A cura
del Laboratorio di didattica della matematica

Bollettino dei docenti di matematica

62

Maggio
2011

Ufficio
dell’insegnamento medio
Centro
didattico cantonale

Bollettino
dei docenti di matematica
62

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport

ISBN 978-88-86486-82-8

Bollettino
dei docenti di matematica
62

Maggio
2011

Ufficio dell'insegnamento medio
Centro didattico cantonale

Indice

Prefazione

La sezione Varia dapprima rende omaggio alla memoria di due matematici recentemente scomparsi. Con André Delessert abbiamo perso un grande amico e un prezioso collaboratore del Bollettino. Lo ricordiamo con due articoletti: di Srishti-D. Chatterji e Manuel Ojanguren il primo, firmato dalla redazione l'altro. Ci ripromettiamo di onorare la sua memoria anche sul prossimo numero con uno scritto di Jean-Claude Pont che entra da subito nel comitato scientifico, al posto dell'amico scomparso. Qualche mese prima della morte di Delessert, la comunità matematica aveva annunciato la scomparsa di Benoît Mandelbrot, che ha legato il suo nome alla teoria degli insiemi frattali. Anche a lui il Bollettino dedica due articoli di Silvio Maracchia e Giorgio Mainini. Chiude questa prima parte un contributo dello stesso Giorgio Mainini che prende come pretesto l'affascinante tema dei quadrati magici per lanciare un messaggio importante agli insegnanti.

La sezione didattica di questo numero è particolarmente ricca. Presenta dapprima due articoli concernenti tematiche legate alla ricerca di due grandi firme, Bruno D'Amore e Martha Fandiño Pinilla, subito seguiti da un nuovo intervento di Gianfranco Arrigo sulla sperimentazione in corso in diverse classi riguardante l'insegnamento del calcolo nella scuola elementare. Chiude una sintesi di Michael Eisenring tratta dal suo lavoro di abilitazione all'insegnamento nelle scuole superiori, presentato lo scorso anno al Dipartimento della Formazione e dell'Apprendimento della SUPSI.

Troviamo poi una parte dedicata alla matematica con due articoli: di Mauro Cerasoli che invita gli insegnanti a considerare maggiormente la matematica finita, particolarmente nelle scuole liceali, e di Gianfranco Arrigo che vuole sottolineare l'importanza di effettuare un'attività didattica poco formalizzata ma piena di senso, propedeutica all'insegnamento rigoroso e formale che se ne fa poi nelle classi terminali delle superiori. L'articolo propone come esempio un estratto dalla monumentale opera di Leonhard Euler, concernente la determinazione del numero e.

Aldo Frapolli non si è dimenticato dei suoi quiz e presenta il numero 45.

Con piacere la redazione è in grado di continuare la pubblicazione delle Passeggiate matematiche, ideate da Antonio Steiner e curate da Gianfranco Arrigo. Questa volta si gira attorno alla media armonica.

Si chiude con la segnalazione di due importanti convegni che si svolgeranno nel prossimo autunno a Locarno e a Castel San Pietro Terme (BO), seguita da alcune recensioni di importanti novità librarie.

1. Ricordo di André Delessert

Srishti-D. Chatterji[1], Manuel Ojanguren[2]

Dopo una lunga malattia, il 19 ottobre 2010 si è spento a Losanna André Delessert, membro del Comitato Scientifico di questo Bollettino.

Nato a Losanna nel 1923, era originario di Peney-le-Jorat, nel Canton Vaud. Dopo aver ottenuto la maturità al *Gymnase de la Cité* si iscrisse all'Università di Losanna, dove nel 1945 conseguì la licenza in matematica e fisica. Vinse in seguito una borsa di studio del governo francese, che gli permise di trascorrere due anni, dal 1946 al 1948, a Parigi, seguendo corsi e seminari all'Istituto Poincaré e alla Scuola Normale Superiore. A Parigi trovò anche il tempo di frequentare l'*Académie de la Grande Chaumière* per imparare il disegno, preludio alla sua futura attività artistica.

Tornato a Losanna, si dedicò poi per molti anni all'insegnamento secondario, prima ginnasiale poi liceale, conducendo nel contempo ricerche sui fondamenti della geometria. Nel 1962 ottenne il titolo di dottore in Scienze, presentando una tesi intitolata *Une construction de la géométrie élémentaire fondée sur la notion de réflexion*. La sua dissertazione fu poi pubblicata nel periodico *L'Enseignement Mathématique* (vol. 10, 1964).

Nel 1964 fu nominato professore di matematica all'Università di Losanna. Qui intraprese una brillante carriera che lo condusse alla carica di decano della Facoltà di Scienze (1974-1976) e poi a quella di rettore dell'Università (1983-1987). Si ritirò dall'insegnamento nel 1988, col titolo di *professeur honoraire*.

Durante tutta la carriera la sua grande competenza didattica lo fece apprezzare in molte commissioni per l'insegnamento, sia cantonali, sia internazionali.

Così, nel 1963, venne proposto come segretario della Commissione internazionale dell'insegnamento matematico (ancora prima di diventarne membro!), tenne questa carica dal 1963 al 1966, e fu poi rieletto per il quadriennio successivo, dal 1967 al 1970. A livello nazionale fu membro dell'Accademia svizzera delle scienze tecniche e, dal 1977 al 1978, presidente della Società matematica svizzera.

1. Professore emerito EPFL, Losanna, srishti.chatterji@epfl.ch
2. Professore emerito EPFL, Losanna, manuel.ojanguren@epfl.ch

Fra le diverse pubblicazioni di André Delessert sottolineiamo i suoi due libri *Géométrie plane* (Editions Spes, Losanna, 1970) e *Introduction à la géométrie de l'espace* (Editions du DIPC, Losanna, 1978) che hanno avuto grande influenza sull'insegnamento della geometria nelle scuole secondarie del Canton Vaud. Più tardi, quando i suoi interessi si volsero verso la logica e i fondamenti della matematica, scrisse due altri libri molto interessanti. Il primo, intitolato *Introduction à la logique* (Presses Polytechniques Romandes, 1993), è un manuale di buon livello per un corso universitario di logica matematica. Il secondo, intitolato *Gödel: une révolution en mathématiques* (Presses Polytechniques Romandes, 2000), è un saggio rigoroso sull'impatto che i teoremi di Gödel hanno avuto (o avrebbero dovuto avere) sulla filosofia e sull'insegnamento della matematica. Il suo ultimo libro, di carattere filosofico e moralistico, porta il titolo *Le règne de la frivolité* (Editions de l'Aire, 2007) ed è una raccolta di gustosissimi saggi sulla nostra epoca.

André Delessert era una persona colta, gentile e di vastissimi interessi. Oltre alla matematica e all'insegnamento, una delle sue passioni fu la scultura, che praticò attivamente, facendo parecchie esposizioni. I suoi amici, i suoi colleghi e i suoi allievi lo ricordano con ammirazione e affetto.

2. Così ricordiamo André Delessert

Redazionale

To commemorate the Swiss mathematician and philosopher André Delessert, who died recently, the editorial staff of the Bollettino dei docenti di matematica, of which Delessert was a member of the Scientific Committee, offers the Italian translation of the epilogue of his book on Kurt Gödel.

Parlare dell'amico André Delessert non è impresa facile. Per ricordarlo, la redazione del Bollettino preferisce offrire ai lettori un saggio: l'epilogo del suo libro *Gödel: une révolution en mathématiques, Presses Polytechniques et universitaires romandes (2000).* In esso la personalità di André fine matematico e filosofo risalta in tutta la sua grandezza. La traduzione è nostra.

«Eccoci giunti alle ultime righe del nostro racconto. È attraversato da un lato all'altro dal concetto di Numero. L'abbiamo scoperto nella sua doppia identità: il Numero-Idea secondo Platone, preso nella sua totalità, che prefigura il numero naturale; il numero "enumerante" una collezione attuale, secondo Aristotele, che diventerà poi il numerale. Nel corso dei secoli i matematici sono stati affascinati sia dall'una che dall'altra di queste facce. Poi il numero, sempre conservando il suo potere enumerante, è diventato misura. Ma, malgrado la sua sudditanza nei confronti delle scienze naturali, ha fatto trasparire gradatamente l'immagine, nascosta in se stesso, dell'infinito. Infine la sua faccia numerale si è vestita di tutto l'apparato formale finitista del quale si servono i matematici. La sua faccia matematica ha svelato le origini insiemistiche e ha permesso di descrivere l'essenza degli oggetti matematici.

Questa evoluzione si situa sia nella storia della matematica che nella storia delle idee. In matematica non mette affatto in crisi le conoscenze acquisite. Nessun teorema si è disperso lungo il cammino. Al massimo oggi si può osservare che la coerenza di certe definizioni classiche è garantita solo dall'assioma della scelta. Per contro, i lavori di Gödel e dei suoi successori hanno provocato una vera rivoluzione nella rappresentazione che si può dare del mondo degli oggetti matematici. In questo si può parlare di un pre-Gödel e di un post-Gödel.

Prima di Gödel, la nozione di finito matematico era primitiva. Copriva indifferentemente il numerale e il numero naturale. L'infinito matematico era una nozione derivata, il non-finito, del quale taluni potevano eventualmente negarne l'esistenza. Dopo Gödel, il finito matematico cessa di essere una nozione elementare. Il concetto che s'impone è quello di insieme, che, a priori, non può essere qualificato né di finito né di infinito. Un assioma speciale detto “dell’infinito” – una concessione fatta al periodo pre-Gödel – permette di parlare di insiemi infiniti. In questo ambito, la finitudine matematica non è ancora presente. È stato necessario ricorrere all’assioma della scelta per poter dimostrare che il non-infinito è un concetto matematico. La finitudine matematica è diventata, da allora, una nozione derivata che concerne i numeri naturali, gli insiemi finiti e persino quelli numerabili. Ma allora una nuova distinzione s’impone tra numero naturale e numerale. Il primo è un oggetto matematico, mentre il secondo è un oggetto fisico materializzabile in una formula di primo ordine che chiama in causa solo i cinque segni 0, 1, (,) e + e che si può effettivamente scrivere.

Da questa rivoluzione risulta che la maggior parte delle dissertazioni pre-gödeliane sul finito e l’infinito perde ogni significato matematico. I rifiuti di riconoscere l’infinto attuale di Aristotele e di Gauss sono ora spogliati di ogni pertinenza matematica. L’infinitamente grande e l’infinitamente piccolo nei quali Pascal imprigiona l’uomo dedito al macroscopico conservano il loro carattere terrificante. Ma questo deriva dalla fisica e dalla fisiologia, dunque dalla psicologia. In matematica è sempre lo stesso infinito che si manifesta nell’“infinitamente grande” e nell’“infinitamente piccolo”. Il finito non è situato tra loro due. È soggiacente all’infinito, deriva dall’infinito e tutte le sue proprietà derivano dall’infinito stesso. Tuttavia i risultati di Gödel portano al di là del mondo degli oggetti matematici. Infatti ci danno informazioni sul come funziona il pensiero in matematica, pensiero che a sua volta non è un oggetto matematico. In matematica il pensiero agisce secondo due modalità.

La prima investe le regole del discorso, che dev’essere ordinato e lineare. Una di queste regole esige che nessuna parte di un testo non sia fondata su un’altra parte del testo stesso. Numerose regole grammaticali o logiche provengono da questa condizione. È la forma *discorsiva* del pensiero, quella che nel passato fu detta *dianoetica*.

La seconda modalità, propria del pensiero, consiste in una “visione” immediata di certi fatti matematici. Questa “intuizione”, questo pensiero noetico non può essere sostituito da un discorso. La dimostrazione di un teorema insiemistico può sempre essere tradotta in un testo. Ma la consistenza della teoria degli insiemi nella quale la dimostrazione è costruita può essere solo constatata direttamente. Tutti rifiutano la possibilità che 0 = 1, anche se è impossibile dimostrare formalmente che questo enunciato non è derivabile nella teoria degli insiemi.

La scienza matematica si situa dunque a cavallo tra noetica e dianoetica. È una condizione necessaria della sua esistenza. Ciò significa che esiste una realtà matematica della quale certi aspetti non possono essere percepiti se non attraverso una facoltà propria del pensiero, mentre altri possono essere incatenati fra loro mediante le regole del discorso. È importante non confondere questi due ordini di fatti, così come è importante non confondere la penicillina con la relativa ricetta del medico. I teoremi gödeliani rivelano la trascendenza insita nel mondo matematico. Da qualche decennio, si manifestano dottrine che tendono a sopprimere ogni riferimento alla realtà. Subordinata a questo corpo di dottrine, la matematica dovrebbe rinunciare a ogni certezza in modo da unirsi alle altre scienze. Dovrebbe permettere probabilmente – come alcuni lo accordano alle altre scienze – di enunciare affermazioni in piena libertà e di formulare altrettanto liberamente i metodi per criticare queste affermazioni. Ciascuna di esse sarebbe allora fallibile per principio, cioè potenzialmente falsa, anche all’interno del sistema. Non sarebbe ammesso alcun riferimento alla realtà. In questa prospettiva la scienza che è sempre stata concepita come comprensione della realtà si vedrebbe sostituita da una logomachia. In questa "nuova" scienza sarebbe considerato scientifico soltanto ciò che, a un certo momento, raccoglierebbe la maggioranza di opinioni favorevoli. Ora, questa concezione della scienza non è affatto una chimera. Sta diventando il prodotto esclusivo dei cenacoli che stabiliscono la Politica della Scienza. Così come discorsi e contro-discorsi si incatenano in un sistema unidimensionale, la scienza che ne nasce si costituisce in una sorta di "pensiero unico", nel quale ogni riferimento alla realtà indipendente dal discorso è bandito. Questo nuovo tipo di scienza lo qualifichiamo come *metodologico,* in contrapposizione alla *scienza realista* che vuole essere comprensione della realtà.

I teoremi gödeliani fanno parte del mondo matematico. Mostrano che la concezione strettamente metodologica della scienza non è applicabile alla matematica. Quest'ultima è costretta a risalire fino alle cose oggetto del discorso. Questa esigenza è almeno condizionante tanto quanto la concezione puramente metodologica della scienza. Innanzi tutto offre mezzi per accertarsi della consistenza del discorso matematico, ciò che nessun procedimento discorsivo non può fare. Inoltre offre vie di ricerca in quantità illimitata, perché le cose (reali) sono inesauribili, si situano al di là di ogni discorso. La conoscenza dell'universo matematico non sarà mai esaustiva. Questo fatto potrebbe interessare quelli che, appoggiandosi sulla finitudine dei neuroni, delle sinapsi, delle molecole diverse che ci sono nel cervello umano, ipotizzano che un giorno si potrà capire ogni azione dello spirito umano.

In sintesi, in seno alle scienze si sta verificando una rottura. Da una parte si trova la matematica che mette in gioco sia la noetica che la dianoetica, dall'altra sono raggruppate le "altre scienze" che – se si crede a certi filosofi – si racchiudono nella procedura metodologica e si limitano alle sole forme discorsive del pensiero. Alcuni, che preferiscono mantenere l'unità della scienza piuttosto che l'obiettivo finale di comprensione della realtà, propongono che la matematica raggiunga le "altre scienze". Per la matematica questa soluzione è inaccettabile perché la costringerebbe a ignorare coscientemente una parte integrante del suo sapere. Non sarebbe più conveniente che le "altre scienze" effettuassero lo stesso passo compiuto dalla matematica? Cessando di considerare gli oggetti matematici come prodotti puri del discorso matematico e riferendosi alla realtà di questi oggetti per elaborare i propri discorsi.»

3. Ricordo di Benoît B. Mandelbrot[1]

Silvio Maracchia

Nell'ottobre scorso è morto Benoît Mandelbrot, uno dei grandi matematici del nostro tempo. Mandelbrot è riuscito non tanto a convalidare la famosa frase di Galileo secondo il quale il libro della natura è scritto in lingua matematica, quanto a mostrare che ogni sua forma, sia essa una costa frastagliata, una montagna, un fiume ecc., può essere espresso matematicamente come avveniva per le forme più regolari quali una sfera, un cerchio, un triangolo e così via.

La geometria classica, infatti, ma si può dire la matematica in genere, pur nascondendo nel suo seno oggetti apparentemente fuori del suo ambito, era stata per secoli il campo dell'armonia e della regolarità. Ebbene Mandelbrot con la sua teoria dei *frattali* è riuscito ad unificare la regolarità e la irregolarità, l'armonia e la disarmonia in una visione più vasta che ha invaso anche altre scienze.

Benoît Mandelbrot era nato a Varsavia il 20 novembre del 1924 da una famiglia di origini lituane e di buon livello. Un suo zio (Szolem Mandelbrot) era stato un ottimo matematico, successore di Jacques Hadamard nel Collegio di Francia e professore nella cattedra dell'Académie des Sciences, cattedra che era stata di Henri Poincaré ed influì nelle ricerche del giovane nipote.

Benoît visse quasi sempre in Francia: a Parigi si era laureato in matematica dando inizio ad una notevole carriera universitaria costellata da premi prestigiosi e numerose lauree *honoris causa* presso università di tutto il mondo compresa l'università di Bari che gliela assegnò in Medicina e Chirurgia nel novembre del 2007.

In tale occasione, quasi a riassunto di quanto aveva conseguito e in previsione di una futura ricerca, Mandelbrot aveva affermato nella sua *lectio magistralis* (*«Fractals in Anatomy and Physiology»*):

1. La maggior parte delle notizie di questo articolo sono tratte da Cfr. B. Mandelbrot, *Gli oggetti frattali. Forma, caso e dimensioni*, Einaudi, Torino, 1987 (tr. di Roberto Pignoni). Si noti che le citazioni di parole o frasi di Mandelbrot o semplicemente un loro riassunto, sono indicate dal numero posto tra una doppia parentesi quadrata che ne indica la pagina.

«*Il concetto di base che unisce lo studio dei frattali alle discipline come la biologia e quindi anatomia e fisiologia parte dalla convinzione di un necessario superamento della geometria euclidea nella descrizione della realtà naturale*[2]*. Volendo essere molto sintetici, i frattali servono a trovare una nuova rappresentazione che parta dall'idea di base che il piccolo in natura non è nient'altro che una copia del grande. La mia convinzione è che i frattali saranno presto impiegati nella comprensione dei processi neurali, la mente umana sarà la loro nuova frontiera.*[3]»

Il contributo maggiore dato da Mandelbrot è appunto la creazione degli *oggetti frattali* così detti dal loro autore perché, dal latino *fractus* «interrotti, irregolari», termine stabilito nel 1975 allorché scrisse l'opera *Les objets fractals: forme, hasard et dimension.* Mediante questi nuovi enti è possibile, come abbiamo già accennato, affrontare in modo matematico la descrizione di oggetti reali di forma e natura qualsiasi. Il *frattale*, disse Mandelbrot in una conferenza del 1994, è uno stato in qualche modo intermedio tra l'ordine e il caos completo per cui esso (con un ossimoro) può considerarsi un *caos ordinato.*[4]

Nel 1967 con l'articolo *How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and farctional dimension* («Quanto è lunga la costa della Britannia? Autosimilarità statistica e dimensione frattale») apparso in *Science*, e con successive numerose pubblicazioni, Mandelbrot affronta oggetti che pur avendo un perimetro infinito possono avere un'area finita, e le loro approssimazioni attraverso quegli enti che lui stesso chiamò poi oggetti frattali dotati di dimensioni diverse da quelle tradizionali.

I matematici avevano già affrontato curve e superficie con caratteristiche apparentemente paradossali: così, ad esempio, il «solido acutissimo» di Torricelli con superficie infinita e volume finito, oppure la curva di Peano in grado di ricoprire completamente una superficie o la cosiddetta «isola di Koch». Mandelbrot riesce però ad unificare i vari contributi che gli derivano, scrive, da una certa parte della matematica sviluppata tra il 1875 e il 1925[5], con una teoria sistematica che tiene conto specialmente del fatto che, ad esempio, curve appartenenti ad un piano possono avere dimensioni diverse da uno. «*Si può osservare, in modo molto approssimativo, che una figura la cui dimensione si situa tra 1 e 2 deve essere più 'affilata' di una superficie ordinaria, pur essendo più corposa di una linea ordinaria*».

Un esempio portato da Mandelbrot chiarisce ancor meglio l'intuizione di una dimensione diversa dai consueti valori. «*per descrivere un gomitolo di filo non è possibile utilizzare direttamente né le teorie relative alla palla, né quelle relative alla linea ideale. In entrambi i casi occorre introdurre dei 'termini correttivi'*».

2. Mandelbrot più volte aveva espresso questo concetto: «*la geometria della natura è caotica e mal si identifica nell'ordine perfetto delle forme abituali di Euclide o del calcolo differenziale*».
3. Citazione tratta da Wikipedia che riporta anche la motivazione della laurea assegnata: *La visione altamente unificante del fenomeno della vita che ci offre il professor Mandelbrot, si riflette in campo medico con un approccio unitario, prima sconosciuto, alla malattia e alla persona malata.*
4. Il termine «caos», scrive Mandelbrot, gli è stato suggerito dalle analisi di Norbert Wiener sul moto browniano
5. B. Mandelbrot ha la piena consapevolezza, però, di «*fondare una nuova disciplina scientifica. Anzitutto il tema generale, quello dell'importanza concreta delle figure di dimensione frazionaria, è del tutto nuovo*».

La dimensione frattale che, come scrive Mandelbrot, «*misura il grado di irregolarità e di interruzione dell'oggetto*» , può essere definita in vari modi, ma nella maniera più consueta lo è attraverso il rapporto di omotetia di una costruzione autosimilare e cioè tale che ogni sua parte rappresenta, seppure in scala diversa, il tutto.

Vediamo di arrivarci per gradi con un esempio relativo ad un quadrato [cubo] di partenza.

Si divida il lato di un quadrato [cubo] poniamo in tre parti uguali, per cui il rapporto di omotetia[6] r(3) = 1/3. In questo caso il numero N delle parti autosimilari è dato da $(1/r(3))^D$ ove D = 2 [D = 3] è la dimensione del quadrato [cubo]; cioè $N = 3^D = 9$ [27][7].

In generale, contraendo il segmento di una figura secondo il rapporto di omotetia r(n) = 1/K, il numero N delle parti è:

$N = K^D$ oppure, come scrive Mandelbrot: $N = (1/r(n))^D$

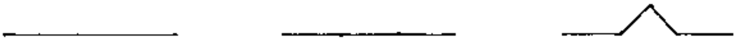
da cui si ha la formula che dà la dimensione:

(*) D = log N / log K[8] oppure D = log N / log (1/r(n)).

Generalizzando il procedimento mostrato nei casi precedenti, Mandelbrot, indicando con r(n) il rapporto di omotetia relativo al numero minimo di parti N con il quale è possibile ricoprire la nostra figura di dimensione D, riprende la formula ottenuta $N = K^D$ ottenendo in ogni caso la formula (*) già vista.

Come esempio del calcolo della dimensione di un frattale egli considera quello relativo all'«isola di Koch», che indica come «curva di Koch».

Si consideri un segmento (a) e lo si contrae di un terzo [r(3) = 1/K = 1/3] (b) ma per ottenere 4 parti [N = 4] (c)



(a) (b) (c)

6. Come osserva in nota il traduttore dell'opera di Mandelbrot: «*Manteniamo i termini 'omotetia interna' e 'dimensione di omotetia' adottati dall'Autore nel testo francese. Un'omotetia è una trasformazione lineare che dilata (o contrae) simultaneamente tutti i vettori del piano o dello spazio (o, più in generale, dello spazio euclideo di dimensione n) moltiplicandoli per un numero reale maggiore di zero. Va osservato tuttavia che mentre per le figure regolari questa terminologia ha la chiarezza e la precisione necessarie, quando si ha invece a che fare con oggetti irregolari, si parla di 'omotetia' in senso essenzialmente statistico. In ogni caso, l'espressione 'omotetia interna' è la più adeguata per rendere, nel linguaggio della geometria frattale, quell'idea di 'autosomiglianza'*»
7. Si potrebbe invertire il procedimento sapendo che nel caso del quadrato [cubo] si ottengono 9 [27] parti, si ha $9 = 3^D$ [$27 = 3^D$] da cui D = 2 [D = 3]
8. Prendendo i logaritmi dei due membri, si ha infatti $\log N = \log K^D$, cioè $\log N = D \log K$; si noti che i logaritmi vanno presi con la stessa base che può essere qualsiasi dato che cambiando in entrambi la base, i due logaritmi verrebbero moltiplicati per uno stesso fattore.

La formula $N = K^D$ diventa pertanto $4 = 3^D$ da cui

$D = \log 4 / \log 3 = 1{,}2618..$

Iterando la contrazione indicata anche in tutti i segmenti così ottenuti, a partire da un triangolo equilatero, si ottiene la figura mostrata in una pagina del libro di Mandelbrot (Fig. 1). Iterando ancora si ottiene la figura della pagina successiva (Fig. 2). La dimensione rimane naturalmente costante.[9]

36 GLI OGGETTI FRATTALI

Figure 36-37.
La curva di Koch e l'isola chimerica «a fiocco di neve».

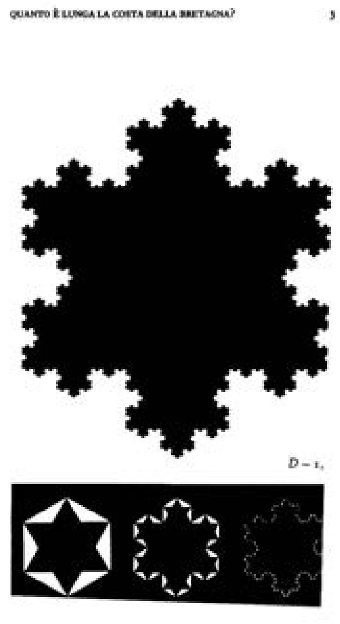
L'esempio classico di curva continua e non rettificabile, dotata di omotetia interna, è costituito dal terzo inferiore del limite del presente diagramma. È chiamato «curva di Koch» e l'interno della curva è spesso detto «fiocco di neve», però io preferisco il termine «isola di Koch».

La costruzione illustrata in fondo a p. 36 parte da un'isola a forma di triangolo equilatero. Quindi, sul terzo centrale di ciascuno dei tre lati di lunghezza unitaria, si colloca un promontorio a forma di Δ, dai lati uguali a 1/3. Si ottiene così un esagono regolare stellato, o stella di David, il cui perimetro ha una lunghezza uguale a 4. Allo stesso modo si procede per ciascuno dei suoi dodici lati, e così di seguito, ottenendo il diagramma rappresentato a p. 37 in alto.

Si vede che l'isola di Koch viene ad iscriversi naturalmente in un esagono regolare convesso. Di qui un secondo metodo di costruzione, in qualche modo inverso rispetto a quello prima descritto, e consistente nel partire da un esagono e ritagliarvi delle insenature. Cesàro ha combinato i due metodi, e in fondo a p. 37 si vede in che modo è possibile ottenere una curva, vale a dire il perimetro dell'isola di Koch, come limite di una superficie che si assottiglia fin quasi all'evanescenza.

$D = \log_3 4 = 1{,}26$

Fig. 1



QUANTO È LUNGA LA COSTA DELLA BRETAGNA? 3

Fig. 2

Con una ulteriore generalizzazione, «*l'espressione della dimensione come esponente di omotetia*» conclude Mandelbrot, «*continua ad avere un senso formale per ogni figura – come la curva di Koch – che, pur non essendo né un segmento né un quadrato, conservi la proprietà di potersi decomporre in N parti che si ricavano dalla totalità con una omotetia di rapporto r (seguito da uno spostamento o da una simmetria)* ». In altre parole, in ogni caso si ha $r(N) = 1/K$ ed $N = K^D$ e quindi le formule (*) già ottenute nei casi particolari considerati.

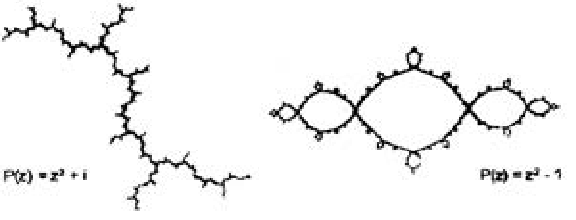
Di particolare importanza sono i cosiddetti frattali non lineari di tipo ricorsivo. Ad esempio il frattale quadratico è dato dalla formula:

9. Ad esempio, operando un successiva contrazione sulla figura (c) per cui si ha $K = (1/3)^2$ e le parti diventano 4^2 , si ha: $4^2 = (3^2)^D$ e, in generale $4^n = (3^n)^D$, con la dimensione sempre uguale al rapporto log 4 / log. 3. Potendo scegliere a piacere la base del logaritmo, scegliendo 3, il logaritmo al denominatore risulta uguale ad uno per cui si ha anche, come scritto da Mandelbrot: $D = \log_3 4$.

$z_{n+1} = z_n^2 + c$

con «z» numero complesso variabile e «c» numero complesso fisso detto «parametro di controllo» in base al quale si determinano i frattali costituiti dalle varie frontiere che delimitano diverse zone di attrazione.

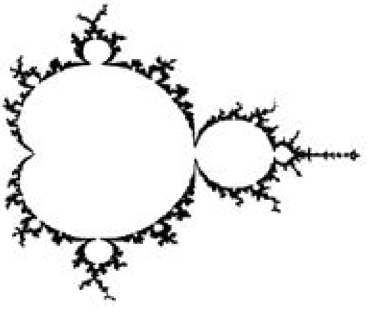
Questi particolari frattali si chiamano *insiemi di Julia* da Gaston Julia, insegnante di Mandelbrot nell'*École Polytechnique* di Parigi.



Due esempi di insiemi di Julia

Si noti, ad esempio, che con c = 0 si ha $z_{n+1} = z_n^2$ e per |z|< 1 i punti si avvicinano sempre più al punto 0 che è così un *attrattore*; per |z|> 1 l'attrattore è il «punto» infinito e per |z|= 1 i punti si trovano sulla circonferenza di centro 0 e raggio 1 che costituisce la *frontiera* tra le due zone di attrazione.

Per lo studio dei comportamenti degli insiemi di Julia al variare di «c», e con l'insostituibile contributo degli elaboratori elettronici, nacque il famoso insieme di Mandelbrot legato ai comportamenti dei processi dinamici ed a molte altre proprietà[10].



L'insieme di Mandelbrot

10. «*L'idea originale di Mandelbrot*» scrive Umberto Bottazzini (cfr. Edoardo Boccinelli e Umberto Bottazzini, *La serva padrona*, Cortina, Milano 2000 p. 177) «*è stata quella di iterare una semplice formula* $x_{n+1} = x_n^2 + c$ *dando ad* x *e* c *valori complessi. Se x è un numero complesso qualunque, elevandolo al quadrato e sommando c si ottiene un nuovo numero complesso. Ripetendo per questo lo stesso procedimento si ottiene un ulteriore numero, e così via infinite volte. Questa semplice operazione di iterazione nasconde in sé una figura inquietante, l'insieme di Mandelbrot*»

Bibliografia

La bibliografia su Mandelbrot e i frattali è sterminata; limitiamoci ad alcuni testi scritti in italiano.

Mandelbrot B. (1987). *Gli oggetti frattali. Forma, caso e dimensioni*. (tr. di Roberto Pignoni). Torino: Einaudi.
Arcidiacono G. (1993). *Spazio, Iperspazi, Frattali*. Roma: Di Renzo.
Devlin K. (1998). *Dove va la matematica*, Torino: Bollati Boringhieri.
Maracchia S. (2003). Mandelbrot, voce dell'*Enciclopedia pedagogica* (Appendice A-Z). Brescia: La Scuola.

4. In morte di Benoît Mandelbrot

Giorgio Mainini

Quanto è lunga la costa della Gran Bretagna?

Nel 1967 su *Science* apparve un articolo di Mandelbrot dal titolo *How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension*.

Nella prima parte Mandelbrot discute il paradosso secondo il quale quanto minore è il righello adottato, tanto più lunga risulta la lunghezza misurata. Se si porta il paradosso alla sua estrema conseguenza, si ricava che la lunghezza tende all'infinito se la lunghezza del righello tende a zero.

Nella seconda parte descrive varie curve, come il *fiocco di neve* di Koch, definite in modo da essere rigorosamente auto-simili. In pratica, ciò significa che, se si guarda al microscopio una parte della curva, si vede la stessa forma, indipendentemente dall'ingrandimento adottato.

L'articolo è importante perché mostra il pensiero iniziale di Mandelbrot sui frattali, e perché è un esempio dell'unione fra oggetti matematici e forme naturali che è stato tema di gran parte dei suoi lavori successivi.

Breve biografia

Benoît Mandelbrot, nato a Varsavia il 20 novembre 1924, fu un matematico franco-statunitense. Di origine ebraica, emigrò con la sua famiglia in Francia nel 1936, sentendo arrivare la minaccia nazista. Dal 1946 al 1947 frequentò l'École Polytechnique, dove ebbe tra i suoi professori Gaston Julia. Dal 1947 al 1949 studiò al California Institute of Technology, dove ottenne un master in Aeronautica. Tornato in Francia, ottenne il Ph.D in Matematica all'università di Parigi nel 1952. Dal 1949 al 1958 fu membro dello staff del Centre National de la Recherche Scientifique e passò un anno all'Institute for Advanced Studies di Princeton, invitatovi da John von Neumann. Nel 1955 si sposò e trasferì prima a Ginevra poi all'Université Lille Nord. Nel 1958 i Mandelbrot raggiunsero di nuovo gli Stati Uniti, dove Benoît entrò a far parte dello staff della IBM, rimanendovi per trentacinque anni, prima come IBM Fellow, poi come Fellow Emeritus. È morto di cancro al pancreas a Cambridge, Massachusetts, il 14 ottobre 2010, in una casa per anziani.

Fotografia di P. R. Halmos, *I have a photographic memory* (Providence, 1987)

Carriera scientifica

Dal 1951 in avanti, Mandelbrot si occupò non solo di matematica ma anche di economia, teoria dell'informazione, fluido-dinamica e cosmologia. Aveva infatti la convinzione che due temi chiave attraversassero una moltitudine di problemi in quei campi: la *fat-tail* e l'auto-similarità. Per descrivere oggetti con tali proprietà, nel 1975 coniò il termine *frattale*. Nel 1979 si dedicò allo studio di un particolare tipo di frattali, gli *insiemi di Julia*, e si servì di computer per rappresentare graficamente quelli della forma $z^2 - \mu$, dove sia z sia μ sono numeri complessi. Cercando di scoprire come la topologia degli insieme di Julia dipenda dal parametro μ, arrivò a definire l'*insieme di Mandelbrot*, ora di solito scritto nella forma $z^2 + c$. Nel 1982 allargò e perfezionò le sue idee in *The Fractal Geometry of Nature*, opera che portò i frattali nel solco principale della matematica dei professionisti e degli appassionati, nonostante qualche critico li tacci di «artefatti computeristici» (nell'originale «program artifacts»). Nel 1987 lasciò la IBM (dopo 35 anni e 12 giorni!) quando la ditta decise di chiudere la divisione della ricerca pura. Fu allora associato all'università di Yale, dove ottenne un posto fisso nel 1999, all'età di 75 anni.

Ottenne una quantità di titoli ed onorificenze che sarebbe troppo lungo enumerare qui (si veda http://en.wikipedia.org/wiki/Benoît_Mandelbrot#cite_note-Vita-25)

I frattali

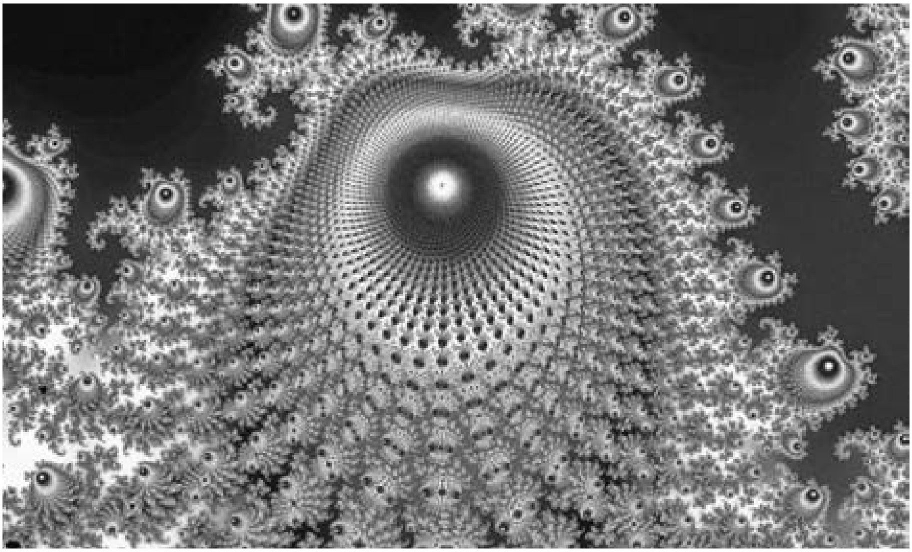
Il termine *frattale* fu coniato nel 1975 da Mandelbrot e deriva dal latino *fractus*, nel senso di rotto o fratturato. Un frattale, parole sue, «è una forma geometrica ruvida o frammentata che può essere divisa in parti ognuna delle quali è (almeno approssimativamente) una copia ridotta di tutta la figura»[1].

1. L'idea di frattale si trova peraltro già in Weierstrass, Cantor e Hausdorff, che studiarono funzioni continue ma non differenziabili.

Sue caratteristiche sono:

– ha una struttura fine in ogni scala arbitrariamente piccola,
– è troppo irregolare per poter essere descritto agevolmente nel linguaggio tradizionale della geometria euclidea,
– è auto-simile (almeno approssimativamente o stocasticamente),
– ha una dimensione di Hausdorff maggiore della sua dimensione topologica,
– ha una definizione semplice e ricorsiva.

Siccome appare simile a sé stesso ad ogni livello di ingrandimento, un frattale viene spesso considerato, in parole povere, come infinitamente complesso. Le nuvole, i profili delle montagne, le linee costiere, i fiocchi di neve, i broccoli e i disegni sulla pelle di certi animali sono oggetti naturali che, approssimativamente, hanno l'aspetto di frattali. L'auto-similarità, per contro, non è un criterio sufficiente per definire un frattale: si pensi solo alla retta euclidea. Esempi di frattali sono gli insiemi di Cantor, il triangolo e il tappeto di Sierpinski, la spugna di Menger, la curva dragone e quelle di Peano e di Koch.



La geometria frattale è oggi usata in campi quali lo studio di organismi marini, degli ecosistemi vegetativi, la sismologia, il comportamento di popolazioni dipendenti dalla densità ed è già stata applicata con successo nella rappresentazione di immagini in medicina. Si prevede inoltre che permetterà la costruzione di strade migliori, una più efficace compressione di immagini, la progettazione di navi con minori probabilità di capovolgersi. Ha scritto Nigel Lesmoir-Gordon nel suo necrologio sul sito ondine del *The Guardian*: «… le forme generate dalla disciplina sono fonte di piacere a loro volta, e accrescono la nostra consapevolezza estetica, se appena osserviamo come i frattali appaiano ovunque in natura. La loro bellezza e potenza sono visualizzate sia nel documentario [presentato da Arthur C. Clarke] *The Colours of Infinity* sia nel recente libro che ne è seguito. Mentre lo realizzavo, e poi anche facendo un altro film con Mandelbrot – *Clouds Are Not Spheres* – mi sono reso conto delle sue grandi bontà e generosità. Alla fine di *Clouds Are Not Spheres* riflette: “Con le mie ricerche ho affrontato molte delle questioni fondamentali della scienza. A qualcuna ho apportato un miglioramento, ma certamente ne ho lasciate altre del tutto aperte e misteriose. Questa era stata la mia speranza quando ero giovane e ha riempito tutta la mia vita. Mi sento estremamente fortunato”»

Opere di Mandelbrot tradotte in italiano

Gli oggetti frattali: forma, caso e dimensione, Giulio Einaudi editore, 2000
La geometria della natura, Theoria, 1990
Nel mondo dei frattali, Di Rienzo editore, 2001, ediz. ampl. 2005
Il disordine dei mercati: una visione frattale di rischio, rovina e redditività, Einaudi, 2005

Siti utili

http://it.wikipedia.org/wiki/Benoît_Mandelbrot
http://en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot_set
http://it.wikipedia.org/wiki/Insieme_di_Mandelbrot
http://en.wikipedia.org/wiki/Fractal
http://www.dmoz.org/Science/Math/Chaos_and_Fractals/Software
http://www.guardian.co.uk/science/2010/oct/17/benoit-mandelbrot-obituary
http://digilander.libero.it/pnavato/frattali/
http://www.frattali.it/

5. Quadrati magici e dintorni

Giorgio Mainini

In this paper we propose a possible route to teaching which, using the magic square of order 3 as a starting point, ranges from 2800 BC to the end of the twentieth century, from China to Germany, from history to geography to computer science, and, of course, mathematics.

Il Lo Shu

Narra una leggenda cinese che circa 4800 anni or sono il fiume Lo, o Luo, un affluente del Fiume Giallo (Huang He), straripasse per l'ira del dio del fiume. La popolazione della zona, per placare il dio, offrì molti sacrifici, ma senza successo. Dopo ogni sacrificio dal fiume usciva una tartaruga: finalmente un bambino ne osservò una da vicino e si accorse che sul suo carapace erano incisi segni che furono interpretati come un quadrato magico (QM) di ordine 3, la cui costante magica è 15. Ottenuto un sacrificio di 15 «entità» (le leggenda non specifica *che cosa*, o peggio *chi*, fossero le «entità») il dio si placò e la piena finì. Il QM di ordine 3 è detto dai cinesi Lo Shu, traducibile con «scorrimento del Lo».

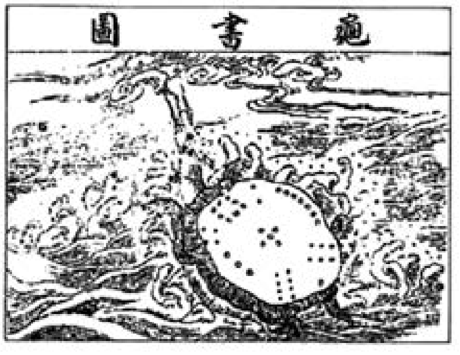


Figura 1 Una delle tartarughe uscite dal fiume Lo verso il 2800 a.C.[1]

Si noti che i numeri sono rappresentati nel sistema unario: tanti «pallini» quanto è il numero da rappresentare. Oggi il Lo Shu ha questo aspetto:

1. Da http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/Interventi/Articoli/AvventuraCubi/AvventuraCubi.htm

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Figura 2

Qualche definizione e un po' di teoria

Un *quadrato magico* è uno schema quadrato di n^2 numeri, di solito naturali diversi, nel quale le somme dei numeri nelle righe, nelle colonne e nelle due diagonali sono una costante;

n si dice *ordine* del quadrato;

la costante si dice *costante magica* del quadrato;

un QM si dice *normale* se i numeri in esso contenuti sono tutti i naturali da 1 a n^2.

In un QM normale la somma di tutti i numeri è data da

$$S = \sum_{j=1}^{n^2} j = \frac{n^2\left(n^2+1\right)}{2}$$

E la costante magica, M, è quindi

$$M = \frac{S}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{n^2} j}{n} = \frac{n\left(n^2+1\right)}{2}$$

Da qui in avanti con «quadrato magico» o QM si intenderà «quadrato magico normale».

Primo intervallo didattico

La matematica non è il frutto cervellotico di qualche specialista chiuso nella sua torre d'avorio.

È quindi bene inserirla in un contesto storico, geografico, in generale culturale. E questo è tanto più vero in ambito scolastico. I meno giovani ricorderanno la «punizione» consistente nella richiesta di eseguire dieci divisioni del tipo 4951,2 : 386,07 fino alla terza cifra decimale: come si può poi pretendere che si ami una punizione? Il senso di questo contributo sta tutto qui: mostrare un esempio di come si possa prendere spunto da un argomento, anche giocoso, e spaziare poi in campi a esso connessi per associazione di idee. È ovvio che l'associazione di idee non debba necessariamente essere quella proposta qui: ogni insegnante, se degno di tale titolo, ha sufficiente fantasia, conoscenze e tempo per adottare quelle che meglio si addicono a lui e alla sua classe.

«…circa 4800 anni or sono …»

«Maestro, come si fa a parlare di 4800 anni or sono se siamo soltanto nel 2010?».

Nel ***calendario tradizionale cinese*** a ogni anno viene assegnato un nome composto di due parti: una radice celeste e un ramo terrestre. Le radici celesti sono 10, i rami terrestri 12. Ciò fa sì che i nomi si ripetano ciclicamente ogni 60 anni. Si usa contare questi cicli sessantennali a partire dal 2637 a.C., quando, secondo la tradizione, il calendario cinese fu inventato (in realtà, secondo Wikipedia, dovrebbe avere circa duemila anni).

Nel ***calendario islamico*** gli anni vengono contati a partire dall'Egira, l'emigrazione di Maometto dalla Mecca verso Medina.

Il ***calendario ebraico*** conta gli anni a partire dalla presunta data della creazione che, in base alle indicazioni della Bibbia, è stata calcolata dalla tradizione rabbinica come avvenuta nel 3760 a.C.

Il ***calendario maya***, oggi tanto citato, a sproposito, in relazione al famigerato 21 dicembre 2012, prevedeva tre tipi di cicli: uno di 260 giorni (ciclo *Tzolkin*), uno di 360 giorni (ciclo *haab*) e uno di 1'872'000 giorni, circa 5125 anni, detto *computo lungo*. Il ciclo attualmente in corso, che secondo la mitologia maya è il quarto, è iniziato l'11 agosto 3114 a.C. Si può quindi risalire alla data iniziale del calendario.

Il ***calendario romano*** conta gli anni *ab Urbe condita*, a.U.c., cioè dalla fondazione di Roma che, secondo la tradizione, avvenne nel 753 a.C. ad opera di Romolo.

Il ***calendario giuliano***, promulgato da Caio Giulio Cesare nel 46 a.C., fu elaborato da Sosigene di Alessandria e prevedeva che fosse bisestile, cioè di 366 giorni, un anno ogni quattro, in base al fatto che l'anno solare medio fu calcolato in 365,25 giorni. In realtà l'anno solare medio dura circa 11 minuti e 14 secondi di meno. Conseguenza: nel 1582 l'errore accumulato era di circa 10 giorni.

Il ***calendario gregoriano***, il nostro, entrato in vigore il 15 ottobre 1582, fu introdotto dal papa Gregorio XIII che si era reso conto che gli errori cumulati avrebbero fatto cadere la Pasqua in estate. Gli anni sono contati a partire dalla nascita di Gesù di Nazaret che, secondo i calcoli di Dionigi il Piccolo, vissuto a cavallo dei secoli V e VI, avvenne nel 753 a.U.c. L'errore degli anni bisestili fu corretto stabilendo che gli anni secolari, cioè multipli di 100, sarebbero stati bisestili solo se divisibili per 400.

Calendario rivoluzionario francese; calendari ***giapponese***, ***copto***, ***egizio***,...

Quanta Storia, Geografia, Istruzione religiosa, oltre che Matematica, si può fare anche «solo» trattando di calendari! Se si pensa a quante etnie sono rappresentate in ogni classe, è un vero peccato lasciarsi sfuggire l'occasione.

Ritorno al Lo Shu: le otto caselle

Intorno al 5 centrale ci sono otto caselle: i Cinesi completano così il Lo Shu

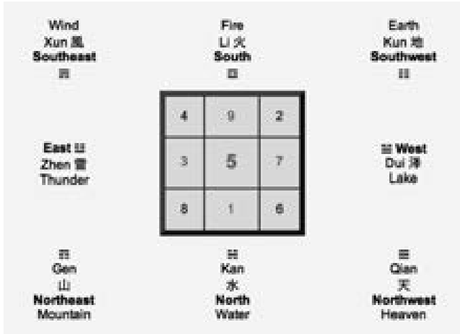


Figura 3

da parte loro i Tibetani «si lasciano prendere dall'entusiasmo» ed ecco che cosa ottengono:

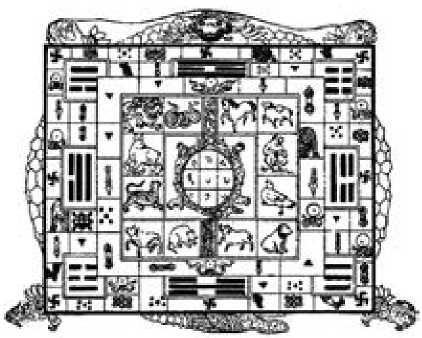


Figura 4

dove, al centro dell'immagine, si vedono i numeri scritti con le cifre «arabe».

Anche gli Arabi hanno rappresentato a modo loro il QM di ordine 3:

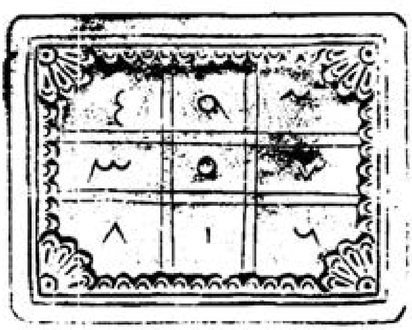


Figura 5

dove si vedono le cifre «arabe», ma quanto diverse da quelle tibetane!

Si vedano i gruppi di tre linee, intere o spezzate, che compaiono sia nell’immagine cinese sia in quella tibetana: che cosa sono? Sono i cosiddetti *trigrammi*.

Eccoli, più da vicino:

Figura 6

I simboli base sono due, la linea spezzata e la linea intera, e si rifanno a un concetto fondamentale del taoismo: quello di Yin-Yang.

Se si usa una sola linea si possono esprime due «cose»: sì o no, vita o morte, femminile o maschile, zero o uno, ecc.; se se ne usano 2 se ne possono esprimere 4, se se ne usano 3 se ne possono esprimere 8 (i trigrammi, appunto), e così via.

Combinando in tutti i modi possibili gli 8 trigrammi si ottengono i 64 *esagrammi* dell’*I Ching* (Libro dei mutamenti).

Ritorno al Lo Shu: il numero 10

La somma dei numeri «opposti» al cinque è sempre 10, che è un bel numero.

Tanto per cominciare, 10 è la base della nostra numerazione, e qui si può spendere qualche parola sul significato della scrittura dei numeri come facciamo *ora* noi *qui*. Ma non è *sempre* stato così *dappertutto*.

Poi si vedono bene «gli amici del 10». Vuoi eseguire 7 + 9? Comincia ad aggiungere l’amico del 7 (il 3) e poi aggiungi 6. È uno dei modi per «passare la decina».

Si pensi anche a come sono disposti i birilli nel gioco del *bowling*:

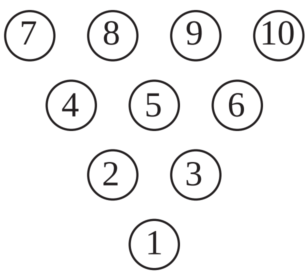


Figura 7

o alla Tetraktis dei pitagorici, per i quali

«Il 10 è responsabile di tutte le cose, fondamento e guida sia della vita divina e celeste, sia di quella umana» (Filolao).

Un punto non ha dimensioni; due punti determinano una retta, oggetto a una dimensione; tre punti determinano un triangolo, oggetto a due dimensioni e quattro punti determinano un tetraedro, oggetto a tre dimensioni.

Siccome 10 = 1 + 2 + 3 + 4, ecco che il 10 rappresenta l’universo.

La linea magica del Lo Shu

Congiungendo i centri delle caselle da quella contenente l'1 a quella del 9 si ottiene la linea magica del QM:

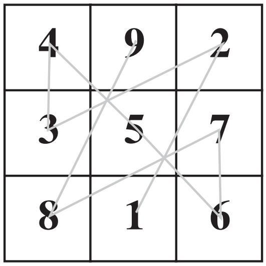


Figura 8

Secondo intervallo didattico

Quando si parla di cifre «arabe», le *nostre*, vien da pensare che qualche arabo le abbia inventate chissà quando. Non è così.

Cifre arabe

«Nome delle dieci cifre, incluso lo zero, correntemente in uso oggi. Ciascuna cifra possiede, oltre al proprio valore assoluto, un valore relativo che dipende dalla sua posizione all'interno del numero. Inventate dagli Indiani e riprese dagli Arabi nel IX sec., le cifre arabe indicano le decine, le centinaia ecc. mediante l'aggiunta di zeri alle unità (in arabo 0 = *zifr, zafar*). Gli Arabi svilupparono le regole elementari del calcolo, gli algoritmi e il calcolo con il sistema decimale, introdotto in Europa nel XIII sec. attraverso l'Italia. In Svizzera le cifre arabe sostituirono i complicati numeri romani anzitutto nelle date e soltanto più tardi nel calcolo. Negli atti amministrativi comparvero dalla fine del XIV sec., talora insieme ai numeri romani, ma ancora senza essere utilizzate per i calcoli. Nell'amministrazione pubblica (conti annuali, registri di censi, registri fondiari, ecc.) entrarono in uso in tempi più o meno rapidi: ad esempio a Zurigo alla fine del XV sec., a San Gallo verso il 1500, a Ginevra e Bellinzona verso il 1550, a Friburgo verso il 1590 e a Berna tra il 1650 e il 1690[2]».

Come non parlare, da un lato, del sistema di numerazione romano, ancora oggi usato su monumenti ed edifici sacri e profani, e, dall'altro, di Leonardo Pisano, detto il Fibonacci, e del suo *Liber abbaci*, scritto nel 1202?

«Novem figure indorum he sunt 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Cum his itaque novem figuris, et cum hoc signo 0, quod arabice zephirum appellatur, scribitur quilibet numerus, ut inferius demonstratur» (Inizio del primo capitolo).

Cioè

Ci sono nove figure degli indiani che sono 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Con queste nove figure, e con il simbolo 0, che in arabo si chiama *zephiro*, si scrive qualsiasi numero, come è dimostrato sotto.

2. *Dizionario storico della Svizzera*, autrice della voce Anne-Marie Dubler.

E ancora: le linee spezzate e intere che formano i trigrammi e gli esagrammi ci tentano a parlare della base 2 e, perché no, della sua importanza in Informatica.

I birilli del *bowling* richiamano i numeri figurati, tanto in uso presso i pitagorici, in particolare i *numeri triangolari*. Trovare i numeri figurati di un certo tipo (triangolari, quadrati, pentagonali, …, centrati e no) è un'attività che introduce alle progressioni aritmetiche che, chissà perché, sono oggetto di studio solo a partire dalle scuole medie superiori. Invece «lavorarci su» apre la mente in direzioni interessanti, produttive e stimolatrici della fantasia e della creatività.

Di Pitagora, figura tra il mito e la realtà, già alle elementari si studia la *tavola* e alle medie il ben noto teorema. Ma Pitagora, più turco che greco, essendo nato a Samo, isola vicina a Smirne ma lontana da Atene, ha pensato e prodotto, lui e la sua scuola, ben più che la tavola e il teorema. Dando per buono quanto scrivono di lui Senofane, Erodoto e altri ancora, dopo i (quasi sicuramente leggendari) viaggi in Egitto, Arabia, Fenicia, Giudea, Babilonia e persino in India, fondò finalmente a Crotone, nella Magna Grecia, la sua scuola. Lì si occupò di geometria, musica, astronomia e medicina.

Insomma, alle discipline elencate alla fine del primo intervallo, si possono aggiungere, al minimo, l'Informatica, la Musica e l'Astronomia.

Il quadrato magico di Albrecht Dürer

Albrecht Dürer (Norimberga, 21 maggio 1471 - Norimberga, 6 aprile 1528) incise nel 1514 Melencolia 1, opera fortemente allegorica, dove si possono vedere, tra le altre cose, un compasso, un romboedro troncato sul quale sembra di intravedere un teschio, una clessidra, una scala a pioli, un arcobaleno sotto il quale un cartiglio reca il titolo e, ed è ciò che interessa qui, un QM. Sull'interpretazione dell'incisione sono stati versati fiumi d'inchiostro: chi fosse interessato, non farebbe fatica a trovarne, per esempio, su internet.

Figura 9 Melencolia 1

Il dettaglio con il quadrato magico

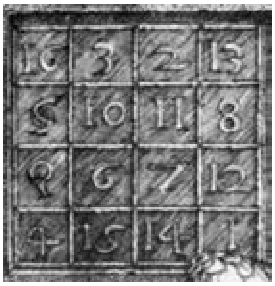


Figura 10

scritto con caratteri moderni

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Figura 11

La costante magica è, ovviamente, 34, e la somma di tutti i numeri è, altrettanto ovviamente, 136.

La costante si trova in molti modi, non solo quale somma delle righe, colonne o diagonali: cercarla può essere un piacevole esercizio di calcolo mentale.

In Melencolia 1 Dürer ha inciso due volte la data di creazione dell'opera, una volta nel QM e un'altra vicino al suo monogramma.

Tanto per sorridere, un po' di numerologia:

ALBRECHT DVRER = (1+12 + 2 + 18 + 5 + 3 + 8 + 20) + (4 + 22 +18 + 5 +18) = 136

La linea magica del quadrato di Dürer

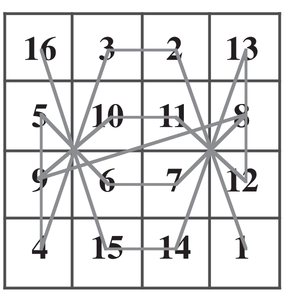


Figura 12

Come costruire un quadrato magico

Quadrato magico di ordine dispari

Le figure sono auto esplicative

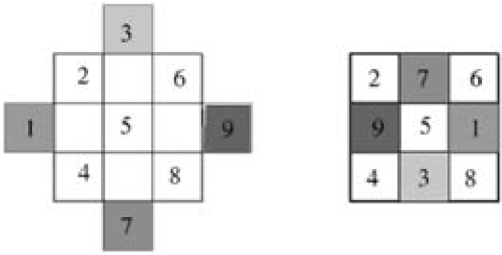


Figura 13

A meno di rotazioni e simmetrie, di QM di ordine 3 ce n’è uno solo.

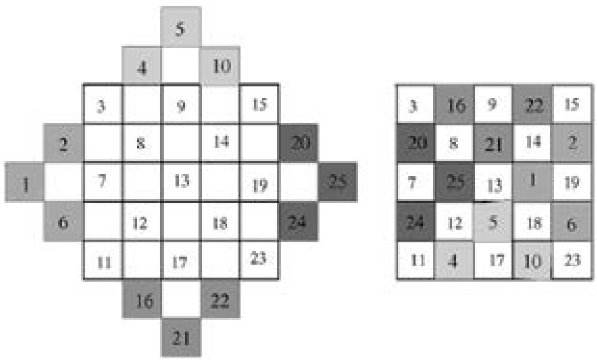


Figura 14

A meno di rotazioni e simmetrie, di QM di ordine 5 ce ne sono 275’305’224.

Non si sa quanti sono quelli di ordine 6, ma si pensa che siano nei paraggi di 1.7745?10^{19}.

Quadrato magico di ordine 4

(1)

1			4
	6	7	
	10	11	
13			16

(2)

1	**15**	**14**	4
12	6	7	**9**
8	10	11	**5**
13	**3**	**2**	16

Figura 15

A meno di rotazioni e simmetrie, di quadrati magici di ordine 4 ce ne sono 880.

Come costruire un quadrato magico di ordine 4k

Si divide ogni lato in tre parti in proporzione 1:2:1 e si scrivono in ordine crescente solo quei numeri che cadono nelle parti grigie, poi si scrivono nelle caselle bianche in ordine inverso quelli che mancano.

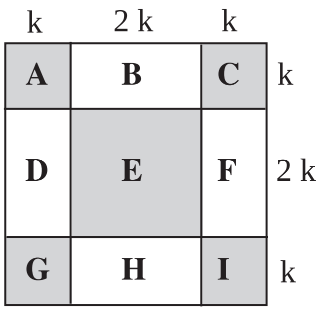


Figura 16

Ad esempio il QM di ordine 4, Figura 15, e il QM di ordine 8:

1	**2**	62	61	60	59	**7**	**8**
9	**10**	54	53	52	51	**15**	**16**
48	47	**19**	**20**	**21**	**22**	42	41
40	39	**27**	**28**	**29**	**30**	34	33
32	31	**35**	**36**	**37**	**38**	26	25
24	23	**43**	**44**	**45**	**46**	18	17
49	**50**	14	13	12	11	**55**	**56**
57	**58**	6	5	4	3	**63**	**64**

Figura 17

Esistono anche procedure per costruire gli altri quadrati magici, quelli di ordine 4k + 2, ma sono parecchio complicate: io lascerei perdere.

Terzo intervallo didattico

Con il QM di Dürer siamo arrivati nella Germania dei secoli XV e XVI: un bel salto, dalla Cina del quinto millennio avanti Cristo! Dürer è contemporaneo di Martin Luther (Eisleben, 10 novembre 1483 - Eisleben, 18 febbraio 1546) che, il 31 ottobre 1517 affisse le sue 95 tesi sul portone della chiesa di Wittenberg, dando inizio alla Riforma, i cui effetti arrivarono anche in Ticino: si pensi ai Muralti e agli Orelli, divenuti von Muralt e von Orell, tra i 170 che lasciarono la città per emigrare a Zurigo, Basilea e nella Svizzera orientale.

Il QM di ordine 3 si presta a un bel ragionamento: la dimostrazione che la casella centrale deve contenere il 5.

Supponiamo di aver già stabilito che il numero magico è 15: non è difficile trovare che il totale dei nove numeri è 45. Siccome le righe sono tre, e tutte devono avere la stessa somma, per forza tale somma deve essere 15.

Proviamo a mettere 1 nella casella centrale: in una casella vicina deve esserci il 2, ma allora la terza casella della terna deve contenere 12. Impossibile. Analogamente, se si mette 2 o 3 o 4.

Proviamo a mettere 5: non si trovano «controindicazioni». Però, magari, chi lo sa…

Proviamo a mettere 6: due caselle «opposte» devono sommare 9, ottenibile come 1+8, 2+7, 3+6, 4+5. Ma 3+6 non funziona, perché il 6 è già al centro: restano tre coppie, e invece ne servono quattro. Analogamente se si mette 7 o 8 o 9.

Quindi l'unica possibilità consiste nel mettere il 5: il problema non è ancora risolto, perché non si sa ancora dove mettere gli altri otto numeri ma, insomma, almeno non si faranno ricerche destinate all'insuccesso. Non sarà poi difficile scoprire che, a meno di rotazioni e simmetrie, la soluzione è unica.

Le 880 forme base del QM di ordine 4 furono trovate nel 1693 da Frénicle de Bessy, mentre si dovette aspettare il 1973 perché R. Schröppel trovasse le 275'305'224 forme base del QM di ordine 5, evidentemente usando un computer. Il numero $(1{,}7745 \pm 0{,}0016) \cdot 10^{19}$ dei QM di ordine 6 è stato stimato nel 1998 da Pinn e Wieczerkowski con metodi di Montecarlo e della meccanica statistica. Il problema di trovare il numero di quadrati magici di ordine n qualunque è dunque tuttora irrisolto.

Consegue che i metodi descritti sopra per trovare un QM sono soltanto uno per ogni ordine.

Un bel lavoro consiste nel trovare quali sono le trasformazioni che generano nuovi QM a partire da uno dato.

Il SATOR, un quadrato magico letterale

Lasciamo i QM numerici per vederne di un altro tipo, costruiti con lettere. Il più noto è chiamato SATOR, dalla parola che compare nella prima riga. Eccolo:

S	A	T	O	R
A	R	E	P	O
T	E	N	E	T
O	P	E	R	A
R	O	T	A	S

Figura 18

Il SATOR compare in molti edifici e reperti archeologici: dalle rovine romane di Cirencester in Inghilterra a Oppède in Vaucluse (Francia), a Santiago di Compostela in Spagna e a Riva San Vitale, qui alle porte di casa. La sua «magia» è dovuta al fatto che le parole che lo compongono possono essere lette da sinistra a destra, da destra a sinistra, dall'alto in basso e dal basso in alto. L'esempio più antico è stato rinvenuto a Pompei nel 1936 e risale a sicuramente prima del 79 d.C., quando Pompei fu distrutta dall'eruzione del Vesuvio: da allora il SATOR viene chiamato anche *latercolo pompeiano*.

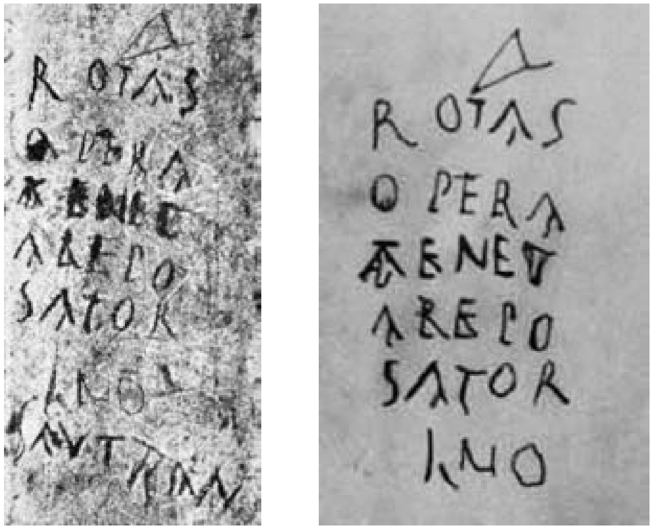


Figura 19 Il latercolo pompeiano

Figura 20 Il SATOR di Riva San Vitale. Si trova su un coppo e quindi la prima parola non si vede

Gli appassionati di enigmistica (o di occultismo nelle sue molteplici forme[3]) possono sbizzarrirsi a disporre le parole in modi diversi dal quadrato o trovare anagrammi nell'intento di dare un significato al SATOR, significato che, a tutt'oggi, non è accertato. Come si dice: «troppe interpretazioni, nessuna interpretazione».

3. Si veda, ad esempio, *Il SATOR e la geometria sacra*, Bollettino dei docenti di matematica 60, maggio 2010.

Una versione in lingua quechua

M	I	C	U	C
I	S	U	T	U
C	U	Y	U	C
U	T	U	S	I
C	U	C	I	M

Figura 21

Traduzione:
un pedicello che mangia l'UTUSI che si dimena è felicità.

Come nel SATOR non si sa che cosa significhi la parola AREPO, così non si conosce il significato di UTUSI, ammesso che ne esista uno.

Un quadrato magico numerico «speciale»

Sulla «Facciata della passione» della Sagrada Familia di Barcellona, opera di Antoni Gaudi (Reus, 25 giugno 1852 - Barcellona, 10 giugno 1926), è rappresentato il seguente QM, prodotto dall'architetto, pittore e scultore Josep Maria Subirachs (Barcellona, 11 marzo 1937):

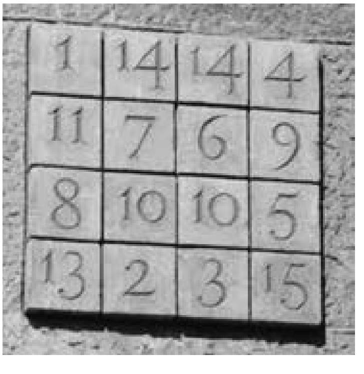


Figura 22

Si osservi che il 10 e il 14 vi compaiono due volte e che mancano il 12 e il 16: il numero magico è 33, gli anni di Gesù quando fu crocifisso.

Quarto intervallo didattico

Il paziente lettore giunto fin qui può anticiparmi.

Come si può lavorare in classe sul latercolo pompeiano?

Pompei? Eruzione del Vesuvio? Vulcano? Plinio il Vecchio (di Como, già che ci siamo)?

Quechua? Incas?

Qualche sito per approfondire

www.taliscope.com/Collection_en.html
mathforum.org/alejandre/magic.square/adler/adler4.html
user.chol.com/~brainstm/MagicSquare.htm
www.mathcats.com/explore/puzzles/magicsquaredurer.html
userpages.monmouth.com/~chenrich/MagicSquares/DurerSquare.html

e uno per giocare

www.markfarrar.co.uk/may30.htm

1. Frasi che hanno condizionato e diretto la mia ricerca[1]

Bruno D'Amore[2]

We remember and discuss some of the phrases that have marked the life of the author's research, statements obtained during interviews subsequent to research carried out on students and teachers.

In 40 anni di ricerca in didattica della matematica, ho avuto l'occasione di intervistare molte migliaia di studenti e alcune centinaia di insegnanti di diversi livelli scolastici, dalla scuola dell'infanzia all'università.

A distanza di tanti anni, ho voluto compartire con chi legge (o ascolta) quelle frasi che ritengo abbiano segnato la mia vita di ricerca, quelle che mi hanno illuminato sulle interpretazioni cui sono giunto, sulle strade che poi ho deciso di percorrere, che hanno condizionato i miei scritti e dettato i miei studi.

Con il fatto che in questi casi si vuole sempre nascondere la persona intervistata per proteggerne la riservatezza, ho sempre usato nomi falsi e così oggi non saprei più dire di chi sto parlando in realtà; ricordo perfettamente i temi della ricerca, i conseguenti temi dell'intervista, il luogo dove ogni singola frase è stata pronunciata, spesso anche i visi (qualcuno dei primi bambini intervistati, oggi è padre o quasi nonno…). Userò dunque ancora i nomi di fantasia che coniai allora, gli unici di cui ho testimonianza.

Ogni frase diverrà qui il titolo di un breve paragrafo; citerò sempre un articolo o un testo non di ricerca in cui quella frase e quell'intervista sono ricordate, se per caso un sottoinsieme non vuoto dei miei lettori volesse saperne di più. Per favorire il lettore meno esperto, citerò solo testi in italiano (a meno di un caso speciale).

Farò uso della terminologia classica della didattica della matematica, facendo implicito riferimento a: D'Amore B., (1999). *Elementi di didattica della mate-*

1. Lavoro eseguito nell'àmbito del PRIN (Programmi di ricerca scientifica di rilevante interesse nazionale) dal titolo: *Insegnare matematica:concezioni, buone pratiche e formazione degli insegnanti*, Anno 2008, n. prot. 2008PBBWNT, Unità locale di Bologna (NRD, Dipartimento di Matematica): *Formare gli insegnanti di matematica*.
2. NRD Bologna–Mescud Bogotà Doctorado interistitucional en Educacion, Enfasis de Educacion Matematica, Universidad Distrital «Francisco José de Caldas», Bogotà, Colombia

matica. Bologna: Pitagora, una mia fortunata opera, vincitrice di un premio importante nel 2000, più volte ristampata, tradotta in spagnolo e in portoghese.[3]

Il lettore che si darà conto che qualcuno dei termini tecnici non gli è noto, potrà decidere di ricorrere a questa fonte.

Non starò a fare tante citazioni di testi di riferimento; chi vuole completare, integrare, rendere più scientifico il tutto, si servirà dei testi che cito, dove tutto è ben dichiarato. Limito al massimo la narrazione personale, al contrario di quel che farò nella presentazione orale di questi commenti e di queste riflessioni, nelle sedi in cui ciò sarà possibile.

1. *No, troppo piccolo.*

D'Amore B. (2004). La Didattica della Matematica: l'esempio del contratto didattico. *La rivista di pedagogia e didattica*. 2-3, 159-164.

Presento oralmente in una IV elementare, nel mese di maggio, il classico "problema del pastore": «Un pastore ha 12 pecore e 6 capre; quanti anni ha il pastore?»; sollecito la risposta sempre per via orale. Il coro unanime delle risposte «18» è impressionante, mai avuto un coro unanime così. Siamo nel campo del contratto didattico, classico, nel fenomeno definito dai Francesi come: *L'età del capitano*, noto fin dagli anni'70.

Uno dei bambini, vivacissimi, ne ricordo perfettamente il volto, viene da me intervistato:

BD: Perché hai risposto 18?
AL: Ho fatto la più.
BD: E perché non hai fatto la divisione.
AL si ferma un attimo, pensa, sorride sornione e risponde:
AL: No, troppo piccolo!

Due rapide osservazioni:

a) nessuna rottura del contratto è possibile in certe situazioni d'aula;
b) la logica del problema è rovesciata rispetto alle attese adulte; prima si applica un'operazione aritmetica (quasi) a caso, poi si verifica se la risposta numerica è adeguata alla richiesta. Mai visto un pastore di 2 anni, mentre 18 è un'età ragionevole.

2. *Se tu volevi calcolare anche il ritorno, dovevi dirlo.*

D'Amore B. (2007). Epistemologia, didattica della matematica e pratiche d'insegnamento. *La matematica e la sua didattica*. Vol. 21, n° 3. 347-369.

La situazione di ricerca (1993) è reale: i bambini di II devono andare a fare una gita e devono fare vari calcoli preventivi per i quali sono ancora inadeguati; dunque chiedono aiuto ai bambini di IV, i quali affrontano il seguente testo in gruppi di 2-3 studenti:

3. Quando Guy Brousseau ricevette una copia del libro in italiano, mi scrisse una lettera che è poi diventata una delle prefazioni nelle versioni spagnola e portoghese; lui ha colto perfettamente il gioco del titolo (*Elementi di...*) e il numero dei capitoli (13), ironizzando affettuosamente ed amichevolmente sulla mia evidente presunzione...

«I 18 allievi di seconda vogliono fare una gita di un giorno da Bologna a Verona. Devono tener conto dei seguenti dati:

- due di essi non possono pagare;
- da Bologna a Verona ci sono 120 km;
- un pulmino da 20 posti costa 200.000 lire al giorno più 500 lire al chilometro (compresi i pedaggi autostradali).

Quanto spenderà ciascun allievo?».

Al momento di riunire la classe intera, l'insegnante si accorge che è stato commesso da tutti lo stesso errore: non s'è tenuto conto del viaggio di ritorno; la spesa totale è stata calcolata con l'espressione: $500 \cdot 120 + 200000$ in luogo di $(500 \cdot 120) \cdot 2 + 200000$.

L'insegnante non vuol suggerire la risposta e decide di far mimare le scene dell'andata e del ritorno, di disegnare i vari momenti della gita. Si ritorna nella fase di lavoro di gruppo. Un bambino produce spontaneamente il seguente cartello:

Bologna ⟶ Verona
120 Km

Verona ⟶ Bologna
120 Km

Dunque, c'è perfetta consapevolezza del fatto che in una gita ci sono andata e ritorno; ma poi quello stesso bambino, al momento di risolvere, utilizza di nuovo solo il dato per l'andata; lo fa lui e lo fa il suo gruppo. Qual è la causa? Contratto didattico? Certo. Uno dei bambini, intervistato, dichiara: «Se tu volevi calcolare anche il ritorno, dovevi dirlo»; è evidente la lacuna che il bambino avverte: in nessuno dei dati appare lecito raddoppiare la spesa per il percorso chilometrico. Come posso io inventare un dato che non c'è? I dati *devono* essere numerici ed espliciti.

3. *Figlio mio…*

D'Amore B., Maier H. (2002). Produzioni scritte degli studenti su argomenti di matematica (TEPs) e loro utilizzazione didattica. *La matematica e la sua didattica*. 2, 144-189.

I TEP sono un formidabile strumento per l'analisi dei modelli spontanei che si sono creati gli allievi dei vari oggetti della matematica; l'importante è che siano autonomi e scritti. Sono anche utilizzati sempre più per una valutazione intesa in senso ampio e intelligente, come un'opportunità e non come un momento di tensione.

Tali testi si ottengono grazie a stimolazioni opportune, come la seguente, che ha avuto grande successo con gli studenti delle medie:

«Immagina di essere un papà [una mamma]…Il tuo figliolo di 7 anni ha sentito dire da qualcuno che ogni triangolo ha tre altezze e ti chiede: "Papà [mamma] che cosa vuol dire?". Non c'è niente di peggio che eludere le domande di un bambino; perciò, decidi di rispondergli».

Ecco il TEP prodotto da Simona (2° anno di scuola media):

«Figlio mio, tu ancora non conosci la geometria, ma ti spiegherò che cosa vuol dire la parola altezza. Come te, io e papà abbiamo un'altezza che è misurata dalla testa ai piedi; così anche i triangoli hanno un'altezza, ma la loro altezza si misura dal vertice, che è un piccolo punto, giù fino alla base, che è come i nostri piedi. Poiché i triangoli hanno tre piccoli punti (vertici), hanno tre altezze perché hanno tre paia dei nostri piedi. E poiché noi abbiamo solo una testa e un paio di piedi, abbiamo una sola altezza».

Una lucida prova di immaginazione e di abilità comunicativa.

4. *Ce ne saran ventuno.*

Arrigo G., D'Amore B., Sbaragli S. (2010). *Infiniti infiniti*. Trento:Erickson.

Non posseggo documenti scritti, ma solo la registrazione di un dialogo tra due compagni di classe, III media, provincia toscana. Sono un giovanotto e una ragazza, accanto alla lavagna sulla quale campeggia il disegno di un segmento, la discussione verte sul numero di punti contenuti nel segmento. La ragazza insiste che si tratta di infiniti punti e il giovane è esasperato di fronte a questa affermazione. D'un tratto volge il corpo verso la lavagna e "conta" i punti del segmento, mentre la ragazza lo guarda stupefatta. Non si vede che cosa stia facendo, ma usa entrambe le mani.

Dopo un po', paonazzo, si volge in parte alla ragazza e in parte alla cinepresa e afferma, stizzito e consapevole del suo conteggio:

«Ce ne saran ventuno».

La didattica dell'infinito è uno dei temi che mi sono più cari; inizia fin dalla scuola dell'infanzia e non termina più...

5. *…una linea.*

D'Amore B. (1996). Un matematico al nido. *Infanzia*. 5, 32-35

Si narra della spudorata creatività con la quale una bambina di 2 anni e mezzo interpreta i propri scarabocchi, a fronte della disarmante crudezza semantica con la quale un suo coetaneo interpreta il proprio prodotto pittorico.

6. *Era troppo facile sennò.*

D'Amore B. (2002). La ricerca in didattica della matematica come epistemologia dell'apprendimento della matematica. *Scuola & Città*. 4, 56-82.

Siamo nei primi anni '90. Si propone il seguente testo problematico per iscritto in III elementare e in II media:

«Giovanna e Paola vanno a fare la spesa; Giovanna spende 10.000 lire e Paola spende 20.000 lire. Alla fine chi ha più soldi nel borsellino, Giovanna o Paola?».

Si vuol analizzare la percentuale dei bambini e ragazzi che avvertono l'impossibilità di risolvere il problema; e poi intervistare gli allievi che danno la risposta "Giovanna" o "Paola". Siamo ancora nell'ambito di ricerche sul funzionamento del contratto didattico.

La risposta auspicata «Non si può risolvere» è assai ridotta in entrambi i casi. E la risposta assolutamente più diffusa in entrambi i casi è “Giovanna”, com’è ovvio che sia.

Ecco un prototipo del genere di risposte più diffuse in III; scelgo il protocollo di risposta di Stefania, che riporto esattamente come lo ha redatto l’allieva:

Stefania:

Nel borsellino rimane più soldi giovanna
30 – 10=20
10 x 10=100

Ecco un prototipo di risposta avuta allo stesso problema in II media; ho scelto il protocollo di risposta di un’allieva, riportandolo esattamente come da lei prodotto:

Silvia:

Secondo me, chi ha più soldi nel borsellino è Giovanna [poi corretto in Paola]
perché:
Giovanna spende 10.000 mentre Paola spende 20.000.,
10.000 20.00
Giovanna Paola
20.000 – 10.000=10.000 (soldi di Giovanna)
10.000 + 10.000=20.000 (soldi di Paola)

Silvia dapprima scrive a intuito “Giovanna”; poi, una volta eseguiti quei calcoli assurdi, accetta il risultato di questi ultimi, cancella “Giovanna” e scrive “Paola”.

Risparmio qui l’analisi relativa al contratto didattico; mi limito a dire che vi è una percentuale, bassa ma non nulla, di risposte “Paola”. Un bambino di III elementare intervistato, spiega così la sua scelta:

AS: Io lo sapevo che era Giovanna.
BD: Ma allora, perché hai scritto Paola?
AS: Era troppo facile sennò.

Da qui ho tratto l’idea di metacontratto didattico e la voglia di compiere analisi della vita di aula basandomi sulla sociologia, poi abbondantemente pubblicate.

7. *È sempre lo stesso, però questa è meglio.*

D’Amore B. (1998). Oggetti relazionali e diversi registri rappresentativi: difficoltà cognitive ed ostacoli – Relational objects and different representative registers: cognitive difficulties and obstacles. *L’educazione matematica*. 1, 7-28.

Nel 1996 ho proposto a studenti di tutti i livelli scolastici, dalla scuola elementare alla superiore, 5 rettangolini di cartone sui quali erano riportate frasi o schemi che rappresentavano lo stesso oggetto matematico, ma in 5 registri semiotici diversi. Da qualche anno studiavo l’evoluzione dei lavori di Raymond Duval, che avevo conosciuto in un ICMI l'anno prima (Catania, 1995) e al quale mi ero immediatamente legato con una profonda amicizia che ancora dura. Secondo le ipotesi di ricerca, pochi studenti avrebbero saputo riconoscere a monte delle diverse rappresentazioni lo stesso oggetto; anzi, avrebbero dovuto avere difficoltà con le trasformazioni semiotiche di conversione. Invece, a sorpresa, molti più studenti del previsto dichiaravano che le rappresentazioni semiotiche rappresentavano lo stesso oggetto matematico. Andando un po' più a fondo, però, ecco la risposta illuminante di un giovane di scuola superiore:

CD: È sempre lo stesso, però questa è meglio.

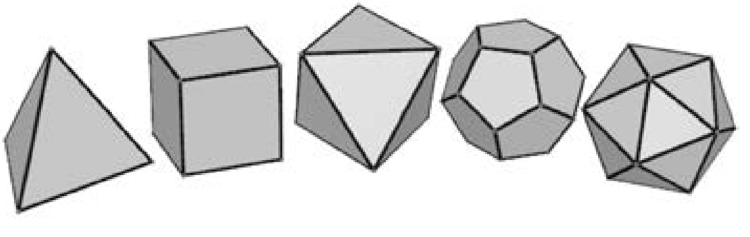
Fulminante; quando lo raccontai a Raymond a Lille, mi fece mille domande; l'idea base è che, se una persona evoluta, dopo un certo percorso di apprendimento, accetta che l'oggetto matematico sia lo stesso ma rappresentato in 5 modi diversi, allora una rappresentazione vale l'altra, e non ce n'è una che prevalga o possa essere preferita. Ma se una è "meglio" delle altre, allora si deve ricominciare a studiare daccapo che cosa vuol dire capire, conoscere, costruire l'oggetto attraverso le sue rappresentazioni semiotiche, come un fatto culturale. Allora, ancora non conoscevo gli studi di Luis Radford, altro caro amico con il quale ho poi scritto, studiato, collaborato parecchio.

8. *Se usi un dado a 8 facce, allora sì.*

D'Amore B. (2006). Oggetti matematici e senso. Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici. *La matematica e la sua didattica*. 4, 557-583.

Sulla base degli studi di ricerca basati sul tema 7 precedente, ci siamo accorti ad un certo punto che non è vero che il problema grande della costruzione semiotica sia solo la trasformazione di conversione, perché anche quella di trattamento ha i suoi bei problemini aperti. Abbiamo incontrato studenti di scuola primaria (che, nel frattempo, aveva cambiato nome) che ammettevano facilmente che 3/6 esprime la probabilità dell'uscita di un numero pari nel lancio di un dado e che 3/6 = 4/8 (trasformazione di trattamento), ma non ammettevano che anche 4/8 potesse, di conseguenza, esprimere la stessa probabilità. La cosa più singolare è che lo stesso insegnante intervenne a sostenere la correttezza del diniego dei bambini; la sua conoscenza dei solidi platonici e dei dadi non standard, lo portò all'affermazione:

M: Se usi un dado a 8 facce, allora sì.



Da quel giorno, vari ricercatori del NRD di Bologna e del MESCUD di Bogotà si sono messi a studiare il cambio di senso legato alla trasformazione di trattamento, pubblicando diversi articoli di ricerca; segnalo solo:

D'Amore B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. In: Radford L., D'Amore B. (eds.) (2006). *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*. Numero speciale della rivista *Relime* (Cinvestav, México DF., México). 177-196.

http://laurentian.ca/educ/lradford/Relime_semiotic_06.pdf

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2007). How the sense of mathematical objects changes when their semiotic representations undergo treatment and conversion. *La matematica e la sua didattica*. Vol. 21, n. 1, pagg. 87-92. Atti del: Joint Meeting of UMI-SIMAI/SMAI-SMF: *Mathematics and its Applications*. Panel on Didactics of Mathematics. Dipartimento di Matematica, Università di Torino. 6 luglio 2006. ISSN: 1120-9968.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2007). Change of the meaning of mathematical objects due to the passage between their different representations. How other disciplines can be useful to the analysis of this phenomenon. Rome, *Symposium on the occasion of the 100th anniversary of ICMI*, March 2008. WG5: *The evolution of theoretical framework in mathematics education*, organizers: Gilah Leder and Luis Radford. www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008

Il tema ha dato luogo a varie tesi di dottorato di ricerca; segnalo l'articolo pubblicato da un mio allievo su questo tema, a seguito della sua tesi di dottorato:

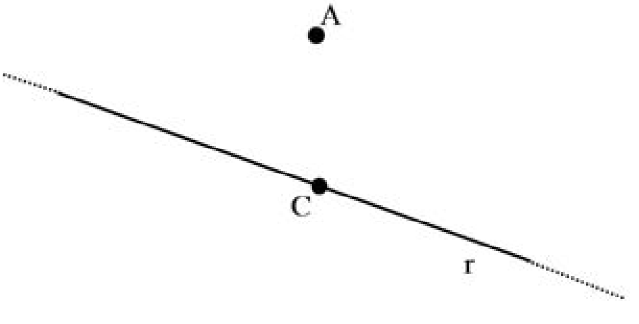
Santi G. (2011). Objectification and Semiotic Function. *Educational Studies in Mathematics*. In corso di pubblicazione.

9. *È un rettangolo storto*.

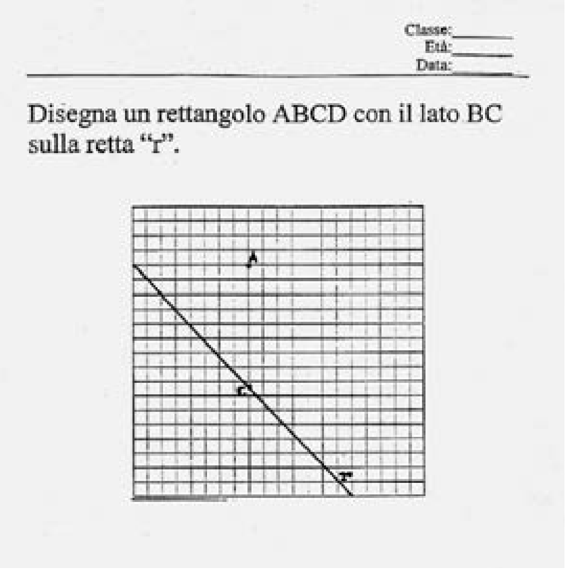
D'Amore B. (1997). Lingua naturale, modelli intuitivi e stereotipi nelle ore di matematica. In: Jannamorelli B., Strizzi A. (eds) (1997). *La ricerca in didattica della matematica: da ipotesi teoriche ad esperienze didattiche*. Atti del 3° Seminario Internazionale di Didattica della Matematica, Sulmona, aprile 1997. Torre dei Nolfi: Qualevita. 57-68. [Questo articolo è stato pubblicato anche su: *Riforma e didattica*. 1, 1997, 29-36].

Ecco il testo di una prova da me data in un paese straniero a studenti di scuole post-media (allievi di 15-20 anni) (e 'ispirata' a precedenti ricerche di Elisa Gallo):

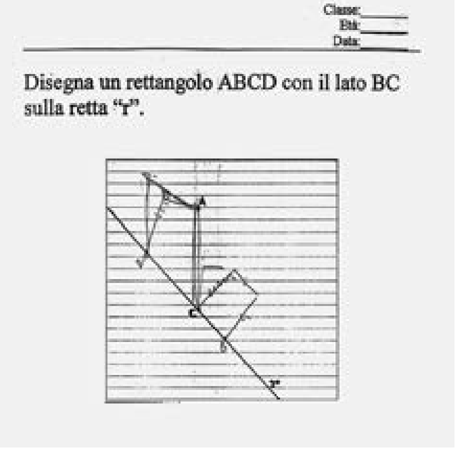
Disegna il rettangolo ABCD con il lato BC sulla retta r:



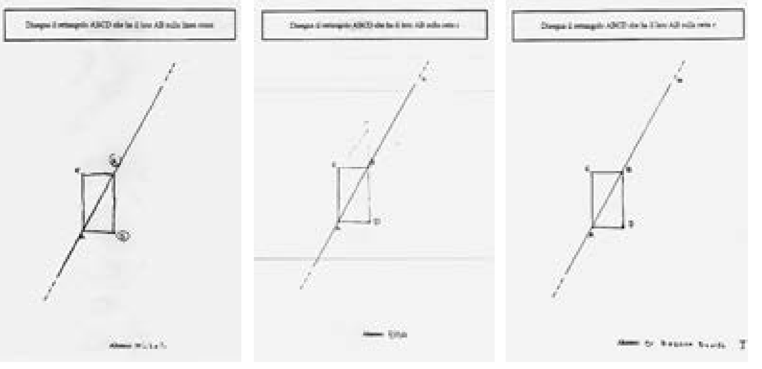
Sono state fatte diverse prove, su carta bianca e su carta quadrettata, con diverse inclinazioni della retta r, ma sempre con il punto A disposto verticalmente su C.



Ed ecco alcune risposte ottenute. I protocolli sono autentici.



Facemmo delle prove analoghe in scuole elementari, medie e superiori italiane. Scelgo tre protocolli, uno per ciascun livello scolare.



Uno degli insegnanti di matematica, quando gli abbiamo mostrato i risultati ottenuti nella *sua* classe, ha detto semplicemente: «Dio mio!». Ad uno degli studenti che hanno effettuato bene il disegno, ho chiesto un commento:

LV: È un rettangolo storto.

Quello “storto” rimette tutto in discussione; anche chi ha risolto bene il problema, vede però il rettangolo “storto”.

Negli anni successivi, ho voluto studiare il rapporto che c’è tra queste risposte e, all’inverso, la difficoltà concettuale di comprendere il senso della richiesta nel suo complesso; il problema dell’uso di stereotipi, in questo caso figurali, secondo i quali i rettangoli hanno le basi orizzontali; eccetera.

Lo stereotipo geometrico è un nemico sempre in agguato.

10. *L’1 va messo dopo... infiniti zeri... Infiniti zeri*?

Arrigo G., D’Amore B. (1999). «Lo vedo, ma non ci credo». Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l’infinito attuale. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 22B, 5, 465-494.

Arrigo G., D’Amore B. (2002). «Lo vedo ma non ci credo…», seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-57.

In una ricerca sull’apprendimento dell’infinito da parte di studenti adulti evoluti, durata almeno 5 anni, ad un certo punto si pone il solito problema della relazione d’ordine che esiste tra 0,5 e $0,4\overline{9}$. Tutti i colti sanno che vale l’uguaglianza, nessuno è disposto ad ammettere che valga $0,5<0,4\overline{9}$, ma la maggior parte degli studenti (e non solo) giura che deve essere $0,5>0,4\overline{9}$. La risposta verte sul fatto che al numero periodico manca “qualcosa” per arrivare a 5.

Si intervista F, uno studente di 19 anni, alla fine del percorso scolastico, già indirizzato verso gli studi scientifici all’università, di lì a pochi mesi. F dichiara che $0,5>0,4\overline{9}$ e che tra $0,4\overline{9}$ e 0,5 c’è una differenza di 0,1. Gli si fa notare che $0,4\overline{9}+0,1=0,5\overline{9}$, cosa che ammette immediatamente. Dunque no, la differenza non è 0,1 ma 0,00000000...00001, dove questo 1 è messo «laggiù in fondo», e con la mano indica lontano.

GA e BD: Ma quanto in fondo? Quando zeri ci vogliono?
FF: L'1 va messo dopo... infiniti zeri...
A questo punto F cambia espressione e, quasi rivolgendosi a sé stesso:
FF: Infiniti zeri? Ah, no, no. Allora adesso ho capito, sono uguali.

Un esempio bellissimo e rassicurante nel quale la incoerenza non è vista come qualche cosa di ineliminabile e di indifferente nel campo della matematica, come invece ho mostrato che succede quasi sempre, in altre ricerche.

11. *Invece di dare i biscotti agli amici, ho dato gli amici ai biscotti*!

D'Amore B. (1997). Lingua naturale, modelli intuitivi e stereotipi nelle ore di matematica. In: Jannamorelli B., Strizzi A. (eds) (1997). *La ricerca in didattica della matematica: da ipotesi teoriche ad esperienze didattiche*. Atti del 3° Seminario Internazionale di Didattica della Matematica, Sulmona, aprile 1997. Torre dei Nolfi: Qualevita. 57-68. [Questo articolo è stato pubblicato anche su: *Riforma e didattica*. 1, 1997, 29-36].

Romagna, un importante centro agricolo in provincia di Ravenna. Dopo aver esaminato i risultati di un test sui modelli intuitivi moltiplicazione e divisione, vedo che alla richiesta scritta seguente:

«15 amici comprano 5 kg di biscotti; quanti ne spettano a ciascuno?»

Il 41% degli studenti di fine I liceo scientifico risponde con l'operazione: 15:5. Se poi la cosa è fatta rapidamente, in situazione di intervista orale, la percentuale di risposta 15:5 sale vertiginosamente. Il modello intuitivo, basato su una 'saggia' norma assunta come modello parassita, «si divide sempre il grande per il piccolo», è scattata. La prova è fatta anche nella scuola elementare, a fine V, con una risposta identica data dal 67% per iscritto e vicina al 100% nel caso di intervista orale.

Quando i bambini delle elementari sono successivamente intervistati singolarmente, *nessuno* ammette spontaneamente che si debba (né che si possa) eseguire 5:15, a meno che non si trasformino i 5 kg in tantissimi (proposta esplicita di un'insegnante). Ma le interviste in I liceo scientifico vanno in modo diverso: tutti gli studenti asseriscono di aver come glissato su questo testo, la cui semantica era subdola, ed ammettono anche di essere stati ingannati dal fatto che il dato numerico 15 veniva prima di 5; qualcuno dice anche che era così semplice eseguire 15:5, che ciò ha abbassato la soglia critica. Uno degli studenti più brillanti, che aveva però scritto 15:5, capisce al volo, ride, si batte la mano sulla fronte ed esclama: «Invece di dare i biscotti agli amici, ho dato gli amici ai biscotti».

Stereotipo, modello intuitivo, modello parassita, semantica testuale, lettura 'a naso' del testo dei problemi, ... Quante se ne potrebbero dire!

12. *No, così la prof non vuole.*

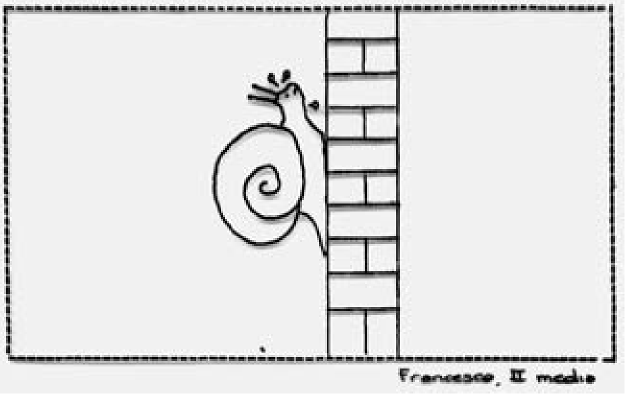
D'Amore B. (1995). Uso spontaneo del disegno nella risoluzione di problemi di matematica. *La matematica e la sua didattica*. 3, 328-370. [Questo testo è stato pubblicato anche in: Jannamorelli B. (ed) (1995). *Lingue e linguaggi nella pratica didattica*. Atti del II Seminario Internazionale di Didattica della Matematica, Sulmona 30-31marzo e 1 aprile 1995. Sulmona: Qualevita. 79-130].

Ecco il testo di un ben noto problema, dato a tutti i livelli scolastici:

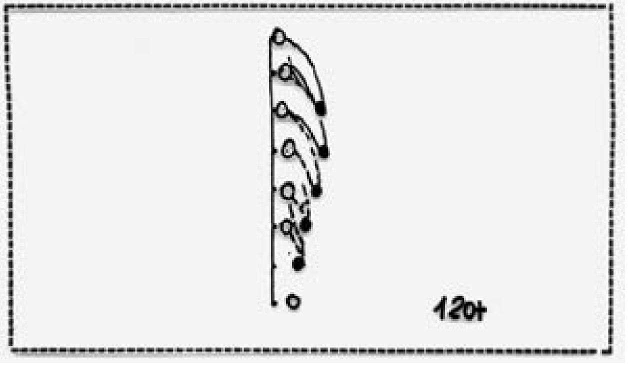
Una lumaca vuol salire in cima ad un muro alto 7 metri; inizia a salire un lunedì mattina all'alba; tutti i giorni, alla luce del Sole, sale di 2 metri; ma poi, durante la notte, scivola verso il basso di 1 metro. Dopo quanti giorni raggiungerà la cima?

Le (poche) risposte opportune e corrette date a questa domanda sono *sempre* legate a grafici, più o meno iconici; nessuno degli intervistati risolve correttamente il problema aritmeticamente o algebricamente, ma sempre e solo grazie a grafici o schemi.

Alcuni disegni sono graziosi, ma non aiutano affatto.



Altri schemi sono più significativi ed efficaci, anche se meno... artistici.



All'autore di questo schema, che avrebbe potuto portare al successo, si è suggerito di mettere dei numeri e arricchire così lo schema, per avere la risposta corretta; la sua risposta è immediata e sicura:

VS: No, così la prof non vuole.

Nel senso che una risoluzione degna di questo nome deve essere algebrica. Ed è così che traduce la sua risposta:

«7 x 2=14

14 – 1=13»

che dovrebbe essere la risposta algebrica corretta, nella forma voluta, a suo dire, dall'insegnante.

Che l'insegnante preferisca una risposta algebrica sbagliata ad una grafica corretta, è frutto del contratto didattico, ancora.

13. *Non vale*!

D'Amore B. (1997). Lingua naturale, modelli intuitivi e stereotipi nelle ore di matematica. In: Jannamorelli B., Strizzi A. (eds) (1997). *La ricerca in didattica della matematica: da ipotesi teoriche ad esperienze didattiche*. Atti del 3° Seminario Internazionale di Didattica della Matematica, Sulmona, aprile 1997. Torre dei Nolfi: Qualevita. 57-68. [Questo articolo è stato pubblicato anche su: *Riforma e didattica*. 1, 1997, 29-36].

Scuola elementare, propongo ancora un problema impossibile. I bambini rispondono, tutti, semplicemente addizionando i dati numerici del testo. Spiego ai bambini che il problema è impossibile. Risolini nervosi; il più irruento si ribella:

«Ah, ma così non vale! Se il problema è impossibile ce lo dovevi dire. La nostra maestra ce lo dice».

Sì, certo, contratto didattico e clausola di trasparenza. Sì, certo, effetto Topazio. Ma anche modello generale di problema e stereotipo.

Invito tutti gli insegnanti interessati a questo genere di ricerche a consultare il sito del nostro gruppo (www.dm.unibo.it/rsddm):
RSDDM, Gruppo di Ricerca e Sperimentazione in Didattica e Divulgazione della Matematica; sottosistema di questo gruppo è il pluridecennale:
NRD, Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, del quale fanno parte quei membri del RSDDM che negli ultimi anni hanno prodotto ricerche pubblicate su riviste di alto valore scientifico, oppure che hanno un PhD oppure che sono studenti di PhD. La sede è presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna.

Alcuni dei nostri membri fanno parte anche del gruppo:
MESCUD, Gruppo di ricerca Matemática ESColar de la Universidad Distrital,
attivo presso l'Università Distrital Francisco José de Caldas, Bogotà, sede di un dottorato di ricerca.
E, viceversa, alcuni membri del MESCUD sono parte del NRD.

2. Per una buona didattica è necessario un buon Sapere

Riflessioni sulla preparazione disciplinare degli insegnanti di matematica, alla luce della ricerca didattica[1]

Martha Isabel Fandiño Pinilla[2]

In a period of great success of the didactics of mathematics as a theory of its own, increasingly popular among teachers, it throws a cry of alarm on the pressing need for a real technical training, disciplinary, by teachers of mathematics.

Nelle ultime decadi si è posta molta attenzione ai problemi che hanno gli studenti quando devono affrontare attività di insegnamento-apprendimento della matematica, il che ha portato, grazie alla ricerca empirica, ad una forma di interpretare la vecchia didattica della matematica dell'insegnare (o Didattica A, *Ars docendi*) come «epistemologia dell'apprendimento» (o Didattica B) (D'Amore, 1999),[3] specifico per la matematica.

In quest'ambito, è stata analizzata la problematica del contratto didattico, forse quella che, tra le altre, ha avuto maggior fortuna non solo per quanto concerne la ricerca, ma anche per le sue lampanti spiegazioni di molti fenomeni precedentemente inspiegabili; la ricerca in questo settore non è affatto sopita, anzi è assolutamente attuale (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, Sarrazy, 2010). Tra l'altro, è stato recentemente oggetto di studi a carattere sociologico da parte di ricercatori in didattica della matematica che hanno mostrato un modo diverso da quello classico di interpretare lo stesso fenomeno (Bagni, D'Amore, 2005; D'Amore, 2005; D'Amore, Radford, Bagni, 2006).

Questo successo ha portato a studiare le situazioni a-didattiche come quelle che meglio garantiscono un vero apprendimento, profondo e stabile, nel quale si contiene e si argina il malessere generato dal contratto didattico, in opposizione alle situazioni didattiche che di questo si nutrono. L'apparenza immediata è che il successo apprenditivo si ottenga in fretta con le situazioni didattiche, anche grazie a stereotipi che la didattica ha evidenziato. Ma la ricerca ha mostrato quali sono i tremendi «effetti»

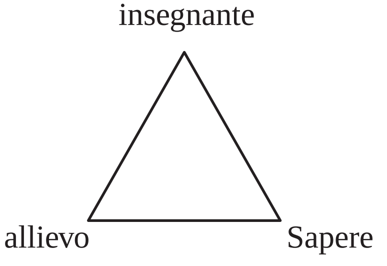
1. Lavoro eseguito nell'àmbito del PRIN (Programmi di ricerca scientifica di rilevante interesse nazionale) dal titolo: *Insegnare matematica:concezioni, buone pratiche e formazione degli insegnanti*, Anno 2008, n. prot. 2008PBBWNT, Unità locale di Bologna (NRD, Dipartimento di Matematica): *Formare gli insegnanti di matematica*.
2. NRD di Bologna
3. A questo testo rinvio per le parole tecniche della didattica della matematica che qui uso senza spiegazione. Trovo sorprendente il fatto che il significato di alcune di esse siano ancora sconosciute ad alcuni insegnanti di matematica. Fortunatamente, sempre meno.

di queste sull'apprendimento (meglio: sul non apprendimento) degli studenti. E sulle conseguenze delle amare disillusioni degli insegnanti (Brousseau, 2008).

Più in generale, connesse con il fenomeno del contratto didattico, ricerche attuali che si riallacciano a quelle classiche di scuola francese degli anni '70-'80, hanno evidenziato come certe situazioni d'aula si possano interpretare come «scivolamenti didattici», cioè tentativi di imbrigliare in una falsa relazione il Sapere in gioco, le attese dell'insegnante e le (false) attese dello studente; per esempio, il tentativo di illudere lo studente che vi siano metodi algoritmici di risolvere i problemi; o di costringere gli allievi a «risolvere» i problemi per analogia con situazioni simulate fornite a forza dall'insegnante, illudendo tutti (insegnante, allievo, famiglia, società) che vi sia stato apprendimento laddove, di fatto, non c'è (Brousseau, D'Amore, 2008).

Abbiamo appreso a conoscere i diversi ostacoli che si frappongono tra il sapere da apprendere e il sapere disponibile in ciascuno degli studenti (non solo nella zona effettiva, ma soprattutto nella zona di sviluppo prossimale) (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, Sbaragli, 2008).

Abbiamo analizzato e abbiamo appreso ad interpretare, come ricercatori e come docenti attivi e critici, alcuni dei fenomeni di aula attraverso la comoda e duttile metafora schematica del triangolo della didattica (D'Amore, 2001; D'Amore, Fandiño Pinilla, 2002).



Siamo anche riusciti, grazie a tre psicologi, veri e propri pionieri che hanno dedicato la loro vita allo studio della didattica della matematica, Efraim Fischbein, Gérard Vergnaud e Raymond Duval, a inserire nella nostra disciplina le loro ricerche, e le abbiamo inglobate in essa, mescolandole con riflessioni di carattere matematico (D'Amore, 1999).

In particolare, abbiamo capito che gli studenti affrontano grandi temi della matematica con immagini e talvolta modelli non corretti che hanno costruito nei livelli scolastici precedenti e che dovrebbero ancora essere in processo di formazione; questi modelli scorretti sono non congruenti alle attese dell'insegnante, quando l'insegnante è preparato; e questa incoerenza genera situazioni d'aula che, prima o poi, finiscono con lo sfuggire dalle mani del docente, mani professionali sì, ma non demiurgiche. Altre volte capita che il modello scorretto sia stato proposto dallo stesso insegnante, dunque l'insegnante lo accetta, lo riconosce come congruente al proprio, ma siamo fuori dal Sapere.

Per esempio, quando si propone allo studente che le rette del piano possono essere verticali, orizzontali o oblique; questo curioso modello di localizzazione delle rette è spesso proposto dallo stesso insegnante e fatto proprio come naturale dallo studente, c'è coerenza. Ma si tratta di un modello sbagliato; va bene per tracce sul foglio da disegno, fornito di bordi ai quali fare riferimento, ad una direzione privilegiata rispetto alla pagina di un libro, orientata nel senso della lettura; ma è assolutamente fuor di luogo rispetto al piano, stante la sua illimitatezza, dunque alla mancanza di «bordi» cui fare riferimento.

O quando si dice che 1 è l'elemento neutro della moltiplicazione dato che, se a è un qualsiasi numero naturale, $a \times 1 = a$. Questa falsa giustificazione renderebbe allora lo zero elemento neutro della sottrazione dato che, se a è un qualsiasi numero naturale, $a - 0 = a$. Ma questo è falso, la sottrazione non ha elemento neutro; è pur vero che $a - 0 = a$, ma $0 - a \neq a$, in generale (vale solo quando a è proprio 0). Per la moltiplicazione, sì, 1 è elemento neutro dato che $a \times 1 = a = 1 \times a$, ma non per il motivo addotto.

Abbiamo tutti appreso a studiare con profondità sempre maggiore la problematica della rappresentazione semiotica e la stretta necessità di collegarla alla noetica. Studiando l'epistemologia della matematica e la sua didattica, abbiamo capito a fondo la massima duvaliana: *Non c'è noetica senza semiotica*.

In innumerevoli occasioni abbiamo avuto modo di discutere con i docenti di tutto il mondo delle loro stesse convinzioni e di come esse influenzano l'attività di aula (Didattica C: l'epistemologia dell'insegnante) (D'Amore, 2006; Campolucci, Fandiño Pinilla, Maori, Sbaragli, 2006). E di come cambiano le convinzioni a fronte dell'aumento delle specifiche preparazioni nei campi della matematica, della sua didattica, della sua epistemologia (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2004).

Questo fatto determina, tra l'altro, la capacità di motivare e il risultato volitivo da parte degli studenti. Va sempre ricordato che motivazione e volizione sono le due facce opposte di quella stessa medaglia che è il fare d'aula. Spetta all'insegnante motivare; ma se lo studente non accende e mette in moto la sua propria personale volizione, non c'è nulla da fare, il fare d'aula non decolla (Pellerey, 1993; D'Amore, 1999).

Tuttavia, proprio il rapporto sempre più stretto e confidenziale con gli insegnanti (in occasione di ricerche e corsi) ha mostrato che capita, talvolta, che si tenga in grande conto la didattica, ma per insegnare un concetto a monte, di carattere matematico, relativo dunque al Sapere, non corretto; o un algoritmo che a noi stessi sfugge almeno in parte; o in un linguaggio che non dominiamo; o spronando ad affrontare un problema rispetto al quale noi stessi non siamo certi di essere in grado di poter orientare verso una strategia risolutiva gli allievi, a parte le frasi normative che lasciano il tempo che trovano. D'altra parte, le misconcezioni presenti talvolta in alcuni insegnanti sono state oggetto di profondo studio da parte di diversi ricercatori (Sbaragli, 2004, 2005; D'Amore, Sbaragli, 2005; D'Amore, Fandiño Pinilla, 2005; D'Amore, 2007, Sbaragli S., Arrigo G., D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Frapolli A., Frigerio D., Villa O., 2011.

In questi casi, è ovvio, quel che si ottiene è un linguaggio non corretto, un concetto sbagliato, una strategia inefficace, un algoritmo non consono. Lo studente impara da noi, impara perfettamente, ma impara qualche cosa che non è quella corretta, dal punto di vista del Sapere (Fandiño Pinilla, 2006a).

Riflettiamo sul sapere del docente; è necessario, non dimentichiamolo, non diamolo per scontato. Nella maggior parte dei casi, la trasposizione didattica ci dovrebbe spingere a far sì che il risultato del processo di insegnamento-apprendimento porti lo studente a farsi un'immagine instabile e debole, non un modello stabile e forte. In particolare, la funzione dei saperi nella scuola primaria, deve sempre essere pensata come una base per saperi o apprendimenti futuri.

L'area delle figure piane dovrà portare un giorno allo studio degli integrali; non si completa con quattro banali formule mal imparate a memoria che fanno confondere l'idea di superficie con quella di area (Fandiño Pinilla, D'Amore, 2006).

L'infinità dei numeri naturali non deve essere confusa con la loro illimitatezza; questa confusione porta spesso a pensare che in un segmento, in quanto limitato, c'è una quantità finita di punti e che tale quantità dipende dalla lunghezza del segmento stesso e che solo la retta contenga infiniti punti.

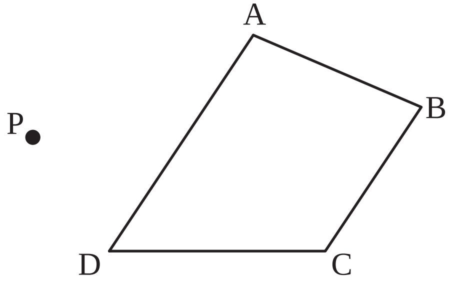
Una decente argomentazione, in dipendenza dell'età dell'allievo e del suo grado scolastico, deve portare un giorno ad una buona, corretta, coerente dimostrazione.

L'idea di infinità dei numeri naturali insieme alle opportune relazioni d'ordine dovrà portare alla densità dei numeri razionali e poi alla continuità dei numeri reali; sappiamo per certo, dai risultati della ricerca, che la maggioranza degli studenti non costruisce l'idea di densità in Q; una minima parte quella di continuità in R; molti le confondono o, per lo meno, non le distinguono (Arrigo, D'Amore, 1999, 2002).

Dal numero naturale, per gradi, si deve arrivare alla costruzione dei numeri complessi; il che, se non ben condotto, è un abisso, preda com'è di ostacoli epistemologici e didattici (Bagni, 1997).

Il conteggio dei numeri naturali a uno a uno, a due a due, o secondo certe regole, dovrà portare allo studio delle successioni; lo studio di successioni come $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, … deve culminare nello studio dei limiti.

Bisogna stare molto attenti al linguaggio; è vero che, nella scuola primaria, non occorre sviluppare troppo un linguaggio specialistico raffinato, dato che l'età dei discenti non lo permette e anche perché, onestamente, non sembra necessario: il linguaggio naturale quotidiano ha già in sé tutte le potenzialità necessarie; però bisogna stare attenti; molti confondono infinito con illimitato, molti pensano che, siccome un angolo è «interno» a un poligono, allora smetta di essere illimitato e diventi limitato. Detto in altre parole, la ricerca ha mostrato che quasi nessuno studente e ben pochi insegnanti sono disposti ad ammettere che il punto P appartenga all'angolo ABC, interno al poligono ABCD.



Le frazioni non sono fini a sé stesse; devono portare alla costruzione dei numeri razionali (Fandiño Pinilla, 2005).

Dobbiamo indurre gli insegnanti di scuola primaria a pensare mille volte prima di usare espressioni tanto diffuse come «i solidi che rotolano» in luogo di «solidi di rotazione»; o di fare riferimento alla «forma dei punti»: il punto è un oggetto geometrico di dimensione zero, dunque non può avere una forma.

Eccetera.

Però, se il docente non lo sa, se non conosce questi temi del Sapere, perché la sua conoscenza matematica non è stata strutturata in questo senso; se il suo sapere da insegnare coincide con il Sapere, non potrà neppure realizzare una trasposizione didattica e così finirà con l'insegnare quel che sa, come lo sa, al limite delle proprie competenze e, purtroppo, trascinando nell'insegnamento eventuali errori che non è in grado di dominare e di eliminare.

Per esempio, nella sua lunga vita scolare, lo studente impara nelle primarie l'addizione tra numeri naturali (spesso banalmente ed erroneamente confusa con l'attività pratica corporea empirica dell'unione, del mettere insieme, un modello intuitivo che non basta a garantire l'apprendimento di tale operazione); incontra poi l'addizione tra numeri con la virgola, tra frazioni, tra numeri razionali, interi e reali; e già siamo nel complicato, perché ci è capitato di sentire varie giustificazioni «naturali» (appunto), al fatto che $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$; poi appare l'addizione in algebra che spesso, anzi assai spesso, è un'operazione indicata ma non effettuata (l'addizione tra a e b non è c, come dice qualche studente, ma è a+b, punto e basta); poi arriva l'addizione tra vettori, l'addizione tra monomi per dar luogo ai polinomi, quella tra polinomi, quella tra matrici, quella tra numeri complessi, quella tra funzioni, quella dell'algebra di Boole eccetera. Eppure, se dopo 13 anni di scolarità completa si chiede ad uno studente che cosa è l'addizione, riemerge quella della scuola primaria, l'unica ad aver lasciato un segno (evidentemente modello e non solo immagine). La domanda, relativamente alla problematica che sto facendo emergere qui, è la seguente: quanti insegnanti di scuola primaria sanno della potenziale evoluzione, della necessaria evoluzione, del concetto di addizione? Cioè: quanti credono che nel Sapere l'addizione si limita a quella enunciata e proposta nel primo anno di scolarità?

Lo stesso vale per le altre operazioni e per molte altre questioni. Molti studenti, anche di corsi avanzati, e alcuni insegnanti identificano le operazioni binarie definibili sui diversi sistemi numerici con le quattro operazioni razionali elementari apprese nella scuola primaria. Senza scomodare insiemi numerici più complicati o raffinati, anche solo rimanendo in N, se si cerca di far capire che le operazioni binarie definibili in N non sono quattro, ma infinite [anzi, in un certo senso, più che *infinite* (ma questa affermazione la capiscono davvero in pochi)], si vedono volti stupiti ed increduli.

Dobbiamo essere perfettamente consapevoli dell'assoluta necessità di una preparazione disciplinare di base.

Da questo punto di vista, assume particolare rilievo una diabolica domanda che possiamo tutti porci; di fronte ad un tema di matematica di quelli usuali nella scuola militante tradizionale o no, è bene, di tanto in tanto chiederci: Perché si insegna questo tema? O, nella versione preferita da bambini e dagli adolescenti: A che cosa serve?

Perché insegniamo la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione? A che cosa serve?

Perché insegniamo il massimo comun divisore? A che cosa serve? Davvero il minimo comune multiplo è necessario per eseguire l'addizione tra frazioni?

Perché insegniamo i logaritmi? A che cosa serve?

Le risposte possono essere intrinseche alla matematica stessa: per raggiungere certe «competenze in matematica», questi temi sono necessari; o possono trovare risposte esterne alla matematica, per costruire quella che altrove ho chiamato «competenza matematica» (D'Amore, Godino, Arrigo, Fandiño Pinilla, 2003; Fandiño Pinilla, 2006b).

Se questi temi trovano riscontro positivo nei due settori, bene; se lo trovano in uno solo dei due, bene; se non lo trovano in nessuno dei due, probabilmente, davvero, quel tema «non serve a nulla» (parafrasando il fortunato libro vincitore di premi di Bolondi e D'Amore, 2010); in tal caso possiamo prendere in esame la possibilità di farne a meno, lasciando libero posto a qualche cosa che merita più attenzione. Se proseguiamo a volerlo immettere nel curricolo, questo potrebbe essere un indice di Sapere non ben costruito, potrebbe essere indicativo del fatto di non essere in grado di compiere scelte consapevoli e mature, potrebbe voler significare che siamo succubi del curricolo e non riusciamo a pensare che il curricolo è lui uno strumento nelle nostre mani e non viceversa (Fandiño Pinilla, 2002).

Tutto ciò dipende da una efficace e profonda, significativa e consapevole costruzione del Sapere.

Riferimenti bibliografici

Arrigo G., D'Amore B. (1999). «Lo vedo, ma non ci credo». Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 22B, 5, 465-494.

Arrigo G., D'Amore B. (2002). «Lo vedo ma non ci credo…», seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-57.

Bagni G.T. (1997), Dominio di una funzione, numeri reali e numeri complessi. Esercizi standard e contratto didattico nella scuola secondaria superiore, *La matematica e la sua didattica*, 3, 306-319.

Bagni G.T., D'Amore B. (2005). Epistemologia, sociologia, semiotica: la prospettiva socio-culturale. *La matematica e la sua didattica.* 1, 73-89.

Bolondi G., D'Amore B. (2010). *La matematica non serve a nulla*. Bologna: Compositori.

Brousseau G. (2008). *Ingegneria didattica ed epistemologia della matematica*. A cura di Bruno D'Amore. Bologna: Pitagora.

Brousseau G., D'Amore B. (2008). I tentativi di trasformare analisi di carattere meta in attività didattica. Dall'empirico al didattico. In: D'Amore B., Sbaragli F. (eds.) (2008). *Didattica della matematica e azioni d'aula*. Atti del XXII Convegno Nazionale: Incontri con la matematica. Castel San Pietro Terme, 7-8-9 novembre 2008. Bologna: Pitagora. 3-14.

Campolucci L., Fandiño Pinilla M.I., Maori D., Sbaragli S. (2006). Cambi di convinzione sulla pratica didattica concernente le frazioni. *La matematica e la sua didattica*. 3, 353-400.

D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora. [Edizione 2010].

D'Amore B. (2001). Il «triangolo» allievo-insegnante-sapere in didattica della matematica. *L'educazione matematica*. 3, 2, 104-113.

D'Amore B. (2005). Pratiche e metapratiche nell'attività matematica della classe intesa come società. Alcuni elementi rilevanti della didattica della matematica interpretati in chiave sociologica. *La matematica e la sua didattica.* 3, 325-336.

D'Amore B. (2006). Didattica della matematica «C». In: Sbaragli S. (ed.) (2006). *La matematica e la sua didattica, vent'anni di impegno*. Atti del Convegno Internazionale omonimo, Castel San Pietro Terme (Bo), 23 settembre 2006. Roma: Carocci. 93-96.

D'Amore B. (2007). Lo zero, da ostacolo epistemologico a ostacolo didattico. *La matematica e la sua didattica*. Vol. 21, n° 4, 425-454.

D'Amore B., Fandiño Pinilla MI. (2002). Un acercamiento analitico al «triángulo de la didáctica». *Educación Matemática*. México DF, México. 14, 1, 48-61.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2004). Cambi di convinzione in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. *La matematica e la sua didattica*. 3, 27-50.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2005). Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti. *La matematica e la sua didattica*. 2, 165-190.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I., Marazzani I., Sarrazy B. (2010). *La didattica della matematica: gli «effetti» del contratto*. Prefazione e postfazione di Guy Brousseau. Bologna: Archetipolibri.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Marazzani I., Sbaragli S. (2008). *La didattica e le difficoltà in matematica*. Trento: Erickson.

D'Amore B., Godino D.J., Arrigo G., Fandiño Pinilla M.I. (2003). *Competenze in matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B., Radford L., Bagni GT. (2006). Ostacoli epistemologici e prospettive socioculturali. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 29B, 1, 11-40.

D'Amore B., Sbaragli S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di «misconcezione». *La matematica e la sua didattica*. 2, 139-163.

Fandiño Pinilla M.I. (2002). *Curricolo e valutazione in matematica.* Bologna: Pitagora.

Fandiño Pinilla M. I. (2005). *Le frazioni. Aspetti concettuali e didattici.* Bologna: Pitagora.

Fandiño Pinilla M.I. (2006a). Trasposizione, ostacoli epistemologici e didattici: quel che imparano gli allievi dipende da noi. Il caso emblematico di frazioni, area e perimetro. In: Sbaragli S. (ed.) (2006). *La matematica e la sua didattica, vent'anni di impegno*. Atti del Convegno Internazionale omonimo, Castel San Pietro Terme (Bo), 23 settembre 2006. Roma: Carocci. 117-120.

Fandiño Pinilla M.I. (2006b). Educare alla competenza matematica. *Rassegna*. Numero speciale: D'Amore B. (ed.). *Matematica: l'emergenza della didattica nella formazione*. Bolzano: Istituto Pedagogico di lingua italiana. 21-28.

Fandiño Pinilla M.I., D'Amore B (2006). *Area e perimetro. Aspetti concettuali e didattici*. Trento: Erickson.

Pellerey M. (1993), Volli, sempre volli, fortissimanente volli. *Orientamenti pedagogici*, 6, 1005-1017.
Sbaragli S. (2004). *Le convinzioni degli insegnanti sull'infinito matematico*. Tesi di Dottorato. Università di Bratislava. Versione in italiano e in inglese nel sito: http://math.unipa.it/~grim/tesi_it.htm.
Sbaragli S. (2005). Misconcezioni «inevitabili» e misconcezioni «evitabili». *La matematica e la sua didattica.* 1, 57-71.
Sbaragli S., Arrigo G., D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Frapolli A., Frigerio D., Villa O. (2011). Epistemological and Didactic Obstacles: the influence of teachers' beliefs on the conceptual education of students. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 10, 1, 61-102.

3. Sperimentazione[1] sul calcolo numerico: calcolo in riga vs calcolo in colonna

Gianfranco Arrigo

The widespread use of calculating tools (calculators and computers) leads to reconsider the purpose of the teaching of calculus. In general, however, this step has not yet been achieved in primary school, in which the teaching of Arabic algorithms for writing calculus continues, without obtaining great results. The article describes the objectives of an experiment in progress, whose aim is to suggest a new way of teaching the calculus.

1. «Le calcul réfléchi»

«La diffusione generalizzata dei mezzi di calcolo strumentale (particolarmente delle calcolatrici tascabili) induce a ripensare le finalità dell'insegnamento del calcolo.

L'obiettivo prioritario rimane sempre quello che le conoscenze numeriche degli allievi siano di tipo operativo, cioè al servizio della risoluzione di problemi che, grazie all'uso della calcolatrice, possono concernere situazioni reali attinenti agli aspetti sociali o ad altri ambiti disciplinari studiati a scuola.

Oggi vi sono tre modi per calcolare: il calcolo mentale, il calcolo strumentale (utilizzo di una calcolatrice o di un computer) e il calcolo scritto[2]*. Nel quotidiano, come anche nella vita lavorativa, il calcolo strumentale ha largamente sostituito il calcolo scritto. Il posto da accordare a scuola ai diversi modi di calcolare deve dunque essere ridefinito e precisato. Fra questi diversi mezzi conviene distinguere soprattutto ciò che dev'essere automatizzato da ciò che si realizza con un trattamento ragionato (calcul réfléchi)»*. (Éduscol, 2007)

Ritroviamo in questo testo del Ministero dell'educazione francese un punto centrale della nostra sperimentazione: «calcul réfléchi», cioè calcolo pensato, calcolo cosciente. All'opposto troviamo il calcolo mnemonico, i cui algoritmi devono essere automatizzati mediante lunghe sedute di esercitazione: un lavoro di bassa valenza formativa, per dirla con Michèle Artigue (2004).

Nell'articolo citato, la stessa autrice parla senza mezzi termini di una destabilizzazione del calcolo a scuola, che investe tutti gli ordini scolastici, dalle elementari alle superiori. Il calcolo è inteso in senso lato: sia numerico che letterale e –

1. Sono al momento impegnati nella sperimentazione insegnanti di Giulianova, Verbania e Biella e si stanno per aggiungersi insegnanti milanesi e ticinesi.
2. Nelle nostre scuole solitamente indicato con l'espressione «calcolo in colonna».

aggiungo – comprende anche la risoluzione delle equazioni, il calcolo con i radicali, quelli cosiddetti trigonometrico, esponenziale e logaritmico, per continuare con la tecnica di derivazione e di integrazione, perché l'informatica, si sa, non ha solo prodotto macchine che eseguono calcoli numerici, ma anche ottimi elaboratori simbolici.

Nel rapporto della C.R.E.M. (2007) si pone l'attenzione su tre punti particolarmente delicati quanto pericolosi che contribuiscono a formare l'immagine scorretta che il calcolo ha nella cultura in generale e particolarmente nell'insegnamento.

Prima di tutto l'immagine del calcolo diametralmente opposta a quella del ragionamento, sia sul piano delle operazioni mentali che metterebbe in azione sia nei metodi di apprendimento. Da una parte il calcolo come attività meccanica, automatizzabile, eseguibile senza alcun ricorso al ragionamento; dall'altra la risoluzione di problemi e la dimostrazione di teoremi – per lo più di geometria sintetica – considerate come il ramo nobile dell'attività matematica. Contro questa visione occorre lottare, soprattutto se si vuol porre in modo corretto il problema dell'integrazione, nella scuola, degli strumenti tecnologici del calcolo. Nel tentativo di ridefinire il rapporto tra calcolo mentale e ragionamento, gioca un ruolo privilegiato il calcolo mentale che ho ribattezzato «calcolo in riga» (Arrigo, 2000), per contrapporlo al «calcolo in colonna» e anche perché si avvale della scrittura algebrica (gerarchia delle operazioni e uso delle parentesi). Questo modo di praticare il calcolo mentale esige un continuo controllo sulle proprietà delle operazioni, permette di esaminare i diversi modi con i quali si può eseguire un determinato calcolo, favorisce la discussione mirata a evidenziare pregi e difetti delle varie soluzioni portando l'allievo a costruirsi un prezioso bagaglio tecnico, più o meno raffinato, a seconda delle capacità e degli interessi personali. Col passare del tempo, i calcoli non saranno soltanto semplici operazioni elementari concernenti due numeri, ma diventeranno espressioni numeriche. Allora la riflessione sulle proprietà e sul concatenamento delle operazioni si fa più precisa e di questo passo, già nella scuola elementare, si preparano gli allievi alla pratica degli algoritmi, che si concretizzerà poi a partire dalla scuola media (si pensi ad esempio all'apprendimento del calcolo letterale, solitamente ostico a buona parte degli studenti).

Il secondo punto delicato menzionato dal rapporto C.R.E.M. concerne l'interpretazione che si dà al rapporto tra calcolo esatto e calcolo approssimato. Anche queste due facce del calcolo, negli ambienti culturali e scolastici, sono spesso viste in opposizione, e si tende a relegare il calcolo approssimato ai soli casi nei quali non è possibile eseguire un calcolo esatto. Nella scuola solitamente si dà poca importanza al calcolo approssimato, mentre il calcolo esatto viene enfatizzato oltre ogni limite. Eppure, nella vita quotidiana, l'uomo è chiamato spesso a fare calcoli approssimati: quale prodotto è più conveniente? Quanti soldi dovrei ritirare al bancomat? Quanto riceverò di resto? Quanto deve pagare ogni commensale? Etc.

Nella nostra sperimentazione, all'inizio, tutto il calcolo è esatto. Poi, con l'introduzione della calcolatrice (in terza o al massimo in quarta) sorge la necessità di controllare il risultato della macchina. Sappiamo che i circuiti elettronici fino a un certo livello di complessità possono essere considerati infallibili, ma può sbagliare facilmente chi introduce i dati o chi dispone la sequenza di operazioni da eseguire: da qui la necessità di farsi un'idea dell'ordine di grandezza del risultato, quindi di calcolare una sua approssimazione. Ma quest'ultima fase esige di nuovo un calcolo esatto, fatto con numeri arrotondati, quindi eseguibile mentalmente (calcolo in riga). Quindi, per combattere la falsa contrapposizione calcolo esatto - calcolo approssimato, si può iniziare presto, già nella scuola elementare, a condizione di sviluppare in modo accurato le capacità di calcolare mentalmente. Così facendo si evita anche di lasciare che gli allievi diventino macchina-dipendenti, ossia individui che si fidano ciecamente della tecnologia.

Infine, sempre secondo il citato rapporto C.R.E.M., il terzo punto delicato è la concezione del rapporto tra calcolo e strumento di calcolo. Ancora oggi, dopo qualche decennio dall'introduzione della calcolatrice nella scuola[3], si sentono affermazioni del tipo «con l'introduzione della calcolatrice nelle scuole, gli allievi disimparano a calcolare». Nulla di più falso, anche la più elementare calcolatrice tascabile si rivela un ottimo stimolatore dell'apprendimento. Basterebbe vedere come i ragazzini delle elementari, calcolando mentalmente, si impegnano a gareggiare in velocità con la calcolatrice su calcoli a loro favorevoli, del tipo:

37 + 348 + 63
(basta vedere che 37+63=100…)
8 · 79 · 125
(basta vedere che 8 · 125= 1000…)

La conoscenza e la capacità di applicare queste ed altre situazioni nel calcolo approssimato è un importante obiettivo della nostra sperimentazione.

Inoltre, proprio la presenza di questo potente strumento di calcolo permette molte possibilità didattiche, assolutamente impensabili in precedenza. Prima dell'introduzione della calcolatrice, i problemi scolastici erano forzatamente «addomesticati» sia nell'espressione numerica che nel numero dei dati. Ciò contribuiva a rafforzare la convinzione degli allievi che i problemi che s'incontrano nella vita di tutti i giorni sono ben diversi da quelli che si affrontano a matematica, dunque che a matematica – e in generale nella scuola – si è costretti a imparare cose che non servono nella vita reale. L'apertura della scuola verso il calcolo strumentale – calcolatrice, foglio elettronico, speciali software disciplinari, etc. – permette finalmente di affrontare problemi reali con dati reali.

Aggiungo che certi comandi tipici della calcolatrice possono stimolare gli allievi ad appropriarsi di conoscenze matematiche molto più presto del solito. Ad esempio, la presenza dei tasti «x^2», «x^3», «$\sqrt{x}$», «1/x», «x!» può aprire nuovi orizzonti già agli allievi delle elementari. Come insegnanti non dobbiamo temere di scombussolare i programmi consentendo simili aperture e non dobbiamo assolutamente rispondere alle curiosità della classe: «questo lo vedrete più tardi!».

2. Confronto tra due modi di fare i calcoli

Nel paragrafo precedente ho presentato le grandi linee di alcuni documenti esterni per sottolineare il fatto che la sperimentrazione che stiamo sviluppando risponde a reali necessità sentite non solo nel nostro piccolo mondo.

3. In questo caso mi riferisco all'introduzione della calcolatrice nella scuola media ticinese, che data 10 novembre 1981.

A questo punto ripresento sinteticamente i principi sui quali basiamo l'apprendimento del calcolo nella scuola elementare[4]:

1. Calcoli semplici e stima di risultati si eseguono usando la propria mente (calcolo mentale e scrittura matematica in riga).
2. Calcoli complicati e sequenze complesse di calcoli si fanno a macchina.
3. Il calcolo scritto (l'insieme degli algoritmi arabici o calcoli in colonna) non dovrebbe più far parte dei programmi, ma, se proprio non se ne vuole fare a meno, lo si può mantenere, inserito però in un contesto storico e convenientemente ridimensionato.

Nel settore scolastico primario, nel quale stiamo sperimentando questo diverso modo di interpretare il calcolo a scuola, osserviamo da una parte il piacere e la voglia di sempre migliorare espresse spontaneamente dagli allievi e dall'altra la perplessità degli adulti che sono stati educati in modo tradizionale, in particolare di insegnanti e genitori. Mentre sui primi, trattandosi di professionisti, sembra relativamente facile intervenire (per esempio servendosi dei canali della formazione continua), sui genitori è molto più difficile. Devo però dire che, nelle poche occasioni che si sono presentate di parlare direttamente agli adulti, alla fine ho ottenuto una totale adesione al progetto, in taluni casi anche accompagnata da palese entusiasmo.

Vorrei ora presentare un confronto tra i due modi di interpretare il calcolo a scuola: il nostro e quello tradizionale.

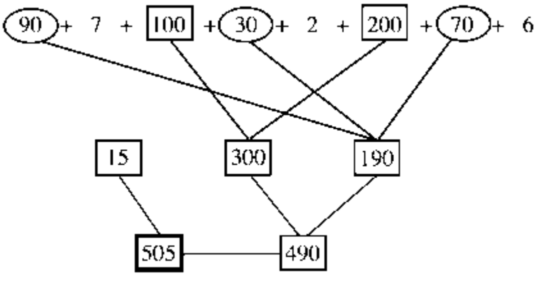
2.1. Confronto sull'addizione

Vogliamo calcolare la somma seguente: 97 + 132 + 276

Calcolo in riga:

90 + 7 + 100 + 30 + 2 + 200 + 70 + 6 = 300 + (70 + 30 + 90) + (7 + 2 + 6) = 490 + 15 = 505

Variante: calcolo in riga con schema



= 300 + 190 + 15 = 490 + 15 = 505

4. È importante sapere che nel manuale *Atolli matematici 1*, dedicato alla prima media si riprende e si porta a compimento l'apprendimento del calcolo numerico, seguendo gli stessi principi che stiamo enunciando, nel segno della continuità didattica.

Calcolo in colonna:

2	1	
	9	7
1	3	2
2	7	6
5	0	5

«Sette più due, nove, più sei, quindici, scrivo cinque e porto uno;
uno più nove, dieci, più tre, tredici, più sette, venti, scrivo zero e porto due;
due più uno, tre, più due, cinque;
risultato: cinquecentocinque»

Commento

Nel calcolo in riga l'allievo gioca con le scomposizioni di un numero e con le proprietà dell'addizione che qui si riducono, per i matematici, a commutativa e associativa. Per gli allievi, la combinazione di queste due proprietà (che non è necessario conoscere singolarmente) vuole semplicemente significare che per calcolare una somma di più addendi si può iniziare da dove si vuole e procedere nell'ordine desiderato. Occorre solo fare attenzione che ogni addendo venga preso una sola volta. La scomposizione mostrata è la più elementare e consiste nel separare le centinaiai dalle decine e dalle unità; nella ricomposizione invece si possono mettere in atto le varie strategie dell'addizione. Ciò che appare evidente è che il procedimento richiede una continua regolazione da parte della mente e le strategie impiegate possono variare a dipendenza della situazione o delle capacità dei singoli.

Nel calcolo in colonna, la mente deve «recitare» il testo scritto accanto alla rappresentazione numerica. Per eseguirlo correttamente e in tempo utile occorre procedere con un certo ritmo, memorizzare (o scrivere) i riporti che non vanno in seguito dimenticati. La mente è completamente impegnata nel seguire la catena di addizioni e non ha la possibilità né di «vedere» la struttura matematica sottostante (cioè di regolare il procedimento), né di mettere in atto strategie personali.

2.2. Confronto sulla sottrazione

Vogliamo eseguire la seguente sottrazione: 531 – 74

Calcolo in riga:

531 – 74 = (531 – 70) – 4 = 461 – 4 = 457

Variante: dal sottraendo al minuendo con percorso a frecce (operatori additivi):

531 – 74 = 6 + 20 + 400 + 31 = 457

Calcolo in colonna:

$$\begin{array}{r} \acute{5}\ \acute{3}\ 1 \\ 7\ 4 \\ \hline 4\ 5\ 7 \end{array}$$

«uno meno quattro non si può, prendo a prestito dieci, undici meno quattro fa sette;
il tre è diventato due, due meno sette non si può, prendo a prestito dieci, dodici meno sette fa cinque;
il cinque è diventato quattro, quattro meno zero fa quattro;
risultato quattrocentocinquantasette»

Commento

Nel calcolo in riga l'allievo più abile usa la scrittura algebrica e se la cava con due passaggi, usa bene le parentesi e scompone a suo gradimento il sottraendo. Quello meno capace può benissimo usare la variante, cioè il metodo inverso, molto usato per esempio quando nella compravendita si deve dare il resto a qualcuno che ha pagato con una banconota. Questo metodo fa capo a un percorso frecciato che parte dal sottraendo per giungere al minuendo. La sua singolarità consiste nel fatto che l'allievo esegue una successione di addizioni che può scegliere a seconda delle proprie capacità e non esegue alcuna sottrazione. Inutile dire che si presta particolarmente per gli allievi in difficoltà.

La sequenza recitata del calcolo in colonna appare ancor più difficoltosa di quella dell'addizione. Inoltre c'è la delicata faccenda del prestito. Nella prima riga si prende veramente «a prestito» il numero 10, ma nella seconda, quale allievo si rende conto che prende a prestito 10 decine, cioè un centinaio e che non esegue 12–7, bensì 120–70?

2.3. Confronto sulla moltiplicazione

Vogliamo eseguire la seguente moltiplicazione: 552 x 97

	500	50	2
90	45000	4500	180
7	3500	350	14

552 x 97 = 45'000 + (4500 + 3500) + (350 + 180) + 14 =
= 45'000 + 8000 + 530 + 14 = 53'530 + 14 = 53'544

Calcolo in colonna:

$$\begin{array}{r} 5\ 5\ 2 \\ 9\ 7 \\ \hline 3\ 8\ 6\ 4 \\ 4\ 9\ 6\ 8\ - \\ \hline 5\ 3\ 5\ 4\ 4 \end{array}$$

«sette per due, quattordici, scrivo quattro e porto uno, sette per cinque, trentacinque, più uno, trentasei, scrivo sei e porto tre, sette per cinque, trentacinque, più tre, trentotto, lo scrivo per intero;
metto un trattino sotto al quattro e mi sposto a sinistra, nove per due, diciotto, scrivo otto e porto uno, nove per cinque quarantacinque, più uno, quarantasei, scrivo sei e porto quattro, nove per cinque quarantacinque, più quattro, quarantanove, lo scrivo per intero;
[segue l'esecuzione dell'addizione in colonna che tralascio]
risultato: cinquantatremilacinquecentoquarantaquattro»

Commento

Il metodo della tabella ha molti pregi. Prima di tutto, di nuovo, l'allievo scompone i due fattori in unità-decine-centinaia; poi può completare le caselle rimanenti eseguendo mentalmente moltiplicazioni che sa fare perché ha imparato le tabelline (condizione essenziale anche per il calcolo in colonna) e ha imparato come moltiplicare multipli di dieci. Può iniziare dove vuole e continuare come vuole. Non ha alcun assillo di ricordare i riporti: qui non se ne parla. Quando la tabella è completata, l'allievo deve addizionare i numeri interni della tabella: di nuovo questa operazione la può eseguire iniziando da dove vuole e continuando come vuole, facendo solo attenzione a prendere tutti gli addendi una sola volta. Ma questo lo ha imparato in precedenza, eseguendo addizioni. Aggiungo che una tabella analoga potrebbe essere usata anche più tardi, nelle scuole successive, quando gli allievi devono imparare a moltiplicare polinomi.

L'esecuzione in colonna racchiude tutte le difficoltà di questo metodo, ossia, non è permessa nessuna scelta sul come procedere, vi è la necessità di ricordare i riporti mentre si calcola mentalmente un nuovo prodotto e infine si deve mettere un trattino, senza ben sapere il perché. Come può un allievo in difficoltà portare a termine correttamente una tale sequenza di azioni? Contrariamente a quanto taluni pensano, il calcolo in colonna è un modo di calcolare per allievi capaci; chi ha difficoltà generali di apprendimento può trovare nel calcolo in riga con l'ausilio della tabella un modo di fare molto più facile, senza misteri e che sarà sicuramente utile anche negli anni successivi.

2.4. Confronto sulla divisione

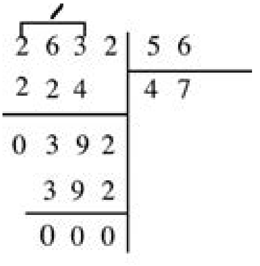
Vogliamo eseguire la seguente divisione: 2632 : 56

Calcolo in riga con il percorso frecciato (o catena di operatori):

$$56 \xrightarrow{x\ 20} 1120 \xrightarrow{+\ 56\ x\ 20} 2240 \xrightarrow{+\ 56\ x\ 5} 2520 \xrightarrow{+\ 56\ x\ 2} 2632$$

2632 : 56 = 20 + 20 + 5 + 2 = 47

Calcolo in colonna:



«Considero il numero formato dalle prime tre cifre e cerco di capire quante volte il cinquantasei sta in duecentosessantatre, quattro volte;
eseguo la moltiplicazione di cinquantasei per quattro incolonnando il prodotto sotto il duecentosessantatre;
eseguo la sottrazione duecentosessantatre meno duecentoventiquattro, ottengo trentanove;
abbasso il due e ottengo trecentonovantadue;
cerco di capire quante volte il cinquantasei sta in trecentonovantadue, sette volte;
eseguo la moltiplicazione di cinquantasei per sette incolonnando il prodotto sotto il trecentonovantadue;
eseguo la sottrazione trecentonovantadue meno trecentonovantadue, ottengo zero;
risultato: quarantasette»

Commento

È quasi incredibile che per decenni a scuola si sia continuato a credere – e a pretendere – che gli allievi non particolarmente abili nell'apprendere debbano alla fine riuscire ad eseguire una divisione in colonna, dopo lunghi, estenuanti, talvolta deludenti e mortificanti esercizi.

Se consideriamo l'esecuzione della divisione con il metodo del percorso frecciato e con la relativa scrittura in riga, balza evidente il minore livello di difficoltà. Con questo metodo ci si avvicina al dividendo, partendo dal divisore. Le sottrazioni successive, alle quali concettualmente si rifa la divisione, sono trasformate in addizioni successive (grazie alla relazione di simmetria esistente tra l'operatore sottrattivo e quello additivo), quindi in un'operazione molto più facile.

Dopo aver detto che la divisione è sicuramente l'operazione più difficile da eseguire – che la si esegua in riga o in colonna – non possiamo sottacere la grande complicazione che la divisione in colonna comporta. Si guardi anche solo l'esempio precedente. Molti sono i passaggi che un allievo non particolarmente capace non è in grado di spiegare:

– perché all'inizio si considera solo il numero composto dalle prime tre cifre;
– perché si deve moltiplicare ed eseguire la sottrazione
– perché si deve allineare a sinistra il risultato della sottrazione;
– perché si deve «abbassare» il 2;
– perché il risultato è proprio quello.

Questo fatto è più serio di quanto si pensi. Contribuisce in grande misura a formare nella mente dell'allievo l'idea, purtroppo molto diffusa, secondo la quale la matematica è una disciplina difficile, dominio di pochi eletti, che non lascia spazio alla creatività, che, se non si fa parte della ristretta cerchia dei forti, si è obbligati a imparare a memoria.

Ho esagerato? Si può sempre effettuare una prova: chiedere a un adulto di eseguire una semplice divisione, sul tipo di quella appena considerata, e poi porgli le domande elencate.

Diversa è la situazione se si segue la metodologia che stiamo sperimentando. Con il calcolo in riga, all'occorrenza sorretto da schematizzazioni grafiche, ogni passo è esplicito e consente all'allievo di rendersi conto del perché lo si compie e di controllarne la correttezza. È doveroso aggiungere che il calcolo in riga concede molta libertà all'allievo. I forti possono raggiungere livelli di competenza elevati, come sempre – mi si dirà –, certamente, ma avranno, a livelli diversi, una preparazione molto più idonea per la continuazione degli studi. Gli altri, anche se non raggiungeranno queste mete, avranno sempre acquisito una capacità di calcolare cosciente, duratura ed estendibile agli ambiti previsti dai programmi delle scuole successive.

3. Nota finale

Sarebbe troppo facile per me riportare, come conclusione, i pareri entusiastici degli allievi e la soddisfazione degli insegnanti, anche di coloro che all'inizio non hanno nascosto qualche perplessità o hanno incontrato momenti di difficoltà, più che giustificati quando si vuole cambiare il proprio modo di insegnare. Si potrebbe tirare in ballo il famoso «effetto Far West», secondo il quale ogni sperimentazione scolastica fatta su principi che si condividono riesce sempre.

Nessuno però potrà contestare che la scuola del XXI secolo debba smettere di insegnare gli algoritmi arabici (cioè il calcolo in colonna) introdotti alle nostre latitudini, nel XIII secolo, dal buon Leonardo Pisano, detto Fibonacci, in un mondo nel quale 17 si scriveva XVII e quando per calcolare ci si doveva rivolgere agli abacisti, i soli ad essere in grado di eseguire le quattro operazioni. Ne è passato di tempo e da allora si sono susseguite diverse rivoluzioni del modo di calcolare. Chi usava i numeri professionalmente, agli algoritmi arabici ha preferito dapprima i righelli di Nepero, poi le macchine calcolatrici meccaniche, più avanti il calcolo con le tavole dei logaritmi e con i suoi strumenti derivati (le tavole logaritmico-trigonometriche e il regolo calcolatore). Tutte cose queste usate da una minoranza elitaria. L'uomo comune ha continuato a usare gli algoritmi arabici. Il passo decisivo è avvenuto negli ultimi decenni del secolo scorso e lo possiamo identificare con la comparsa degli strumenti elettronici a basso costo; prima le calcolatrici tascabili, poi i personal computer. Da allora in tutte le famiglie e in tutti i posti di lavoro è entrata la calcolatrice: basta con le lunghe sedute di addizioni e sottrazioni in colonna per far quadrare i conti, basta con le divisioni in colonna per calcolare rapporti. Poco dopo, ecco il computer da tavolo, dapprima scomodo da usare e quindi dominio di pochi, ma, con l'introduzione dell'interfaccia grafica, arriva il computer per tutti, che diventa anche portatile, sempre più leggero, sempre più sottile, sempre più performante e sempre meno costoso. Dopo di che, si è aperta l'era internet, dalle enormi potenzialità.

E la scuola? Occorre distinguere: le scuole superiori hanno colto al volo la possibilità offerta dalla calcolatrice tascabile, che, per esempio, rendeva del tutto inutile continuare a insegnare il calcolo numerico eseguito con i logaritmi. In seguito queste scuole si sono abbastanza presto dotate di aule di informatica, spinte dalla necessità, visto il diffondersi di queste tecnologie nella società.

Diversa è stata la reazione della scuola dell'obbligo. Di fronte alla calcolatrice, gli insegnanti si sono raggruppati in tre grandi categorie:

– chi ha proibito l'entrata della calcolatrice in aula;
– chi ha tollerato la presenza della calcolatrice senza cambiare nulla al proprio insegnamento;
– chi ha capito la grande occasione offerta per cambiare e integrare il nuovo strumento di calcolo nel proprio insegnamento.

Nella nostra scuola media, l'uso della calcolatrice è contemplato dai documenti programmatici e, per esempio, la collana di manuali *Atolli matematici* propone, oltre a un insegnamento di base sull'uso corretto della calcolatrice, molte attività da eseguire sia con la calcolatrice sia con il computer. L'impressione generale, però, è che in classe non si sia ancora riusciti a realizzare una vera e generalizzata integrazione delle nuove tecnologie nell'insegnamento.

E nella scuola elementare? A parte lodevoli eccezioni rese possibili dall'abnegazione di pochi insegnanti, si continua a insegnare il calcolo in colonna e ad assegnare problemi con dati «addomesticati». La calcolatrice è relegata a stampella per chi non sa eseguire i calcoli in colonna, il computer in classe generalmente non c'è.

La sperimentazione relativa al cosiddetto «calcolo in riga» ha fra i suoi obiettivi quello di insegnare all'allievo della scuola elementare ad usare correttamente la calcolatrice e, dove è possibile, anche il computer, segnatamente il foglio elettronico che è una grande palestra per l'apprendimento del calcolo.

La grande speranza è anche quella di riuscire a eliminare l'insegnamento del calcolo in colonna, che non ha veramente più senso di essere e che, per di più, occupa un numero considerevole di ore-lezione, senza che si ricavino grandi risultati né di tipo formativo né di tipo utilitaristico.

Come mai, allora, si giunge solo ora a porre questo importante interrogativo?

Domanda pertinente, risposta difficile da dare. Autorevoli firme della didattica della matematica riconoscono che il problema esiste, che è serio e che non è ancora stato risolto. Noi non abbiamo la presunzione di essere vicini alla soluzione, né credo che vi sia una sola soluzione. Dalla nostra sperimentazione potrebbero però uscire risultati significativi tali da aprire la strada a una possibile sistemazione dell'insegnamento del calcolo nella scuola elementare. Non sarà una sistemazione definitiva, ma almeno un primo passo verso un'interpretazione più ragionevole per il bene degli allievi, di tutti, indipendentemente dalle diverse capacità di apprendere.

Bibliografia

Éduscol (2007). *Documents d'application des programmes, Mathématiques cycle 3.* Edito dal Ministero dell'educazione nazionale francese. Scaricabile da http://www.cndp.fr/ecole/.

C.R.E.M. (2007). *Rapport d'étape sur le calcul*. Scaricabile da Internet.

Kahane J.-P. (2002). *L'enseignement des sciences mathématiques*. Parigi: Edizioni Odile Jacob.

Artigue M. (2004). *L'enseignement du calcul aujourd'hui: problèmes, défis et perspectives*. Repère IREM nr. 54, pp. 23-29.

Arrigo G. (2000). Il calcolo a scuola, ovvero: l'inizio di un cambiamento epocale. *Bollettino dei docenti di matematica, 40*. Bellinzona: UIM-CDC

4. Classificazione ed interpretazione degli errori e misconcezioni tramite TEPs

Un'introduzione al calcolo delle probabilità senza conoscenze della combinatoria[1]

Michael Eisenring

In this article I present some results of a didactical experiment accomplished in two 3rd grades of high school. The students of the two classes with linguistic and scientific option studied the subject 'probability theory' with the help of a self-studying-program. After that I evaluated the skills achieved by the students, analyzing the textual eigen-productions (TEPs) edited by them. This led to interesting insights into the mistakes and misconceptions related to the learning of probability theory.

Sommario

Il lavoro proposto presenta una sperimentazione didattica svoltasi in due classi di 3° liceo: una di indirizzo linguistico e l'altra di indirizzo scientifico. In queste due classi è stato trattato l'argomento riguardante il *Calcolo delle probabilità*, senza il prerequisito del calcolo combinatorio. L'apprendimento è stato organizzato sulla base di un programma guidato con una focalizzazione particolare sulla dimensione concettuale piuttosto che su quella tecnica. Il lavoro delle due classi è stato analizzato tramite i testi scritti dagli studenti (TEPs). L'analisi di questi lavori ha permesso di confrontare l'apprendimento nelle due classi con profili diversi e di esaminare in quale misura ci sono state delle differenze nell'affrontare questo particolare argomento della matematica. I testi scritti dagli studenti hanno permesso di individuare una serie di errori e misconcezioni interessanti.

1. Introduzione

1.1. Obiettivi

Durante la mia pratica professionale presso il Liceo di Locarno, ho avuto l'occasione di insegnare in due classi di terza liceo: una di opzione linguistica (3A), l'altra di opzione scientifica (3F). Entrambe le classi non avevano ancora affrontato l'argomento probabilità. Trattare questa tematica con due classi di opzioni diverse è di particolare interesse per due ragioni:

– Le conoscenze della probabilità sono fondamentali anche per lo studio di svariate materie non-scientifiche. Perciò a livello motivazionale gli

1. Estratto del lavoro di diploma in didattica della matematica. SUPSI-DFA, Locarno. Docente di riferimento: Michele Impedovo. Anno accademico 2009-2010.

studenti dell'opzione linguistica, tendenzialmente meno appassionati alla matematica, potrebbero dimostrare un interesse particolare per la probabilità.

– La probabilità va spesso contro l'intuizione e non di rado sorprende il senso razionale. Ne consegue che studenti fondamentalmente forti in matematica non è detto siano anche forti in probabilità. Perciò potrebbe accadere che studenti dell'opzione scientifica, tendenzialmente propensi alla matematica, sviluppino una certa antipatia per la probabilità.

Tenendo conto delle due possibili tendenze, ci si potrebbe aspettare che le differenze nell'apprendimento della probabilità, nelle diverse opzioni, non siano significative. Come interrogativo di ricerca del mio lavoro di diploma mi sono posto la domanda se ci sono delle differenze nell'apprendimento della probabilità tra una classe di opzione linguistica e una classe di opzione scientifica e, nel caso affermativo, come esse si manifestano concretamente.

Ovviamente la sperimentazione con soltanto due classi non permette di dare una risposta definitiva a questo quesito. Nelle due classi considerate però si sono potute manifestare delle tendenze che riporto in sintesi nel paragrafo 1.4.

La mia scelta di valutazione dell'apprendimento tramite TEPs mi permette di individuare le maggiori difficoltà nell'apprendimento della probabilità. Nel paragrafo 2 discuto errori e misconcezioni che si sono manifestate tra gli studenti riguardo al concetto di probabilità matematica.

1.2. Impostazione del percorso didattico
Apprendimento tramite un programma guidato

Per l'apprendimento della probabilità ho redatto una dispensa appoggiandomi al «programma guidato» proposto da Frey (dal tedesco «Leitprogramm», [Frey K., Frey-Eiling A., 2009]). La dispensa ha la seguente struttura:

1. Premessa
2. Esperimenti casuali e spazi campionari
3. Un primo approccio: la probabilità classica
4. Un secondo approccio: la probabilità frequentistica
5. Un terzo ed ultimo approccio: la probabilità soggettiva
6. Assiomi delle probabilità
7. Probabilità condizionata e indipendenza
8. Soluzioni

La dispensa è organizzata come materiale di studio autodidattico che guida il lettore fra i vari oggetti di studio ed è concepita per un arco di circa 6 lezioni. Secondo Frey il sopracitato programma guidato ha un'efficacia maggiore per quanto riguarda l'apprendimento rispetto all'insegnamento nella forma dialogata. Tra le ragioni del successo menzionato da Frey [Frey K., Frey-Eiling A., 2009], vorrei sottolineare i seguenti punti:

- Il programma guidato lavora con obiettivi univoci, che danno allo studente un orientamento chiaro.
- Il trasferimento del sapere è ben organizzato, i contenuti si fondano su strutture ben collegate tra loro.
- Gli studenti stessi controllano la velocità dell'apprendere; i veloci non si annoiano, i più lenti non vengono persi (differenziazione).
- Gli studenti imparano a organizzare il loro apprendimento.

Durante l'attività di apprendimento ho fatto attenzione ai seguenti punti:
- Lo studio della dispensa non richiede nessun prerequisito specifico; per poter seguire le argomentazioni bastano le quattro operazioni aritmetiche nonché le basi della teoria degli insiemi (unione, intersezione, differenza di insiemi), che in Ticino vengono trattate a partire dal primo anno della scuola media.
- La dispensa va intesa come primo approccio all'argomento. Nella sua realizzazione rinuncio quindi coscientemente a pretese come completezza o profondità. Questo primo contatto con la probabilità vuole concentrarsi maggiormente sulla comprensione concettuale; l'aspetto tecnico (il saper calcolare) verrà approfondito in un secondo momento.
- L'esposizione dell'argomento segue in gran parte l'evoluzione storica della probabilità. Ciò permette di «presentare agli allievi gli *ostacoli epistemologici* principali e di chiarire alcune posizioni storiche la cui debolezza è stata rivelata successivamente» [D'Amore B., Radford L., Bagni G. T., 2006, p. 2]. Inoltre una tale esposizione permette allo studente di sviluppare una sua logica induttiva: egli non viene, come succede purtroppo molte volte nell'insegnamento della matematica, confrontato con risultati completi e concetti astratti generali, dai quali vengono derivati i concetti intuitivi come casi particolari.
- Il testo è arricchito di cenni storici che nel loro approccio aneddotico possono stimolare lo studente [D'Amore B., 2004, p. 21]. Inoltre offrono la possibilità di indurre delle riflessioni fondamentali sulla genesi di un concetto [D'Amore B., Radford L., Bagni G. T., 2006, p. 3].
- L'utilizzo ripetuto di esempi in molteplici variazioni permette allo studente di agganciare nuovi concetti a conoscenze già acquisite.
- Ho cercato di utilizzare un linguaggio immediato e coinvolgente, che commenta, non senza una certa ironia, successi e sconfitte dei diversi tentativi matematici. Con domande esplicite, il lettore è incoraggiato a riflettere sui problemi.

1.3. Valutazione dell'apprendimento tramite TEPs

Per valutare le competenze degli studenti relative a un argomento specifico in matematica, si utilizzano quasi esclusivamente le prove scritte [D'Amore, Maier, 2002, p. 164]. Applicando questo unico mezzo di valutazione si corre però un rischio: si valuta il saper calcolare, quindi una capacità piuttosto meccanica e facilmente allenabile, senza però prendere in considerazione conoscenze più profonde sulla vera comprensione raggiunta dello studente. Cito Impedovo [Impedovo M., 2010, p. 1]: «La scuola, storicamente, ha privilegiato la sintassi (l'addestramento) alla semantica (l'apprendimento).»

Perciò tanti didatti propongono ulteriori metodi di valutazione, come per esempio la produzione di testi scritti autonomamente da parte degli studenti. Esistono molte proposte in questo senso, e a seconda dell'autore cambiano il nome e l'impronta.

Selter propone nella sua dissertazione [Selter C.,1994] le «Texteigenproduktionen» (TEPs) ovvero «produzioni testuali autonome», che danno spunto a numerose ricerche nell'area italofona da parte di D'Amore ed altri. Tra le numerose funzioni didattiche dei TEPs mi sono focalizzato su quello riguardante il docente: «I TEPs consentono all'insegnante di valutare in modo effettivo la conoscenza personalmente costruita e la comprensione di idee matematiche, in maniera più dettagliata e profonda di quanto sia possibile sulla base dei comuni testi scritti, normalmente eseguiti come protocolli di attività di problem solving non commentati.» [D'Amore, Maier, 2002, p. 147].

Ovviamente il semplice uso di TEPs non può sempre garantire risultati positivi. Una prima difficoltà consiste nell'avviare gli studenti: per ottenere una visione profonda della loro comprensione, bisogna assicurarsi che essi indirizzino i loro TEPs a qualcuno che ha bisogno di tutte le informazioni, per esempio ad un compagno di classe che ha mancato delle lezioni o ad un fratellino più piccolo che chiede «Cos'è la probabilità?». Nel caso che non si specifichi il destinatario, gli studenti tendono ad identificarlo con il loro docente, che essi reputano onnisciente ed a cui non bisogna dare delle spiegazioni dettagliate. Qui di seguito riporto il testo consegnato agli studenti come istruzione per scrivere il TEP.

Ultimo esercizio

«Per capire quest'argomento fin in fondo, devo dapprima tenere una conferenza su di esso.»
Da decenni questa frase gira tra i professori universitari e rispecchia una verità lapidaria: spiegando si impara. Visto che uno studente come te, che ha appena imparato un nuovo argomento, conosce gli scogli da aggirare molto meglio di ogni docente, ti prego di metterti per un istante nei panni di un insegnante di sostegno: ad un alunno della quarta media, che non ha mai sentito parlare di probabilità, devi dare una piccola introduzione su questa tematica. Lasciando da parte tutto il bagaglio della tecnica matematica ed agganciandoti agli esempi più intuitivi, prova a spiegargli i concetti di base di questa disciplina e prova a contagiarlo con il tuo entusiasmo!

I concetti che il tuo allievo vuole capire sono (a) *probabilità classica*, (b) *probabilità frequentistica*, (c) *probabilità soggettiva*, (d) *probabilità condizionata*, (e) *indipendenza*.

Una seconda difficoltà è rappresentata dall'analisi e dall'interpretazione dei TEPs. «In realtà non è quasi mai una cosa semplice individuare i concetti matematici, i pensieri e le idee che sono alla base dei testi prodotti dagli allievi» [D'Amore, Maier, 2002, p. 148]. Discuto di questa problematica nel paragrafo 3.

1.4. Panoramica sul livello di comprensione raggiunto dagli allievi

Per poter confrontare le due classi, relativamente alla comprensione raggiunta dagli studenti, ai cinque argomenti (a)-(e) sono stati attribuiti tra 0 e 2 punti, come segue:

- **0 punti**: l'idea non è afferrata o contiene errori o misconcezioni; l'argomento non viene trattato.
- **1 punto**: le idee principali sono presenti, però descritte in modo piuttosto vago. Per esempio: l'argomento viene soltanto descritto teoricamente, senza riferimento a un esempio; l'argomento viene spiegato con l'aiuto di un esempio troppo particolare; l'argomento viene discusso con l'aiuto di più esempi, però l'esecuzione non è priva di errori.
- **2 punti**: l'argomento viene spiegato in modo inequivocabile e con l'aiuto di esempi.

Con la valutazione dei cinque argomenti (a) *probabilità classica*, (b) *probabilità frequentistica*, (c) *probabilità soggettiva*, (d) *probabilità condizionata*, (e) *indipendenza*, si possono raggiungere al massimo 10 punti. I seguenti istogrammi (figura 1.1) mostrano i risultati ottenuti nelle due classi. Mediamente la classe 3F ha raggiunto un livello di comprensione leggermente più alto rispetto alla classe 3A.

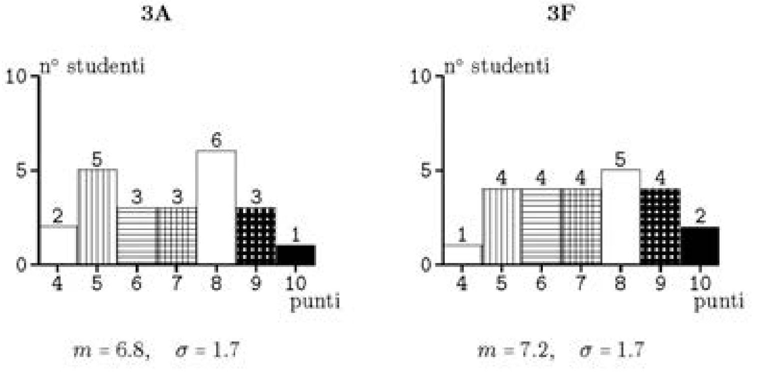


Figura 1.1. Panoramica della comprensione.

Riassumendo, si è potuto notare che la classe 3A (opzione linguistica) ha dimostrato un interesse vivo per la probabilità, che gli studenti erano motivati a capire la matematica e che erano disposti ad impegnarsi, sia durante le lezioni sia svolgendo compiti a casa. Dall'altro lato, hanno mostrato un'autostima piuttosto fragile, sottovalutando le loro capacità tutt'altro che scarse. Si sono arresi spesso e troppo velocemente anche davanti a ostacoli sicuramente superabili.

Inoltre, dall'elaborazione dei TEPs, risulta che questi studenti hanno assimilato correttamente i contenuti matematici.

L'interesse della classe 3F (opzione scientifica) per la probabilità è da collocare tra il vivo e l'entusiastico, con la restrizione che l'impegno si limita alle ore scolastiche. Un’elevata autostima permette agli studenti di rendersi accessibili a nuovi concetti, però molti di loro rischiano, con il loro approccio molto pragmatico, di limitarsi ad un apprendimento superficiale.

L’analisi dei TEPs mostra che gli studenti di entrambe le classi hanno raggiunto, per lo più, un buon livello di comprensione, anche se i TEPs redatti dalla classe 3A, più corti e con pochi elementi di stimolo, sono da considerare come indizi di una motivazione e sicurezza inferiori a quelle presenti negli studenti della classe 3F.

2. Classificazione ed interpretazione degli errori e misconcezioni

In questo paragrafo mi focalizzo sulla comprensione dei singoli argomenti. Per l’analisi e il confronto utilizzo il punteggio esplicitato sopra. Oltre ad una valutazione della comprensione, categorizzo gli errori specifici e le misconcezioni che si sono manifestati nei TEPs.

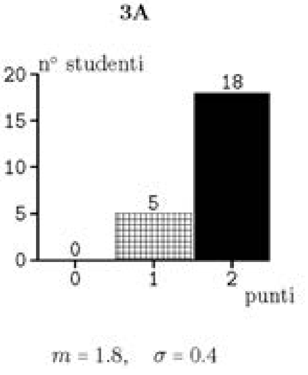
Il numero di errori e misconcezioni però è troppo piccolo da poter essere attribuito agli studenti di una classe piuttosto che a quelli dell’altra; un confronto tra le due classi non sarebbe sensato. La loro classificazione permette però una profonda visione degli ostacoli nell’apprendimento della probabilità.

Per ogni argomento darò prima una visione d’insieme sulla comprensione raggiunta, per poi passare agli errori. L’esame dei vari argomenti sarà introdotto da esempi che ritengo riusciti, perché personalmente ritengo corretto dedicare anche un minimo spazio ai successi, per così contribuire alla lotta contro la *degenerazione professionale*; a mio parere i pedagogisti si concentrano spesso e volentieri soltanto sugli insuccessi, dimenticando che il docente lavora *anche* per i bravi.

Per rendere anonimi i TEPs, i nomi sono stati sostituiti con numeri, ai quali è stata aggiunta la lettera A (per la classe 3A) rispettivamente F (per la classe 3F). È da notare che questi testi sono stati trascritti letteralmente, lasciando volutamente gli errori grammaticali e sintattici degli studenti.

2.1. Probabilità classica

La distribuzione dei punteggi nei seguenti due istogrammi (figura 2.1) mostra che la maggior parte degli studenti descrive la probabilità classica in modo perfetto. Molti basano la descrizione su più di un esempio ed esplicitano anche dei calcoli.



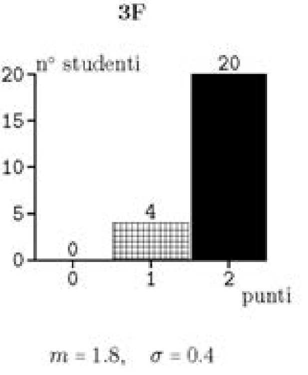


Figura 2.1. Comprensione della probabilità classica.

Esempi riusciti

16A: *Immagina un sacchetto contenente 8 palline. 5 palline sono bianche e 3 sono nere. Intuitivamente viene da dire che è più probabile che si peschi una pallina bianca, poiché nel sacchetto ce ne sono di più. Cerchiamo di capire come questa intuizione si possa verificare. La probabilità classica si calcola facilmente con la frazione: casi favorevoli/casi possibili. Calcoliamo la probabilità che pescando a caso dal sacchetto esca una pallina bianca: p(pallina bianca)=5/8. Ora invece la probabilità delle palline nere: p(nere)=3/8. La nostra intuizione era perciò giusta, poiché 5/8 > 3/8.*

8F: *Cominciamo dalla probabilità classica: se lanci una moneta, ammettendo che non sia truccata, qual'è la probabilità che esca testa? I due risultati possibili del lancio sono o «testa» o «croce», perciò le probabilità per ciascuno ½ e ½. Un altro esempio può essere il lancio di un dado. Ammettendo che anche quest'ultimo sia equo, qual'è la probabilità che esca «5»? I risultati possibili sono {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Perciò la probabilità risulta di 1/6.*

Un ulteriore esempio puoi ottenere prendendo in considerazione la tua classe. Se il tuo docente di matematica dopo aver corretto un lavoro scritto comunica che un solo allievo ha ottenuto un risultato ottimo (spero che sia tu!), qual'è la probabilità che si tratti di una ragazza? Per risolverlo dovrai calcolare il numero di ragazze sul numero totale di allievi della tua classe. Più in generale per calcolare la probabilità classica si procede nel seguente modo:

probabilità = «numero casi favorevoli» / «numero casi possibili»

2.1.1. Probabilità classica versus probabilità in generale

13F: *La probabilità classica è la probabilità che un certo evento si avveri.*

14F: *Con la probabilità classica è possibile sapere con che probabilità, per esempio, esca testa o croce con il lancio di una moneta oppure esca un dato numero tirando un dado.*

I due studenti 13F e 14F attribuiscono alla probabilità classica quello che sarebbe la caratteristica, in generale, peculiare a tutte le probabilità. Penso però che in questi due casi si tratti piuttosto di errori di disattenzione che non di misconcezioni. Chiedendo ulteriori informazioni agli studenti del tipo «E come si distingue per esempio la probabilità classica da quella frequentistica?», essi si accorgerebbero che la descrizione data non è specifica per la probabilità classica.

2.1.2. Probabilità classica come probabilità di un evento elementare

I tre 6A, 7A e 24F descrivono la probabilità classica come probabilità di un evento elementare.

6A: *Per probabilità classica si intende la probabilità che avvenga un caso specifico su tutti i casi possibili.*

7A: *Allora, per quanto riguarda la probabilità classica, si considera che avvenga un caso particolare rispetto a tutti i casi possibili.*

24F: *[...] In poche parole fai 1 fratto il numero di casi possibili.*

Nei TEPs di questi studenti, si può leggere come esempio il lancio di una moneta, l'esempio nel quale coincidono gli eventi qualsiasi con gli eventi elementari. Considerando le affermazioni sopracitate di 6A e 7A, una domanda di chiarimento potrebbe mostrare che si sono soltanto sbagliati nella formulazione. Invece la «ricetta» per il calcolo della probabilità, formulato da 24F, indica che esso esclude eventi consistenti di più di un elemento.

2.1.3. Probabilità classica per spazi campionari piccoli

Interessante è la caratterizzazione che 10A riferisce della probabilità classica:

10A: *La probabilità classica si usa per casi piuttosto facili con pochi possibili esiti.*

Se con *facile* intende i casi equiprobabili per i quali si avvera la nostra intuizione, lo studente è nel giusto; esso sbaglia però, se vede nella probabilità classica quella che si utilizza per spazi campionari piccoli. Questa misconcezione può essere causata dall'approccio alla probabilità senza conoscenze della combinatoria, per il quale mi sono dovuto limitare ad esempi con spazi campionari valutabili; in momenti successivi, nel capitolo combinatoria, lo studente riconoscerà che la probabilità classica è appunto quella che rimane applicabile anche per spazi campionari grandi.

2.2. Probabilità frequentistica

Molti studenti danno buone spiegazioni della probabilità frequentistica. L'idea centrale di dover raccogliere dati statistici per poter individuare delle probabilità di eventi, che avvengono con frequenze imprevedibili, è stata capita dalla maggioranza. Invece il concetto del limite è stato descritto soltanto da quattro studenti.

Inoltre, dall'analisi di questo argomento risulta che alcuni studenti non hanno capito il concetto della probabilità in generale. Una probabilità va interpretata nel senso probabilistico e non nel senso assoluto, cioè non come affermazione precisa o previsione esatta sull'esito di un esperimento (cfr. 2.2.1.).

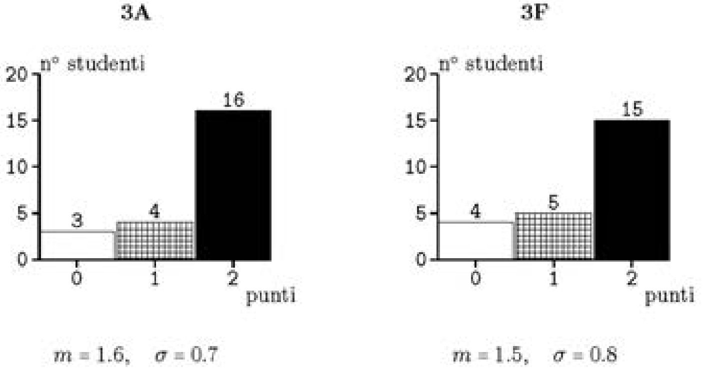


Figura 2.2. Comprensione della probabilità frequentistica.

Esempi riusciti

8F: *Riprendiamo in considerazione l'esempio del lancio del dado possiamo dire che più volte lanci il dado, più la probabilità sarà precisa. Se ad esempio dopo 300 lanci ogni numero è uscito più o meno lo stesso numero di volte potrai dedurre che il dado sia equo. [...]*

Attenzione! La probabilità non è una certezza! Se dopo 300 lanci effettuati il numero «6» esce 10 volte, sebbene la probabilità che questo succeda è molto piccola non essendo però nulla è comunque possibile. È il caso!

10F: Tuttavia non sempre nella realtà si riscontrano con sicurezza le previsioni della probabilità, infatti se lanci una moneta ed esce testa non è sicuro che al secondo lancio esca croce, nonostante la probabilità sia 50%. Inoltre se esce per la seconda volta testa, cioè due volte su due (2/2), non si può di certo dire che la probabilità di testa sia 100%. L'unico modo per avvicinarci sperimentalmente alla giusta percentuale è ripetere tante volte l'esperimento. Se lanciamo tante volte una moneta, ad esempio mille volte, quasi sicuramente i risultati ci daranno una probabilità di testa e croce di circa il 50%, per esempio se 507 volte su mille è uscita testa (50.7%).

21F: *Passiamo alla probabilità frequentistica. Questo metodo si usa quando la probabilità tra eventi favorevoli e sfavorevoli non è «intuitiva», diciamo che* *non è definibile facilmente. Facciamo un esempio: un dado truccato. La probabilità che esca un numero predefinito con un dado normale è 1/6. Un dado truccato non segue questa logica intuitiva e per trarre delle conclusioni attendibili riguardo alla probabilità che esca un numero determinato bisogna tirare e ritirare il dado più volte, marcandone i risultati. [...]*

Bisogna precisare che più lanci fai e più i tuoi risultati saranno precisi e attendibili! Questo fatto è facilmente dimostrabile: ammettiamo che tu tragga le tue conclusioni dopo 3 lanci. Ti esce una volta 1, una volta 5 e l'altra 4: questo non vuole dire che la probabilità che ti esca un 6 è uguale a zero!

2.2.1. Probabilità frequentistica per correggere la probabilità classica

Almeno otto studenti vedono nella probabilità frequentistica un approccio che corregge le imprecisioni della probabilità classica. Qui di seguito riporto una scelta rappresentativa.

14A: *Se si ripete più volte lo stesso esperimento pratico, i risultati non corrispondono a quelli della probabilità classica.*

1F: *[...] lanciando un dado molte volte si è giunti a una conclusione: gli eventi non si manifestano con la stessa frequenza. Ecco che quindi ci troviamo di fronte ad un esempio di probabilità frequentistica.*

2F: *Se su 7 estrazioni otteniamo veramente il risultato di 5 volte una pallina bianca e 2 volte una pallina nera, vuol dire che le nostre previsioni erano perfette.*

17F: *[...] se noi lanciassimo una moneta 100 volte, 50 dovrebbero uscire «testa». Purtroppo nella realtà non funziona così. Potrebbe darsi che tirando la moneta 100 volte, esca 60 volte testa e 40 croce. Non rispetta la «probabilità classica», perché bisogna confrontarsi con la realtà.*

Tutti questi esempi dimostrano due misconcezioni della probabilità.

Da un lato gli studenti vedono un valore, calcolato tramite la probabilità classica, nel senso assolutistico anziché probabilistico: se in un esperimento ripetuto, la frequenza non corrisponde alla probabilità classica, questa imprecisione risale all'imperfezione della probabilità classica; per cui a loro modo di vedere va introdotta la probabilità frequentistica per «correggere» il valore ottenuto tramite la probabilità classica.

Dall'altro lato questi studenti non afferrano il nocciolo della probabilità frequentistica: il fatto che gli eventi elementari possano verificarsi con frequenze diverse anche per asimmetrie.

2.2.2. Probabilità frequentistica simile a quella classica

I seguenti studenti non distinguono la probabilità frequentistica dalla probabilità classica in modo preciso. Essi vedono la probabilità frequentistica come probabilità classica per esperimenti ripetuti. In parte subiscono quindi la stessa misconcezione come gli studenti nel paragrafo precedente: la probabilità frequentistica si calcola sulla base di esperimenti, ma non motivano la necessità degli esperimenti come conseguenza dell'abolizione dell'equiprobabilità.

6A: *La probabilità frequentistica è un po' la stessa cosa di quella classica, solo che per calcolare la probabilità di un caso specifico bisogna fare degli esperimenti.*

2F: *La probabilità frequentistica è più o meno la stessa cosa della probabilità classica, solo che gli «esperimenti» si ripetono molte più volte. [...]*

20F: *[...] consiste più o meno nella stessa cosa, ma viene calcolata provando moltissime volte l'esperimento.*

2.3. Probabilità soggettiva

La dispensa non approfondisce l'argomento della probabilità soggettiva sufficientemente e va rielaborata per dare una visione agli studenti, più dettagliata e comprensibile. Manca ad esempio l'elemento che lo scommettitore deve stabilire la sua probabilità senza sapere quale ruolo gli tocca; egli deve essere d'accordo di assumere anche il ruolo dell'avversario. Senza questa condizione potrebbe truffare, come per esempio 8F obietta giustamente: secondo la probabilità soggettiva, se la tua fiducia sulla probabilità che si verifichi un dato evento è alta, ti conviene puntare una somma bassa.

Inoltre per quest'argomento non ho inserito degli esercizi; ciò potrebbe suscitare negli studenti l'impressione che la probabilità soggettiva non ha applicazioni reali. Da queste osservazioni ne consegue che il livello di comprensione raggiunto nella probabilità soggettiva è mediocre. Molti studenti hanno dato delle spiegazioni puramente descrittive, senza però esplicitarne i relativi calcoli.

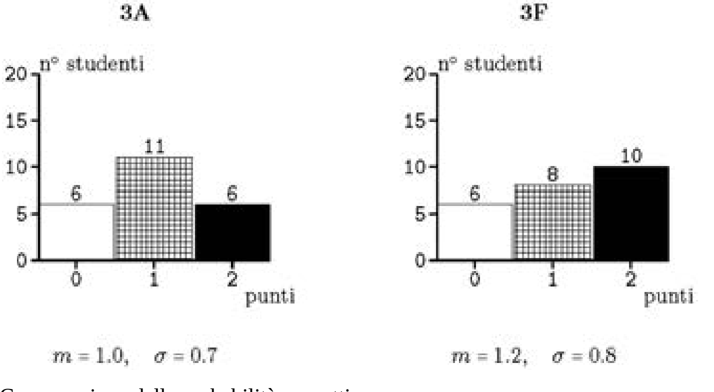


Figura 2.3. Comprensione della probabilità soggettiva.

Esempi riusciti

2A: *La probabilità soggettiva dipende dalla fiducia che una persona ha in un evento. Esempio: sono un tifoso del Locarno e sono convinto che l'anno prossimo vincerà il campionato. Scommetto quindi 90 centesimi sul Locarno. Se il Locarno vin-*

cerà il campionato guadagnerò quindi 10 centesimi mentre se perderà perderò i 90 centesimi che avevo puntato. Se ho quindi molta fiducia in un evento poco probabile rischio scommettendo tanto anche se può darsi che perda, mentre se scommetto poco ma poi l'evento si verifica guadagno tanto.

15F: *[...] Questo ci permette di introdurre il secondo tipo di probabilità: quella soggettiva. Dal significato «soggettivo» capiamo già che per ognuno questa probabilità sarà diversa.*

Aspetta, vado in pausa un attimo, ci vediamo dopo.

Ecco, per questo tipo di probabilità ci vogliono almeno due persone, che fanno una scommessa.

Esempio: due amici giocano a basket e ad un certo punto il primo dice: «scommetto che non riesci a fare due canestri di fila». Il secondo, non molto bravo a ginnastica accetta comunque la scommessa ma scommette solo 10 centesimi. L'altro, sicuro che il suo amico fallisce, ne mette 90. Il totale in palio è 1 franco e chi vince se lo tiene tutto. Centra il primo canestro e anche il secondo. L'«amico imbranato» ha vinto la scommessa! Scioccato, quello che pensava che non sarebbe riuscito, gli dà i soldi, che l'«imbranato» usa per comprare dei dolciumi (i funghetti rosa ☺). È stato fortunato, ma ha rischiato e ha vinto.

2.3.1. La probabilità soggettiva è calcolabile

5A: *Non ci si può basare su degli esperimenti o delle prove per determinare questa probabilità. [...] Per esempio una squadra di calcio, non si può sapere di preciso se vincerà o no, e non si può neanche fare delle prove, ma bisogna guardare come ha giocato le partite precedenti; allora sì che posso predire (a questo punto) l'esito delle partite.*

Inizialmente questo studente entra in modo preciso sulla problematica del non poter calcolare una probabilità, poi però nell'ultima frase parla di un evento prevedibile, cioè determinato.

9F: *[...] Se, per esempio, vado a vedere una partita di calcio, non è possibile calcolare con assoluta certezza la probabilità che la squadra in casa vinca. Posso però stimarla, analizzando certi fattori, come la posizione in classifica, infortuni... Questa forma di probabilità è importantissima nelle scommesse.*

Nella prima frase lo studente utilizza un vocabolario piuttosto contraddittorio: con il complemento «con assoluta certezza» può intendere che l'evento è prevedibile e cioè non casuale, potrebbe però anche riferirsi al fatto che non esiste un modo per calcolare la probabilità. Nella seconda frase poi dimostra una buona comprensione del concetto.

12F: *[...] Ad esempio se vado a vedere una partita di calcio e non essendo sicuro sul risultato della partita cerco di calcolare personalmente la probabilità che vinca la squadra di casa, quella fuori o se finisce pari.*

Con il verbo «calcolare», anche questo studente utilizza una parola sbagliata; ma dal contesto si può supporre che intenda una stima personale.

2.3.2. La probabilità soggettiva è arbitraria

6A: *La probabilità soggettiva non c'entra con i calcoli. Dipende solo dalle persone, perché è un po' come la probabilità che una persona decida una cosa o un'altra. Quindi non si può sapere cosa deciderà.*

Nell'ultima frase lo studente identifica la probabilità soggettiva con l'arbitrarietà. Deduco quindi che la mia osservazione nella dispensa, per la quale la probabilità soggettiva «non è un affare esoterico», non l'ha convinto. Fortunatamente è l'unico che degrada la probabilità soggettiva in questa maniera.

2.3.3. La probabilità soggettiva è complicata, astrusa, senza importanza

21F: *La probabilità soggettiva la lascio à coté, è molto astrusa e non saprei nemmeno da dove cominciare a spiegarti. Non preoccuparti, non ti perdi assolutamente niente.*

24F: *La probabilità soggettiva è un po' complicata, ma è la più inutile in quanto non la si usa mai in ambito scolastico.*

In questi due TEPs vengono uniti due elementi («complicata» e «inutile») che sarebbero indipendenti l'uno dall'altro. È da notare che 21F ha scritto un TEP piuttosto ampio, introducendo gli argomenti e dando delle ottime spiegazioni con relativi esempi per quanto riguarda la probabilità classica rispettivamente quella frequentistica. L'indisponibilità di spiegare ancora una terza probabilità può perciò anche essere causata da un certo affaticamento.

24F invece ha scritto un TEP piuttosto corto e superficiale. Dopo la frase riportata sopra, egli dà una breve spiegazione della probabilità soggettiva, ma con una demotivazione percettibile.

5F: *[...] Per finire che conta veramente è la probabilità classica!*

15F: *A me non piace la probabilità soggettiva, te la presento velocemente anche perché non è poi la più importante.*

Nei TEPs di questi due studenti vengono date delle perfette e dettagliate spiegazioni sulla probabilità soggettiva. Purtroppo nelle osservazioni sopracitate viene data una scarsa importanza ad essa. Il fatto che a loro non piace quest'approccio potrebbe essere attribuito all'immagine che possiedono della matematica: essi, apparentemente motivati e forti nella materia, preferiscono situazioni chiare, cioè calcolabili.

In tutti i testi sopracitati viene condiviso che la probabilità soggettiva è inutile o senza importanza. Riconduco questa idea alla dispensa consegnata: essa non contiene nessun esercizio per approfondire questo approccio, il che può suscitare tra gli studenti l'impressione dell'inutilità (non ci sono esercizi, quindi non verrà richiesto al test, quindi non è importante!). Che degli studenti abbiano sottovalutato l'importanza della probabilità soggettiva è da attribuire ad un «errore di apprendimento» e quindi ad un «errore di insegnamento» nel senso di Impedovo [Impedovo M., 2009, p. 1], errore che va tenuto presente per una versione futura della dispensa.

10A: *I matematici si sono poi accorti che in certi casi un approccio di questo genere [frequentistico] non è possibile perché danno un risultato troppo vago e impreciso. Quindi hanno individuato un altro metodo: la probabilità soggettiva. Ma applicare questo metodo è complicato e astratto, quindi non approfondiremo.*

19F: *[...] è un po' complicato da capire, infatti nella mia classe abbiamo discusso per un'ora su questo problema. Lascio questo compito a Michael... forse è in grado di spiegartelo meglio.*

Rispetto alle osservazioni portate da 21F e 24F, questi due studenti non mettono in dubbio l'importanza o utilità della probabilità soggettiva, anzi, 10A dà una vaga motivazione e 19F menziona la discussione tenutasi in classe, molto vivace e feconda. Però entrambi non si sentivano all'altezza della situazione per dare una spiegazione soddisfacente.

2.4. Probabilità condizionata

Tenendo conto che nella classe 3F prima dell'elaborazione dei TEPs è stato trattato il Teorema di Bayes, è piuttosto sorprendente che la comprensione nelle due classi non si distingua in modo significativo. Visto che il teorema di Bayes stabilisce il rapporto tra le due probabilità condizionate p(A/B) e p(B/A) e ciò dà un maggior approfondimento al concetto, mi sarei aspettato un livello di comprensione nettamente più alto nella classe 3F rispetto alla classe 3A.

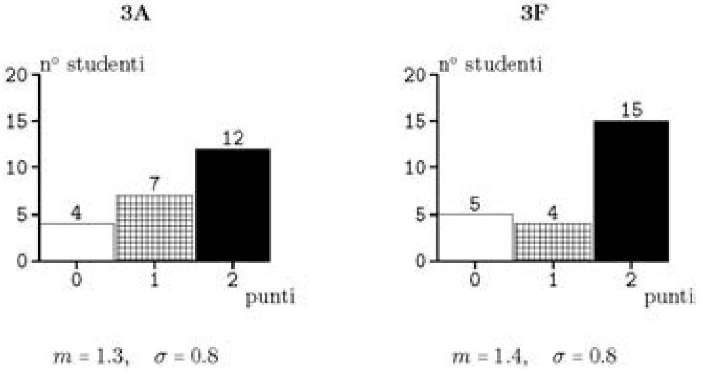


Figura 2.4. Comprensione della probabilità condizionata.

Esempi riusciti

10A: *La probabilità condizionata tiene conto di un risultato certo, influenzando così il calcolo della probabilità di un risultato incerto. [...]*

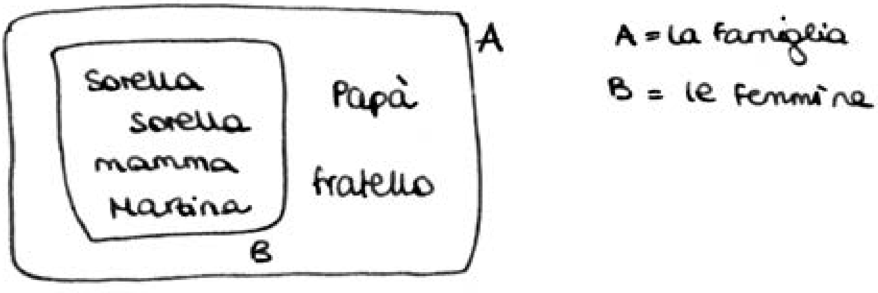
13A: *In poche parole vuole dire calcolare la probabilità che qualcosa succeda, avendo un'informazione in più. [...]*

23F: *Questo calcolo, come detto dal nome, dipende da una condizione. Ad esempio, se Martina ha 2 sorelle e 1 fratello e io chiamo a casa sua, quante probabilità ho che sia lei a dire «pronto»* ***già sapendo*** *che ha risposto una femmina?*

Se so già che è una femmina le possibilità totali sono 4 (lei, le due sorelle o sua mamma), e Marina è una sola quindi la probabilità è ¼.

Se invece non avessi detto che era una femmina il totale era 6 (tutta la famiglia). La probabilità era quindi 1/6. Vedi che cambia? È cambiato da ¼ a ⅙ perché ho messo una ***condizione****!*

Possiamo anche vedere la situazione con un diagramma:



Il fatto di mettere una condizione restringe il campo, da A passiamo a B.

2.4.1. Confusione tra probabilità condizionata e dipendenza

3F: *La probabilità condizionata è tanto importante quanto ostica: è quando un evento è INFLUENZATO da un evento precedente. Ad esempio qual è la probabilità di pescare un asso? 1/10. Senza rimettere l'asso nel mazzo, quale probabilità ho di prendere 4/39, ossia di più! Il secondo lancio è influenzato dal primo. La probabilità che il secondo evento accade dipende dal primo. Tutto chiaro? MOLTO BENE! Se non capisci chiedi al sore.*

A prescindere dal calcolo sbagliato (sarebbero 3/39, e non 4/39), lo studente descrive il fenomeno della dipendenza, ma senza chiarire il condizionamento. Questa confusione si riscontra in modo molto simile in quattro altri studenti. Due di loro spiegano l'esempio dell'urna con e senza reimmissione in modo completo, quindi la dipendenza, senza però entrare concretamente nella probabilità condizionata.

24F: *La probabilità condizionata è spiegabile con un esempio: se ho una scatola con 1 pallina bianca e 1 nera e ne tiro fuori una a caso, viene nera, e non la rimetto nella scatola, la probabilità di pescarne una bianca alla seconda estrazione è 100%. La seconda estrazione è dipendente e condizionata dalla prima.*

Questo studente prova a spiegare i due concetti in un solo colpo, un tentativo che è condannato al naufragio. La dipendenza è una relazione simmetrica, cioè due eventi possono essere tra loro dipendenti. Dalla probabilità condizionata, invece, una condizione restringe lo spazio campionario in modo che le probabilità vengano definite rispetto al nuovo spazio ristretto.

2.4.2. Probabilità condizionata come probabilità di più di una condizione

1A: *Probabilità condizionata: quando la probabilità deve soddisfare più condizioni. [...]*

20A: *La probabilità condizionata si verifica quando si impone un'ulteriore condizione. [...]*

22F: *La probabilità condizionata è quando hai diverse aspettative. [...]*

Tutti e tre gli studenti descrivono la probabilità condizionata come probabilità dell'intersezione di due eventi: $p(A \cap B)$. Visto però che gli esempi che accompagnano la teoria sono corretti, è da presumere che il concetto sia stato capito, ma che si sono impigliati nella stesura della formulazione esatta.

16A: *Lancio di un dado: Con quale probabilità il numero uscito sarà dispari? p(dispari) = 3/6 = 1/2. E questa è la probabilità classica. Ma se al nostro esperimento aggiungiamo l'informazione che il numero dispari deve essere anche primo dobbiamo tenere in conto delle due condizioni, quindi p(primo e dispari) = 2/3 perché tra le 3 possibilità di numeri dispari solo due numeri sono anche primi [...].*

Più dubbiosa è la comprensione raggiunta da questo studente: la formulazione è scorretta, l'esempio scelto è identico a quello della dispensa e perciò il risultato è giusto. Per ottenere chiarimenti si dovrebbe interrogarlo sulla differenza tra le due probabilità $p(A \cap B)$ e $p(A / B)$.

2.5. Indipendenza

Sul concetto dell'indipendenza le due classi hanno livelli di comprensione significativamente diversi.

Nella classe 3A molti studenti spiegano una variante particolare dell'indipendenza: la probabilità dell'esito del lancio di una moneta non viene influenzata dagli esiti dei lanci precedenti. Non entrano quindi nell'argomento generale.

Nella classe 3F alcuni studenti hanno lasciato completamente da parte questo argomento, per mancanza di tempo durante la lezione. Inoltre il lavoro non è stato finito a casa (4F: *Scusa, non ho più tempo... vado a mangiare la polenta! Ciaaa...*). Pochi l'hanno trattato nella stessa maniera come la maggioranza della 3A. Infine, molti studenti della 3F l'hanno esplicitato insieme alla probabilità condizionata, dando una spiegazione dettagliata e completa dell'urna con e senza reimmissione.

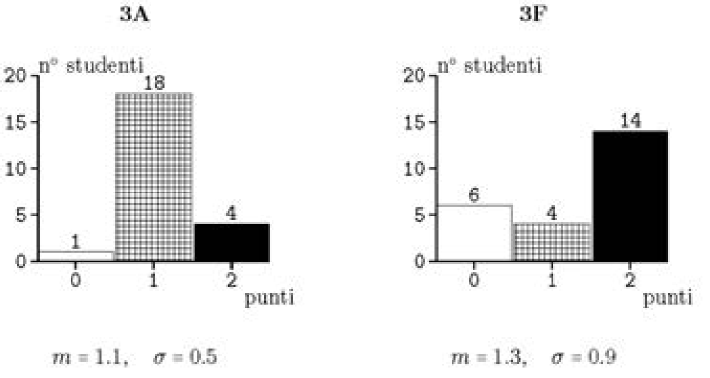


Figura 2.5. Comprensione dell'indipendenza.

Esempi riusciti

23A: *L'indipendenza c'è se A non influenza B (in p(B/A)). Nel nostro caso scegliendo i numeri dispari del dado si restringe il campo e quindi si potrebbero eliminare certe possibilità di avere numeri primi o altri numeri. Dunque la probabilità di avere numeri primi su tutte le facce è p(B)=2/6=1/3, mentre solo sui dispari è p(B/A)= 2/3≠ p(B).*

I due risultati non sono uguali e dunque sono dipendenti, perché se aggiungo A (una consegna in più) influenza la probabilità. Se p(B/A)= p(B) c'è indipendenza.

10F: *Un aspetto importante è la probabilità condizionata, che è strettamente legato al concetto di indipendenza. Immagina di lanciare un dado due volte, se al primo lancio esce sei, la probabilità che al secondo lancio esca ancora sei è 1/6, poiché il risultato di un tiro non influenza il secondo (sono indipendenti). Analogamente, se da un mazzo di carte peschi un asso, al secondo sorteggio la probabilità di un altro asso è meno probabile poiché ne rimangono solo tre nel mazzo, quindi i due eventi sono dipendenti, perché il risultato di uno influenza la probabilità dell'altro. Un altro esempio: quale probabilità hai di essere nel blocco B?*[2] *Secondo la probabilità classica ¼, secondo la probabilità soggettiva sarà maggiore di ¼ perché i blocchi C e D sono i meno usati. Tuttavia, nell'ambito della probabilità condizionata, se è data un'informazione in più il risultato cambia. Per esempio se ti dico che stai facendo matematica, allora la probabilità di essere nel blocco B sarà 0% e se sai che stai facendo laboratorio di scienze la probabilità sarà 1/3 (il blocco ha 1 dei 3 laboratori).*

2. Lo studente sa che al momento insegno alla scuola media di Losone e indirizza il suo testo ad un allievo di questa scuola. L'edificio scolastico è suddiviso in quattro blocchi A, B, C e D.

23F: *Due probabilità sono indipendenti se una non condiziona l'altra, cioè il «sapendo che» non conta niente. [...]*

2.5.1. L'indipendenza è temporale

La maggior parte degli studenti ha capito l'indipendenza unicamente nel senso temporale, e non nel senso causale: ripetendo un esperimento, la probabilità per un dato evento non cambia, cioè la probabilità di un evento è quindi indipendente dall'esito dell'esperimento precedente. In questo modo non considerano la dipendenza come restrizione dello spazio campionario in generale.

19A: *L'indipendenza è quando due probabilità sono uguali, ovvero la probabilità di un evento successivo non dipende dall'esito di quello precedente. Per esempio: se lanciamo una moneta 10 volte e otteniamo 10 volte «testa», all' 11-esimo lancio, indipendentemente dai 10 risultati ottenuti (che farebbero pensare che la probabilità di ottenere «testa» sia molto maggiore), la probabilità di ottenere «croce» sarà sempre e comunque ½.*

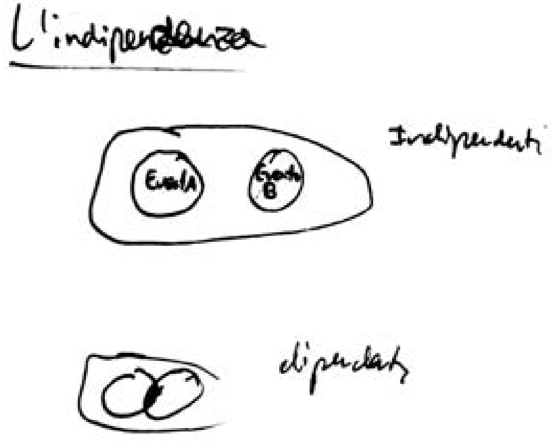
2.5.2. L'indipendenza viene confusa con l'incompatibilità

Secondo Impedovo «una tipica misconcezione è quella che confonde eventi indipendenti con eventi incompatibili» [Impedovo M., 2010, p. 14]. Preparato a questa problematica, l'ho anticipata nella dispensa con la seguente osservazione:

Attenzione: Non vanno confusi i concetti di eventi incompatibili ed eventi indipendenti. Due eventi incompatibili non sono mai indipendenti: se fossero indipendenti, varrebbe $p(A \cap B) = p(\varnothing) = 0 = p(A) \cdot p(B)$, quindi $p(A)$ o $p(B)$ sarebbe zero. In realtà due eventi incompatibili sono fortemente dipendenti: se un evento è realizzato, l'altro non lo può essere.

Lascio in sospeso, se grazie a questo avvertimento soltanto uno studente si è ingannato!

14F:



3. Conclusione: limiti nell'interpretazione dei TEPs

La lettura di testi prodotti dagli studenti è senza dubbio un ottimo mezzo per acquisire delle conoscenze più profonde sulla comprensione raggiunta da parte degli studenti. Un'analisi che si riferisce unicamente sull'interpretazione dei TEPs ha però anche i suoi limiti.

A mio modo di vedere, per ottenere dei risultati ancora più affidabili, l'elaborazione di TEPs dovrebbe essere parte integrante dell'insegnamento, e la loro analisi andrebbe accompagnata da altri metodi di valutazione quali l'osservazione, discussioni oppure le classiche prove scritte o orali.

3.1. Motivare gli studenti

Una prima problematica rappresenta il quadro motivazionale: come motivare gli studenti a scrivere dei testi di matematica. Se per essi è un quesito completamente nuovo, va introdotto con cura. Senza spiegazioni potrebbe suscitare una certa perplessità oppure addirittura un rifiuto, e se non vedono un senso nello scrivere un tema in matematica, una eventuale demotivazione può avere una grande influenza sulla qualità dei testi.

In questo esperimento ho fatto credere agli studenti che i TEPs sarebbero serviti come materiale didattico per gli allievi della scuola media. Questa bella idea, che devo alla mia DPP Larissa Cadorin, ha dato buoni risultati, ma ovviamente non è ripetibile. Ottimale sarebbe se gli studenti diventassero consapevoli del profitto dei TEPs per loro stessi, se lo vedessero come strumento che aiutasse loro ad «analizzare e a riflettere su concetti matematici» e a «tenere continuamente sotto controllo la propria comprensione» [D'Amore, Maier, 2002, p. 146]. Sotto queste condizioni i TEPs potrebbero essere introdotti nell'insegnamento come attività regolare, il che comporterebbe vari vantaggi.

3.2. Mancanza di pratica nello scrivere testi matematici

La prima volta che gli studenti sono tenuti a scrivere un TEP, le loro inibizioni sono anche da ricondurre a componenti linguistici. Per descrivere dei fatti matematici, devono appropriarsi di una parte del linguaggio specifico, trasferire il vocabolario dal lessico passivo a quello attivo. L'uso attivo della lingua influisce sull'organizzazione della memoria: conoscenze immagazzinate nella memoria logica-astratta vengono trasformate in conoscenze linguistiche. Infine l'aumento della padronanza linguistica ha un impatto positivo sulla comprensione della matematica: scrivendo dei TEPs lo studente può migliorare le sue competenze disciplinari e viene incoraggiato ad un uso attivo dei termini e dei simboli.

Ovviamente, per ottenere degli esiti significativi sulle capacità linguistiche, la scrittura di TEPs deve diventare un'attività regolare. Una certa routine porta a testi più chiari, in modo che il docente possa distinguere più facilmente tra ostacoli linguistici ed errori matematici. Non è detto che una formulazione sbagliata sia necessariamente anche una misconcezione da parte dello studente. Il docente deve sviluppare una sensibilità nel distinguere errori linguistici da errori matematici ed è tenuto anche ad una certa cautela. Testi che secondo me sono scorretti sull'uso della lingua piuttosto che sul piano matematico, si trovano per esempio al paragrafo 2.3.1.

3.3. Discussione dei TEPs con gli studenti

Un aspetto importante da considerare è la discussione dei TEPs con i singoli studenti, che purtroppo non ho potuto svolgere nel mio esperimento. In primo luogo un feedback aiuta lo studente a orientarsi e a imparare dall'analisi degli errori. In secondo luogo aiuta il docente nell'interpretazione di certi testi magari anche contraddittori. Come valutare per esempio un testo nel quale il concetto viene spiegato soltanto per un caso speciale? Significa che lo studente non ha capito il concetto in generale, o magari che non si è accorto che non l'ha trattato in modo generico? Per un esempio rinvio al paragrafo 2.1.2.

La stessa domanda si pone se lo studente descrive il concetto generale in modo sbagliato, ma esplicita correttamente gli esempi. Senza porre domande precise allo studente, il docente non può farsi un'idea conclusiva sulla comprensione raggiunta. Esempi di questo genere si trovano nel paragrafo 2.4.2.

3.4. Modalità per la stesura dei TEPs

Se un docente decide di usare i TEPs nel suo insegnamento può determinare le modalità per la loro stesura. Così per esempio potrebbe decidere che i TEPs vanno scritti senza l'aiuto del materiale, siccome vuole riconoscere quali concetti gli studenti hanno già interiorizzato. Questa condizione nel mio caso non sarebbe stata giustificabile, con la conseguenza che alcuni studenti hanno riciclato quasi letteralmente degli esempi della dispensa. In questi casi un giudizio sulla comprensione dello studente diventa difficile: ha scelto quell'esempio perché gli è piaciuto, per comodità, o ha copiato dalla dispensa perché non l'ha capito? Riporto un esempio:

9F: *Infine c'è un'ultima forma, la probabilità condizionata. Un esempio per spiegarla: lancio un dado, ci sono 6 possibili risultati (ognuno con una probabilità di 1/6). Esce un numero dispari (1 o 3 o 5). Con che probabilità si tratta di un numero primo? Su un dado ci sono tre numeri primi (2, 3, 5), ma visto che il risultato è dispari può essere solo il 3 e il 5. Di conseguenza la probabilità è 2/3.*

Lo studente segue nella sua esposizione strettamente la mia dispensa. Non conoscendolo, potrei supporre che esso non ha capito il concetto. Considerando però tutto il TEP, scritto in modo piuttosto superficiale ed incompleto, tendo piuttosto alla variante della comodità.

Questa osservazione ci porta a un altro punto concernente le modalità di stesura: per escludere che alcuni studenti scrivano dei TEPs superficiali o incompleti, si potrebbe prendere in considerazione di dare dei voti. Ovviamente si dovrebbe trovare una modalità adatta, che non trasformerebbe i TEPs in altri esami scritti, con l'unica differenza che i voti ottenuti per i TEPs sembrerebbero arbitrari agli occhi degli studenti. Personalmente vedo la possibilità di utilizzare un punteggio come effettuato in questo lavoro. Con la scelta fra solo tre alternative (0 punti: insoddisfacente, 1 punto: comprensibile, 2 punti: buono), i sospetti di arbitrarietà possono essere confutati. Inoltre si potrebbe usare la somma dei punti conseguiti durante tutto l'anno come indicatore per arrotondare il voto finale, così il docente può indurre gli studenti più facilmente a prendere sul serio l'elaborazione dei testi. In questo modo, il docente si vede meno confrontato con la problematica del dover decidere tra incompletezza come non comprensione e incompletezza come pigrizia.

Bibliografia

D'Amore B., Maier H. (2002). Produzioni scritte degli studenti su argomenti di matematica (TEPs) e loro utilizzazione grafica. *La matematica e la sua didattica, n. 2,* pp. 144-189.
D'Amore B. (2004). Il ruolo dell'Epistemologica nella formazione degli insegnanti di Matematica nella scuola secondaria. *La matematica e la sua didattica, n. 4*, pp. 4-30.
D'Amore B., Radford L., Bagni G. T. (2006) Ostacoli epistemologici e prospettiva socio-culturale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 19B, 1*, pp.11-46. http://www.syllogismos.it/education/Dam-Rad-Bag.pdf
Frey K., Frey-Eiling A. (2009) *Ausgewählte Methoden der Didaktik*. Zürich: VdF Hochschulverlag AG.
Impedovo M. (2009). *Introduzione al Piano degli Studi Liceali per la matematica*. Dispensa del corso Matematica -Il Piano degli studi di matematica per le scuole medie superiori tenuto al DFA (22.09.2009).
Impedovo M. (2010) *Probabilità 2, Assiomi: chi è Kolmogorov?* Dispensa del corso Matematica - Il Piano degli studi di matematica per le scuole medie superiori tenuto al DFA (09.02.2009).
Selter C. (1994). *Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Primarstufe*. Wiesbaden: Dt. Universitätsverlag.
http://www.mathematik.unidortmund.de/ieem/_personelles/selter/material/material.htm

1. Matematica discreta da portare in classe

Mauro Cerasoli[1]

1. Premessa

L'insegnamento della matematica è oggetto di discussione da tanti anni in tutte le sedi competenti: scuola, convegni, riviste, siti ecc.. La parola più usata nei dibattiti e nelle pubblicazioni o nei libri è «rinnovamento». Il problema mi fa ricordare una battuta su quei due cattolici che ripetevano spesso «vogliamoci bene» ma che poi venivano alle mani quando si trattava di stabilire cosa è il «bene». Lo stesso accade per il «rinnovamento dell'insegnamento (o della didattica) della matematica». Siamo tutti d'accordo su questo ma poi si litiga quando si va a discutere su «che rinnovamento fare». Ad esempio, l'uso delle tecnologie, ovvero dei computer e relativi software di matematica. Quasi tutti gli addetti ai lavori dicono che ormai è tempo di utilizzare queste tecnologie, che noi in Italia siamo indietro rispetto agli altri paesi più industrializzati, ma poi ci dividiamo quando si deve decidere come e quando, cioè come passare dalle parole ai fatti. Basti pensare che all'esame di stato del Liceo Scientifico è ancora vietato l'uso della calcolatrice programmabile. Il burocrate del MIUR forse non sa che ormai quasi tutto è già programmato e sta dentro al software stesso bello e pronto. Il programmare è un altro problema che interessa più gli informatici (cioè i matematici che si chiamano anche informatici) che non i matematici classici.

Un altro «bene» su cui si litiga sono i *contenuti*. La domanda numero uno è: che cosa insegnare ora che ci sono i computer? Vogliamo continuare solo con limiti, derivate e integrali oppure integrare il piatto con tutta quella matematica che non è mai insegnata e che poi si ritrova sui giornali? Ad esempio il sudoku o gli istogrammi? I giornali sono pieni d'istogrammi, ma molti studenti si diplomano (e molti si laureano in matematica) senza che nessuno abbia mai detto loro cosa sia un *istogramma*! Vanno al cinema, vedono cartoni animati con tanto di figure belle e misteriose, ma nessuno ha mai detto loro cosa è un frattale né cosa è un *numero random* necessario per programmare i video giochi.

1. Università della Basilicata, *maurocerasoli@gmail.com*

Si è applaudito quando si sono rinnovati i programmi con l'introduzione della probabilità e della statistica. Purtroppo questo è avvenuto solo sulla carta, ma non nelle aule. Perché? La risposta è semplice e nota a pochi. Il burocrate del MPI prima e del MIUR dopo, indipendentemente da chi occupava Palazzo Chigi o la poltrona di Ministro, preparava due temi all'esame di stato: uno di matematica classica (studio di funzioni ecc), l'altro di probabilità e statistica, invitando il candidato a svolgerne solo uno. Il candidato, che non era fesso, sceglieva il primo tema perché il docente, durante l'anno aveva svolto solo quegli argomenti. Un anno, forse nel 2000, al Liceo Scientifico di Lanciano (CH) dove ero Presidente di Commissione, tutti e 72 i candidati scelsero il tema classico. La stessa cosa avveniva per il latino: da quando all'esame non si dava più la versione dal latino all'italiano, i docenti di latino si sono ben guardati dal far tradurre Cicerone, Orazio ecc.. E questo si chiama studiare latino? Per analogia, fare solo parabole, cerchi, limiti, derivate e integrali si chiama studiare matematica?

Se mi fossi azzardato a chiedere a un candidato cosa è un numero primo, rischiavo di essere denunciato per «*aver messo in difficoltà il candidato con domande non pertinenti al programma svolto*».

Anni fa una collega di Meta di Sorrento mi diceva che lei collaborava con un professore dell'Università di Napoli e che facevano ricerca in didattica della matematica. Su che argomenti chiesi io. Sulle geometrie non euclidee, rispose lei. Quali? Replicai. Mi guardò in modo strano e sicuramente stava pensando: ma non può essere che Mauro non conosca le geometrie non euclidee se mi chiede: quali? Così imbarazzata rispose: quelle ben note di Lobachewski e di Riemann. Al che aggiunsi: e le altre non le studiate? Quali altre, rispose. Non ce ne sono di altre, in quanto l'assioma delle parallele lo puoi cambiare solo dicendo che non ce ne passa nessuna o che ce ne passano infinite, di rette parallele. E allora calai il mio asso di briscola dicendole: queste sono quelle che negano l'assioma n° 5 sulle rette parallele. Poi ci sono le altre, quelle che negano l'assioma seguente: *una retta ha infiniti punti*. Si chiamano *geometrie finite* e a Napoli ci sono ottimi ricercatori a livello mondiale in questo settore. Sarebbe molto bello se tu in classe, invece di mettere in crisi gli studenti con l'infinito (un concetto che assomiglia a un serpente a sonagli o a un cobra) che andrebbe presentato il più tardi possibile, vista la sua difficoltà, facessi conoscere…

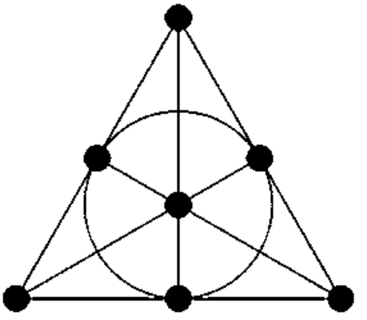
2. Il piano di Fano

… così, nell'ambito del *problem solving*, faresti risolvere questo problema:

Sette pompieri (o infermieri, poliziotti, medici, carabinieri, ecc,) costituiscono la caserma dei vigili del fuoco di una città. Devono fare i turni di notte per ogni settimana con le seguenti regole.

a) Ogni notte devono essere presenti tre pompieri
b) Ogni pompiere deve fare tre turni.

Ora la soluzione non richiede l'uso di derivate (qui non ci sono spazio e tempo, anche se si parla di settimana e di caserma) ma il *grafo di Fano* risolve il problema.



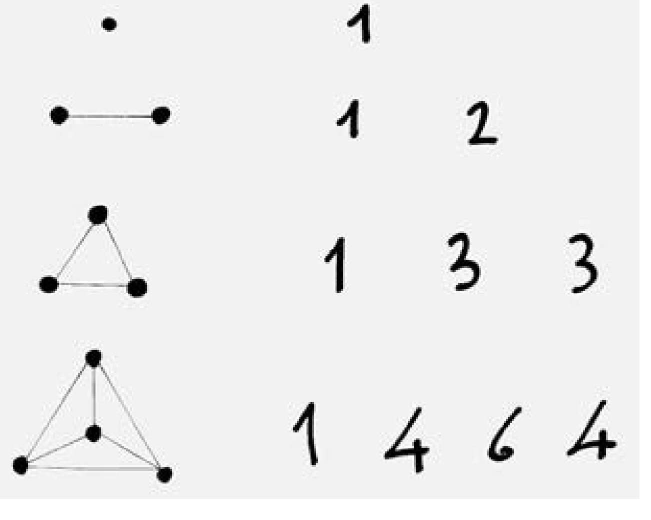
I sette nodi (*punti*) che possiamo indicare 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
corrispondono ai pompieri. Le sette terne di nodi allineati o sul cerchietto (dette *rette*)

{1,2,4}, {2,3,5}, {3,4,6}, {4,5,7}, {5,6,1}, {6,7,2}, {7,1,3}

costituiscono i turni di guardia settimanali. L'insieme dei sette punti con l'insieme delle sette rette costituisce il *piano di Fano*. Esso è un esempio di Geometria Finita, ovvero di uno spazio geometrico finito (*piano proiettivo*) con le seguenti proprietà (assiomi):

- per ogni punto del piano passano tre rette
- per ogni coppia di punti passa una e una sola retta
- ogni coppia di rette si incontra in uno e un solo punto
- data una retta e un punto esterno ad essa, non esiste retta passante per il punto e parallela (con intersezione vuota) alla retta data.

Qualcuno potrebbe dire, non facciamo solo limiti e derivate ma anche calcolo combinatorio. Va bene, ma un calcolo combinatorio monco! Il triangolo di Tartaglia è stato mai illustrato con le figure seguenti?



dove per

– n = 0, Punto: hai un punto ,
– n = 1, Segmento: hai una parte interna e due punti estremi
– n = 2, Triangolo: hai tre vertici, tre lati e una superficie; 1, 3 e 3,
– n = 3, Tetraedro: ha 4 vertici, 6 spigoli, 4 facce e una parte solida.

E poi, per n =4? Quando si studia il triangolo di Tartaglia chi ha mai fatto queste figure?

3. Quadrati latini e grafi

Un altro problema che si presenta in agricoltura è il seguente: abbiamo quattro varietà di grano e quattro tipi di terreno. Come organizzare una semina economica per saggiare contemporaneamente tutti i tipi di grano e di terreno?

Se indichiamo con a, b, c, d le varietà di grano, una soluzione è il seguente *quadrato latino.*

a	b	c	d
b	c	d	a
c	d	a	b
d	a	b	c

Ma dove sono i teoremi? La matematica è fatta di teoremi! Ed allora facciamo questa domanda: qual è il teorema più *semplice*? In matematica la parola semplice, anche se spesso usata, non è mai stata ben definita. Allora aggiungiamo: qual è il teorema che si può introdurre per primo nella scuola, per esempio alle elementari o all'asilo? Certo non quello di Pitagora. Io propongo il seguente preso dalla *teoria dei grafi*.

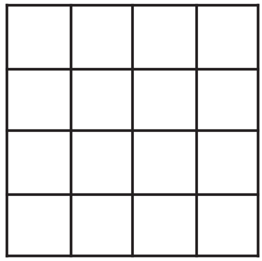
Un albero di n nodi ha n-1 lati.

Intanto si faccia avanti chi vuol fornire una semplice dimostrazione dopo aver definito rigorosamente che cosa è un *albero*. Spesso si parla di *diagramma ad albero* senza aver mai definito il concetto matematico di albero. Il teorema non è per nulla interessante, né curioso e sembra piuttosto banale, anche se non del tutto evidente. E allora una seconda domanda: qual è il teorema più semplice che ha pure qualche altra proprietà come l'eleganza e la meraviglia? Risposta mia:

In un grafo planare vale la formula di Eulero

nodi – lati + facce = 1

Nel grafo estratto dal quadrato latino di sopra



ci sono 25 nodi, 40 lati e 16 facce ed infatti:

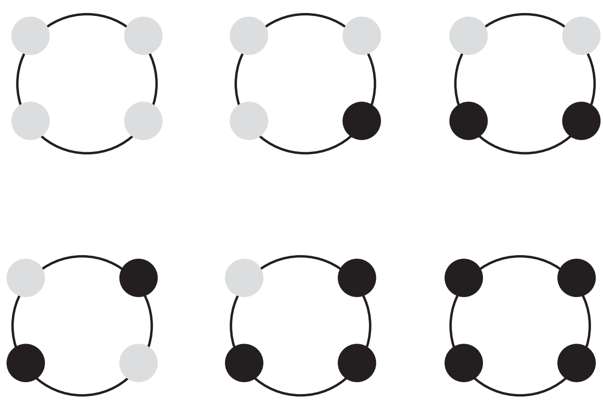
25 – 40 + 16 = 1

Ma queste sono cose troppo semplici, valgono per le elementari o per le scuole medie. Cosa si può fare alle superiori?

4. La funzione aritmetica di Eulero

Ad esempio si potrebbe parlare della *formula delle collane*. Se hai *m* tipi di perle e vuoi farci una collana utilizzandone *n*, quante collane differenti puoi fare? Per m = 2 (le perle sono **a =** grigio e **b =** nero) ed n = 4 ci sono solo 6 modelli di collane:

aaaa, aaab, aabb, abab, abbb, bbbb



Ovviamente le *permutazioni circolari con ripetizione* di sopra corrispondono alle collane quando la prima perla si unisce all'ultima per fare la collana. E in generale? Il numero di collane è dato dalla formula

$$\frac{1}{n}\cdot\sum_{d|n}\varphi(d)\cdot m^{n/d}$$

dove la somma si intende estesa a tutti i divisori di n e $\varphi(d)$è la *funzione aritmetica di Eulero* che conta il numero di numeri minori di d e primi con d.

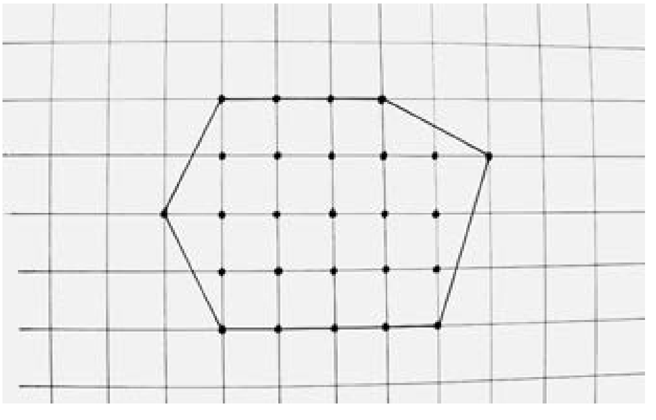
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4

Qualcuno potrebbe dire: e la dimostrazione? La risposta è: e la dimostrazione che l'area della sfera è quattro pigreco erre due? O che il volume della sfera è quattro terzi pigreco erre tre? Quando mai vengono svolte? E poi chi l'ha detto che bisogna dimostrare tutto? Con quella formula lo studente viene a sapere che ci sono anche le *funzioni aritmetiche* oltre a seno, coseno, logaritmo, ecc, cioè le funzioni che sono nate prime di queste.

Se venissero introdotte prima le funzioni discrete, si capirebbero meglio tante proprietà delle funzioni di variabile reale e dei loro integrali. L'esempio classico è che la funzione aritmetica n! ha dato ad Eulero lo spunto per introdurre la sua *funzione gamma*. Infatti $\Gamma(x)$ è un fattoriale quando x è un numero naturale.

5. La misteriosa formula di Pick

Una formula della matematica, poco nota, è quella di Pick[2] del 1899. Consideriamo il quaderno a quadretti, ovvero quello che le maestre chiamano il *geopiano*. In altri termini, consideriamo i nodi del quaderno, cioè le intersezioni delle rette. Fissati alcuni nodi, possiamo considerare il poligono racchiuso da loro, come nella figura seguente.



La formula di Pick ci dà l'area di un tale poligono quando l'unità di misura è la distanza tra le rette. Basta conoscere:

2. Vedere anche i seguenti articoli su questa rivista: di G.T. Bagni sul numero 33, di F. Cavalli sul numero 51 e di L. Maurizi sul numero 56.

a) il numero *i* di nodi interni al poligono (15 nella figura) ,
b) il numero *b* di nodi che si trovano sui lati che formano il poligono, che stanno sul bordo del poligono (11 nella figura).

Allora l'area del poligono vale

$$i - 1 + b/2$$

($15 - 1 + 11/2 = 39/2$ nel nostro caso).

Sarebbe interessante conoscere una dimostrazione elementare di questa formula.

6. Le proprietà del numero 153

Si legge nel Vangelo secondo Giovanni che Simon Pietro tirò a riva la barca con la rete colma di ben 153 pesci. Perché 153 e non 150 o 155? Forse arcani misteri si nascondono dietro il 153? Quali? In verità questo numero ha qualcosa di magico. Intanto soddisfa alcune proprietà aritmetiche di fronte alle quali solo i minerali più grezzi restano indifferenti:

$$1+2+3+4+...+16+17 = 153$$

$$1^3 + 5^3 + 3^3 = 153$$

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! = 153.$$

Ci sono soltanto altri tre numeri, oltre a 1 e 153, che sono uguali alla somma dei cubi delle loro cifre: 370, 371 e 407. Queste curiose proprietà appartengono a 153 dalla notte dei tempi e potrebbero dare della matematica quell'idea, sbagliata, che sia una disciplina che tratta cose vecchie quanto il mondo. E che dire allora di quest'altra meravigliosa proprietà del numero 153 scoperta dal matematico israeliano Phil Kohn nel 1961?

Prendete un qualsiasi numero multiplo di tre, sommate i cubi delle sue cifre, poi sommate i cubi delle cifre del risultato ottenuto e così via. Riuscite ad indovinare cosa apparirà alla fine? Facciamo una prova col numero 162:

$$1^3 + 6^3 + 2^3 = 225;$$

$$2^3 + 2^3 + 5^3 = 141;$$

$$1^3 + 4^3 + 1^3 = 66;$$

$$6^3 + 6^3 = 432;$$

$$4^3 + 3^3 + 2^3 = 99;$$

$9^3 + 9^3 = 1458$;

$1^3 + 4^3 + 5^3 + 8^3 = 702$;

$7^3 + 2^3 = 351$

et voila $3^3 + 5^3 + 1^3 = 153$.

Ora, ripetendo l'algoritmo, avremo sempre il numero 153 di Simon Pietro (o dell'evangelista Giovanni). Il 1961 non è un anno tanto lontano; ci si lamenta spesso che la Storia insegnata nelle nostre scuole si ferma troppo presto e che non tratta gli avvenimenti della seconda metà del secolo scorso. Almeno parla della prima guerra mondiale! E la Matematica? Di che secolo è l'argomento più giovane di matematica studiato dai nostri ragazzi? In certe scuole non ci si ferma che alla fine del '600?

7. Il problema del collezionista

Le somme parziali della serie armonica hanno un'interessante proprietà probabilistica. Servono per risolvere i seguenti problemi: quante figurine bisogna raccogliere per riempire un album di n caselle? Quanti figli bisogna fare per avere un maschietto e una femminuccia? Quanti lanci sono necessari per vedere uscire tutte le facce di un dado? Quanti lanci sono necessari per vedere uscire tutte le facce di un n-dado (un dado con n facce)?

Si può dimostrare che il numero medio di figurine da acquistare per riempire l'album, quando non è possibile fare scambi di figurine doppioni, e tutte sono distribuite a caso nelle bustine, è

$$n \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$$

La tabella seguente fornisce alcuni valori fino a 6.

Variabile aleatoria	media
2 Moneta	2 (1 + 1/2) = 3
3 Trottola	3 (1 + 1/2 + 1/3) = 5,5
4 Piramide	4 (1 + 1/2 + 1/3 + 1/4) = 8,3
5 Pentagono	5 (1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5) = 11,416
6 Dado	6 (1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6) = 14,7

Chi avrebbe mai detto che il *cubo* oltre a tutte le sue costanti geometriche (numero di vertici, spigoli, facce, area totale, volume ecc.) ha la costante 14,7?

8. Il quadrato magico apocalittico

Se qualcuno mi avesse proposto di costruire un *quadrato magico* 6x6 con le seguenti proprietà:

1. la somma degli elementi di ciascuna riga è 666 (costante magica o diabolica)
2. la somma degli elementi di ciascuna colonna è 666
3. la somma degli elementi di ciascuna delle due diagonale è 666
4. la somma degli elementi di ciascuna sottodiagonale con la parte sopra la diagonale è 666

			j	e	r
m				k	f
a	n				l
g	b	o			
	h	c	p		
		i	d	q	

$a+b+c+d+e+f = 666$

$g+h+i+j+k+l = 666$

$m+n+o+p+q+r = 666$

5. i suoi elementi sono numeri primi,

avrei risposto serenamente che il problema non aveva soluzione. Perché l'insieme dei numeri primi minori di 666 è

{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, …, 659, 661} abbastanza piccolino per poter trovare in esso 36 numeri così da risolvere il problema! E mi sarei sbagliato!

Miracolosamente… il problema ha soluzione! È il

Quadrato magico apocalittico

3	107	5	131	109	311
7	331	193	11	83	41
103	53	71	89	151	199
113	61	97	197	167	31
367	13	173	59	17	37
73	101	127	179	139	47

2. «e» come Euler

a cura di Gianfranco Arrigo

We suggest the reading of an excerpt taken from the gigantic work of Leonhard Euler, in which the author shows how he came to the determination of the number e. The aim is to attract the attention of teachers on the tricky concept of limit and on the importance of use, initially of not quite formal ways, such as the use of mental naive images and natural language: just what one can find in Euler.

Questo pezzo è la traduzione[1] della prima parte del Capitolo VII (Sullo sviluppo delle quantità esponenziali e logaritmiche in serie) del testo di Leonhard Euler *Introductio in analysin infinitorum*, pubblicata a Losanna nel 1748[2].

Lo propongo con piacere ai lettori, in modo particolare ai docenti delle superiori, perché potrebbe essere letto anche con gli studenti. Il suo valore, al di là di quello storico, sta nel fatto che Euler lavora la matematica con molta umiltà, non perdendo mai quel senso «euristico-operaio» che contraddistingue i primi passi della creazione matematica. Quei momenti, cioè, nei quali il formalismo non appare ancora nella sua pienezza e il discorso matematico si mescola felicemente con il linguaggio naturale; per esempio quando Euler scrive *«ne segue che se l'esponente sorpassa infinitamente poco lo zero, la potenza sorpasserà l'unità anche infinitamente poco»*.

Quanto senso c'è in questo «infinitamente poco»! Certo il matematico di oggi arriccerà il naso, ma prima di giungere alla fine definizione di limite che si fa risalire a Karl Weierstrass (XIX secolo), anche lui avrà usato questo linguaggio e lo userà ancora – anche se difficilmente lo confesserà – ogni volta che si troverà davanti a un nuovo problema di convergenza, alla necessità di stimare un comportamento all'infinito.

I nostri studenti, quando compiono i primi passi nello studio dell'analisi, hanno un gran bisogno di produrre simili ragionamenti, di accumulare esperienza euristica in questo registro semiotico misto di linguaggio naturale e scientifico. È così che si prepara il terreno per poi costruire l'apparato formale e rigoroso che lo porterà a capire meglio il concetto matematico.

È giunto il momento di far parlare il grande Leonhard Euler.

1. La traduzione è nostra. Si è cercato di rimanere il più possibile fedeli al testo di Euler, anche a costo di scrivere espressioni che oggi farebbero sorridere più di un matematico.
2. Di questa opera esiste anche una traduzione in francese, pubblicata a Parigi dall'editore Barrois, aîné, Libraire, rue de Savoye, nr. 23 datata «L'An Quatrième de la République Française (1796)».

«114. Siccome si ha che $a^0=1$ e che, aumentando l'esponente di a, il valore della potenza aumenta pure, purché a sia un numero superiore all'unità, ne segue che se l'esponente sorpassa infinitamente poco lo zero, la potenza sorpasserà l'unità anche infinitamente poco. Sia ω un numero infinitamente piccolo o una frazione così piccola che differisce infinitamente poco da zero, si avrà $a^{\omega} = 1 + \psi$, ψ essendo un numero infinitamente piccolo; perché è idea costante del Capitolo precedente che se ψ non è infinitamente piccolo, non potrebbe esserlo nemmeno ω. ψ sarà dunque o uguale a ω, o maggiore o minore, rapporto che dipenderà sempre dal valore della lettera a. Siccome questo rapporto è ancora sconosciuto, poniamo $\psi = k\,\omega$, in modo che $a^{\omega} = 1 + k\,\omega$; se prendiamo a come base logaritmica, avremo[3] $\omega = \log(1+k\,\omega)$

Esempio

Per far vedere più chiaramente come il numero k dipende dalla base a, supponiamo a=10 e cerchiamo per mezzo delle tavole ordinarie, il logaritmo di un numero che ecceda di molto poco l'unità, per esempio quello di

$1+\dfrac{1}{1000000}$, di modo che $k\,\omega=\dfrac{1}{1000000}$; troveremo:

$$\log\left(1+\frac{1}{1000000}\right)=\log\left(\frac{1000001}{1000000}\right)=0,00000043429=\omega$$

Dunque, siccome

$$k\,\omega=0,00000100000,\quad \frac{1}{k}=\frac{43429}{100000}\quad \text{e}\quad k=\frac{100000}{43429}=2,30258.$$

Si vede così che k è un numero finito dipendente dal valore della base a; perché, se avessimo preso un altro numero per la base a, il logaritmo dello stesso numero $1+k\,\omega$ avrebbe avuto un rapporto dato col primo e sarebbe risultato un altro valore k.

115. Poiché $a^{\omega}=1+k\,\omega$, si avrà $a^{i\,\omega}=(1+k\,\omega)^{i}$, qualunque sia il numero preso per i.

Dunque:

$$a^{i\,\omega}=1+\frac{i}{1}k\,\omega+\frac{i(i-1)}{1\cdot 2}k^2\,\omega^2+\frac{i(i-1)(i-2)}{1\cdot 2\cdot 3}k^3\,\omega^3+\text{ecc.}$$

Se si pone $i=\dfrac{\zeta}{\omega}$ con ζ che rappresenta un numero qualunque finito,

3. Ci permettiamo di sostituire con «log» il simbolo che Euler usa per indicare il logaritmo: una semplice «*l*».

per il fatto che ω è infinitamente piccolo, e di conseguenza $\omega = \frac{\zeta}{i}$, essendo una frazione il cui denominatore è infinito, sarà una quantità infinitamente piccola, come era stata supposta.

Scriviamo dunque $\frac{\zeta}{i}$ al posto di ω e avremo:

$$a^{\zeta} = \left(1 + \frac{k\,\zeta}{i}\right)^{i} = 1 + \frac{1}{1}k\,\zeta + \frac{1(i-1)}{1\cdot 2\,i}k^2\,\zeta^2 + \frac{1(i-1)(i-2)}{1\cdot 2\,i\cdot 3\,i}k^3\,\zeta^3 +$$

$$+ \frac{1(i-1)(i-2)(i-3)}{1\cdot 2\,i\cdot 3\,i\cdot 4\,i}k^4\,\zeta^4 + \text{ecc.}$$

equazione che sarà vera se si prende per i un numero infinitamente grande, e allora k sarà un numero determinato dipendente dal valore di a, come abbiamo appena visto.

116. Siccome i è un numero infinitamente grande, segue che

$\frac{i-1}{i} = 1$; perché è evidente che più il numero che si sostituirà a i sarà grande, più il valore della frazione $\frac{i-1}{i}$ si avvicinerà all'unità; dunque se i è un numero più grande di qualsiasi quantità assegnabile, la frazione $\frac{i-1}{i}$ uguaglierà l'unità. Per la stessa ragione, $\frac{i-2}{i} = 1$, $\frac{i-3}{i} = 1$ ecc.

Di conseguenza $\frac{i-1}{2\,i} = \frac{1}{2}$, $\frac{i-2}{3\,i} = \frac{1}{3}$, $\frac{i-3}{4\,i} = \frac{1}{4}$, e così gli altri.

Sostituendo questi valori, risulterà

$$a^{\zeta} = 1 + \frac{k\,\zeta}{1} + \frac{k^2\,\zeta^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3\,\zeta^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{k^4\,\zeta^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{ ecc. all'infinito.}$$

Questa relazione esprime anche nello stesso tempo la relazione tra i numeri a e k; poiché, supponendo $\zeta = 1$, si avrà

$$a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{k^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{ ecc.}$$

e per far sì che sia a=10, occorre che k sia circa = 2,30258, come l'abbiamo trovato prima.

117. Supponiamo $b = a^n$, prendendo a come base logaritmica avremo log (b) = n e poiché $b^\zeta = a^{n\zeta}$, otteniamo la serie infinita

$$b^\zeta = 1 + \frac{k\,n\,\zeta}{1} + \frac{k^2\,n^2\,\zeta^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3\,n^3\,\zeta^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{k^4\,n^4\,\zeta^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{ ecc.}$$

$$b^\zeta = 1 + \frac{k\,\zeta}{1}\log(b) + \frac{k^2\,\zeta^2}{1\cdot 2}\left(\log(b)\right)^2 + \frac{k^3\,\zeta^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\log(b)\right)^3 +$$

$$+ \frac{k^4\,\zeta^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(\log(b)\right)^4 + \text{ ecc.}$$

Così, il valore della lettera k dipendendo dalla base a, una quantità esponenziale qualunque b^ζ potrà essere espressa con una serie infinita, i cui termini progrediscono seguendo le potenze di ζ. Posto ciò, facciamo vedere ora come i logaritmi possono essere sviluppati in serie infinite.

118. Dato che $a^\omega = 1 + k\,\omega$ è una frazione infinitamente piccola e che la relazione tra a e k è data da

$$a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{ ecc.}$$

prendendo a come base logaritmica, avremo $\omega = \log(1 + k\,\omega)$ e $i\,\omega = \log(1 + k\,\omega)^i$

Ora è evidente che più il numero sostituito a i sarà grande, più la potenza $(1 + k\,\omega)^i$ sorpasserà l'unità e che ponendo i uguale a un numero infinito, il valore della potenza $(1 + k\,\omega)^i$ si eleverà al di sopra dell'unità.

Dunque se si suppone $(1 + k\,\omega)^i = 1 + x$, si avrà $\log(1 + x) = i\,\omega$. Da ciò segue che il numero i ω, essendo finito, perché è il logaritmo del numero 1+x, i dev'essere un numero infinitamente grande, perché altrimenti i ω non potrebbe avere un valore finito.

119. Avendo trovato che:

$$(1 + k\,\omega)^i = 1 + x \;;\; 1 + k\,\omega = (1 + x)^{\frac{1}{i}} \;,\text{ e }\; k\,\omega = (1 + x)^{\frac{1}{i}} - 1 \;\text{ da cui }\; i\,\omega = \frac{i}{k}\left[(1 + x)^{\frac{1}{i}} - 1\right]$$

Ora $i\,\omega = \log(1+x)$, dunque $\log(1+x) = \frac{i}{k}(1+x)^{\frac{1}{i}} - \frac{i}{k}$, i essendo supposto infinitamente grande; ma

$$(1+x)^{\frac{1}{i}} = 1 + \frac{1}{i}x - \frac{1(i-1)}{i\cdot 2i}x^2 + \frac{1(i-1)(i-2)}{i\cdot 2i\cdot 3i}x^3 -$$

$$-\frac{1(i-1)(i-2)(i-3)}{i\cdot 2i\cdot 3i\cdot 4i}x^4 + \text{ecc.}$$

e siccome i è infinitamente grande,

$$\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2},\ \frac{2i-1}{3i} = \frac{2}{3},\ \frac{3i-1}{4i} = \frac{3}{4}\ \text{ ecc.}$$

Dunque

$$i(1+x)^{\frac{1}{i}} = i + \frac{x}{1} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{ecc.}$$

e di conseguenza

$$\log(1+x) = \frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{ecc.}\right)$$

dove a è sempre la base logaritmica e k designa il numero corrispondente a questa base in modo che:

$$a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{ecc.}$$

120. Poiché abbiamo trovato una serie uguale al logaritmo del numero 1+x, la base a essendo data, potremo col suo aiuto rappresentare il valore del numero k. Infatti supponiamo 1+x=a; siccome log(a)=1, avremo:

$$1 = \frac{1}{k}\left(\frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \text{ecc.}\right)$$

e di conseguenza

$$k = \frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \text{ecc.}$$

serie infinita il cui valore, ponendo a=10, dovrà essere circa = 2,30258 anche se è difficile concepire che $2{,}30258 = \frac{9}{1} - \frac{9^2}{2} + \frac{9^3}{3} - \frac{9^4}{4} + \text{ecc.}$ perché i termini di questa serie vanno sempre aumentando e di conseguenza non è sufficiente calcolarne qualcuno se si vuole ottenere un valore approssimato.

Rimedieremo presto a questo inconveniente.

121. Se $\log(1+x)=\frac{1}{k}\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\text{ecc.}\right)$,

prendendo x negativo sarà $\log(1-x)=-\frac{1}{k}\left(\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\text{ecc.}\right)$
e sottraendo la seconda serie dalla prima

$$\log(1+x)-\log(1-x)=\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{2}{k}\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\text{ecc.}\right)$$

Sia ora $\frac{1+x}{1-x}=a$ e quindi $x=\frac{a-1}{a+1}$; siccome log(a)=1, si ha

$$k=2\left(\frac{a-1}{a+1}+\frac{(a-1)^3}{3(a+1)^3}+\frac{(a-1)^5}{5(a+1)^5}+\text{ecc.}\right)$$

equazione che dà il valore di k, quando si conosce quello della base a. Così, ponendo a=10, si ha

$$k=2\left(\frac{9}{11}+\frac{9^3}{3\cdot 11^3}+\frac{9^5}{5\cdot 11^5}+\frac{9^7}{7\cdot 11^7}+\text{ecc.}\right)$$

serie abbastanza convergente da permettere di calcolare velocemente un valore approssimato di k.

122. Poiché la base logaritmica a può essere scelta a piacere, possiamo sceglierla tale che k diventi = 1. Supponiamo dunque k=1. La serie trovata prima (art.116) diventerà

$$a=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\text{ecc.}$$

i cui termini sommati e messi in forma decimale danno il valore 2,71828182845904523536028, la cui ultima cifra è ancora esatta. I logaritmi calcolati su questa base si chiamano logaritmi «naturali» o «iperbolici», perché possono rappresentare la quadratura dell'iperbole. In seguito, per abbreviare, designeremo costantemente questo numero 2, 718281828459 ecc. con la lettera e, che indicherà di conseguenza la base dei logaritmi naturali o iperbolici, alla quale corrisponde il numero k=1; ciò significa che questa lettera e esprime la somma della serie

$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\text{ecc.}$ continuato all'infinito. (…)»

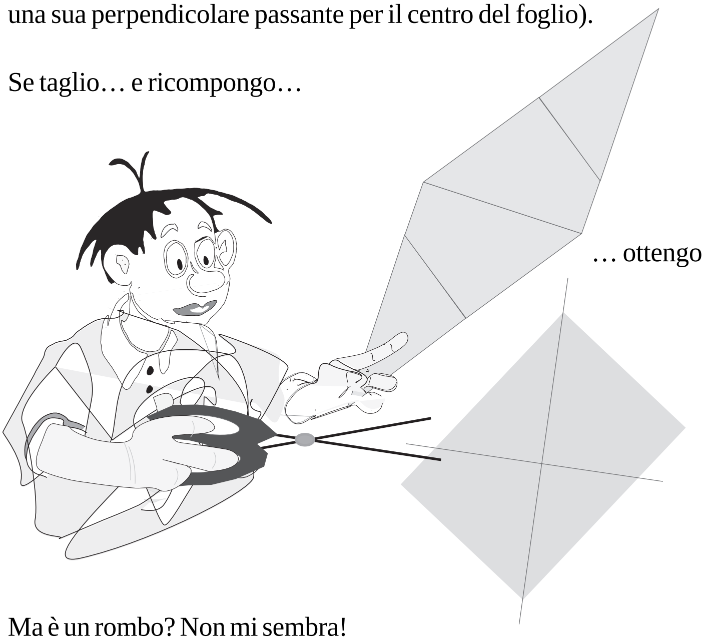
Quiz numero 45: Da rettangolo a rombo

Aldo Frapolli

Caro Archie, l’altra volta mi sono divertito tanto piegando e…
ritagliando un foglio A4 nei modi più impensati.
Così facendo ho scoperto molte sue proprietà interessanti.
Senti questa!
Con un «taglio da maestro» è possibile scomporre
un «rettangolo A4» in poligoni, tali che
opportunamente ricomposti formano un rombo.

Non ci ho mai pensato!
Fammi provare ad esempio con i quattro poligoni
generati dalle due piegature della scorsa volta
(la prima lungo una diagonale e la seconda lungo
una sua perpendicolare passante per il centro del foglio).

Se taglio… e ricompongo…



… ottengo questo quadrilatero.

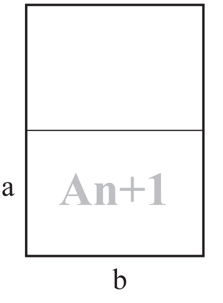
Ma è un rombo? Non mi sembra!

E voi amici del Quiz, sapreste fare meglio di Archie?
Come è possibile ottenere un rombo da un foglio A4?
Con quale taglio… da maestro?

Anche stavolta c’è un bel libro che attende il più bravo fra di voi.

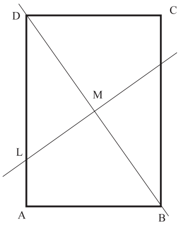
Soluzione del Quiz numero 44

La frazione cercata è $\frac{1}{256}$. Risultato alquanto sorprendente, sicuramente non scontato! Vediamo come ci si poteva arrivare.



Indicando con a la lunghezza del lato minore e con b quella del lato maggiore di un foglio formato An+1 (con n numero naturale qualsiasi) e osservando che quest'ultimo è un rettangolo simile ad uno di formato An, vale che:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{2a} \Leftrightarrow b^2=2a^2 \Rightarrow b=a\sqrt{2}$$

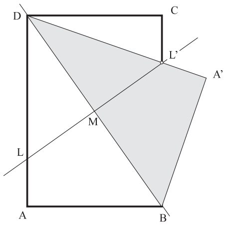


Venendo ora alle due piegature descritte, osserviamo che esse individuano in particolare due triangoli simili: ABD e DML. Ragionando sui rapporti fra lati corrispondenti si scopre che

$$LD=\frac{3}{4}AD$$

e di conseguenza che

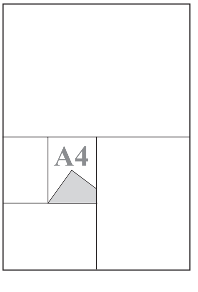
$$AL=\frac{1}{4}AD=\frac{1}{4}b$$



La figura ottenuta dopo la prima piegatura è il pentagono BD-CL'A'.

La sua area è la somma delle aree dei triangoli BDC e BA'L' e vale quindi
$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}=\frac{1}{2^3}$ dell'area del rettangolo di formato A4.

L'area della figura chiave, ottenuta dopo la seconda piegatura – cioè il quadrilatero MDCL' – è quindi $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^3}=\frac{1}{2^4}$ dell'area del rettangolo.



Siccome l'area del rettangolo A4 è

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(1m^2)=\frac{1}{2^4}(1m^2) ,$$

l'area del quadrilatero MDCL' risulta essere:

$$\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{2^4}(1m^2)=\frac{1}{2^8}(1m^2)=\frac{1}{256}(1m^2) .$$

1. La media armonica, questa sconosciuta

Antonio Steiner[1] e Gianfranco Arrigo

1. Incrocio di treni

Un treno copre un tratto di A km, da stazione S07 alla stazione S11, alla velocità media di v_1 km/h nel tempo A/v_1 (h). Contemporaneamente un secondo treno parte da S11 verso S07 alla velocità v_2 km/h.

Quando (dopo t h) e dove (a che distanza da S07) i due treni si incrociano?

Procedimento risolutivo

Indichiamo con t_1 e t_2 i tempi di percorrenza dei treni nel tratto tra le due stazioni. Possiamo scrivere:

$$t_1 = \frac{A}{v_1}(h) \quad , \quad t_2 = \frac{A}{v_2}(h)$$

Possiamo ora considerare l'equazione nell'incognita t

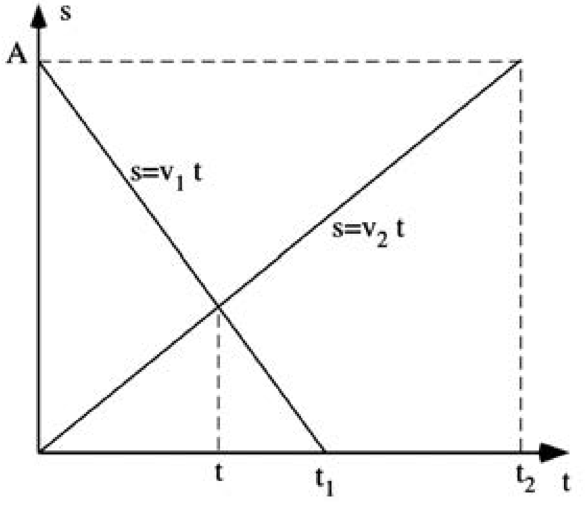
$$v_1 t + v_2 t = A$$

dalla quale ricaviamo la soluzione

$$t = \frac{A}{v_1 + v_2} = \frac{A}{\frac{A}{t_1} + \frac{A}{t_2}} = \frac{1}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}} = \frac{t_1 \, t_2}{t_1 + t_2}$$

1. Poco tempo prima della sua scomparsa, Antonio mi ha consegnato un manoscritto con diverse proposte da pubblicare insieme nella rubrica da lui intitolata *Passeggiate matematiche*. La redazione ha deciso di continuare la pubblicazione fino a esaurimento delle proposte.

Rappresentazione grafica



2. Svuotare la piscina

Si deve svuotare una piscina olimpionica che contiene A m^3 di acqua aprendo tre tubi di scarico. Ciascun tubo, da solo, svuoterebbe la piscina rispettivamente in t_1, t_2 e t_3 ore.

Vogliamo calcolare il tempo t (h) necessario per svuotare la piscina aprendo contemporaneamente i tre tubi di scarico.

Procedimento risolutivo

Indichiamo con v_1, v_2 e v_3 la portata dei tre tubi, cioè il rapporto tra il volume di acqua che esce nell'unità di tempo. Possiamo scrivere:

$$t_1 = \frac{A}{v_1}(h) \quad , \quad t_2 = \frac{A}{v_2}(h) \quad , \quad t_3 = \frac{A}{v_3}(h)$$

Possiamo ora considerare l'equazione nell'incognita t

$$v_1\, t + v_2\, t + v_3\, t = A$$

dalla quale ricaviamo la soluzione

$$t = \frac{A}{v_1 + v_2 + v_3} = \frac{A}{\frac{A}{t_1} + \frac{A}{t_2} + \frac{A}{t_3}} = \frac{1}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}}$$

Confrontando la soluzione ottenuta con quella del problema precedente, si nota la stessa struttura matematica.

Ora si potrebbe pensare di sostituire i tre tubi con altrettanti aventi la stessa portata. Se ciascuno di questi nuovi tubi svuota, da solo, la piscina in t_m ore, dovrà essere

$$t = \frac{1}{3} t_m$$

cioè

$$t_m = \frac{3}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}\right)}$$

t_m è quindi la media armonica dei tempi t_1, t_2 e t_3. In parole: l'inverso della media aritmetica degli inversi dei tre numeri t_1, t_2 e t_3.

Osserviamo ancora che la soluzione del problema 1 è la media armonica dei due numeri t_1 e t_2.

In generale, la media armonica ma_n di n numeri $x_1, x_2, \ldots, x_n$ è data dalla formula:

$$ma_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j}}$$

1. I disturbi dell'apprendimento a scuola, tra ricerca e didattica

Convegno sul tema del rapporto tra didattica e disturbi specifici dell'apprendimento Call for Papers

Organizzato dalla
Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana,
Dipartimento formazione e apprendimento (DFA)
Locarno, venerdì 9 e sabato 10 settembre 2011

Introduzione

I notevoli progressi registrati nell'ambito della ricerca sui disturbi dell'apprendimento, progressi ottenuti anche grazie al sempre più significativo contributo delle neuroscienze, stanno portando a ripensamenti profondi nella didattica, con particolare riguardo agli aspetti legati all'apprendimento della lettura, della scrittura e del calcolo. Inoltre, la sempre crescente disponibilità di tecnologie digitali (ICT) offre interessanti risorse che possono essere messe a disposizione degli insegnanti e degli allievi con o senza disturbi specifici dell'apprendimento.

Il convegno intende creare l'occasione per un dialogo tra ricerca avanzata e didattica, al fine di mettere a punto pratiche di insegnamento che tengano conto dei recenti sviluppi in ambito scientifico. Lo scopo è quello di mettere a confronto specialisti nel campo dell'educazione, della psicologia, della logopedia e delle neuroscienze, sul senso, l'efficacia e le modalità di realizzazione di misure compensative e dispensative nella scuola, al fine di promuovere un'educazione di tipo inclusivo.

Il convegno si rivolge a ricercatori, docenti universitari, logopedisti e operatori di servizi psicopedagogici, medici, neuropsichiatri, psicologi e altre persone con esperienza sul tema.

In particolar modo si incoraggiano insegnanti di ogni ordine e grado scolastico, studenti e dottorandi, a presentare proposte sulle tematiche del convegno.

Si invitano gli autori all'invio di contributi sui seguenti temi:

– I disturbi dell'apprendimento e la loro percezione nella scuola e nella società.
– Disturbi dell'apprendimento e prevenzione nella scuola.
– Strategie didattiche e disturbi dell'apprendimento.

- Collaborazione tra famiglia, scuola e servizi specialistici sul territorio.
- Uso di tecnologie digitali (ICT) nella didattica, con particolare attenzione ai disturbi dell'apprendimento.
- Approcci per l'acquisizione delle abilità di lettura e scrittura e disturbi dell'apprendimento.

Ambiti di interesse dei contributi

Il convegno si articolerà in due sezioni, che ospiteranno contributi relativi a due diversi ambiti di interesse:

- Ricerca: risultati, implicazioni teoriche e risvolti operativi di studi condotti nell'ambito dei disturbi dell'apprendimento.
- Pratica professionale: ricerche-azioni, resoconti di esperienze sul campo, "buone pratiche" in ambito didattico.

Tipologia dei contributi

Gli autori sono invitati a presentare contributi secondo una delle seguenti tipologie:

- Comunicazione orale: durata 20 minuti, seguiti da 5 minuti di discussione. La lunghezza dei contributi dovrà essere compresa tra le 2500 e le 3000 parole. È prevista la pubblicazione digitale di una selezione dei contributi inviati.
- Comunicazione in forma di poster: dimensione A0. I poster saranno esposti per tutta la durata del convegno.

Formato delle proposte

Le proposte dovranno contenere:

- Titolo della presentazione.
- Autori (indicando chiaramente l'autore di contatto e il suo indirizzo postale ed elettronico).
- Abstract (250-500 parole).
- Lingua della presentazione (italiano, francese, tedesco, inglese).
- Indicazione del tipo di contributo (comunicazione orale o poster).
- Indicazione dell'ambito di interesse (Ricerca o Pratica professionale).
- Parole chiave (3-5).

Le proposte dovranno essere inviate per e-mail, in formato .doc, .docx o .pdf al seguente indirizzo: sara.giulivi@supsi.ch

Aurelio Crivelli, Dipartimento Formazione e Apprendimento - SUPSI, Locarno
Feliciana Fiscalini Tocchetto, Dipartimento Formazione e Apprendimento - SUPSI, Locarno
Fabio Leoni, Dipartimento Formazione e Apprendimento - SUPSI, Locarno
Carlo Muzio, Divisione di Neuropsichiatria Infantile, Università di Pavia, Italia
Serge Ramel, Haute Ecole Pédagogique, Losanna
Gianpaolo Ramelli, Ente Ospedaliero Cantonale - Servizio di neuropediatria - Università di Basilea
Nicole Rege Colet, Direttrice Dipartimento Formazione e Apprendimento - SUPSI, Locarno

Cristina Bordoli, Dipartimento Formazione e Apprendimento - SUPSI, Locarno
Luca Botturi, Responsabile della Ricerca, Dipartimento Formazione e Apprendimento-SUPSI, Locarno
Sara Giulivi, Dipartimento Formazione e Apprendimento - SUPSI, Locarno

Prof. Cesare Cornoldi, Dipartimento di Psicologia, Università di Padova, Italia
Prof. Daniela Lucangeli, Dipartimento di Psicologia, Università di Padova, Italia
Prof. Ian Smythe, School of Education, University of Wales, Newport, UK
Prof. Eric Tardif, Laboratoire International sur l'Inclusion Scolaire, HEP di Losanna
Prof. Pascal Zesiger, Facoltà di Psicologia e Scienze dell'Educazione, Università di Ginevra

I contributi potranno essere inviati in italiano, francese, tedesco o inglese. Le presentazioni orali potranno svolgersi in ciascuna delle suddette lingue.

Scadenza invio abstract	22 Maggio 2011
Notifica di accettazione agli autori	14 Giugno 2011
Termine ultimo iscrizione autori	15 Luglio 2011
Convegno	09-10 Settembre 2011
Invio articoli per gli atti del convegno	15 Ottobre 2011

Iscrizione entro il 15.07.2011	150.– CHF
Iscrizione dopo il 15.07.2011	200.– CHF
Studenti	50.– CHF
Partecipazione alla sola giornata di sabato 10.09	100.– CHF

Le informazioni su Locarno, città sede del convegno, e sulle zone circostanti, sono reperibili sul sito www.ascona-locarno.com.

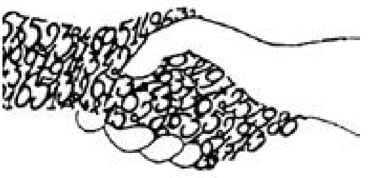
Informazioni dettagliate sugli aspetti logistici del convegno (trasporti e alloggi) saranno disponibili a breve sul sito www.convegnodas.dfa.supsi.ch.

Il programma sarà consultabile sul sito www.convegnodas.dfa.supsi.ch a partire dal 14 giugno 2011.

Contatto:
Sara Giulivi
SUPSI-DFA, Piazza San Francesco 19, CH 6600 Locarno.
Tel.: +41 58 666 68 40
e-mail: sara.giulivi@supsi.ch

2. Un quarto di secolo al servizio della didattica della matematica

Convegno Nazionale n. 25: ***Incontri con la Matematica***
Castel San Pietro Terme (Bologna)
4–5–6 novembre 2011



Direzione: Bruno D'Amore, Martha I. Fandiño Pinilla e Silvia Sbaragli
Organizzazione dell'evento: Associazione Incontri con la matematica con la collaborazione dell'assessorato alla cultura del comune di Castel San Pietro Terme e di Formath

Conferenze

Venerdì 4 novembre, Centro Congressi Artemide

Tutti gli ordini scolastici

14.30-15.30 **Inaugurazione** alla presenza delle Autorità del mondo politico ed accademico; saluti di: Sara Brunori (Sindaco di Castel San Pietro Terme); Ivano Dionigi (Magnifico Rettore dell'Università di Bologna); Bruno Marano (Preside della Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali dell'Università di Bologna); Giorgio Bolondi (Presidente della C.I.I.M. dell'U.M.I.); Carla Ida Salviati (Direttore delle riviste La Vita Scolastica e Scuola dell'Infanzia).

15.30-16.15 **Luciana Bazzini** (Università di Torino): Insegnare matematica: concezioni, buone pratiche e formazione degli insegnanti.

16.15-17.00 **Piergiuseppe Rossi** (Università di Macerata): Professionalità come proposta didattica.

17.00-17.30 Intervallo.

17.30-18.15 **Maria Alessandra Mariotti** (Università di Siena): Congetturare e dimostrare in un ambiente di geometria dinamica.

18.15-19.00 **Bruno D'Amore** (NRD di Bologna; Universidad Distrital di Bogotà): Frasi illuminanti di studenti e docenti in quaranta anni di ricerca.

Sabato 5 novembre, Centro Congressi Artemide

Scuola Primaria, Secondaria di primo e di secondo grado

15.00-15.45 **Mariolina Bartolini Bussi** (Università di Modena-Reggio E.): Artefatti e segni nell'insegnamento-apprendimento della matematica: il laboratorio nella scuola elementare e secondaria.

15.45-16.30 **Silvia Sbaragli** (DFA-SUPSI di Locarno, Svizzera; NRD di Bologna): Il ruolo dell'interpretazione personale in aula.
16.30-17.00 Intervallo ed estrazione a sorte omaggi Media Direct.
17.00-18.00 **Luis Radford** (Université Laurentienne, Sudbury, Ontario, Canada): Lo sviluppo del pensiero matematico nell'allievo: il raffinamento della percezione del gestuale e del simbolico.
18.00-18.45 **Domingo Paola** (LS «A. Issel» di Finale Ligure): Dal laboratorio al testo: la matematica si può e si deve capire.

Seminari

Sabato 5 novembre, Aula Magna (Istituto Alberghiero)

Seminari per la Scuola dell'Infanzia
8.30-9.15 **Erminia Dal Corso** (Verona, RSDDM di Bologna): Esperienze di continuità sulla misura.
9.15-10.00 **Laura Battaini** (SI di Bozzoreda, Lugano): Le papere danno i numeri. Esperienze numeriche nella scuola dell'infanzia nel reale e con l'uso di un software didattico.
10.00-10.45 **Annarita Monaco** (Roma, RSDDM di Bologna) (con la collaborazione di **Adele Iacovantuono**, Roma): Pratiche comunicative e sviluppo di concetti matematici nella scuola dell'infanzia.
10.45-11.30 **Palma Rosa Micheli** (SI «Lodesana» di Fidenza) e **Paola Vighi** (Università di Parma): Il gioco delle case colorate.
11.30-12.15 **Nadia Vecchi** (Biella, RSDDM di Bologna): Matematica, una favola vera.
12.15-12.45 **Marialaura Lapucci** (DD di Figline Valdarno): I ponti di Königsberg: da una storia inventata alla storia della matematica.

Sabato 5 novembre, Centro Congressi Artemide

Seminari per la Scuola Primaria e Secondaria di primo grado
8.30-9.15 **Annarita Monaco** (Roma, RSDDM di Bologna): Matematica, tra aula e realtà.
9.15-10.00 **Gianfranco Arrigo** (DFA-SUPSI di Locarno, Svizzera; NRD di Bologna): Calcolo in riga vs Calcolo in colonna.
10.00-10.45 **Martha Isabel Fandiño Pinilla** (NRD di Bologna): Una buona didattica richiede un buon Sapere.
10.45-11.30 **Marco Bardelli** (Università di Padova): La modifica delle credenze epistemologiche sulla matematica attraverso un cambiamento nella pratica didattica.
11.30-12.15 **Lorella Campolucci** e **Danila Maori** («Matematica in rete» di Corinaldo; RSDDM di Bologna): «Fare» matematica: esperienze in laboratorio.
12.15-13.00 **Stefano Beccastrini** e **Maria Paola Nannicini** (Laterina, RSDDM di Bologna): Matematica e letteratura. Tipologie di rapporto e potenzialità didattiche.

Sabato 5 novembre, Salone delle Terme (Albergo delle Terme)

Seminari della Sezione: Disagio nei processi di apprendimento

8.30-9.15 **Giorgio Bolondi** (Università di Bologna): Le difficoltà verticali: evidenze dalle prove Invalsi.

9.15-10.00 **Rosetta Zan** (Università di Pisa): Dall'osservazione degli errori all'azione didattica: la necessità dell'interpretazione.

10.00-10.45 **Pier Giuseppe Ellerani** (Università di Bolzano): Un contesto per formare ognuno ad apprendere: risorse per rendere capaci.

10.45-11.30 **Davide Antognazza** (DFA-SUPSI di Locarno, Svizzera) **e Silvia Sbaragli** (DFA-SUPSI di Locarno, Svizzera; NRD di Bologna): Didattica della matematica e conoscenza di sé: il ruolo delle emozioni.

11.30-12.15 **Helga Fiorani, Rosa Iaquinta** e **Maria Antonietta Impedovo** (dottorande Università di Macerata): Disagio scolastico e progettazione didattica: un *Instrumental Case Study.*

12.15-12.35 **Agnese Del Zozzo** (Studentessa Master, Università di Pavia): Percezione aptica e apprendimento della geometria: immagini mentali, ostacoli e misconcezioni in presenza di deficit visivo.

Sabato 5 novembre, Sala Giardino (Albergo delle Terme)

Seminari per la Scuola Secondaria di secondo grado

8.30-9.00 **Mario Puppi** (Istituto «E. Majorana» di Mirano): Fare e sperimentare modelli con gli automi cellulari.

9.00-9.45 **Miglena Asenova** (Modena, RSDDM di Bologna): Linguaggio e didattica della matematica: una parafrasi algebrica e le sue implicazioni didattiche.

9.45-10.30 **Sergio Invernizzi** (Università di Trieste): Statisticamente: il ragionamento statistico nella scuola e nella vita.

10.30-11.15 **Chiara Andrà** (Università di Torino) e **George Santi** (NRD di Bologna): Esperienza ed intuizione in matematica: come le rappresentazioni ci aiutano ad apprendere i concetti.

11.15-11.45 **Michele Canducci** e **Donatella Dragoni** (Akap, Associazione Karibuni Assistenza alle Popolazioni di Rimini): Un'esperienza di matematica e fisica nella scuola secondaria di Daudi (Tanzania).

11.45-12.30 **Mirella Manaresi** (Università di Bologna) e docenti partecipanti al Piano: Il Piano Lauree Scientifiche di Matematica e Statistica all'Università di Bologna: la formazione e le ricadute didattiche.

Domenica 6 novembre, Aula Magna (Istituto Alberghiero)

Seminari per la Scuola dell'Infanzia

8.30-9.15 **Monica Gallo** (I.C. «Pescantina» di Verona): Il castello magico di Gino e Gina.

9.15-10.00 **Anna Cerasoli** (L'Aquila): Le parole della logica: tutti, nessuno, qualcuno.

10.00-10.45 **Chiara Andrà, Marco Pirra** e **Luciana Bazzini** (Università di Torino): Educare al pensiero probabilistico attraverso il gioco: esperienze tra la scuola dell'infanzia e la primaria.

10.45-11.30 **Helga Fiorani** (dottoranda Università di Macerata) e **Salvatori Luana** (I.C. «Sant'Agostino» di Civitanova Marche): Didattica speciale della matematica nella scuola dell'infanzia.

Domenica 6 novembre, Centro Congressi Artemide

Seminari per la Scuola Primaria

8.30-9.00 **Annarosa Serpe** (Università della Calabria): Giochiamo con le frazioni: un percorso dal reale al virtuale.

9.00-9.30 **Nicoletta Secchi** (I.C. 1 di Suzzara): One... two... clic… animiamo la geometria! Risorse digitali e fantasia per «concetti geometrici»... a prova di Invalsi.

9.30-10.00 **Bruno D'Amore**, **Martha Isabel Fandiño Pinilla** e **Silvia Sbaragli** (NRD di Bologna) presentano il progetto ***Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere.***

10.00-10.30 **Nicla Palladino** (Università della Basilicata): Le esperienze degli studenti di Scienze della Formazione dell'Università di Salerno con la Matematica e la sua Didattica.

10.30-11.00 **Gianfranco Bresich** (ICS «Pisacane - Poerio» di Milano): Tra matematica e musica: frazioni, grafici e notazione convenzionale.

11.00-11.45 **Anna Cerasoli** (L'Aquila): Matematica leggera (e nutriente), terza parte.

11.45-12.05 **Roberto Grossa** (Università IUAV di Venezia): Le trasformazioni nascoste nella luce.

Domenica 6 novembre, Sala Giardino (Albergo delle Terme)

Seminari per la Secondaria di primo grado

8.30-9.15 **Nadia Correale** (dottoranda Università di Bergamo): La dimensione matematica nei fenomeni naturali.

9.15-10.00 **Ivan Graziani** (I.C. di Civitella di Romagna): «Pitag'ora et labora».

10.00-10.45 **Stefania Neri** e **Cristofaro Sorrentino** (I.C. di Castrocaro): Alice, CuriosaMente matematica.

10.45-11.30 **Giuliana Gnani** e **Angela Balestra** (Università di Ferrara): Insegnare matematica in un contesto multiculturale.

Domenica 6 novembre, Salone delle Terme (Albergo delle Terme)

Seminari per la Scuola Secondaria di secondo grado

8.30-9.15 **Domingo Paola** (LS «A. Issel» di Finale Ligure): Rappresentare ed elaborare i dati: un'esperienza di didattica laboratoriale.

9.15-10.00 **Lorenza Resta, Sandra Gaudenzi** e **Stefano Alberghi** (LS «E. Torricelli» di Faenza): Presentazione del volume «Matebilandia: laboratorio di matematica e modellizzazione in un parco di divertimenti».

10.00-11.00 **Luigi Tomasi** (LS «Galileo Galilei» di Adria): La matematica nel riordino della Scuola secondaria di II grado: osservazioni e proposte didattiche.

11.00-11.45 **Christian Bonfanti** (Istituto «R. Steiner» di Milano): La topografia.

Mostre e laboratori (in contemporanea e dopo i seminari)
Sabato 5 novembre dalle 9.00 alle 14.00 e domenica 6 novembre dalle 9.00 alle 12.00

Per tutti
Mostre: Arte e Matematica – Matematica e Arte

- **Sergio Traquandi** (IC «Marconi» di San Giovanni Valdarno): Polyhedra (Scatola di montaggio per la costruzione di poliedri traforati al laser con disegni dell'antico Islam).
- **Oscar Reutervsärd** (Svezia) a cura di Formath: Figure impossibili.
- **Aldo Spizzichino** (Bologna): *Confluenze* - tra geometria e computer art.

Scuola dell'infanzia

- **MEDIA DIRECT**: Bee-Bot e Polydron.
- **Il Cielo e la Terra** coordinamento di **Claudio Zellermayer** e **Mariela Petta**: Proporzioni, volumi ed altre applicazioni della geometria: costruiamo un modello del Sistema Solare.
- **Chiara Andrà, Marco Pirra** e **Luciana Bazzini** (Università di Torino): Educare al pensiero probabilistico attraverso il gioco: esperienze tra la scuola dell'infanzia e la primaria.
- **Gruppo «Matematica in Rete»** di Corinaldo: «Fare» matematica: esperienze in laboratorio.
- **Monica Gallo** (I.C. «Pescantina» di Verona): Il castello magico di Gino e Gina.
- **Tiziana Spuntarelli** (SI «Archimede» di Roma) con la collaborazione di **Annarita Monaco** (RSDDM, Bologna): Caccia alla forma.
- **Marialaura Lapucci, Giovanna Pozzi, Luisa Grisi e Anna Maria Filardi** (DD di Figline Valdarno): I ponti di Königsberg: da una storia inventata alla storia della matematica.
- **IC di Savignano sul Rubicone** coordinato da **Cristina Lucia Giordani** e **Farida Magalotti** (RSDDM di Bologna): Laboratori didattici tra numeri e figure.
- **SP «M. Moretti»** di Cesena; **SP «Flavia Casadei»** di Viserba, Rimini; **SP «Madre Teresa di Calcutta»** di Rimini; **SP di Villamarina** di Cesenatico; **SP «Vigne»** di Cesena; **SP «A. Piscaglia»** di Sogliano al Rubicone; **SP «Bruno Munari»** di S. Egidio; **SI «La fiorita»** di Cesena, coordinate da **Farida Magalotti** (RSDDM, Bologna): Un mondo di matematica.
- Studentesse DFA - SUPSI di Locarno (Svizzera) coordinate da **Giorgio Häusermann** e **Patrizia Renzetti** (DFA-SUPSI, Locarno, Svizzera): Giochi matematici e fisici nella scuola dell'infanzia.

Scuola primaria

- **Carlotta Cubeddu** (Giunti Scuola Digitale) e **Andrea Ustillani** (Anastasis): Fare matematica con la LIM; alcuni metodi e strategie sfruttando gli strumenti compensativi per i DSA.
- **MEDIA DIRECT**: Bee-Bot e Polydron.
- **Il Cielo e la Terra** coordinamento di **Claudio Zellermayer** e **Mariela Petta**: Proporzioni, volumi ed altre applicazioni della geometria: costruiamo un modello del Sistema Solare.
- **Chiara Andrà, Marco Pirra** e **Luciana Bazzini** (Università di Torino): Educare al pensiero probabilistico attraverso il gioco: esperienze tra la scuola dell'infanzia e la primaria.
- **Gruppo «Matematica in Rete»** di Corinaldo: «Fare» matematica: esperienze in laboratorio. «Fare» matematica: esperienze in laboratorio.
- **Marialaura Lapucci, Giovanna Pozzi, Luisa Grisi e Anna Maria Filardi** (DD di Figline Valdarno): I ponti di Königsberg: da una storia inventata alla storia della matematica.
- **Nadia Correale** (dottoranda Università di Bergamo): L'acqua e le sue trasformazioni.
- **Susanna Morandini** (IC «Masaccio» di San Giovanni Valdarno): A caccia di simmetrie: dai palazzi di San Giovanni Valdarno ai mandala tibetani: un percorso laboratoriale in una classe seconda di scuola primaria.
- **Rosalia Tusa** e **Simona Gaccione** (IC «Francesco D'Assisi» di Milano): Lupo Ubaldo Mate e Geo nell'affascinante mondo della matematica.
- **SP «M. Moretti»** di Cesena; **SP «Flavia Casadei»** di Viserba, Rimini; **SP «Madre Teresa di Calcutta»** di Rimini; **SP di Villamarina** di Cesenatico; **SP «Vigne»** di Cesena; **SP «A. Piscaglia»** di Sogliano al Rubicone; **SP «Bruno Munari»** di S. Egidio; **SI «La fiorita»** di Cesena, coordinate da **Farida Magalotti** (RSDDM, Bologna): Un mondo di matematica.
- **IC di Savignano sul Rubicone** coordinato da **Cristina Lucia Giordani** e **Farida Magalotti** (RSDDM di Bologna): Laboratori didattici tra numeri e figure.
- **GSSMMM di Bologna:** Giochi matematici senza frontiere.
- **SMASI** di Lugano coordinata da **Gianfranco Arrigo** (Lugano, NRD di Bologna): San Gaku. Tra arte e scienza, la matematica tradizionale giapponese durante il periodo di Edo (1603–1868).

3. Recensioni

D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I., Marazzani I. e Sarrazy B. (2010). *Didattica della matematica*. Prefazione e postfazione di Guy Brousseau. Bologna: Archetipolibri. Pagg. 163, € 14.

Il sottotitolo di questa nuova opera didattica è «Alcuni effetti del contratto», evidentemente inteso come contratto didattico che qui è presentato nelle sue fondazioni di base e attraverso analisi e critiche moderne, ma nel totale rispetto del suo significato originale datogli da Guy Brousseau. Dire dell'importanza di questo concetto della didattica teorica, suonerebbe come banalità. Eppure ancora oggi molti insegnanti ignorano il suo significato profondo. Fra questi ve ne sono che lo «sentono» senza rendersene conto, ma agiscono comunque correttamente guidati dall'istinto e altri, purtroppo, che ne ignorano l'esistenza e di conseguenza tutti gli aspetti che ne derivano, fra i quali, come si sa, ve ne sono di negativi. Questo stato di cose fa sì che gli uni, considerati bravi insegnanti, non potranno mai perfezionare le loro pratiche di classe e potrà capitare loro, qualche volta, di trovarsi di fronte a difficoltà di apprendimento derivanti da ragioni specifiche del contratto didattico che sfuggono loro. Per gli altri, l'ignoranza di questo aspetto didattico significa non riuscire a cambiare la tendenza degenerativa di una classe e non essere in grado di capire determinati comportamenti degli allievi, solitamente liquidati, per esempio, con un prosaico «non sta attento durante le lezioni». Molto sommariamente, queste considerazioni portano a consigliare vivamente la lettura dell'agile libretto a tutti gli insegnanti, anche a quelli che si illudono di non avere problemi con i loro allievi, cadendo nel classico comportamento «dello struzzo»: per non aver problemi, basta non vederli.

Il testo si presenta come saggio rigoroso e completo. Riunisce sinteticamente tutto ciò che si è detto e scritto sul contratto didattico e che sarebbe lungo e difficoltoso andare a cercare su innumerevoli testi e articoli specializzati, lavoro questo fuori della portata degli insegnanti sempre più gravati da compiti nuovi e diversi. Anche questa ragione rafforza l'importanza dell'opera.

Progredendo nella lettura, o anche solo scorrendo l'indice, ci si può rendere conto della struttura del libro. Nella premessa si spiega chiaramente che cosa si de-finisce con l'espressione contratto didattico, come questo si instaura, quali effetti positivi e soprattutto negativi induce. Fra quelli negativi, gli Autori mettono in vetrina i noti effetti Topaze, Jourdain e Dienes, corredati da molti esempi significativi di situazioni di classe – in buona parte inediti – concernenti sia la scuola primaria sia quella secondaria. Alla fine il lettore trova un importante contributo teorico alla chiarificazione di alcuni paradossi della relazione insegnante-allievo. Il saggio termina con un esame degli aspetti storici, teorici ed epistemologici del contratto didattico.

Ogni insegnante dovrebbe conoscere queste problematiche e un modo intelligente per riordinare le idee in questo ambito, e per approfondirle, è senza dubbio la lettura di questa preziosa pubblicazione. (G. Arrigo)

Sbaragli S. (a cura di). (2011). *Buone pratiche d'aula in matematica*. Bologna: Pitagora. Pagg. 284, € 25.

Si tratta di una raccolta di «buone pratiche d'insegnamento», cioè di situazioni d'aula, realizzate da insegnanti in diverse zone d'Italia e che si riferiscono a tutti gli ordini scolastici, dalla scuola dell'infanzia fino alla scuola secondaria di secondo grado. Sono modelli da esaminare criticamente ed eventualmente seguire o dai quali trarne ispirazione per costruire unità didattiche. Le 33 proposte, suddivise in 9 sezioni, possono essere utili sia per gli insegnanti in servizio sia nei corsi di formazione. Nella prefazione di Bruno D'Amore e Silvia Sbaragli si precisa che si tratta di strumenti creati sulla base della ricerca al fine di attivare modalità didattiche tese a favorire sia la *competenza in matematica* sia la *competenza matematica* dei propri allievi (secondo la terminologia introdotta da M. I. Fandiño Pinilla).

La competenza in matematica si focalizza nella disciplina matematica, riconosciuta come scienza costituita, come oggetto proprio, specifico di conoscenza con il quale l'allievo entra in contatto.

D'altro canto, la competenza matematica è propria di un individuo che vede, interpreta e si comporta nel mondo in un senso matematico. La competenza, in questo senso, si può raggiungere sviluppando il gusto e la valorizzazione della matematica.

I contributi di questo testo sono stati scritti da insegnanti particolarmente qualificati, alcuni dal punto di vista della ricerca, altri attivi nell'innovazione e nella sperimentazione. Tutti costituiscono un'interfaccia preziosissima tra università e scuola, perché rendono praticabile la comunicazione fra teoria e pratica.

Gli insegnanti alla ricerca di nuove idee possono trovare in questa pubblicazione parecchio materiale di ottima qualità. (G. Arrigo)

Beccastrini S. e Nannicini M.P. (2010). *Il cinema e la matematica*. Trento: Erickson. Pagg. 280, € 19.

Contro la frammentazione dei saperi, ben vengano le opere, come questa, che cercano di mettere in relazione aspetti diversi della cultura. Nel loro bel libro gli Autori, non nuovi a questo tipo di discorso, ci presentano un saggio erudito sui rapporti tra cinema e matematica. Gli insegnanti alla ricerca di idee per far conoscere ai propri allievi l'importanza della matematica nella cultura odierna possono salutare questa opera come una nuova importante possibilità di smuovere gli allievi più ostinati nel ritenere la matematica una disciplina noiosa, completamente aliena dal mondo che conta. Ebbene, leggendo queste pagine ogni insegnante può riconoscere molteplici esempi di opere cinematografiche firmate da illustri registi e interpretate da attori mondialmente noti nelle quali la matematica e i matematici, grandi personaggi del passato e del presente assolutamente sconosciuti dai nostri giovani, sono protagonisti o fanno da sfondo alla narrazione. Lo slogan – e soprattutto l'idea – lanciati da Bruno D'Amore «la matematica è dappertutto» si arricchisce di un nuovo aspetto, forse, tutto sommato, più inaspettato e nel contempo più affascinante.

L'itinerario proposto dagli Autori parte da una riflessione sul ruolo della matematica nello sviluppo tecnico-scientifico del cinema. Dall'ottica geometrica – che ha solide radici negli *Elementi* di Euclide – alla ricerca del movimento, della quale si possono trovare le prime tracce nei dipinti quattrocenteschi, poi nelle prime fotografie risalenti all'inizio del XIX secolo, fino a giungere ai fratelli Lumière che furono gli artefici dell'inizio dell'era cinematografica (per i curiosi, una data: 28 dicembre 1895).

La ricerca, condotta con rigore scientifico dagli Autori, ha permesso di mettere in evidenza, in questo libro, aspetti assolutamente non comuni della storia del cinema. Prima di tutto il ruolo importante giocato dai numeri come strumento per capire aspetti fondamentali della cinematografia, poi, per il piacere della curiosità, la presenza dei numeri nei titoli dei film. Fra i numeri che più hanno affascinato i creatori di pellicole non potevano certamente mancare zero, pi-greco e il rapporto aureo. Riguardo ai matematici protagonisti di film, gli Autori cercano di rispondere alla domanda «cosa fanno i matematici sullo schermo (oltre che insegnare)?». La risposta non può essere che variegata, ma sotto sotto si avverte l'importante messaggio che gli autori ci vogliono comunicare. I matematici sono persone comuni, con gli stessi pregi e difetti degli altri, ma con una passione non comune, la matematica, che offre loro un costante rifugio in cui ripararsi nei momenti difficili e un immenso e affascinante giardino, tutto da percorrere, da osservare, da coltivare. L'immagine della matematica esce arricchita rispetto a quella (per lo più brutta) posseduta dalla stragrande maggioranza degli individui non specialisti, perché dai tanti film citati si possono conoscere ben altre facce di questa scienza, sempre interpretata positivamente, e ben conosciuta, aggiungerei.

L'ultima parte dell'opera è dedicata alla storia della matematica ripresa e romanzata da numerosi film. Soprattutto da quelli biografici (*Biographical Motion Picture*, noti ormai come *Biopic*). Anche di questa parte non sveliamo né titoli né registi né attori, lasciando intatta la curiosità del lettore. Ci limitiamo a osservare che la vasta competenza cinematografica degli Autori fa sì che ciascuno potrà trovare citati i film che si aspetta, ma ne troverà anche parecchi completamente sconosciuti. (G. Arrigo)

Progetto grafico
Bruno Monguzzi
Prestampa
Taiana
Stampa
Veladini

Redazione
Laboratorio di didattica della matematica
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera

Telefono
091 814 18 21/22/24
Fax
091 814 18 19
gianfranco.arrigo@span.ch

Amministrazione
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera
Fax
091 814 18 19

Esce due volte all'anno
a maggio e a dicembre

Abbonamento annuo
SFR 30
€ 16

Bollettino dei docenti di matematica
62

In questo numero: ricordo di due matematici scomparsi di S.-D. Chatterji e M. Ojanguren, di S. Maracchia, di G. Mainini e redazionale; quadrati magici di G. Mainini; didattica teorica di B. D'Amore e M. I. Fandiño Pinilla; sperimentazione didattica di G. Arrigo; sintesi di un lavoro di abilitazione di M. Eisenring; matematica nell'insegnamento di M. Cerasoli e di G. Arrigo; quiz di A. Frapolli; passeggiate matematiche di A. Steiner; una segnalazione e recensioni.

ISBN 978-88-86486-82-8
Fr. 18.–

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport