A cura
del Laboratorio di didattica della matematica

Bollettino dei docenti di matematica

63

Dicembre
2011

Ufficio
dell'insegnamento medio
Centro
didattico cantonale

Bollettino
dei docenti di matematica
63

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport

ISBN 978-88-86486-83-5

Bollettino dei docenti di matematica 63

Dicembre
2011

Ufficio dell’insegnamento medio
Centro didattico cantonale

Indice

Prefazione

La sezione Varia rende omaggio alla memoria del grande matematico Alexander Ostrowski. Nato a Kiev (Ucraina), ha operato anche in Occidente (Germania, Inghilterra, USA), ha terminato la carriera universitaria a Basilea e ha trascorso la quiescenza da noi, a Montagnola. È in questo periodo (anni Settanta) che si è avvicinato al Liceo cantonale di Lugano, dove ha conosciuto, fra gli altri, Gianfranco Arrigo, autore dell'articolo di apertura, che vuole testimoniare come l'influenza di Ostrowski abbia interessato anche la nostra scuola.

La sezione Didattica costituisce il grosso del numero 63. Si inizia con un nuovo articolo di Bruno D'Amore che ha il pregio di sintetizzare alcuni concetti di didattica teorica, molto utili per la riflessione di ogni insegnante, argomenti che si possono trovare in innumerevoli opere e articoli specialistici che sarebbe però difficile recuperare, soprattutto per chi insegna a tempo pieno. Si prosegue poi con la presentazione delle sintesi di alcuni lavori di abilitazione all'insegnamento nelle scuole medie, opera dei diplomati del corso complementare di matematica. Non si tratta ovviamente di rapporti di ricercatori, ma di interessanti studi su temi molto attuali, effettuati in una situazione di ricerca-azione. Sono uno specchio della formazione che questi ex-insegnanti di scuola elementare hanno ricevuto al Dipartimento della Formazione e dell'Apprendimento della SUPSI di Locarno. Al di là di tutte le riserve e perplessità suscitate nel cantone dall'effettuazione di questo corso, leggendo senza pregiudizi queste pagine si dovrebbe riconoscere il prezioso apporto che questi nuovi docenti danno alla scuola media, caratterizzato soprattutto da competenze didattiche – teoriche e pratiche – di grande attualità. Vi si trovano nell'ordine: uno studio sulla continuità dell'insegnamento della geometria tra scuola elementare e scuola media, di Sandra Moccetti; una riflessione sul delicato problema dello strumento equazionale tra significato e sintassi, di Lorenza Porteri Ferdani; un approfondimento dell'aspetto metodologico di *HarmoS* «Esplorare e tentare» relativo al concetto matematico della frazione come numero, di Marisa Ferrari; un lavoro sull'apprendimento del concetto di numero razionale con l'ausilio del foglio elettronico, di Francesco Pagnamenta. La sezione si conclude con una nuova puntata di «Apprendere giocando» del maestro Bernardo Mutti che presenta altri materiali di manipolazione molto apprezzati dagli insegnanti della scuola elementare.

Segue poi l'immancabile Quiz di Aldo Frapolli, sempre ermetico, intrigante, appassionante, ottimo stimolo per confronti e discussioni fra docenti di ogni ordine scolastico.

La sezione dedicata alla disciplina matematica si compone di due contributi: Paolo Hägler, che si sta confermando firma importante della nostra rivista, ci delizia con il «problema dei pasti», un'originale creazione nata, pensate un po', a tavola, ma dai contenuti matematici tutt'altro che banali; il secondo articolo porta la firma collaudata di Giorgio Mainini e tratta di divisioni e resti (attenti, però, non è la solita musica…).

Troviamo poi un articolo concernente l'informatica. Con questa pubblicazione crediamo di fare cosa gradita agli insegnanti perché Sandro Boffa ci offre alcuni suoi lavori realizzati con Cabri-Géomètre Plus, concernenti la rappresentazione di figure geometriche tri-dimensionali. Queste figure ci piacciono per due ragioni: rappresentano la continuazione del filone, già da noi percorso negli anni scorsi, consistente nel riuscire a ottenere risultati che vanno oltre le intenzioni pensate dai creatori del software usato (in questo caso: creare figure 3D con un programma di geometria piana), secondariamente, ma ancor più interessante per il docente di matematica, queste immagini si formano automaticamente sullo schermo, con un effetto di animazione, in modo da mostrare a chi le guarda una chiara immagine della loro struttura geometrica.

Come sempre, si chiude con segnalazioni di manifestazioni pubbliche dedicate soprattutto agli insegnanti: la conferenza di Bruno D'Amore «Matematica, stupore e poesia», organizzata dalla SMASI e dalla Divisione della scuola; la festa «Matematica: il grande spettacolo» offerta dal NRD di Bologna nel magnifico Parco Oltremare di Riccione.

Fra le recensioni, abbiamo questa volta il piacere di presentare il nuovissimo cofanetto «Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere», 14 volumi per venire incontro alle esigenze didattiche degli insegnanti della scuola elementare.

1. Il mio ricordo di Ostrowski[1]

Gianfranco Arrigo

This article pays tribute to the great Russian mathematician Alexander Ostrowski, who died 25 years ago, by remembering a meeting that took place at the Liceo Cantonale in Lugano in the 70s. It aims at highlighting how sensitive this mathematician was when it came to teaching and the great interest he showed towards teaching the basics of analysis.

1. L'incontro

Era un pomeriggio[2] di marzo agli inizi degli anni Settanta. Alexander Ostrowski era in visita al Liceo cantonale di Lugano, quello di Carlo Cattaneo, sito nel Palazzo degli Studi che per anni è stata l'unica scuola liceale del cantone. In quel tempo abitava a Montagnola. Dovevo sicuramente essere emozionato di poter stringere la mano a un così illustre matematico, ma la sua modestia e gentilezza mi misero subito a mio agio. Ci parlavamo in tedesco: lui da russo conoscitore della lingua germanica soprattutto scritta, io da ticinese che ha studiato a Zurigo. Fu subito sorpreso di apprendere che ci eravamo dotati di un «calcolatore da tavolo», il mitico (mi sia permesso questo termine oggi abusato) Olivetti Programma 101 (detto semplicemente P101). A chi non ha vissuto quegli anni posso dire che si trattava di un computer precursore dei PC, che occorreva programmare praticamente in linguaggio macchina. Per poterlo usare bisognava sempre introdurre un programma composto di una successione di comandi alfanumerici. Lo si poteva fare direttamente da tastiera oppure da scheda magnetica preventivamente registrata. Niente schermo, nessun software, nessuna funzione preprogrammata, tranne le quattro operazioni aritmetiche, l'elevazione a potenza e la radice quadrata. Disponeva di 10 registri di memoria: 2 per il programma (massimo 48 istruzioni), 3 operativi e 5 numerici della capacità di 22 cifre più virgola e segno. L'output veniva stampato su una strisciolina di carta. Per esempio, se si voleva calcolare $\cos(77^\circ)$, si doveva programmare lo sviluppo in serie della funzione coseno, trasformare i gradi in radianti e immettere questo valore in uno dei registri di memoria. Lontanissimo dai moderni PC. Eppure si lavorava con molto piacere e ci si sentiva larga-

1. Alexander Markowich Ostrowski nasce a Kiev (Ucraina) il 25 settembre 1893. Ha operato prevalentemente nell'allora URSS e in Germania, con periodi trascorsi in Inghilterra e negli USA e ha concluso la sua carriera universitaria a Basilea fino al ritiro ufficiale nel 1958; dopo di che trascorre gli ultimi anni della sua vita da noi, a Montagnola, dove muore il 20 novembre 1986.
2. In realtà gli incontri sono stati più di uno, ma, per comodità, li considero insieme.

mente soddisfatti dei risultati trovati: per esempio, calcolo delle prime 20 cifre di pi greco, calcolo di integrali definiti con la regola del trapezio, persino un programma per l'elaborazione dei voti che veniva usato negli scrutini. Ostrowski fu affascinato, non tanto della macchina in sé, ma del lavoro intelligente che occorreva eseguire per usarla. Qui capii la profonda sensibilità didattica del grande matematico. Subito discutemmo degli innumerevoli vantaggi di mettere questo strumento a disposizione degli studenti stessi. Si venne presto a parlare di limiti di funzioni e della comprensione concettuale di convergenza e di divergenza, nelle varie forme che di solito si usano nelle scuole superiori, riconoscendo nello strumento elettronico un potente mezzo per dare senso alle definizioni e ai teoremi che si insegnavano al liceo.

Fu allora che Ostrowski, con grande semplicità, mi espose il suo modo di affrontare il concetto più arduo dell'analisi, quello basilare: il limite di una funzione reale a una variabile.

Dopo quell'incontro, il mio modo di insegnare l'analisi cambiò radicalmente.

2. Il concetto di limite di una funzione reale a una variabile[3]

L'idea di Ostrowski consiste nello sviluppare l'intera teoria del calcolo dei limiti nell'ambito discreto, cioè riferita alle successioni numeriche. Operazione, questa, che lui propone in modo magistralmente semplice, come mostrerò in seguito. Subito dopo introduce il «Principio di trasposizione»[4] del concetto di limite di una successione numerica al caso del limite di una funzione reale. In virtù di questo criterio, tutti i teoremi sui limiti delle successioni numeriche sono estendibili automaticamente a tutte le funzioni reali. Il valore didattico di questa intuizione è fuori di dubbio: si dà agli studenti un modello semplice, chiaro e basilare del concetto di convergenza e si aggirano elegantemente le dimostrazioni sul calcolo dei limiti delle funzioni, tutt'altro che semplici e assolutamente poco entusiasmanti almeno per gli studenti. Di seguito presento in sintesi il metodo di Ostrowski, sperando che qualche lettore che non lo conosce ancora possa trarne beneficio per il proprio insegnamento.

2.1. Le successioni nulle[5]

Il concetto di successione nulla è il pilastro che regge tutta la teoria. Contiene l'idea più semplice, primitiva, il primo modello mentale e adeguato – aggiungerei – di convergenza.

Ecco in sintesi l'iter proposto da Ostrowski.

– Una **successione** (numerica, infinita) è una funzione reale avente **N*** come insieme di definizione; si indica, per esempio, con $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ oppure con (a_n): a_n si dice termine n-esimo, n indice della successione.

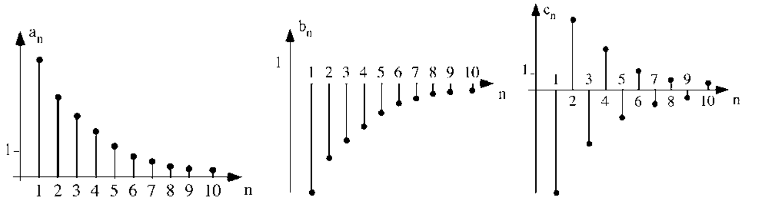
3. Per una più completa informazione rimando al testo di Ostrowski, *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung Band I*, Basel: Birkhäuser Verlag (prima edizione del 1945; seconda edizione rielaborata del 1960).
4. Libera traduzione dal tedesco «Uebertragungsprinzip».
5. Libera traduzione dal tedesco «Nullfolgen».

– «Una successione si dice (b_n) si dice **successione nulla (SN)** quando, per n sufficientemente grande, il valore assoluto dei suoi termini è minore di qualsiasi numero ε che si possa immaginare». Un po' più formalmente: una successione (b_n) è nulla se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ N(\varepsilon) \text{ tale che: } n > N(\varepsilon) \Rightarrow |b_n| < \varepsilon$$

(Le raccomandazioni di Ostrowski relative a questo punto focale e delicato sono di proporre agli studenti numerosi esempi e di chiarire la dipendenza di N(ε) da ε, usando anche il computer sia nel registro numerico sia in quello grafico.)

I primi 10 termini di una SN…



monotona decrescente monotona crescente non monotona

Proprietà delle successioni nulle.
P1. Ogni SN (a_n) è **limitata**, cioè esiste sempre un numero reale C tale che: $|a_n| < C$, $\forall n$
P2. Se (x_n) e (y_n) sono SN, allora anche $(x_n \pm y_n)$ è SN
P3. Se (x_n) è SN e (y_n) è successione limitata, allora $(x_n \cdot y_n)$ è SN

Caso particolare: il prodotto di due SN è una SN.

Le dimostrazioni delle proprietà delle SN sono importanti perché sono alla base di tutta la teoria dei limiti e d'altra parte appaiono molto semplici.

Esempio: dimostrazione della proprietà P2 relativamente alla somma.

$$(x_n) \text{ SN} \Leftrightarrow \left[\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ N(\varepsilon) \text{ tale che: } n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n| < \varepsilon\right]$$
$$(y_n) \text{ SN} \Leftrightarrow \left[\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ N'(\varepsilon) \text{ tale che: } n > N'(\varepsilon) \Rightarrow |y_n| < \varepsilon\right]$$

e sommando:

$$n > \text{Max}(N; N') \Leftrightarrow |x_n| + |y_n| < 2\,\varepsilon, \text{ e a fortiori}$$

$$|x_n + y_n| < |x_n| + |y_n| < 2\,\varepsilon$$

A questo punto occorre rendersi conto della particolarità del numero ε; potendolo scegliere come si vuole, ci si rende facilmente conto che anche 2 ε è un numero piccolo quanto si vuole. Lo studente più scettico deve convenire che nelle due espressioni iniziali al posto di ε si sarebbe potuto scrivere ε/2 in modo da dare all'espressione finale la forma canonica, ma si potrebbe anche esagerare e sostituire ε con ε/10, ε/100, ε/1000, ecc. Questo tipo di ragionamento fa crescere di molto il senso della definizione di SN e Ostrowski l'ha sottolineato con forza.

2.2. Le successioni convergenti

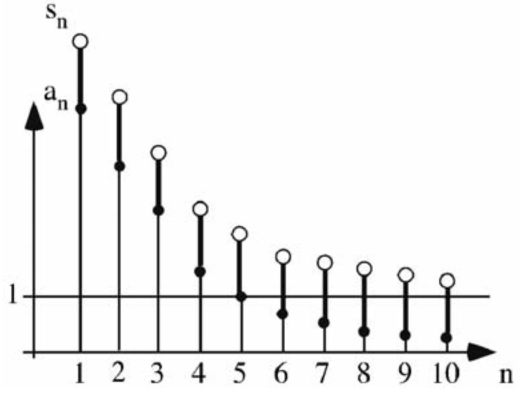
Proseguendo sulla linea tracciata da Ostrowski, si dice che una successione (a_n) **converge** verso un **limite** A ($A \in \mathbb{R}$) quando la successione $(a_n - A)$ è SN; si scrive sinteticamente $\lim_{n\to\infty} a_n = A$

Un po' più formalmente, questa scrittura significa dunque:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow \left[\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ N(\varepsilon) \text{ tale che: } n > N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon\right]$$

Ovviamente a questa scrittura lo studente arriva dopo un po', in particolare dopo aver lavorato su diverse successioni numeriche, sia con carta e penna, sia con l'ausilio di un computer che offre una comodissima possibilità di visualizzare la rappresentazione cartesiana delle successioni.

Il fatto più importante rimane però quello di aver ricondotto la definizione di successione convergente a quella di SN.



(s_n) è successione che converge verso 1; $(a_n) = (s_n - 1)$ è SN

I teoremi sul calcolo dei limiti delle successioni convergenti risultano essere una conseguenza diretta delle proprietà delle SN.

Esempio: limite di una somma.
Se $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, allora $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$

Infatti: $(a_n - A)$ è SN, $(b_n - B)$ è SN, quindi

$a_n - A + b_n - B = (a_n + b_n) - (A + B)$

ciò significa che la successione $(a_n + b_n)$ converge verso il limite A+B.

Ragionamento lineare, nessun ε di mezzo; o meglio nessun ε esplicitato.

Analogamente si dimostrano i teoremi sul limite di un prodotto di due successioni convergenti e di una successione convergente per una costante. Un tantino più laboriosa ma priva di particolari difficoltà è la dimostrazione del limite del quoziente.

Molto importante per il seguito è il teorema sull'unicità del limite, cioè: ogni successione convergente ha un solo limite.

Per dare maggior senso al concetto di limite è opportuno introdurre quello di punto di accumulazione. Ci si può accontentare di definirlo per insiemi di numeri reali o, per la nota corrispondenza biunivoca, per insiemi di punti di una retta.

Dato un insieme $I \subset \mathbb{R}$, il numero $x_0 \in \mathbb{R}$ è punto di accumulazione di I se e solo se in ogni intorno di x_0 si trovano infiniti elementi di I. Ci si può anche limitare al caso particolare in cui I è numerabile, cioè successione numerica. Si può subito dire che ogni successione convergente possiede un solo punto di accumulazione, che è il suo limite. Qui si può rendere cosciente lo studente del fatto che il limite non appartiene necessariamente alla successione. A questo punto lo studente può chiedersi se esistono successioni con più punti di accumulazione e altre con nessun punto di accumulazione.

Delle prime, basta fare qualche esempio:

$$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

Questa successione possiede due punti di accumulazione: -1 e $+1$. Se si applica la definizione di limite si vede immediatamente che sia -1 sia $+1$ non possono essere limiti. Dunque questa successione non è convergente.

Le successioni che non possiedono punti di accumulazione si dicono divergenti all'infinito. Una successione (b_n) diverge all'«infinito positivo» se e solo se i suoi termini, da un certo indice in poi, superano qualunque numero positivo M che si possa stabilire; analogamente una successione c_n diverge all'«infinito negativo» se e solo se i suoi termini, da un certo indice in poi, sono minori di qualunque numero negativo M. Si usa scrivere:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \quad , \quad \lim_{n\to\infty} c_n = -\infty$$

Se si preferisce, con un po' più di formalismo:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \left[\forall C > 0,\ \exists\ N(C) \text{ tale che: } n > N(C) \Rightarrow |x_n| > C\right]$$

Occorre far notare agli studenti i diversi ostacoli epistemologici presenti in questi formalismi. Innanzi tutto il simbolo di limite è usato per indicare l'assenza del limite stesso: dopo di esso si scrive «=» e dopo l'uguale il simbolo di infinito che non è un numero reale. Inoltre si parla di infinito positivo e di infinito negativo, dopo aver detto – giustamente – che l'infinito non è un numero reale. I matematici, da circa un secolo e mezzo, non hanno più problemi a scrivere e a interpretare queste scritture; ma ci sono voluti secoli, millenni per venirne a capo. Ora lo studente avverte queste difficoltà, ha bisogno di sapere come si è giunti a scrivere così, ha bisogno di essere rassicurato, di capire che certe scelte, anche in matematica, vengono adottate per comodità anche se dal profilo logico non starebbero in piedi. Di questo ho discusso parecchio con Ostrowski e ricordo benissimo quanto egli fosse cosciente di queste difficoltà e quanta considerazione avesse di conseguenza per l'insegnamento liceale, perché è al liceo che si devono ben capire questi concetti, prima ancora di occuparsi di questioni tecniche con l'esasperazione che se ne fa oggi. L'allievo che di fronte a queste difficoltà non si esprime o, peggio, si esprime ma non riceve la dovuta spiegazione, si rifugia nella memorizzazione che lo potrà aiutare, forse, nelle prove di valutazione e magari anche all'esame di maturità. Ma non avrà appreso nulla e nella sua mente si rafforzerà l'idea perversa che la matematica è una disciplina per soli (pochissimi) eletti.

2.3. Il principio di trasposizione del concetto di limite di una successione numerica al caso del limite di una funzione reale

Arriviamo ora al capolavoro di Ostrowski[6]: il già citato principio di trasposizione.

Data la funzione reale $y=f(x)$, per ogni successione (x_n) divergente all'infinito vale

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=s \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty} f(x_n)=s$$

e inversamente se per ogni successione divergente all'infinito

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=s \text{ , allora } \lim_{x\to\infty} f(x)=s$$

La dimostrazione della prima parte non pone particolari problemi, mentre per l'inversa, nel caso di funzioni non localmente monotone, si deve ricorrere al ben noto assioma della scelta di Zermelo (1908).

Usare questo principio nell'insegnamento liceale permette di operare una grande semplificazione nella teoria dei limiti delle funzioni reali. Basta osservare che per x tendente all'infinito ogni teorema sulle successioni numeriche (compresi quelli sul calcolo dei limiti) può essere automaticamente esteso alle funzioni reali. Di queste ultime si definiscono anche i limiti per x tendente a un determinato numero reale, che indichiamo con x_0. A un livello più approfondito si può distinguere fra limite sinistro, limite destro e limite *tout court*. Anche questi casi possono essere ricondotti a quello contemplato dal principio di trasposizione, mediane un semplice cambiamento di variabile.

Per il limite sinistro:

$$\lim_{x\uparrow x_0} f(x)=\lim_{y\to+\infty} f\left(x_0-\frac{1}{y}\right)$$

e per quello destro:

$$\lim_{x\downarrow x_0} f(x)=\lim_{z\to+\infty} f\left(x_0+\frac{1}{z}\right)$$

6. Sono ben cosciente che sarebbe improprio attribuire questo principio a Ostrowski. La materia è comunemente conosciuta, ma il merito di Ostrowski è di aver proposto questo principio per ragioni profondamente didattiche.

Grazie a questi semplici accorgimenti si può estendere automaticamente la teoria dei limiti delle successioni numeriche a tutti i casi dei limiti delle funzioni reali, qualunque sia il tipo di tendenza della x.

Per gli studenti ciò significa non dover più studiare le dimostrazioni che chiamano in causa il noto metodo dell'epsilon-delta. Significa anche però rivalutare la teoria discreta dei limiti – quella dei limiti delle successioni, per intenderci –, quella che più di ogni altra può dare la possibilità allo studente di dare un senso compiuto al fenomeno della convergenza. Su questo, Ostrowski non aveva alcun dubbio e in questo mi ha trovato del tutto d'accordo.

3. Soddisfazione e l'incontro con Francesco Tricomi[7]

Con piacere e soddisfazione ho subito iniziato a insegnare seguendo lo schema appena presentato. Con i miei studenti mi soffermavo parecchio sui concetti basilari concernenti le successioni numeriche infinite; cercavo di abituarli a passare dal registro numerico (studiato anche con l'ausilio del computer), a quello algebrico, alla rappresentazione cartesiana, alle situazioni geometriche; ma soprattutto si passavano lunghi momenti a «stuzzicare» le successioni, per esempio quelle convergenti, immaginando ε sempre più piccoli e determinando di conseguenza l'$N(\varepsilon)$, indice a partire dal quale tutti i termini della successione risultavano più vicini al limite di ε. Avevamo persino inventato un personaggio: un ingegnere giapponese, direttore di una fabbrica di ε. Ovviamente i suoi ε erano tremendamente più piccoli dei nostri, ma le successioni correttamente convergenti reggevano anche alla verifica fatta con gli ε giapponesi!

Analogamente si mettevano alla prova le successioni divergenti. L'episodio che mi è rimasto impresso nella memoria si riferisce alla successione delle somme parziali della serie armonica il cui termine n-esimo, come sanno bene gli studenti, è

$$s_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Ora, già nel tardo Medioevo il francese Nicola di Oresme (1323 circa-1382) dimostra che questa serie diverge all'infinito. Senza dire nulla agli studenti, ho proposto loro di stimare il comportamento all'infinito della successione s_n. In quegli anni il Liceo di Lugano possedeva un terminale di un grande computer situato a Basilea. Si programmava in FORTRAN, si inseriva il programma da tastiera in una macchina che perforava le schede, si raccoglieva il mazzo di schede (una scheda per ogni riga del programma) e lo si introduceva nel lettore. Per via telefonica il programma veniva trasmesso al computer centrale il quale eseguiva e ritornava i risultati, che uscivano dalla stampante su quei foglioni di carta dalle righe alternate bianche e grigie. Roba d'altri tempi: oggi basterebbe un semplice foglio elettronico. Qualche studente aveva programmato di calcolare i primi 100 termini, altri, pensando già di esagerare, i primi 1000 e qualcuno, quasi per scherzo, i primi 10'000. La sorpresa, per me, è stata

7. Matematico italiano nato a Napoli nel 1897 e morto a Torino nel 1978. Si occupò prevalentemente di analisi.

grande perché, pur sapendo che la serie diverge lentamente, non pensavo a una lentezza così… imbarazzante. Per capire la situazione, basterebbe considerare che

$$s_{100} = 5{,}187\ldots \quad , \quad s_{1000} = 7{,}485\ldots \quad , \quad s_{10000} = 9{,}787\ldots$$

e che io avrei dovuto convincere gli allievi che questa successione diverge all'infinito!

D'altra parte, la dimostrazione suggerita da Oresme è facile da capire: (1/3 + 1/4) è maggiore di 1/2, lo stesso vale per (1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8) e così via. Quindi, se prendiamo prima 2 termini, poi 4, poi 8, poi 16, e così via, possiamo raggruppare la serie in un numero infinito di gruppi, ognuno dei quali è maggiore di 1/2. La somma totale deve perciò essere infinita. Non so quanti studenti furono convinti dalla dimostrazione e quanti invece rimasero più dell'idea che, di questo passo, addizionando nuovi valori sempre più piccoli, non si sarebbe mai arrivati a superare grandi numeri. Sono però convinto che simili episodi contribuiscono non poco a far evolvere la conoscenza.

Venne anche il giorno dell'esame orale di maturità[8]. Commissario di esame, il prof. Francesco Tricomi, del Politecnico di Torino, sicuramente uno dei maggiori matematici italiani del Novecento. Contrariamente a Ostrowski, Tricomi era una persona che incuteva timore e soggezione. Di fronte a lui la mia fiducia nel modo adottato per lo svolgimento della teoria dei limiti si stava sfaldando. D'altra parte non potevo più tornare indietro. Ai primi studenti capitarono domande sulle successioni e tutto andò bene. Il primo studente che dovette esprimersi sul limite di una funzione reale, per x tendente a x_0, parlò del principio di trasposizione. Tricomi, da gran signore qual era, lì per lì non disse nulla, ma, congedato lo studente, mi rivolse la domanda: «su quale testo ha impostato le sue lezioni?». Mi sentii mancare, ma riuscii a nominare Ostrowski. «Me lo sarei aspettato!» mi rispose e continuò «Deve sapere che la dimostrazione della seconda parte di questo principio (la più importante!) si avvale obbligatoriamente dell'assioma della scelta di Zermelo, assioma che è meglio evitare, nonostante i recenti risultati, in un certo senso rassicuranti, di Paul Cohen»[9].

L'esame continuò come da copione e, alla fine, Tricomi si complimentò per le conoscenze da lui definite avanzate che avevano dimostrato di possedere i miei allievi dello scientifico. «Queste cose [varie tecniche d'integrazione e applicazioni geometriche del calcolo integrale], da noi in Italia, si insegnano solo nei primi semestri d'università», ebbe a dirmi. Rassicurato, ci salutammo e mi promise una copia del suo testo *Lezioni di Analisi Matematica*. La ricevetti qualche settimana dopo, con tanto di dedica, e mi misi subito a sfogliarla. Era la Parte prima della Nona edizione, edita a Padova nel 1965 da CEDAM.

La mia attenzione ricevette un grosso incremento quando giunsi alla pagina 128. Dopo aver presentato i vari casi di definizione di limite per le funzioni reali

8. Il racconto dell'esame è una ricostruzione a distanza di decenni di un fatto realmente accaduto.
9. Kurt Gödel dimostra nel 1938 che l'assioma della scelta non porta ad alcuna contraddizione nell'ambito della teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel. Nel 1963, inoltre, Paul Cohen dimostra che anche la negazione dell'assioma della scelta non conduce a contraddizioni. Ciò significa che dal punto di vista formale l'assioma è accettabile. Gran parte dei matematici lo usano senza problemi, ma occorre riconoscere che una minoranza non trascurabile di essi cerca di non servirsi di questo assioma.

a una variabile, seguendo il metodo epsilon-delta dovuto a Weierstrass[10], Tricomi prosegue così: *Il concetto di limite risultante dalle precedenti definizioni è più ampio di quello relativo alle successioni e perciò non è senz'altro riconducibile a quello. È invece facile far vedere come il concetto di limite di una successione rientri, come caso particolare, in quello di limite di una funzione.*

A questo punto, però, introduce una nota a piè di pagina molto significativa (sente, cioè, il dovere di precisare, ma lo nasconde alla maggior parte dei lettori): *La questione se il concetto di limite di una funzione sia riconducibile o no a quello di limite di una successione, è connessa col controverso postulato della scelta (o di Zermelo)(…). Comunque, se si supera questo scrupolo, la riduzione è possibile e offre degli evidenti vantaggi. Può all'uopo vedersi il trattato di Ostrowski cit. nella Prefazione*[11].

Chiusi il libro e non ebbi più dubbi.

4. Sviluppi attuali

A venticinque anni dalla scomparsa di Ostrowski ho voluto dedicargli queste brevi note. Sono ricordi lontani nel tempo, ma che rivivo come se si riferissero a episodi accaduti ieri. La lezione che ne ricavai e i successivi sviluppi nei quali la mia riflessione didattica si è gradatamente perfezionata sono ancora vivi nella mente e, all'occorrenza, mi piace riproporli ai giovani che iniziano a insegnare nelle scuole superiori. Significativo è il fatto che la mia prima ricerca ufficiale, fatta con Bruno D'Amore, sia stata imperniata sugli ostacoli che deve superare chiunque intenda iniziare lo studio dell'Analisi matematica[12]. Ultimamente è uscito il libro *Infiniti infiniti*[13], scritto in collaborazione con D'Amore e con Silvia Sbaragli, particolarmente dedicato a insegnanti e studenti, opera che ha sostituito un testo ormai esaurito da tempo[14]. Nel recente articolo *«e» come Euler*[15] ho invitato gli insegnanti a cercare testi originali dei matematici che hanno contribuito allo sviluppo dei metodi dell'analisi e successivamente alla fondazione dei concetti di limite e di continuità, per poi proporne la lettura agli studenti stessi, almeno dei passaggi ritenuti più utili all'apprendimento concettuale.

10. Ufficialmente questo avviene nel 1860 con la pubblicazione della monografia delle sue lezioni all'Università di Berlino.
11. Vedi nota 3.
12. Arrigo G. e D'Amore B.: «Lo vedo, ma non ci credo» Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale. La prima parte del lavoro è stata presentata e accolta al CERME 1 (Conference of the European Society for Research in Mathematics Education), Osnabruck, (D), 1999. La seconda parte è apparsa sulla rivista «La matematica e la sua didattica», anno 2002, nr. 1. Di entrambe le ricerche si possono leggere le sintesi dei rapporti sui numeri 42 e 46 di questa rivista.
13. Libro scritto da Arrigo, D'Amore e Sbaragli e pubblicato nel 2010 da Erickson, recentemente uscito anche in versione spagnola col titolo *Infinitos infinitos* a cura della Compagnia Editorial Magisterio, Bogotà (Colombia).
14. Si tratta del libro di D'Amore e Arrigo, *Infiniti*, pubblicato da Franco Angeli nel 1992.
15. Arrigo G. (2011). «e» come Euler. *Bollettino dei docenti di matematica, nr. 62.* Bellinzona: UIM-CDC.

Non si dimentichi che lo studente ha molto bisogno di entrare nella problematica dell'infinito matematico in modo che mi piace definire «euristico-operaio», cioè avvicinandosi con molta umiltà ai vari concetti affrontando situazioni adatte, esprimendosi, durante un periodo sufficientemente lungo, in linguaggio naturale – proprio come agivano i matematici fino alla metà circa del XIX secolo – senza concedere troppo al rigore. In questo modo, a poco a poco, si fa strada anche la necessità di essere più precisi, e lo studente giunge così ad accogliere con soddisfazione il formalismo come strumento che permette la sintesi e il rigore, quest'ultimo sicuramente decisivo per poter eliminare le diverse ambiguità e misconcezioni.

Mi è difficile capire quanto abbia influito l'incontro con Ostrowski nella decisione di dedicare una buona parte dei miei studi al concetto di infinito e ai relativi problemi che sorgono nell'importante quanto delicata fase di insegnamento-apprendimento. Di sicuro, senza gli stimoli datimi dal grande matematico russo, non avrei avuto un così grande interesse per questa tematica.

1. Alcune riflessioni su didattica, concetto, competenza, schema, situazione

Bruno D'Amore[1]

This analysis proposes the cross-terms that often appear in texts dealing with research in mathematics education.

Didattica

Si può intendere per *didattica disciplinare* lo studio dei processi di trasmissione e di appropriazione dei saperi e dei saper-fare relativamente a ciò che questi processi hanno di specifico rispetto ad un contenuto, tenendo conto di alcuni fattori che preciso di seguito.

a) Voglio includere in questa ampia descrizione del termine, tanto la *didattica delle discipline* (come la didattica della matematica) quanto la *didattica professionale* (per esempio quella che si ha nei corsi di formazione professionale o specifica di un dato apprendimento di fronte a situazioni molto specifiche: formazione all'interno di una ditta, insegnamento-apprendimento di un mestiere, spiegazioni sul funzionamento di un apparato, apprendistato sportivo: come effettuare un salto in alto etc.).
b) Voglio evidenziare una volta tanto un elemento troppo sottaciuto e cioè quanto sia di rilevante importanza la *durata* del processo di trasmissione; un processo come quello scolastico, il cui risultato positivo o negativo si misura in anni, ha una sua specificità ben diversa da quella di una semplice comunicazione su un atto da compiere, per esempio dato da un professionista ad un apprendista. Il fattore «durata del processo di insegnamento-apprendimento» non viene quasi mai messo in evidenza negli studi.
c) È di rilevante importanza la *situazione* nella quale si svolge il processo; ne sono così convinto da affermare che la situazione determina il processo (in bene o in male).

Prima di proseguire, voglio far notare come la specificazione del contenuto differenzia nettamente e senza alcuna possibile confusione la didattica dalla psicologia. La psicologia dell'apprendimento si è sviluppata secondo modelli assai diversi:

1. NRD Bologna – MESCUD Bogotá.

il comportamentismo, il cognitivismo, il modello dell'apprendimento per intuizione o insight, per imitazione o imitazione sociale e il connessionismo. Per esempio, la psicologia dell'apprendimento studia i meccanismi dell'attenzione, cosa che la didattica non fa (meglio: non ha gli strumenti per fare).

Torniamo al discorso precedente.

Che differenza c'è tra didattica di una disciplina e la didattica professionale? A mio avviso, sono i processi di concettualizzazione che fanno la differenza: la didattica di una disciplina fa necessariamente riferimento alla epistemologia di quella disciplina, nel senso che è impensabile una didattica della disciplina *d* che non chiami in causa non solo *d*, ma la epistemologia di *d*.

Questo genere di riflessioni sulla specificità, sembra non avere fine; nel caso specifico della matematica, possiamo segnalare almeno 5 aspetti specifici del suo apprendimento (Fandiño Pinilla, 2008):

– apprendimento concettuale
– apprendimento algoritmico
– apprendimento strategico (es.: la risoluzione dei problemi)
– apprendimento comunicativo
– apprendimento semiotico (es.: gestione delle rappresentazioni e trasformazioni di trattamento e conversione).

Qualsiasi professionista del processo di insegnamento – apprendimento a lungo periodo, per esempio scolastico, può confermare che questa ripartizione specifica ha non solo una valenza teorica, ma anche e soprattutto un senso empirico, di grande interesse: i problemi che gli allievi incontrano in un campo concettuale sono diversi da quelli che incontrano in un altro, differenti sono anche i problemi di concettualizzazione; e così via.

Tutto questo discorso non sembra avere l'analogo nell'apprendimento professionale puro. Per cui è fortemente scorretto cercare di far passare l'idea che lo studente a scuola è come un apprendista in fabbrica; i processi sono indubbiamente assai diversi.

Anche l'idea di valutazione di una competenza deve essere rivista criticamente; all'ex apprendista si può proporre una prova pratica di valutazione della competenza raggiunta al termine dell'addestramento; al neofita del salto in alto si può proporre di superare l'asticella posta a 2 m di altezza: o la supera o no; valutare le competenze di uno studente in aula è assai più complesso, a mio avviso impossibile con test (come dimostra il fallimento in questo senso di valutazioni in vari Paesi del mondo). Questo spiega il fatto che il vasto e prolungato dibattito internazionale sulla valutazione delle competenze a scuola si sia sempre arenato e faccia così fatica ad essere definito in termini chiari ed univoci e il perché gli insegnanti facciano così fatica a fare proprio questo discorso.

Processi cognitivi e schemi

I processi cognitivi organizzano l'attività ed il suo funzionamento in situazione: cioè la condotta, la rappresentazione, le competenze definiscono e determinano lo sviluppo delle forme di organizzazione dell'attività di un soggetto nel corso della sua esperienza. Dunque i processi cognitivi non riguardano solo il funzionamento in situazione, ma anche lo sviluppo, cioè l'evoluzione, delle competenze e delle loro relazioni nel corso dell'esperienza.

Secondo il primo Piaget, *conoscenza è adattamento*. Ma chi si adatta, e a che cosa? Ciò che si adatta sono non solo gli esseri umani tout court, ma gli schemi, cioè le forme esplicite di organizzazione dell'attività: gli schemi si adattano alle situazioni per raggiungere la conoscenza (o comunque il traguardo auspicato). O, meglio: gli esser umani adattano i loro schemi per appropriarsi di una conoscenza. Meglio ancora: l'essere umano si appropria di una conoscenza sapendo adattare i propri schemi ad una nuova situazione che gli permette di apprendere. Il saltatore in alto novizio decide di cambiare allenatore, scegliendo una persona competente che gli insegnerà come cambiare i suoi schemi: rincorsa, stacco, rotazione, superamento. La modifica degli schemi può essere deliberata, ossia frutto di una scelta consapevole, o no. Gérard Vergnaud fece anni fa quasi in questo senso l'esempio del salto con l'asta.

Risulta fondamentale dunque evidenziare la coppia: situazione-schema, cosa che né Piaget, né Vygotskij hanno fatto, mentre ciò appare nell'opera di Vergnaud (distribuita in diverse opere tra la fine degli anni '80 e la fine dei '90).

Tale relazione è fondamentalmente dialettica: non c'è schema senza situazione, ma neppure situazione senza schema. Perché è lo schema che permette di identificare una situazione come facente parte di una certa classe di situazioni, in quanto uno schema si dirige effettivamente sempre ad una classe di situazioni, per la sua stessa natura generale e non univoca. Perciò lo schema è fatto universale, ma in evoluzione possibile.

L'apprendimento necessita di una situazione, la quale si organizza in schemi apprenditivi e modalità (per esempio, la *teoria delle situazioni* di Guy Brousseau); a volte gli schemi sono cercati, a volte sono insiti nell'esecuzione e nel processo; a volte sono il frutto di ingegnerie (Brousseau, 2008).

Competenza

Da sempre in modo ovvio, più di recente in maniera caparbia e forse un tantino esagerata, si chiama in causa la competenza. Io mi riferisco qui all'accezione data in D'Amore, Godino, Arrigo e Fandiño Pinilla (2003).

Se la competenza è ritenuta essere un fattore valutabile, allora deve essere misurabile e dunque ha senso parlare del valore di una competenza e dunque dare un ordine di maggior o minor competenza; in maniera molto banale:

– A è più competente di B nel campo C se sa fare qualche cosa in C che B non sa fare;
– A è più competente nel campo C nel tempo t' che non nel tempo t (t<t') se A sa fare qualche cosa in C nel tempo t' che non sapeva fare nel tempo t;

- A è più competente di altri se si comporta in una maniera migliore o più efficace: più rapido, meglio compatibile con il modo di fare di terzi;
- A è più competente di altri se dispone di un repertorio di processi alternativi che gli permettono di adattare il suo comportamento ai diversi casi che gli si possono presentare;
- A è più competente di B se egli è più efficace di fronte ad una nuova situazione, rispetto a quanto non lo sia B;
- …

In questo repertorio (non certo esauriente) di casi, si nasconde l'idea di misura di una competenza.

Ma il concetto di competenza non è, di per sé, scientifico; per una sua sistematica presentazione si ha bisogno di analizzare un'attività, il che significa chiamare in causa gesti, ragionamenti, operazioni scientifiche e tecniche, motivazione, volizione, impegno, desiderio, affettività, …tutti elementi che non sempre si prestano con efficacia e semplicità a misurazioni.

Serve un concetto forte per designare le forme di organizzazione dell'attività in situazione, e in questo ci aiuta il concetto di schema elaborato all'interno della teoria dei campi concettuali.

Schema e campi concettuali

In forma schematica:

1) uno schema è una totalità dinamica funzionale;
2) uno schema è un'organizzazione invariante dell'attività per una classe definita di situazioni;
3) uno schema comporta quattro categorie di componenti:
   uno scopo o più d'uno, dei sottoscopi e delle anticipazioni;
   delle regole d'azione, di presa d'informazione e di controllo;
   degli invarianti operatori (concetti in atto e teoremi in atto);
   delle possibilità di inferenza;
4) uno schema è una funzione che tiene conto del passare del tempo dato che prende sia i suoi valori di entrata e fornisce quelli di uscita in uno spazio temporalizzato; per capire bene questo punto occorre pensare ad uno schema evolutivo (vedi 1). Per sua natura, lo schema è l'espressione circoscritta e finita di una generalizzazione.

L'idea generale dalla quale si sta prendendo tutto ciò è sostanzialmente di Immanuel Kant, ma Kant non arriva a mettere in relazione schemi e concetti nella loro reciprocità; questo viene fatto solo nella teoria dei campi concettuali (Vergnaud, 1990), nata proprio dal bisogno di teorizzate il lento processo di costruzione-appropriazione degli schemi e dei concetti.

In tale teoria, sono essenziali due elementi posti in evidenza ancora da Vergnaud:

- concetto in atto: concetto ritenuto come pertinente, come valido, in una certa situazione, descritto da un certo schema o da una interazione fra schemi;

– teorema in atto: proposizione del tipo «se A allora B» ritenuta vera in una certa situazione, ma generalizzabile ad un dominio di situazioni fino ad una situazione non contestuale.

Un concetto è allo stesso tempo un insieme di situazioni (quelle che danno senso al concetto), un insieme di invarianti operatori (cioè di concetti in atto e di teoremi in atto che organizzano gli schemi, i trattamenti di queste informazioni) e un insieme di rappresentazioni simboliche e linguistiche che permettono di esprimere gli oggetti e le relazioni presenti nelle situazioni concernenti, eventualmente, i rapporti che essi hanno con le caratteristiche degli schemi. Ci sono due accezioni (almeno) di concetto: concezione quando si parla di un soggetto; più propriamente concetto, quello elaborato dalla cultura

Non si può capire lo sviluppo di un concetto senza inserirlo in un sistema e si è poi obbligati a studiare questo sistema, il campo concettuale, per potersi appropriare del concetto. Un campo concettuale è dunque allo stesso tempo un insieme di situazioni (meglio: di classi di situazioni) e un insieme di concetti, insieme nel quale non tutte le proprietà si sviluppano nello stesso tempo nel corso dell'esperienza e dell'apprendimento.

Ma c'è sempre uno scarto fra la forma operatoria della conoscenza, quella che si usa nell'azione, e la forma predicativa della conoscenza, fatta di parole e di enunciati. Il lavoro del didattico non è quello di lavorare sulla conoscenza del soggetto apprendente, ma sulle condizioni create dalla situazione messa in campo nella situazione di apprendimento, ovviamente tenendo in massimo conto gli schemi e l'adattamento.

Lo schema, ci insegna Vergnaud, è una totalità dinamica funzionale, la cui funzionalità è relativa appunto a questa totalità nella sua interezza, non dunque a quella relativa all'uno o l'altro dei suoi componenti.

E tuttavia, l'analisi delle componenti dello schema è altrettanto essenziale dell'analisi dello schema nella sua interezza, quando si vuol analizzare l'efficacia di uno schema. È il solito dibattito tra olistico e costitutivo. Il saltatore in alto può essere padrone assoluto di ciascuna delle componenti schematiche della sua azione sportiva, ma perdere di vista la successione nella sua totalità.

Che cosa caratterizza uno schema, quali sono le sue componenti?

Per prima cosa, lo scopo per il quale è costruito, spesso con dei sottoscopi: qual è l'intenzione che spinge a costruirlo o idearlo o metterlo in atto, espresso in termini di motivazione, interesse, scopo, bisogno.

Ci sono poi le componenti generative, cioè le regole da seguire, le informazioni da tener in conto, tutto ciò che riguarda il controllo. In tutto ciò ha un'importanza enorme la componente temporale.

Oltre a queste componenti [regole d'azione, messe in evidenza nel lavoro classico pionieristico di Allen Newell e Herbert Simon, creatori nel 1956 del *Logic Theory Machine* e nel 1957 del *General Problem Solver* (GPS)], ci sono tutte le componenti non osservabili con inferenze interne e il ruolo della memoria, più o meno esplicite e volontarie (e così, torniamo a sfiorare la psicologia).

Finalmente torniamo alle componenti degli invarianti operatori di Vergnaud, i concetti in atto e i teoremi in atto, già richiamati; essi costituiscono le componenti epistemiche di uno schema, essendo a loro affidato il compito di individuare gli oggetti in gioco nonché le proprietà singole, le relazioni e le trasformazioni, non solo quelle osservabili, come quelle semiotiche, ma anche quelle implicite. Gli invarianti operatori mettono in gioco le informazioni e le inferenze, con una funzione di concettualizzazione e di deduzione, come categorie concettuali.

Come ultima componente dello schema, si impone l'inferenza stessa, indispensabile alla teoria, grazie alle regolazioni locali, agli aggiustamenti, ai controlli, visto che mai avviene un'azione totalmente automatica, almeno nell'apprendimento. L'azione di adattabilità degli schemi è essenziale. Le regole d'azione, di assunzione di informazione e di controllo sono la traduzione pragmatica dei teoremi in atto di Vergnaud; esse interpretano il fatto che le varianti di una situazione possono in generale assumere più valori ed i soggetti sono in grado di adattarsi a questi valori.

Lo schema struttura un'attività, nelle sue due componenti essenziali:
- la sistematicità, che si estrinseca nelle regole univoche cui sono soggette le attività (per esempio gli algoritmi aritmetici);
- la contingenza, perché le regole cui obbedisce lo schema devono tener conto delle diverse situazioni di azione o di interpretazione cui lo schema si trova di fronte (diciamo così: regola di opportunità).

L'idea di schema apporta una risposta teorica di grande interesse alla psicologia cognitiva pur restandone in grande misura esterna; per esempio la questione dell'adattamento a situazioni nuove, dunque la risoluzione dei problemi, è ben teorizzata nell'idea di schema, proprio grazie alle quattro componenti che abbiamo visto. Ma questo non comporta, come molti vorrebbero, come è stato auspicato ingenuamente fino a pochi anni fa, come stupidamente ancora qualcuno sostiene o auspica, la degenerazione da situazioni di risoluzione di problemi a situazioni di algoritmizzazione di ipotetici passaggi componenti (Brousseau, D'Amore, 2008).

La situazione

Uno schema si dirige sempre verso una situazione caratterizzata da uno scopo atteso, o più d'uno, per esempio un problema da risolvere, nella sua complessità epistemica e cognitiva, nonché di messa in campo di competenza.

I due concetti di schema e di situazione sono ciascuno strettamente relazionato all'altro. Dunque, anche in una situazione specifica e non solo in generale le idee di scopo, regola, concettualizzazione, inferenza sono essenziali e strettamente connesse.

Esse intervengono nella determinazione di una ingegneria di situazioni didattiche in generale, ancora di più nel caso enormemente diffuso in cui, a fronte di un docente, si trovano più discenti; in questo caso, il processo di interazione tra soggetti può occupare un ruolo decisivo, addirittura più decisivo dei processi di comprensione (D'Amore, 2005).

Spesso in una situazione si evidenziano due termini relativi ai soggetti in gioco, e con diverse modalità: esperienza e apprendimento. Sulla base di alcuni presupposti, l'apprendimento fa parte dell'esperienza, ma non viceversa, per cui fra i due c'è una sorta di dipendenza causale. Si possono però trovare esempi nei quali l'esperienza comporta apprendimento, grazie a situazioni nelle quali l'esperienza si sviluppa. Ovviamente, in questo caso dobbiamo generalizzare e non pensare solo all'ambiente scolastico. Dunque l'apprendimento condivide con l'esperienza alcuni punti cruciali:

– la durata temporale che può essere assai variabile;
– i diversi registri e le diverse modalità messe in campo nelle situazioni: registri tecnici, linguistici, gestuali, sociali, affettivi;
– i ruoli in gioco e dunque il senso che i vari soggetti assumono;
– i ruoli degli strumenti in gioco.

Tutti concordiamo sul fatto che l'esperienza ha un'enorme varietà di modalità di espressione, mentre non così sembra essere per l'apprendimento; ma la teoria dei campi concettuali ribalta queste idee, dato che mostra come uno stesso concetto si sviluppa attraverso situazioni varie e diverse, dato che lo stesso concetto è posto in relazione in più modi e su diversi livelli con concetti ed enunciati ritenuti veri (teoremi in atto), più rappresentazioni linguistiche e simboliche; inoltre si sviluppa unitamente ad altri concetti creando veri e propri sistemi concettuali.

Sul piano teorico, situazione e schema formano una coppia indissociabile; le situazioni offrono delle occasioni per dare un senso alle attività ed ai concetti, ma non sono esse stesse il senso. Il senso è lo schema, diceva acutamente Piaget. Ma la realtà è fatta di oggetti e di relazioni: si tratta sempre di dare un senso a tali oggetti e a tali relazioni, attraverso il filtro delle situazioni, la loro interpretazione, la loro realtà.

Spesso, nelle situazioni didattiche, quello cui s'assiste è, al contrario, proprio una perdita di senso dato agli oggetti ed alle loro relazioni (Brousseau, D'Amore, 2008).

La rappresentazione

Il concetto di rappresentazione coinvolge alcuni punti chiave: la percezione, i sistemi significante-significato, la concettualizzazione (in atto), lo schema.

Percepire significa porsi in relazione con gli oggetti reali, le loro proprietà e relazioni osservabili, identificabili e separabili cioè distinguibili. La distanza che c'è tra percepire e rappresentare sta nel fatto che la rappresentazione si occupa anche degli oggetti, proprietà e relazioni non direttamente osservabili. Ne è anzi una componente essenziale. La percezione non è fatto scevro da bisogni cognitivi dato che questi necessitano di esperienza e di cultura.

La lingua materna e le altre forme simboliche sviluppate dalle società per comunicare e rappresentare costituiscono dei sistemi di significanti e significati; essi contribuiscono in modo notevole al funzionamento della rappresentazione. Poter fare uso di parole per identificare oggetti e loro relazioni, dà ai concetti uno statuto cognitivo decisivo; la rappresentazione dunque non è solo l'esplicitazione di qualche cosa all'interno di un lessico o, più in generale, di un sistema semiotico. Vi sono invarianti espliciti ed impliciti che devono tenere in conto la comunicabilità, ma anche la possibilità di esplicitazione che porta ad una stabilità necessaria per la rappresentazione stessa. Gli invarianti operatori sono le componenti principali della concettualizzazione:

nell'attività essi si formano ed è nel corso dell'attività che producono i loro effetti, essenziali per la percezione specie per quanto riguarda l'informazione specifica per l'azione. Hanno un ruolo altrettanto importante delle inferenze che sono sempre state privilegiate come oggetto di studio da Aristotele a Kant, fino al primo Wittgentein.

Gli schemi costituiscono una componente assolutamente essenziale della rappresentazione, dato che questa è un'attività e dunque uno schema può nel suo corso prendere forma ed agire come è nella sua possibilità più significativa. Anzi, lo schema gioca nell'ambito della rappresentazione la sua componente più significativa. La rappresentazione può essere pensata come la riorganizzazione di schemi.

Qualsiasi teoria della rappresentazione mette in gioco, per la sua stessa esistenza, un flusso di coscienza, una presa di coscienza ma anche processi incoscienti. Senza il flusso di coscienza (percezione e immaginazione), l'essere umano non sarebbe in grado di rappresentare né saprebbe riflettere su quel che è la rappresentazione.

Non bisogna dimenticare la dualità sempre presente cosciente – incosciente che riguarda gli invarianti operatori e che permette la coscientizzazione come momento chiave della concettualizzazione, cioè l'identificazione degli oggetti e dei processi della realtà, osservabili e non. Ciò spiega perché si tende oggi a mescolare e non più a gerarchizzare il cognitivo ed il metacognitivo.

Bibliografia

Brousseu G. (2008). *Ingegneria didattica ed epistemologia della matematica*. Bologna: Pitagora.

Brousseau G., D'Amore B. (2008). I tentativi di trasformare analisi di carattere meta in attività didattica. Dall'empirico al didattico. In: D'Amore B., Sbaragli F. (eds.) (2008). *Didattica della matematica e azioni d'aula*. Atti del XXII Convegno Nazionale: Incontri con la matematica. Castel San Pietro Terme, 7-8-9 novembre 2008. Bologna: Pitagora. 3-14.

D'Amore B. (2008). Prefazione al libro: Brousseau G. (2008). *Ingegneria didattica ed epistemologia della matematica*. A cura di Bruno D'Amore. Bologna: Pitagora. Pagg. VII-XII.

D'Amore B. (2005). Pratiche e metapratiche nell'attività matematica della classe intesa come società. Alcuni elementi rilevanti della didattica della matematica interpretati in chiave sociologica. *La matematica e la sua didattica.* 3, 325-336.

D'Amore B., Godino D.J., Arrigo G., Fandiño Pinilla M.I. (2003). *Competenze in matematica*. Bologna: Pitagora.

Fandiño Pinilla M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica*. Trento: Erickson. [Versione in lingua spagnola, 2010, Bogotà: Magisterio).

Vergnaud G. (1990b), La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 10, 133-169. [Trad. it. di F. Speranza in: *La matematica e la sua didattica*, 1, 1992, 4-19].

2. La continuità dell'insegnamento della geometria tra scuola elementare e scuola media[1]

La realtà vista con gli occhi degli insegnanti

Sandra Moccetti[2]

The aim of this research is to investigate the points of view and the didactic customs of Primary and Secondary school teachers regarding the teaching of geometry in the second half of Primary school and the first year of Secondary school. The data has been collected through the use of questionnaires and interviews. The analysis has been carried out by cross-referencing the results obtained in order to highlight similar and differing aspects between teachers' beliefs both from the same school grade as well as from others. Some of these results can also be taken into account and expanded upon in relation to the harmonisation process of the transition between Primary and Secondary school as promoted by the Harmos agreement.

1. Introduzione

La ricerca è centrata sulla continuità tra SE e SM[3] nel campo dell'insegnamento della geometria, attraverso un'analisi delle convinzioni di alcuni docenti di entrambi gli ordini scolastici.

La riflessione sull'armonizzazione della scuola dell'obbligo è tornata d'attualità, anche in vista dell'imminente entrata in vigore del concordato Harmos[4]. In Ticino, il problema dell'allineamento dei programmi di SE con il piano di studio della SM è ancora oggetto di studio. Con l'introduzione di Harmos, la problematica diventa di notevole rilevanza per il nostro Cantone, perché il passaggio tra SE e SM, che avviene in corrispondenza dell'8° anno di scolarità[5], corrisponde a una delle fasi di monitoraggio degli standard nazionali. La scelta della geometria quale campo di competenza della ricerca, è da ricondurre a una sensazione, vissuta anche in prima persona, della presenza di un generale disorientamento degli insegnanti nell'affrontare l'insegnamento di questa disciplina[6].

Nella ricerca ho coinvolto un gruppo di insegnanti attivi in un piccolo comprensorio del Luganese (4 sedi di SE e 1 sede di SM) e in altre del Sottoceneri. I dati raccolti con i questionari sono stati in parte approfonditi in colloqui individuali.

Il confronto con le idee dei ricercatori che hanno dato il proprio contributo all'evoluzione dell'insegnamento della geometria a partire dagli anni '60 (come

1. Libera sintesi del lavoro di diploma del corso complementare di matematica, anno accademico 2010/2011. Relatore: Gianfranco Arrigo.
2. Insegnante alla Scuola media di Gravesano.
3. Con gli acronimi SE e SM si indicano rispettivamente Scuola Elementare e Scuola Media.
4. Accordo intercantonale sull'armonizzazione della scuola obbligatoria.
5. Dopo 3 anni di Scuola dell'infanzia e 5 di SE.
6. Si vedano anche le osservazioni elaborate dal Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport che ammette la presenza, nei programmi per la scuola elementare tuttora in vigore, di «lacune in Geometria» (DECS 2010).

ad esempio F. Speranza, G. Arrigo, S. Sbaragli, M.A. Mariotti) potrebbe diventare oggetto di riflessione per coloro che sono stati chiamati a rivedere i programmi in vista dell'entrata in vigore di Harmos.

2. Quadro teorico

Lo studio dell'evoluzione storica della geometria mostra come la sua costruzione sia passata attraverso continue trasformazioni e nuove sistemazioni assiomatiche. Gli sforzi che i matematici hanno dovuto affrontare per arrivare allo stato attuale della disciplina possono fornire informazioni importanti relative agli ostacoli epistemologici che vengono incontrati dagli allievi. Francesco Speranza (1997) afferma che la complessità della disciplina può essere causa di diverse distorsioni didattiche. In particolare evidenzia la necessità di una più approfondita formazione degli insegnanti dal punto di vista della didattica legata all'epistemologia per evitare che, in certi casi, le loro convinzioni diventino causa di difficoltà di insegnamento. Difficoltà che risiedono proprio nel riuscire a costruire la geometria come scienza razionale, comprensiva di un sapere e di un saper fare; ma come è possibile allineare la conoscenza geometrica con i programmi delle scuole dell'obbligo? Sempre Speranza suggerisce di affrontare i vari aspetti che costituiscono la geometria da insegnare in modo ramificato, con ritorni ciclici di approfondimento su uno stesso argomento (insegnamento «a spirale») curandone lo sviluppo graduale dei concetti. L'autore rende attenti gli insegnanti a privilegiare l'approfondimento piuttosto che la quantità. Lo sviluppo storico della disciplina ci mostra come il percorso di apprendimento deve iniziare con un approccio di tipo fisico, attraverso la continua interazione con la realtà spaziale: l'utilizzo di oggetti concreti (o di loro rappresentazioni) guida la costruzione sperimentale della conoscenza geometrica figurale e concettuale[7]. Successivamente nasce la necessità di sistemare le osservazioni effettuate, aprendo la strada alle prime astrazioni e formalizzazioni.

In linea di massima le indicazioni dei programmi vigenti di SE (1984) e SM (2004) si allineano con quanto esposto e confermano una certa uniformità nell'impostazione didattica tra i due ordini scolastici. La razionalizzazione dell'esperienza come avvicinamento alla teoria, ma anche quale strumento che mostra come la teoria permette di leggere meglio l'esperienza, è un aspetto che va sviluppato in modo più marcato nella SM, ma deve essere ben preparato nella SE. Dall'osservazione in dettaglio degli obiettivi specifici della SE emerge però un certo scollamento tra questi e le indicazioni metodologiche generali. I contenuti, in massima parte, concernono la geometria piana e di conseguenza sono lontani dall'esperienza reale degli allievi (si pensi ai concetti di retta, punto e piano); si corre così il rischio di tendere verso un'impostazione troppo formale. Dal punto di vista dell'apprendimento attivo, la figura piana è evidentemente più sofisticata rispetto a quella solida, dato che tutto ciò che ci circonda è in 3D: a volte, nella pratica didattica, si sottovalutano le difficoltà degli allievi ad astrarre, cioè ad immaginare un oggetto reale senza spessore (Arrigo e Sbaragli 2004).

La geometria nella SE è insegnata solo nelle classi III, IV e V, ciò che non facilita l'auspicato approfondimento. Anche dai documenti della SM si percepisce

7. Si veda ad esempio la teoria dei «*concetti figurali*», (Fischbein 1993, in Mariotti 2005).

un'accentuazione della geometria piana, con un marcato orientamento verso lo sviluppo di competenze procedurali. Una prima analisi comparata dei documenti mostra che nella SM si mira a raggiungere un maggior livello di concettualizzazione rispetto a quanto si fa nella SE. Riguardo ai contenuti specifici, si rilevano «buchi» tra un programma e l'altro, cioè conoscenze che gli allievi lasciano in *standby* dopo la SE, col rischio di rendere vano lo sforzo intrapreso dai docenti e dagli allievi stessi, nella costruzione di quel sapere specifico (ad esempio le conoscenze relative alla circonferenza introdotte in V elementare verrebbero riprese solo in II media; lo studio dei solidi che si sta introducendo nella SE appare troppo ritardato nella SM). Parallelamente gli elementi ripetuti (per esempio definizioni di poligoni e di elementi del cerchio, calcolo formale di aree e perimetri) possono giocare due ruoli ben diversi: rappresentare l'aspetto del ritorno ciclico sugli argomenti oppure una poco vantaggiosa sovrapposizione di argomenti. Risulta quindi fondamentale chiarire tutti questi aspetti affinché il lavoro svolto alla SE possa venir adeguatamente valorizzato e sfruttato dai docenti di SM.

Come già sostenuto da Speranza (1997) ogni rinnovamento di programmi (vedi Harmos) dev'essere l'occasione per migliorare la situazione dell'insegnamento della geometria, in riferimento alle «lacune» riscontrate nei programmi precedenti.

3. Domande di ricerca

D1. Quali aspetti dell'insegnamento della geometria sono maggiormente trattati nella scuola elementare? Quali priorità danno i docenti di SE?

D2. Quali campi della geometria sono considerati prerequisiti necessari per continuare il percorso di apprendimento alle scuole medie? Quali sono le attese dei docenti di SM?

D3. Quali convergenze e divergenze esistono tra i docenti di SE e di SM riguardo alle competenze in geometria che gli allievi devono acquisire entro la fine del ciclo elementare?

D4. C'è continuità nell'insegnamento della geometria tra SE e SM? Quali sono gli aspetti da modificare a favore di una migliore armonizzazione nel passaggio tra SE e SM?

4. Ipotesi di ricerca

I1. Si ipotizza, fra i docenti di SE, una tendenza all'insegnamento della geometria del piano, con una forte influenza della logica euclidea. Prioritarie potrebbero essere considerate le capacità di riconoscere e disegnare le principali figure piane e di saperne calcolare perimetro e area.

I2. Si ipotizza che i docenti di SM considerino che all'uscita della SE sia fondamentale una solida acquisizione dei concetti di contorno e superficie, di lunghezza e area con le relative competenze di calcolo formale e che gli allievi abbiano affinato le abilità nell'utilizzo corretto degli strumenti geometrici quali riga, compasso e goniometro per compiere misurazioni e costruzioni delle principali figure geometriche.

I3. Il confronto delle risposte porterà alla rilevazione di punti di convergenza e di divergenza non solo fra le opinioni dei docenti di SE e di SM, ma anche fra docenti dello stesso ordine scolastico. Le differenze più marcate potrebbero emergere nell'ambito delle trasformazioni geometriche e delle proprietà delle figure, mentre una maggiore affinità di opinione potrebbe risultare nel calcolo delle aree.

I4. Gli aspetti convergenti, ma soprattutto quelli divergenti, potrebbero mettere in evidenza la necessità di una migliore armonizzazione dei programmi di geometria. L'individuazione di alcune differenze esistenti tra le intenzioni degli insegnanti di SE e le aspettative di quelli della SM potrebbe favorire la nascita di una riflessione comune e portare a un elenco circostanziato di nodi da sciogliere, ciò che tornerebbe utile per migliorare la continuità nel passaggio da SE a SM.

5. Metodologia di ricerca

Come già detto nell'introduzione, lo strumento di ricerca utilizzato è il questionario composto per lo più di domande chiuse e qualche domanda aperta allo scopo di comprendere meglio il punto di vista degli insegnanti come pure di individuare alcune loro convinzioni e abitudini. Sono stati elaborati due questionari diversi, ma confrontabili, per i docenti di SE e di SM. I dieci quesiti dei questionari sono stati costruiti tenendo conto delle indicazioni dei programmi ufficiali in vigore sia per la SE che per la SM, con uno sguardo agli standard dell'8° anno di scolarità previsti da Harmos.

Ordine scolastico	**N° docenti sottoposti al questionario**	**N° docenti intervistati**
SE	35	7
SM	19	2
Totale	54	9

Tabella 1. Campione della ricerca

Sui dati raccolti è stata effettuata un'analisi distinta per ordine scolastico, al fine di individuare gli aspetti cruciali condivisi dalla stessa categoria di docenti e un'analisi comparativa tra le risposte dei docenti di ordini scolastici differenti per individuare le convergenze e le divergenze d'opinione. Per le valutazioni espresse con dati quantitativi è stata calcolata la differenza tra le medie e, per alcuni dei quesiti, è stata individuata la frequenza relativa per ciascun grado di valutazione possibile per ogni sottopunto. I dati qualitativi sono stati organizzati in categorie con indicazione delle frequenze.

Alcuni risultati significativi sono stati utilizzati per costruire le interviste con un numero ridotto di docenti scelti tra quelli attivi in una V elementare o in una I media, attualmente o nello scorso anno scolastico. I colloqui, svolti individualmente o a coppie, sono stati condotti col supporto di grafici e tabelle che sintetizzano alcune risposte raccolte nei questionari. L'interpretazione integrata di opinioni e aspetti della pratica, raccolti in forma scritta e orale, tenta di fornire un quadro più esaustivo della situazione che la ricerca vuole descrivere.

Le risposte a ciascuna domanda di ricerca sono state ottenute con un’analisi incrociata dei risultati del questionario arricchiti, approfonditi e chiariti dalle riflessioni raccolte nelle interviste.

6. Risultati e analisi dei dati

6.1. Tempo dedicato all’insegnamento della geometria

Nella tabella seguente sono riportati i numeri approssimativi di unità didattiche (1UD ≅ 45 min. di lezione) svolte mensilmente dai docenti coinvolti nella ricerca:

N° UD su 28 UD mensili di matematica per la SE
N° UD su 20 UD mensili di matematica per la SM

	SE	SM
Tra 1 e 4 UD	17	5
Tra 5 e 8 UD	15	6
Più di 8 UD (max. 12 UD)	3	4
Totale docenti	35	15

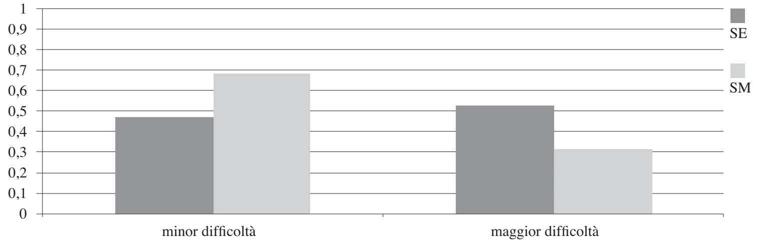
Tabella 2. Numero di UD di geometria svolte mensilmente

I dati mostrano che alla SM è dedicato, in proporzione, un tempo maggiore all’insegnamento della geometria rispetto alla SE. Questo dato è in contrapposizione col carico superiore di concetti nuovi da costruire richiesti dal programma ufficiale per le scuole elementari. Se si considerano le indicazioni didattiche riguardo all’importanza di un approccio intuitivo e sperimentale, questo squilibrio tra tempo a disposizione e modalità potrebbe rappresentare una difficoltà in più nella costruzione dei concetti. A tale riguardo, alcuni docenti intervistati hanno esplicitato la difficoltà di riuscire a svolgere l’intero programma nei tempi previsti: questa situazione conduce spesso verso impostazioni più direttive, esplicative e formali a scapito di scelte di tipo euristico.

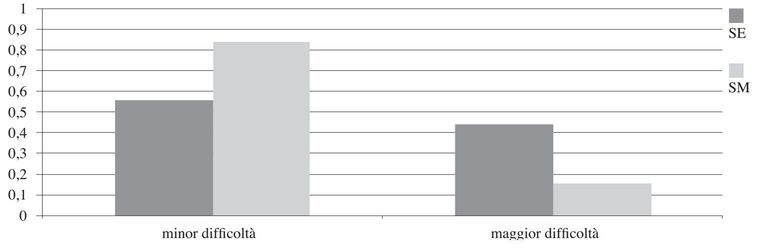
«È peccato perché c’è veramente tanto da fare. I docenti tendono a correre per arrivare alla fine tralasciando quella parte di scoperta, varietà di esempi con posizioni non standard delle figure, proprio per mancanza di tempo.» (docente SE)

«Se vuoi fare tutto bisogna fare lezioni frontali, non ci sta la possibilità di lezioni di scoperta e la possibilità di fornire situazioni in modo diverso.» (docente SE)

6.2. Descrizione delle difficoltà nell'insegnamento-apprendimento della geometria e delle possibili cause di tali difficoltà.



4.2 Trovare situazioni didattiche alla portata degli allievi e adatte alla costruzione del concetto geometrico



4.3 Possedere una sufficiente e sicura conoscenza degli aspetti teorici relativi agli oggetti geometrici

Figura 1. Difficoltà nell'insegnamento della geometria

Il grafico delle risposte al punto 4.2 evidenzia la presenza di difficoltà nell'effettuare la trasposizione didattica del Sapere accademico al Sapere da insegnare. Tra i docenti di SE il problema è più marcato ed è confermato da altri dati che indicano il disagio di fronte alla carenza di sussidi a cui poter far riferimento per operare le proprie scelte didattiche.

Dal grafico delle risposte date al punto 4.3 emerge una certa insicurezza, in alcuni docenti di SE, nei confronti dei contenuti da insegnare, che può essere spiegata dalla mancanza di una formazione specifica. Il problema è confermato da alcune affermazioni raccolte nelle interviste:

«Non ricordo di aver mai ricevuto, anche in formazione, una base teorica abbastanza approfondita.» (docente SE)

«Vado a cercare nei miei quaderni di allieva.» (docente SE)

Non tutti i docenti SE, però, condividono questa sensazione; taluni affermano che insegnare geometria *«non è difficile»* soprattutto perché è possibile favorire il ragionamento che porta al concetto astratto con situazioni concrete.

È presumibile che le difficoltà esplicitate possano portare a costruzioni, involontarie e inconsapevoli, di modelli scorretti, come potrebbe confermare questa affermazione:

«Non per niente, più facilmente resto legato a degli stereotipi.» (docente SE)

La presenza di misconcezioni negli allievi che iniziano la I media rappresenta, per i docenti di SM intervistati, il principale problema che rende difficoltoso l'insegnamento della geometria:

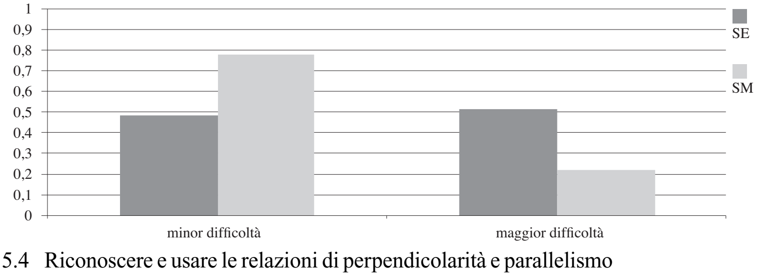
«Ci sono delle cose che facciam fatica a smontare. […] Diventa una perdita di tempo, soprattutto se dall'altra parte hanno fatto fatica a montarle. […] Sono due energie inutili.» (docente SM)

I docenti si allineano nell'evidenziare le seguenti difficoltà di apprendimento:

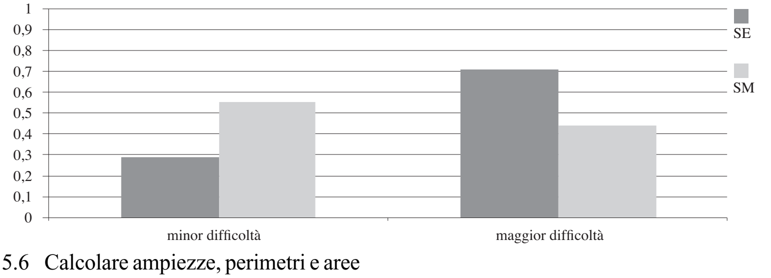
		SE	SM	TOT
5.1	*Passare dalla geometria in 2D a quella in 3D o viceversa.*	24/26	16/18	**91%**
5.3	*Riconoscere e usare i nomi corretti degli oggetti geometrici.*	21/34	13/18	**65%**
5.5	*Riconoscere e usare termini specifici.*	24/32	12/18	**72%**
5.7	*Stimare ampiezze, lunghezze e aree (ed ev. volumi).*	26/33	15/18	**80%**
5.9	*Utilizzare gli strumenti geometrici per eseguire costruzioni.*	23/33	15/18	**75%**

Tabella 3. Aspetti della geometria in cui gli allievi incontrano maggiori difficoltà di apprendimento.

I grafici mostrano, invece, due aspetti ai quali i docenti di SE e di SM attribuiscono una diversa valutazione della difficoltà.



5.4 Riconoscere e usare le relazioni di perpendicolarità e parallelismo



5.6 Calcolare ampiezze, perimetri e aree

Figura 2. Difficoltà di apprendimento della geometria

Il grafico relativo al punto 5.4 potrebbe indicare che, grazie al lavoro dell'insegnante, alcuni ostacoli che gli allievi incontrano alla SE nell'apprendimento dei concetti geometrici possono pian piano venir superati. La competenza costruita diventa allora un elemento che i docenti di SM possono sfruttare per raggiungere obiettivi più importanti. Per quanto riguarda il calcolo di perimetro e area (punto 5.6), le interviste mettono in evidenza un problema più sentito dai docenti di SM, i quali riscontrano negli allievi una confusione evidente nell'utilizzo delle formule, che si manifesta in tentativi di applicazione senza alcun controllo semantico della procedura, come conferma la seguente affermazione:

«Loro [i docenti di SE] *ambiscono lì* [saper utilizzare le formule per calcolare aree e perimetri di triangoli e quadrilateri] *e noi ci aspettiamo lì, ma quello che viene ottenuto è una fragile conoscenza delle formule, una vaga sensazione di cosa significano: non ha guadagnato niente nessuno.»* (docente SM)

In modo coerente con le osservazioni precedenti, i docenti di SM condividono la convinzione che, tra le maggiori cause delle difficoltà di apprendimento, vi sia un approccio troppo formalizzato della geometria nella SE, non equilibrato con l'obiettivo di rafforzare i concetti attraverso esperienze concrete. Lo mostrano i dati raccolti:

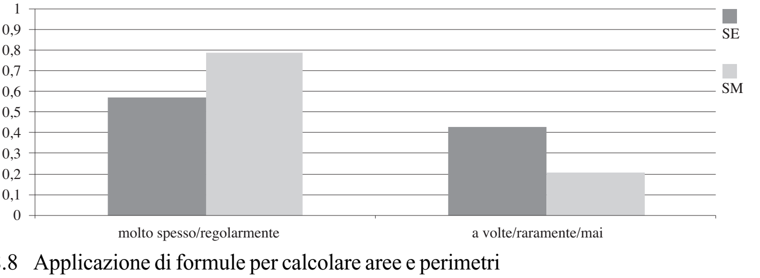
	Molto determinante	
6.7	*Generalizzazioni precoci senza aver consolidato conoscenze precedenti.*	16/19
6.8	*Applicare regole e formule senza padroneggiare il significato.*	17/19

Tabella 4. Cause delle difficoltà di apprendimento ritenute molto determinanti

«A SE è troppo formalizzato e troppo poco vissuto.» (docente SM)

«Se si insiste troppo sulle formule, ci troviamo con il problema che non sanno cosa stanno facendo.» (docente SM)

Il grafico delle risposte date al punto 8.8 potrebbe confermare questa ipotesi: si può notare come alle SE vengano proposte frequentemente attività di calcolo formale di aree e perimetri da una maggioranza di docenti.



8.8 Applicazione di formule per calcolare aree e perimetri

Figura 3. Frequenza con cui vengono svolte specifiche attività

Dopo aver osservato i risultati raffigurati nel grafico, i docenti stessi hanno avanzato diverse motivazioni, tra le quali:

«Molto spesso noi, mancando di una base teorica sufficientemente ampia, ci salviamo con le formule: essendo dei generalisti, sappiamo un po' di tutto e un po' di niente; è logico che si possa cadere anche in questo aspetto delle formule che ti danno una certa sicurezza.» (docente SE)

Più docenti di SE ricordano, inoltre, che i programmi richiedono questi concetti e pensano che corrispondano alle aspettative dei docenti di SM:

«Io penso di aver fatto il mio lavoro se ve li mando che sono in chiaro con le formule: tutti i quadrilateri, tutti i triangoli e il cerchio.» (docente SE)

«Noi abbiamo quasi il timore di non presentare le formule perché poi sembra che non si sia fatto niente. Però, facendolo in modo frettoloso, arrivano che non le sanno usare nel modo giusto.» (docente SE)

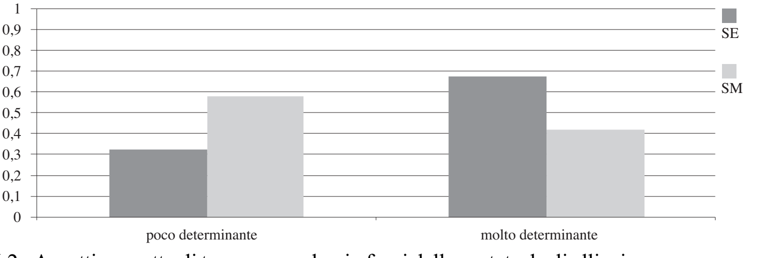
Al contrario, l'aspettativa dei docenti di SM si limita alla *«conoscenza della formula del rettangolo»* (docente SM).

La maggior parte dei docenti considera in particolare due aspetti quali possibili cause delle difficoltà nell'apprendimento della geometria:

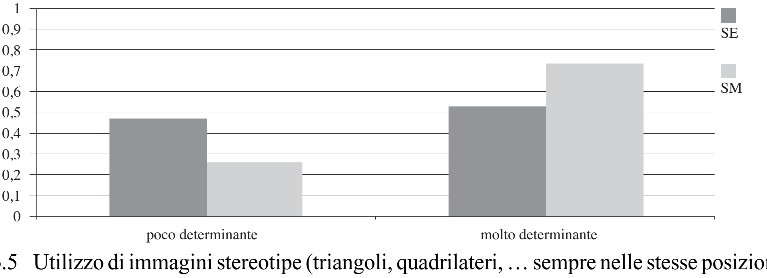
		SE	SM	TOT
6.3	*Non riuscire a rappresentarsi mentalmente gli oggetti (leggere le figure)*	29/34	18/19	**47/53**
6.6	*Non riuscire a usare coerentemente i vari concetti geometrici.*	30/34	13/19	**43/53**

Tabella 5. Cause delle difficoltà di apprendimento ritenute molto determinanti

Una diversa valutazione viene data rispetto ad altri due possibili fattori:



6.2 Aspetti concettuali troppo complessi «fuori dalla portata degli allievi»



6.5 Utilizzo di immagini stereotipe (triangoli, quadrilateri, … sempre nelle stesse posizioni)

Figura 4. Cause delle difficoltà di apprendimento

Il grafico 6.2 mostra che un elevato numero di docenti di SE attribuisce alla complessità dei concetti geometrici la causa delle difficoltà che gli allievi incontrano nell'apprendimento. Alcuni commenti raccolti durante le interviste sono significativi perché portano a identificare un problema diverso, che si nasconde dietro a questa valutazione.

«La geometria è più di scoperta rispetto ad altri campi della matematica. Se si costruisce gradualmente, a spirale, non è fuori dalla portata dei bambini.» (docente SE)

«La difficoltà che segnalano i docenti [di SE] *probabilmente è una difficoltà nostra, non siamo abbastanza preparati.»* (docente SE)

«Perché i docenti di SM sono maggiormente preparati e quindi per loro non è difficile: noi docenti di SE siamo meno preparati perché non siamo specialisti; trasportiamo questa complessità che viviamo noi stessi sugli allievi.» (docente SE)

Le frasi riportate modificano sostanzialmente la natura dell'ostacolo evidenziato nel punto 6.2, che assume una connotazione di natura più didattica (D'Amore, 1999).

Durante le interviste è stata raccolta un'altra interessante spiegazione della minor valutazione delle complessità concettuali attribuita dai docenti di SM. Alla SE le prime formalizzazioni rappresentano una novità, che può comportare maggiori difficoltà. Mentre alla SM gli allievi sono già entrati in contatto con i concetti geometrici principali: sarà il successivo approfondimento a rappresentare nuovamente la complessità dell'apprendimento.

«La differenza è che loro [i docenti di SM] *partono da qualcosa e noi partiamo da niente. Consegniamo un terreno già fertile.»* (docente SE)

I risultati del punto 6.5 mostrano in modo evidente che la presenza di stereotipi rappresenta per i docenti di SM una delle principali cause delle difficoltà di apprendimento; cioè la presenza, nel bagaglio delle conoscenze degli allievi di SE, di misconcezioni *«difficili da sradicare»*.

Come già evidenziato nel paragrafo 6.1, alcuni docenti di SE ammettono che la mancanza di tempo sommata alla quantità di obiettivi da raggiungere limitano la possibilità di fornire una più variegata gamma di esempi che permetterebbe di evitare che il riconoscimento di figure avvenga solo nelle posizioni definite «standard».

«Si corre, col rischio che qualche cosa non lo si fa bene.» (docente SE)

6.3. Identificazione delle capacità e delle competenze più significative da sviluppare entro la fine della scuola elementare

Tra i due ordini di scuola si nota, in generale, la stessa linea nell'attribuzione del grado d'importanza alle varie competenze elencate. Le mode dei vari gradi di valutazione evidenziano però alcune sottili differenze, riportate nella tabella seguente.

		SE	SM
7.1	Comprendere e utilizzare un linguaggio specifico.	IMPORTANTE	TRASCURABILE
7.3	Riconoscere le proprietà delle figure piane	IMPORTANTE	INDISPENSAB.
7.5	Riconoscere relazioni d'incidenza, perpendicolarità e parallelismo.	INDISPENSAB.	IMPORTANTE
7.6	Classificare angoli, triangoli e quadrilateri.	INDISPENSAB.	IMPORTANTE
7.7	Comporre e scomporre figure geometriche del piano.	IMPORTANTE	TRASCURABILE
7.12	Costruire figure simmetriche, traslate o ruotate.	IMPORTANTE	TRASCURABILE

Tabella 6. Valutazioni risultate discordanti dell'importanza dello sviluppo di specifiche capacità e competenze entro la fine della SE

Si può notare come, ad eccezione del punto 7.3, la valutazione dell'importanza attribuita dai docenti di SM è leggermente inferiore rispetto a quella espressa dai colleghi di SE.

Questa osservazione rispecchia quanto è emerso in modo piuttosto esplicito dalle interviste, cioè che i docenti di SE pensano che i colleghi di SM abbiano delle aspettative più alte rispetto a quello che in realtà pensa la maggior parte di loro.

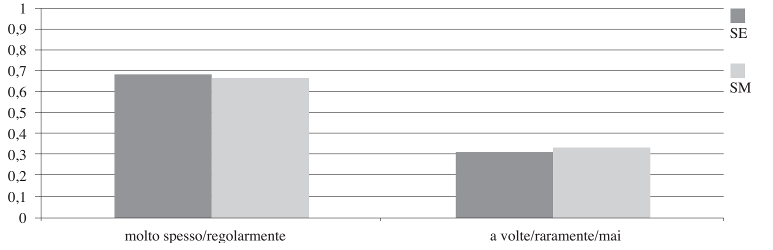
«Tendenzialmente la SE fa più di quello che la SM si aspetta.» (docente SM)

Di fronte a questi risultati entrambi i gruppi di docenti hanno espresso stupore: è la conferma che tra i due ordini scolastici manca una sufficiente conoscenza reciproca.

«Se fossimo più coordinati, ci stresseremmo di meno a fare cose che pensiamo siano pretese mentre loro non le ritengono tali.» (docente SE)

6.4. Descrizione di scelte didattiche che caratterizzano la pratica dell'insegnamento della geometria

Dalle risposte al punto 8 risultano tipologie di attività presenti sia a SE che a SM con una frequenza molto simile. Da un certo punto di vista potrebbero rappresentare equilibrio tra i due ordini di scuola e quindi continuità nell'insegnamento. Ma alcuni commenti raccolti durante le interviste fanno propendere verso una diversa interpretazione che descrive una sovrapposizione di attività senza una vera e propria diversificazione per cui non è possibile notare una progressione della costruzione del concetto. Affermazioni del tipo *«Dobbiamo cominciare tutto daccapo»* (docente SM) indicano in modo abbastanza esplicito la presenza di un problema di continuità.



8.4 Definizione e classificazione degli oggetti geometrici con un linguaggio formale matematico

Figura 5. Frequenza con cui vengono svolte specifiche attività

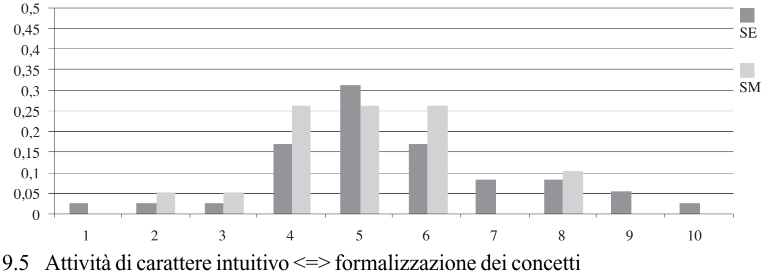
Nel punto 8.4 i docenti di SM intervistati spiegano che spesso è necessario un lavoro di risistemazione delle definizioni e delle classificazioni. La situazione descritta rivela la presenza di misconcezioni legate, per esempio, agli stereotipi, e di definizioni formali che gli allievi tentano di ripetere, senza però padroneggiare il significato dei termini utilizzati. Bisogna tenere in considerazione che il percorso di costruzione della conoscenza avviene progressivamente, attraverso la risistemazione di immagini mentali via via più complete; in questo percorso è normale un ritorno a modelli precedenti prima che quelli nuovi si stabilizzino definitivamente. Ma il problema nasce quando il modello formato è scorretto. Risulta quindi importante che i modelli formati alla SE possano rappresentare un punto di partenza che, attraverso le nuove sollecitazioni ricevute alla SM, conducano alla costruzione di conoscenze nuove o più approfondite.

I risultati riassunti nella tabella seguente indicano la presenza, nella pratica di classe, di scelte che si allineano con l'approccio empirico, basato sull'esperienza, consigliato per guidare i primi passi dell'apprendimento della geometria.

		Frequente			**Poco frequente**		
		SE	**SM**	**TOT**	**SE**	**SM**	**TOT**
8.1	*Esperienze visive e tattili (sugli oggetti concreti).*	14/35	8/19	**22/54**	21/35	11/19	**32/54**
8.2	*Esperienze su rappresentazioni figurali (disegni).*	25/34	18/19	**43/53**	9/34	1/19	**10/53**
8.3	*Osservazioni intuitive e descrizioni spontanee.*	22/34	12/19	**34/53**	12/34	7/19	**19/53**
8.5	*Attività euristiche.*	19/34	8/19	**27/53**	15/34	11/19	**26/53**

Tabella 7. Frequenza con cui vengono svolte specifiche attività

Alcuni dati raccolti, per esempio rispetto alla minor frequenza di attività di stima rispetto a quelle di calcolo esatto, testimoniano come la formalizzazione assuma un ruolo altrettanto importante nei due ordini di scuola, come mostra la distribuzione simile delle risposte tra SE e SM nel grafico seguente. Questa situazione potrebbe sostenere un'interpretazione, già avanzata in precedenza, che indica la tendenza a un formalismo precoce.

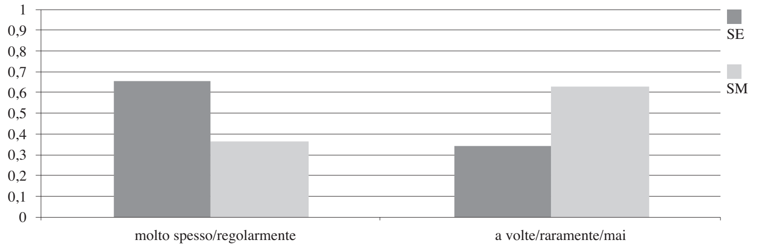


9.5 Attività di carattere intuitivo <=> formalizzazione dei concetti

Figura 6. Orientamento tra due poli (scala da 1 a 10)

Queste considerazioni non significano che a SE non ci debbano essere formalizzazioni che accompagnano la costruzione concettuale degli apprendimenti geometrici. Risulta però necessaria una valutazione affinché lo sforzo profuso per raggiungere determinate prestazioni formali non vada a scapito delle esperienze necessarie per la comprensione concettuale. In un'ottica di continuità si potrebbe valutare se determinate rinunce di carattere formale non possano trasformarsi in tempo guadagnato alla SM per migliorare l'apprendimento della geometria.

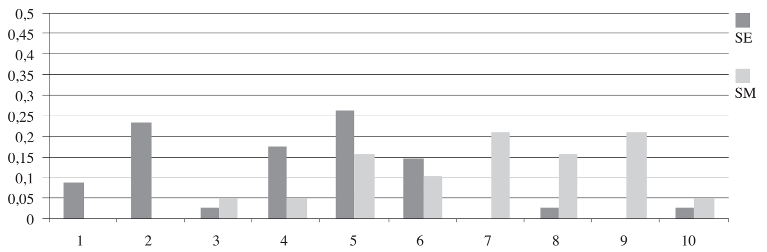
Le risposte date al punto 8.6 mostrano come le attività di costruzione siano prevalentemente svolte alla SE. Come confermato dalla maggior parte dei docenti intervistati, questa differenza può rappresentare una corretta ripartizione dei compiti tra i due ordini di scuola.



8.6 Costruzioni con riga e compasso (di figure e loro trasformazioni)

Figura 7. Frequenza con cui vengono svolte specifiche attività

Dalle interviste appare la notevole importanza che i docenti di SE attribuiscono al disegno. Tutti riportano lo sforzo necessario per riuscire a far raggiungere gli obiettivi di precisione e rigore. Questa attenzione fa tendere spesso a considerare la geometria come necessariamente legata al rigore: *«La geometria è una materia di precisione, di ordine e di rigore.»* (docente SE).

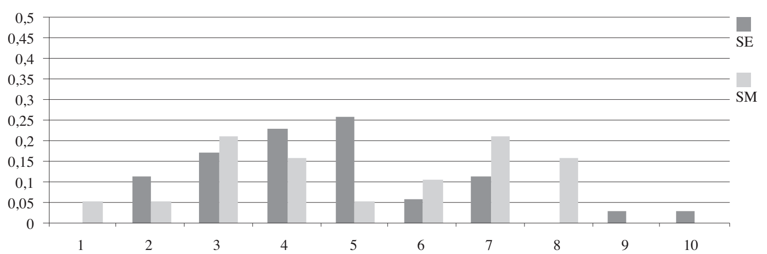


9.7 Costruzione rigorosa <=> schizzo

Figura 8. Orientamento tra due poli

Il grafico precedente mostra la tendenza a un insegnamento che, col passaggio alla SM, si orienta verso una maggiore astrazione: lo schizzo, come strumento di rappresentazione dei concetti trattati, sostituisce il disegno preciso e rigoroso.

Particolarmente interessanti sono i risultati ottenuti al punto 9.2 in merito all’aspetto linguistico:



9.2 Utilizzo di un linguaggio preciso e rigoroso <=> Utilizzo di un linguaggio impreciso, ma più semplice per gli allievi

Figura 9. Orientamento tra due poli (scala da 1 a 10)

I docenti intervistati di entrambi gli ordini scolastici sono rimasti molto sorpresi dalla realtà che il grafico rispecchia. Appare un'evidente propensione, soprattutto fra i docenti di SE, verso l'utilizzo di un linguaggio rigoroso, mentre i docenti di SM si «spaccano» in due gruppi, con picchi sia al livello 3 che al livello 7.

Questa situazione potrebbe essere interpretata come una maggiore rigidità da parte dei docenti di SE, i quali, per motivi diversi, come l'insicurezza o la pressione delle supposte aspettative da parte dei colleghi di SM, restano legati ad un eccessivo formalismo matematico. Allo stesso tempo è possibile notare l'attenzione dei docenti affinché quanto appreso sia corretto. Questo incontestabile presupposto non dovrebbe però offuscare l'importanza dell'aspetto intuitivo e del mantenimento del significato di quanto insegnato: fondamentale è l'equilibrio tra una terminologia corretta e conoscenze semanticamente ricche.

6.5. Proposte per rendere il passaggio da SE a SM più naturale e facile

Le idee raccolte al punto 10 del questionario confermano due aspetti importanti che hanno caratterizzato gran parte dei dati finora presentati:
- la diversità di determinati punti di vista fra docenti dello stesso ordine scolastico;
- la corrispondenza tra le risposte da un ordine all'altro.

SE	Svolgere più attività di manipolazione e scoperta a SE e lasciare l'approfondimentopiù formale a SM.	SM	Più concretezza e meno astrazione e formalismo.
SE	Formalizzare il linguaggio	SM	Trovare una uniformità sulle definizioni e sul linguaggio: usare da subito concetti rigorosi.
SE	Insistere sulla precisione.	SM	Insistere sulla precisione e la pulizia del disegno.
SE	Lavorare su pochi concetti ma bene.	SM	Lavorare su pochi concetti ma trattandoli più a fondo.
SE	Conoscere poche formule su aree e perimetri	SM	Non far applicare formule standard: formule di cui si capisce bene il significato.

Tabella 8. Stesso punto di vista tra ordini di scuola diversi

SM	Saper «manipolare» in modo corretto formule di aree e perimetri di quadrilateri e triangoli.	SM	Definizioni e formule (aree, perimetri, cerchi,…) sono totalmente inutili.
SE	Fare tutto quanto sta sui programmi SE.	SE	Evitare di approfondire argomenti che verranno presentati alle medie e di concentrarsi su aspetti più essenziali.

Tabella 9. Diversi punti di vista all'interno dello stesso ordine di scuola.

In particolare dalle risposte ottenute dai docenti di SE appare la valutazione dell'importanza della continuità con la SM e la mancanza di una conoscenza e di uno scambio reciproco:

	Frequenza
Chiarire gli obiettivi da raggiungere a fine 5ª	13/35
Concordare quali siano gli argomenti indispensabili a SE	12/35
Conoscere le aspettative della SM	8/35
Fornire una linea (itinerario) che tenga conto di una programmazione verticale	5/35
Scambiarsi informazioni in modo da proseguire a SM sulla base di quanto fatto a SE	4/35

Tabella 10. Proposte per migliorare la continuità tra SE e SM

7. Risposte alle domande di ricerca

R1. Le ipotesi formulate in relazione alla D1 sono state confermate dai dati che indicano in modo chiaro come alla SE viene privilegiato un insegnamento della geometria del piano, con approcci che partono dalla realtà. L'aspetto figurale della costruzione concettuale degli oggetti geometrici è frequentemente sostenuto da rappresentazioni sia concrete (oggetti e materiali) sia astratte (disegni). Viene riconosciuta l'importanza di attività di manipolazione e di sperimentazione, alternate da attività più guidate per limiti di tempo. Anche i momenti di formalizzazione sono ritenuti importanti per rispondere alle esigenze di rigore e precisione che richiede la disciplina. Questa convinzione porta a porre molta attenzione alle attività di costruzione rigorosa con gli strumenti geometrici, nelle quali i docenti riscontrano spesso importanti difficoltà legate alla motricità degli allievi. Il denso elenco di obiettivi dei programmi, insieme alle presunte aspettative dei colleghi di SM, spingono i docenti verso l'introduzione delle formule per il calcolo di aree e perimetri di quadrilateri e triangoli; meno frequente quella del cerchio.

R2. Tra i docenti di SM si è riscontrata una varietà di posizioni, a volte contrapposte, che rendono difficile rispondere alla D2. I dati raccolti indicano, però, una considerazione generalmente condivisa: la priorità della solidità e della correttezza dei concetti costruiti piuttosto che la quantità e la formalizzazione. In particolare vengono considerati come prerequisiti importanti la padronanza dell'utilizzo degli strumenti per effettuare misurazioni e costruzioni, del riconoscimento delle principali figure anche in posizioni non standard, dei concetti di contorno, superficie, lunghezza e area, che confermano l'ipotesi 2. Riguardo alla formalizzazione del calcolo dell'area, in linea con la tesi «poco, ma fatto bene » l'aspettativa si riduce al solo rettangolo.

R3. Come per la R2 il ventaglio variegato di punti di vista all'interno di ogni gruppo di docenti permette di individuare alcune opinioni convergenti e altre divergenti che però non consentono una generalizzazione. Tra gli aspetti convergenti risulta la convinzione dell'importanza di far vivere agli allievi esperienze concrete, che diventino un bagaglio utile a cui fare riferimento nel graduale passaggio verso l'astrazione. I docenti di SE concordano nel sostenere l'importanza di utilizzare un linguaggio corretto e rigoroso; questa convinzione è condivisa da circa la metà dei docenti delle SM. Differentemente da quanto ipotizzato, i dati hanno mostrato una situazione di divergenza rispetto alle convinzioni per il calcolo delle aree: alla SE si mira a introdurre diverse formule, mentre alla SM queste sono considerate secondarie rispetto alla padronanza dei concetti di area e perimetro che andrebbero maggiormente rafforzati.

R4. I dati raccolti non permettono di rispondere con un sì deciso o un no certo alla domanda 4. Dalla ricerca si sono evidenziati aspetti di continuità, ma anche punti migliorabili. La convinzione condivisa dell'importanza di proporre attività sperimentali e manipolatorie rappresenta un elemento controverso nella pratica: da parte della SM viene sostenuta l'idea che alla SE debba essere riservato un tempo maggiore a questa attività; alla SE i docenti si scontrano con i limiti di tempo che a volte impediscono il raggiungimento di tutti gli obiettivi previsti dai programmi, considerati prerequisiti necessari e attesi per iniziare la SM. Unitamente alle divergenze d'opinione riguardo all'aspetto formale del calcolo delle aree e, parzialmente, alla forma del linguaggio da utilizzare, i vari aspetti elencati rappresentano alcuni nodi da sciogliere per favorire una migliore armonizzazione del passaggio tra i due ordini di scuola. I dati indicano una possibile via da percorrere per raggiungere lo scopo: un maggior dialogo tra insegnanti al fine di definire delle competenze che rispondano alle aspettative della SM tenendo in considerazione i limiti e le possibilità della SE.

8. Conclusioni

Questa ricerca è nata dalla convinzione che il ruolo degli insegnanti sia centrale in un percorso di apprendimento armonizzato tra i diversi ordini scolastici. Le opinioni dei docenti costituiscono quindi il valore di questo lavoro, anche se, a causa dell'esiguo numero delle persone coinvolte, non sono del tutto rappresentative e quindi possono anche non corrispondere alla realtà vissuta da altri insegnanti. Anche le analisi effettuate vanno considerate con cautela e occhio critico: si tratta, infatti, di personali interpretazioni dei dati raccolti.

I risultati evidenziano, innanzi tutto, la presenza di opinioni, convinzioni e pratiche molto diversificate fra i docenti. Questo dato generale risulta però significativo, perché mostra la difficoltà nel trovare una linea comune nell'insegnamento. Molti degli insegnanti coinvolti nella ricerca hanno espresso in modo esplicito l'interesse nei confronti del tema, facendo intuire la presenza di aspetti che possono effettivamente essere migliorati nell'armonizzazione del passaggio tra SE e SM. L'aspetto predominante emergente riguarda la necessità di stabilire o ampliare il canale di comunicazione tra i docenti dei due ordini scolastici.

Un maggiore dialogo permetterebbe innanzi tutto di verificare le concezioni che i docenti di SE hanno sulle aspettative dei colleghi di SM circa gli obiettivi minimi da raggiungere entro la fine del ciclo elementare. Ciò potrebbe togliere un po' della pressione vissuta dai docenti di SE. I dati descrivono, infatti, un sistema «stressato», nel quale, tendenzialmente, si fa di più (quantità) a scapito, per alcuni aspetti, dell'approfondimento (qualità). In questo quadro rientrano anche i programmi attuali che vengono considerati molto carichi rispetto al tempo a disposizione, in particolar modo se ci si vuole attenere alle indicazioni metodologiche.

Ma proprio il metodo sembra essere considerato da tutti determinante per il raggiungimento degli obiettivi. Le ricerche in didattica confermano che le scelte dell'insegnante hanno un ruolo decisivo nella costruzione del sapere. Ma, come presentato nel quadro teorico, il discorso della trasposizione didattica si lega necessariamente a una considerazione sulla formazione specifica, che è carente negli insegnanti di SE. Parallelamente anche un «ampio repertorio di tecniche è insufficiente per diventare un insegnante efficace» (Joram, 2007, in Iori, 2009).

Più in generale, è importante considerare quanto le convinzioni sull'insegnamento-apprendimento di ogni docente, profondamente collegate e influenzate dall'esperienza, possono risultare difficili da mettere in discussione. In particolar modo, nelle interviste, è stato interessante osservare la presa di coscienza da parte degli insegnanti di entrambi gli ordini scolastici, di punti di vista non considerati in precedenza. Le conseguenti riflessioni più approfondite sul tema hanno portato a una maggiore convinzione dell'esigenza di uno scambio tra i professionisti dei due ordini e ha aperto la strada verso una maggiore disponibilità all'individuazione di un compromesso costruttivo.

Il problema della conciliazione di metodo e obiettivi messo in evidenza dalla ricerca potrebbe rappresentare un importante nodo da tenere in considerazione nella riforma attualmente in atto. L'accordo intercantonale Harmos rappresenta quindi l'occasione per rivedere gli obiettivi tenendo conto delle esigenze dei docenti: il cambiamento dovrebbe, infatti, corrispondere a un miglioramento dell'insegnamento-apprendimento della geometria nel curricolo verticale degli allievi dalla SE alla SM… partendo magari già dalla scuola dell'infanzia!

Bibliografia

Arrigo, G., & Sbaragli, S. (2004). *I solidi. Riscopriamo la geometria*. Roma: Carocci Faber.
CDPE (2010). *Standard di base per la matematica. Documenti per il procedimento d'audizione*. Disponibile in: edudoc.ch/record/36467/files/StandardsMath
D'Amore, B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora.
D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2006). *Area e perimetro. Aspetti concettuali e didattici*. Gardolo (TN): Erickson.
DECS (2010). *Consultazione standard Harmos*. Bellinzona. Disponibile in: www.scuoladecs.ti.ch/harmos.
Divisione della scuola, Ufficio dell'insegnamento primario. (1984). *Programmi per la scuola elementare*. Bellinzona: DECS
Divisione della scuola, Ufficio dell'insegnamento medio (2004). *Piano di formazione Scuola media*. Bellinzona: UIM.
Iori M. (2008). *Epistemologia dell'insegnante di matematica sulla sua conoscenza professionale*. Parte IV. Disponibile in: http://www.dm.unibo.it/rsddm.
Mariotti M. A. (2005). *La geometria in classe. Riflessioni sull'insegnamento e l'apprendimento della geometria*. Bologna: Pitagora Editrice.
Speranza F. (1997). *Scritti di epistemologia della Matematica*. Bologna: Pitagora Editrice.

3. Le equazioni tra significato e sintassi[1]

Lorenza Porteri Ferdani[2]

The aim of this research, carried out in a group made up of nine weak students attending the third year of Secondary School, is trying to outline a didactic approach meant to infer the meaning of an equation. The purpose is to analyse the possibility of giving meaning to mathematical concepts, avoiding their syntactic-procedural value aspect.

1. Introduzione

In questo lavoro si cerca di delineare un approccio didattico mirato alla costruzione del significato di equazione in un gruppo di nove allievi di terza media, corso base. L'intervento in classe è stato iniziato e concluso con un questionario al fine di raccogliere le immagini mentali degli allievi e osservare se e come si siano modificate.

L'idea per questa ricerca è nata da una riflessione personale in merito alle modalità con le quali gli allievi di terza, corso base, affrontano le attività di matematica. Lavorando con loro è possibile rendersi conto di quanto questi studenti siano dipendenti dagli aspetti meccanici: essi cercano infatti di applicare regole formali, che più o meno conoscono, tralasciando però di riflettere sul loro significato. Si ostinano, ad esempio, a voler ricordare la formula «inversa» per risolvere un problema di geometria, senza comprendere che avendo a disposizione quella «diretta» possono ugualmente ricavare ciò che stanno cercando. Non riconoscendo il significato della formula, essi hanno una difficoltà a trasporre il sapere acquisito in altri contesti. Un esempio significativo permette di chiarire quanto descritto: gli studenti hanno appreso il Teorema di Pitagora e dimostrano di saperlo usare per risolvere problemi quando nella consegna ne viene esplicitato l'uso o quando nel testo compaiono le parole chiave, quali triangolo rettangolo, cateto, ipotenusa. Difficilmente però sanno trasporre questa conoscenza per risolvere altri problemi di geometria che, pur esigendo il Teorema di Pitagora, non menzionano le parole chiave. Inoltre gestiscono la formula risolutiva del teorema meccanicamente, senza contestualizzarla nella situazione, commettendo errori di tipo concettuale (ad esempio, sottraggono tra di loro le aree dei quadrati dei cateti, oppure sommano le lunghezze dei cateti senza elevarle al quadrato). L'allievo che agisce secondo queste modalità non ha costruito il significato del Teorema di Pitagora, bensì ricorda approssimativamente la sintassi della formula, spoglia del suo aspetto semantico.

1. Libera sintesi del lavoro di diploma del corso complementare di matematica, anno accademico 2010/2011. Relatore: Gianfranco Arrigo.
2. Insegnante alla Scuola media di Morbio Inferiore.

Il progetto si propone di individuare se sia possibile rivestire di significato i concetti matematici e se questo permetta agli allievi di essere meno dipendenti dalle regole formali. Si vogliono analizzare questi aspetti circoscrivendo l'indagine al tema *equazioni*, argomento che permette di osservare la potenziale divergenza tra *applicazione di regole formali* e *costruzione di significati*. Malara e Navarra (2003) evidenziano come molteplici problemi relativi all'apprendimento dell'algebra siano da ricondurre alla tradizionale e diffusa pratica didattica che, durante la costruzione dei concetti, tende a porre un'eccessiva attenzione sui *meccanismi manipolativi*, tralasciando gli *aspetti semantici e funzionali*. Secondo questi autori, le problematiche relative all'insegnamento dell'algebra risultano essere un tema di interesse attuale a livello internazionale, al quale la ricerca degli ultimi vent'anni ha dedicato la propria attenzione, cercando di delineare possibili modi per sviluppare il *significato* degli oggetti e dei processi algebrici.

2. Quadro teorico

In questa ricerca si fa riferimento a tre importanti componenti coinvolte nel processo di costruzione di un concetto matematico: le *immagini mentali*; i *registri semiotici*; il binomio *significato-sintassi*. Il progetto didattico rappresenta un tentativo di valorizzare i legami tra una e l'altra. Nella costruzione di un concetto matematico è infatti possibile tracciare una stretta connessione tra immagini mentali, registri semiotici e significato (D'Amore, 1999; 2003):

- l'evolversi delle immagini mentali porta alla costruzione del modello mentale di un determinato concetto;
- un concetto si considera costruito solo quando l'individuo è in grado di rappresentarlo, di trasformare tale rappresentazione, di usarla spontaneamente e in modo opportuno in contesti differenti;
- raggiungere il modello mentale adeguato di un concetto implica avere accesso al suo significato.

2.1. Immagini mentali e costruzione del concetto matematico

Per quel che riguarda questo campo, le interpretazioni e la terminologia usata sono molteplici e, talvolta, in contraddizione. Ne conseguono tradizioni di ricerca diverse, sia per i riferimenti teorici assunti sia per le metodologie impiegate (D'Amore, 1999). Ad esempio Kosslyn «[...] suggerisce l'idea di immagine come una forma di attivazione ed utilizzazione di strutture di dati a disposizione dell'individuo. Forse è a partire da questo suggerimento che si elabora il modo moderno di vedere le immagini come un *processo* e non come un semplice *stato*; [...]» (cit. in D'Amore, 1999, p. 147-148).

Per l'impostazione che intendo dare alla ricerca mi rifaccio alla definizione di *immagine mentale* proposta da D'Amore (1999; 2003), in rapporto ai processi cognitivi nel campo della matematica.

Immagine mentale è il risultato, per lo più figurale o proposizionale prodotto da una sollecitazione, che può essere interna o esterna. L'immagine mentale è condizionata da esperienza personale e influenze culturali; in poche parole è un prodotto tipico dell'individuo, ma con costanti e connotazioni comuni tra individui diversi. Anche se può essere elaborata coscientemente, l'immagine mentale è interna e, almeno in prima istanza, involontaria. L'insieme delle immagini mentali, relative ad uno stesso concetto ed elaborate in diverse occasioni specifiche, costituisce il *modello mentale* del concetto stesso.

Intendo considerare il modello mentale *dinamicamente*, come immagine-limite di un processo che costituisce una successione (D'Amore, 1999; 2003). Molti concetti matematici sono infatti raggiunti grazie a passaggi da un'immagine all'altra, che avvengono nel seguente modo: lo studente si costruisce un'immagine relativa ad un determinato concetto, la quale, sottoposta a sollecitazioni diverse (per esempio da parte del docente), può trovarsi in contrasto con la sollecitazione stessa, creando il cosiddetto *conflitto cognitivo*. Lo studente deve allora elaborare la «vecchia» immagine per adeguarla alla nuova situazione. Si giunge così ad una nuova immagine mentale, che conserva le vecchie informazioni e accoglie coerentemente anche le nuove, divenendo sempre più completa e vicina al concetto stesso. Questa situazione può ripetersi più volte, finché ad un certo punto l'immagine creatasi «resisterà» a qualsiasi nuova sollecitazione. A questo punto lo studente trasforma, spesso inconsciamente, l'immagine mentale associata a quel concetto in un modello mentale stabile. Farsi un modello di un concetto significa quindi rielaborare immagini, deboli e *instabili*, per giungere a una definitiva, forte e *stabile*. Nelle immagini mentali vi sono elementi varianti e elementi invarianti. Nel processo dinamico che conduce al modello matematico adeguato, gli elementi varianti vengono a poco a poco eliminati. Nel modello finale rimangono solo gli elementi invarianti, essenziali per la caratterizzazione del concetto.

A scopi didattici (D'Amore, 1999), il poter conoscere il modello mentale che uno studente si è fatto di uno specifico concetto matematico permetterebbe all'insegnante di costruire strategie personalizzate adatte a modificare i modelli non perfettamente adeguati al sapere matematico. A tale proposito, è importante tener conto della difficoltà nel voler conoscere i modelli mentali degli allievi, perché si tratta di «modelli interni». È possibile però rilevare e analizzare soprattutto il *modello esterno* di un concetto, risultato di una traduzione, con finalità comunicative, del *modello interno*. Tutto ciò comporta dei limiti: molto spesso un modello esterno è influenzato dal contratto didattico allievo-docente o dal desiderio dello studente di compiacere il ricercatore.

2.2. Teoria dei registri semiotici

Con il termine *semiotica*, nel caso della matematica, si intende lo studio della rappresentazione di concetti mediante un sistema di segni. La teoria dei registri semiotici, elaborata da Duval (1993) e in seguito adottata da D'Amore (1999; 2003), è costruita sul presupposto che «Ogni concetto matematico è costretto a servirsi di rappresentazioni, dato che non vi sono 'oggetti' da esibire in loro vece o a loro evocazione; dunque la concettualizzazione deve necessariamente passare attraverso registri rappresentativi [...]» (D'Amore, 2003, p. 39). Anche Radford (2004) si è occupato della problematica descritta, focalizzando la sua attenzione sulla generalizzazione in matematica. In linea con Duval e D'Amore, egli considera processo semiotico la capacità di generalizzare.

Appare evidente come le rappresentazioni semiotiche siano un aspetto determinante nella costruzione di un concetto matematico. Si ritiene infatti che l'apprendimento concettuale avvenga necessariamente attraverso l'acquisizione di una o più rappresentazioni semiotiche del concetto stesso. Lo stesso D'Amore (2003), citando Vygotskij (1962), sostiene che «Anche l'esperienza dimostra che l'insegnamento diretto dei concetti è impossibile e sterile. Un insegnante che tenta di fare questo, normalmente non raggiungerà nulla, se non un vuoto verbalismo».

In questo processo di costruzione intervengono tre importanti operazioni cognitive caratteristiche della semiotica: la scelta degli elementi distintivi del concetto *(rappresentazione)*; il passaggio da una rappresentazione all'altra in uno stesso registro semiotico *(trattamento)*; il passaggio da un registro all'altro *(conversione)*. In questa ottica, l'apprendimento risulta essere una costruzione che avviene mediante un mezzo comunicativo e che sarà necessariamente condizionata dalla scelta del registro di rappresentazione adottato. Una scelta consapevole dei registri semiotici risulta determinante per la pratica didattica: registri diversi fissano elementi distintivi differenti di uno stesso concetto. Secondo Duval (in D'Amore, 2003) l'operazione di conversione (cambio di registro) sembra essere la più significativa: essa permette infatti di individuare e definire gli elementi invarianti che costituiscono l'essenza di un concetto.

Recenti studi di D'Amore e Fandiño Pinilla hanno invece evidenziato che la maggior parte delle trasformazioni semiotiche messe in atto in ambito algebrico sono trattamenti e non conversioni. Il trattamento può dar luogo a trasformazioni di senso che condizionano in grande misura lo studente (D'Amore, 2003, 2006, 2011; D'Amore e Fandiño Pinilla, 2007).

2.3. Significato e sintassi nella costruzione del concetto di equazione

L'aspetto sintattico dell'equazione comprende le regole di scrittura dell'algebra e i principi di equivalenza atti a risolvere l'equazione dal punto di vista algoritmico (ad esempio, in linguaggio naturale: «porto di qui, porto di là»). L'aspetto semantico – ovvero la costruzione di significati – presuppone la contestualizzazione dell'oggetto matematico, il saper tradurre un problema nel linguaggio algebrico (e viceversa) e permette di dare significato alle procedure adottate per risolvere le equazioni («*perché* porto di qui, *perché* porto di là»).

Malara e Navarra (2003, p. 21-22), in merito alla questione «[...] quale delle due analisi – quella sintattica o quella semantica – debba precedere l'altra» non hanno alcun dubbio: «l'analisi sintattica segue necessariamente quella semantica [...]». Essi puntualizzano che «[...] tradurre frasi dal linguaggio naturale (o grafico, o iconico) a quello matematico [...] significa interpretare e rappresentare una situazione problematica mediante un linguaggio formalizzato o, al contrario, riconoscere in una scrittura simbolica la situazione che essa descrive».

Numerosi studi sulla didattica dell'algebra evidenziano invece che nell'abituale percorso di insegnamento si pone l'accento soprattutto sui meccanismi manipolativi e sulle tecniche di calcolo, come se lo studio delle regole formali fosse precedente alla comprensione dei significati. Si tende cioè ad insegnare la *sintassi* dell'algebra trascurando la sua *semantica*. Secondo questa metodologia, le equazioni vengono introdotte dapprima come «oggetto matematico», in cui gli allievi imparano a «trasportare» termini da un membro all'altro, e solo in un secondo momento come strumento per la risoluzione di problemi.

Di conseguenza si toglie all'algebra la caratteristica di essere un potente strumento di ragionamento e si favorisce lo scollamento tra linguaggio simbolico e significato (Medici & Rinaldi, 2005).

Ancora Malara e Navarra ribadiscono che «[...] l'attenzione non deve essere tutta tesa alla ricerca immediata degli strumenti (le operazioni) per ottenere la risposta (il risultato) nelle varie situazioni, ma deve sollecitare prima di tutto la rappresentazione della situazione stessa, stimolando per tappe successive il passaggio dal linguaggio naturale, nel quale sono formulati i problemi, a quello algebrico-formale, in cui si traducono le relazioni che essi contengono» (cit. in Doretti & Salomone, 2005, p. 236). Secondo questo punto di vista, l'equazione risulta essere la traduzione simbolica di situazioni-problema presentate con diverse tipologie di linguaggio. Richiamando la teoria di Duval, i *passaggi* da un linguaggio all'altro sono da considerare operazioni di conversione, cioè rappresentazioni diverse di uno stesso problema in registri semiotici differenti. Pertanto il concetto di equazione si presta particolarmente bene ad essere acquisito attraverso un apprendimento semiotico.

Le considerazioni precedenti incoraggiano a introdurre il concetto di equazione attraverso l'esplorazione di problemi. Un tale approccio permette di contestualizzare l'oggetto matematico in questione e induce gli allievi a voler conoscere gli strumenti necessari alla sua risoluzione. Utilizzare un'equazione per risolvere un problema implica una successione di conversioni: dai vari linguaggi non propriamente matematici fino a giungere alla «messa in equazione», che costituisce il modello adeguato stabilito dall'insegnante. Il solo saper gestire un'equazione dal punto di vista procedurale (sintattico) non è quindi sufficiente per poter risolvere un problema mediante un'equazione.

L'allievo che dà significato alle equazioni secondo questo metodo dovrebbe dunque:

- tentare innanzitutto di tradurre una situazione problema nel linguaggio algebrico (conversione), senza avere come obiettivo la ricerca del risultato;
- saper contestualizzare una scrittura formale, cioè non gestire meccanicamente la scrittura ma saper dare un significato a quanto scritto, anche attraverso la conversione da un registro all'altro;
- saper risolvere un'equazione dal punto di vista sintattico, capendo perché vengono svolti determinati passaggi.

3. Domande di ricerca

D1. Quali sono le immagini mentali degli allievi di terza media, corso base, riguardo alle equazioni?

D2. Un approccio strutturato secondo i seguenti principi:

a) uso di diversi registri semiotici e conseguente conversione da un registro all'altro;

b) possibilità di lavorare dapprima in modo intuitivo, senza dover affrontare a priori questioni di tipo sintattico e formalizzando solo nel momento in cui si è costruito il concetto, permette agli allievi di apprendere il significato delle equazioni e di essere meno dipendenti dagli aspetti sintattici (procedurali)?

4. Ipotesi di ricerca

I1. Si ipotizza che gli allievi prima dell'intervento didattico:
- identifichino nell'equazione una procedura per *calcolare* un numero sconosciuto, senza essere in grado di formalizzarne il concetto;
- riconoscano come equazioni qualsiasi espressione matematica contenente una variabile oppure solo scritture nelle quali l'incognita si trova sempre a sinistra dell'uguale ed è rappresentata dalla lettera x;
- non mettano in relazione l'equazione con la risoluzione di problemi e di conseguenza non ne facciano uso per risolverli.

L'attenta osservazione delle immagini mentali degli allievi può rilevare sul nascere alcuni importanti ostacoli all'apprendimento del significato di equazione.

I2. Procedendo secondo le scelte descritte nelle domande di ricerca, gli allievi hanno un maggiore accesso al significato del concetto di equazione e non solo all'aspetto sintattico-procedurale. Di conseguenza cambiano il loro modo di affrontare e risolvere i problemi.

5. Metodologia

Per rispondere alle domande di ricerca sopra esposte è stata progettata una ricerca-azione con una raccolta di dati di tipo qualitativo. La ricerca è stata condotta in una classe di terza media, corso base, di nove allievi. Il processo di osservazione è costituito da tre fasi distinte. Inizialmente è stato proposto agli allievi un questionario individuale per poter raccogliere e analizzare le loro immagini mentali, prima che avessero ricevuto una qualsiasi sollecitazione da parte del docente.

In seguito gli allievi sono stati coinvolti in attività finalizzate alla costruzione del significato di equazione, per poter comprendere pienamente l'oggetto matematico in tutte le sue sfaccettature. In questa fase il docente ha tenuto un diario delle attività. I dati conclusivi sono stati raccolti mediante l'elaborazione di TEPs[3] a coppie (Maier, 2000) e un questionario da completare individualmente. Si sono quindi confrontati i dati emersi dal primo questionario con quelli ottenuti nella fase conclusiva per valutare se e come sono cambiate le immagini mentali degli allievi. Questo confronto ha permesso di stabilire se gli allievi hanno costruito coscientemente il concetto di equazione, comprensivo del suo significato, o se si sono soffermati unicamente sugli aspetti sintattici.

3. Text Eigen Produkte [letteralmente: produzioni testuali autonome degli allievi]: si tratta di testi elaborati in modo autonomo dagli studenti su argomenti di matematica.

5.1. Questionario preliminare

Il questionario introduttivo[4] è costituito da quattro sezioni, ciascuna delle quali esplora una componente della costruzione del significato di equazione. È stato sottoposto agli allievi durante quattro lezioni diverse, senza che sia stata esplicitata la connessione tra una parte e l'altra.

La prima sezione, composta di quattro domande aperte, indaga principalmente su che cosa sia un'equazione e su quale sia la sua funzione, nella concezione degli allievi.

La seconda ha come obiettivo il riconoscimento della sintassi di un'equazione tra diverse scritture di tipo algebrico e aritmetico. Le scritture proposte non presentano unicamente la forma canonica dell'equazione, caratteristica dell'insegnamento tradizionale di cui si è detto nell'introduzione.

La terza indaga sulle competenze sintattiche di risoluzione di un'equazione. Agli allievi è stato chiesto di risolvere due equazioni e di spiegare a parole come hanno proceduto.

La quarta propone la risoluzione di due problemi (uno di geometria e uno aritmetico) senza che nella consegna venga specificato l'uso di un'equazione quale strategia risolutiva.

5.2. Impostazione didattica del progetto di intervento

L'intervento in classe, della durata di circa due mesi, si è articolato in otto momenti. In questa sede verranno presentati unicamente i principi didattici a partire dai quali è stato costruito, in riferimento al quadro teorico, e un'attività esemplificativa.

Per la preparazione delle attività si è fatto riferimento in particolare agli autori Malara e Navarra (2003), i quali, per la costruzione del concetto di equazione, ipotizzano un percorso che preveda:

- l'approccio al codice algebrico realizzato nel passaggio dal linguaggio naturale al linguaggio formale e viceversa;
- la costruzione collettiva di significati (semantica);
- la consapevolezza delle regole del nuovo linguaggio (sintassi);
- la rappresentazione e la descrizione delle situazioni problematiche attraverso il linguaggio algebrico.

Per alcune scelte didattiche si è pure preso spunto dalle esperienze effettuate da Sawyer (1974), il quale descrive quanto siano importanti il ruolo visivo in algebra e il dare significato all'apprendimento.

«Un segno privo di significato non fa riflettere; lo si può solo guardare»; «[...] è estremamente difficile ricordare cose che non si siano comprese» (Sawyer, 1974, p. 15; 14).

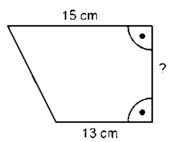
In linea con Malara e Navarra, Sawyer sostiene che un primo accostamento all'algebra dovrebbe avvenire in modo intuitivo, senza passare attraverso l'acquisizione di regole.

4. Tutti i documenti citati sono in possesso dell'Autore e, all'occorrenza, possono essere richiesti alla redazione.

Tenendo presente questa traccia, l'intervento proposto prevede:

- un approccio alle equazioni attraverso situazioni-problema, per favorire la contestualizzazione dell'oggetto matematico. Questa scelta permette di evidenziare l'aspetto funzionale dell'equazione: essa è un potente strumento (anche se non l'unico) per risolvere problemi;
- la conversione di un problema da un registro semiotico all'altro. In particolare si utilizzano i seguenti linguaggi: naturale; figurale (pittorico o geometrico); schematico; algebrico. Progressivamente gli allievi saranno condotti a «vedere» l'equazione come la traduzione matematica di una situazione, in origine espressa con un linguaggio non algebrico.

Traduzioni in linguaggi differenti

Linguaggio naturale Se al triplo di un numero sottraggo 29 trovo 82: qual è quel numero?	**Schema a frecce**
Linguaggio algebrico $(3 \cdot z + 6) : 2 = 63$	**Linguaggio naturale**
Linguaggio algebrico $(3 \cdot b + 15) : 3 = 8$	**Schema a frecce**
Linguaggio figurale  Area della figura = 147 cm^2	**Linguaggio algebrico**

Per ciascuna situazione determina il valore dell'incognita e verifica la soluzione ottenuta.

Tabella 1. Esempio di attività

- Preparare il passaggio dal problema alla »messa in equazione», secondo il principio «prima rappresenta, poi risolvi» (Malara e Navarra, 2003). Agli allievi, in questo primo momento, non viene richiesta la risoluzione formale dell'equazione per ottenere il risultato; lo scopo è tradurre un problema nel linguaggio algebrico.
- Risoluzione intuitiva dell'equazione attraverso metodi diversi: aritmetico (uso delle operazioni inverse), percorso a frecce, linguaggio pittorico, metodo delle bilance oppure «per tentativi». Anche alcuni di questi passaggi prevedono conversioni di registri semiotici.
- Problemi la cui soluzione (per gli allievi) sia possibile solo attraverso un'equazione, per evidenziare «la forza dell'algebra» e creare la necessità di imparare a risolverle.
- Una formalizzazione conclusiva sulla base di quanto emerso durante il percorso è stata costruita con gli allievi. I principi di equivalenza vengono definiti solo in questo momento.

Gli allievi hanno lavorato spesso a coppie per avere la possibilità di confrontare le proprie scelte e collaborare nella risoluzione. Le coppie sono state scelte dall'insegnante rispettando le dinamiche di classe e le competenze individuali e sono state modificate nel corso delle attività.

Durante questa fase l'insegnante ha tenuto un diario nel quale annotava le strategie adottate e le osservazioni particolarmente interessanti per la ricerca. Nell'analisi dei risultati saranno inserite alcune riflessioni raccolte dal docente durante le discussioni nei gruppi di lavoro, momenti in cui lo studente è meno influenzato dal rapporto con l'insegnante-valutatore e quindi può esprimere anche convinzioni appartenenti al *modello interno*.

5.3. TEPs e questionario conclusivo

La raccolta dei dati, dopo l'attività didattica, è avvenuta mediante l'elaborazione di TEPs a coppie e un questionario individuale avente gli stessi obiettivi di quello preliminare: questo per rendere possibile il confronto.

I TEPs sostituiscono le quattro domande aperte presenti nel primo questionario. Gli allievi devono provare a spiegare ad allievi di seconda media *che cosa* siano le equazioni e *come* si usino e fornire suggerimenti per portarli a capire l'argomento nel migliore dei modi.

Il questionario è composto di tre sezioni ed è stato sottoposto agli allievi durante tre lezioni diverse. Nella prima sezione gli allievi devono individuare le scritture che rappresentano un'equazione, mentre nella seconda hanno il compito di risolvere tre equazioni (con difficoltà graduali), spiegando a parole i passaggi effettuati.

La terza è costituita da tre situazioni (una di geometria e due aritmetiche) per le quali gli allievi devono dapprima effettuare la traduzione nel linguaggio algebrico e solo in un secondo momento individuare la soluzione del problema.

L'analisi dei risultati è stata eseguita in modo incrociato, cioè confrontando quanto emerso prima e dopo l'intervento didattico.

6. Risultati e analisi dei dati

6.1. Classificazione delle immagini mentali

Dall'analisi delle risposte ottenute dalla prima sezione del questionario preliminare, emergono quattro immagini mentali relative al concetto di equazione: «è un calcolo»; «è quando si deve cercare un numero»; «è quando bisogna trovare l'incognita *x*»; «è un metodo per risolvere i problemi».

Che cos'è per te un'equazione?		**A che cosa servono le equazioni?**	
Un calcolo	4	Trovare il numero mancante	3
Trovare il numero mancante	1	Trovare l'incognita x	1
Trovare l'incognita x	3	Risolvere problemi	3
Altro	1	Altro	2

Tabella 2. Immagini mentali *prima* dell'intervento

Quasi la metà degli allievi descrive l'equazione come un calcolo, mentre nessuno definisce l'equazione un'uguaglianza: ciò denota che questi allievi non sono ancora in grado di formalizzare il concetto. Solamente tre studenti contestualizzano l'equazione all'interno della risoluzione di problemi, anche se due di loro hanno precedentemente definito tale concetto «un calcolo», «un calcolo in colonna». Emerge quindi preponderante l'aspetto procedurale legato all'immagine di equazione, ma in generale al modo di «fare matematica», cioè la ricerca del «prodotto», del risultato (Malara & Navarra, 2003).

Dal diario tenuto durante le attività in classe, si possono cogliere alcune affermazioni degli allievi che rafforzano queste immagini mentali:

«Ai corsi attitudinali ci hanno spiegato che l'equazione è un calcolo, lì non mi dava l'idea del calcolo, non capivo dov'era il risultato.»

Di fronte a un'equazione che presenta la stessa incognita ripetuta più volte (es.: $a + a + 4 + 2a + 4 + 4 = 40$), un allievo afferma:

«Non abbiamo usato un'equazione: nell'equazione si mettono i numeri da una parte e le x dall'altra.»

L'analisi delle risposte ottenute dopo l'intervento didattica con la tecnica dei TEPs permette di individuare due nuove immagini mentali: «l'equazione è un'uguaglianza» e «è un'uguaglianza con incognita».

Che cos'è per te un'equazione		**A cosa servono le equazioni?**	
Un'uguaglianza	4	Risolvere problemi	8
Un'uguaglianza con incognita	2	Trovare l'incognita	1
Un calcolo	2		
Altro	1		

Tabella 3. Immagini mentali *dopo* l'intervento

Si può notare come le «vecchie» immagini mentali siano state modificate dalla maggior parte del gruppo classe. L'*uguaglianza*, aspetto caratterizzante del concetto, è messo in risalto da sei allievi su nove:

«L'equazione è un'uguaglianza e serve quasi sempre per risolvere problemi o calcoli inversi. Si può paragonare ad una bilancia dove l'operazione svolta su un piatto bisognerà svolgerla anche sull'altro, così da mantenere l'uguaglianza.»

«Per esempio si usano per un problema, quando bisogna trovare un numero, un'incognita, che messa sopra la 'bilancia' su un piatto, insieme a una parte del calcolo, deve avere lo stesso peso.»

«Alla fine bisogna fare la verifica per vedere se la soluzione trovata fa bilanciare il calcolo.»

Tre allievi non hanno ancora sviluppato un'immagine mentale vicina al modello atteso dal docente (equazione = uguaglianza che contiene almeno un'incognita). In particolare, due di loro sono rimasti ancorati alla «vecchia» immagine mentale, dalla quale risulta che l'equazione «è come un calcolo per trovare un numero mancante».

L'intera classe ha colto l'aspetto pragmatico dell'equazione: otto allievi su nove contestualizzano l'oggetto matematico all'interno della risoluzione di problemi, un allievo afferma che serve per «cercare» il valore dell'incognita attraverso il calcolo inverso.

Riconoscere un'equazione attraverso la sua sintassi	*prima*	*dopo*
Scritture «intuitive» – non formali	6	6
Scrittura formale con incognita a sinistra dell'uguale	8	9
Scrittura formale con incognita a destra dell'uguale	4	7
Espressione algebrica	4	0
Espressione numerica	0	1
Scrittura che rappresenta l'identità	3	7
Errori[5]	17	6

Tabella 4. Immagini mentali *prima* dell'intervento / *dopo* l'intervento

Dall'analisi delle risposte ottenute nella seconda sezione del questionario, come indicato nella tabella 4, risulta che otto allievi considerano un'equazione la scrittura in forma canonica, avente l'incognita a sinistra del segno uguale; di questi otto solo quattro prendono in considerazione anche la forma avente l'incognita a destra. Un allievo considera equazioni tutte le forme di scrittura che contengono una lettera.

Si delineano così altre due immagini mentali: «l'equazione è una qualsiasi espressione contenente una lettera» e «sono equazioni le scritture aventi l'incognita a sinistra dell'uguale».

Dopo l'intervento tutti gli allievi identificano come equazioni la scrittura canonica e sette su nove anche la forma avente l'incognita a destra. Dal confronto dei risultati si può constatare che, anche in quest'occasione, le immagini mentali antecedenti l'intervento didattico sono state modificate. Vengono infatti riconosciute come equazioni solo le forme di scrittura che esprimono un'uguaglianza, mentre nella prima fase quattro allievi hanno considerato tali anche l'espressione algebrica, poiché contiene delle lettere.

In questa fase agli allievi è stato chiesto di giustificare le forme di scrittura non considerate delle equazioni. Le risposte sono riportate nella tabella 5.

Scritture	**NO**	**Motivazione**	**Frequenza**
n _ (n+1) _ (n+2)	9	Non è un'uguaglianza.	9
15 + (4 + 26) : 6 = 20	8	Non c'è l'incognita.	5
		È un calcolo.	2
7c + 13c = 20c	2	È un calcolo.	2

Tabella 5. Giustificazioni degli allievi *dopo* l'intervento

L'analisi dimostra che gli allievi giustificano le proprie scelte in maniera coerente, in riferimento a quanto emerso nel cambio di immagine mentale.

5. Non sono stati conteggiati gli errori relativi all'identificazione dell'identità come equazione.

6.2. Aspetto sintattico e metodi risolutivi

Agli allievi non sono state fornite precisazioni in merito a come risolvere le equazioni.

Equazioni	Corretta	Metodo risolutivo	
a) $x + 5 = 29$	7	Registro aritmetico	5
b) $30 = 3x - 3$	2	Manipolazione«tradizionale»	3
		Manipolazione «ragionata»	1
		Per tentativi	1

Tabella 6. Metodi risolutivi *prima* dell'intervento

Equazioni	Corretta	Parzialmente	Metodo risolutivo	
a) $96 = 72 + 6b$	6	0	Registro aritmetico	0
b) $14a+32=6a-16$	1	0	Manipolazione«tradizionale»	1
c) $x^2 + 17 = 42$	0	7	Manipolazione «ragionata»	8
			Per tentativi	0

Tabella 7. Metodi risolutivi *dopo* l'intervento

È possibile classificare i metodi risolutivi utilizzati dagli allievi in quattro categorie:
- Registro aritmetico: utilizzo di un calcolo inverso (ad esempio: $x+5=29$, $x=29-5$).
- Manipolazione «tradizionale»: si spostano lettere e numeri da un membro all'altro effettuando l'operazione inversa.
- Manipolazione «ragionata»: si applicano i principi di equivalenza secondo uno schema che *descrive* i passaggi svolti.
- Per tentativi.

In un primo tempo, la maggior parte degli allievi risolve l'equazione attraverso un calcolo inverso, facilmente individuabile grazie alla situazione proposta. Questo metodo non si rivela però efficace per risolvere la seconda equazione (dove individuare le operazioni inverse comporta più passaggi), pertanto gli allievi tentano di spostare numeri e lettere da un membro all'altro ma con risultati poco soddisfacenti. La maggior parte degli allievi non sa spiegare con precisione i passaggi effettuati.

Dopo l'intervento didattico, otto allievi affrontano la risoluzione con la manipolazione «ragionata«. Solo un allievo rimane radicato al metodo «tradizionale», che ha acquisito al corso attitudinale. Egli gestisce il «suo» metodo con successo, perché risolve correttamente entrambe le equazioni.

In questa fase gli studenti sono in grado di motivare i passaggi effettuati per ricavare la soluzione. La maggior parte (7/9) descrive le operazioni svolte a destra e a sinistra del segno uguale; tre allievi specificano che:

«bisogna avere le lettere da una parte e i numeri dall'altra»;
«le operazioni vanno svolte a destra e a sinistra dell'uguale»;
«bisogna mantenere l'equilibrio».

6.3. Risoluzione di problemi

Nelle tabelle 8 e 9 sono raccolti i risultati ottenuti nella quarta sezione del questionario preliminare, raggruppati per tipologia di risposta. Nell'analisi si vuole evidenziare se gli allievi hanno risolto correttamente i problemi e, soprattutto, quale registro semiotico hanno adottato per formulare la soluzione.

Problemi	**Corretto**	**Non Corretto**	**Non Svolto**
1) di geometria	6	2	1
2) di aritmetica	3	6	0

Tabella 8. Risultati *prima* dell'intervento

Metodi risolutivi	**Problema 1)**	**Problema 2)**
registro aritmetico	0	5
formula inversa	7	0
equazione	1	0
registro schematico	0	1
per tentativi	0	2
altro	0	1

Tabella 9. Metodi risolutivi *prima* dell'intervento

La maggior parte degli allievi risolve correttamente il problema di geometria, applicando la formula inversa, modalità di lavoro alla quale fa capo abitualmente.

Per risolvere la situazione aritmetica, gli allievi devono comprendere e impostare la relazione di uguaglianza che vincola i dati contenuti nel testo. Tre allievi comprendono la relazione e individuano la soluzione correttamente: due di loro procedendo per tentativi e uno organizzando uno schema strutturato. La maggior parte degli studenti tenta una risoluzione di tipo aritmetico, effettuando operazioni che non tengono conto della relazione di uguaglianza menzionata precedentemente.

Con i dati raccolti dopo l'intervento (tabelle 10 e 11) si sono osservati tre aspetti: la traduzione del problema nel linguaggio algebrico, la correttezza della soluzione e il registro semiotico utilizzato per individuarla. Agli allievi è richiesta la traduzione del problema, ma è lasciata libertà di scelta su come risolverlo.

Problemi	**Traduzione**			**Soluzione**		
	C	NC	NS	C	NC	NS
1) aritmetico	9	0	0	8	1	0
2) di geometria	5	2	2	6	2	1
3) aritmetico	5	4	0	4	4	1

Tabella 10. Risultati *dopo* l'intervento

Metodi risolutivi	**Problema 1)**	**Problema 2)**	**Problema 3)**
registro aritmetico	0	0	1
formula inversa	0	2	0
equazione	8	4	7
schema a frecce	0	2	0
per tentativi	1	0	0

Tabella 11. Metodi risolutivi *dopo* l'intervento

Tutta la classe traduce il primo problema nel linguaggio algebrico e, fatta eccezione per un allievo, riesce a risolverlo lavorando con l'equazione.

Più della metà degli studenti traduce correttamente le due successive situazioni nel linguaggio algebrico e tenta di individuarne la soluzione secondo le modalità descritte nella tabella 11.

Sul piano individuale i risultati sono incoraggianti: due allievi traducono 3 problemi correttamente, sei allievi traducono 2 problemi in modo esatto e un allievo solamente un problema.

La tabella 12 permette di effettuare un confronto tra i metodi risolutivi adottati, prima e dopo l'intervento, relativi alle due tipologie di problema presentate (geometrico e aritmetico).

Problema	**Metodo risolutivo**	**Prima**	**Dopo**
geometrico	formula inversa	7	2
	schema a frecce	0	2
	equazione	1	4
aritmetico	registro aritmetico	5	1
	per tentativi	3	1
	equazione	0	7-8

Tabella 12. Confronto dei metodi risolutivi *prima* e *dopo* l'intervento

Appare evidente che gli allievi, in generale, hanno cambiato il loro modo di risolvere i problemi. Se nella fase preliminare la quasi totalità del gruppo risolveva un problema geometrico mediante la formula inversa, dopo l'intervento emergono modalità risolutive più differenziate. Quattro allievi ricorrono all'equazione e due utilizzano lo schema a frecce.

Prima dell'intervento didattico, per risolvere i problemi aritmetici nessuno utilizzava un'equazione. Al contrario, nella fase successiva sette allievi su nove ne fanno uso. Il registro aritmetico, risultato inefficace per questa tipologia di problemi, viene abbandonato ad eccezione di un allievo.

7. Risposte alle domande di ricerca

R1. Relativamente alla domanda di ricerca D1, si ritiene di poter confermare l'ipotesi I1 per quanto riguarda i seguenti aspetti:

- La maggior parte degli allievi di terza, corso base, identifica nell'equazione un calcolo o una procedura per individuare un numero sconosciuto e nessuno è in grado di formalizzarne il concetto. Dall'analisi, in particolare, si denota che nessun allievo ha colto il tratto caratterizzante più importante dell'equazione, cioè che si tratta di un'uguaglianza.
- La metà degli studenti riconosce come equazioni scritture nelle quali l'incognita si trova a sinistra dell'uguale.
- La maggior parte degli allievi non mette in relazione l'equazione con la risoluzione di problemi.
- Gli studenti, fatta eccezione di uno, non utilizzano l'equazione per risolvere i problemi.

Non è invece possibile confermare l'ipotesi per cui gli allievi considerano un'equazione le scritture in cui l'incognita è rappresentata dalla lettera x e solamente un allievo ha, quale immagine mentale di equazione, una qualsiasi scrittura contenete una variabile.

Alcune immagini mentali degli allievi hanno rivelato due importanti ostacoli all'apprendimento del significato di equazione:

– Gli allievi ritengono che l'equazione sia un calcolo e che l'incognita si trovi a sinistra del segno uguale. Questa particolarità ostacola la costruzione del concetto di equazione quale uguaglianza, elemento invece determinante per la sua caratterizzazione.
– L'equazione non è contestualizzata all'interno di una situazione problema, ma vista piuttosto come un oggetto matematico fine a se stesso.

R2. Per quanto concerne la domanda di ricerca D2, è possibile affermare che gli allievi, dopo l'attività didattica, hanno idee più chiare sul significato di equazione, in riferimento alla definizione data nel quadro teorico:

– L'immagine mentale che si è evidenziata nei TEPs rivela un elemento importante per la caratterizzazione del concetto di equazione, ovvero la relazione di uguaglianza.
– Tutti gli studenti (meno uno) hanno tentato di tradurre le situazioni-problema nel linguaggio algebrico, con maggiore o minore successo. Solamente un allievo risolve i due problemi aritmetici per tentativi e risale solo in un secondo tempo alla messa in equazione (per soddisfare la richiesta della consegna), mentre per il problema di geometria ricorre direttamente alla formula inversa. Per questo allievo è ancora determinante individuare subito il *prodotto*, il risultato del problema.
– Otto allievi risolvono le equazioni facendo capo alla manipolazione «ragionata» e tutti, ad eccezione di uno, spiegano perché vengono svolti determinati passaggi. A tale proposito risulta difficile valutare se vi è comprensione o se la manipolazione «ragionata» sia divenuta un automatismo. Dalle risposte fornite da tre allievi appare invece chiaro che essi ne hanno colto il significato, poiché non si limitano a descrivere le operazioni effettuate, ma motivano le scelte parlando di «operazione inversa» e di «mantenere l'uguaglianza». Solo un allievo dichiara di «aver spostato lettere e numeri da una parte all'altra cambiando i segni».
– I dati raccolti con i questionari non permettono di individuare in modo esaustivo se gli allievi sappiano contestualizzare una scrittura formale o se essa venga gestita in modo meccanico. I risultati evidenziano che gli allievi sanno giustificare in modo coerente le proprie scelte quando si tratta di individuare le scritture che non corrispondono a equazioni.

L'analisi concernente la risoluzione di problemi mette in luce che gli allievi hanno cambiato il loro modo di affrontare e risolvere i problemi. Dopo l'intervento, solo due allievi hanno utilizzato la formula inversa, per affrontare la situazione di geometria. Si ricordi che durante la fase preliminare sette studenti avevano usato questo approccio. Si osserva inoltre che prima dell'intervento nessuno ha tentato la risoluzione del problema aritmetico attraverso un'equazione, mentre nella fase conclusiva ben sette allievi ne hanno fatto uso.

8. Conclusioni

Con questa ricerca non si pretende di dare una risposta esaustiva alla domanda se sia possibile, in terza media, rivestire di significato i concetti matematici e in particolare le equazioni. Il campione di indagine coinvolto è composto di un numero esiguo di allievi e il lavoro è durato solo due mesi. Per poter verificare che un concetto sia stato acquisito e compreso pienamente sarebbe necessario un lasso di tempo ben maggiore. Nonostante ciò, è possibile concludere che l'intervento ha portato alcuni cambiamenti negli allievi. Le loro immagini mentali, sottoposte a sollecitazioni diverse, si sono modificate e avvicinate al modello adeguato atteso dal docente. Sono emersi gli elementi essenziali caratteristici del concetto e l'equazione è stata rivestita del suo aspetto più importante: un potente strumento (anche se non l'unico) per risolvere problemi. Il processo didattico è risultato essere efficace per un primo accostamento all'argomento, perché i diversi registri semiotici hanno permesso di considerare l'equazione da più punti di vista e di conoscere strumenti di lavoro differenziati. A tale proposito risulta significativa la testimonianza di un allievo particolarmente debole:

«Ci sono vari modi per esprimere le equazioni. Consiglierei di cominciare con il calcolo pittorico perché può esprimere qualcosa di più concreto.»

Il progetto potrebbe essere applicato anche in una seconda media, dove si inizia a costruire il concetto di equazione.

Rimane aperta la domanda a sapere se gli allievi, dopo questo tipo di intervento, siano meno dipendenti dagli aspetti sintattici e dalle regole formali. Durante le attività proposte sono riusciti ad aggirare le «formule inverse», ma non si sa se questo permarrà nel tempo: sarà tutto da valutare.

Sarebbe interessante indagare se un approccio didattico di questo tipo, che mira a costruire il significato di equazione, permette anche di migliorare le competenze nella risoluzione di problemi, aspetto che non è stato preso in considerazione da questa ricerca.

Bibliografia

D'Amore, B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica.* Bologna: Pitagora Editrice.

D'Amore, B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica.* Bologna: Pitagora Editrice.

D'Amore B. (2006). Oggetti matematici e senso. Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici. La matematica e la sua didattica. 4, 557-583.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2007). How the sense of mathematical objects changes when their semiotic representations undergo treatment and conversion. La matematica e la sua didattica. Vol. 21, n. 1, pagg. 87-92. Atti del: Joint Meeting of UMI-SIMAI/SMAI-SMF: Mathematics and its Applications. Panel on Didactics of Mathematics. Dipartimento di Matematica, Università di Torino. 6 luglio 2006. ISSN: 1120-9968.

D'Amore B. (2011). La ricerca in didattica della matematica: un esempio di ricerca. Oggetti matematici, trasformazioni semiotiche e senso. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate. Vol. 34 AB, 3, 255-266. ISSN: 1123-7570.

Doretti, L., & Salomone, L. (2005). Avvio al concetto di equazione con i problemi del RMT. *Atti Arco di Trento*, 235-244.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, 37-65.

Maier, H. (2000). Come usare testi scritti da allievi nella didattica della matematica. *Bollettino dei Docenti di Matematica, 41*, 59-70. Bellinzona: UIM-CDC.

Malara, N., & Navarra, G. (2003). *Quadro teorico di riferimento e glossario*. Bologna: Pitagora.

Medici, D., & Rinaldi, M. G. (2005). Messa in formula e risoluzione di equazioni e sistemi lineari con i problemi del RTM. *Atti Arco di Trento*, 245-253.

Radford, L. (2004). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *Bollettino dei Docenti di Matematica, 49*, 39-53. Bellinzona: UIM-CDC.

Sawyer, W. W. (1974). *Guida all'insegnamento della matematica. 1.Algebra intuitiva.* Torino: Boringhieri.

Vygotskij, L. S. (1962). *Thought and language.* Cambridge: MIT Press.

4. «Esplorare e tentare» come cardine dell’apprendimento della matematica

Le diverse forme decimali del numero razionale[1]

Marisa Ferrari[2]

The aim of the project was to find out the reason why students, when confronted with a new situation, often tend to avoid trying to find an answer on their own, but prefer to wait for others to find it for them. Through a didactic unit called “Mathematic apprentices’ workshops” it has been observed how 7th grade students react when faced with a new problem situation. The five lessons submitted to the students have always been conducted following the same rituals and were intended to trigger two kinds of dynamics, the individual and the pair work. Very important for the project has been the notebook, labelled “Explore and try”, on which the students could work freely without being observed and judged by the teacher all the time.

1. Quadro teorico

1.1. Introduzione

Scopo di questo lavoro è applicare l’aspetto metodologico di HarmoS[3] *esplorare e tentare* al concetto matematico della frazione come numero. L’ampliamento dell’insieme dei numeri naturali ai numeri razionali, previsto nel programma di seconda media, è l’ambito su cui si è deciso di lavorare, poiché in esso l’aspetto di competenza *esplorare e tentare* appare rilevante. La scelta è stata fatta anche dopo aver osservato che gli allievi della mia classe denotavano un’insufficiente capacità di pensare possibili soluzioni davanti a qualsiasi situazione proposta.

L’intervento sulla classe prevede un itinerario didattico di otto lezioni, che aiuti il ragazzo a cercare dentro di sé una possibile strada da intraprendere per trovare la soluzione alla situazione matematica. Le lezioni proposte toccano due dinamiche, quella individuale e quella di coppia. La forza risultante da un lavoro di coppia è l’unione di due menti pensanti, ma ciò è possibile solo se prima ogni componente ha qualcosa da dire e al tempo stesso da dare! È per questo motivo che la raccolta dei dati di questa ricerca si concentra sul primo momento dell’attività, quello del lavoro individuale. Altrettanto importante è il momento successivo, quello della correzione dei lavori, che avviene al di fuori della lezione e in cui ogni allievo riceve un commento personalizzato. La struttura ripetitiva di queste otto lezioni serve ad aumentare la tranquillità del ragazzo; conoscere e sapere quanto starà per succedere aiuta infatti gli allievi a sentirsi sicuri e quindi maggiormente pronti a esporsi all’incertezza del problema da svolgere.

1. Libera sintesi del lavoro di diploma del corso complementare di matematica, anno accademico 2010/2011. Relatore: Gianfranco Arrigo.
2. Insegnante alla Scuola media di Lugano-Besso.
3. Accordo intercantonale sull’armonizzazione della scuola obbligatoria.

1.2. Definizione della classe

La classe è composta di 19 allievi (7 ragazze e 12 ragazzi), divisi in maniera abbastanza netta in due gruppi: da una parte i ragazzi che non hanno problemi, circa la metà; dall'altra quelli che hanno difficoltà più o meno marcate in matematica. Sono diventata la loro insegnante all'inizio della seconda media. Un forte senso di disagio, dovuto all'aggressività presente in classe, ha accompagnato i primi mesi. Questa mancanza di tranquillità, oltre a creare non poche difficoltà, impediva agli allievi di concentrarsi. Sul piano relazionale si è trattato prima di tutto di chiarire le loro e le mie aspettative per l'anno scolastico appena iniziato. Ho poi avuto la possibilità, durante l'unità didattica singola[4], di ritagliare ogni settimana 15 minuti per «fare una chiacchierata» a tu per tu con ciascun allievo. Nella mia classe, in quell'ora, è presente il docente di attività pratiche.

Durante questi colloqui ho messo l'accento sulle seguenti domande:

– Come ti situi rispetto alla matematica?
– Riesci a seguire?
– Dove senti di avere difficoltà?
– Posso fare qualcosa per aiutarti?
– Cosa vuoi fare «da grande»?
– Come ti senti quando entri a fare matematica?

Queste «chiacchierate», o interviste semi-strutturate, mi hanno principalmente permesso di tessere, per un breve momento, una relazione privata con ognuno di loro. Usciti dall'aula, seduti su una panchina nell'atrio, cercavo di avviare una breve conversazione informale. La mia impressione è che questo momento sia stato apprezzato da tutti perché, anche se per un tempo breve, ogni allievo si sentiva solo al centro della mia attenzione. L'operazione è durata tre settimane.

Malgrado questo intervento però l'ambiente in classe non è migliorato. I ragazzi, soprattutto quelli deboli, di fronte a una qualsiasi richiesta di risoluzione di un problema o di un calcolo, non iniziavano nemmeno a cercare una strada per risolvere, o anche solo a tentare di capire la natura del problema. L'atteggiamento generale era di passività, nell'attesa che fosse l'insegnante a dar loro la risposta. Ogni tentativo di provare una qualsiasi proposta risolutiva era regolarmente accompagnato da considerazioni, talvolta pesanti, fatte da elementi provocatori.

Inizialmente le mie osservazioni del comportamento degli allievi erano casuali; in seguito, dopo aver focalizzato meglio il problema, mi sono basata su quattro criteri:

1. quanti iniziano a scrivere o a utilizzare la calcolatrice,
2. quanti si distraggono disturbando l'andamento della lezione,
3. quanti rimangono inerti senza fare apparentemente niente,
4. quanti alzano la mano per tentare di dare una soluzione.

Le frequenze osservate venivano inserite in una griglia di classe, volta per volta.

4. L'orario di 5 ore settimanali è normalmente scandito in 2+2+1.

Questo modo di procedere mi ha permesso di delineare il seguente quadro: solitamente circa 5 allievi si attivano per cercare una possibile soluzione; 6 allievi si distraggono dopo pochi minuti dalla consegna; i rimanenti 8 rimangono completamente passivi. Le mani alzate sono quasi sempre ridotte a 2, massimo 3 e sempre riconducibili alle stesse persone.

1.3. Termini chiave

Introduco ora alcuni termini chiave per la concettualizzazione di questo intervento di ricerca:

- l'aspetto metodologico *esplorare e tentare*,
- il concetto della frazione come numero,
- la difficoltà in matematica.

Esplorare e tentare

Nella pubblicazione *Standard di base Matematica* (Frapolli e Cadorin, 2010) si legge la seguente definizione: *«Gli allievi sono in grado, partendo da un esempio, di trovare altri esempi relativi a un'affermazione o a una situazione. Sono in grado di esaminare sistemi con pochi elementi o una struttura semplice variando singoli elementi e di formulare domande matematicamente pertinenti, relative ad una situazione semplice o un esempio».*

Provare a risolvere una situazione-problema equivale a lanciarsi in un'esplorazione nel campo matematico inerente il problema per tentare una possibile risposta. Il primo passo da intraprendere è capire che cosa il problema chiede, recuperando nel proprio bagaglio di conoscenze matematiche le nozioni necessarie per esplorare e tentare. Questa esplorazione avviene attraverso la «manipolazione del problema» ossia cercando di rappresentare la situazione con un disegno oppure catalogando i dati conosciuti o ancora provando con esempi particolari. Sempre nel documento citato, si trovano cinque campi di competenza; le frazioni sono inserite nel campo definito *Numeri e calcoli*. Sempre dagli *Standard di base Matematica* alla fine della prima media un allievo deve essere in grado di: *«esplorare insiemi numerici, giungere a soluzioni o congetture variando sistematicamente numeri, cifre o operazioni; indagare su possibili generalizzazioni di situazioni numeriche scelti autonomamente.».*

La frazione come numero

La scelta di questo tema mi è stata suggerita dalla lettura del testo di M. I. Fandiño Pinilla (2005). L'autrice sostiene che *«fra tutti gli argomenti di Matematica che ho avuto modo di insegnare e di far apprendere ai miei allievi, posso sicuramente dire che uno dei più ostici è costituito dalle frazioni».*

Il tema è quindi sembrato adatto per un'analisi approfondita, che permettesse alla maggior parte degli allievi di raggiungere una buona comprensione sia strumentale che concettuale. Al riguardo, la stessa autrice afferma che *«l'unico luogo di teorizzazione delle frazioni come oggetto è la scuola, primaria e secondaria, luogo anche della loro utilizzazione come strumento dato che, fuori dalla scuola, la frazione non è presente in modo massiccio come strumento.»*

Il concetto di frazione ha diverse interpretazioni. Quando si è trattato di dover scegliere l'argomento matematico per questa ricerca erano già stati introdotti i seguenti quattro significati di frazione:

- la frazione come parte di un tutto,
- la frazione come operatore,
- le frazioni equivalenti,
- la frazione complementare di una data frazione.

Dei rimanenti, previsti nel programma, ho ritenuto interessante e intrigante l'aspetto di frazione come numero decimale. Interessante perché offre un vasto campo di applicazione e intrigante perché parecchie proprietà della divisione possono essere viste come «curiosità» delle frazioni e si possono scoprire «giocando». L'argomento della frazione come numero è inoltre fondamentale per giungere alla caratterizzazione dell'insieme Q.

Difficoltà in matematica

Le mie letture si sono indirizzate verso il tema delle difficoltà in matematica e delle emozioni che può provare un allievo di fronte a una situazione matematica. Quando un ragazzo riceve un problema di matematica da risolvere l'accento viene posto sull'essere o no capace di arrivare alla giusta soluzione (Zan, 2010): *«questa attenzione ai prodotti piuttosto che ai processi ha conseguenze estremamente negative per l'atteggiamento che l'allievo costruisce nei confronti della matematica»*.

Nella mia classe questo aspetto, unito a talune dinamiche presenti che non permettono un clima tranquillo, mi ha indotto a ricercare una possibile strategia di intervento per rassicurare il singolo di fronte alla paura di sbagliare. Sono partita dalla convinzione chiaramente descritta dalla Zan (2010): *«non è l'esperienza matematica in sé che direttamente può scatenare emozioni negative, ma l'interpretazione che l'allievo ne dà.»*. Ho voluto perciò costruire un metodo d'insegnamento legato alla relazione individualizzata allievo-docente; secondo la stessa autrice *«un approccio relazionale è di più difficile gestione nei tempi brevi ma solitamente garantisce risultati più duraturi nel tempo.»*

In un allievo il successo in matematica si concretizza principalmente nelle note che riceve, mentre la riuscita è spesso correlata all'impegno. Ciò porta molto frequentemente alla conclusione che un allievo è in difficoltà perché non s'impegna a sufficienza. A questo punto, è importante chiarire il termine «impegno»: ancora la Zan, *«Il termine impegno sta a indicare una generica disposizione a lavorare, ma non la direzione da dare a tale lavoro»*. Una persona può per esempio investire tanto tempo per svolgere un compito senza arrivare ad alcun successo.

2. Domande e ipotesi di ricerca

Domanda 1

Gli allievi, confrontati con un problema di matematica, non lo esplorano perché non pensano o perché non osano proporre quello che pensano?

Ipotesi 1

Dall'osservazione del modo in cui gli allievi si pongono di fronte al problema che sono chiamati a risolvere sarà possibile constatare come essi, contrariamente a quanto emerge nella situazione didattica standard di classe, tentino davvero di dare delle risposte.

Domanda 2

È possibile portare gli allievi a cercare vie risolutive utili per risolvere le situazioni proposte attraverso la creazione di uno spazio protetto, nel nostro caso il quaderno *Esplorare e tentare*, che resterà un luogo personale al riparo dal giudizio del docente?

Ipotesi 2

Affiancando al quaderno *Esplorare e tentare* un secondo quaderno, chiamato *Registro di cassa*, dove i ragazzi commentano quanto prodotto rispondendo a tre domande ricorrenti e al quale il docente avrà accesso, si potrà verificare come ognuno riesca a formulare determinate ipotesi in grado di avvicinarlo alla soluzione del problema.

Domanda 3

La competenza esplorativa appresa lavorando su un argomento specifico (le frazioni), tornerà utile al momento di affrontare altri argomenti?

Ipotesi 3

L'itinerario ideato per questo lavoro, grazie alla sua struttura in cinque fasi ricorrenti, aiuterà il ragazzo a trovare un metodo chiaro e sistematico che egli potrà poi utilizzare anche quando, sempre nell'ambito della matematica, si troverà di fronte a situazioni problema o esercizi differenti.

3. Metodologia

Questa è una ricerca intervento, in particolare una ricerca-azione nella quale il ricercatore agisce seguendo un itinerario costruito ed elaborato in un contesto prestabilito. I dati qualitativi raccolti vengono quantificati ed elaborati.

L'itinerario didattico ideato si sviluppa su otto lezioni della durata di 50 minuti l'una, svolte settimanalmente. Durante questi momenti sono presenti in classe il docente titolare e il docente di attività pratica.

La lezione è così strutturata:

1. rito d'inizio (comprendente anche la consegna delle correzioni della lezione precedente),
2. lavoro individuale di approccio alla situazione-problema,
3. lavoro a coppie,
4. lavoro individuale di sintesi scritta,
5. consegna del materiale al docente.

I dati che il docente raccoglie sono inerenti al secondo momento (lavoro individuale) e alla visione e correzione del lavoro svolto da ogni allievo sul proprio quaderno. Il docente scrive a ognuno di essi un commento personalizzato in base al lavoro presentato.

3.1. Strumenti

Nel mese di ottobre, dopo un primo periodo di osservazione generale della classe, si è introdotto il quaderno intitolato *Esplorare e tentare*, nel quale ogni ragazzo, anche sollecitato dal docente, dovrebbe annotare le strategie necessarie per risolvere i problemi proposti. Questo sussidio didattico vuole essere uno spazio o un luogo nel quale l'allievo riporta «il lavoro della propria mente».

Come già detto, si aggiunge un altro quaderno sul quale l'allievo riporta il lavoro svolto, dopo aver «esplorato e tentato» da solo e, in un secondo momento, discusso e condiviso con il compagno: è il quaderno intitolato *Registro di cassa* ed è visionato dal docente.

3.2. Svolgimento

Si è svolta una ricerca su Internet per cercare attività adatte al tema scelto: la frazione come numero. È stata fatta una selezione dei problemi ritenuti interessanti da rielaborare adattandoli al contesto della lezione.

L'itinerario è idealmente ambientato nel XVI secolo. Ogni lezione inizia con questa frase, che diventa il rito d'inizio:

Siamo a Bologna nel 1531; in questo periodo le botteghe di artigiani sono fiorenti. Il re Carlo V è appena stato incoronato.

In questo contesto si sono disposti gli allievi a coppie, mettendoli assieme secondo capacità matematiche simili. Nella metafora rinascimentale, ogni coppia è padrona di una bottega e i due componenti sono apprendisti matematici. In queste botteghe si producono curiosità di diversa natura incentrate sui numeri e le loro proprietà a seconda delle qualità degli apprendisti.

Il docente gioca il ruolo di consigliere del re, con l'incarico di saggiare le capacità degli apprendisti e di trovare una caratteristica specifica a ogni bottega. In ogni lezione si propone agli allievi un'attività diversa. Ogni bottega riceve una proposta adattata al livello dei due studenti che la compongono e occupa nell'aula sempre lo stesso posto. Il docente di attività pratica diventa l'aiuto-consigliere. Il suo ruolo è principalmente quello di coadiuvare il docente titolare nell'annotazione, su una tabella, dello svolgimento del secondo momento dell'attività e parimenti quello di affiancare il docente titolare nel terzo momento, quando entrambi passeranno tra i banchi per sbloccare situazioni di stallo.

Gli allievi ascoltano le consegne, ricevono e studiano individualmente il materiale, infine provano a cercare la soluzione sul quaderno *Esplorare e tentare*. In seguito saranno i due allievi di ogni bottega a confrontarsi per cercare insieme di giungere a un'unica soluzione condivisa. L'ultima parte del lavoro è nuovamente svolta in maniera individuale: ogni allievo redige sul quaderno *Registro di cassa* quanto svolto rispondendo, se possibile, alle domande poste dall'insegnante.

Il compito del docente titolare prosegue dopo le lezioni con l'esame di ogni quaderno e l'elaborazione, per ciascun allievo, di un commento personalizzato, che può essere di vario tipo:

- didattico, quando il lavoro necessita una correzione o un consiglio che riguarda la soluzione del problema,
- di rinforzo positivo, quando il ragazzo ha espresso un'emozione che richiede una risposta per incentivarlo a proseguire o quando ha risolto correttamente il problema (in questo caso un apprezzamento darà valore allo sforzo compiuto),
- negativo, quando il lavoro svolto è carente.

In seguito il docente, in base a ciò che ha riscontrato, propone l'attività successiva.

3.3. Il «metodo botteghe»

Lo scopo ultimo di questo itinerario è di mostrare a ogni allievo strategie adottabili per affrontare i problemi di matematica, quelli veri, quelli che non rientrano negli stereotipi.

Dopo queste lezioni, il docente, nel proporre un problema, chiederà agli allievi di cercare la soluzione utilizzando il «metodo botteghe». I ragazzi avranno interiorizzato l'idea del lavoro individuale e l'ausilio del quaderno *Esplorare e tentare*, come primo e indispensabile momento per affrontare una situazione matematica e avranno pure acquisito l'abitudine di discutere le proprie proposte con quelle degli altri.

4. Strumenti di raccolta dei dati

1. Le tabelle completate dai due docenti durante l'osservazione del lavoro individuale svolto all'inizio da ogni allievo. Durante l'osservazione il loro compito è di annotare, in una tabella, il comportamento degli allievi, secondo tre criteri:
   - se e quando inizia a scrivere,
   - se e quando sbircia dal compagno,
   - se e quando si distrae.

   Ogni docente osserva metà classe.

2. La trascrizione di quanto svolto sui quaderni *Registro di cassa*, ritirati alla fine di ogni lezione, e l'aggiunta di commenti individualizzati. Ogni allievo deve rispondere a queste tre domande:
   - che cosa ho provato quando ho letto il problema? (Quale emozione ho sentito?)
   - che cosa ho fatto per trovare la soluzione?
   - come sono giunto alla soluzione?

3. Il commento alla lettera che ogni allievo doveva scrivere a un'ipotetica professoressa per spiegare lo svolgimento di queste attività a una professoressa esterna che ha assistito, durante una lezione conclusiva, alla messa in pratica del «metodo botteghe».
   Gli allievi sono liberi di scrivere tutto quello che secondo loro può essere utile alla professoressa esterna per meglio capire come è strutturata l'attività e quali sono state le loro emozioni.

4. Le note che gli allievi hanno conseguito nella verifica sottoposta loro (in forma di sfida fra le botteghe) al termine dell'itinerario, concernente l'argomento trattato.

5. Analisi dei dati

5.1. Tabelle completate dai docenti durante l'osservazione del lavoro individuale[5]

La prima tabella analizzata riguarda il tempo che occorre ad ogni allievo prima di iniziare a produrre qualcosa sul quaderno *Esplorare e tentare*, e utilizza il seguente codice:
- I: l'allievo inizia nei primi tre minuti,
- II: l'allievo inizia dopo quattro-sei minuti,
- III: l'allievo inizia dopo sette minuti,
- Bloccato: l'allievo non inizia per niente.

I dati emersi dalla prima lezione analizzata (la quinta dall'inizio dei lavori) hanno permesso di rilevare quanto segue:
- il valore I è stato assegnato a 5 ragazzi su 18 (assente un allievo), uno dei quali lo ha poi mantenuto fino al termine dell'itinerario. Interessante constatare che si tratta dell'allievo più applicato e ordinato nell'eseguire le attività proposte; la sua forza non è la matematica ma il rigore! Gli altri quattro (tre ragazze e un ragazzo) risultano essere i più forti in matematica;
- il valore II è stato assegnato a 11 allievi (su 18). Due di questi, già a partire dal successivo incontro, hanno proseguito con il valore I. Interessante rilevare che uno dei due riesce bene in matematica mentre l'altra non ha raggiunto, durante tutto l'anno, la sufficienza. Degli altri nove allievi, alla sesta lezione, uno è passato al valore Bloccato, quattro hanno ottenuto nuovamente un valore II e quattro sono passati al valore III. Di questi ultimi, due allievi hanno terminato l'itinerario con il valore I;
- il valore Bloccato è stato assegnato a un ragazzo e una ragazza. Essi hanno mantenuto questo valore anche al sesto incontro. Il ragazzo in questione è dislessico e questo spiega la sua difficoltà a partire con il lavoro.

5. Le tabelle sono in possesso dell'autrice.

Durante il settimo incontro il docente titolare, prima di iniziare il momento di osservazione, gli ha letto la consegna del problema. Il suo valore è passato al II. La ragazza invece ha una paura di sbagliare che non le permette tuttora di provare e tentare. Il ragazzo che era assente la prima volta ha ottenuto questo valore al sesto incontro e il suo valore, al termine dell'itinerario, si è fissato al II.

Complessivamente alla fine del percorso 10 allievi su 19 hanno ottenuto il valore I, 7 il valore II e 2 il valore III. Nessuno ha ottenuto il valore Bloccato. Questi dati sono stati rilevati durante una lezione conclusiva, svolta in presenza di una professoressa esterna, al di fuori dell'itinerario effettivo, ma sempre utilizzando il «metodo botteghe».

La tabella dello «sbirciare» ci mostra un totale di nove siglature nelle quattro lezioni monitorate mentre dieci sono state quelle relative alla verifica finale:

- 7 allievi hanno evidenziato questo atteggiamento durante le lezioni dell'itinerario,
- 7 allievi hanno evidenziato questo atteggiamento durante la verifica al termine dell'itinerario: quattro hanno ricevuto una siglatura, tre ne hanno ricevute due,
- 2 allievi hanno mostrato questo atteggiamento solo durante la verifica. Uno di questi è il ragazzo dislessico e l'altro ha una grande pressione a casa affinché raggiunga una nota finale che gli consenta di andare al livello A in terza media.

La tabella del «distrarsi» ci mostra diverse siglature, riconducibili a 12 allievi. Nelle quattro lezioni monitorate:

- 4 allievi hanno ricevuto una sola siglatura,
- 3 allievi hanno ricevuto due siglature; in tutti e tre i casi questo è accaduto durante lezioni diverse,
- 1 allievo (dislessia) ha ricevuto tre siglature in una sola lezione, la quinta,
- 1 allievo ha ricevuto tre siglature, due durante la settima lezione e una durante l'ottava,
- 3 allievi hanno ricevuto da una a quattro siglature durante le quattro lezioni.

Sempre nel «distrarsi», durante la verifica svolta al termine dell'itinerario la tabella ci mostra questa situazione:

- 3 allievi hanno ricevuto una siglatura,
- 2 allievi hanno ricevuto tre siglature,
- 1 allievo ha ricevuto quattro siglature.

5.2. Trascrizione di quanto svolto sui quaderni Registro di cassa

In una tabella è stato riportato, dopo ogni lezione, quello che l'allievo ha scritto sul quaderno *Registro di cassa* unito al commento del docente. Tutto ciò mostra il percorso che ogni ragazzo ha fatto. La lettura di questi scritti ha permesso di rilevare alcuni aspetti:

- durante la prima lezione 7 ragazzi su 18, alla domanda *Cosa ho provato quando ho letto il problema?*, rispondono esprimendo un'emozione. Al secondo incontro i ragazzi che esprimono un'emozione diventano 11 su 19. Al termine del percorso solo cinque allievi non hanno mai espresso l'emozione che hanno provato. Il loro commento era essenzialmente legato al non capire il problema o al ritenerlo facile o difficile;
- su un totale di 19 ragazzi 12 hanno sempre risposto alle tre domande. Negli altri invece si sono notati i seguenti comportamenti: una ragazza non ha scritto niente durante la terza lezione, quando la sua compagna di bottega era assente; un ragazzo, durante il quarto incontro, non ha risposto, ma ha svolto alcuni calcoli. Due ragazzi rispondono al primo incontro ma poi proseguono, lavorando in maniera poco strutturata e senza impegno, per le successive tre lezioni, e solo a partire dal quinto incontro riprendono a rispondere e a lavorare in modo soddisfacente. Un ragazzo ha spesso risposto alle tre domande ma il suo lavoro complessivo è sempre rimasto insoddisfacente: il suo maggiore interesse era quello di stabilire relazioni con i compagni di classe, ragion per cui i suoi scarsi risultati, ottenuti senza il dovuto impegno, mancavano di struttura. Il potenziale di questo ragazzo è più che sufficiente ma il suo comportamento non gli permette di dimostrarlo. Un ragazzo, che generalmente non svolge mai nessuna attività proposta, è sensibile ai commenti del docente e risponde alle sollecitazioni che lo spronano a fare qualcosa. Un ragazzo non risponde praticamente mai alle domande; cerca, nei primi incontri, di seguire almeno i consigli che il docente gli scrive sul quaderno, ma poi desiste e non fa più niente;
- quando il docente nei suoi commenti personali chiede una correzione, l'allievo la esegue nell'incontro successivo;
- quando il docente, nel suo commento incoraggia un allievo, questi, nell'incontro successivo, risponde in modo positivo scrivendo sue osservazioni o mostrando impegno e serietà nel portare a termine il problema.

5.3. Lettera scritta a una professoressa per spiegare lo svolgimento di queste attività

Complessivamente l'itinerario è stato affrontato con piacere. 17 ragazzi hanno messo l'accento su aspetti interessanti legati ai cinque momenti della struttura della lezione. Eccone alcuni.

Rito d'inizio

«Quando arrivavo a scuola il mercoledì ero sicura e non avevo paura.»

«Quando poi ricevevo l'esercizio e il commento della 'soressa ero magari un po' più agitato ...»

Lavoro individuale

«I primi cinque minuti solitamente la 'soressa ci faceva mettere un classatore come separazione, per insegnarci a lavorare senza cercare aiuti. A me questo fatto piace abbastanza, anche se a volte mi sono sentita spaesata, perché non avevo un appoggio. Però non mi davo per vinta e quando potevamo condividere le risposte era divertente …»

«All'inizio c'è quasi sempre silenzio e questo serve per capire meglio il problema …»

«Quando c'è la parte individuale e i problemi li trovo difficili non riesco a risolverli ma do sempre delle buone idee.»

«… la prima parte dove si lavorava 10 minuti da soli mi ha aiutato molto, dato che il successivo mettere insieme mi stimolava a dare il meglio di me.»

«Questa attività ci ha aiutato a rinforzare il lavoro individuale».

«Una delle poche cose che non mi sono piaciute… il fatto che durante la prima parte del lavoro singolo i due consiglieri non potevano rispondere alle domande …»

«A me non piaceva tanto il momento individuale perché a me piace confrontare e ragionare assieme con altri compagni».

«… mi ha stimolata nell'affrontare anche esercizi che al primo impatto non avevo capito.»

Lavoro a coppie

«Il mercoledì quando entro in classe mi trovo bene, perché so che in parte il lavoro verrà fatto a coppie e sono più tranquilla.»

«Mi piaceva arrivare a scuola sapendo che avrei potuto lavorare sui problemi delle botteghe con la mia compagna.»

«Mi è piaciuto anche l'idea due ragazzi/e dello stesso livello, però all'inizio isolati per dare il meglio di sé stessi e mettere molte più idee assieme.»

«Questo lavoro delle botteghe, a me personalmente, è piaciuto molto, perché prima si svolgeva il lavoro in silenzio, come in una verifica e poi si poteva confrontare il risultato con il compagno. Per una volta la classe era davvero in silenzio!»

Lavoro individuale di sintesi scritta

«Certe volte mi sentivo fiera, dato che riuscivo a svolgere il problema mentre altre volte mi sentivo triste e annoiata perché non trovavo risposta al problema nonostante il mio impegno.»

«L'ultima fase è abbastanza importante perché serve per esprimersi e confidarsi.»

Consegna al docente del materiale

«Mi sono sentito sempre incuriosito. … Grazie a questo lavoro ho migliorato molto l'ordine.»

«Mi piacerebbe se ci fossero problemi geometrici.»

Un ragazzo non ha scritto la lettera; è giunto in ritardo alla lezione e ha risposto alle domande ricorrenti con tre «boh». Un altro non ha scritto niente.

5.4. Risultati della verifica svolta al termine dell'itinerario

Il docente ha spiegato che l'esito finale di ogni allievo veniva sommato al risultato del compagno con lo scopo di ottenere un unico voto che potesse definire la bottega:
- molto affidabile
- affidabile
- poco affidabile
- non affidabile.

Il docente ha poi comunicato personalmente a ogni allievo il proprio voto e quello ottenuto con il compagno. La verifica scritta ha dato i seguenti risultati (il valore ottenuto è la media delle note ricevute dai due apprendisti):
- molto affidabile: 2 botteghe; una con il 6 e una con il 5,8 (totale 4 allievi),
- affidabile: 3 botteghe; due con il 5,1 e una con il 5 (totale 7 allievi),
- poco affidabile: 1 bottega con il 4 (totale 2 allievi),
- non affidabile: 3 botteghe; una con il 3,8, una con il 3,7 e una con il 2 (totale 6 allievi).

6. Risposte alle domande di ricerca

Domanda 1

Gli allievi, confrontati con un problema di matematica, non lo esplorano perché non pensano o perché non osano proporre quello che pensano?

Risposta 1

I commenti espressi nella lettera fanno emergere il rapporto che lega l'osare tentare una soluzione e il timore di un commento da parte dei compagni. I ragazzi capaci partono subito perché hanno gli strumenti necessari per capire (non solo matematici ma anche operativi) e riescono ad attivarli. La tranquillità di questo lavoro ha permesso anche a chi non ha grandi capacità matematiche di esplorare, tentando possibili soluzioni al riparo dagli occhi giudicanti del resto della classe.

Si è potuto constatare che gli allievi che generalmente non si attivano nel cercare una possibile soluzione a un problema si possono identificare in due categorie:
1. allievi che non hanno le risorse necessarie da attivare. Questa difficoltà può essere accresciuta anche dalla pressione che la famiglia, i docenti o i compagni stessi esercitano sul soggetto;
2. allievi con capacità matematiche adeguate ma vittime di un blocco psicologico generato dal comportamento dei compagni; può essere superato grazie a una modalità d'insegnamento come il «metodo botteghe».

Domanda 2

È possibile portare gli allievi a cercare strategie utili per risolvere le situazioni proposte attraverso la creazione di uno spazio protetto, nel nostro caso il quaderno *Esplorare e tentare*, che resterà un luogo personale al riparo dal giudizio del docente?

Risposta 2

Lo spazio protetto e l'assenza di giudizio permettono di osare e di provare individualmente. Questo è emerso chiaramente dall'analisi del quaderno *Registro di cassa*. I ragazzi erano sensibili ai commenti del docente e rispondevano alle sollecitazioni e alle proposte suggerite cercando di migliorare il proprio operato. Anche quando il docente esprimeva un commento negativo la risposta dell'allievo era indirizzata verso un miglioramento del lavoro.

Il fatto di esprimere le proprie emozioni ha mostrato che questa modalità toglie in parte all'allievo condizionamenti esterni quali la paura del giudizio. Le tabelle dell'osservazione mostrano come nella lezione conclusiva si sia raggiunto un buon risultato: 17 ragazzi su 19 osano esplorare e tentare nei primi sei minuti, nessuno ha osato sbirciare né si è distratto.

Domanda 3

La competenza esplorativa appresa lavorando su un argomento specifico (le frazioni), tornerà utile al momento di affrontare altri argomenti?

Risposta 3

È possibile affermare che l'ipotesi si è dimostrata vera anche in questo caso. I commenti alla lettera e l'analisi del percorso trascritto dai quaderni *Registro di cassa* mostrano come gli allievi abbiano assimilato il «metodo botteghe». La possibilità di esercitare la competenza esplorativa, osservando le modalità di lavoro e potendo in seguito esprimere ciò che si prova, dà agli allievi un modello di lavoro strutturato (saper fare) e fornisce loro al tempo stesso la consapevolezza di quanto il lavoro e le verifiche possano essere influenzate dalle emozioni (saper essere).

7. Considerazioni finali

L'analisi delle tre tabelle stilate durante il lavoro individuale mostra come i ragazzi si attivino e come le distrazioni e le insicurezze restino comunque grossi ostacoli. L'apparente non pensare degli allievi è riconducibile a una scarsa capacità di motivarsi nell'affrontare il compito mentre il non osare è riconducibile a una mancanza di fiducia nei propri mezzi. Durante l'elaborazione di questi dati sono emerse le caratteristiche che individuano ogni allievo nel gruppo classe. Sono convinta che uno strumento come il quaderno *Esplorare e tentare* è di fondamentale importanza per aiutare gli allievi ad attivarsi. Esso deve essere introdotto, secondo me, in maniera sistematica, già a partire dalla quarta-quinta elementare, poiché l'allievo a quell'età asseconda più facilmente il volere dell'insegnante. I ragazzi hanno apprezzato l'itinerario anche perché è stata una novità; la curiosità in effetti è stata l'emozione più «gettonata» nei loro commenti, seguita dall'interesse. È importante introdurre, durante le lezioni in aula, elementi di novità che permettano agli allievi – che pure sono spesso sollecitati al di fuori della scuola da una sovrabbondanza di stimoli – di ampliare anche in questo contesto il loro bagaglio culturale e nozionistico. Evidentemente esiste il rischio che questo itinerario (inizialmente presentato come novità e dunque stimolante per i ragazzi) diventi per loro routine, e perdere così parte del suo mordente. Il rischio esiste e va tenuto in debita considerazione. L'itinerario è stato ideato per questa specifica classe. L'anno prossimo prevedo di proporre un lavoro simile in una prima media. Per fare ciò sarà fondamentale fare un'anamnesi della classe, scegliere con cura l'argomento matematico da trattare e decidere il periodo in cui collocare l'itinerario. La parte invece che non verrà cambiata riguarda la struttura della lezione. Trovo infatti decisivo, per questo tipo di lavoro, mantenerla così. Essa dà la sicurezza e la tranquillità che ho potuto riscontrare globalmente nei miei allievi durante tutto lo svolgimento dell'itinerario.

Si potrebbe anche identificare qual è l'argomento vissuto come il più ostico e partire da lì per un nuovo itinerario.

Un altro lavoro interessante, in proiezione, sarebbe quello di mettere in comune tutte le strategie utilizzate da ognuno nell'ambito dell'aspetto di competenza «tentare ed esplorare» e vagliarle assieme a loro affinché ognuno sia cosciente del proprio bagaglio di competenze e possa continuamente ampliarlo.

Bibliografia

Fandiño Pinilla, M. I. (2005). *Le frazioni aspetti concettuali e didattici.* Bologna: Pitagora Editrice.
Zan, R. (2010). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire* (Ristampa con modifiche). Milano: Springer.
Frapolli, A., Cadorin, L., (2010). Caratteristiche generali sulla materia e sul modello di competenza per la matematica. *Documenti per il procedimento d'audizione.* CDPE. Disponibile in: http://edudoc.ch/record/36467/files/Standards_Math_i.pdf [25 gennaio 2010].

5. I numeri razionali con l'ausilio del computer

Il foglio elettronico come sostegno didattico[1]

Francesco Pagnamenta[2]

This essay takes into consideration the possibility of exploiting technology in the classroom, and more specifically Excel, which thanks to its speed of processing and to the big amount of data it can provide in a short amount of time, acts as a perfect intermediary in the process of acquisition and construction of knowledge. The students have been confronted with several new situations, presented through Excel, with the aim of teaching them the transformation from fraction to decimal and vice versa. The same topic has been then introduced to three other classes, this time without using the computer, in order to compare the results obtained with the two different ways of proceeding.

1. Introduzione

Grazie alla tecnologia, insegnanti e allievi hanno a disposizione mezzi molto potenti, complementari agli strumenti tradizionali, che permettono loro di analizzare in maniera più approfondita le tematiche disciplinari che vengono affrontate nell'ambito del programma di matematica. Nel mio lavoro le tecnologie verranno quindi prese in considerazione in quanto hanno «grande importanza come mediatrici nei processi di acquisizione e di conoscenza» (Finalità delle discipline, in *Documento Inviato dal Ministro al Consiglio Nazionale della Pubblica Istruzione Italiana*, in Paola 2001a).

La possibilità di essere sensibilmente più veloci nello svolgere i calcoli (foglio elettronico) e nella rappresentazione geometrica (programmi di geometria dinamica) e di avere a disposizione una quantità di dati maggiore di precisione più elevata, permette ai ragazzi di scoprire proprietà e regole in modo diverso dal solito e di manipolare i dati in modo più agevole, limitando le difficoltà di calcolo o di disegno.

1. Libera sintesi del lavoro di diploma del corso complementare di matematica, anno accademico 2010/2011. Relatore: Michele Impedovo.
2. Insegnante alla Scuola media di Barbengo.

Il mezzo tecnologico può essere sfruttato in più modi durante le lezioni: per arricchire l'esperienza, per rendere dinamiche le immagini, e così via. Ho deciso di lavorare con il foglio elettronico per portare gli allievi a scoprire le modalità di trasformazione da frazione a numero decimale e viceversa, approfondendo i concetti di numero decimale finito e periodico, di periodo e antiperiodo.

Un aspetto da non sottovalutare, inoltre, è il coinvolgimento motivazionale tipico dell'utilizzo del computer. Questo mezzo è sempre più usato, e il fatto che faccia ormai parte della vita quotidiana della maggior parte delle persone – prima di tutto i giovani – potrebbe rendere il suo utilizzo stimolante anche per apprendere la matematica. Come docente so quanto è importante trovare il modo di motivare l'allievo all'apprendimento, e il computer è sicuramente uno strumento che si presta, che piace e che fa parte del suo mondo.

Più in dettaglio, la mia intenzione è di pianificare diverse situazioni-problema per l'introduzione di nuovi concetti utilizzando appunto il computer, in particolare il foglio elettronico, allo scopo di far ragionare i ragazzi sui dati che esso ci può fornire (ed arrivare così a intuire e scoprire proprietà e caratteristiche di un determinato concetto) e anche per consentire la costruzione del significato degli oggetti matematici (importanza della semantica e non solo della sintassi).

L'idea è di proporre determinati argomenti nella mia classe di seconda media usando il supporto informatico. Parallelamente potrò disporre dei risultati di tre classi di confronto alle quali sono presentati gli stessi argomenti senza di esso. Grazie a un test, verranno verificate e messe a confronto le competenze raggiunte dai miei allievi e da quelli delle classi di confronto.

2. Quadro teorico

Fin dal 1986[3], anni in cui muoveva i primi passi il Piano Nazionale dell'Informatica in Italia, si è sentita l'esigenza di un cambiamento nell'insegnamento della matematica[4]. Le tecnologie si facevano avanti prepotentemente e non si poteva far finta di niente. Come dice Vita (1987) in Paola (2001b): «Non sappiamo con certezza quali potranno essere, in un futuro più o meno lontano, le molteplici applicazioni dell'informatica in campo didattico, né possiamo escludere del tutto che possano verificarsi ridimensionamenti e ripensamenti. Oggi come oggi dobbiamo prendere atto della sua presenza per inserirla nel processo educativo e predisporre quindi una adeguata modifica dei contenuti tradizionali che dia posto a contenuti meglio rispondenti alle nuove esigenze e alle più ampie possibilità che la nuova tecnologia offre».

Come dice Paola (2001b): «… si può supporre che l'uso delle nuove tecnologie possa risultare fondamentale nei processi di apprendimento-insegnamento tesi a creare le condizioni affinché gli studenti possano costruirsi significati degli oggetti di studio». Partendo dal presupposto che il computer ci può dare l'esatta soluzione a calcoli che si basano su regole o proprietà matematiche, con questo progetto si vuole

3. Nello stesso periodo in Ticino erano attive diverse sperimentazioni, prime fra tutte la P3i (Progetto di Integrazione dell'Informatica nell'Insegnamento) nelle scuole medie e quella riguardante la scuola elementare.
4. Giova ricordare che il progetto ticinese P3i è dell'inizio degli anni Ottanta.

portare i ragazzi a utilizzare il foglio elettronico per arrivare alla formulazione di ipotesi e scoprire quindi proprietà e caratteristiche dell'oggetto di studio. Questo modo di procedere permetterà loro, grazie a una quantità maggiore di dati a disposizione e alla possibilità di cambiarli velocemente («…il calcolatore ha l'indubbio pregio della rapidità…» Impedovo, *9. Simulazioni*, pag.1, Modulo «Algoritmi», Anno accademico 2010-2011), di capire da sé i concetti e quindi di assimilarli meglio. «L'avvento dei calcolatori ha improvvisamente aperto un orizzonte sterminato di possibilità di verifica di esperimenti, tanto che alcuni problemi intrinsecamente troppo difficili, vengono risolti solo per mezzo della simulazione (il cosiddetto *metodo Montecarlo*). Dal punto di vista didattico il calcolatore ha enormemente facilitato la possibilità di simulare un problema e quindi di formulare congetture sensate a poco prezzo, sulle quali è naturale innestare il gioco razionale dei simboli.» (Impedovo, 2010) E ancora, «(…) si tratta di un'attività matematica nuova e interessante, ma richiede nuovi paradigmi e nuove abilità, alle quali spesso l'insegnante non è pronto (in generale è meno pronto dei propri studenti). Poiché abbiamo a disposizione strumenti (addirittura tascabili) dotati di un'ampia libreria di funzioni predefinite (così come la riga e il compasso costituivano la *libreria* di Euclide), possiamo sistematicamente introdurre l'*algoritmo* e la *simulazione* come attività portanti del percorso didattico. Uno studente che compie tali attività acquisisce autonomia e fiducia in se stesso, perché il risultato viene cercato e non fornito a priori da un'autorità superiore; lo studente è maggiormente incuriosito dal problema che deve risolvere; la formulazione di congetture è comunque un lavoro di ottimo livello matematico (dico sempre che è molto più importante una congettura sensata che la soluzione «esatta» ma misteriosa dal punto di vista semantico); lo studente è naturalmente portato a chiedersi *perché* una certa congettura funziona e quindi comincia a farsi strada l'esigenza di una dimostrazione.» (Impedovo, 2010)

Gli strumenti sono molto importanti nell'apprendimento e nello sviluppo concettuale: ciò è affermato anche da Vygotskij (1978) che, come riportato nell'articolo di Paola (2001b), dice «…(che) i processi di formazione intellettuale dell'uomo richiedono l'uso di strumenti tecnici e di simboli, come mediatori dell'azione e del pensiero e, al tempo stesso, l'uso di un mediatore piuttosto di un altro può portare a guardare gli oggetti e i concetti di apprendimento da differenti prospettive». Quindi l'uso, nel mio caso del foglio elettronico, è inteso a creare nei ragazzi interesse e dare loro la possibilità di vedere i problemi in modo diverso e stimolarli così a trovare nuove vie per risolverli: è questo il ruolo del computer come stimolatore dell'apprendimento (Arrigo, 1990).

Importante è rendersi conto che bisogna preparare e studiare bene il modo in cui si vogliono utilizzare le risorse tecnologiche per far sì che diventino davvero un sussidio didattico. Bisogna preparare attività che aiutino il ragazzo a ragionare e a fare congetture in modo che possa assimilare l'insegnamento e renderlo proprio. Questo concetto è ripreso anche da Paola (2001b), che dice: «Tengo a precisare che il fatto che una tecnologia possa, in linea di principio, giocare un ruolo significativo nei processi di insegnamento-apprendimento non garantisce in alcun caso che tale ruolo possa esercitarsi anche quando non sia presente una seria e attenta progettazione e analisi didattica dell'ambiente di apprendimento». Bisogna fare attenzione al fatto che se uno strumento, in questo caso il foglio elettronico, è messo a disposizione, non vuol dire che da esso si potrà automaticamente trarne beneficio: bisogna invece conoscerlo e saperlo sfruttare per i propri propositi di insegnamento. Paola (2001b) sottolinea questo fatto citando Bottino e Chiappini (1995) e le affermazioni di Noss (1995): «la tecnologia di per sé non può portare a un mutamento educativo. Spesso l'assunto alla base dell'impiego di una certa tecnologia per scopi educativi è quello che se la tecnologia che si usa è *buona*, l'educazione cambierà necessariamente in meglio. Questo modo di vedere le cose spesso porta a presentare una tecnologia come semplice comoda interessante da usare, e non mette in luce che un ambiente di apprendimento basato sul calcolatore possa essere complesso, necessiti di un tempo considerevole per essere appreso e utilizzato in modo proficuo, implichi la ridefinizione dei contenuti e dei metodi stessi di insegnamento e del ruolo dell'insegnante». Ancora, «…meanings do not live only in the tools and cannot emerge purely from the interaction of the pupils with the tools. Meanings are rooted in the aims for which the tools are used…» (Arzarello, Paola, Robutti, 2006). Non bisogna conoscere solo come funziona un certo strumento, ma capire anche che teoria ci sta dietro. «What is needed is an *aware use of technology*, which means to understand if, how and when the technological artefacts can mediate/support/carve the construction of the student's mathematical knowledge in the classroom.» (Arzarello, Paola, Robutti, 2006).

È quindi fondamentale capire i processi e i ragionamenti che i ragazzi faranno nelle attività che sottoporrò loro. Questo è importante per cercare di scoprire il loro modo di pensare, per vedere come sono arrivati a un certo concetto e, se non ci arrivano, capirne il perché: «…engaging students in explorations, building, scaffolding, communicating activities, so that the teacher can have information not only about their products but also about their thinking processes;…» (Arzarello, Paola, Robutti, 2006)

Il mio ruolo sarà dunque quello di coordinatore: non insegnerò nessun concetto in maniera «diretta», ma farò in modo di creare i presupposti necessari così che gli studenti possano scoprirli da sé. Sarà poi mio compito aiutare i ragazzi a formalizzare, in scrittura matematica, quanto scoperto. Il mio scopo è orientare l'insegnamento della matematica «…verso un uso delle nuove tecnologie in cui gli studenti siano a tutti gli effetti protagonisti nel processo di costruzione della conoscenza e i docenti siano in grado di assumere, a seconda delle esigenze, il ruolo di chi progetta l'azione didattica, oppure quello di chi garantisce la condivisione del sapere in classe, di chi suggerisce linee di ricerca o, ancora, quello di coordinare le discussioni in classe, osservare il lavoro nei piccoli gruppi, aiutare lo studente nella ricerca delle informazioni e via dicendo» (Paola 2001c). Sarò quindi un «accompagnatore» nel processo di costruzione del sapere degli allievi.

Elenco infine una serie di conoscenze che i ragazzi dovranno scoprire e apprendere durante questo percorso di ricerca:

- Una frazione può essere interpretata come numero decimale. Per passare dalla forma frazionaria alla forma decimale devo dividere il numeratore per il denominatore.
  La frazione a/b (a, b numeri naturali, $b \neq 0$) rappresenta il numero a : b , cioè a/b = a : b
- La forma decimale di una frazione può essere solo o finita o periodica.
- Tutti i numeri esprimibili come frazione si dicono numeri razionali; il loro insieme si indica con la lettera **Q** (i numeri razionali possono anche essere negativi, in questo caso $a, b \in \mathbf{Z}$).

- Ogni numero razionale può essere rappresentato in *forma frazionaria* o in *forma decimale (finita o periodica)*.
- In un numero razionale periodico si distinguono il periodo (le stringhe decimali che si ripetono periodicamente) e l'antiperiodo (le stringhe decimali che si trovano prima del periodo).
- Proprietà del numero razionale:
  Tutte le proprietà che scopriremo valgono solamente se la frazione è ridotta ai minimi termini, e cioè:
  - un numero decimale è finito se la fattorizzazione del denominatore contiene solamente 2 o 5 o loro potenze;
  - i numeri decimali periodici hanno un antiperiodo se la fattorizzazione del denominatore contiene 2 o 5, oltre ad almeno un altro fattore primo;
  - il numero di cifre dell'antiperiodo è uguale al massimo tra l'esponente di 2 e l'esponente di 5;
  - il fatto che un numero decimale sia finito o periodico dipende esclusivamente dal denominatore.
- Da frazione a numero e da numero a frazione:
  - Ad ogni frazione corrisponde un determinato numero decimale e uno solo (tranne nei casi in cui il periodo è 9).
  - Ad ogni numero decimale corrisponde una frazione (ridotta ai minimi termini).
  - Per trasformare un numero decimale finito in frazione:
    - si moltiplica questo numero per 10^n, dove *n* è il numero delle cifre decimali del numero razionale; il numero ottenuto diventa il numeratore;
    - il denominatore sarà 10^n, dove *n* è il numero delle cifre decimali del numero razionale.
  - Per trasformare un numero decimale periodico in frazione:
    - b,ap
      b = parte intera; a = antiperiodo; p = periodo

    La frazione è:

$$\frac{b\,a\,p - b\,a}{99\ldots00\ldots}$$

Al denominatore tanti 9 quante sono le cifre del periodo e tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo.

Tutte queste proprietà, che i ragazzi saranno stimolati a scoprire, valgono ovviamente se si lavora in base 10.

3. Domande di ricerca

1. I mezzi tecnologici (e più in particolare il foglio elettronico) possono aiutare i ragazzi a scoprire autonomamente nuove proprietà matematiche (in particolare la trasformazione da frazione a numero decimale e viceversa)?

2. Con un intervento mirato si possono utilizzare le molteplici possibilità che il computer offre per insegnare un determinato concetto?
3. La possibilità di effettuare molte esplorazioni su un foglio di calcolo può stimolare e aiutare l'allievo nel processo di apprendimento?
4. Questo tipo di attività può aiutare l'allievo ad essere più motivato ed interessato?

4. Ipotesi di ricerca

L'utilizzo di uno strumento come il computer che permette di manipolare un gran numero di dati con tempi di elaborazione praticamente nulli dovrebbe aiutare gli allievi a riflettere con maggior tranquillità e concentrazione sull'oggetto di apprendimento. Questi potranno così formulare ipotesi, controllarle, eventualmente modificarle più volte fino a giungere a dare risposta agli interrogativi di partenza. Questo modo di procedere permetterà loro di apprendere meglio i vari concetti.

Inoltre penso che utilizzare questa metodologia, nuova, più vicina al quotidiano degli allievi e in continua evoluzione, dovrebbe interessare i giovani, renderli più attivi e più disposti a imparare. Non è detto che l'apprezzamento entusiasta non sia dovuto alla novità e che, col passare del tempo, diventato routine, mantenga la stessa efficacia motivazionale, ma questo dipenderà anche dall'operato dell'insegnante.

5. Indagine

5.1. Metodologia e popolazione di riferimento

Agli allievi di una mia classe di 2ª media sono proposte 5 attività con relativi esercizi della durata di due ore-lezione l'una, durante le quali i ragazzi lavorano a coppie così da potersi aiutare scambiandosi le proprie opinioni. Si lavora essenzialmente con il foglio elettronico, che grazie alle sue caratteristiche dà agli allievi la possibilità di scoprire come si passa dalla frazione al numero decimale e viceversa. In particolare, per approfittare ulteriormente del foglio elettronico, i ragazzi possono ricercare le caratteristiche delle frazioni che danno come risultato un numero decimale finito, uno periodico e determinare inoltre la presenza o meno dell'antiperiodo. Le varie attività sono state impostate in modo che i ragazzi possano scoprire le proprietà nel modo più indipendente possibile. La nozione non viene infatti data loro, ma viene fatta costruire in maniera autonoma. Ovviamente tutti i concetti scoperti dagli allievi vengono poi discussi e completati dall'insegnante per giungere a una prima formalizzazione «… non si tratta di conoscenze calate dall'esterno, ma di precisazioni, con un linguaggio adeguato, di fatti e osservazioni che i bambini hanno già direttamente sperimentato ed effettuato.» (Paola 2001a). Questo processo è fondamentale perché mostra ai ragazzi quanto sia importante trovare un linguaggio comune che permetta di capirsi e tale da permettere anche di semplificare le cose (e non certo di complicarle!): «…(le) produzioni verbali, quasi sempre imprecise ma ricche di significato per l'allievo (…) vanno messe a confronto e opportunamente discusse nella classe per giungere così a riconoscere, nell'uso di simboli e scritture formali, forme sintetiche di espressione del linguaggio naturale, con il loro alfabeto, regole di costruzione di scritture corrette e sintassi». (Paola, 2001a).

Lo stesso argomento viene trattato, senza l'ausilio del computer, in 3 classi di confronto.

Alla fine dell'itinerario gli allievi sono confrontati con una verifica dell'apprendimento. Solo la prima parte della verifica verrà somministrata anche alle 3 classi di confronto, questo perché la seconda parte concerne concetti approfonditi solamente nella mia classe. Nella correzione delle verifiche gli insegnanti si scambiano le classi in modo da essere il più obiettivi possibile. I risultati vengono messi quindi a confronto.

All'interno della mia classe confronterò i risultati di questa prova anche con quelli delle verifiche svolte durante l'anno scolastico, limitatamente alla parte relativa ai numeri in modo da avere ancor maggiore attendibilità.

Inoltre, durante le attività di apprendimento si effettua un'osservazione meticolosa degli allievi della mia classe allo scopo di cogliere elementi rilevanti, in particolare per rispondere alla seconda e alla quarta domanda di ricerca. Per quest'ultima ai ragazzi è inoltre proposto un questionario mirato alla valutazione della motivazione e dell'interesse suscitati dall'uso del computer.

5.2. Strumenti di analisi

Verifica

Nella verifica vi sono diversi tipi di esercizi atti a testare quanto appreso dai ragazzi. Nella prima parte (sottoposta anche alle classi di confronto) si trovano esercizi che vanno dalla semplice trasformazione da frazione a numero decimale e viceversa, ad altri in cui è richiesta la mobilitazione autonoma delle conoscenze. La seconda parte vuole verificare specificamente quanto è stato appreso rispetto al programma di seconda media.

Questionario

Alla fine dell'itinerario alla mia classe propongo un questionario di quattro domande volto a verificare se questo tipo di lavoro possa aver incentivato la motivazione e la volizione degli allievi all'apprendere.

Le domande del questionario sono le seguenti:

1. Cosa pensi delle attività svolte con il foglio elettronico?
2. Secondo te che differenza c'è tra l'affrontare le attività con o senza l'ausilio di un foglio elettronico? Quale modalità ritieni sia la migliore?
3. Segnala una cosa positiva e una cosa negativa nel lavoro con il foglio elettronico.
4. Ti piacerebbe affrontare altri argomenti con il foglio elettronico? Perché?

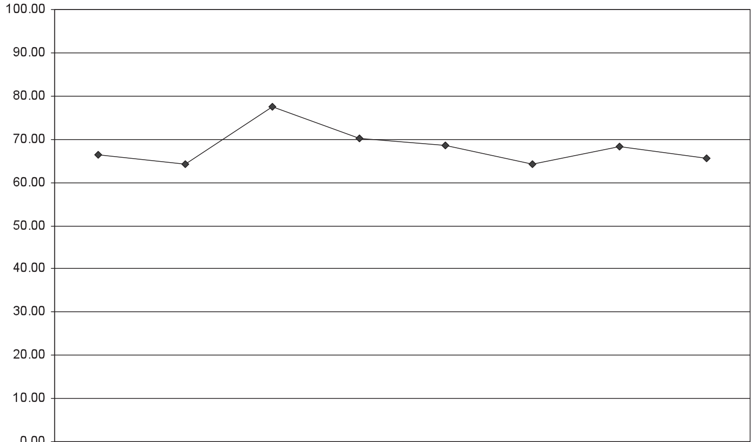
In pratica le risposte globalmente dovrebbero dire se lavorare con il foglio elettronico può essere per gli allievi una valida alternativa alle lezioni «carta e penna», meglio un valido complemento.

Osservazione in classe

Per l'osservazione, durante l'itinerario, presto attenzione particolare a momenti e interventi che ritengo rilevanti. Sia per capire se gli allievi stanno acquisendo qualcosa oppure no (punto di vista cognitivo), sia per rendermi conto se questo tipo di lavoro li può interessare, stimolare o al contrario li lascia indifferenti, passivi.

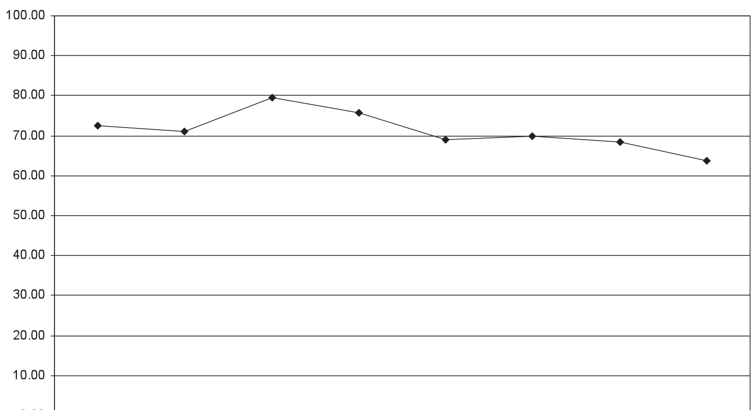
6. Analisi dei dati

6.1. Percentuali di riuscita relative alle verifiche scritte



	Verifica 1 4.10.2010	Verifica 2 27.10.2010	Verifica 25.11.2010	Verifica 4 15.12.2010	Verifica 5 2.2.2011	Verifica 6 14.3.2011	Verifica 7 11.4.2011	Verifica 8 4.5.2011
%	66.45	64.15	77.40	70.16	68.50	64.19	68.39	65.50

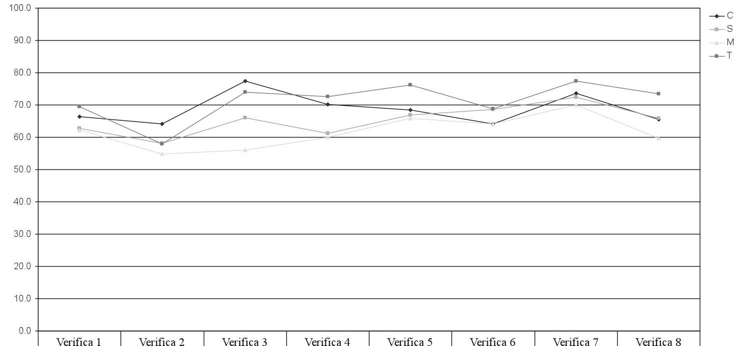
Grafico 1. Verifiche di matematica, anno scolastico 2010-2011 (itinerario con foglio elettronico)



	Verifica 1 4.10.2010	Verifica 2 27.10.2010	Verifica 25.11.2010	Verifica 4 15.12.2010	Verifica 5 2.2.2011	Verifica 6 14.3.2011	Verifica 7 11.4.2011	Verifica 8 4.5.2011
%	72.60	70.93	79.61	75.65	68.89	70.00	68.39	63.77

Grafico 2. Verifiche relative all'argomento Numeri, anno scolastico 2010-2011

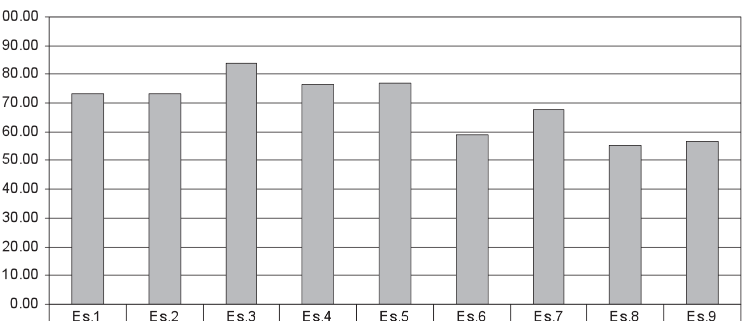
Analizzando i dati della verifica 7 relativa all’itinerario (Grafico 1), emerge che i risultati dei ragazzi sono più o meno in media con le verifiche fatte durante tutto l’anno scolastico; non c’è stato un miglioramento o un peggioramento rilevante così da poter affermare che questo tipo di attività sia più efficace o meno. Anche osservando il Grafico 2, che prende in considerazione solo la parte relativa all’argomento «numeri», si possono trarre le stesse conclusioni.



	Verifica 1	Verifica 2	Verifica 3	Verifica 4	Verifica 5	Verifica 6	Verifica 7	Verifica 8
C	66.4	64.2	77.4	70.2	68.5	64.2	73.7	65.5
S	62.8	58.1	66.1	61.1	66.9	68.6	72.4	65.9
M	62.2	54.8	56.0	60.1	65.9	64.1	70.1	59.7
T	69.4	57.9	73.9	72.6	76.2	68.8	77.4	73.4

Grafico 3. Paragone con le classi di confronto

Anche comparando i risultati della mia classe con quelli delle classi di confronto posso affermare che l’itinerario con foglio elettronico (C) non ha dato risultati tali da far pensare che i concetti siano stati capiti meglio o peggio. Si può notare come la differenza di risultati tra le varie classi durante l’anno rimane più o meno invariata. Questo fa supporre che l’itinerario della mia classe, sviluppato durante pressappoco le stesse ore di lezione di quelle delle altre, non abbia apportato né miglioramenti né peggioramenti nel raggiungimento degli obiettivi testati.



	Es.1	Es.2	Es.3	Es.4	Es.5	Es.6	Es.7	Es.8	Es.9
%	73.26	73.44	84.03	76.49	77.08	58.85	67.71	55.21	56.77

Grafico 4. Percentuali di riuscita per esercizio

Trovo invece significativo il fatto che per ogni esercizio della verifica in questione la percentuale di riuscita risulti maggiore del 50%. Gli esercizi che hanno creato maggiori difficoltà sono quelli nei quali gli allievi dovevano utilizzare quanto imparato in contesti diversi. I meglio riusciti sono quelli in cui bisognava semplicemente applicare i concetti scoperti: gli allievi hanno così dimostrato di aver acquisito in modo soddisfacente le conoscenze che si sono «costruiti» durante le attività di apprendimento.

6.2. Analisi dei dati derivanti dal questionario

6.2.1. Cosa pensi delle attività svolte con il foglio elettronico?

Gli allievi, in linea di massima, esprimono un giudizio positivo sulle attività svolte con il foglio elettronico, anche se ci sono stati alcuni pareri negativi.

Per ciò che riguarda i giudizi positivi, i ragazzi hanno detto che lavorare in questa maniera è stato divertente, stimolante, istruttivo, «di scoperta», chiaro e più veloce. Ecco alcuni esempi:

– *«Perché ci siamo espressi in modo matematico con un sistema divertente e stimolante»*
– *«Scoprire le formule e le regole mi divertiva! Così imparavamo da noi, non dal sore ed era come se eri tu il 'maestro' e dire le cose che hai scoperto al sore!»*
– *«Penso che sia molto più divertente lavorare su un computer che su un foglio di carta e che faccia venire anche molta più voglia di impegnarsi.»*
– *«Io penso che sia bello lavorare con il computer, e in più ci metti di meno, metti quello che ti serve schiacci enter e hai il risultato in pochissimo tempo.»*
– *«Le attività svolte erano divertenti, con il foglio elettronico è bello lavorare e si capisce tutto abbastanza bene, le attività erano anche molto interessanti.»*

Nelle critiche, gli allievi hanno invece detto che il lavoro è stato lungo, noioso, difficile e non necessario. Ecco alcuni esempi:

– *«Era un po' noioso fare gli esercizi anche se ormai si devono fare.»*
– *«Alcune cose, a volte non si capivano bene, perché era un po' complicato scrivere le formule.»*
– *«Per me era sempre un po' troppo tempo e così dopo un po' certi hanno cominciato a stufarsi.»*
– *«Penso che le lezioni di matematica non si dovrebbero svolgere al computer.»*
– *«Le cose che abbiamo fatto le potevamo imparare anche in classe.»*

6.2.2. Secondo te che differenza c'è tra l'affrontare le attività con il supporto del foglio elettronico e senza? Cosa è meglio? Cosa è peggio?

Per la maggior parte degli allievi con il foglio elettronico è meglio perché è più veloce, preciso, stimolante, facile, e aiuta a ragionare. Ecco alcuni esempi:

– *«Sei più veloce e preciso.»*
– *«Più facile perché il computer fa i calcoli automaticamente.»*
– *«Con il foglio elettronico si riesce a risolvere calcoli molto più velocemente che a mente.»*

- *«In classe è sempre la stessa cosa e dopo un po’ annoia, in aula computer no.»*
- *«Era meglio perché così abbiamo scoperto noi le cose.»*

Ci sono però stati anche commenti negativi, con i quali i ragazzi hanno voluto segnalare che secondo loro è meglio lavorare senza il foglio elettronico perché si fa troppa fatica a stare concentrati, non si impara niente di nuovo, si perde tempo e non serve per ragionare:

- *«Le stesse cose si potevano anche imparare in classe.»*
- *«Perché magari la gente pensa al computer e non alle attività matematiche.»*
- *«Facendo una attività un po’ diversa del solito succede che ci sia un po’ di casino e ci si distrae troppo.»*
- *«Era peggio perché abbiamo perso tempo per niente.»*
- *«Io ci tengo a fare anche lezione in classe perché la mente viene sempre allenata.»*

6.2.3. Segnala una cosa positiva e una cosa negativa nel lavoro con il foglio elettronico

Ho diviso i commenti dei ragazzi in tre categorie:

Aspetti motivazionali

Postivi	**No. allievi**	**Negativi**	**No. allievi**
Diverte e stimola ad impegnarsi	15	Bruciavano gli occhi	1
Più al passo con i tempi, moderno	2	Ogni tanto si blocca	1
Non una lezione come le altre	6		
Fa stare più attenti	2		
Scoprire cose nuove	8		

Aspetti di metodo

Postivi	**No. allievi**	**Negativi**	**No. allievi**
Più chiaro per la comprensione	8	Fa tutto il computer	1
Più veloce	15	Di difficile comprensione (formule)	11
Precisione	6	Si perdeva troppo tempo	1
Hai tutto sotto mano	5		
Si impara da soli	4		

Aspetti relazionali

Postivi	**No. allievi**	**Negativi**	**no. allievi**
Lavorare a coppie e scambio di opinioni	7	Possibilità di distrazione e casino	8

6.2.4. Ti piacerebbe affrontare altri argomenti con il foglio elettronico? Perché?

Parere positivo	21
Parere negativo	2

Di seguito le motivazioni dei ragazzi:

Parere positivo	
Poter usare di più il computer	3
Comprensione più veloce	1
Calcoli più veloci e corretti	1
Più divertente	8
Tutto più ordinato	3
Più chiaro	4
Più interessante	6
Perché piace lavorare a coppie	3
Usare anche altri programmi	1

Parere positivo con riserva	
In classe si impara di più	1
Usare l'aula d'informatica con moderatezza	3

Parere negativo	
Perdita di tempo, meglio in classe	1
Troppe ore al computer fanno male	1

Dall'analisi delle risposte posso dedurre che il tipo di itinerario proposto ha avuto un riscontro positivo. Infatti gli allievi hanno mostrato interesse per le attività proposte e hanno dichiarato chiaramente che il tipo di lavoro è piaciuto (quindi li ha motivati) e li ha aiutati a capire i concetti. È importante però prestare attenzione anche agli aspetti negativi che sono emersi nel questionario. Devono far riflettere su come migliorare l'azione didattica. Sorge già dal questionario – e penso sia un elemento rilevante da prendere in considerazione – l'importanza di alternare le lezioni in classe e in aula di informatica per mantenere vivo l'entusiasmo iniziale. Inoltre, volendo riproporre questo tipo di lavoro dovrò sicuramente prestare maggiore attenzione ai tempi morti.

6.3. Analisi dei dati derivanti dall'osservazione in classe e metodi utilizzati dagli allievi

Durante queste ore di lezione il clima è variato sensibilmente a seconda dei momenti. Nelle prime lezioni i ragazzi erano di difficile gestione: il fatto di andare in aula d'informatica e quindi uscire dall'aula dove solito si fa matematica li ha agitati. Si comportavano come se in quel momento non dovessero fare scuola. Pian piano sono riuscito a far capire loro che anche lì stavamo imparando la matematica, anche se con un mezzo diverso dal solito. Per ovviare a questo inconveniente, sarebbe ideale utilizzare più di frequente l'aula d'informatica durante il corso dell'anno, perché una volta passato il primo momento in cui i ragazzi sono agitati e distratti, si può poi lavorare bene anche in questa aula. Gli allievi devono abituarsi. Col tempo hanno iniziato a fare congetture e a mobilitare le loro conoscenze matematiche per risolvere i problemi. Quando ritenevano di aver trovato la soluzione giusta potevano verificarla o confutarla facendo svariate prove sul momento, e se la soluzione pensata si rivelava non idonea, essi erano stimolati a continuare nella ricerca di nuove vie risolutive:

«È bello perché abbiamo ottenuto un ottimo e abbiamo potuto vedere subito che era tutto giusto!» «I riscontri immediati ti danno convinzione, puoi capire al momento cosa hai sbagliato.»

Ho potuto quindi notare che questo tipo di lavoro ha aiutato i ragazzi ad assumere un atteggiamento di consapevolezza, e una predisposizione a tentare.

Ho constatato che anche chi di solito fa più fatica a trovare la motivazione per le attività di matematica, durante queste lezioni si è dato da fare mostrando più interesse.

Grazie al computer i ragazzi possono capire quanto sia importante la precisione nella formalizzazione e nella traduzione in comandi per la macchina. Capiscono che solo con la corretta scrittura simbolica (che è scrittura matematica) il foglio elettronico esegue ciò che loro vogliono. Se sbagliano qualcosa, il computer non esegue, oppure dà in ritorno risultati sbagliati. Come dire: per una buona comunicazione è essenziale la correttezza dei termini.

Tutte le attività sono state svolte come mi aspettavo, sfruttando cioè il valore aggiunto fornito dal computer. Passo dopo passo i ragazzi sono quasi tutti arrivati a capire le varie proprietà che veniva richiesto loro di scoprire, e l'hanno fatto con entusiasmo e in modo propositivo.

7. Risposte alle domande di ricerca

1. Grazie alle osservazioni fatte durante l'itinerario didattico, a questa domanda posso rispondere in modo affermativo. Tutte le coppie di ragazzi, grazie alle attività messe loro a disposizione, sono riuscite ad intuire un certo modo di procedere. Non tutti sono arrivati alla soluzione corretta, ma comunque ognuno si è adoperato per cercarla.
2. Considerando anche i risultati della verifica, credo di poter affermare che il percorso didattico che ho scelto di svolgere abbia raggiunto l'obiettivo di insegnare agli allievi la trasformazione da frazione a numero decimale e viceversa.
   Ovviamente ho utilizzato solo una minima parte delle molteplici possibilità che il foglio elettronico offre, ma grazie a queste credo di essere riuscito ad insegnare il concetto in un modo diverso e con un buon tasso di gradimento da parte degli allievi.
3. Dall'analisi delle risposte alle domande del questionario e alle osservazioni fatte durante lo svolgimento dell'itinerario, posso affermare che il fatto di poter effettuare molte esplorazioni con il foglio elettronico ha sicuramente stimolato i ragazzi. Tutti, chi più chi meno, si sono dati da fare per risolvere i problemi con cui erano confrontati, si sono mostrati interessati a trovare la soluzione e posso dire con piacere che quando la trovavano, si vedeva soddisfazione e felicità sui loro volti.
   Per quanto riguarda il fatto che il foglio elettronico li abbia aiutati ad apprendere, analizzando i risultati del test scritto posso affermare che questo si è verificato. I dati non mi permettono però di affermare che questo modo di procedere dia risultati migliori. Per lo meno non ho riscontrato controprestazioni.
4. L'analisi del questionario mostra chiaramente che l'itinerario proposto motiva e interessa gli allievi. Posso affermarlo anche come loro docente,

poiché se per quelli che già solitamente si dimostravano motivati in verità non è cambiato molto, il grosso cambiamento l'ho notato negli allievi che di solito faticano a trovare la motivazione all'apprendimento. Con mia grande soddisfazione, li vedevo più partecipi e interessati: si attivavano per portare a termine il compito, cosa non così evidente durante le lezioni tradizionali.

8. Conclusione e possibili sviluppi

Vorrei premettere che proporre questo itinerario didattico non è stato facile: il fatto che gli allievi non fossero abituati ad andare a lavorare in aula d'informatica ha creato in un primo momento non pochi problemi. Non posso dire che all'inizio non si è perso tempo, ma questo è stato necessario per far sì che avessero una base per poi lavorare senza particolari problemi tecnici. L'investimento iniziale faciliterà non poco le attività future.

L'aspetto più importante da sottolineare a questo punto è senz'altro il fatto che i risultati degli allievi non hanno subito uno stravolgimento rispetto a quelli normalmente ottenuti nel corso dell'anno, e anche da un confronto con coetanei che svolgono lo stesso programma scolastico, si può dedurre che i concetti sono stati assimilati altrettanto bene. Posso quindi considerare il computer come un sussidio didattico tanto efficace quanto gli altri metodi d'insegnamento, con però il vantaggio di essere un non indifferente valore aggiunto. Gli allievi hanno conosciuto aspetti nuovi del computer, segnatamente del foglio elettronico, e questo può essere utile anche in un futuro nel quale i mezzi tecnologici saranno sempre più importanti nella vita.

L'obiettivo che mi ero posto all'inizio era di imparare la frazione come numero, ma ciò che si è verificato va ben oltre; c'è stata una indubbia e importante crescita nel modo di pensare degli allievi. Essi hanno dovuto imparare un nuovo linguaggio con una forte valenza scientifica e hanno dovuto utilizzare le loro conoscenze matematiche per poter sfruttare con successo le potenzialità del computer.

Inoltre, come si può vedere dai risultati del questionario, i ragazzi hanno avuto piacere ad affrontare questo tipo di lavoro, che ha stimolato fortemente la loro curiosità. Poter insegnare avendo un riscontro positivo da parte dei ragazzi è utile e motivante anche per il docente, che è spinto a credere sempre più in ciò che fa e quindi a creare condizioni di apprendimento migliori.

Grazie anche alla particolare impostazione didattica, il foglio elettronico ha permesso agli allievi di concentrarsi sui concetti senza doversi preoccupare dell'esecuzione dei calcoli, di sfruttare la sua velocità di esecuzione e la possibilità di elaborare grandi quantità di dati.

Cosa che sarebbe interessante verificare è la probabilità che questo tipo di lavoro diventi la «nuova normalità», cioè che diventi una modalità di routine che non godrebbe più di quell'entusiasmo che ho riscontrato nella mia classe.

Dato per scontato che se un allievo impara con piacere e autonomamente (nel limite del possibile) ciò che apprende viene interiorizzato meglio e resiste nel tempo, sta agli insegnanti fare in modo che nessuna modalità didattica sia ripetuta al punto da diventare abitudine passiva.

Da ultimo devo affermare che il progetto è servito molto anche a me, perché mi ha dato la possibilità di approfondire la mia conoscenza del foglio elettronico e apprezzare le potenzialità di questo strumento nell'apprendimento dei concetti matematici. A condizione però che lo si sfrutti… per fare ciò per il quale il mezzo non è stato pensato, quindi non tanto per risolvere problemi contabili né per rappresentare graficamente dati numerici, ma per costruire tanta matematica. Per esempio, si potrebbe usare questo *software* come valido supporto per:

- Espressioni numeriche e letterali
- Concetto e interpretazioni della probabilità matematica
- Calcoli con i numeri interi e decimali
- Approssimazioni
- Proprietà delle operazioni aritmetiche
- Notazione scientifica
- Statistica descrittiva e inferenziale
- Frazioni (vari significati e tecniche di calcolo)
- Studio delle funzioni
- (…)

In base alle osservazioni delle lezioni e alle risposte di alcuni ragazzi al questionario non posso sorvolare sul fatto che ci sono stati momenti durante i quali certi allievi si sono annoiati e hanno avuto l'impressione di perdere tempo. Ciò può nascere dal fatto che, come sempre, c'è chi è veloce e chi è lento e che usando il computer questa differenza viene dilatata. Un altro inconveniente tipico di questo nuovo modo di operare sorge a causa di un guasto tecnico o di un'errata manipolazione. Ho potuto notare però che col passare del tempo, gli allievi sono diventati molto abili nel fronteggiare tali situazioni.

Nonostante tutto il lavoro eseguito, sembrerebbe che alcuni allievi continuino a vedere il computer come uno strumento che ragiona al posto loro, quindi ben lungi dall'essere stimolante. Anche per questo, penso che, col tempo, agendo nel modo descritto, ogni allievo possa cambiare questa concezione assai frequente e giungere alla convinzione che, di fatto non è il computer che trova le soluzioni ma chi lo programma.

Concludo con una riflessione: dalle prime esperienze degli anni Ottanta a oggi è passato parecchio tempo. Il progetto che nacque in quegli anni, di assistere cioè in poco tempo a un cambiamento radicale dell'attività didattica, innescato dall'integrazione dell'informatica nelle varie discipline, è fallito. Eppure il computer fa parte della realtà quotidiana, più ancora di prima si rivela uno strumento conosciuto e usato da tutti. La scuola dell'obbligo non può solo favorire le iniziative di singoli insegnanti, ma a mio giudizio, fare in modo che ogni allievo entro la fine di questo ciclo scolastico abbia acquisito la capacità di lavorare con il computer, con un occhio di riguardo pure alla formazione dei docenti e alla definizione dei programmi scolastici. Il tutto, naturalmente, con attenzione ed equilibrio: se niente computer è insostenibile, troppo computer può far male.

Bibliografia

Arrigo, G. (1990). Il computer come stimolatore dell'apprendimento. *Bollettino dei Docenti di Matematica, 21*. Bellinzona: UIM-CDC.

Arzarello F., Paola D., Robutti O. (2006). *Curricular innovation: an example of a learning environment integrated with technology*. Torino: Dipartimento di Matematica.

Bottino R.M., Chiappini G. (1995). ARI-LAB:models, issues and strategies in the design of multiple-tools problem solving environment. *Instructional Science,* vol. 23, n°1-3. Norwell, Ma: Kluwer Academic Publishers.

Impedovo, M. (2010). *Algoritmi e simulazioni*. Locarno: SUPSI-DFA

Noss,R. (1995). Thematic Chapter: Computers as commodities. *Computers and exploratory learning. Nato Asi Series F, Vol 146*. Berlin: Springer Verlag, 363-381.

Paola D. (2001). *L'uso delle tecnologie nella costruzione del significato in matematica. Analisi di alcune attività didattiche*. Genova: GREMG.

Paola D. (2001). *Nuove tecnologie e innovazione curricolare. Uno sguardo al passato per cercare di delineare le prospettive*. Genova: GREMG.

Paola D. (2001). *Nuove tecnologie e nuova scuola: quali opportunità per una didattica «sensata» della matematica?*. Genova: GREMG.

Vygotskij, L.S. (1978). *Mind in society. The development of higher psychological processes*. Cambridge (Mass.): Harvard University Press.

Vita, V. (1987). Nuovi programmi di Matematica per la scuola secondaria superior. *Atti dell'XI Convegno sull'insegnamento della matematica*. Notiziario UIM, suppl. al n.11.

6. Apprendere giocando Giochi geometrici e aritmetici[1]

Bernardo Mutti

Gioco I
Costruzione di torri, muri, scale… (volumi)

Materiale
– una griglia cartesiana quadrata per ogni allievo (Figura 1.);
– un numero sufficiente di cubetti aventi lo stesso spigolo del lato dei quadratini della griglia della griglia (Figura 1.);

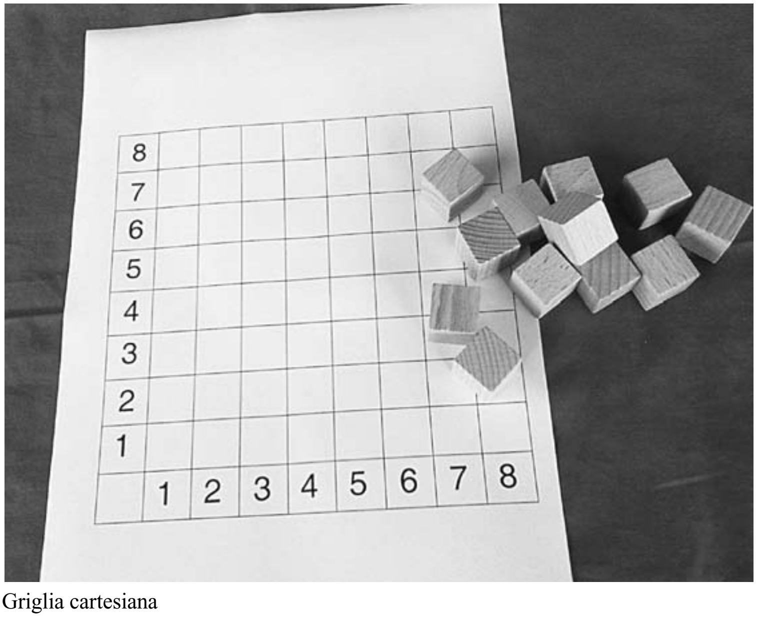


Figura 1. Griglia cartesiana

1. Continua la serie di proposte pubblicate sui numeri 58, 59 e 60 di questa rivista.

Introduzione al gioco

- Ogni allievo riceve una griglia quadrata e un numero sufficiente di cubetti.
- L'insegnante, dopo aver ripassato le coppie di numeri (coordinate cartesiane bidimensionali), presenta il terzo numero che indicherà la terza coordinata (l'altezza); il gioco diventa quindi tridimensionale, ogni cubetto ha un indirizzo composto di una terna di numeri.
- A questo punto si indica la prima terna di numeri [per esempio (2;3;1)]; il cubetto verrà posto sopra il quadratino di indirizzo (2;3) e resterà quindi al livello del foglio. L'insegnante controlla che tutti sistemino il cubetto al posto giusto.
- Ogni qualvolta l'insegnante vuole innalzare la colonna di 1 cubetto aumenta il terzo numero della terna di 1 unità.

Di seguito sono illustrati esempi possibili che ognuno potrà arricchire a piacimento. Per semplicità, nelle didascalie, di ogni colonna, sono stati indicati solo i cubetti terminali.

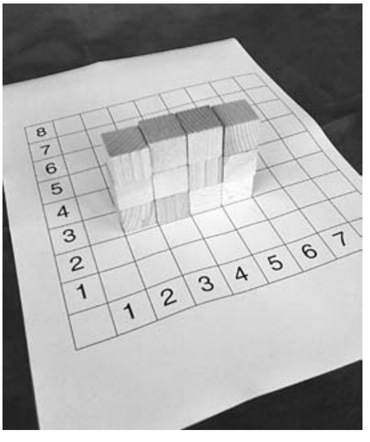


Figura 2. Il muro: (2;3;3), (3;3;3), (4;3;3), (5;5;3).

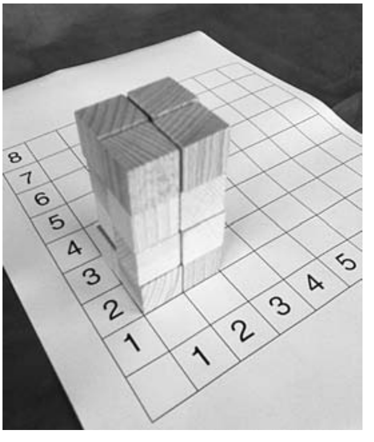


Figura 3. La torre: (1;2;4), (2;2;4), (1;3;4), (2;3;4).

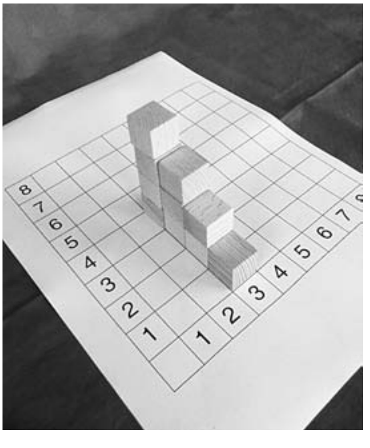


Figura 4. La scala UNO: (3;1;1), (3;2;2), (3;3;3), (3;4;4).

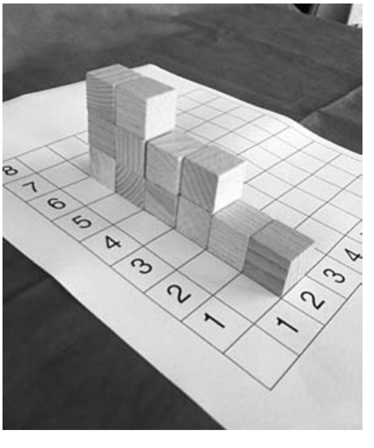


Figura 5. La scala DUE: (2;1;1), (2;2;1), (2;3;2), (2;4;2), (2;5;3), (2;6;3)

Gioco II
L'intruso

Materiale

- Griglia cartesiana e cubetti (come nel gioco I);
- immagini autoadesive di personaggi fantastici (animali, fantasmi, mostri, …) o di numeri da applicare su una delle facce di alcuni cubetti (Figura 6.).

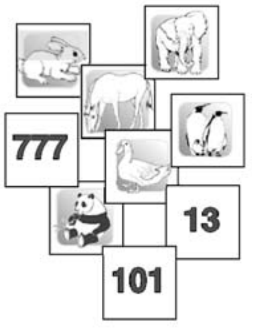


Figura 6. Immagini adesive

Sviluppo del gioco

Il gioco può essere eseguito a gruppi di 3 o più allievi o dall'intera classe.

Sulla griglia cartesiana l'insegnante o un determinato allievo posiziona i cubetti, fra i quali, senza farsi vedere, ne mette uno o più con l'immagine o il numero, in modo che le immagini e i numeri non siano visibili.

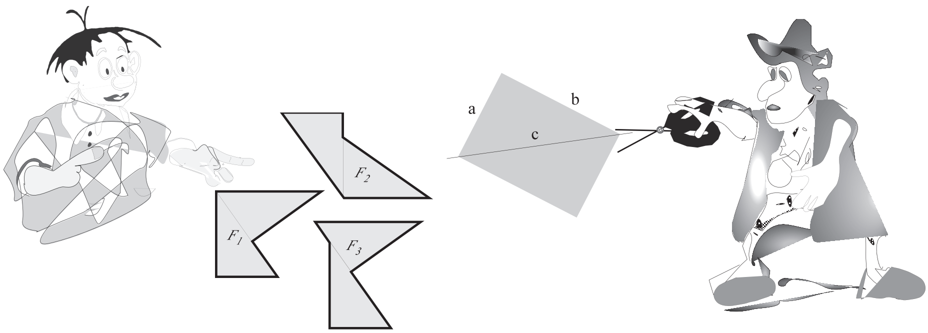
A turno i giocatori indicano le terne di numeri (coordinate cartesiane tridimensionali) cercando di scoprire gli intrusi, cioè i cubetti con l'immagine o con il numero.

Vince chi per primo trova l'intruso o chi ne trova di più, ma specialmente chi ha imparato il sistema di coordinate tridimensionale.

Quiz numero 46: Poligoni bi-triangoli

Aldo Frapolli

Caro Archie,
lavorando sul rettangolo di formato A4 mi è venuta questa curiosità che in realtà ha senso anche se riferita ad ogni altro rettangolo o addirittura, con qualche variazione, ad ogni parallelogramma. Dunque: prendi il rettangolo e taglialo lungo una sua diagonale; ottieni due triangoli rettangoli congruenti con lati di lunghezza a, b, c ($a > b > c$). Unisci i due triangoli in modo che abbiano in comune solo punti appartenenti al loro contorno. Ottieni così vari poligoni di ugual area, che per comodità potremmo chiamare *poligoni bi-triangoli.*



Vediamo un po' se ho capito!
Parto ad esempio da un foglio A4,
taglio e ricompongo…
… Questi sono bi-triangoli?

Proprio così Archie, ma ora viene il bello!
Fra tutti i possibili poligoni bi-triangoli
considera solo quelli che hanno
il perimetro uguale al doppio
della somma di due loro lati.
Prova adesso a riunire in una stessa «famiglia»
tutti quelli che *hanno lo stesso numero di lati e lo stesso perimetro.*
Quante «famiglie» di poligoni bi-triangoli di questo tipo esistono secondo te?
E quali sono le caratteristiche degli elementi di ogni famiglia?

Tante, …credo !
Vuoi che le conti? È una sfida?

Eh sì, è proprio una sfida!
Neanche poi tanto difficile però, … se trovi un modo adeguato di «contarle».

Giriamo la sfida anche agli affezionati lettori.
Fra chi indicherà il numero richiesto da Joe, premieremo colei o colui che avrà proposto il metodo più completo, efficace ed originale per determinarlo, assieme alle varie caratteristiche degli elementi delle varie «famiglie».

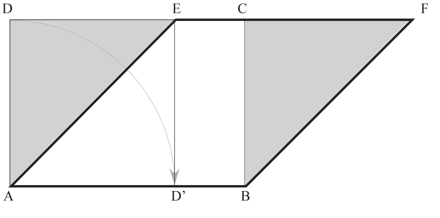
Soluzione del Quiz numero 45

La soluzione più semplice è quella proposta da Paolo Hägler di Bellinzona:

«*Si piega il foglio a metà e si taglia lungo una delle due diagonali*».

Commento: così facendo si ottengono però tre poligoni che vanno poi ricomposti in un rombo e non due come sott'intendeva Joe nella sua richiesta. Ingenuamente non aveva pensato all'idea di effettuare piegature preventive e di conseguenza aveva tralasciato la condizione «*… con 1 taglio scomporre in 2 poligoni …*». L'assenza di tale condizione ha avuto il pregio di rendere più aperto il problema e di permettere interessanti sviluppi. Questo procedimento, che ammette due risultati diversi a seconda che la piegatura avvenga sull'asse del lato minore o del lato maggiore, ha anche il pregio di funzionare per qualsiasi rettangolo.

Il «taglio da maestro» a cui alludeva Joe, che permette di trasformare il rettangolo formato A4 (e di conseguenza qualsiasi altro di formato simile An, n=0, 1, 2, 3, …) in un rombo, è illustrato nella figura seguente:

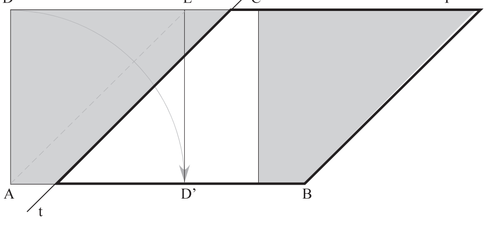


La giustificazione si fonda sulla proprietà caratteristica del foglio A4, le cui dimensioni a=|AD|, b=|AB| sono tali che $b = a\sqrt{2}$.

La diagonale AE del quadrato ADED', ottenibile con una «piegatura» che porta il lato AD sul lato AB, ha quindi la stessa lunghezza del lato AB.

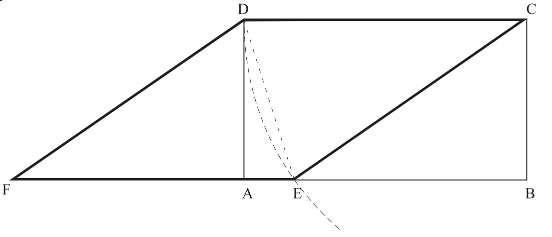
Un taglio lungo la diagonale AE scompone il rettangolo in un triangolo isoscele AED e un trapezio ABCE. La traslazione di AED che porta AD su BC genera il quadrilatero ABFE. Siccome |EF|=|EC|+|CF|=|EC|+|DE|=|DC|=|AB| e |BF|=|AE|, tutti lati di ABFE sono isometrici e quindi si tratta di un rombo.

Si noti che la soluzione non è unica: qualsiasi taglio lungo una parallela ad AE che intersechi il segmento EC in un suo punto, genera due trapezi che uniti lungo il lato BC generano un rombo.



Infine ecco la soluzione proposta da Mauro Zoffoli, di Cesena:

«*Per ottenere un rombo con un unico taglio da un rettangolo è sufficiente fare come in figura:*



Dato il rettangolo ABCD, con base AB > CB, tracciare la circonferenza con centro C e raggio CD.

Sia E l'intersezione fra questa circonferenza e la base AB.

Facciamo un taglio lungo CE e riportiamo il triangolo parallelamente a se stesso fino a far coincidere CB con DA e indichiamo con F la posizione raggiunta da E.

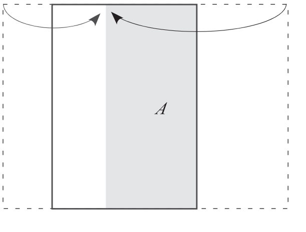
Il quadrilatero FECD è un rombo perché è un parallelogramma avendo i lati opposti paralleli ed è un rombo perché ha i lati consecutivi CD e CE uguali per costruzione.»

Commento: questa soluzione non ha il fascino della diagonale del quadrato di Joe ma ne rispetta la condizione implicita ed è generalizzabile per qualsiasi rettangolo; la redazione gli ha pertanto assegnato il premio in palio. Congratulazioni e buona lettura!

Concludiamo proponendovi una soluzione più complessa ed ermetica, da «illusionista» come l'ha definita l'autore stesso Pär Oleg Halo, amico norvegese amante degli anagrammi. Potreste usarla come gioco per stupire qualcuno durante un momento ricreativo.

Ecco le varie fasi del gioco:

1. Innanzitutto chiedete ad una persona di piegare sul foglio A4 una «linguetta rettangolare» (che chiameremo A) – a partire dal lato che preferisce e della grandezza che preferisce purché non superi la metà del foglio – e successivamente di colorarla. **Voi scommettete che riuscirete a trasformare il rettangolo A4 in un rombo, effettuando un solo taglio e lasciando intatto il rettangolo colorato A.**
2. Sul lato opposto del foglio rispetto a quello su cui si trova la «linguetta A», piegate poi una «linguetta rettangolare B» facendo in modo che i lati opposti del foglio appartenenti alle due linguette siano in contatto. Ottenete così un foglio rettangolare che è esattamente metà foglio A4: una pagina è intera, l'altra è composta delle due linguette A e B.



3. Piegate a metà su sé stessa la pagina intera del rettangolo ottenuto, lungo una piegatura parallela alle due precedenti.
4. Aprite le linguette ottenendo così un foglio con una sola piegatura.

5. Piegate ora questo foglio a metà nell'altro senso, facendo in modo di nascondere all'interno la parte colorata (non è necessario piegare in questo senso, ma se si effettua il taglio senza vedere dov'è la parte colorata ha più effetto).
6. Il foglio così ottenuto è formato su entrambi i lati da due rettangoli, uno dei quali è metà della linguetta più grande fra A e B.
7. Eseguite un taglio lungo la diagonale dell'altro rettangolo, a partire dal vertice dove si intersecano le due ultime piegature.
8. Dopo il taglio si hanno due triangoli isosceli (mai equilateri) e due pentagoni, questi ultimi formati da un triangolo e da un rettangolo (le linguette A e B rispettivamente). Il rombo si ottiene accostando i due pentagoni lungo due lati originali del foglio A4, e successivamente i due triangoli isosceli all'esagono ottenuto, lungo gli unici due lati non isometrici.

Il rombo così ottenuto contiene all'interno tutta la linguetta colorata, intatta.

Ancora tre indicazioni per aumentare la «suspence»:
- Eseguite le tappe da 2 a 5 con rapidità.
- Potete far eseguire il taglio al vostro amico.
- Quando componete il rombo incollate i lati con della carta gommata tenendo la faccia del pentagono con la linguetta colorata verso il basso.

Errata Corrige
Soluzione del quiz 44, BDM 62, pagina 109

La frazione che esprime la soluzione del Quiz 44 non è evidentemente $\frac{1}{256}$ bensì $\frac{5}{256}$.

La sostituzione fortuita del numeratore «5» con «1» è avvenuta parzialmente anche nei passaggi successivi in cui è illustrato il procedimento.

Così si leggano:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}=\frac{5}{2^3}$$

…

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2^3}=\frac{5}{2^4}$$

…

$$\frac{1}{2^4}\cdot\frac{5}{2^4}(1\text{m}^2)=\frac{5}{2^8}(1\text{m}^2)=\frac{5}{256}(1\text{m}^2)$$

Ci scusiamo con i lettori per la svista, dovuta a un refuso sfuggito all'ultima rilettura.

1. Il problema dei pasti

Paolo Hägler[1]

Following a meal in a restaurant with a colleague, a combinatoric question has arisen, for which the search for the answer was more laborious than expected, so much to bring me to discover a whole new sequence of numbers.

Il problema

Dopo un pranzo di lavoro con un collega, in cui si è parlato anche di calcolo combinatorio, abbiamo provveduto a pagare il conto. All'uscita dal ristorante sorge la domanda «In quante sequenze diverse si può pagare il conto al termine del pasto?»

Dopo aver chiarito bene il problema, ossia che chiunque può pagare il pranzo di chiunque e che nelle sequenze l'ordine dei pagamenti è importante, abbiamo abbordato il problema.

Primo tentativo di soluzione: elenco.

- 1 persona: 1 modo (A paga il proprio pasto)
- 2 persone: 6 modi (A paga per tutti e due, B paga per tutti e due, A paga per se stesso e poi B fa lo stesso, B paga per se stesso e poi A fa lo stesso, A paga per B e poi B paga per A, B paga per A e poi A paga per B)
- 3 persone: le possibilità sono già parecchie, meglio calcolarle. E se proprio le si vogliono scrivere, bisogna trovare un modo efficace per farlo. Una buona scrittura potrebbe essere AbcBa che significa che A paga i pasti di B (b) e di C (c), e poi B paga il pasto di A (a).

Secondo tentativo: calcolo.

2 persone:

- se paga tutto una persona: 2 possibilità
- se pagano tutti e 2 significa che ognuno paga un pasto, e quindi attribuiamo un pasto ad ognuno $P_2 = 2! = 2$ e poi ordiniamo le persone (sequenza di pagamento) $P_2 = 2! = 2$ E quindi le possibilità sono $2 \cdot 2 = 4$

In totale le sequenze sono $2 + 4 = 6$

1. Insegnante di matematica all'ICEC di Bellinzona.

3 persone:

– se paga tutto una persona: 3 possibilità
– se pagano 2 persone: dobbiamo scegliere chi paga, e ordinarle (sequenza di pagamento)[2]

$$D_2^3 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6$$

Ciò significa che una persona paga un pasto e un'altra ne paga 2.

Dobbiamo quindi suddividere le due persone scelte in due gruppi, chi paga un pasto e chi ne paga 2

$$\bar{P}_2^{1;1} = \frac{2!}{1!1!} = \frac{2}{1} = 2$$

Ora dobbiamo suddividere i pasti in due gruppi, un gruppo da 2 e uno da 1

$$\bar{P}_3^{2;1} = \frac{3!}{2!1!} = \frac{6}{2} = 3$$

E quindi le possibilità sono $6 \cdot 2 \cdot 3 = 36$

– se pagano tutti e 3 significa che ognuno paga un pasto, e quindi attribuiamo un pasto ad ognuno $P_3=3!=6$ e poi ordiniamo le persone (sequenza di pagamento) $P_3=3!=6$.
E quindi le possibilità sono $6 \cdot 6 = 36$
In totale le sequenze sono $3 + 36 + 36 = 75$

Questo ragionamento va bene anche se le persone sono 4 o più, ma le cose si complicano già con 4 persone, perché se pagano in 2 ci sono due possibilità (2 pasti a testa oppure una persona ne paga 3 e l'altra 1). E così il metodo non diventa realisticamente generalizzabile perché bisogna eseguire una sommatoria su ogni scomposizione additiva.

Per 4 persone il calcolo è:

$$D_1^4 + D_2^4 \cdot \left(\bar{P}_2^{1;1}\ \bar{P}_4^{3;1} + \bar{P}_2^{2}\ \bar{P}_4^{2;2}\right) + D_3^4\ \bar{P}_3^{2;1}\ \bar{P}_4^{2;1;1} + P_4\ P_4 =$$
$$= 4 + 12\left(2 \cdot 4 + 1 \cdot 6\right) + 24 \cdot 3 \cdot 12 + 24 \cdot 24 = 1612$$

In maniera analoga con 5 persone ci sono 52'805 modi, in effetti:

$$D_1^5 + D_2^5 \cdot \left(\bar{P}_2^{1;1}\ \bar{P}_5^{4;1} + \bar{P}_2^{1;1}\ \bar{P}_5^{3;2}\right) + D_3^5\left(\bar{P}_3^{2;1}\ \bar{P}_5^{3;1;1} + \bar{P}_3^{2;1}\ \bar{P}_5^{2;2;1}\right) + D_4^5\ \bar{P}_4^{3;1}\ \bar{P}_5^{2;1;1;1} + P_5\ P_5 =$$
$$= 5 + 20\left(2 \cdot 5 + 2 \cdot 10\right) + 60\left(3 \cdot 20 + 3 \cdot 30\right) + 120 \cdot 4 \cdot 60 + 120 \cdot 120 = 52'805$$

2. Richiamo della simbologia combinatoria

$P_n = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$; $\bar{P}_n^{k_1;k_2} = \frac{n!}{k_1!k_2!}$ $C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; $D_k^n = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$; $\bar{D}_k^n = n^k$

Terzo tentativo: ricerca di una formula ricorsiva.

Sembra tutto facile, basta prendere la prima persona che paga, vedere quanti pasti paga, e guardare quante possibilità ci sono per gli altri, ma….

Sia M(n) la funzione che ai commensali associa il numero di sequenze in cui possono pagare.

Con 2 persone troviamo che la prima può essere scelta tra 2, può pagare 1 pasto (scelto tra due) e quindi l'altra paga l'altro, oppure può pagarne due (e il conto è già regolato). Troviamo quindi

$$M(2)=C_1^2\left(C_1^2\,M(1)+C_2^2\right)=\binom{2}{1}\left(\binom{2}{1}M(1)+\binom{2}{2}\right)=2\left(2\,M(1)+1\right)=4\,M(1)+2$$

Con 3 persone abbiamo già un problema. Se il primo paga un pasto restano 2 persone per 2 pasti, se il primo paga due pasti restano 2 persone per un pasto, se il primo paga tre pasti abbiamo finito.

Otteniamo quindi $M(3)=C_1^3\left(C_1^3\,M(2)+C_2^3\,C_1^2+C_3^3\right)$ e se calcoliamo

$$\binom{3}{1}\left(\binom{3}{1}M(2)+\binom{3}{2}\binom{2}{1}+\binom{3}{3}\right)=3\left(3\,M(2)+3\cdot 2+1\right)=9\,M(2)+21=75$$

Dove sta il problema? Forse non lo si nota subito, ma nel secondo addendo abbiamo dovuto introdurre il fattore C_1^2 per scegliere la seconda persona che paga, e questo ragionamento non è facilmente generalizzabile.

In effetti, con 4 persone, siamo costretti a scrivere

$$M(4)=C_1^4\left(C_1^4\,M(3)+C_2^4\,M(3;2)+C_3^4\,C_1^3+C_3^4\right)$$

dove M(3;2) rappresenta il numero di sequenze che hanno 3 commensali per pagare 2 pasti…

E così i tentativi per trovare una formula ricorsiva si arenano…

Quarto tentativo: ricerca di una formula esplicita.

Proviamo a tornare al calcolo del secondo tentativo, ma aggirando il problema delle scomposizioni additive.

2 persone:

- se paga una sola persona: $D_1^2=2$ possibilità
- se pagano tutti e 2: $D_2^2\cdot 2\cdot 1=2\cdot 2\cdot 1=4$ (scegliamo chi paga, e in quale ordine $D_2^2=2$) e poi quali pasti sono pagati (2 possibilità per il primo che paga, e una per il secondo)

3 persone:

- se paga una sola persona: $D_1^3=3$ possibilità
- se pagano 2 persone: $D_2^3\cdot 3\cdot 2=6\cdot 3\cdot 2=36$ (scegliamo chi paga, e in

quale ordine $D_2^3 = 6$) e poi quali pasti sono pagati ($C_2^3 = 3$ possibilità per il primo che paga, e 2 per il secondo)

– se pagano tutti e 3: $D_3^3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 36$ (scegliamo chi paga, e in quale ordine $D_3^3 = 6$) e poi quali pasti sono pagati (3 possibilità per il primo che paga, 2 per il secondo e 1 per il terzo)

Con 4 persone arriviamo alla svolta.

Se paga una sola persona abbiamo evidentemente $D_1^4 = 4$ possibilità.

Il caso in cui pagano in 2, che prima sembrava complicato, se è formulato diversamente, suggerisce un'altra strada risolutiva. Iniziamo a scegliere chi paga e in quale ordine: $D_2^4 = 12$. Ora non ci resta che **associare i pasti ai paganti**. E proprio qui arriva l'idea giusta, in effetti, formulato così, il problema è semplice. Si tratta di una disposizione con ripetizione che ha per soluzione $2^4 = 16$. Questo calcolo è anche quello che avremmo già dovuto fare se nel problema posto inizialmente l'ordine in cui le persone pagano non fosse stato importante. C'è solo un piccolo problema, del quale ci accorgiamo subito, anche solo confrontando il risultato con quello del calcolo di prima. In effetti prima, con la scomposizione additiva, avevamo 14 possibilità, mentre ora siamo a 16. Da dove arrivano le due di troppo? Con un po' di ragionamento lo si scopre subito: in effetti nella disposizione con ripetizione non garantiamo che entrambe le persone paghino effettivamente, perché abbiamo considerato anche le due possibilità che tutti i pasti siano associati alla stessa persona, e quindi è una sola la persona che paga. Dobbiamo quindi correggere il nostro calcolo in

$$\bar{D}_4^2 - C_1^2 = 2^4 - \binom{2}{1} = 16 - 2 = 14$$

Questa correzione è semplice, chissà se la si può anche generalizzare?

Proviamo a vedere cosa succede se pagano 3 persone sue 4. Iniziamo a scegliere chi paga e in quale ordine: $D_3^4 = 24$. Associamo ora i pasti ai paganti, apportando la correzione richiesta:

$$\bar{D}_4^3 - C_2^3 - C_1^3\left(\bar{D}_4^2 - C_1^2\right) = 3^4 - \binom{3}{2} - \binom{3}{1}\left(2^4 - \binom{2}{1}\right) = 81 - 3 - 3 \cdot 14 = 36$$

Abbiamo dapprima tolto le possibilità in cui paga solo una persona (due persone scelte tra le 3 non pagano nulla), e poi quelle in cui pagano in due (una persona scelta tra le 3 non paga, e le altre due devono suddividersi i 4 pasti).

Se pagano in 4 possiamo fare lo stesso ragionamento e arriviamo a

$$D_4^4\left(\bar{D}_4^4 - C_3^4 - C_2^4\left(\bar{D}_4^2 - C_1^2\right) - C_1^4\left(\bar{D}_4^3 - C_2^3 - C_1^3\left(\bar{D}_4^2 - C_1^2\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{4!}{(4-4)!}\left(4^4 - \binom{4}{3} - \binom{4}{2}\left(2^4 - \binom{2}{1}\right) - \binom{4}{1}\left(3^4 - \binom{3}{2} - \binom{3}{1}\left(2^4 - \binom{2}{1}\right)\right)\right) =$$

$$= 24\left(256 - 4 - 6 \cdot 14 - 4 \cdot 36\right) = 24 \cdot 24 = 576$$

E otteniamo così il 1612 di prima (4 + 12.14 + 24.36 + 576).

Scritto così non sembra facilmente generalizzabile, ma il problema è ora almeno ben posto. Bisogna trovare il modo di associare n pasti a k persone (coloro che pagano), di modo che a ogni persona sia associato almeno un pasto.

Dal ragionamento svolto sopra sappiamo che con n=4 e k=2 il calcolo è

$$\bar{D}_4^2 - C_1^2 = 2^4 - \binom{2}{1} = 16 - 2 = 14$$

In maniera analoga, per n=5 e k=2 abbiamo

$$\bar{D}_5^2 - C_1^2 = 2^5 - \binom{2}{1} = 32 - 2 = 30$$

E gli altri casi con k=2 sono tutti uguali

$$\bar{D}_n^2 - C_1^2 = 2^n - \binom{2}{1} = 2^n - 2$$

Ma come procedere con k=3? Il tentativo fatto sopra con n=4 funziona, ma non lo si può generalizzare facilmente. Proviamo allora direttamente a calcolare la soluzione con k=3 e n=5 onde evitare di incappare nello stesso ragionamento che si rivela un vicolo cieco.

Dal calcolo svolto nel secondo tentativo, con la scomposizione additiva, sappiamo che deve uscire 150. Omettendo la condizione che tutti e 3 devono pagare almeno un pasto abbiamo la solita disposizione con ripetizione $\bar{D}_5^3 = 3^5 = 243$, e quindi abbiamo 243–150=93 possibilità che abbiamo contato di troppo, quelle in cui sono meno di 3 a pagare. Evidentemente quelle in cui paga una sola persona sono $C_1^3 = \binom{3}{1} = 3$ e quindi quelle in cui pagano in 2 devono essere 90. Ma come calcolarle? Iniziamo a trovare chi sono le due persone che pagano

$C_2^3 = \binom{3}{2} = 3$, e poi dobbiamo attribuire i pasti a loro 2:

$$\bar{D}_5^2 - C_1^2 = 2^5 - \binom{2}{1} = 32 - 2 = 30$$

Se raggruppiamo il tutto abbiamo

$$\bar{D}_5^3 - C_2^3\left(\bar{D}_5^2 - C_1^2\right) - C_1^3 = 3^5 - \binom{3}{2}\left(2^5 - \binom{2}{1}\right) - \binom{3}{1} = 243 - 3 \cdot 30 - 3 = 150$$

ma così facendo per calcolare le possibilità in cui siano in 2 a pagare, abbiamo dovuto escludere quelle in cui paga una sola persona, calcolo che abbiamo fatto anche separatamente.

Perché non raggruppare questo stesso calcolo in uno solo? Così facendo otteniamo

$$\overline{D}_5^3 - \left(C_2^3\,\overline{D}_5^2 - C_1^3\right)$$

poiché nella parentesi, prima della sottrazione, abbiamo tutte le possibilità di attribuire i 5 pasti a 2 persone scelte tra tre, ma tra queste abbiamo anche quelle di attribuire tutti i pasti ad una sola persona, e le abbiamo pure contate doppio! In effetti possiamo scegliere prima le persone A e B e poi attribuire tutti i pasti ad A, oppure scegliere A e C e poi attribuire tutti i pasti ad A! Visto che le abbiamo contate doppio le sottraiamo una volta per ottenere tutte le possibilità con almeno una persona che non paga (quello che non vogliamo). Semplificando l'espressione otteniamo

$$\overline{D}_5^3 - \left(C_2^3\,\overline{D}_5^2 - C_1^3\right) = \overline{D}_5^3 - C_2^3\,\overline{D}_5^2 + C_1^3 = 3^5 - \binom{3}{2}2^5 + \binom{3}{1} =$$

$$= 243 - 3\cdot 32 + 3 = 150$$

Questa forma sembra più facilmente generalizzabile. Proviamo con n=5 e k=4 (dal calcolo effettuato al secondo tentativo sappiamo che deve uscire 240). In effetti, con lo stesso ragionamento di poco fa, otteniamo

$$\overline{D}_5^4 - \left[C_3^4\,\overline{D}_5^3 - \left(C_2^4\,\overline{D}_5^2 - C_1^4\right)\right] = \overline{D}_5^4 - C_3^4\,\overline{D}_5^3 + C_2^4\,\overline{D}_5^2 - C_1^4 =$$

$$= 4^5 - \binom{4}{3}3^5 + \binom{4}{2}2^5 - \binom{4}{1} =$$

$$1024 - 4\cdot 243 + 6\cdot 32 - 4 = 240$$

E la generalizzazione ora è vicina, in effetti basta aggiungere due calcoli «scontati» e scrivere

$$\overline{D}_5^4 - C_3^4\,\overline{D}_5^3 + C_2^4\,\overline{D}_5^2 - C_1^4 = C_4^4\,\overline{D}_5^4 - C_3^4\,\overline{D}_5^3 + C_2^4\,\overline{D}_5^2 - C_1^4\,\overline{D}_5^1$$

Con n e k generici abbiamo quindi che il numero di possibilità per associare n pasti a k persone (coloro che pagano), di modo che ad ogni persona sia associato almeno un pasto è

$$\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\,C_{k-j}^k\,\overline{D}_n^{k-j}$$ che possiamo scrivere anche $$\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\,C_j^k\,\overline{D}_n^j\,.$$

Pertanto il numero di sequenze di pagamento se ci sono n commensali è

$$\sum_{k=1}^{n} D_k^n \sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\,C_j^k\,\overline{D}_n^j = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\frac{n!}{(n-k)!}\,\frac{k!}{(k-j)!\,j!}\,j^n$$

Grazie a questa formula possiamo calcolare facilmente molti più valori. Troviamo che la sequenza inizia in questo modo:

n	**Modalità di pagamento**
1	1
2	6
3	75
4	1612
5	52805
6	2442666
7	151382959
8	12093970008
9	1209295535049
10	147859385866390
11	21692929137930611
12	3759744512444581860
13	759740612270504941453
14	177000400360669503651138
15	47085371754008630756331255
16	14182051733113750632290151856
17	4800783042473733787547618701457
18	1814465726058141933447396597277230
19	761200426500646944336540805459302715
20	352591664899522707652874956741021472700
21	179472781767274631139757550011153123608021
22	99954022419649468154801928664451041337587546
23	60668633027308761941362718594968998542023876415
24	39987296070005425089963945237895149736170895343112
25	28525438774950414536076886237941600534232563527784025
26	21956633442793851418319837553792471508268439115568944326
27	18184125566938645820235920648969310230173377965853062270979
28	16161108992898478189430890230798185594398817821274182350919828
29	15375887317148459823529541397469188588997145720195653640484675869
30	15624607330674743110134291659869302612839484310838942682705280160370

Non riuscendo a semplificare la formula esplicita (Maple impiega un paio di secondi a calcolare il numero di modi già per n=100), non riuscendo a trovare una formula ricorsiva, e non riuscendo nemmeno a trovare il ritmo di crescita, ma volendo saperne di più su questa sequenza, mi sono rivolto a un sito delle sequenze numeriche[3].

Con un po' di sorpresa scopro che questa sequenza non è ancora stata inserita, e così l'ho inserita io sperando che qualcuno possa proseguire la ricerca su di essa. È stata registrata con il nome A185289.

Una variante più realistica e più semplice.

Consideriamo invece una variante più realistica, ossia quello che qualcuno non paga il pasto di un altro commensale se non paga il proprio. Questo problema si rivela molto più semplice. In effetti, se abbiamo n pasti e j paganti, dobbiamo scegliere gli j paganti e abbiamo C_j^n modi, poi dobbiamo attribuire gli (n–j) pasti di co-

3. Sito già citato nell'articolo del problema delle pillole (BdM 52), scritto con Giorgio Mainini. Il vecchio link http://www.research.att.com/~njas/sequences ora ridirige il visitatore su http://oeis.org, ma il sito è esattamente lo stesso.

loro che non pagano agli j paganti, e abbiamo j^{n-j}, e infine dobbiamo ordinare gli j paganti (j! modi) ottenendo infine $C_j^n\ j^{n-j}\ j!$ modi.

Se abbiamo quindi n pasti, per ottenere il numero totale di modi, basta sommare ottenendo quindi

$\sum_{j=1}^{n} C_j^n\ j^{n-j}\ j!$ modi. Usando k=n–j abbiamo

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_k^n\ (n-k)^k\ (n-k)!$$

e possiamo estendere la somma anche fino a k=n. Numericamente abbiamo i seguenti valori:

n	**Modalità di pagamento**
1	1
2	4
3	21
4	148
5	1305

Questa sequenza è già stata registrata e si chiama A006153.

2. Divisioni e resti

Giorgio Mainini

We all know how to predict remainder of a division for some particular quotients (2, 3, 5, 9, 10, ...). One may wonder if there are ways of finding the residue of the division by 7, or 13, or 37. There are such methods, indeed, but they are useless if you do not have a computer at hand: spreadsheets and programming languages incorporate functions that determine the remainder for any divisor, but in fact they are undetectable. Here is a method that still requires a computer but relies on understandable basics.

Premessa

Sia

$x : d = k$, resto r, $0 \leq r < d$

il che significa, per definizione,

$x = k \cdot d + r$

Se si verifica che anche la divisione (y : d) ha resto r, si dice che x e y sono congrui modulo d e si scrive

$x \equiv y \pmod d$

Indicando con R la funzione che a ogni coppia (x;y) di N×N* assegna il resto della divisione di x per y, si ha che

$x \equiv y \pmod d$

equivale a

$R(x;d) = R(y;d)$

Le scritture che seguiranno presentano un numero ingombrante di parentesi annidate: per semplificarle un po' introduco la scrittura $R_d(x)$ con il significato di R(x;d).

Sono vere le seguenti uguaglianze:

$R_n(a+b) = R_n(R_n(a) + R_n(b))$

$R_n(a \cdot b) = R_n(R_n(a) \cdot R_n(b))$

La R_n esterna è dovuto al fatto che una somma di resti può essere maggiore del divisore: in tal caso si deve ridurla applicandole la funzione R_n[1].

Calcolo dei resti

A questo punto si può calcolare il resto di un qualsiasi numero k per un qualsiasi divisore $d \neq 0$.

Sia, tanto per fissare le idee,

$k = a_7 \cdot 10^7 + a_6 \cdot 10^6 + a_5 \cdot 10^5 + a_4 \cdot 10^4 + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$

1. Come si dice in questi casi «Le dimostrazioni, non difficili, sono lasciate per esercizio».

Allora

$R_d(a_7 \cdot 10^7 + a_6 \cdot 10^6 + a_5 \cdot 10^5 + a_4 \cdot 10^4 + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0) =$

$= R_d(R_d(R_d(a_7 \cdot 10^7) + R_d(a_6 \cdot 10^6) + \ldots + R_d(a_0 \cdot 10^0))) =$

$= R_d(R_d(R_d(R_d(a_7) \cdot R_d(10^7)) + R_d(R_d(a_6) \cdot R_d(10^6)) + \ldots + R_d(R_d(a_0) \cdot R_d(10^0)))) =$

$= R_d(R_d(R_d(R_d(a_7) \cdot \mathit{k_7}) + R_d(R_d(a_6) \cdot \mathit{k_6}) + \ldots + R_d(R_d(a_0) \cdot \mathit{k_0})))$

I valori in italico sono costanti che si possono tabulare una volta per tutte; gli altri si calcolano di volta in volta.

Esempio 1: d = 7

n	**10^n**	**$R_7(10^n)$**
0	1	1
1	10	3
2	100	2
3	1’000	6
4	10’000	4
5	100’000	5
6	*1’000’000*	*1*
7	*10’000’000*	*3*
8	*100’000’000*	*2*

La parte in italico è evidentemente inutile: i resti possibili sono solo 6, perché nessuna potenza di 10 è multipla di 7. Quindi o si trova un ciclo più corto, o si trova un ciclo lungo 6.

Qual è il resto di 9426 : 7 ?

$R_7(9426) = R_7(9 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0) =$

$= R_7(R_7(R_7(R_7(9) \cdot 6 + R_7(R_7(4) \cdot 2 + R_7(R_7(2) \cdot 3 + R_7(R_7(6) \cdot 1)) =$

$= R_7(R_7(R_7(2) \cdot 6 + R_7(4) \cdot 2 + R_7(2) \cdot 3 + R_7(6) \cdot 1)) =$

$= R_7(R_7(12 + 8 + 6 + 6)) =$

$= R_7(R_7(32)) = R_7(4) = 4$

Prova

9426 : 7 = 1346 , resto = 4

Esempio 2: d = 13

n	**10^n**	**$R_{13}(10^n)$**
0	1	1
1	10	10
2	100	9
3	1’000	12
4	10’000	3
5	100’000	4
6	*1’000’000*	*1*
7	*10’000’000*	*10*
8	*100’000’000*	*9*

La parte in italico è inutile: si è formato il ciclo (1 ; 10 ; 9 ; 12 ; 3 ; 4). Infatti, se si trova un resto già trovato, i successivi resti sono gli stessi che lo seguono.

Qual è il resto di 2351 : 13 ?

$R_{13}(2351;13) = R_{13}(2\cdot10^3 + 3\cdot 10^2 + 5\cdot10^1 + 1\cdot10^0) =$

$= R_{13}(R_{13}(R_{13}(R_{13}(2)\cdot12 + R_{13}(R_{13}(3)\cdot9 + R_{13}(R_{13}(5)\cdot10 + R_{13}(R_{13}(1)\cdot1)) =$

$= R_{13}(R_{13}(R_{13}(2)\cdot12 + R_{13}(3)\cdot9 + R_{13}(5)\cdot10 + R_{13}(1)\cdot1)) =$

$= R_{13}(R_{13}(24 + 27 + 50 + 1)) =$

$= R_{13}(R_{13}(102)) = R_{13}(11) = 11$

Prova
2351 : 13 = 180 ; resto = 11

Esempio parziale 3: d = 19
Se si tenta di calcolare i resti con Excel si ottiene il seguente risultato

n	**10^n**	**$R_{19}(10^n)$**
0	1	1
1	10	10
2	100	5
3	1’000	12
4	10’000	6
5	100’000	3
6	1’000’000	11
7	10’000’000	15
8	100’000’000	17
9	1’000’000’000	18
10	10’000’000’000	#NUM!
11	1E+11	#NUM!
12	1E+12	#NUM!
13	1E+13	#NUM!

del tutto insufficiente. Occorre quindi procedere per un’altra via, nemmeno difficile da trovare né da percorrere.

Per le proprietà dei resti si ha
$R_d(10^n) = R_d(10^{n-1}\cdot10) = R_d(R_d(10^{n-1}) \cdot R_d(10))$

cioè per trovare ogni resto basta moltiplicare il resto che lo precede per $R_d(10)$ e, se necessario, trovare il resto del prodotto.

In questo modo si può continuare a trovare resti senza le limitazioni imposte da Excel.

Si ottiene la tabella

n	**10^n**	**$R_{19}(10^n)$**
0	1	1
1	10	10
2	100	5
3	1’000	12
4	10’000	6
5	100’000	3
6	1’000’000	11
7	10’000’000	15
8	100’000’000	17
9	1’000’000’000	18
10	10’000’000’000	9
11	1E+11	14
12	1E+12	7
13	1E+13	13
14	1E+14	16
15	1E+15	8
16	1E+16	4
17	1E+17	2
18	1E+18	*1*
19	1E+19	*10*

La parte in italico è evidentemente inutile: i resti possibili sono solo 18, perché nessuna potenza di 10 è multipla di 19. Quindi o si trova un ciclo più corto, o si trova un ciclo lungo 18.

Variante

A partire da d = 14 si trovano resti «ingombranti»: moltiplicare per 12 o per 17 o per 18 è seccante: quanto più i resti sono piccoli, tanto più il calcolo è semplice. Per rimpicciolire i resti, almeno in valore assoluto, conviene accettare anche resti negativi: un prezzo bisogna pur pagarlo…

È immediato riconoscere che $R_d(x) = R_d(x–d)$. Quindi se
$x = k \cdot d + r$, cioè $x : d = k$, resto r
allora
$(x – d) = k \cdot d + r – d$, cioè $(x – d) : d = k$, resto $(r – d)$

Poiché, necessariamente, $r < d$, si ha che $(r – d)$ è negativo.

Ma non solo: i due resti, come ricordato sopra, devono essere «lo stesso» resto. In altre parole, un resto h e un resto k sono da considerare lo stesso resto se $|h – k| = d$.

Se, per fissare le idee, si prende d = 11, i resti 5 e (–6), 8 e (–3) … sono «lo stesso» resto.

Se consideriamo il caso d = 19, la tabella sopra può diventare la seguente:

n	10^n	$R_{19}(10^n)$	Variante
1	1	1	1
2	10	10	–9
3	100	5	5
4	1000	12	–7
5	10000	6	6
6	100000	3	3
7	1000000	11	–8
8	10000000	15	–4
9	100000000	17	–2
10	10’000’000’000	18	–1
11	1E+11	9	9
12	1E+12	14	–5
13	1E+13	7	7
14	1E+14	13	–6
15	1E+15	16	–3
16	1E+16	8	8
17	1E+17	4	4
18	1E+18	2	2

I cambiamenti sono stati fatti solo là dove il valore assoluto della variante è minore del resto «standard».

Chi volesse calcolarsi le proprie varianti per vari d potrebbe fare così:
1) preparare le celle mostrate nella tabella seguente

	B	C
6	2	*=B6+1*
7		
8	1	*=$B8*
9	*=SE(ASS(RESTO(B8*10;B$6))<=ASS(RESTO(B8*10;B$6)–B$6); RESTO(B8*10;B$6); RESTO(B8*10;B$6)–B$6)*	

2) copiare a destra fin dove si vuole quanto scritto in italico e infine copiare in basso fin che si vuole tutta la riga 9.
Si avrà qualche piccola sorpresa da interpretare, per esempio nella colonna con d = 6.

Due possibili ricerche

– Fin qui si è dato per scontato che i numeri fossero scritti in base 10. Chi volesse, potrebbe modificare l’ultima tabella in modo che i «10» contenuti nelle funzioni siano sostituiti da una base scritta in una cella apposita[2]. E allora scoprirebbe, tra le altre cose, che i ben noti criteri di divisibilità per 3 e per 9 sono solo casi particolari di una «regola» ben più generale.

2. Si ricordi che in base b le cifre sono in numero di b. Di conseguenza i numeri, che il foglio di calcolo scrive in base 10, vanno opportunamente trasformati.

– Se il divisore, d, è un numero composto, il ciclo di resti sarà certamente più corto di (d–1); si potrebbe pensare che se, invece, d fosse primo, allora il ciclo sarebbe lungo (d–1). Così, però, non è. Sorge allora la domanda: per quali divisori primi p il ciclo è lungo (p–1)?

Conclusione

Nella sua *Einleitung zur Rechen–Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserlichen Academie der Wissenschafften in St. Petersburg* Euler scrive

«Ob sich aber eine Zahl durch 7 theilen lasse oder nicht, kann nicht wohl eine kürzere und bequemmere Regel gegeben werden, als dass man die Sache durch die wirkliche Division versuche»[3].

Credo proprio che l'affermazione sia del tutto condivisibile, e non solo per il 7. Resta che lavorare sui criteri di divisibilità per ogni numero sia comunque un'attività di un certo interesse.

3. Capitolo 6, paragrafo 9.

V. Informatica

1. Cabri insolito

Redazionale

Generare figure tridimensionali con Cabri-Géomètre Plus non è cosa evidente. D'altra parte l'uso improprio di applicativi, cioè produrre oggetti con programmi concepiti per fare tutt'altro, ci ha sempre affascinato. Ricordiamo, ad esempio, la geometria dello schermo[1] e gli stuzzicanti oggetti grafici «sgabelli, poltrone e selle matematiche[2]».

Sandro Boffa, docente di matematica in pensione, è uno specialista in materia. Da vero artista, riesce a realizzare con Cabri simulazioni scientifiche interessanti e… sorprendenti. Delle diverse produzioni, presentiamo in questa sede alcuni esempi di generazione di solidi geometrici. Purtroppo le limitazioni del documento stampato ci impediscono di mostrare l'aspetto dinamico, molto importante, non soltanto dal lato emozionale. Sappiamo come sia importante mostrare concretamente agli allievi come si può generare un solido di rotazione. Lo abbiamo visto fare nelle classi usando modellini in cartoncino di figure geometriche, munite di anellini lungo l'asse di rotazione, questi ultimi infilati in una bacchetta così da poter far ruotare le figure generatrici come bandierine. La cosa funziona, gli allievi si divertono e capiscono il principio. L'inconveniente di questa dimostrazione sta nel fatto che, una volta compiute le rotazioni, il solido scompare. In particolare, nel caso di cilindri e coni, non è possibile vedere né le rette generatrici della superficie di rotazione né la curva direttrice, elementi basilari nella definizione di questi concetti di geometria 3D.

Nelle produzioni di Sandro Boffa è possibile vedere sia l'aspetto dinamico sia il risultato finale, grazie alla possibilità di lasciare la traccia del disegno, a intervalli regolari, durante il trascinamento.

A questo punto, più delle parole, andrebbero mostrati esempi. Come già detto, siamo costretti a riprodurre solamente le immagini finali, ma chi desiderasse mostrare in classe queste realizzazioni può rivolgersi all'autore[3].

1. Arrigo G. (1994). La geometria dello schermo. BDM 28. Bellinzona: UIM-CDC.
2. Mainini G. (1995). Sgabelli, poltrone e selle matematiche. BDM 30. Bellinzona: UIM-CDC.
3. Sandro Boffa abita a Bosco Luganese. Il suo indirizzo e-mail: sandroboffa@ticino.com

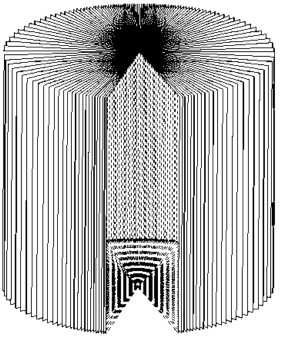


Figura 1. Cilindro di rotazione

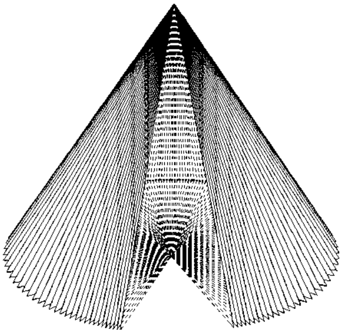


Figura 2. Cono di rotazione

Nelle due figure si possono osservare chiaramente le generatrici delle due superfici che sono rette e per questo la superficie si dice rigata. Nel cilindro le generatrici sono parallele all'asse di rotazione. Quest'ultimo coincide con un lato del rettangolo generatore (in generale si tende a considerare come asse di rotazione la retta portante questo segmento). Il cono è generato da un triangolo rettangolo e l'asse di rotazione coincide con un cateto. Entrambe le figure non sono completamente chiuse, cioè la rotazione eseguita è minore di 360°. Questo accorgimento permette di vedere meglio come è generato il solido e dà anche l'impressione di vedere uno scorcio dell'interno.

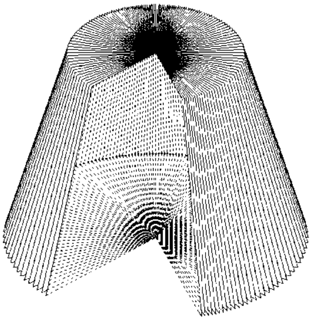


Figura 3. Tronco di cono.

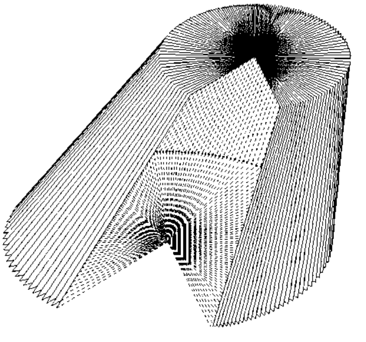


Figura 4. Tronco di cono obliquo

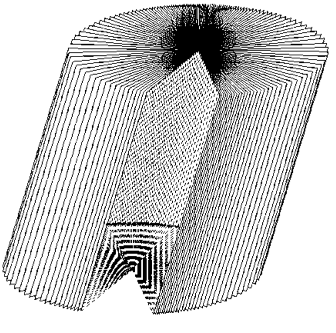


Figura 5. Cilindro obliquo

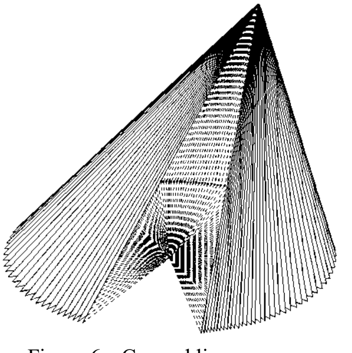


Figura 6. Cono obliquo

Il confronto tra solido retto (cilindro, cono e tronco di cono) e solido obliquo può prestarsi anche per apprendere il noto Principio di Bonaventura Cavalieri (1598–1647).

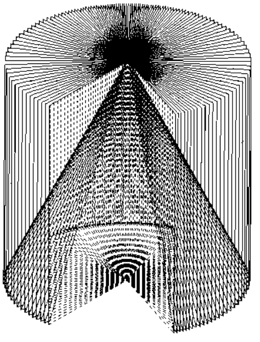


Figura 7. Cilindro e cono di rotazione aventi stessa base e stessa altezza.

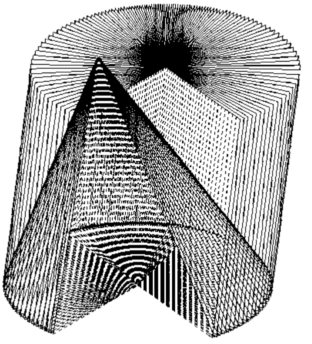


Figura 8. Lo stesso rapporto fra i volumi vale anche per i corrispondenti solidi obliqui

La scodella di Archimede sorprende ogni volta chi non la conosce. Con l'aiuto della figura 9 si può vederla immaginando di togliere da un cilindro equilatero la semisfera di raggio uguale all'altezza del cilindro.

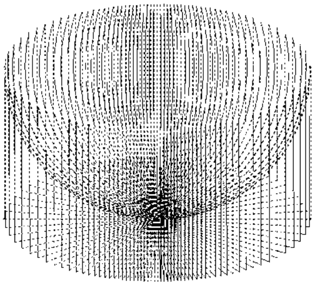


Figura 9. La scodella di Archimede

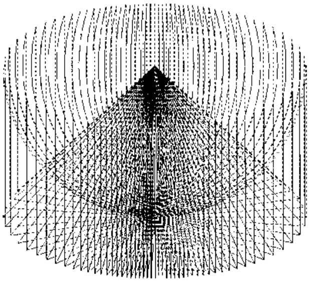


Figura 10. Cilindro, cono, semisfera e scodella

Un esercizio interessante per allievi della scuola media consiste nel verificare che il volume della semisfera è i 2/3 del volume del cilindro, quindi che il volume della scodella è 1/3 di quello del cilindro. Ma anche il cono che ha stessa base e stessa altezza del cilindro ha questo stesso volume. Si deduce che cono e scodella hanno lo stesso volume (vedere la figura 10). A guardarli non sembrerebbe: il cono «tozzo» rispetto alla scodella «leggera» dà l'impressione di avere un volume maggiore. D'altra parte la maggior parte della superficie che ruotando genera la scodella è ben distante dall'asse di rotazione e quindi genera più volume. Tutto ciò è spiegato da un teorema di Paul Guldin (1577-1643), matematico svizzero:

«Il volume di un solido di rotazione è uguale al prodotto dell'area della figura generatrice per la circonferenza descritta dal centro di gravità della figura generatrice.»

Con la stessa tecnica è possibile disegnare anche poliedri. Le tracce lasciate dal movimento durante la generazione del solido aiutano a distinguere ciascuna faccia dando nel contempo l'impressione del volume. Sul monitor tutto ciò si vede molto meglio sia potendo osservare la dinamica della costruzione sia grazie all'effetto della colorazione.

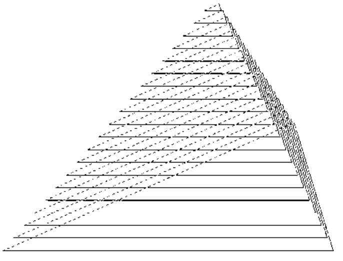


Figura 11. Tetraedro

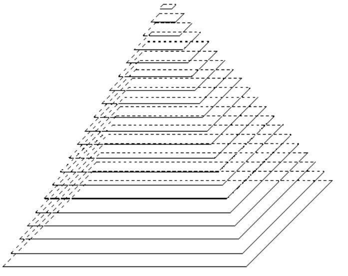


Figura 12. Piramide quadrangolare regolare

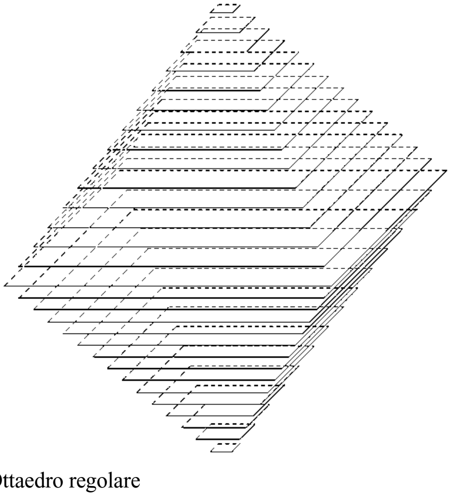


Figura 13. Ottaedro regolare

Bene, dirà il lettore a questo punto, ma come si fa a ottenere tutto ciò? Occorre approfondire lo studio della programmazione di un documento Cabri. Ogni software ha le sue specificità e programmare in Cabri è ben diverso che farlo, per esempio, con un foglio elettronico. Ecco come si esprime l'autore in merito:

«la differenza essenziale tra il programmare in Excel e in Cabri risiede nel fatto che in Excel vanno a ruba i connettivi logici 'se', 'e', 'o' ecc., mentre che in Cabri la stessa cosa si ottiene facendo o non facendo passare un'informazione attraverso un 'cavo elettrico' (vettore).»

1. Agenda matematica

1. **Matematica, stupore e poesia**
Conferenza organizzata dalla SMASI e dalla Divisione della scuola
Bruno D'Amore, NRD Bologna – MESCUD Bogotá (Colombia)
con la collaborazione di Tatiana Arrigo e Silvano Montanaro
che leggeranno alcuni brani scelti

Locarno, Sala dei Congressi di Muralto,
martedì 13 marzo 2012, ore 17.30

Presentazione

Arte figurativa, ballo, canto, musica, astronomia, poesia, fisica, filosofia, letteratura, matematica, recitazione, chimica, teatro,… sono tutte espressioni del genio umano, nessuna superiore alle altre, tutte fortemente implicate nel costruire quel fenomeno detto «cultura» che ci distingue dagli altri esseri dell'Universo. Tra esse ci sono legami strettissimi, a volte nascosti, alcuni ovvii, altri causa di stupore ancora oggi. Che un premio Nobel della poesia indichi nella formulazione del teorema di Pitagora la più alta vetta di perfezione stilistica sorprende solo gli ignoranti; invece, che la battaglia acerrima per la conquista della vetta della laconicità spetti a pari merito a poesia e matematica è fatto ancora tutto da dimostrare. Ma nessun essere umano può dirsi colto, se per scelta ottusa o per incapacità rinuncia ad uno di questi aspetti della cultura e non è capace di sorprendersi, ancora, di fronte alla poliedrica creatività umana. La matematica ben si presta a fungere da lente, da collante, da filtro, tra scienze, linguaggi, poesia e letteratura… Non è l'unico percorso possibile, ma funziona in modo spettacolare.

2. **Prima grande festa della matematica**
Matematica: il grande spettacolo
Una grande spettacolare festa della matematica, aperta a tutti,
nella splendida cornice del Parco Oltremare, tra delfini e falchi.

A cura dell'Associazione «Incontri con la Matematica»
e del NRD di Bologna con la Direzione di Silvia Sbaragli
e Martha Isabel Fandiño Pinilla.

Riccione, Parco Oltremare,
sabato 24 e domenica 25 marzo 2012

L'evento propone le seguenti mostre:

1. Paolo Bascetta (Bologna): *Origami e matematica*.
   Mostra e laboratorio interattivo con produzione di materiale geometrico.
2. Aldo Spizzichino (Bologna): *Matemorphosis, forme e matematica.*
3. Renzo Didoni (Monza): *La Matematica della natura*.
4. Renzo Baldoni (Mateureka, Museo del Calcolo di Pennabilli, Rn):
   L'Albero della conoscenza matematica.
5. Giorgio Häusermann (SUPSI, Locarno, Svizzera) e Marco Miranda
   (Technorama di Winterthur, Svizzera): *La scatola di Einstein*.
6. Attilio Ferrini (San Giovanni Valdarno):
   Lo zero, l'infinito, Dante e la matematica.
7. Bruno Jannamorelli (Sulmona):
   Dall'abaco alla pascalina. (Saletta Imax)
8. István Lénárt (Budapest, Ungheria) (a cura di Formath):
   La geometria dell'arancia e la geometria del foglio di carta.
9. Formath: *Matematica in bolle*.
10. Oscar Reutersvärd (Svezia) (a cura di Formath):
    Gli inganni della visione.
11. Tobia Ravà (Venezia): *Algoritmi e ghematriot*.
12. Guido Moretti (Brescia):
    Cubosfera e altre magie matematiche nella scultura.
13. Sergio Traquandi (Arezzo): *Arte e geometria dei poliedri*.
14. Johan Gielis (Tilburg, Olanda):
    Sulla geometria delle forme naturali dell'Universo.

Gli Autori sono a disposizione del pubblico. Per ogni mostra è realizzato un piccolo opuscolo esplicativo redatto dagli stessi Autori, da distribuire al pubblico visitante.

Sabato 24 marzo

10.00–11.15	Federico Benuzzi (giocoliere professionista, Bologna): *Fisica sognante. Riflessioni su matematica, fisica, giocoleria e didattica.*
10.15–11.00	Mirko degli Esposti (matematico, Università di Bologna): *Matematica tra testi, musica e stili…*
10.15–11.00	Joahn Gielis (botanico, Università di Tilburg, Olanda): *Due strade reali. Interessanti aspetti storici di aritmetica e geometria.*
10.15–12.45	Ennio Peres (giocologo, Roma): *Magia matematica.* Laboratorio di magia per ragazzi.
11.15–12.00	Spettacolo-intrattenimento di Oltremare
11.15–12.00	István Lénárt (matematico, Università di Budapest, Ungheria): *La geometria dell'arancia e la geometria del foglio di carta.*
11.15–12.00	Giorgio Bolondi (matematico, Università di Bologna), Bruno D'Amore (matematico, NRD di Bologna), Gabriele Argazzi e Barbara Bonora (Gruppo teatrale L'Aquila Signorina, Molinella): *La matematica non serve a nulla*
12.15–12.45	Spettacolo dei rapaci
10.30–12.00	ogni 30 minuti *Pianeta Terra*
13.00–13.45	Visita a Darwin; in contemporanea proiezione Imax
14.00–14.50	I due attori Gabriele Argazzi e Barbara Bonora del gruppo teatrale L'Aquila Signorina leggono e interpretano brani tratti dal libro *Dante e la matematica* di Bruno D'Amore; l'autore interviene spiegando la matematica di alcuni brani.
15.00–15.30	Spettacolo dei delfini
15.45–16.30	Stefano Beccastrini (pedagogista, storico del cinema) e Michele Mulazzani (matematico, Università di Bologna): *A proposito di cinema e di matematica.*
15.45–16.30	Pierluigi Contucci (matematico, Università di Bologna): *Sogni e certezze. La matematica per non confondere il caso e la regola…*
15.45–16.30	Ennio Peres (giocologo, Roma): *Mate-risate.*
16.45–17.30	Giorgio Bolondi (matematico, Università di Bologna): *Musica e matematica.*
16.45–17.30	Massimo Polidoro (giornalista scientifico): *L'ho visto coi miei occhi! Quando l'incredibile sembra credibile.*
16.45–17.30	Tobia Ravà (artista, Venezia): *Elementi dialettici di calcolo trascendentale.*
17.45–18.30	Massimo Ferri (matematico, Università di Bologna): *Ma che cos'è la forma?*
17.45–18.30	Bruno D'Amore (matematico, NRD di Bologna): *M. C. Escher e la matematica.*
17.30–19.00	*Le geometrie degli antichi balli contadini* (a cura di Stefano Alberghi, Faenza). Danze e musiche eseguite dai *Carampana* e dai *Girintondo* – Gruppo di ricerca di balli contadini.
15.00–17.00	ogni 30 minuti *Pianeta Terra*

Domenica 25 marzo

10.00–19.00	Visita alle mostre senza interruzione
10.15–10.45	Spettacolo dei rapaci
11.00–12.00	Federico Benuzzi (giocoliere professionista, Bologna): *Fisica sognante. Riflessioni su matematica, fisica, giocoleria e didattica.*
11.00–12.00	Giorgio Bolondi (matematico, Università di Bologna), Bruno D'Amore (matematico, NRD di Bologna), Gabriele Argazzi e Barbara Bonora (Gruppo teatrale L'Aquila Signorina, Molinella): *La matematica non serve a nulla.*
11.00–12.45	Ennio Peres (giocologo, Roma): *Spettacolo di magia matematica* realizzato con i ragazzi partecipanti al laboratorio.
12.15–12.45	Sessione didattica delfini
10.30–12.00	ogni 30 minuti *Pianeta Terra* e *Darwin* (questa attrazione avrà fruizione libera in continuo e un accompagnamento dalle 11.15 alle 11.35).
13.15–13.45	Spettacolo-intrattenimento e proiezione *Imax*
14.00–14.45	Giorgio Häusermann (fisico, SUPSI, Locarno, Svizzera) e Marco Miranda (fisico, Technorama di Winterthur, Svizzera): *La scatola di Einstein*.
14.00–14.45	Giorgo Bolondi (matematico, Università di Bologna): *Musica e matematica*.
14.00–14.45	Pierluigi Contucci (matematico, Università di Bologna): *Sogni e certezze. La matematica per non confondere il caso e la regola…*
15.00–15.30	Spettacolo dei delfini
15.45–16.30	Massimo Polidoro (giornalista scientifico): *L'ho visto coi miei occhi! Quando l'incredibile sembra credibile.*
15.45–16.30	Joahn Gielis (botanico, Università di Tilburg, Olanda): *Due strade reali. Interessanti aspetti storici di aritmetica e geometria*.
15.45–16.30	István Lénárt (matematico, Università di Budapest, Ungheria): *La geometria dell'arancia e la geometria del foglio di carta*.
16.45–17.30	Massimo Ferri (matematico, Università di Bologna): *Ma che cos'è la forma?*
16.45–17.30	Mirko degli Esposti (matematico, Università di Bologna): *Matematica tra testi, musica e stili…*
16.45–18.30	Stefano Beccastrini (pedagogista, storico del cinema) e Michele Mulazzani (matematico, Università di Bologna): *A proposito di cinema e di matematica*.
17.30–19.00	*Le geometrie degli antichi balli contadini* (a cura di Stefano Alberghi, Faenza). Danze e musiche eseguite dai *Carampana* e dai *Girintondo* – Gruppo di ricerca di balli contadini.
17.45–18.30	Bruno D'Amore (matematico, NRD di Bologna): *M. C. Escher e la matematica*.

2. Recensioni

***Matematica nella scuola primaria, percorsi perapprendere*. Cofanetto composto di 14 volumi. 2011. Bologna: Pitagora editrice. € 240**[1]

Elenco dei volumi:

1. M.I. Fandiño Pinilla, S. Sbaragli: *Matematica di base per insegnare nella scuolaprimaria.* Prefazione di B. D'Amore
2. B. D'Amore, S. Sbaragli: *Principi di base di didattica della matematica*
3. M.I. Fandiño Pinilla: *Curricolo, competenze e valutazione in matematica*
4. B. D'Amore, I. Marazzani: *Problemi e Laboratori. Metodologie per l'apprendimento della matematica*
5. A. Angeli, B. D'Amore, M. Di Nunzio, E. Fascinelli: *Matematica dalla scuola dell'infanzia alla scuola primaria*
6. B. D'Amore, M.I. Fandiño Pinilla: *Spunti di storia della matematica ad uso didattico nella scuola primaria*
7. L. Baldazzi, G. Liverani, E Magalotti, A. Monaco, L. Prosdocimi, N. Vecchi: *Numeri* [con un'appendice sul calcolo, di G. Arrigo]
8. L. Campolucci, M.I. Fandiño Pinilla, D. Maori: *Frazioni*
9. L. Cottino, C. Gualandi, C. Nobis, A. Ponti, M. Ricci, S. Sbaragli, L. Zola: *Geometria*
10. L. Cottino, E. Dal Corso, M. Francini, C. Gualandi, C. Nobis, A. Ponti, M. Ricci, S. Sbaragli, L. Zola: *Misura*
11. I. Foresti, MC. Sangiorgi: *Trasformazioni geometriche*
12. G. Arrigo, L. Maurizi, T. Minazzi, V. Ramone: *Combinatoria Statistica Probabilità*
13. A. Battaini, L. Campolucci, G. Gottardi, S. Sbaragli, S. Vastarella: *Uso del PC, della LIM, delle TIC e del software didattico dinamico*
14. I. Marazzani: *Una raccolta ragionata di problemi*

1. I volumi possono anche essere acquistati separatamente.

Lungo il corso degli anni ’70, il NRD di Bologna[2] decise di raccogliere le numerosissime esperienze, condotte in collaborazione con varie scuole elementari, in un Progetto da mettere a disposizione di tutti gli insegnanti di lingua italiana, denominato MaSe[3]. Grande fu il successo e molte le ristampe che si sono succedute negli ultimi vent’anni. Ma dopo così tanto tempo, peruna disciplina seriamente fondata come la didattica della matematica, occorreva rinnovare. Così è nato il progetto *Matematica nella scuola primaria*, *percorsi per apprendere*, che si distingue per la concezione decisamente moderna, attuale, scientificamente corretta e per la ricchezza di esempi ricavati da esperienze concrete fatte, ripetute, discusse e di successo cognitivo comprovato.

Vi hanno collaborato moltissimi membri del nostro RSDDM[4], i cui nomi appaiono come autori dei singoli testi, coordinati soprattutto da Martha Isabel Fandiño Pinilla e Silvia Sbaragli e sotto la direzione di Bruno D’Amore e con l’aiuto di altri membri del NRD, in particolare di Ines Marazzani.

Il I volume vuole dare le basi essenziali di matematica ad uso del docente di scuola primaria; il II l’analogo per quanto concerne la didattica; il III affronta tre temi centrali della didattica: la formazione e il senso del curricolo, che cosa intendere per competenza e che cosa con valutazione; il IV propone problemi e laboratori come metodologie didattiche; il V un collegamento concreto tral’ultimo anno di scuola dell’infanzia e il I della scuola primaria; il VI alcuni spunti di storia della matematica, sia a scopo culturale che didattico; il VII, l’VIII, il IX, il X, l’XI e il XII entrano nei temi specifici della matematica della scuola primaria, fornendo spunti ragionati di attività da svolgere in classe, dettagliatamente descritte e suddivise dalla prima alla quinta classe; il XIII offre idee sull’uso didattico intelligente degli strumenti informatici con software già in uso nelle scuole; il XIV non è altro che una raccolta ragionata di proposte di problemi dalla prima alla quinta, distinti per tipologie create sulla base della ricerca didattica.

Si capisce subito che questa collana di volumi non è il solito manuale pedante e noioso – e troppo spesso usato come comoda stampella da chi non può o non ha voglia di creare i propri materiali didattici –, bensì un’opera che presenta un ampio ventaglio di problematiche ricavate dalla più aggiornata ricerca in didattica della matematica, costellato da numerosi esempi di attività svolte sperimentalmente in classe e discusse in seno a cerchie sempre più ampie di persone interessate. Nei 14 volumetti l’insegnante attento e appassionato può trovare tutto ciò che di meglio possa desiderare al fine di variare e arricchire la propria pratica di classe e di affinare la conoscenza dei vari concetti matematici che rientrano (o dovrebbero rientrare) nel curricolo di ogni scuola primaria che voglia essere una corretta risposta alle esigenze della società attuale.

Il discorso non è mai cattedratico, dogmatico, direttivo; al contrario, lo stile comunicativo è interlocutorio, aperto, stimolante. L’insegnante è spinto continuamente a porsi in modo critico di fronte al difficile e affascinante processo dell’apprendere e messo a confronto con i risultati notevoli e maggiormente utili dell’odierna ricerca didattica. Nel contempo gli si offrono però ampi spazi di interpretazione e di adattamento

2. Nucleo di Ricerca in Didattica della matematica, fondato a metà degli anni ’70 presso il Dipartimento di Matematica dell’Università di Bologna. Per maggiori informazioni, consultare il sito www.dm.unibo.it/rsddm
3. Acronimo di «Matematica per la scuola elementare».
4. Gruppo che si configura come estensione del NRD agli insegnanti sperimentatori.

del proprio insegnamento alla realtà contingente dell'allievo, della classe, della scuola, del paese, della società e del mondo con i quali deve giornalmente interagire.

Fino a qualche decennio fa, l'insegnante agiva quasi esclusivamente seguendo la propria sensibilità didattica, appoggiandosi sulla solida (e talvolta ingombrante) tradizione scolastica, molto spesso riproducendo abitudini e concezioni di colleghi «sperimentati», prendendo decisioni sulla base di ciò che era ritenuto «il buon senso».

Oggi tutti devono prendere atto che, in una società dinamica e spesso sconvolgente come la nostra, gli insegnanti non possono più continuare così. Perché chi lo fa entra presto in crisi e come persona ne soffre fino ad arrivare a scaricare le colpe dell'insuccesso sugli allievi. Niente di più negativo.

Gli insegnanti sono chiamati a effettuare un importante cambiamento del loro ruolo: da *trasmettitori* di conoscenza statica a una scolaresca abituata a riprodurre parole e modi di pensare, a *modelli* di comportamento attivo e a *stimolatori* di attività sapientemente create per portare l'allievo all'appropriazione della conoscenza. Per fare ciò occorre possedere – limitandoci alla matematica – modelli mentali corretti e adeguati dei concetti che si vogliono insegnare e idee chiare sulle grandi problematiche sviluppate dalla ricerca didattica disciplinare. In sintesi: l'insegnante deve ricostruirsi la propria professionalità. Lavoro non facile, è vero. Obiettivo che, forse, nella scuola odierna è ancor più difficile ottenere, visti i carichi di lavoro che restringono sempre più i momenti propizi alla riflessione didattica, fino a soffocarla.

È proprio in questa situazione estremamente critica che salutiamo con grande piacere la comparsa di un'opera come questa, che permette a ogni insegnante, al di là di tutte le limitazioni, di iniziare, sviluppare e perfezionare il processo di rinnovamento del proprio modo di insegnare. In questi 14 volumi egli troverà soprattutto il frutto di un lavoro di sintesi paziente e riogoroso, compiuto da un gruppo di insegnanti che ha voluto e saputo dedicare molto del tempo libero alla realizzazione di uno strumento decisamente utile per il miglioramento della scuola. «Utile» è proprio l'aggettivo col quale gli Autori sperano venga qualificato il prodotto dei loro sforzi.

Guerraggio A. e Nastasi P. (2010). *L'Italia degli scienziati*. Milano: Bruno Mondadori. Pagg. 325, € 22

Nell'occasione del centocinquantesimo dell'Unità d'Italia, gli autori si preoccupano di far conoscere al grande pubblico il ruolo significativo che la cultura scientifica ha avuto e continua ad avere nella storia d'Italia, nei suoi intrecci fondamentali con politica e società, insieme alla rilevanza profonda dei contributi applicativi e delle scoperte che hanno inciso sulla struttura economica e sul benessere della nazione. Leggendo queste pagine si incontrano personaggi come il chimico Giorgio Errera, il matematico Vito Volterra, gli inventori Antonio Meucci, Antonio Pacinotti e Guglielmo Marconi e i «ragazzi di via Panisperna», storicamente legati a Enrico Fermi insieme a quella magnifica quanto enigmatica figura di Ettore Majorana. Si giunge infine ai premi Nobel novecenteschi: Renato Dulbecco, Carlo Rubbia e Rita Levi Montalcini. Come si vede da questi brevi cenni, l'opera apre una finestra su un universo di figure della scienza italiana, oggi spesso sconosciuto o malnoto, in una società come la nostra troppo attratta dalle imprese dei «grandi divi» della canzone e dello sport competitivo, dai «reality» televisivi e dal cosiddetto «gossip», tanto per fare qualche esempio.

Uno dei compiti della scuola di oggi è di fornire ai giovani strumenti critici che li aiutino a distinguere i valori deboli (purtroppo enfatizzati dalla nostra società della comunicazione) da quelli forti che sono per lo più sconosciuti e che per questo devono essere presentati agli allievi quali esempi significativi del genio umano. Triste sarebbe permettere alle nuove generazioni di aver conosciuto nella loro vita chi calcia bene un pallone e ignorato chi ha contribuito alle innumerevoli e strabilianti conquiste del sapere. Ecco allora giungere, puntuali e gradite, pubblicazioni come questa, nelle quali gli insegnanti possono trovare una miniera di informazioni, di racconti e di documentazioni perfettamente adatte per completare le lezioni, in modo da far conoscere agli allievi il fascino della ricerca scientifica.

Jannamorelli B. (2010). Abbasso la matematica. Torre dei Nolfi (AQ): Qualevita. Pagg. 182, € 15

C'è ancora chi pensa di fare bella figura dichiarando di non aver mai capito nulla di matematica. Ci sono giovani che, dopo aver ricevuto un cattivo voto in matematica, si sentono consolare dal padre con frasi del tipo: «è normale, anch'io sono sempre stato una frana e tua madre non era tanto meglio». Contro questa mentalità occorre lottare decisamente e chi può farlo è solo la scuola. Rubando l'idea alla scuola pitagorica occorrerebbe scrivere sul portone di tutti gli istituti scolastici la frase di Bruno D'Amore, che si trova nel verso della copertina: «L'ignoranza matematica non può essere un vanto, è solo una vergogna».

Una delle vie che portano alla riabilitazione della conoscenza matematica nei confronti del grande pubblico è la divulgazione. Da decenni, finalmente (si è iniziato negli anni ottanta) continuano a uscire opere che hanno come obiettivo di far conoscere la storia della matematica, la vera realtà di questa disciplina, il piacere che si può ricavare anche solo giocando con nozioni elementari. Questo libro di Jannamorelli segue proprio la via descritta. Come afferma D'Amore nella prefazione, «questo libro narra storie vere, avvenute tra le pareti domestiche, nelle quali due giovani, fratello e sorella, in perenne situazione di sfida (e di reciproca stima, anche se spesso celata), si sfidano con la matematica sotto lo sguardo amorevole e competente del papà, professore di matematica nei licei».

Il libro può essere letto sotto due lenti diverse: quella piacevole di chi si diletta a leggere scritti di narrativa e quella professionale di chi (l'insegnante in primo piano) cerca nuove idee da portare in classe per superare la tendenza al tecnicismo e all'efficientismo (la matematica per ricette) che finisce per appiattire il tessuto matematico elaborato a scuola, con le conseguenze negative che conosciamo.

Coerentemente a quanto descritto in precedenza, i contenuti del testo (le varie situazioni) sono volutamente semplici e quasi tutti legati agli algoritmi, dei quali l'Autore è sempre stato un grande cultore. Troviamo così, a mo' d'esempio: la duplicazione di un quadrato, il calcolo mentale, il ruolo dello zero, i vari modi di eseguire una moltiplicazione (egiziano, a reticolo, con i bastoncini di Nepero, con la tecnica vedica), la prova del nove, l'aritmetica dell'orologio, il calcolo della radice quadrata nell'antica India e nell'antica Cina, la storia di pi greco.

Cari insegnanti, avete in classe casi difficili, allievi che non hanno alcun interesse per la matematica? Leggete questo agile libretto: ne trarrete una salutare boccata di ossigeno e vi troverete numerosi spunti da proporre in classe nel tentativo di sciogliere le reticenze più robuste.

Progetto grafico
Bruno Monguzzi
Prestampa
Taiana
Stampa
Veladini

Redazione
Laboratorio di didattica della matematica
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera

Telefono
091 814 18 21/22/24
Fax
091 814 18 19
gianfranco.arrigo@span.ch

Amministrazione
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera
Fax
091 814 18 19

Esce due volte all'anno
a maggio e a dicembre

Abbonamento annuo
SFR 30
€ 16

Bollettino dei docenti di matematica
63

In questo numero: ricordando A.M. Ostrowski di G. Arrigo; didattica teorica e ricerca di B. D'Amore, S. Moccetti, L. Porteri Ferdani, M. Ferrari e F. Pagnamenta; proposta didattica di B. Mutti; il quiz di A. Frapolli; contributi di matematica di P. Hägler e G. Mainini; realizzazioni informatiche di S. Boffa; segnalazioni e recensioni.

ISBN 978-88-86486-83-5
Fr. 18.–

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport