni:
   a) *preleva dalla cima del mazzo una quantità di carte, non superiore a 10* (fig. 1.1);

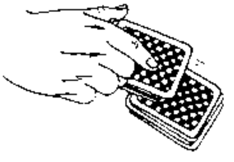


Figura 1.1

   b) *metti da parte queste carte, senza dirmi quante sono*;
   c) *osserva la carta che, nel mazzo restante, a partire dall'alto, occupa il posto corrispondente alla quantità di carte prelevate; in pratica, se hai preso 4 carte, devi memorizzare la carta che occupa il 4° posto; se ne hai prese 5, devi memorizzare quella che occupa il 5° posto, e così via* (fig. 1.2);

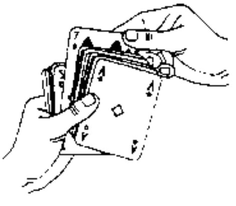


Figura 1.2

   d) *tieni a mente il valore di tale carta*;
   e) *comunicami il nome di un personaggio famoso che ti è simpatico*;
   f) *scandisci questo nome calando sul tavolo una carta per ogni lettera da cui è composto*.
2. Prima che lo spettatore inizi a compiere l'operazione richiesta, eseguitela voi a titolo dimostrativo, con il pretesto di volervi spiegare meglio. A tale scopo, prelevate le carte, una alla volta dalla cima del mazzo, avendo l'accortezza di metterle sul tavolo, sempre una sopra l'altra (fig. 1.3)

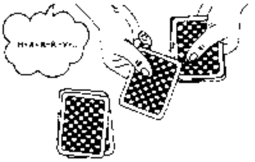


Figura 1.3

3. Riponete sul mazzo l'insieme di carte utilizzate per la precedente dimostrazione.
4. Fatevi riconsegnare le carte che lo spettatore aveva messo da parte all'inizio e sistemate anche queste sopra le altre.
5. Consegnate il mazzo così ricomposto allo spettatore e chiedetegli di ripetere l'operazione di scansione che avete appena illustrato;
6. Invitatelo a girare la carta che ora risulta essere la prima del mazzo: con sua somma sorpresa, verificherà che è proprio quella memorizzata all'inizio!

Accorgimenti da seguire

Prima di eseguire la vostra scansione, dovete verificare che il nome proposto dallo spettatore sia composto da almeno 10 lettere; in caso contrario, chiedetegli di sceglierne un altro più lungo (adducendo, magari, la scusa, che in questo modo il gioco sarebbe troppo facile...).

Spiegazione del trucco

Supponiamo che lo spettatore abbia prelevato X carte e che, quindi, quella da lui memorizzata occupi, all'inizio, la posizione X. Se il nome scelto è composto da Y lettere, quando eseguite la scansione di prova, in pratica andate a invertire l'ordine delle prime Y carte (ma ciò non è affatto evidente...). Per effetto di tale manovra, la carta memorizzata dallo spettatore, che prima era seguita da Y–X carte, nel mazzetto prelevato, ora è preceduta da queste e, quindi, occupa la posizione: $P = Y–X+1$.

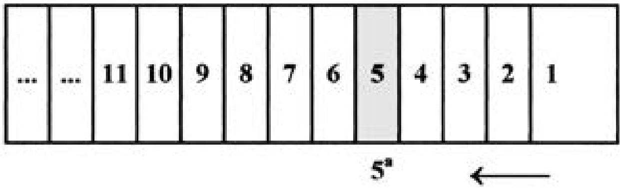
Quando riponete sul mazzo le X carte messe da parte all'inizio, la nuova posizione P_1 della carta diventa: $P_1 = P+X = Y–X+1+X = Y+1$

Infine, quando lo spettatore toglie le Y carte necessarie a effettuare la scansione definitiva, la posizione finale P_2 della stessa carta diventa:

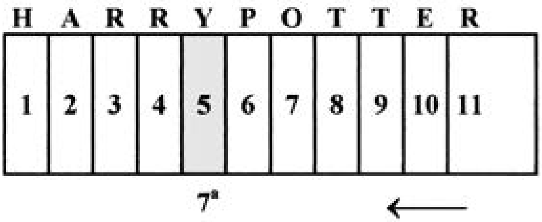
$P_2 = P_1–Y = Y+1–Y = 1$ (cioè, quella relativa alla prima carta del mazzo).

Per chiarire meglio questo ragionamento analizziamo un esempio concreto.

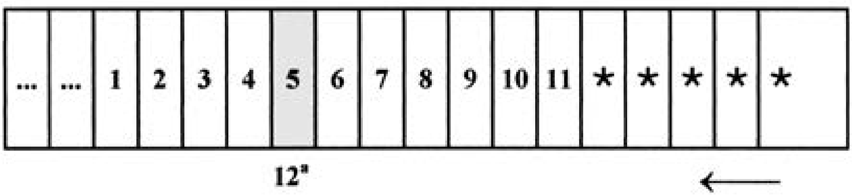
Supponiamo che lo spettatore abbia prelevato all'inizio 5 carte, memorizzando, quindi, la 5a, contando dalla cima del mazzo restante.



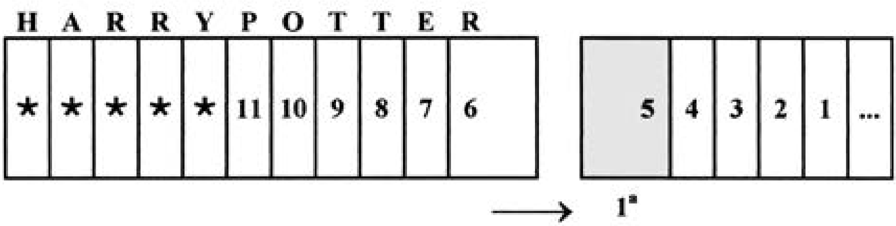
Supponiamo anche che il scelto sia: HARRY POTTER, composto da 11 lettere. Dopo aver effettuato la prima scansione, la carta memorizzata dallo spettatore non è più la 5a dall'alto del mazzo, ma la 5a dal basso; di conseguenza, nell'insieme di 11 carte così utilizzato, occupa la 7a posizione partendo dall'inizio (11–5+1 = 7).



Quando, dopo aver rimesso sopra il mazzo queste 11 carte, ponete su di esse anche le 5 che erano state tolte all'inizio, la carta memorizzata dallo spettatore va a occupare la 12a posizione (7+5 = 12).



Di conseguenza, quando lo spettatore toglie le 11 carte per ripetere nuovamente l'operazione di scansione del nome, la carta da lui memorizzata diventa la prima del mazzo rimanente.



Nota. Tutte queste considerazioni sono valide solo se il numero X di carte scelte all'inizio non è superiore al numero Y di lettere componenti il nome famoso (ovvero, se si ha: X ≤ Y). In caso contrario, la carta memorizzata dallo spettatore non farebbe parte del mazzetto di Y carte che va ribaltato nella prima scansione del nome; di conseguenza, invece di spostarsi nella posizione Y–X+1, resterebbe in quella iniziale, X.

Per questo motivo, è fondamentale chiedere allo spettatore di non prelevare più di 10 carte e controllare che il nome scelto non sia composto da meno di 10 lettere.

In questo modo, infatti, essendo: X ≤ 10 e 10 ≤ Y, si avrebbe anche: X ≤ Y.

Ovviamente, si può adottare anche un parametro di riferimento diverso da 10; per esperienza, però, questo particolare valore risulta molto funzionale.

2. **Il percorso contorto** (da *Enigmi e giochi matematici* vol. III; capitolo 9: *Victor Eigen: un matemagico*)

Preparazione

Per consentire al vostro pubblico di seguire lo svolgimento di questo gioco, dovete procurarvi una lavagnetta (o dovete appendere un foglio bianco a una parete).

Modalità di esecuzione

1. Chiamate uno spettatore e, dopo esservi voltati con le spalle alla lavagna, impartitegli le seguenti istruzioni:
   a) *disegna sulla lavagna una curva chiusa che si intersechi più volte (senza ripassare mai, però, per una stessa intersezione)*;
   b) *contrassegna ogni punto di incrocio con un diverso numero intero* (ottenendo, ad esempio, una situazione analoga a quella indicata in fig. 2.1);

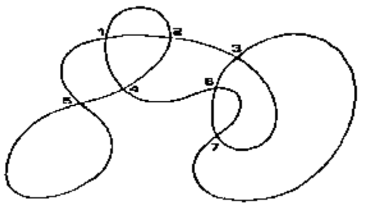


Figura 2.1.

   c) *percorri visivamente la curva così ottenuta, iniziando da un punto qualsiasi, e comunicami, ogni volta che arrivi a un incrocio, il numero ad esso assegnato*;
   d) *esegui con attenzione questa operazione, finché non torni al punto di partenza, dopo aver percorso l'intera curva, ma inverti segretamente due numeri a tua scelta, corrispondenti a una coppia di successive intersezioni* (ad esempio, in riferimento alla situazione rappresentata in fig. 2.1, lo spettatore potrebbe nominare nell'ordine: 3 - 7 - 6 - 4 - 2 - 1 (invece di 1-2)- 4 - 5 - 5 - 1 - 2 - 3 - 7 - 6 - 3).
2. Riportate su un foglietto la successione dei numeri che vi viene riferita e, al termine, rimanendo sempre voltati, dichiarate quale coppia è stata invertita.
3. Potete replicare questa stessa performance, con altri spettatori, una quantità di volte a vostro piacere...

Accorgimenti da seguire

Dovete tracciare sul vostro foglietto una riga orizzontale e trascrivere, alternativamente sopra e sotto di questa, i numeri nell'ordine in cui vi vengono dettati (tranne l'ultimo). Nell'esempio precedente, quindi, avreste dovuto ottenere una situazione del genere:

3	**6**	**2**	**4**	**5**	**2**	**7**
7	**4**	**1**	**5**	**1**	**3**	**6**

Al termine (se non sono stati commessi errori...), due soli numeri compariranno entrambe le volte da una stessa parte; ebbene: saranno proprio quelli i due numeri da individuare. Nell'esempio in questione (dove sono stati invertiti l'1 e il 2) l'1 compare due volte in basso e il 2 due volte in alto (tutti gli altri numeri, invece, compaiono una volta in alto ed una volta in basso).

Spiegazione del trucco

Analizziamo che cosa succede intorno a un'intersezione, quando la curva forma una sorta di cappio, analogo al seguente:

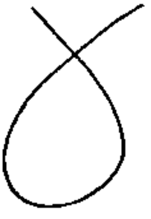


Figura 2.2.

Percorrendo questo tratto di curva, in un verso o nell'altro, il numero corrispondente alla relativa intersezione verrà nominato due volte di seguito. Nella successione risultante, questo numero occuperà, quindi, due posti di diversa parità (uno pari e l'altro dispari, o viceversa). E la stessa cosa accadrà anche nel caso in cui la curva dovesse intersecare il cappio in più punti, perché questi saranno sicuramente in quantità pari. Infatti, siccome la curva da tracciare deve essere chiusa, ogni volta che un suo tratto, entra all'interno di un cappio, formando un'intersezione, deve anche uscirne, formandone un'altra (come evidenziato in fig. 2.3).

Figura 2.3.

Quando disponiamo i numeri attorno alla linea orizzontale, in pratica separiamo le posizioni di valore dispari da quelle di valore pari. Se non fosse stato effettuato alcuno scambio, tutti questi numeri si andrebbero a disporre in modo da figurare una sola volta sopra e una sola volta sotto della linea. Di conseguenza, i numeri che non rispettano questa regolarità sono proprio quelli che sono stati scambiati di posto.

3. **L’ordine magico** (da *Enigmi e giochi matematici* vol. III; capitolo 1: *Il sistema binario*)

Preparazione

Procuratevi 26 schede rettangolari bianche, tutte dello stesso formato; disponetele in orizzontale e, a ciascuna di esse, tagliate l’angolo in alto a destra (fig. 3.1).

Figura 3.1.

In prossimità del margine superiore destro di ogni scheda, praticate cinque fori circolari, equidistanti uno dall’altro (fig. 3.2), di diametro leggermente superiore a quello della sezione di una matita. Nel compiere questa operazione, dovete controllare che, facendo combaciare i margini di più schede, i rispettivi fori risultino perfettamente sovrapposti.

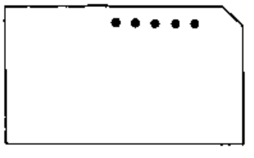


Figura 3.2.

Contrassegnate ogni scheda con una diversa lettera dell’alfabeto inglese; poi, prendete in considerazione il sistema di codifica riportato nella seguente tabella.

A	00001	**H**	01000	**O**	01111	**V**	10110
B	00010	**I**	01001	**P**	10000	**W**	10111
C	00011	**J**	01010	**Q**	10001	**X**	11000
D	00100	**K**	01011	**R**	10010	**Y**	11001
E	00101	**L**	01100	**S**	10011	**Z**	11010
F	00110	**M**	01101	**T**	10100		
G	00111	**N**	01110	**U**	10101		

Su ciascuna scheda, in base alla codifica della lettera su di essa riportata, intaccate il bordo superiore di ogni foro che occupa la stessa posizione di uno «0»; lasciate, invece, intatti i fori che occupano la stessa posizione di un «1» (fig. 3.3).

Figura 3.3.

Ad esempio, nella scheda contrassegnata con la lettera Y, la cui codifica è: 11001, la perforazione deve assumere la seguente configurazione (fig. 3.4).

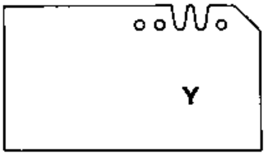


Figura 3.4.

Sovrapponete le 26 schede, disponendole tutte nello stesso verso (a tale scopo, controllate che tutti gli angoli tagliati risultino allineati).

Modalità di esecuzione

1. Mostrate al pubblico il pacchetto di schede approntato in base alle indicazioni precedenti e fate notare che su ognuna di esse è riportata una diversa lettera dell'alfabeto.
2. Porgete le schede a uno spettatore e invitatelo a mescolarle quante volte vuole (senza, però, girarle o rovesciarle).
3. Dichiarate che, grazie alla vostra *bacchetta magica*, riuscirete a disporre le schede in ordine alfabetico, in pochi secondi.
4. Prendete la vostra bacchetta magica (o una semplice matita a sezione rotonda...) ed eseguite quanto preannunciato.

Accorgimenti da seguire

Per riuscire in tale impresa, dovete seguire il seguente procedimento.

a) Compattate il pacchetto di schede, facendo combaciare i loro margini e controllando che tutti gli angoli tagliati risultino allineati.
b) Reggete le schede con una mano, tenendole in posizione verticale.
c) Con l'altra mano, inserite la bacchetta nel primo foro da destra, in modo da attraversare l'intero pacchetto di schede (fig. 3.5).

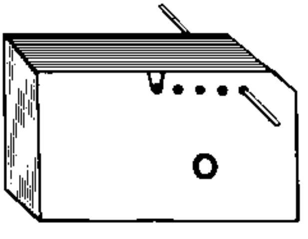


Figura 3.5.

d) Spostate la bacchetta di qualche centimetro verso l'alto. Alcune schede rimarranno impigliate nella bacchetta; tutte le altre resteranno nel palmo della tua mano.
e) Prendete tutte le schede che si sono così liberate, ricompattatele senza modificarne l'ordine e posizionatele davanti alle altre.

f) Reggete con una mano il pacchetto così ricostituito; sfilate la bacchetta e inseritela nel secondo foro da destra, ripetendo le istruzioni precedenti, dal punto d) al punto e).
g) Ripetete queste stesse operazioni, dopo aver infilato la bacchetta, nell'ordine, anche nel terzo, nel quarto e nel quinto foro da destra.

Al termine di queste semplici operazioni, le schede risulteranno magicamente disposte in ordine alfabetico.

Spiegazione del trucco

Su ogni scheda, abbiamo riportato una successione di fori, corrispondente alla codifica adottata per la lettera assegnata a quella scheda.

La codifica in questione è stata impostata associando a ciascuna lettera il numero binario corrispondente alla posizione che questa occupa nel consueto ordinamento alfabetico, come indicato in dettaglio, nella seguente tabella.

A	1°→00001	**H**	8°→01000	**O**	15°→01111	**V**	22°→10110
B	2°→00010	**I**	9°→01001	**P**	16°→10000	**W**	23°→10111
C	3°→00011	**J**	10°→01010	**Q**	17°→10001	**X**	24°→11000
D	4°→00100	**K**	11°→01011	**R**	18°→10010	**Y**	25°→11001
E	5°→00101	**L**	12°→01100	**S**	19°→10011	**Z**	26°→11010
F	6°→00110	**M**	13°→01101	**T**	20°→10100		
G	7°→00111	**N**	14°→01110	**U**	21°→10101		

Di conseguenza, se disponiamo le schede secondo l'ordine crescente dei numeri rappresentati dalle loro perforazioni, mettiamo automaticamente in ordine anche le relative lettere.

Ebbene, anche se non è molto immediato rendersene conto, la manovra effettuata nello svolgimento di questo gioco, ha proprio l'effetto di disporre tutte le schede secondo l'ordine crescente dei numeri ad esse associati.

Possiamo intuire il motivo per cui ciò accade, notando che, quando solleviamo la bacchetta dopo averla infilata in un determinato foro, lasciamo indietro tutte le schede associate a dei numeri che contengono un «1», nella corrispondente posizione binaria, mentre portiamo in avanti tutte le altre che, in quella stessa posizione, contengono il valore inferiore «0».

Per avere una visione più completa del funzionamento di questo meccanismo, però, preferiamo ricorrere a un esempio concreto.

Ammettiamo di avere solo sette schede le cui perforazioni corrispondono ai seguenti numeri:

001 - 010 - 011 - 100 - 101 - 110 - 111

Supponiamo che all'inizio questi numeri siano disposti nel seguente ordine casuale:

011 - 010 - 101 - 111 - 110 - 001- 100

Se spostiamo in avanti tutti i numeri che contengono uno 0 nella prima posizione da destra (corrispondente a 2^0), otteniamo:

01**0** - 11**0** - 10**0** - 011 - 101 - 111 - 001

Se adesso spostiamo in avanti tutti i numeri che possiedono uno 0 nella seconda posizione da destra (corrispondente a 2^1), otteniamo:

1<u>**0**</u>0 - 1<u>**0**</u>1 - 0<u>**0**</u>1 - 010 - 110 - 011 - 111

Se infine spostiamo in avanti tutti i numeri che possiedono uno 0 nella terza posizione da destra (corrispondente a 2^2), otteniamo:

<u>**0**</u>01 - <u>**0**</u>10 - <u>**0**</u>11 - 100 - 101 - 110 - 111

ovvero, proprio la sequenza crescente dei nostri sette numeri.

1. GRIMeD XVII[1]

Convegno Nazionale «Matematica e Difficoltà»
Castel San Pietro Terme (BO), 18-19 marzo 2011

Il senso dell'educazione matematica
Valorizzare valutando

Presentazione

Il GRIMeD, Gruppo di Ricerca Matematica e Difficoltà, a cui aderiscono ricercatori nel campo delle difficoltà di apprendimento/insegnamento in matematica e insegnanti di ogni ordine e grado, dopo aver organizzato lo scorso anno un Seminario a invito, su «Il senso dell'educazione matematica. Valorizzare valutando», quest'anno vuole estendere al maggior numero possibile di ricercatori e insegnanti le riflessioni sul tema citato, cercando nel contempo di arricchire l'incontro con ulteriori contributi ed esperienze.

Chi desidera partecipare presentando un suo contributo deve far pervenire:

un **abstract** (max 2000 caratteri) entro il **30.11.2010**,
alla Prof.ssa Patrizia Sandri, e-mail: patrizia.sandri@uniurb.it
L'**accettazione del contributo** sarà confermata o meno entro il **20.12.2010**.

Il testo completo dovrà essere inviato (nel formato che sarà precisato) entro il 20.1.2011.

Sarà possibile effettuare l'**iscrizione** prima dell'inizio dei lavori, presso la sede del Convegno, che sarà l'Hotel delle Terme di Castel San Pietro Terme (BO).

È riconosciuto l'esonero dal servizio per la partecipazione al Convegno (per insegnanti di ogni ordine e grado, per il personale direttivo ed ispettivo) ai sensi dell'art. 62 del CCNL/2003 in quanto l'Università, ai sensi dell'art. 1 della Direttiva Ministeriale n. 90 del 1 dicembre 2003, è Ente riconosciuto dal MIUR per la formazione dei docenti.

1. Con il patrocinio dei Dipartimenti di Matematica delle Università di Parma e Pavia e del Dipartimento di Scienze Umane dell'Università di Urbino.

Gli Atti, contenenti le relazioni degli esperti invitati e le comunicazioni accettate, verranno pubblicati dalla Pitagora Editrice e saranno disponibili a partire dalla data di inizio del Convegno.

Per ulteriori informazioni rivolgersi ai membri del Comitato Scientifico e Organizzatore:

Prof. Roberto Imperiale, roberto.imperiale@fastwebnet.it
Prof.ssa Angela Pesci, angela.pesci@unipv.it
Prof.ssa Patrizia Sandri, patrizia.sandri@uniurb.it
Prof.ssa Paola Vighi, paola.vighi@unipr.it

2. I disturbi dell’apprendimento tra ricerca e didattica

Call of Papers
Scuola Universitaria Professionale della Svizzera italiana (SUPSI)
Dipartimento formazione e apprendimento (DFA), Locarno

Locarno 6-7 maggio 2011

Il Dipartimento formazione e apprendimento della Scuola Universitaria Professionale della Svizzera italiana (DFA-SUPSI), in collaborazione con l’associazione Learning Disabilities WorldWide® (Weston, Massachusetts), organizza un convegno sul tema del rapporto tra didattica e disturbi specifici dell’apprendimento. Learning Disabilities WorldWide® (www.ldworldwide.org) ha tra i propri obiettivi la diffusione dello stato dell’arte della ricerca nell’ambito dei disturbi dell’apprendimento. Locarno ospita per la prima volta in Europa questa conferenza, nata dall’esperienza di quasi un ventennio di convegni negli Stati Uniti. Seguiranno i convegni di Oviedo nel 2012 e di Colonia nel 2013.

Tema della conferenza

I notevoli progressi registrati nella conoscenza dei disturbi dell’apprendimento, grazie all’apporto in particolare delle neuroscienze, stanno aprendo le porte a ripensamenti profondi nella didattica, e in particolar modo nel campo dell’apprendimento della lettura, della scrittura e del calcolo. Contemporaneamente, la possibilità d’uso di tecnologie digitali (ICT) comincia a offrire interessanti risorse che possono essere messe a disposizione degli insegnanti e degli allievi con o senza disturbi specifici dell’apprendimento. Il convegno intende creare l’occasione per un dialogo tra ricerca avanzata e didattica, al fine di mettere in atto pratiche di insegnamento che tengano conto dei recenti sviluppi in ambito scientifico. Lo scopo è dunque quello di mettere a confronto specialisti nel campo dell’educazione, della psicologia, della logopedia e delle neuroscienze sul senso, l’efficacia e le modalità di realizzazione di misure compensative e dispensative nella scuola, allo scopo di promuovere un’educazione di tipo inclusivo.

Contributi

Il convegno si rivolge a ricercatori, docenti universitari, insegnanti di ogni ordine e grado scolastico, logopedisti e operatori di servizi psicopedagogici, medici, neuropsichiatri, psicologi e altre persone interessate al tema.

Si invitano gli autori all'invio di contributi sui seguenti temi:

- Analisi e comprensione dei disturbi dell'apprendimento.
- I disturbi dell'apprendimento e la loro percezione nella scuola e nella società.
- Disturbi dell'apprendimento e prevenzione nella scuola.
- Strategie didattiche e disturbi dell'apprendimento.
- Collaborazione tra famiglia, scuola e servizi specialistici sul territorio.
- Uso di tecnologie digitali (ICT) nella didattica, con particolare attenzione ai disturbi dell'apprendimento.
- Approcci per l'acquisizione delle abilità di lettura e scrittura e disturbi dell'apprendimento.

Ambiti di interesse dei contributi

Il convegno si articolerà in due sezioni, che ospiteranno contributi relativi a due diversi ambiti di interesse:

- Ricerca: risultati, implicazioni teoriche e risvolti operativi di studi condotti nell'ambito dei disturbi dell'apprendimento.
- Pratica professionale: ricerche-azioni, resoconti di esperienze sul campo, «buone pratiche» in ambito didattico.

Tipologia dei contributi

I contributi vanno presentati in una delle seguenti tipologie:

- Comunicazione orale: durata 20 minuti. I contributi saranno pubblicati online sul sito dell'associazione Learning Disabilities Worldwide®. La lunghezza dei contributi dovrà essere compresa tra le 2500 e le 3000 parole. È prevista inoltre la pubblicazione cartacea di una selezione dei contributi inviati.
- Comunicazione in forma di poster: dimensione A0. I poster saranno esposti per tutta la durata del convegno. Successivamente saranno caricati sul sito dell'associazione Learning Disabilities Worldwide®.

Formato delle proposte

Le proposte dovranno contenere:

- Titolo della presentazione (massimo 12 parole).
- Autori (indicando chiaramente l'autore di contatto e il suo indirizzo postale ed elettronico).
- Abstract (250-500 parole).
- Lingua della presentazione (inglese o italiano).
- Indicazione del tipo di contributo (comunicazione orale o poster).
- Indicazione dell'ambito di interesse (Ricerca o Pratica professionale).
- Parole chiave (3-5).

Le proposte dovranno essere inviate per e-mail, in formato .doc, .docx, .odt o .pdf al seguente indirizzo: dfa.ldw@supsi.ch

Comitato scientifico
Matthias Grünke, Fac. scienze umane, Università di Colonia (D) (co-chair)
Fabio Leoni, SUPSI-DFA, Locarno (CH) (co-chair)
Sara Giulivi, SUPSI-DFA, Locarno (CH)
Carlo Muzio, Università di Pavia (I)
Celestino Rodriguez Perrez, Università di Oviedo (E)

Comitato organizzativo
Sara Giulivi, SUPSI-DFA
Luca Botturi, SUPSI-DFA
Teresa Allissa Citro, LDW®
Margy Davidson, LDW®
Feliciana Fiscalini-Tocchetto, SUPSI-DFA

Relatori invitati

I relatori invitati saranno resi noti sul sito www.dfa.supsi.ch a partire dal 27 novembre 2010.

Lingue ufficiali del convegno

Le lingue ufficiali del convegno sono l'italiano e l'inglese. Potranno pertanto essere inviati contributi in una di queste due lingue. Alcune sessioni del convegno saranno tenute in italiano.

Date importanti

Scadenza invio abstract	17 dicembre 2010
Notifica di accettazione agli autori	7 febbraio 2011
Termine ultimo iscrizione autori	1 aprile 2011
Consegna poster	6 maggio 2011
Convegno	6-7 maggio 2011
Invio articoli per gli atti del convegno	6 giugno 2011

Iscrizione

Iscrizione entro il 1.4.2011	180.– CHF
Iscrizione dopo il 1.4.2011	250.– CHF
Docenti delle scuole della Svizzera italiana	120.– CHF
Studenti	50.– CHF
Partecipazione a una sola giornata (pranzo incluso)	150.– CHF

Per ogni contributo sarà necessaria la registrazione, per entrambi i giorni del convegno, di almeno uno degli autori. La registrazione dovrà avvenire entro il 1.4.2011 e consentirà ai partecipanti di diventare membri del LDW®. In caso di mancata registrazione, il contributo dovrà essere escluso dal programma.

Contatti

Indirizzo: SUPSI-DFA, Piazza San Francesco 19, CH 6600 Locarno.
Tel.: +41 58 666 6840
E-mail: dfa.ldw@supsi.ch

3. Recensioni

Bolondi G. e D'Amore B. (2010). ***La matematica non serve a nulla. Provocazioni e risposte per capire di più.*** **Bologna: Editrice Compositori. Pagg. 150, euro 14.**

Il titolo può scandalizzare il lettore, ma il sottotitolo lo tranquillizza. Di più, quello che si legge nelle bellissime e snelle pagine di questo volumetto è un dono prezioso che gli autori hanno voluto fare agli insegnanti, in particolare a quelli non specialisti, che a volte si sentono impotenti di fronte a critiche spietate rivolte alla matematica come disciplina scolastica: ne abbiamo già parlato in altra sede e sull'argomento è stato scritto molto. Uno degli errori nei quali cade la gente comune è di far coincidere la matematica con la matematica scolastica, che poi a sua volta viene identificata con le sequenze di esercizi ripetitivi e, diciamolo pure, noiosi che troppo spesso vengono propinati agli allievi già a partire dalla scuola media. Ancor peggio, non è raro il caso che la matematica venga disprezzata fino a essere odiata a causa di insuccessi scolastici propri o dei propri figli.

Stiamo vivendo un periodo di grande sviluppo tecnologico. I televisori sono diventati computer, *hardware* e *software* si rincorrono in una pazzesca gara a inseguimento, *internet* è il nuovo mondo dei giovani, la telefonia mobile ha cambiato radicalmente la vita di ognuno, i bambini di sei anni parlano già dei film in 3D e via dicendo. Quasi mai si sente dire che tutto ciò è stato possibile grazie alla matematica. Ma non è di questo che ci parlano gli autori, bensì di qualcosa di ben più importante: della matematica come imprescindibile componente culturale, come fondamentale capitolo della storia dell'uomo. Già, perché, stando a quanto si legge nelle «pagine culturali» di giornali e riviste e nelle trasmissioni televisive, salvo poche eccezioni, la cultura del nostro tempo sarebbe essenzialmente spettacolo. I nuovi idoli sono personaggi dello sport di competizione, della musica da arena, del cinema commerciale o della televisione di evasione. Per rendersi conto di ciò, basta entrare nelle aule delle scuole che hanno permesso l'affissione di poster: se si prescinde dallo stereotipo di Einstein che mostra la lingua, non si trovano né scienziati, né tantomeno matematici.

Ben venga quindi un'opera come questa che ci fa vivere, attraverso numerosi e stimolanti assaggi, momenti di storia e di filosofia della matematica, che è poi una grande parte della cultura di ogni popolo. Di cultura, soprattutto, ci parlano gli autori, presentandoci numerosi esempi di strette relazioni tra matematica e filosofia, arte, politica, scienze, e altro ancora. Gli insegnanti si trovano a portata di mano uno strumento che non solo mette in luce l'importanza della matematica, ma anche l'esigenza che sia ben insegnata. Per questo è assolutamente necessario che chi insegna non dimentichi la valenza culturale di ciò che propone nelle classi, anche del contenuto che ai suoi occhi appare banale. Non c'è sapere matematico che non sia il frutto di un processo durato secoli, millenni, che il suo sviluppo non sia disseminato di errori o misconcezioni e di momenti di crisi. Non c'è contenuto matematico che non appaia difficile all'inizio del processo di apprendimento e che poi sembri addirittura banale ad apprendimento avvenuto. I giovani hanno il diritto di conoscere la matematica anche e soprattutto in questa ottica, imparando ad apprezzare ogni loro conquista, anche se agli occhi di chi ne sa di più appare piccola, insignificante. Perché le difficoltà degli allievi e i loro errori non devono sempre essere visti – e valutati – come insuccessi di cui vergognarsi, ma come normali segnali di un processo di apprendimento in atto. Perché il lungo e tortuoso cammino filogenetico rinasce ogni volta nella mente del soggetto in apprendimento.

Moltissimi sono gli spunti offerti che possono essere sfruttati in classe per aiutare gli studenti a costruirsi un'immagine sempre più familiare della matematica e a collocare questa disciplina nell'ampio panorama culturale. Ne cito qualcuno per dare un'idea di ciò che vi si può trovare. Il paragone estetico tra i noti versi di Salvatore Quasimodo tolti da *Acque e terre «Ognuno sta solo sul cuor della terra / trafitto da un raggio di sole: / ed è subito sera.»* e la definizione di Richard Dedekind di insieme infinito *«Un insieme si dice infinito / quando si può mettere in corrispondenza biunivoca / con una sua parte propria»*. Le parole di Carl Friedrich Gauss *«Non è la conoscenza, ma l'atto di imparare; non il possesso ma l'atto di arrivarci, che dà la gioia maggiore»*, alle quali si riallacciano i versi di Dante *«(…) ché non fa scienza / sanza lo ritenere, avere inteso»*. Infine non posso non citare, come curiosità, il «teorema di Napoleone», sì proprio lui, il Bonaparte: non lo sapevate? (G. Arrigo)

Motella E. (2009). La matematica secondo me. Verbania: Aliberti Libraio Editore. Pagg. 256, euro 16.

È un libro singolare, rivolto direttamente agli studenti della scuola media e degli istituti superiori, ma indirettamente il messaggio vuole raggiungere gli insegnanti e i genitori di buona volontà. L'autore ha insegnato per tre decenni in queste scuole e molto di quello che scrive è frutto della sua esperienza d'insegnamento. Il resto è dedotto da sue letture, i cui autori sono prevalentemente l'inglese Johnson Laird e il francese Antoine De La Garderie. Il tema principale è spinoso: come mai studenti, normalmente dotati con buoni risultati scolastici fin verso i sedici anni, finiscono poi per cadere in matematica? Come mai negli istituti superiori più della metà – con punte all'80% – degli studenti sono insufficienti in matematica e in fisica? La causa non può certamente essere un'epidemia di rincretinimento. Certo, non è un problema nuovo e nemmeno prerogativa della regione verbanese: ma la soluzione sembra molto lontana dall'essere trovata, o meglio, messa in pratica. Sì, perché, come sappiamo, in didattica della matematica il problema dell'apprendimento e delle difficoltà che comporta è studiato da decenni e alcuni risultati importanti sono pure stati raggiunti. Ma la teoria stenta ad essere messa in pratica dagli insegnanti. Le ragioni sono molteplici. Sicuramente fra gli insegnanti di matematica vi è un diffuso pregiudizio nei confronti delle scienze dell'educazione e quindi anche della didattica della matematica. Questa mentalità frena notevolmente l'avvicinamento dell'insegnante alla teoria didattica. La tradizione didattica è radicata al punto tale che risulta difficile convincere gli insegnanti a cambiare il modo di insegnare. Il metodo tradizionale spiegazione-esemplificazione-esercitazione-valutazione è talmente comodo per chi insegna che risulta difficile far sì che qualcuno si decida a cambiare. Gli studenti e i genitori conoscono praticamente solo questa pratica didattica, per cui non sono in grado di reagire allo *statu quo* che tuttavia mostra un quadro desolante.

L'autore, sempre rivolgendosi direttamente agli studenti, cerca di esprimere alcuni risultati della ricerca didattica, muovendosi tra teoria e pratica. Passa in rassegna alcuni punti nevralgici della didattica, come l'apprendimento concettuale, i relativi aspetti emozionale e sociale, la riflessione metacognitiva che coinvolga anche la storia della matematica e dei matematici. All'ipotetico studente-lettore l'autore dà anche consigli saggi, espressi in un linguaggio comprensibile per tutti. Questi concernono anche il modo di studiare – in particolare la presa di coscienza che dietro la procedura dev'esserci sempre un'adeguata comprensione concettuale – e il ruolo che devono giocare l'intuizione e la deduzione in una corretta attività matematica.

Molte sono le citazioni e le «frasi fatte» che possono prestarsi a discussioni e riflessioni in classe: dall'affermazione di Henri Lebesgue secondo la quale ogni scoperta deriva dal *«travaglio creativo dell'immaginazione»*, a quelle colte al volo qua e là come per esempio *«Un bravo insegnante deve saper guardare nella mente dei suoi alunni»*. (G. Arrigo)

Progetto grafico
Bruno Monguzzi
Prestampa
Taiana
Stampa
Veladini

Redazione
Laboratorio di didattica della matematica
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera

Telefono
091 814 18 21/22/24
Fax
091 814 18 19
gianfranco.arrigo@span.ch

Amministrazione
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera
Fax
091 814 18 19

Esce due volte all'anno
a maggio e a dicembre

Abbonamento annuo
SFR 30
€ 16

Bollettino dei docenti di matematica
61

In questo numero: matematica e musica di D. Baggi (seconda parte); matematica e informatica di M. Prevostini; Mostra San Gaku di G. Arrigo; matematica classica giapponese di Annick Horiuchi; ricerche didattiche di C. Pitta e A. Bucciarelli; una situazione didattica di D. Silvestro; quiz di A. Frapolli; omaggio a Martin Gardner redazionale e di E. Peres; segnalazioni e recensioni.

Direzione
Gianfranco Arrigo

Comitato di redazione
Aldo Frapolli, Luca Bellini, Carlo Ghielmetti,
Bernardo Mutti, Paolo Hägler, Giorgio Mainini,
Edo Montella, Alberto Piatti, Remigio Tartini

Comitato scientifico
Sergio Albeverio, Silvio Maracchia, Giulio Cesare Barozzi,
Claudio Beretta, Mauro Cerasoli, S.D. Chatterji,
Bruno D'Amore, André Delessert, Colette Laborde,
Vania Mascioni, Silvia Sbaragli

ISBN 978-88-86486-80-4
Fr. 18.–

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport