A cura
del Laboratorio di didattica della matematica

Bollettino dei docenti di matematica

66

Maggio
2013

Ufficio
dell'insegnamento medio
Centro
didattico cantonale

Bollettino
dei docenti di matematica
66

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport

ISBN 978-88-86486-88-0

Bollettino dei docenti di matematica 66

Maggio
2013

Ufficio dell'insegnamento medio
Centro didattico cantonale

Indice

Prefazione

La redazione del Bollettino dei docenti di matematica ha il dovere di ricordare Denis Baggi, sagace e dotto articolista, scomparso pochi giorni prima di Pasqua.

Il numero 66 si apre con l'importante articolo di Jean Dhombres, un gradito approfondimento della conferenza sulla nascita del linguaggio algebrico da lui tenuta a Locarno il 2 ottobre 2012, organizzata dalla SMASI in collaborazione col DFA della SUPSI. Stefano Beccastrini e Paola Nannicini offrono un saggio sul matematico napoletano Renato Caccioppoli, genio eclettico e purtroppo dimenticato. Silvio Maracchia ci fa provare il piacere indotto da una formula algebrica e stabilisce così un ponte con il saggio di Dhombres.

Come consuetudine, la sezione Didattica è molto nutrita. Inizia con un significativo contributo della coppia Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla sulla necessità di non «buttare a mare» teorie di didattica della matematica datate e troppo disinvoltamente considerate obsolete. Segue un copioso contributo sulle analogie esistenti tra reale e virtuale osservate e studiate da Alberto Battaini, Guido Gottardi e Silvia Sbaragli nell'ambito di una sperimentazione relative alla scuola dell'infanzia. Con piacere, quando si presenta l'occasione, la redazione pubblica le sintesi di lavori di diploma eseguiti da corsisti del DFA. È la volta di Sara Casartelli, ora docente di scuola media, che presenta un importante studio sui vissuti scolastici e relative aspettative di studenti di quarta media, osservati dal punto di vista dell'emotività. La sezione chiude con un contributo di Gianni Callegarin, docente liceale e appassionato sperimentatore di lavori teatrali che concernono la matematica. Anche questo testo si lega al problema dell'apprendimento di formule algebriche e identità notevoli e può interessare soprattutto chi insegna nel secondo biennio della scuola media e nelle scuole superiori e professionali.

Come sempre, il nuovo quiz di Aldo, giunto al numero 49, invita alla riflessione strategica in ambito matematico.

La sezione giochi presenta un secondo contributo di Stefan Meyer, dopo quello apparso sul numero 64 di questa rivista. Si tratta di un gioco di apprendimento per allievi in difficoltà, accompagnato da importanti considerazioni pedagogiche.

Riappare la sezione Laboratorio matematico con una gustosa proposta di Bruno Jannamorelli, in veste di racconto matematico, che potrebbe essere proposta a partire dalla terza media.

Si chiude con segnalazioni di convegni caldamente raccomandati e con alcune interessanti recensioni curate da Gianfranco Arrigo e da Bruno D'Amore.

I. Varia

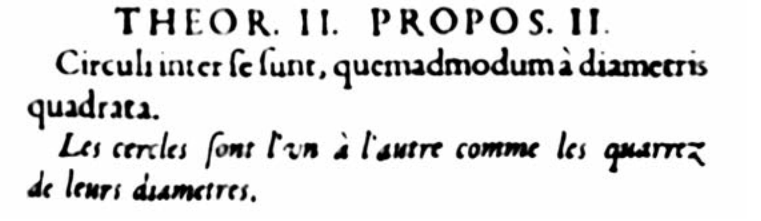
1. Sull'invenzione delle formule matematiche e delle identità dette notevoli

Jean Dhombres[1]

The article is the analysis of the conference given by the author at the DFA in Locarno on October 2, 2012. The title of the presentation was: «L'invention des formules mathématiques élémentaires». The conference was centred upon both the attempt to understand what the writing of a formula has added at the mathematics and the reason why this latter is sometimes not considered as useful. The article brings forth interesting illustrations of ancient texts, what makes it even more involving.

1. Introduzione

Chiunque apra uno qualsiasi dei tredici libri che compongono gli *Elementi* di Euclide – un'opera che, come si sa, data del terzo secolo precedente alla nostra era e fu per molto tempo il fondamento dell'insegnamento della matematica – rimane sorpreso di non trovare alcuna formula. Per esempio quella che dà l'area del cerchio ($S=\pi R^2$). Anche se il numero π sembra riferito a qualcosa di molto antico, l'area del cerchio, è oggetto della proposizione II del libro XII degli *Elementi*. Vi si legge solo una formulazione approssimativa: *«I cerchi sono fra loro come i quadrati dei diametri»*[2].


THEOR. II. PROPOS. II.

Circuli inter ſe ſunt, quemadmodum à diametris quadrata.

Les cercles ſont l'vn à l'autre comme les quarrez de leurs diametres.

Ecco una delle prime versioni in francese, dovuta a Pierre Hérigone[3], pubblicata nel 1634. Questo autore è in realtà l'inventore di una scrittura matematica abbreviata che si può trovare nella prima opera *Cours mathématique*, scritta quindi con una chiara intenzione pedagogica che ne fa l'antesignano dei nostri manuali. Almeno a questo stadio dell'opera composta di diversi volumi, e riprendendo gli *Elementi* di Euclide, prima di passare all'algebra, Hérigone non usa «formule». Uno dei problemi

1. Centre Koyré, Ecole des Hautes études en Sciences Sociales, Paris.
2. (NDT). Per la traduzione italiana di tutte le citazioni di Hérigone ci serviamo del libro di Federico Commandino da Urbino (1575), consultabile sul sito : http://www.matematicamente.it/cultura/storia_della_matematica/gli_elementi_di_euclide_201101147248/.
3. Pierre Hérigone, *Cursus mathematicus/Cours mathématique*. Paris: 1634, inizio del libro XII.

che voglio discutere in occasione di questa conferenza di Locarno, svoltasi grazie al gentile invito di Gianfranco Arrigo, consiste sia nel cercare di capire ciò che porta in più la scrittura di una formula, sia il perché non se ne avverta sempre l'utilità.

Negli *Elementi* di Euclide non si vedono affatto le identità che saranno dette notevoli solo nel XIX secolo, del tipo

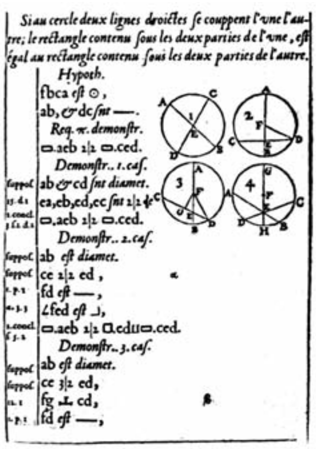
$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

oppure

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=a\,b$$

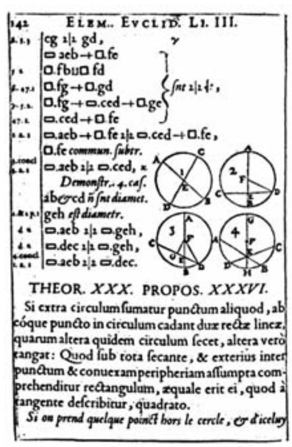
Chiaramente non si può discutere il passaggio quasi immediato da un'identità all'altra, se non si lavora almeno un po' con le lettere, considerandole come rappresentanti di quantità qualsiasi. Chi non ha letto Euclide potrebbe crederle indispensabili per il raggiungimento di proprietà geometriche usuali, come quella della potenza di un punto rispetto a una circonferenza. Questa proprietà, suddivisa in casi di figure diverse, secondo che il punto si trovi dentro o fuori dal corrispondente cerchio, o che una secante diventi tangente, è in effetti presentata nel libro III degli *Elementi*. Appare ancora sotto forma di una frase, l'uguaglianza di due rettangoli, apparentemente senza alcuna notazione di tipo matematico. Ma vi si trova forzatamente un uso particolare del termine «rettangolo», una particolare notazione, dal momento che nessun rettangolo geometrico non appare disegnato (vedere le figure 1-4). Adotto la traduzione di Pierre Hérigone[4] e dico subito che non voglio entrare troppo nei dettagli e mi servo di figure come supporto di un sapere ben conosciuto dai lettori.

«Se nel cerchio due linee rette si taglino fra loro, il rettangolo contenuto dalle parti di una è uguale al rettangolo che si contiene dalle parti dell'altra»[5].



Si au cercle deux lignes droictes ſe couppent l'une l'autre; le rectangle contenu ſous les deux parties de l'une, eſt égal au rectangle contenu ſous les deux parties de l'autre.

Hypoth.
fbca eſt ⊙,
ab, & dc ſnt —.
Req. π. demonſtr.
▭.aeb 2|2 ▭.ced.
Demonſtr.. 1. caſ.
ab & cd ſnt diamet.
ea, eb, ed, ec ſnt 2|2 ∤e
▭.aeb 2|2 ▭.ced.
Demonſtr.. 2. caſ.
ab eſt diamet.
ce 2|2 ed,
fd eſt —,
∠fed eſt ⊥,
▭.aeb 2|2 □.ed ⊔ ▭.ced.
Demonſtr.. 3. caſ.
ab eſt diamet.
ce 3|2 ed,
fg ⊥ cd,
fd eſt —,



142 ELEM.. EVCLID. LI. III.

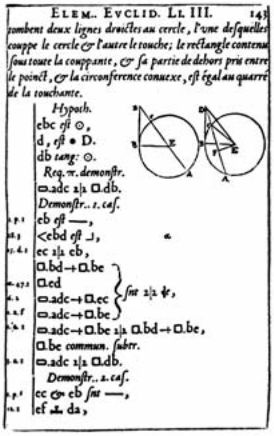
cg 2|2 gd,
▭.aeb + □.fe
□.fb ⊔ □.fd
□.fg + □.gd
□.fg + ▭.ced + □.ge
▭.ced + □.fe
ſnt 2|2 ∤ʳ,
▭.aeb + □.fe 2|2 ▭.ced + □.fe,
□.fe commun. ſubtr.
▭.aeb 2|2 ▭.ced,
Demonſtr.. 4. caſ.
ab & cd n̄ ſnt diamet.
geh eſt diametr.
▭.aeb 2|2 ▭.geh,
▭.dec 2|2 ▭.geh,
▭.aeb 2|2 ▭.dec.

THEOR. *XXX.* PROPOS. *XXXVI.*

Si extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eóque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum ſecet, altera verò tangat: Quod ſub tota ſecante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam aſſumpta comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente deſcribitur, quadrato.

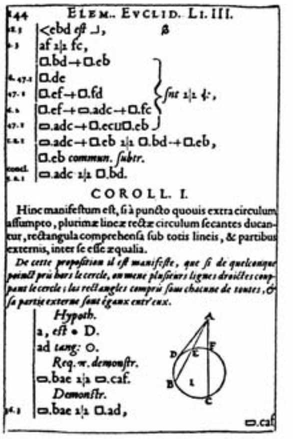
Si on prend quelque poinct hors le cercle, & d'icelui

4. Senza parlare di alcuni aneddoti fantasiosi dei quali mi piacerebbe spesso poter determinare le origini, perché certe invenzioni sono molto gustose e i dizionari biografici non dicono molto di Pierre Hérigone. Si sa della sua partecipazione alle riunioni del Padre Mersenne iniziatesi verso il 1630 nel convento dei Minimes sito a Parigi, nelle vicinanze dell'attuale piazza dei Vosgi.
5. Pierre Hérigone, [ibidem], proposition 35, livre III, p. 141 e seguenti.


ELEM. EVCLID. LI. III. 143

tombent deux lignes droictes au cercle, l'une desquelles couppe le cercle & l'autre le touche; le rectangle contenu sous toute la couppante, & sa partie de dehors pris entre le poinct, & la circonference conuexe, est égal au quarré de la touchante.

Hypoth.
ebc est ⊙,
d, est • D.
db tang: ⊙.
Req. π. demonstr.
▭.adc 2|2 □.db.
Demonstr.. 1. cas.
eb est —,
<ebd est ⊥,
ec 2|2 eb,
□.bd + □.be
□.ed
▭.adc + □.ec
▭.adc + □.be
sont 2|2 ∤,
▭.adc + □.be 2|2 □.bd + □.be,
□.be commun. subtr.
▭.adc 2|2 □.db.
Demonstr.. 2. cas.
ec & eb sont —,
ef ⊥ da,


144 ELEM. EVCLID. LI. III.

<ebd est ⊥,
af 2|2 fc,
□.bd + □.eb
□.de
□.ef + □.fd
□.ef + ▭.adc + □.fc
▭.adc + □.ec ⊔ □.eb
sont 2|2 ∤,
▭.adc + □.eb 2|2 □.bd + □.eb,
□.eb commun. subtr.
▭.adc 2|2 □.bd.

COROLL. I.

Hinc manifestum est, si à puncto quouis extra circulum assumpto, plurimæ lineæ rectæ circulum secantes ducantur, rectangula comprehensa sub totis lineis, & partibus externis, inter se esse æqualia.

De cette proposition il est manifeste, que si de quelconque poinct pris hors le cercle, on mene plusieurs lignes droictes coupant le cercle; les rectangles compris sous chacune de toutes, & sa partie externe sont égaux entr'eux.

Hypoth.
a, est • D.
ad tang: ⊙.
Req. π. demonstr.
▭.bae 2|2 ▭.caf.
Demonstr.
▭.bae 2|2 □.ad,
▭.caf

Figure 1, 2, 3, 4. Quattro pagine successive di Pierre Hérigone (1634) per spiegare le proposizioni 35 e 36 del libro III degli Elementi di Euclide, relativi a quello che oggi indichiamo con una sola espressione: la potenza di un punto rispetto a un cerchio.

Negli *Elementi* non si trovano nemmeno formule più semplici, come

sin(a+b) = sin(a) cos(b) + sin(b) cos(a)

Questa relazione appare con forti restrizioni circa i valori di a, b e (a+b): devono infatti essere positivi e tutti e tre minori di un angolo retto. Le restrizioni, che sono dettate dalla natura della dimostrazione che utilizza una figura geometrica dell'antichità greca, non si ritrovano nella formula. Ecco senza dubbio la ragione per la quale ai geometri queste formule non piacciono affatto. Perché la loro generalizzazione non è automatica. Sarebbe meglio se fossero pensate in ambito algebrico, cioè generalizzate sulle quantità in gioco? Ma il metodo algebrico non contiene in sé la dimostrazione! Enuncio la formula in una versione relativamente tarda, per far prendere coscienza del fatto che alla fine del secolo dei Lumi la scrittura analitica non era ancora usuale.

«Le théorème fondamental de la théorie des sinus consiste en ce que le sinus de la somme de deux angles est égal au produit du sinus du premier, par le cosinus du second plus le produit du sinus du second, par le cosinus du premier».[6]

Chi parla così è Laplace in un corso dato nel 1795 a futuri «insegnanti», cioè ai futuri professori dei licei (fondati poi in Francia nel 1802 con latino e matematica materie fondamentali[7]). Laplace suggerisce questa volta che una generalizzazione è possibile, almeno per via algebrica, intesa nel senso di manipolazione di oggetti come i numeri negativi, che esigono anche una concezione funzionale, anche con un'invarianza di forma generale.

«Si l'on fait dans ce théorème le second angle négatif, il donne le sinus de la différence de deux angles; si l'on augmente d'un angle droit le premier angle il

6. Cito Pierre Simon de Laplace dal libro che ho curato, *Leçons de mathématiques. Laplace-Lagrange-Monge*, Paris, Dunod, 1992, p. 92. Questa lezione fu svolta il 31 marzo 1795, cioè l'11 Germinale dell'anno III, trascritta e subito stampata. Si trattava allora di trovare nuovi standard per l'insegnamento della matematica, una scienza che sarebbe presto diventata obbligatoria nei licei, mentre prima era opzionale.

7. Vedere Jean Dhombres (a cura di).

donne le cosinus de la somme ou de la différence de deux angles. Ces divers résultats qui se déduisent d'un seul théorème par un changement convenable dans le signe des grandeurs, et qu'il est facile de démontrer de manière directe, sont très propres à faire comprendre la nature et les usages des quantités négatives».[8]

Sarebbe semplicistico concludere che il sopravvento acquisito progressivamente dall'algebra sulla geometria avrebbe indotto l'uso della manipolazione di formule. La loro apparizione tardiva avvenne di fatto nel quadro degli studi sulle funzioni, durati a lungo, già a partire da quelle dette elementari. Questi lavori comportarono anche le riflessioni sul concetto di variabile, idea collegata al valore negativo in Laplace, che è soprattutto lavoro sul segno meno. Non si può quindi sperare di restringere lo studio matematico delle formule alla sola algebra elementare. Sarebbe un errore storico e forse anche epistemologico. Così, testimone delle difficoltà, il solo termine «polinomio» prese molto tempo per stabilirsi. Era poco corrente ancora prima dell'inizio del secolo XIX, eccezion fatta per alcune opere della metà del secolo dei Lumi, sempre riconosciuto come rilevante nell'ambito dell'«alta matematica», con riferimento a Jean d'Alambert o a Leonhard Euler. Nel 1799 il giovane Gauss preferiva parlare di «funzione razionale intera»[9]. Il polinomio a una variabile interviene come oggetto algebrico, somma di monomi di potenze, suscettibili di regole di fattorizzazione come in particolare la divisione euclidea, ma anche come funzione nell'enunciato di un risultato come quello di Michel Rolle, verso il 1690: uno zero si trova necessariamente fra due zeri reali del polinomio. Il caso di polinomi di più variabili coinvolge l'algebra con le sue identità notevoli per le quali la regola dei segni è uno degli elementi, ma parecchie altre cose ancora, fra le quali le relazioni tra coefficienti e radici, proposte da François Viète. Il polinomio a più variabili entra anche nel campo delle funzioni e dei loro grafici, dal momento che quello di secondo grado a due variabili fornisce tutti i casi di coniche, reali o degenerate.

Per lo storico si presenta un triplice problema quando vuole presentare un lungo processo, soprattutto se si preoccupa di essere utile all'insegnamento della matematica. Prima di tutto deve far riconoscere l'invenzione di oggetti funzionali come i polinomi, che possono essere trattati sia come quantità aventi un'«algebra propria», e di conseguenza la fattorizzazione matematica che richiede ben più di una scrittura e quasi un gesto matematico, come vedremo in seguito. Questi polinomi sono ancora suscettibili di variazioni secondo i valori di ciò che non può conservare il nome di «indeterminata» e che si chiamerà «variabile». In secondo luogo, c'è la questione delle notazioni specifiche allo scopo di dare un assetto sistematico a questi oggetti per ridurre al minimo l'aspetto tecnico-mnemonico, anche se la prassi euclidea non ammetteva altro che l'utilizzo di termini usuali del linguaggio comune, con un senso il più possibile vicino a quello usuale. Di conseguenza era impossibile non inventare espressioni tecniche, del tipo «scomposizione in fattori» o il «calcolo delle radici». Sono espressioni per le quali occorre abbandonare ogni speranza di contaminazione secondo il buon senso del vocabolario comune. L'ultimo problema è quello dell'elementarizzazione e

8. Idem.
9. Vedere la traduzione francese della tesi latina di Gauss in Jean Dhombres, Carlos Alvarez, *Une histoire de l'invention mathématique*, Hermann, Paris, 2012.

anche della familiarizzazione con la pratica del calcolo, ed è lì che si inserisce la manipolazione delle formule, utile tanto quanto l'abitudine al ragionamento geometrico.

Questi tre problemi storici toccano praticamente ancora ogni insegnante di matematica. Per quanto può essere condotto a credere evidenti o naturali questi differenti modi e di non vedere che non sono frivole le difficoltà incontrate dai «grandi principianti», come si designavano, ai tempi di Euler, quelli che iniziavano lo studio del calcolo differenziale e integrale, sottintendendo che vi erano anche altri «principianti». Così erano detti quelli che imparavano l'algebra elementare, per i quali la regola dei segni non era affatto intuitiva. Non bastano esercizi e allenamenti di tipo sportivo, perché sotto aspetti diventati anodini si nascondono concetti e quindi una teoria. Si sarà capito perché il termine «funzione» piuttosto usato non è intervenuto nel linguaggio matematico prima della fine del XVII secolo. Esso è dovuto all'immaginazione fertile ed efficace di Leibniz (dal latino *functio*, nel senso di ciò che agisce per prestare un servizio e che rimane presente in francese nel vocabolo «fonctionnaire»[10]). Occorre però aggiungere che il termine «variabile» fece la sua entrata con Newton sotto il nome di «*variabile quantitativa*», che indica anche funzioni. In breve, i due termini associati, variabile e funzione, furono indispensabili al calcolo differenziale e integrale perché si trovavano sia nel pensiero leibniziano, grazie a Johann Bernoulli e al marchese de l'Hôpital (1696), sia in quello di Newton e nel metodo delle flussioni. Storicamente non è dunque utile distinguere i termini «funzione» e «variabile». Ecco che ci si trova in contraddizione con la pratica dell'insegnamento odierno, nel quale si inizia con i «numeri reali», fino alla loro scrittura decimale illimitata, in seguito eventualmente si presentano le «variabili complesse», per poi passare alle funzioni concernenti questi numeri o variabili. Questo paradosso tocca ogni uso ragionato della storia nella pratica di classe. Non voglio dilungarmi su queste cose, ma occorre conservarne la memoria. Vorrei ancora segnalare, e sarà l'ultima volta che esco dal livello elementare, che la formula espressa in precedenza dell'addizione dei seni, la cui dimostrazione «geometrica» richiede un semplice adattamento di una figura già utilizzata da Tolomeo, richiede molto di più se si esige una dimostrazione formale conveniente. Infatti si ha bisogno di una funzione, l'esponenziale complessa, contenuta nella formula di Euler, e trovata anche da d'Alambert poco prima del 1750. Si tratta di un modo astratto, ma corretto, di definire l'angolo come quantità reale. Bisogna conoscere l'uguaglianza

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

che a quel tempo si scriveva nella seguente forma «indecisa»

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos(x) + \sqrt{-1}\,\sin(x)$$

Essa permette di esprimere separatamente le funzioni sin e cos a partire da due esponenziali

$$e^{i(a+b)} = e^{ia}\, e^{ib}$$

che permette di stabilire la formula di addizione dei seni. L'indecisione di allora, devo ricordarlo, consiste nel fatto che la radice di (–1) possiede due valori di segno opposto: la rappresentazione grafica dei complessi non era allora acquisita (sarà

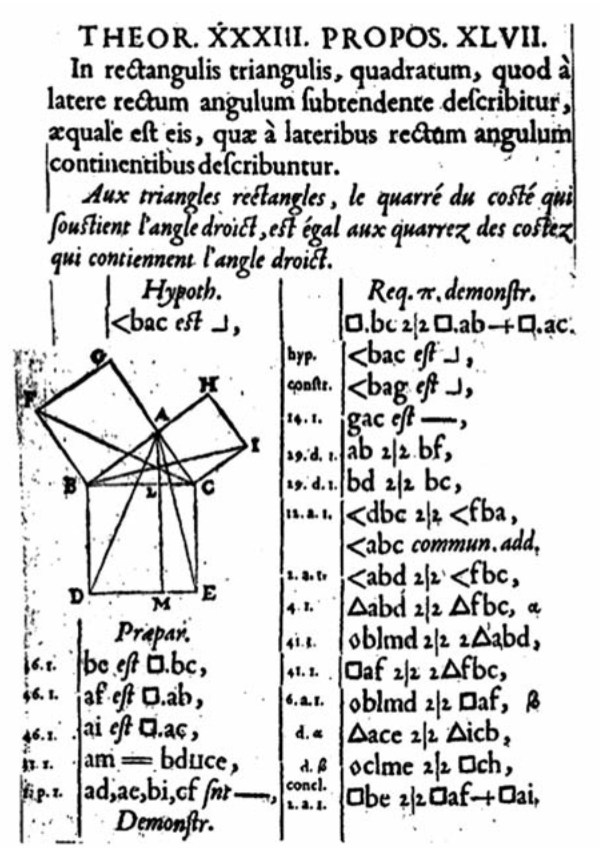
10. (NDT). Anche in italiano nel termine «funzionario».

proposta nel 1806 dallo svizzero Argand). La mia intenzione è tuttavia di richiamare qui come, molto prima del calcolo differenziale, Viète riuscì, a partire dal 1593, a legare formule sugli angoli con l'elevazione a potenza, cioè a manipolare «identità notevoli» di tipo algebrico, legandole a relazioni trigonometriche, cioè ad altre formule, senza però considerare l'esponenziale complessa. Possiamo continuare ad affermare che è possibile fare a meno delle formule, se si vuole rimanere nell'elementare?

Abbiamo capito: le questioni che pongo toccano problemi fondamentali della didattica della matematica, ma i grandi matematici non le hanno sempre evitate. Ciò spinge l'insegnante, anche quello preoccupato solo dell'efficacia, a riprendere elementi di storia relativi ai grandi maestri, qualche volta anche segnalando i loro errori. In fondo c'è opposizione tra il ragionamento detto algebrico, che sembra essere automatico, pur ponendo la questione sempre difficile dei negativi – o più generalmente di ciò che lo limita – e per esempio le restrizioni di validità delle variabili che intervengono nelle formule. Pertanto, il ragionamento geometrico è ritenuto più elegante se nelle dimostrazioni non si basa esclusivamente su formule. Si può anche aggiungere che il ragionamento geometrico «puro» ha il vantaggio di redigere una dimostrazione di natura diversa dalla formula e che presenta in effetti due fasi, delle quali l'algebra viene dopo, come generalizzazione, rimanendo struttura nascosta. Non si tratta in nessun caso di mode didattiche. C'è qualche cosa di più profondo da capire riguardo alla generalità di una formula, visto che in geometria è spesso indispensabile distinguere più casi di figure? Siccome ho deciso di rimanere al livello della matematica liceale, mi appresto a concretizzare il mio scritto considerando tre casi. Da una parte mi occuperò del problema delle notazioni, non necessariamente di quelle algebriche conosciute come le identità notevoli, per far capire, per contrasto, ciò che entra nel pensiero quando si operano certe abbreviazioni: il semplice teorema di Pitagora sarà un bell'esempio. In seguito mi occuperò dell'azione relativa alla fattorizzazione e al calcolo detto algebrico e quindi anche a certe identità notevoli, e in ciò mi guiderà la potenza di un punto rispetto a una circonferenza, senza dilungarmi troppo. Infine, e qui ci vorrà più tempo ma sarà più facile, proverò a catturare il senso dell'algebra come preparatrice all'analisi, partendo dall'antico problema dell'inscrizione di un quadrato in un triangolo.

2. Le notazioni portano pensieri

Inizio con la questione delle notazioni e, invece di redigere una lunga lista, preferisco rileggere una pagina di Pierre Hérigone della sua citata opera bilingue latino-francese. La figura 5 si distingue per la notevole organizzazione su quattro colonne, dopo l'enunciato in due lingue del teorema, del quale si apprezzano l'equilibrio ritmico e la rinuncia alla pesante terminologia dell'ipotenusa e dei cateti: l'area del quadrato BCDE è la somma delle aree dei quadrati BFGA e AHIC. Bisogna però ricorrere a un dizionario per decifrare il segno di uguaglianza, indicato con 2|2, due 2 separati da una barra verticale che assume il ruolo dell'asse di una bilancia, che interviene per la prima volta nella riga che segue *Req. π. demonstr.* nella quarta colonna. Un segno analogo al nostro di uguaglianza, fatto di due trattini paralleli, appare qualche riga più avanti, nello stesso testo, ma significa proprio il parallelismo delle rette AM, BD e CE, ed ecco che d'un tratto ci si può interrogare, leggendo Hérigone oggi, sulle ragioni che hanno portato ad adottare il segno uguale delle parallele, ipotizzando una possibile supremazia della geometria. Euclide non usa alcun segno di uguaglianza, nemmeno quando si occupa delle grandezze come le aree, le lunghezze, le ampiezze, ecc.



THEOR. XXXIII. PROPOS. XLVII.

In rectangulis triangulis, quadratum, quod à latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

Aux triangles rectangles, le quarré du costé qui soustient l'angle droict, est égal aux quarrez des costez qui contiennent l'angle droict.

Hypoth.
<bac *est* ⌋,

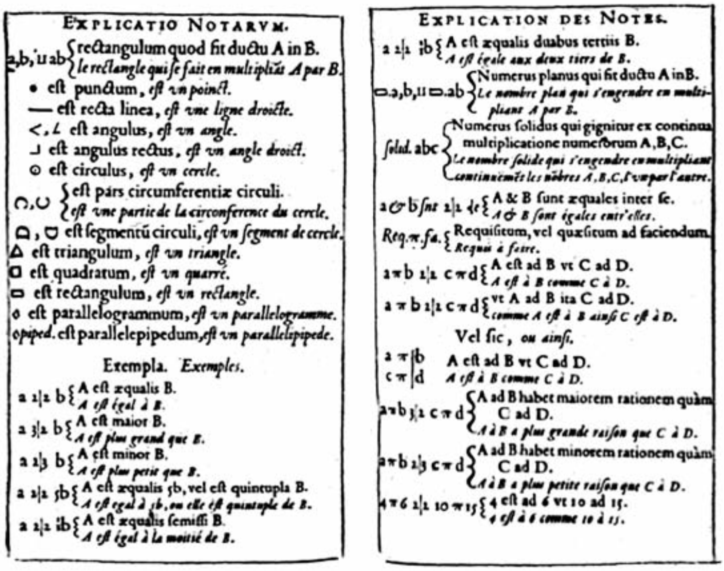
Req. π. *demonstr.*
□.bc 2|2 □.ab + □.ac.

hyp. <bac *est* ⌋,
constr. <bag *est* ⌋,
14.1. gac *est* —,
29.d.1. ab 2|2 bf,
29.d.1. bd 2|2 bc,
11.a.1. <dbc 2|2 <fba,
<abc *commun. add.*
2.a.1. <abd 2|2 <fbc,
4.1. △abd 2|2 △fbc, α
41.1. oblmd 2|2 2△abd,
41.1. □af 2|2 2△fbc,
6.a.1. oblmd 2|2 □af, β
d.α △ace 2|2 △icb,
d.β oclme 2|2 □ch,
concl. 2.a.1. □be 2|2 □af + □ai,

Præpar.
46.1. bc *est* □.bc,
46.1. af *est* □.ab,
46.1. ai *est* □.ac,
31.1. am = bduce,
sip.1. ad, ae, bi, cf *snt* —,
Demonstr.

Figura 5. Il teorema di Pitagora, o proposizione 47 del primo libro degli *Elementi* di Euclide, così come è «scritto» da Pierre Hérigone nel *Cursus mathematicus/Cours mathématique*, pubblicato a Parigi nel 1634. Il tipografo, tenuto conto di ciò che precede per il fatto che un teorema non è isolato ma si inserisce in una teoria, non è riuscito a farci stare tutto su una pagina e, come si può constatare, nella pagina successiva non ha rispettato l'allineamento a sinistra.

Hérigone inventa dunque più di una simbolizzazione: chiama in causa un modo di pensare proponendo l'uguaglianza come relazione che ha le proprietà che oggi riconosciamo col termine relazione di equivalenza (riflessività a=a, simmetria a=b e b=a e transitività a=b e b=c dà a=c). La natura è la stessa di quella del parallelismo, ma Hérigone intende distinguere la relazione di uguaglianza riferita alle misure delle grandezze. Contemporaneamente, Harriot assimilava l'algebra alla geometria e usava un segno di uguaglianza più o meno uguale al nostro. Descartes, tre anni dopo, scriverà ∝, deformazione di æ, per indicare in latino l'uguaglianza, che collocava innegabilmente nell'algebra e nei fondamenti della sua teoria delle equazioni. Notiamo che Descartes abbrevia solamente la scrittura usuale, senza pretendere di introdurre una innegabile novità, mentre Hérigone dà una spiegazione sotto forma di grafema proponendo una notazione destinata a segnalare un nuovo senso per l'utilizzatore. Così Hérigone «nota» la proporzione A sta a B come C sta a D a partire da metà della pagina di destra (figura 7), con l'introduzione della lettera π (per proporzione, senza dubbio) e si constata che non fa affatto ricorso all'algebra come la conosciamo, ma a un gioco che individua precisamente il rapporto nella costruzione della proporzione, senza però sfociare in un'uguaglianza di rapporti.



EXPLICATIO NOTARVM.

a,b, ⊔ ab { rectangulum quod fit ductu A in B. / *le rectangle qui se fait en multipliãt A par B.*

• est punctum, *est un poinct.*

— est recta linea, *est une ligne droicte.*

<, ∠ est angulus, *est un angle.*

⅃ est angulus rectus, *est un angle droict.*

⊙ est circulus, *est un cercle.*

∩, ∪ { est pars circumferentiæ circuli. / *est une partie de la circonference du cercle.*

est segmentũ circuli, *est un segment de cercle.*

△ est triangulum, *est un triangle.*

□ est quadratum, *est un quarré.*

▭ est rectangulum, *est un rectangle.*

▱ est parallelogrammum, *est un parallelogramme.*

▱piped. est parallelepipedum, *est un parallelepipede.*

Exempla. *Exemples.*

a 2|2 b { A est æqualis B. / *A est égal à B.*

a 3|2 b { A est maior B. / *A est plus grand que B.*

a 2|3 b { A est minor B. / *A est plus petit que B.*

a 2|2 5b { A est æqualis 5b, vel est quintupla B. / *A est egal à 5b, ou elle est quintuple de B.*

a 2|2 ½b { A est æqualis semissi B. / *A est égal à la moitié de B.*

EXPLICATION DES NOTES.

a 2|2 ⅔b { A est æqualis duabus tertiis B. / *A est égale aux deux tiers de B.*

▭a,b, ⊔ ▭ab { Numerus planus qui fit ductu A in B. / *Le nombre plan qui s'engendre en multipliant A par B.*

solid. abc { Numerus solidus qui gignitur ex continua multiplicatione numerorum A,B,C. / *Le nombre solide qui s'engendre en multipliant continuemẽt les nõbres A,B,C, l'un par l'autre.*

a & b *sunt* 2|2 *inter se* { A & B sunt æquales inter se. / *A & B sont égales entr'elles.*

Req. π. *fa.* { Requisitum, vel quæsitum ad faciendum. / *Requis à faire.*

a π b 2|2 c π d { A est ad B vt C ad D. / *A est à B comme C à D.*

a π b 2|2 c π d { vt A ad B ita C ad D. / *comme A est à B ainsi C est à D.*

Vel sic, *ou ainsi.*

a π | b — A est ad B vt C ad D.
c π | d — *A est à B comme C à D.*

a π b 3|2 c π d { A ad B habet maiorem rationem quàm C ad D. / *A à B a plus grande raison que C à D.*

a π b 2|3 c π d { A ad B habet minorem rationem quàm C ad D. / *A à B a plus petite raison que C à D.*

4 π 6 2|2 10 π 15 { 4 est ad 6 vt 10 ad 15. / *4 est à 6 comme 10 à 15.*

Figure 6 e 7. Due tavole in pagine successive per la spiegazione delle «Notes» di Pierre Hérigone; il termine è utilizzato nel suo doppio significato di notazione e di abbreviazione.

Si può pertanto argomentare che il disegno della figura 5 non è così chiaro come si è detto, perché non vi sono disegnate le rette FA e DL, che mostrerebbero effettivamente l'uguaglianza dei triangoli BLD e BAD (stessa base DP e stessa altezza BL), l'uguaglianza dei triangoli BAD e BFC (occorre cercare i due lati separati da uno stesso angolo, facendo gioco sullo stesso angolo retto) e poi l'uguaglianza delle aree dei triangoli BLD e BFA. Per finire ancora l'uguaglianza, per raddoppio, delle aree del rettangolo BLMD e del quadrato BFGA. Ciò esige una ripetizione del ragionamento per l'altro «lato», a meno che non si percepisca una simmetria intellettuale. Le due possibilità hanno un fraseggio diverso e Hérigone sceglie un'abbreviazione della seconda situazione. Dicendolo in questo modo, si osserva che la disposizione ordinata delle lettere in una figura non è casuale, ma segue regole precise che variano secondo gli autori e che quindi, in quanto tale, è una scrittura. Così, non si può non osservare una differente scrittura nel testo e nella figura: vi sono lettere maiuscole per indicare i punti nella figura, mentre nel testo appaiono minuscole. È una regola abbastanza generale in questa epoca. La differenza può avere origine nella pratica delle tipografie; può apparire sconveniente o logicamente inaccettabile, ma può soprattutto manifestare un fenomeno di distinzione tra una pratica geometrica e una un'altra, nuova, delle relazioni algebriche basata su lettere, le nostre formule. Hérigone rispetta la regola e la scrittura «be» che interviene nella prima riga della seconda colonna nella frase che prepara la dimostrazione (*Præpar.*) non significa affatto il prodotto di «b» per «e», secondo la pratica delle relazioni algebriche che si imporrà, ma si riferisce ai punti B ed E. Che cosa significa ciò? Nell'ultima riga dell'ultima colonna appare la stessa scrittura «be», ma davanti ad essa si trova il simbolo di un quadrato (□) senza punto, cioè « □ be ». Ma in altre righe si vede anche un punto dopo il quadrato seguito da «bc» invece che da «be»: « □.bc ». In questo simbolismo le lettere non sono dunque intercambiabili e la figura aiuta a distinguere. Il simbolismo con il punto non può essere anodino: indica la funzione che dà il quadrato in senso algebrico della lunghezza BC. Ecco un inizio molto chiaro che sarà seguito da tutte le funzioni perché si noterà «sin.x» per indicare il valore della funzione seno in x.

Ogni scrittura ha i suoi limiti d'interpretazione e normalmente un dizionario deve fornirne il senso, che dev'essere dato con il testo. L'introduzione di liste di segni esplicative è una novità dei testi di matematica nei confronti dei manoscritti e precede anche persino le legende delle carte geografiche. Pierre Hérigone è assai meticoloso e redige numerose pagine esplicative. Se da una parte si trova effettivamente il quadrato in questo dizionario (figure 6 e 7), non lo si vede però seguito da un punto, mentre che il rettangolo è seguito dal punto con anche una diversa disposizione delle due lettere, che sono separate da virgole. Queste lettere indicano in questo caso dei numeri e non sono riferite a punti della figura geometrica, come nel «be» appena visto.

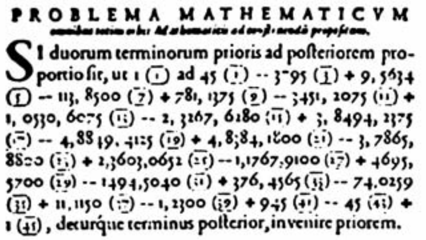
Non è questa mancata spiegazione della notazione del quadrato seguito o no da un punto che rende disagevole la scrittura di Hérigone; la difficoltà di lettura proviene dal fatto che ogni riga del testo, nel senso materiale di una famiglia di parole in una stessa colonna, comprende una frase completa; è una tappa della dimostrazione, rintracciabile come unità. Questa spazializzazione logica, che si può descrivere come successione ordinata di atomi orizzontali di scrittura, o anche di abbreviazioni stenografiche di una frase completa, è una costrizione straordinaria. Essa implica che tutte le idee matematiche devono poter essere scomposte in unità equivalenti. La disposizione in righe separate da colonne – quattro nel nostro caso – è dunque una disposizione molto organizzata; è essa stessa una forma di spazializzazione della scrittura matematica e si può parlare precisamente di un dispositivo[11].

3. L'azione legata alla fattorizzazione

Il problema rappresentato nella figura 8 è indirizzato «ai matematici del mondo intero», così si legge nel libro di Adrien Romain del 1593, trascritto in seguito da François Viète che ne diede la soluzione due anni più tardi. Non voglio entrare nel dettaglio del problema, ma voglio concentrare l'attenzione su come si scriveva all'epoca un «polinomio» a coefficienti numerici, qui di grado 45. Questo numero lo si può leggere nell'ultima riga, in una sorta di capsula. Si tratta –solamente, diremmo oggi – di esprimere il valore di sin(45x) in potenze di sin(x) e di uguagliarlo a un seno prefissato.

11. Non sono sicuro che si guadagni altro, se non un effetto di moda, qualificandolo di «dispositivo retorico». Al contrario, riguardo al termine «dispositivo», mi sembra utile beneficiare dell'allusione velata alla disposizione spaziale e di dargli un significato di modo di lettura, lontanissimo sia dal genere pubblicitario sia dalla cianfrusaglia come anche dallo stile raffinato.

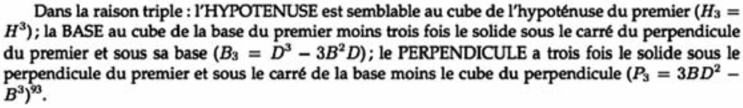
Non sembra evidente fare algebra su una tale formulazione. Ma Viète riesce nell'essenziale, dimostra cioè che non vi è – come Romain si poteva aspettare – una sola soluzione, ma più soluzioni. Dopo la morte di Viète, si pubblicò nel 1615 uno dei suoi testi sul calcolo di angoli multipli e del quale mi accontento di dare la tavola e una scrittura appena anteriore, senza formula, mentre le formule tra parentesi le ho messe io *ad hoc*.



PROBLEMA MATHEMATICVM
omnibus totius orbis Mathematicis ad construendum propositum.

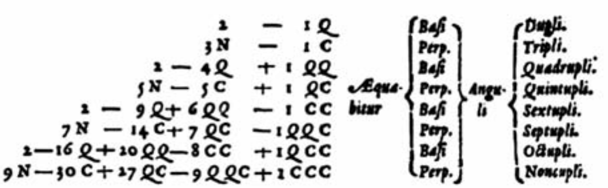
Si duorum terminorum prioris ad posteriorem proportio sit, ut 1 (1) ad 45 (1) − 3795 (3) + 9,5634 (5) − 113,8500 (7) + 781,1375 (9) − 3451,2075 (11) + 1,0530,6075 (13) − 2,3267,6180 (15) + 3,8494,2375 (17) − 4,8849,4125 (19) + 4,8384,1800 (21) − 3,7865,8800 (23) + 2,3603,0652 (25) − 1,1767,9100 (27) + 4695,5700 (29) − 1494,5040 (31) + 376,4565 (33) − 74,0259 (35) + 11,1150 (37) − 1,2300 (39) + 945 (41) − 45 (43) + 1 (45), deturque terminus posterior, invenire priorem.

Figura 8. Il problema di Adrien Romain in *Ideae mathematicae* del 1593.



Dans la raison triple : l'HYPOTENUSE est semblable au cube de l'hypoténuse du premier ($H_3 = H^3$); la BASE au cube de la base du premier moins trois fois le solide sous le carré du perpendicule du premier et sous sa base ($B_3 = D^3 - 3B^2D$); le PERPENDICULE a trois fois le solide sous le perpendicule du premier et sous le carré de la base moins le cube du perpendicule ($P_3 = 3BD^2 - B^3$)[93].

Figura 9. La scrittura polinomiale in linguaggio comune di Viète nel 1615 (le formule tra parentesi sono aggiunte dall'autore).



2 — 1 Q	Æquabitur	Basi	Anguli	Dupli.
3 N — 1 C		Perp.		Tripli.
2 — 4 Q + 1 QQ		Basi		Quadrupli.
5 N — 5 C + 1 QC		Perp.		Quintupli.
2 — 9 Q + 6 QQ — 1 CC		Basi		Sextupli.
7 N — 14 C + 7 QC — 1 QQC		Perp.		Septupli.
2 — 16 Q + 20 QQ — 8 CC + 1 QCC		Basi		Octupli.
9 N — 30 C + 27 QC — 9 QQC + 1 CCC		Perp.		Noncupli.

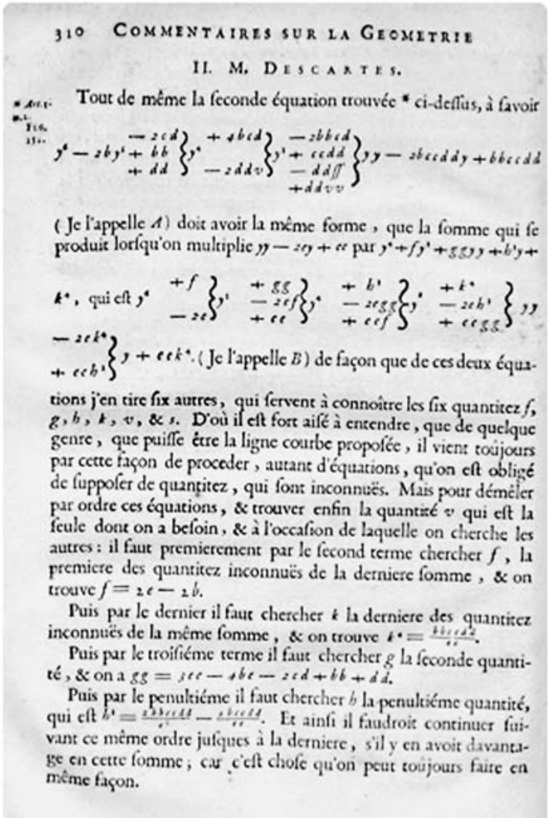
Figura 10. La scrittura in simboli di polinomi usata da Viète in un testo pubblicato nel 1615.

Non è mia intenzione spiegare nei dettagli queste formulazioni, mi limito a far notare le difficoltà che si incontrarono nel trovare una scrittura *ad hoc*; voglio soprattutto fare un confronto con il testo (figura 11) della *Géometrie* di Descartes del 1637. Nelle prime righe del testo, si vede come un polinomio di grado 6 in y (che però Descartes chiama equazione) è uguale a un prodotto di un polinomio di grado 2 (che è notato con «yy–2cy+cc», in realtà il quadrato di un binomio) per un polinomio di grado 4.

Trovo interessante in particolare il gioco della testa che va da destra a sinistra e reciprocamente, al fine di ottenere al massimo tre termini per coefficienti, sistemati in colonne. Ecco l'azione propria alla fattorizzazione e a tutto quanto attiene al calcolo algebrico elementare. Propongo di seguito la lettura di una dimostrazione di tipo algebrico relativa alla potenza di un punto rispetto a una circonferenza, servendomi solo del terzo disegno (indicato 3) della figura 1 (o 2), del testo di Pierre Hérigone. Perché si tratta di calcolare il prodotto «EC·ED» con E punto all'interno di un cerchio di centro F, C e D punti sulla circonferenza e O punto medio di CD, o anche proiezione ortogonale del centro F su CD, e si può ottenere un calcolo con un'identità notevole. Cioè EC e ED si possono mettere sotto forma di una somma e di una differenza, utilizzando l'uguaglianza di OD con OC che dà «EC = OC–OE» e «EO=OC+OE».

Di conseguenza, $EC \cdot CD = FC^2 - OF^2 - OE^2 = FC^2 - (OF^2 + OE^2)$

Utilizzando ancora il teorema di Pitagora si ottiene $EC \cdot CD = FC^2 - FE^2$. Il risultato non dipende più dalla retta CD, ma solamente dal punto E e dal raggio della circonferenza. Questa è l'uguaglianza dei «rettangoli» del testo di Hérigone, con in più il valore del prodotto come differenza del quadrato del raggio e del quadrato della distanza dal centro della circonferenza dal punto E. La dimostrazione usuale mediante la similitudine dei triangoli non dà questo valore. Inoltre si può notare che il gioco di differenza e di somma non coinvolge apparentemente né la figura né la posizione del punto O, medio di CD rispetto a E.


310 COMMENTAIRES SUR LA GEOMETRIE

II. M. DESCARTES.

Tout de même la seconde équation trouvée * ci-dessus, à savoir

$$y^6 - 2by^5 + \left.\begin{matrix}-2cd\\+bb\\+dd\end{matrix}\right\}y^4 \left.\begin{matrix}+4bcd\\-2ddv\end{matrix}\right\}y^3 \left.\begin{matrix}-2bbcd\\+ccdd\\-ddff\\+ddvv\end{matrix}\right\}yy - 2bccddy + bbccdd$$

(Je l'appelle A) doit avoir la même forme, que la somme qui se produit lorsqu'on multiplie $yy - 2ey + ee$ par $y^4 + fy^3 + ggyy + h^3y + k^4$, qui est

$$y^6 \left.\begin{matrix}+f\\-2e\end{matrix}\right\}y^5 \left.\begin{matrix}+gg\\-2ef\\+ee\end{matrix}\right\}y^4 \left.\begin{matrix}+h^3\\-2egg\\+eef\end{matrix}\right\}y^3 \left.\begin{matrix}+k^4\\-2eh^3\\+eegg\end{matrix}\right\}yy \left.\begin{matrix}-2ek^4\\+eeh^3\end{matrix}\right\}y + eek^4.$$

(Je l'appelle B) de façon que de ces deux équations j'en tire six autres, qui servent à connoître les six quantitez f, g, h, k, v, & s. D'où il est fort aisé à entendre, que de quelque genre, que puisse être la ligne courbe proposée, il vient toujours par cette façon de proceder, autant d'équations, qu'on est obligé de supposer de quantitez, qui sont inconnuës. Mais pour démêler par ordre ces équations, & trouver enfin la quantité v qui est la seule dont on a besoin, & à l'occasion de laquelle on cherche les autres: il faut premierement par le second terme chercher f, la premiere des quantitez inconnuës de la derniere somme, & on trouve $f = 2e - 2b$.

Puis par le dernier il faut chercher k la derniere des quantitez inconnuës de la même somme, & on trouve $k^4 = \frac{bbccdd}{ee}$.

Puis par le troisiéme terme il faut chercher g la seconde quantité, & on a $gg = 3ee - 4be - 2cd + bb + dd$.

Puis par le penultiéme il faut chercher h la penultiéme quantité, qui est $h^3 = \frac{2bbccdd}{e^3} - \frac{2bccdd}{ee}$. Et ainsi il faudroit continuer suivant ce même ordre jusques à la derniere, s'il y en avoit davantage en cette somme; car c'est chose qu'on peut toujours faire en même façon.

Figura 11. Una pagina della *Géometrie* di Descartes nella quale l'autore indica un metodo per determinare una radice doppia di un polinomio, che gli è utile per determinare la normale a una curva.

In un'altra opera, Stevin riprende un'equazione, questa volta di terzo grado, e usa il polinomio come funzione: in effetti egli confronta con l'unità il rapporto $R(x)$, tuttavia non scritto così, con quello tra «x^3» e «300 x + 33'915'024». Usa la scrittura decimale per approssimare il valore cercato. Esiste un intero n più grande tale che si abbia simultaneamente $R(10^n) \le R(10^{n+1})$ e $R(10^{n+1}) > 1$. Con n=2 il valore di R per n=3 è maggiore di 1. Egli lavora anche con i multipli di 100, cercando il più grande intero tra 1 e 9 tale che $R(100\,a) \le 1$ e $R(100\,(a+1)) > 1$, e così via. Prosegue con i «numeri decimali», ottenendo 323, poi con il valore della cifra dei decimi, ecc. Questa volta il polinomio è una vera funzione e x una vera variabile.

4. L'algebra come veicolo verso l'analisi

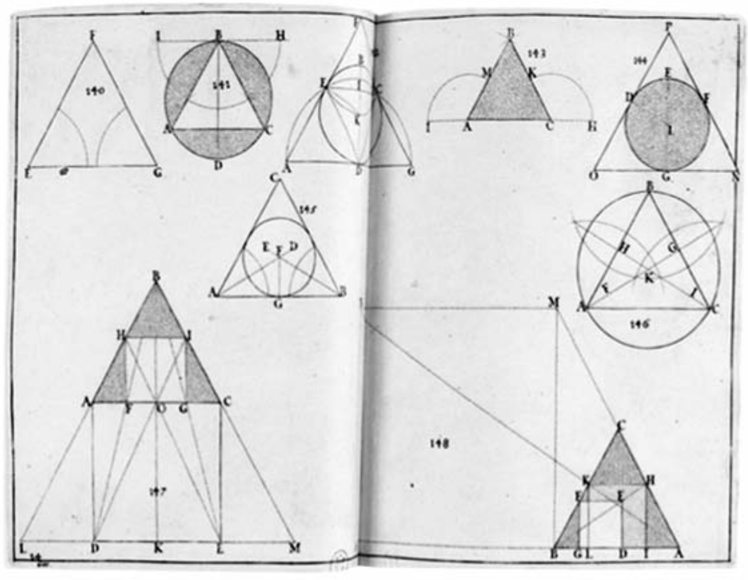


Figura 12. Tavola XV dei disegni di Samuel Marolois, nell'edizione curata da Albert Girard nel 1651 del *Traité et practique de Géométrie et premièrement de l'usage du compas*.

Il problema di inscrivere un quadrato in un triangolo è considerato dall'autore appartenente a una geometria qualificata comepratica, anche se il testo porta il titolo di trattato. Comunque i contenuti tecnici lo giustificano. Il matematico professionista Samuel Marolois – l'aggettivo «professionista» sta solo a indicare che non si tratta di un universitario – verrà «corretto» nel 1628 da un altro professionista, Albert Girard. Questi fu il traduttore e commentatore in francese di Simon Stevin. I due autori non dicono nulla sulle origini del problema, ciò che non significa affatto che non le conoscevano. È certo che un semplice sguardo ai due disegni situati in basso (figura 12) fa capire che la situazione sfruttata è quella della similitudine. Se ci si concentra sull'aspetto essenziale di due triangoli aventi due lati paralleli, detto forma di Talete, si vede ancor di più. La costruzione nel disegno 147 del quadrato cercato FGIJ nel triangolo ABC si ottiene per similitudine dal quadrato ACDE, con centro di similitudine O. Analogamente, nel secondo disegno, il quadrato che contiene il numero 148, le cui lettere non sono tutte leggibili a causa della piegatura del libro e il quadrato GDEF. La prima similitudine è un'omotetia (di centro O, punto medio di AC) seguita da una rotazione di un angolo piatto attorno allo stesso centro[12] (simmetria di centro O), ma per i due casi del secondo disegno sono due semplici omotetie. Chi avrebbe mai pensato, se non avesse svolto l'esercizio, che questa dimostrazione può generare una formula interessante? Se si indica con h (=BD) l'altezza uscita da B del triangolo ABC (disegno 147 della figura 12) e con b la lunghezza della base AC di questo triangolo, si può trovare la lunghezza del lato HI del quadrato, indicata con x, in questo modo:

$$(1)\quad x = \frac{h\,b}{h + b}$$

12. Non posso considerare, per questi geometri, un'omotetia di rapporto negativo.

Questa espressione si ricava immediatamente, non dalla similitudine geometrica che è servita per la costruzione, ma da due similitudini di centri distinti, in altre parole da due configurazioni diverse di Talete. Dalla similitudine dei triangoli BHJ e BAC si ha

$$\frac{x}{b}=\frac{HB}{AB}$$

e da quella dei triangoli ABF e ABD

$$\frac{x}{h}=\frac{AH}{AB}$$

Sommando otteniamo

$$\frac{x}{b}+\frac{x}{h}=\frac{HB}{AB}+\frac{AH}{AB}=\frac{AH+HB}{AB}=1$$

ciò che permette di ottenere la formula (1) a partire da

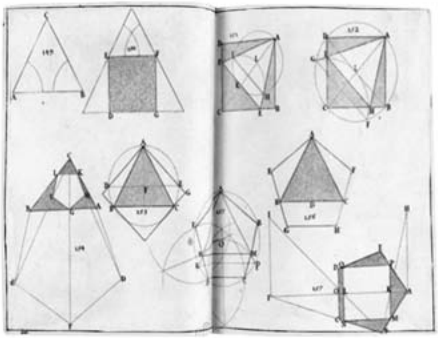
$$\frac{1}{\frac{1}{h}+\frac{1}{b}}=\frac{h\,b}{h+b}$$

Come nel caso della potenza di un punto rispetto a una circonferenza, non ho cercato di nascondere i calcoli.

La formula (1) indica in particolare i ruoli simmetrici di h e b, ma suggerisce anche una costruzione, partendo dall'osservazione che 2x è la media armonica di b e b: basta riportare, partendo da C e sul prolungamento di AC, una lunghezza CZ=h, per ottenere il punto H come intersezione di AB con una parallela a ZB.

A questo punto non si è forse tentati di dubitare della validità della formula (1)? Non potrebbe dipendere dalla particolarità della figura adottata, mentre una tale restrizione non appare nella formula? Perché le due figure utilizzate, la 147 e la 148, propongono il caso di un triangolo equilatero, proprietà però non sfruttata dalla costruzione che può essere quindi eseguita anche su un triangolo più generale a condizione che si possa appoggiare un quadrato sul lato AC. Ma questo triangolo non del tutto generico e questo vecchio problema perde di senso, nonostante la formula, nel caso di un triangolo con un angolo ottuso adiacente al lato sul quale si traccia il lato del quadrato cercato. La formula rimane valida, ma viene perso il senso di «quadrato inscritto», cioè «all'interno». Mi stupisce di non trovare alcuna osservazione in merito nell'iconografia matematica generale.

La generalità della formula (1) non è giustificata. Analizziamo ora meglio la dimostrazione relativa al secondo disegno, il 148. I quadrati ausiliari che vi sono tracciati sono scelti arbitrariamente, mentre il quadrato del primo disegno è determinato dal triangolo di partenza, perché costruito su AC e rischia quindi di essere contaminato dalla sua particolarità di equilatero. La libera scelta del quadrato di partenza del secondo disegno è una garanzia che la dimostrazione figurata è veramente fatta per composizione o sintetica, come si diceva ancora. Quindi senza la necessità di supporre in partenza il problema risolto e di procedere per analisi. La similitudine fa leva su una proprietà di conservazione: un quadrato è trasformato in un altro quadrato e la conservazione di un «interno» o di un'inscrizione del quadrato nel triangolo si vede altrettanto bene se si suppone che gli angoli alla base non siano ottusi. La similitudine come trasformazione geometrica permette di evitare l'analisi, la quale esige di supporre il problema risolto. Nel primo disegno, facilitato dal fatto che il triangolo è equilatero, la similitudine potrebbe ridursi a quella, diciamo classica, dei soli triangoli HFO e ECO. Nel secondo disegno la similitudine si vede nel senso di una trasformazione geometrica che è un'omotetia di centro E che produce, a partire dal quadrato EGDI il quadrilatero necessariamente quadrato KLIH. Il secondo disegno, e dovrei dire la seconda dimostrazione figurata, è un contributo di Girard al primo disegno fatto da Marolois[13]: Girard si spiega (vedere figura 14). Ciò spiega sufficientemente che il problema era posto per suscitare la riflessione e eventualmente per avanzare una critica sulla natura delle dimostrazioni fornite.



147.

Dans un triangle ABCD d'escrire un quarré.

SOit fait un quarré sur l'un des costez AC & menées BDBE, on aura les poincts F, G pour le costé du quarré requis & ainsi du bien.

Autrement 148.

APres avoir fait un quarré FEDG, qui ait un costé sur le costé du triangle, & qui de l'angle F touche un autre costé, iceluy quarré soit grand ou petit c'est tout un, puis menée BE coupant un costé en H, ce sera un poinct pour l'angle du quarré requis: autrement faisant le quarré dehors c'est tout un, moyennant qu'il aye ces deux conditions susdites, assavoir d'estre sur un costé, & de toucher de son angle un costé prolongé AC.

ALB. GIRARD.

MAis si on requeroit de faire un quarré sur l'un des costez, & le plus grand qu'il est possible on pourroit douter, sur quel costé on le feroit (comme sur AC figure 147. au long de la perpendiculaire, BO,) à cela je diray ceste regle, que c'est sur un telle base, laquelle avec sa perpendiculaire, tant par composition que par difference, constitue le moins. On pourroit dire autrement, que des trois costez & leurs trois perpend. ayant separé les trois plus grandes lignes des six, on choisira la moindre, ou bien on prendra la majeure des trois moindres, tout revient à un, qui est la determination du majeur quarré, & pour avoir le moindre on dira le contraire, finalement pour le moyen, le moyen: ce qui servira aussi en la suyvante, pris comme il faut.

Figure 13 e 14. Tavola di disegni di Albert Girard a partire da quella di Samuel Marolois, in un'edizione postuma del 1651 del *Traité, et practique de Géometrie, et premièrement de l'usage du compas*. Spiegazione della figura 147 di Samuel Marolois e della figura 148 di Albert Girard nel *Traité*.

Se ci si può forse trovare a disagio con il prolungamento delle rette DF e EG fino al vertice B, quest'ultimo non visualizzerebbe meglio la similitudine. L'aspetto anacronistico della mia presentazione precedente è forse imbarazzante? Lo è nella misura in cui molti storici pretendono che occorra attendere fino al XIX secolo, se non addirittura Felix Klein e la fine di quest'ultimo secolo, per concepire trasformazioni geometriche operanti nello spazio, e dunque su intere figure, conservando certe proprietà. Oggi sono diventate familiari. Continuo a pensare che il metodo di Girard, che completa quello di Marolois, è sufficiente per dimostrare che è inconsistente una riduzione di questi disegni alla semplice casualità e che non possono essere visti

13. Il trattato di Marolois appare con le sue *Opera mathematica ou Œuvres complètes*, con disegni di Vredemann de Vriese («Opera mathematica», o «Oeuvres mathématiques», che trattano di geometria prospettica, architettura e fortificazioni, alle quali si aggiungono i fondamenti della prospettiva e dell'architettura di Vredemann de Vriese, completati e corretti dallo stesso autore, Hagae-Comitis: ex. off. H. Hondii, In-fol. oblong, pl. et front. gr., 1615-16); Girard lo riprende negli anni 1628-29. (*Oeuvres mathématiques de Samuel Marolois, traitant de la géométrie et fortification, réduites en meilleur ordre et corrigées d'un nombre infini de fautes écoulées aux impressions précédentes*: la geometria curata da Théodore Verbeeck,... e le fortificazioni da François Van Schoten,... , Amsterdam: G. J. Caesius, 1628, 2 parti in 1 vol. in-4° , fig. et pl.). una seconda edizione del trattato è apparsa nel 1651: «*Opera mathematica*», o «*Oeuvres mathématiques traictans de géométrie, perspective, architecture et fortification*», curata da Samuel Marolois, di nuovo rivista, completata e corretta da Albert Girard, Amsterdam: J. Janssen, 1651, 2 vol. in-fol., pl. et frontisp. gr.

con facileneria, ma come suggeritori della semantica di una dimostrazione. In seguito mostrerò una dimostrazione ben più antica di questa similitudine di quadrati.

In ogni caso, questo uso della similitudine non concede alla formula (1) solo il ruolo di complemento, che del resto Malorois non gli affida. Completamente diversa è l'attitudine di un altro matematico, colui che diede il nome all'algebra. Infatti in *kitābu 'l-mukhtaṣar fī ḥisābi 'l-jabr wa'l-muqābalah* (Compendio di calcolo per la restaurazione e il confronto), colui che chiamerò semplicemente al-Khawarizmi si era servito a titolo metodologico del problema del quadrato inscritto nel triangolo. Più precisamente usa una notazione algebrica e indica una via che conduce alla formula (1). In al-Khawarizmi la risoluzione consiste nel distinguere la «cosa», o lato del quadrato inscritto cercato, dal quadrato stesso (*mal*). Forzatamente, tenendo conto della messa in algebra, il problema doveva supporsi risolto e se il metodo algebrico dell'analisi consiste in un calcolo di aree che costringe a far intervenire il quadrato della «cosa», l'obiettivo è l'ottenimento di un'equazione. Il risultato sorprendente e imprevedibile è che il quadrato scompare nei calcoli algebrici eseguiti. Quando si esprime effettivamente come equazione da risolvere l'uguaglianza tra l'area del triangolo grande e la somma delle aree dei tre triangoli e del quadrato, l'area del triangolo superiore toglie un termine che è la metà del quadrato e analogamente lo fa la somma delle aree dei due triangoli inferiori. Ciò compensa il termine x^2 proveniente dal quadrato geometrico. Tornerò su questo calcolo che nasconde un'organizzazione precisa nella quale agiscono le regole del calcolo algebrico, come nella fattorizzazione. In ogni modo, nei nostri tempi moderni, non abbiamo altro che un'equazione lineare da risolvere secondo (1), nella quale h indica l'altezza e b la lunghezza della base relativa del triangolo considerato.

Il rispetto della teoria delle proporzioni richiede certamente altre formulazioni, per esempio quella di indicare x come quarto proporzionale di h, (h+b) e b, o anche di b, (h+b) e h. Ma, raccontate così, appaiono come altrettante formule di tipo algebrico, soltanto scritte come proporzioni al posto di equazioni di tipo polinomiale.

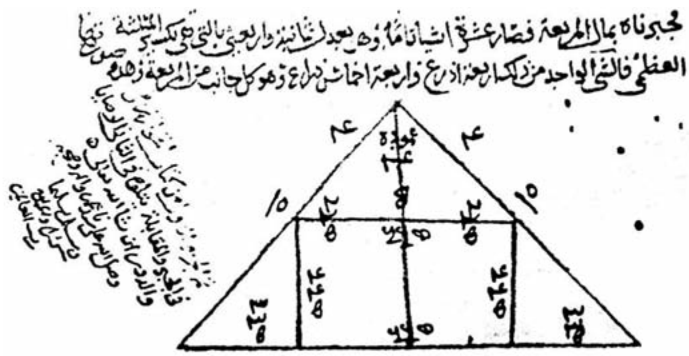


Figura 15. Testo arabo di al-Khawarizmi nell'edizione moderna data da Rashed (2007. *Le commencement de l'algèbre*. Paris: Les Belles-Lettres) e figura estratta da un manoscritto copiato nel 1672 (Ms Sanaa, Dar al-Makhtutat, fol. 22a) datomi da Ahmed Djebbar.

Torno come promesso sul calcolo appena effettuato. Se l'area del triangolo superiore è evidentemente $\frac{1}{2}x(h-x)$, per la somma delle aree dei due triangoli inferiori è utile far intervenire due altre incognite y e z, legate dalla relazione x+y+z=b e verificare come scrivo di seguito, ma come farebbe ogni principiante in algebra.

$$\frac{x}{2}\left(b-(x+z)\right)+\frac{x}{2}\left(b-(x+y)\right)=\frac{x}{2}\left(2\,b-(x+z)-(x+y)\right)=$$

$$=\frac{x}{2}\left(2\,b-2\,x-(z+y)\right)=\frac{x}{2}\left(2\,(b-x)-(b-x)\right)=\frac{x}{2}\,(b-x)$$

Si vede allora molto bene la semplificazione operata:

$$\frac{x}{2}(b-h)+\frac{x}{2}(b-x)+x^2=\frac{1}{2}\,b\,h$$

cioè: $x\,h + x\,b = b\,h$

Se si constata che usando il teorema di Pitagora il metodo di al-Khawarizmi si basa sull'applicazione delle aree, un metodo di origini ben più anteriori rispetto a Euclide, non possiamo che riconoscere alla scrittura algebrica il vantaggio di mostrare la sparizione del termine quadrato e forse anche di renderla prevedibile. Non è che la presenza di un termine quadrato rappresenti *a priori* un ostacolo al calcolo propriamente algebrico, ma all'occorrenza la sua sparizione è un mezzo pedagogico. Un commentatore come Roshdi Rashed insiste giustamente sul fatto che al-Khawarizmi usa l'algebra nel senso preciso del suo programma di giungere a un'equazione: egli inaugura il genere algebro-geometrico e l'esempio del quadrato inscritto lo mette in evidenza. Non è affatto necessario sforzarsi di voler affermare che al-Khawarizmi non poteva aver letto dimostrazioni che si trovano in *Geometrica*, opera attribuita a Erone di Alessandria, che fu tradotta in arabo proprio in quell'epoca. Perché questa eventuale lettura avrebbe messo in risalto ancor più la forza algebrica rivoluzionaria del matematico arabo: egli trasforma in un calcolo diretto la via dell'analisi stessa, indispensabile sia per identificare x o il segmento DE. Mi pare dunque ben più interessante dire che il metodo di al-Khawarizmi porta qualcosa di nuovo alla conduzione della dimostrazione. E questo qualcosa è in particolare leggibile nella formula.

Dobbiamo attribuire ancor di più alla formula? Fu Descartes, nel 1637, a insegnarci a prevedere sistematicamente la riduzione di un'equazione, e anche che appare anormale risolvere con un termine quadrato ciò che non supera il primo grado rispetto all'incognita x. Con Descartes l'algebra non è più il semplice ottenimento di un'equazione, ma un gioco su una struttura, quella dell'algebra polinomiale, della quale abbiamo visto una piccolissima parte di calcolo. C'è in più il metodo dei coefficienti indeterminati, nascosto dietro l'esempio che ho utilizzato nella *Géométrie* di Descartes. Si può indovinare che, in una tradizione cartesiana, relativamente al problema dell'inscrizione di un quadrato in un triangolo, si sia abbandonato il metodo di applicazione delle aree per passare a un metodo epistemologicamente più adatto. Sarebbe quello di Erone di Alessandria? Perché no, ma, anche in questo caso, nulla permetterebbe di considerarlo un «ritorno» all'antica come reazione. Perché la formula significa al massimo una dipendenza funzionale di tipo omografico nelle variabili b e h.

Il problema aveva trovato posto in un libro molto diffuso nel Rinascimento, l'opera *Geometrica* di Erone di Alessandria, un autore del I secolo della nostra era, che commenta in modo elementare Euclide cercando di estrarre tutto ciò che dava senso diretto alla geometria[14]. È vero che un'altra opera di questo autore, *Metrica*, nella

14. Il problema è trattato in *Heronis geometrica*, secondo la versione data da J.L. Heiberg, *Heronis Alexandrini Opera*, Bibliotheca Teubneriana, Leipzig, 1912, tomo IV, a partire dalla pagina 254.

quale si trova la celebre formula dell'area del triangolo a partire dal perimetro e dalle lunghezze dei lati, è stata riscoperta solo alla fine del XIX secolo. Ecco di seguito un estratto da *Geometrica*, così come ci è pervenuto.

«Sia dato un triangolo isoscele la cui base è 12 tese e l'altezza 8 tese, quindi l'area è 48 tese quadrate: trovare l'area di un quadrato inscritto all'interno del triangolo.»

Figura 16. Problema del quadrato inscritto nel triangolo, in Geometrica di Erone di Alessandria, nell'edizione moderna di J.L. Heiberg (volume 4, pp. 254 et 255).

La ricetta data («fai così») individualizza altezza e base, anche se vi sono associati numeri interi, e non si fa menzione, nelle spiegazioni annesse, al carattere indiscutibilmente isoscele del triangolo disegnato. Siamo lontani da una formula? No, all'inizio, ma subito nei calcoli non si riconosce più il ruolo rispettivo di altezza e base.

«Aggiungi base e altezza del triangolo, cioè 12 e 8. Ciò dà 20. Poi moltiplica la base per l'altezza, cioè 12 per 8. Ciò dà 96. Dividilo per la somma , cioè per 20. Ciò da 4½ 1/5 1/10, cioè 4 4/5»

Il testo di Erone non fornisce alcuna giustificazione. Si può darne una, strettamente nella teoria delle proporzioni. Ma non lo farò con la scrittura delle frazioni, che la renderebbe più leggibile per noi. Perché farebbe scomparire ciò che è un riflesso automatico, dato da una semantica, che rimpiazzò vantaggiosamente un'altra semantica, quella dell'algebra di al-Khawarizmi. A partire dalle notazioni della figura, si ha per similitudine di due triangoli, AH sta a AK come DE sta a BC. Dunque, secondo una nota regola di calcolo, AK–AH=HK sta a AK come BC–DE sta a BC. Ora HK=DE per ipotesi sul quadrato supposto esistente. Dunque BC–DE sta a BC come DE sta a AK. Sommando numeratore e denominatore (non vi è un nome ufficiale per questa operazione), DE sta a AK come BC–DE+DE=BC sta a AL+BC. Infine la lunghezza DE cercata del lato del quadrato inscritto sta all'altezza come la base (BC) sta alla somma dell'altezza e della base. È la formula (1).

Sembra normale qualificare ciò che manca alla formulazione pre-algebrica di Erone: nelle manipolazioni delle proporzioni che si sono fatte è impossibile prevedere come si arriverà a determinare il valore di DE cercato. L'algebra in gioco di al-Khawarizmi è quella che vuole stabilire equazioni, ben differente, come già detto, dall'algebra di Descartes che si centra sulla struttura polinomiale e dalla formulazione di Erone. Diventa allora appassionante per i miei scopi guardare due pagine del manoscritto di Ibn Yunus, perché questo autore commenta diversi predecessori su questo stesso problema e presenta effettivamente diverse vie risolutive, fra le quali esplicitamente per similitudine, come si vede nel piccolo quadrato contenuto nel triangolo (figura 17). Questo percorso critico corrisponde a quello effettuato da Marolois, ma se sorprende che l'autore non menziona il trattamento algebrico di al-Khawarizmi, il fatto è comprensibile come ripresa innovativa del metodo delle proporzioni con la similitudine.

Figura 17. Due pagine estratte da un manoscritto di Ibn Yunus, un autore deceduto nel 1242 (Ms Bibliothèque Mashhad, Astan Quds, n° 5357, ff. 44a et 44b, che mi sono stati comunicati da Ahmed Djebbar).

In questi disegni arabi, il triangolo è isoscele. Ma la simmetria di b e h diventa evidente se il triangolo scelto è rettangolo. Questa del triangolo rettangolo interviene come figura base nel libro classico cinese *Nove capitoli sui procedimenti matematici*. Ma se gli esempi sono dati in forma aritmetica, si scopre che il metodo utilizzato è quello delle aree, analogo a quello di al-Khawarizmi e non quello delle proporzioni. Non vi sono spiegazioni algebriche, anche se la stessa via seguita consiste nel supporre il problema risolto.

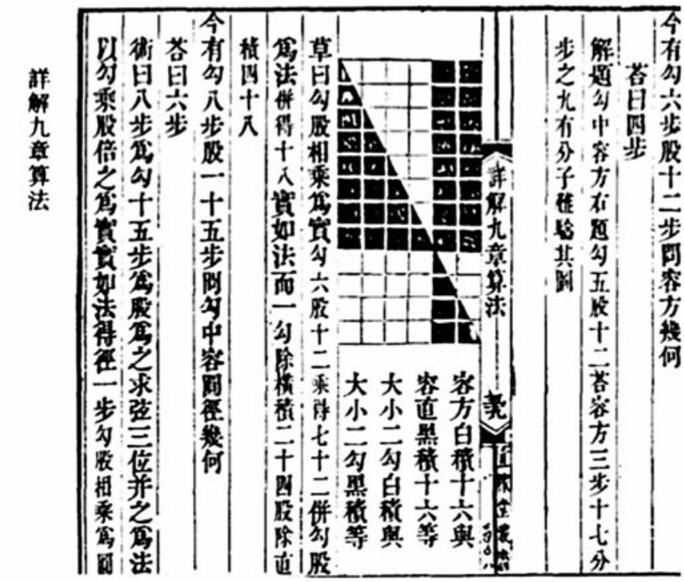

今有勾六步股十二步問容方幾何
荅曰四步
解題勾中容方有題勾五股十二荅容方三步十七分
步之九有分子難驗其圖
詳解九章算法
容方白積十六與
容直黑積十六等
大小二勾白積與
大小二勾黑積等
草曰勾股相乘爲實勾六股十二乘得七十二併勾股
爲法併得十八實如法而一勾除橫積二十四股除直
積四十八
今有勾八步股一十五步問勾中容圓徑幾何
荅曰六步
術曰八步爲勾十五步爲股爲之求弦三位并之爲法
以勾乘股倍之爲實實如法得徑一步勾股相乘爲圓
詳解九章算法

Figura 18. Spiegazione disegnata del problema 9.29 dei Nove capitoli, nella versione di Yang Hui del 1261, riprodotta nel 1993.

Ecco una traduzione dell’inizio della risoluzione di un problema che si trova nel nono rotolo dei *Nove capitoli sui procedimenti matematici*, con i commenti di Liu Hui, libro che concerne la base (*gou*) e l’altezza (*gu*) di un triangolo rettangolo legato a ciò che serve da immagine fondamentale.

«Si addizionano la base e l’altezza, ciò che costituisce il divisore. Base e altezza sono moltiplicate tra di loro, ciò che costituisce il dividendo. Effettuando la divisione del dividendo per il divisore, si ottiene il lato del quadrato».

Per contro il commento indica precisamente che si deve fare una supposizione per intraprendere il calcolo, ciò che significa precisare la posizione dell’analisi. Do allora la versione di questo problema nella forma dovuta a Yang Hui nel 1261 nella sua opera *Xiangjie jiuzhang suanfa* (Spiegazione dettagliata dei procedimenti di calcolo in nove capitoli), dove si vede un gioco di scomposizione delle aree, con utilizzo dei colori (qui solo bianco e nero), secondo un modo abbastanza frequente che rimpiazza le notazioni[15].

«Sia base 6 bu[16]*, altezza 12 bu, quanto fa il lato del quadrato inscritto?*

La spiegazione del problema si fa con quadratini interi (figura 18).

«La superficie bianca del quadrato inscritto 16 e le superfici nere inscritte 16 sono uguali. I due (triangoli) bianchi grande e piccolo e i due neri sono uguali».

15. 詳解九章算法 *xiangjie jiuzhang suanfa* (Spiegazione dettagliata dei procedimenti di calcolo in nove capitoli), 楊輝 Yang Hui, 1261. Citato in una ristampa in *Zhongguo kexue jishu dianji tonghui* 中國科學技術典籍通匯, Henan jiaoyu chubanshe, 1993, vol. 1, p. 981.
16. Si può tradurre *bu* con «passo».

5. Conclusione

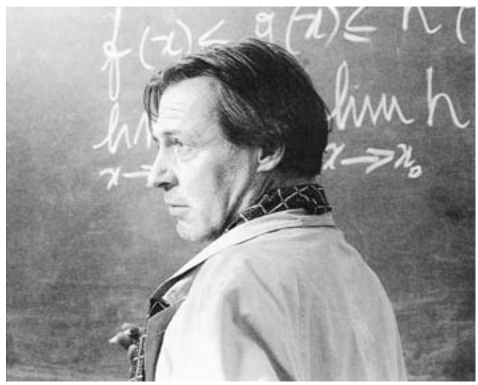
Non so se sono stato un buon comunicatore iniziando dal difficile o poco conosciuto, con la questione delle abbreviazioni per designare le funzioni o evocando il gesto quasi antropologico della moltiplicazione di fattori. Ma spero che il gioco sia valso la candela, come si usa dire. Perchè così ho evitato di far passare il bel problema dell'inscrizione del quadrato in un triangolo come semplice passatempo. Anche la matematica elementare è una scienza sulla quale si deve avere un'opinione critica. In questa avventura attraverso i secoli e le civiltà, le formule hanno giocato un ruolo critico importante quanto le figure.

2. Tra Galois e Rimbaud: Renato Caccioppoli, matematico napoletano

Stefano Beccastrini, Maria Paola Nannicini
(RSDMM Bologna)

This Article briefly tells the Life, the scientific Work, the political and overall cultural Passion and finally the tragic Death of the napolitan, genial and free spirit, Mathematic Renato Caccioppoli.

Renato Caccioppoli.



Carlo Cecchi nel ruolo di Renato Caccioppoli.

Premessa

Si pensa troppo spesso, da parte di quanti della matematica si disinteressano o addirittura l'hanno in uggia, che i cultori di tale disciplina siano gente aridamente pignola, meccanicamente aliena da poesia e fantasia, irrimediabilmente noiosa. Niente di più falso. Basterebbe pensare alla figura radiosa di Evariste Galois o a quella di Sonia Kowaleskajia. Un uomo, e un matematico, che smentì per tutta quanta la propria esistenza tale sciocco stereotipo sui matematici stessi, e sulla loro meravigliosa e tutt'altro che arida e noiosa disciplina, fu il napoletano Renato Caccioppoli. In questo nostro articolo, rimaneggiamento di un capitolo del nostro ultimo libro dedicato ai rapporti tra matematica e letteratura[1], narreremo la storia della sua vita, del suo diventare fin da molto giovane un matematico di fama europea, del suo amare e conoscere tutt'altro che superficialmente la poesia e la musica così come la filosofia e il cinema, del suo essere ir-

1. Si veda la recensione di G. Arrigo sul numero 65, pag. 123.

rimediabilmente ed eroicamente anticonformista e antifascista, del suo diventare (molto a modo suo, per sua e nostra fortuna) militante comunista e infine del suo triste ammazzarsi, sconfitto da una vita che non gli donava più, rendendola più forte della morte ormai avviata a vincere, le gioie – le uniche per cui valesse la pena di vivere – della matematica, della musica e dell'amore.

Un matematico napoletano (e umanista)

Nel maggio del 1938, ossia ben quattro anni prima che tale memorabile gesto fosse compiuto, con l'assenso del proprietario del locale in cui ebbe luogo, ossia il *Rick's Café Américain* della città marocchina di Casablanca, da Paul Henreid/Victor Laszlo in una delle scene più commoventi del film intitolato appunto *Casablanca* (1942, opera leggendaria del cineasta ungherese-hollywoodiano Michael Curtiz), già un matematico antifascista poco più che trentenne, allo scopo di sbeffeggiare i fascisti colà radunatisi e gozzoviglianti, aveva fatto suonare la *Marsigliese* all'orchestrina di una birreria della napoletana di piazza Municipio. C'è chi, per esempio l'attendibile giornalista-scrittore anch'egli napoletano Ermanno Rea, narra invece che, facendosi cedere il posto dal pianista, quel glorioso inno alla libertà l'abbia suonato e cantato egli stesso, affiancato dalla sua bella fidanzata. Va detto, in verità, che c'è anche chi crede che lo straordinario aneddoto non sia, in realtà, mai accaduto: di questa idea parrebbe esser convinto il matematico, e storico della matematica italiana del 900, Angelo Guerreggio il quale cita come fonti attendibili gli schedari della questura, attribuenti al giovane matematico antifascista una canterina provocazione in un'osteria della riviera di Chiaia ma che, della *Marsigliese*, non fanno menzione alcuna (Guerreggio in Bartocci e altri, 2007). Comunque sia andata, quel giovane matematico antifascista si chiamava Renato Caccioppoli, forse il matematico italiano del 900 più noto e narrato anche a coloro che di matematica generalmente si disinteressano ma, contemporaneamente, colui che, con i suoi studi altamente specialistici (quali quelli dedicati al prolungamento dell'insieme di definizione di un funzionale, alla teoria geometrica della misura, alle equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali, all'analisi funzionale e ai teoremi del punto fisso, alle ricerche sulle funzioni di più variabili) *«ha l'indubbio merito di aver riavvicinato l'analisi italiana alle punte più avanzate della ricerca»* (Idem, pag. 141) a livello europeo e mondiale, superando l'isolamento degli anni di guerra e di quelli immediatamente successivi. Tornando all'aneddoto della *Marsigliese*, vero o leggendario che sia, non c'è dubbio che la sua coincidenza con il film di Curtiz appare talmente bella da risultare persino commovente. Fu coincidenza davvero? Non sarà venuto, Curtiz, a conoscenza dell'episodio? Non sarà, invece, che dopo il successo di *Casablanca,* la serata canterina/antifascista di Caccioppoli non sia stata abbellita dell'inno francese? O non sarà che glorificare, cantandolo polemicamente contro i nazifascisti, quello straordinario inno alla ribellione non sia stato sia per Caccioppoli che per Curtiz che per chissà quanti altri, una maniera di riaffermare, in un'Europa avviata a cadere nella barbarie del totalitarismo, le ragioni della libertà e della strenua rivolta di quanti, a tali ragioni, credevano ancora? Chissà. Facciamoci raccontare questa bella vicenda (ormai diventata leggenda e, come tale, raccontata in varie versioni: c'è chi dice che il fatto sia avvenuto, invece che in piazza Municipio, nella trattoria «Il Grottino» e chi in un bar di Mergellina, addirittura nei giorni in cui Mussolini e Hitler stavano assieme visitando Napoli) appunto da Ermanno Rea. Egli ne scrive in una bella pagina del suo straziante *Mistero napoletano. Vita e passione di una comunista negli anni della guerra fredda* (il libro ricostruisce la travagliata esistenza di Francesca Spada, musicista e comunista napoletana che di Caccioppoli fu molto amica e, come lui, morì suicida). L'episodio, secondo Rea, avvenne nella birreria Lowenbrau che, nella Napoli del tempo, si trovava appunto in piazza Municipio. Adesso quella birreria non esiste più ma all'epoca era piuttosto elegante, ampia e caratterizzata da luci soffuse, aperta fino a tarda notte e dotata di un grande pianoforte a coda, d'un nero tirato a specchio, sul quale un anziano e musicista in alquanto lisa marsina suonava valzer e arie da operetta. Una sera del maggio 1938, in cui nella birreria si trovava un gruppo rumoroso di ufficiali della milizia fascista, già molto in là quanto a boccali ingurgitati, fecero il proprio ingresso Renato Caccioppoli, ben noto in città sia in quanto insegnante di teoria dei gruppi all'università di Napoli sia in quanto persona anticonformista e ribelle a ogni disciplina, e la sua giovanissima innamorata, Sara Mancuso, poi divenuta sua moglie.

«Appena dentro, Renato corse subito a salutare il piccolo pianista che conosceva e verso il quale nutriva un particolare sentimento di solidarietà fondato forse sul semplice fatto che suonava il pianoforte, anzi che si guadagnava da vivere suonandolo… Passò del tempo. Poi, improvvisamente, Renato e Sara percepirono un sommesso coro che si sovrapponeva alle malinconiche note del pianoforte: 'Giovinezza, giovinezza, primavera di bellezza…'. Le voci si fecero progressivamente più perentorie e piene di sfida… (poi)… le camice nere, sempre cantando ma ormai a squarciagola, si diressero verso… (il pianista)… intimandogli di suonare l'inno fascista. L'uomo esitò, si guardò disperatamente in giro, poi a capo chino si arrese. Cantarono a lungo… Infine, se ne tornarono al loro tavolo. Allora, ecco, nel cuore di Renato accadde qualcosa... Scattò in piedi e, seguito da Sara, si diresse a sua volta dov'era il pianoforte. Mormorò poche parole all'orecchio del pianista che, senza esitare, gli cedette lo sgabello... Il professore sedette al suo posto, sfiorò con la punta delle dita, come in una carezza, la tastiera e cominciò. la Marsigliese. Sommessamente all'inizio. Poi, come avevano fatto i fascisti, via via con sempre più vigore. Sara, immobile accanto al pianoforte, cominciò a cantare per prima, subito seguita da Renato: 'Aux armes, citoyens! Formez vos battallions…'. Stupefatti, gli ufficiali della milizia apparivano pietrificati sulle loro sedie… Ma a toglierli dall'impaccio ci pensò lo stesso Renato che, smesso di suonare, cominciò a parlare al pubblico, a spiegare il significato di quell'inno, il senso di quella musica e di quelle parole, scritte per celebrare il bene più alto di cui un popolo possa godere: la libertà. In Italia questo bene era stato confiscato, distrutto, il cittadino degradato sul campo, espropriato della sua capacità di giudizio a opera d'una banda di violenti dediti alla pratica quotidiana della barbarie. Gli uomini in orbace scattarono come molle liberate… Si buttarono su Renato e su Sara e poiché Renato continuava a parlare, a invocare l'intelligenza della folla gridando 'Ecco, vedete? Vedete?' gli tapparono la bocca con un fazzoletto». (Rea, 2002, pag. 128-130)

Sia Renato che Sara finirono in questura e, da lì, lei fece ben presto ritorno a casa propria mentre lui, per un compromesso tra la famiglia Caccioppoli – che in città contava parecchio: il padre, Giuseppe, era un noto chirurgo, la madre Sofia era addirittura la figlia del famoso anarchico Bakunin – e le autorità fasciste di Napoli, fu internato per qualche tempo in una clinica per malati di mente, così evitando il fatale processo e l'altrettanto fatale condanna a un duro confino in qualche dura e remota parte d'Italia. Fu contento, alla fin fine, del fatto che i fascisti l'avessero dichiarato «matematico matto», un epiteto del quale andrà poi sempre orgoglioso. Il soggiorno in clinica psichiatrica lo mise in contatto con il misero ma fantasioso mondo dei malati di mente per i quali, trovando in essi ascoltatori più intelligenti dei militi fascisti, teneva concerti al pianoforte. La ragazza che era stata protagonista, con lui, di quella un po' provocatoria e un po' mitica, ma in fondo protoresistenziale, bravata si chiamava come si è detto Sara Mancuso ed ebbe un'importanza decisiva nella sua vita. Aveva sedici anni meno di lui, era nata in Sicilia e aveva poi vissuto a Nizza prima di trasferirsi a Napoli conoscendovi Caccioppoli e facendolo innamorare perdutamente. Due anni dopo l'episodio della birreria di piazza Municipio divenne sua moglie. In seguito, però, innamoratasi di Mario Alicata (futuro, autorevole e alquanto autoritario, dirigente del PCI: ne scrisse Franco Fortini, in un aforisma de *L'ospite ingrato:* «C'era a quei tempi, ricordi/nel Comitato Centrale/Falsa faccia di vera tragedia/odiava molto/molto ammoniva o con aria severa/minacciava/La Causa/è stata con lui generosa/dice di rispettarne la memoria», (Fortini, 1966, pag. 48) ne divenne, lasciando Caccioppoli, anche la compagna di vita. L'abbandono da parte della moglie, donna bellissima e da lui amatissima, fu certamente uno dei motivi del crollo esistenziale del matematico napoletano. Certamente, non il solo. Certamente, c'entrarono anche la delusione politica (dovuta a un PCI che continuava ottusamente a restare «stalinista» anche dopo il XX congresso del PCUS, la sanguinosa repressione della eroica rivoluzione ungherese e i profondi mutamenti della società italiana); l'inaridirsi della creatività matematica; il sempre più frequente e incontrollabile rifugio nell'alcool; il crescente disagio del vivere in una città la quale, seppure inesorabilmente adorata, stava diventando per lui sempre più soffocante. Ma andiamo con ordine, nel parlare della vita e della morte di questo importante matematico napoletano (*Morte di un matematico napoletano* si intitola appunto il bel film, del 1992, dedicato dal cineasta Mario Martone, napoletano anch'egli, all'ultimo periodo della vita del proprio illustre e sfortunato concittadino). Renato Caccioppoli, a Napoli, era nato nel 1904, di buona famiglia borghese nonché, come già si è detto, nipote per parte di madre addirittura di Michail Aleksandrovic Bakunin, l'anarchico russo che fu capace di spaventare tutti i regni d'Europa prima di far approdare il proprio esule girovagare per sfuggire poliziotti e carceri nella città partenopea. Nella formazione culturale di Caccioppoli, alquanto ricca e multiforme, ebbe un ruolo importante Pietro La Via, un aristocratico napoletano, marchese di Villarena, di sei anni più anziano di lui. Egli, di cultura cosmopolita, avrebbe voluto fare il diplomatico ma il suo fermo antifascismo sbarrò irrimediabilmente la strada a tale agognata carriera di uomo poliglotta e dotato di relazioni e amicizie in tutta l'Europa. La sua trecentesca dimora di Massa Lubrense fu frequentata, oltre che dall'assiduo Caccioppoli, dallo scultore Vincenzo Gemito, da Gaetano Salvemini, da Massimo Bontempelli, da Bernard Berenson, da André Gide e da vari altri uomini di cultura modernamente internazionale, come lui amanti del bello e del giusto, più o meno apertamente dissidenti con la chiusura nazionalistica e anzi provincialistica imposta da Mussolini alla cultura italiana. La Via intrattenne fitti scambi epistolari con personalità quali Henry Bergson, Thomas Mann, Maurice Ravel e così via. Filosoficamente, soprattutto nel suo *Mente e realtà* del 1947, fu profondamente anticrociano. In quanto letterato, si distinse quale valente traduttore dei *Sonetti* di William Shakespeare. Renato, terminato il liceo, si iscrisse alla facoltà di Ingegneria dell'Università Federico II, passando però ben presto a Matematica, disciplina nella quale si laureò nel 1925, sotto la guida di Ernesto Pascal, esperto di teoria degli integrali e di calcolo infinitesimale, fermamente antifascista ma non particolarmente amato da Caccioppoli. Egli riconosceva infatti quale proprio vero maestro, tra i tanti celebri matematici con cui ebbe a che fare all'università partenopea, il palermitano nonchè fervente seguace di Mussolini Mauro Picone, esperto di matematica applicata e propugnatore del calcolo elettronico (nel 1927, fondò, nell'ambito del CNR, l'Istituto per le Applicazioni del Calcolo, IAC). Dopo la laurea, la carriera scientifica e professionale di Caccioppoli si sviluppò con eccezionale rapidità. Si occupò di teoria geometrica della misura, di equazioni differenziali, di funzioni lineari e di analisi funzionale. Il suo lavoro di ricerca seguì, insomma, più direzioni pur diventando egli noto soprattutto grazie alle anticipazioni del teorema di Hahn-Banach (riguardante l'analisi funzionale e così chiamato in quanto il matematico austriaco Hans Hahn e quello polacco Stefan Banach lo formularono, separatamente, negli anni Venti) e gli studi su Hilbert. Dal punto di vista accademico, fu assistente di Picone, libero docente di Analisi nel 1928, titolare della cattedra di analisi algebrica all'università di Padova nel 1931 (già in quegli anni, si mise in luce per la propria condotta socialmente stramba, tanto che fu erratamente arrestato, per la trascuratezza tutt'altro che accademica del suo vestiario, in quanto scambiato per un accattone). Tre anni dopo l'incarico a Padova, fece ritorno a Napoli, prima per insegnare Teoria dei gruppi, poi Analisi superiore e infine, dal 1943, Analisi matematica. Può essere considerato uno dei rappresentanti più significativi e creativi della matematica italiana della prima metà del XX secolo, tanto che nel 1932 ricevette il premio nazionale per la fisica dell'Accademia dei Lincei. Al suo attivo restano oltre ottanta pubblicazioni scientifiche oggi raccolte, assieme alle lettere (preziosa testimonianza sia delle sue fitte corrispondenze con colleghi nazionali e internazionali sia delle sue crescenti crisi esistenziali), nei due volumi delle *Opere* editi nel 1963 dall'Unione Matematica Italiana (UMI). Di particolare interesse, nell'epistolario, appaiono le lettere inviate assiduamente a Mauro Picone, rintracciate negli archivi dello IAC: diretta e persino toccante testimonianza di un legame amicale, resistente a qualunque pur profondo dissidio politico, tra allievo e maestro. Fu un legame, oltre tutto, capace di durare nel tempo e persino, da parte di Picone morto nel 1977 e dunque molto dopo Caccioppoli, ben oltre la prematura e tragica scomparsa dell'allievo prediletto. Mauro Picone, trasferitosi nel 1932 all'università di Roma, invitò insistentemente Caccioppoli a recarsi a lavorare nella capitale, ove egli stava raccogliendo intorno a sé i più stimati e fedeli dei propri allievi. Caccioppoli, però, non volle più lasciare Napoli, la «sua» Napoli ossia la città ove vagabondava nottetempo in cerca d'osterie e frequentava i circoli del cinema, le sale musicali (come si sa, suonava il pianoforte e amava Wagner e Beethoven), i cenacoli filosofici e letterari (nei quali discuteva per ore e ore sui propri poeti, Rilke per esempio, e filosofi prediletti, Schopenhauer per esempio). Pubblicava molto, era ormai assai noto a livello internazionale, parlava correntemente quattro lingue straniere (russo, inglese, francese e tedesco). Nel secondo dopoguerra, pur senza mai iscriversi a esso, si avvicinò, frequentandone da militante a modo suo le sezioni napoletane, al Partito Comunista Italiano per il quale, soprattutto nel periodo del movimento dei «Partigiani per la pace» (ossia quello in cui l'Italia aderì alla NATO, la «guerra fredda» diventò calda in Corea e Napoli venne praticamente ridotta a un porto militare dell'US Navy), tenne, proprio lui ossia «il più umanista dei matematici» (come veniva definito all'interno del Gruppo di studio Antonio Gramsci che regolarmente frequentava), persino pubblici comizi. Ce ne racconta ancora Ermanno Rea, che lo conobbe e gli volle bene (Rea narra anche degli inutili tentativi di Giorgio Amendola, il «grande capo» del PCI napoletano, di imporgli l'uso della «scaletta», qualcosa di più preventivamente controllabile nella sua oratoria libera e trasgressiva e dunque molto temuta dai funzionari di partito):

«A Bari, dove fu inviato dal Comitato nazionale dei partigiani della pace per tenere ancora una volta un comizio in un teatro, avendo scorto sul palcoscenico un pianoforte si mise a suonare, senza smettere anche quando cominciò ad affluire il pubblico e neppure quando il teatro fu pieno. Invece

di un discorso, tenne un concerto. Soltanto alla fine si giustificò affermando che niente poteva spiegare altrettanto bene come la musica che cosa fosse la pace e che cosa fosse la guerra. Ci fu una grande entusiastica ovazione. Gli unici a prendersela a male furono, pare, i funzionari di partito che avevano organizzato la manifestazione». (Rea, 2002, pag. 256)

Evidentemente suonare il pianoforte, fin dai tempi della *Marsigliese* suonata e cantata alla birreria di piazza Municipio, era una delle maniere preferite da Renato Caccioppoli per far conoscere, sbattendogliela in faccia, la propria diversità ai grigi funzionari di tutti i partiti e di tutti i regimi (anche di quelli nei quali, per scelta etica ancor prima che ideologica, militava egli stesso). Un'altra caratteristica tipica di Renato Caccioppoli, oltre al fatto di girare sempre per le vie di Napoli con uno spiegazzatissimo impermeabile bianco ma sempre più sporco e con una copia de *L'Unità* in tasca, era la già ricordata ricchezza dei suoi interessi non matematici. Per esempio, quello per il cinema. Rea ricorda la maniera appassionata con cui parlava di Chaplin e del suo *Monsieur Verdoux*, un film del 1947 («Parlava appassionatamente di *Monsieur Verdoux*, l'amara allegoria dell'ultimo Chaplin dedicata a un mondo impaziente di riprodurre, sulle ceneri ancora fumanti della guerra, tutte le sue perversioni, addirittura ingigantite rispetto al passato», Rea, 2002, pag. 258) e prosegue:

«Il cinema non era l'ultimo tra i grandi amori 'adulterini' dell'eclettico matematico. La musica, la poesia, la grande letteratura forse venivano prima: forse sì, forse no. Fatto sta che da anni aveva legato il proprio nome e il proprio prestigio alle sorti del Circolo del cinema, una 'povera cosa' che era diventata, dopo alterne vicende, una 'grande cosa', il luogo dove ogni domenica mattina centiniaia di napoletani andavano a compiere una specie di rito purificatorio, tra discussioni e dibattiti in cui, di prevalente, non c'era che il libero sentire dei singoli, assieme alle opinioni, per lo più politicamente anticonformiste, di coloro che predevano la parola. Le proiezioni venivano presentate generalmente da Renato Caccioppoli, oratore stravagante e imprevedibile, d'una arguzia però mai fine a se stessa, la quale ci accompagnava per mano in fondo alla malinconica comicità di Buster Keaton oppure in fondo agli occhi di ghiaccio di Ivan il Terribile, ma sempre alla ricerca di noi stessi». (Ibidem).

Su Caccioppoli, matematico di valore, umanistico cultore della musica e della letteratura e del cinema, militante comunista, ha scritto una appassionata, seppur agile, biografia Roberto Gramiccia, un medico che è anche giornalista nonché scrittore e critico d'arte. Si intitola *La regola del disordine. Renato Caccioppoli, un matematico ribelle*. Il volume contiene anche scritti di Ennio De Giorgi (matematico illustre, che traccia un profilo degli *Sviluppi dell'Analisi funzionale del Novecento* nel quale sottolinea l'importanza di Caccioppoli e della sua «teoria geometrica») e di Carlo Sbordone (professore ordinario di analisi matematica all'università Federico II di Napoli e specialista del calcolo delle variazioni, che parla de *L'opera matematica di Renato Caccioppoli*). Nel volume di Gramiccia viene giustamente enfatizzato, aldilà della sua vita genialmente trasgressiva e alla fin fine tragica, il contributo di Caccioppoli alla matematica italiana, e non soltanto italiana, del Novecento. Scrive tra l'altro Gramiccia, nel prendere in considerazione i portaritratti che Caccioppoli teneva sulla propria scrivania e che, oltre all'immagine di Evariste Galois, contenevano anche quella di Arthur Rimbaud:

«Il secondo portaritratti sulla scrivania di Caccioppoli contiene l'immagine di Arthur Rimbaud, l'incendiario letterato francese, il teorico del poeta veggente che aspira, attraverso uno sregolamento di tutti i sensi, a esplorare l'ignoto e a intravedere l'assoluto. [...] Caccioppoli [...] vede Rimbaud piuttosto affine a Galois, un matematico, che a poeti come Mallarmé, Verlaine o Baudelaire. Piuttosto affine a sé che ad altri, finendo per intrattenere anche con lui un'amicizia spirituale che va oltre ogni

plausibile ragione. Del resto, la saggezza dell'irragionevole è per Caccioppoli pane di tutti i giorni. Come pure un'ispirazione iconoclastica e negatrice, la stessa che nella vita e nelle opere di Rimbaud raggiungerà punte estreme [...] Il nichilismo oltranzista di Rimbaud...ha cambiato la storia della poesia. Così la vocazione anarchica e autodistruttiva di Caccioppoli è stata tutt'uno con la traiettoria di un'orbita che ha lasciato non solo tracce, suggestioni ed esempi ma acquisizioni concrete e altissime in una delle poche discipline esatte conosciute: la matematica». (Gramiccia, 2004, p. 111-4)

Una testimonianza curiosa su Renato Caccioppoli ci è offerta anche da Luciano De Crescenzo, l'umorista napoletano che l'aveva conosciuto e subito ammirato ed era stato persino suo allievo all'università:

«Chi era Renato Caccioppoli? Era un Byron, un Oscar Wilde, un dandy, un personaggio uscito dai Demoni di Dostoevskij, un D'Annunzio con in più il dono dell'humour, o forse semplicemente un seduttore. Certo è che, almeno per quanto mi riguarda, riuscì a conquistarmi al primo sguardo. Avevo diciassette anni e stavo ancora in terza liceo. Un giorno un amico, già universitario, mi propose di accompagnarlo in via Mezzocannone. 'Oggi c'è Caccioppoli, vedrai che ti piacerà' E difatti così accadde: rimasi folgorato. Quello stesso giorno decisi che non mi sarei più iscritto a Filosofia, bensì a Ingegneria. Lui, il matematico ammaliatore, mi aveva inculcato il bisogno irreprimibile di vederlo ogni giorno, e ancora oggi, quando voglio vantarmi di qualcosa, dico: 'Ho fatto Analisi e Calcolo con Caccioppoli!'. Poteva non aver dormito, essersi sporcato durante i suoi giri notturni per la Napoli dei Quartieri, aver bevuto come un soldato americano, era sempre elegante. Mentre faceva lezione, le sue mani disegnavano l'aria e, contemporaneamente, i concetti matematici volavano per l'aula illuminando il buio della nostra ignoranza. In Caccioppoli il parallelismo tra entità numeriche e note musicali era sempre presente. Due episodi per ricordarlo: un giorno alcuni giornalisti gli chiesero quale fosse la frase più importante che era mai stata detta al mondo. All'inizio lui si schernì: disse che così su due piedi non se la sentiva di stabilire quale fosse davvero quella più importante. Poi, dietro l'insistenza di tutti, si mise a pensare: chiuse gli occhi e restò in silenzio per circa tre minuti, forse quattro. Noi tutti non respiravamo. Alla fine, se Dio volle, alzò la testa e disse con tono grave e sussiegoso: 'Al cuore non si comanda'. Un'altra volta lo accompagnammo ad un comizio comunista in piazza Vanvitelli. Eravamo nel '48, l'anno del Fronte Popolare. Lui salì sul palco tra una selva di bandiere rosse. La banda suonò l'Internazionale e un dirigente del PCI lo presentò alle masse: 'E ora, ecco a voi il compagno Caccioppoli!' Applausi scroscianti. Il professore prese il microfono e cominciò a dire: 'Chi è il più grande criminale vivente? È Giuseppe Stalin!'. Dopo di che invitò i presenti a non confondere la bellezza dell'idea comunista con la disonestà di coloro che, solo per fini di potere, se ne erano appropriati». (De Crescenzo, 2008, pag. 85)

Per quanto assai stimato nel mondo matematico italiano, ma anche internazionale, e amatissimo nella sua Napoli, la crisi del proprio rapporto matrimoniale, le delusioni politiche, un crescente tormento dell'anima lo spinsero verso l'alcolismo e poi, l'8 maggio del 1959, al suicidio. Si sparò un colpo di rivoltella nella propria abitazione situata nel nobiliare Palazzo Cellammare di via Chiaia, quello che aveva ospitato anche Torquato Tasso e Caravaggio, Casanova e Goethe. All'ultima settimana di vita di Caccioppoli, interpretato da un intenso Carlo Cecchi, è dedicato, come già si è detto, il bel film *Morte di un matematico napoletano,* 1992, regia di Mario Martone, uomo di teatro con tale film al proprio esordio nel cinema (mezzo espressivo che, in seguito, gli dette molte altre soddisfazioni). La sua esperienza teatrale, risalente agli anni 80 del 900, avvenne nell'ambito dei Teatri Uniti, una compagnia che seppe rinnovare la teatralità napoletana, aprendola alla contaminazione con altri linguaggi compreso appunto quello filmico. L'opera prima di Martone, che vinse il gran premio della giuria al Festival di Venezia, rappresenta, oltre che un dolente omaggio a un concittadino celebre ma sfortunato, un affresco, lontano da ogni stereotipo folkloristico, d'una Napoli mesta, crepuscolare, nella quale il protagonista si aggira – facendo visita all'ex moglie, al fratello, ai compagni di partito, ai colleghi e agli studenti dell'università, alla gente comune delle strade e delle osterie – quasi per un ultimo, sofferto, toccante saluto. Uno straziante ad-dio. Ha detto Martone, in un'intervista con Bruno Roberti: *«Ho cercato di rappresentare nel film la doppia natura del rapporto di Renato con Napoli. Da un lato c'è l'enorme generosità con cui essa si dà ai suoi figli… dall'altra c'è il lato oscuro di Napoli, quello che ti deruba e ti nega ogni consolazione…»* (Roberti, in Emmer, Manaresi, 2002, pag. 231). Il film termina con i funerali di Caccioppoli. Le uniche scene che mostrino il suo essere un matematico sono quelle in cui egli fa lezione di calcolo infinitesimale all'università ed esamina alcuni discenti: al film, infatti, della matematica non interessa molto, esso vuole essere soprattutto il ritratto dolente di un intellettuale napoletano nel proprio essere stato uomo di cultura poliedrica, di impegno politico, di sofferenza esistenziale. Un altro grande matematico italiano del 900, Ennio De Giorgi, così ricordò Caccioppoli su *L'Unità*:

> *«C'era indubbiamente, nella visione di Caccioppoli dell'arte e della matematica…, l'idea dell'armonia pitagorica…Per quanto sia difficile e incauto entrare nel mistero di un uomo, se dovessi vedere un filo tra l'interesse artistico, l'interesse scientifico, l'interesse sociale e civile di Caccioppoli lo vedrei in questa aspirazione…all'armonia e nel dolore che tutte le varie disarmonie, ai vari livelli, gli procuravano…».* (De Giorgi, 1992)

Conclusioni

Da parte sua, Caccioppoli aveva affermato: *«Per tre cose vale la pena di vivere: la matematica, la musica e l'amore»*. Evidentemente, a un certo punto della propria esistenza, egli s'era accorto che nessuna di quelle tre cose riusciva più a dare alla sua vita un senso. Era dunque, senza matematica e senza musica e senza amore, tragicamente approdato alla convinzione che ormai valesse la pena, la vita, di abbandonarla, volontariamente, per sempre. Di fronte a simili scelte, crediamo occorra manifestare soltanto rispetto, rimpianto, silenzio.

Bibliografia

HDe Crescenzo L. (2008). *Il caffè sospeso.* Milano: Mondadori.
De Giorgi E. (1992). L'artista dei numeri. *L'Unità del 16/9/92*, Roma
Emmer M., Maranesi M. (2002). *Matematica, arte, tecnologia, cinema.* Milano: Springer Verlag.
Gramiccia R. (2004). *La regola del disordine. Renato Caccioppoli, un matematico ribelle*. Roma: Editori Riuniti.
Guerraggio A. (2007). Renato Caccioppoli. Napoli: fascismo e dopoguerra. In Bartocci C. e altri, *Vite matematiche. Protagonisti del '900 da Hilbert a Wiles*. Milano: Springer Verlag.
Rea D. (1995). *Mistero napoletano.* Torino: Einaudi.

3. Una formula da… vertigine

Silvio Maracchia

The beauty of a formula cannot be explained, while, instead, it is possible to explain the beauty of anything else. One either perceives this beauty or not. The article deals with the formula which expresses the sum of the cubes of the first n natural numbers. By observing it thoroughly you can feel a sense of vertigo as if you are faced with eternal truths, though existing only in the mind of those who think of them.

1. Introduzione

Nella lettera del 9/11/1902 che Giovanni Vailati scrive all'amico Giovanni Vacca, entrambi eminenti studiosi di storia delle matematiche, viene ricordata l'impressione che Herbert Spencer sentiva nel considerare determinate proprietà di geometria proiettiva e il senso di vertigine che si prova pensando ad esse come verità eterne, esistenti anche se solo nella mente di chi le pensa.

Le stesse sensazioni «*anzi di genere ancora più intenso*» sono prodotte in Vailati, così scrive, dalle proposizioni di pura aritmetica e di teoria dei numeri, tra le quali, conclude, la formula[1]:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 \qquad \text{(a)}$$

La bellezza della formula ricordata da Vailati non si può spiegare, così come è possibile spiegare la bellezza di qualsiasi altra cosa. Essa si sente oppure no. *Tertium non datur*.

È proprio di questa formula che vogliamo occuparci nel presente articolo.

2. Una dimostrazione formale

Osserviamo che, per questa dimostrazione e per altre che vedremo, avremo bisogno della formula che dà la somma dei primi n termini di una progressione aritmetica

$$a+(a+d)+(a+2\,d)+\ldots+\left[a+(n-1)\,d\right]=\frac{a+\left[a+(n-1)\,d\right]}{2}\,n$$

1. G. Vailati, *Epistolario 1891-1909*, Einaudi, Torino, 1971, p. 217.

nel caso particolare

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Le somme parziali della serie $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n + \ldots$ e cioè 1; 3; 6; 10; 15… sono i cosiddetti numeri triangolari di origine pitagorica.

La formula (a) può essere dimostrata formalmente con il metodo di induzione matematica secondo il quale, com'è noto, una proprietà è valida per ogni $n > n^*$ se essa è verificata per n^* e si dimostra che, ammettendola per $n = t-1$ la si può dimostrare per $n=t$.

Ebbene, la nostra proprietà è valida per $n^* = 1$ $[1^3 = 1^2]$;
per $n^* = 2$ $[1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2]$ ecc.
Si supponga ora che sia valida per $n = t-1$, cioè si ammetta vera l'uguaglianza:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (t-1)^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + t-1)^2$$

cioè

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (t-1)^3 = \left[\frac{t(t-1)}{2}\right]^2$$

Per dimostrare questa proprietà per t si sommi ai due membri t^3:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (t-1)^3 + t^3 = \left[\frac{t(t-1)}{2}\right]^2 + t^3$$

In questo caso il secondo membro diventa

$$\left[\frac{t(t-1)}{2}\right]^2 + t^3 = t^2\,\frac{t^2 - 2t + 1 + 4t}{4} = \left[t\,\frac{(t+1)}{2}\right]^2 = (1 + 2 + 3 \ldots + t)^2$$

3. Una dimostrazione dai numeri dispari

Nell'*Introduzione Aritmetica* di Nicomaco (1° sec. d. C.) sono enunciate alcune proprietà, senza dimostrazione, sulla successione dei numeri dispari (cap. 20) tra cui quella secondo la quale il primo numero dispari è anche uguale al suo cubo «*poi se si sommano due dispari, 3 e 5, si ottiene 8 che è il secondo cubo, poi tre dispari, 7, 9 e 11 e si ottiene 27 che è il terzo cubo, poi quattro dispari, 13, 15, 17 e 19 e si ottiene 64 che è il quarto cubo e così di seguito*»[2].

Consideriamo per ora vera questa proprietà che dimostreremo solo in seguito, così come vedremo che le somme parziali della serie dei numeri dispari sono i successivi numeri quadrati $[1 = 1^2; 1+3 = 2^2; 1+3+5 = 3^2$; ecc.) In altre parole, la somma dei primi n numeri dispari è uguale a n^2: $1+3+5+ \ldots + (2n-1) = n^2$.

2. La citazione è presa dal lavoro di Giamblico (3°- 4° sec. d. C.) sulla *Introduzione* di Nicomaco (Cfr. *Giamblico Il Numero e il Divino,* Rusconi, Milano, 1995, p. 321)

Ciò ammesso, osserviamo che la somma dei primi n numeri cubici è uguale alla somma dei primi 1 + 2 + 3 + … + n numeri dispari[3]. Ma questa somma dà per risultato proprio il quadrato di quanti sono i numeri dispari e pertanto[4]:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 \ldots + n)^2$$

Dimostriamo ora le due proprietà ammesse sopra.

La somma dei primi n numeri dispari è uguale ad n^2 Infatti:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2\,n - 1) = \frac{\left[1+\left(2\,n-1\right)\right]n}{2} = n^2$$

Dobbiamo dimostrare che, la proprietà mostrata sotto per alcuni casi particolari

$1^3 = 1$
$2^3 = 3 + 5$
$3^3 = 7 + 9 + 11$
$4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$

vale in generale e cioè che per ottenere k^3 è necessario sommare k opportuni numeri dispari. Supponiamo allora la proprietà valida per k=n e mostriamo che essa allora vale anche per n+1. In altre parole, indicato con x il primo numero dispari della successione degli n numeri dispari, si suppone che sia:

$$x + x + 2 + x + 4 + \ldots + [x + 2\,(n-1)] = n^3 \qquad \text{(b)}$$

Si deve allora dimostrare che la somma degli n+1 dispari successivi è uguale a $(n+1)^3$.

Dalla (b) otteniamo di seguito:

$n\,x + 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n-1) = n^3$;
$nx + n\,(n-1) = n^3$;
$x = n^2 - n + 1$.

L'ultimo numero del primo membro della (b) è dunque:

$x + 2\,(n-1) = n^2 - n + 1 + 2\,n - 2 = n^2 + n - 1$

per cui, il primo membro della somma dei successivi n+1 numeri dispari successivi è $n^2 + n + 1$ e la somma degli stessi è:

$$\left(n^2+n+1\right)+\left[\left(n^2+n+1\right)+2\right]+\left[\left(n^2+n+1\right)+4\right]+\ldots+\left[\left(n^2+n+1\right)+2\,n\right]=$$

$$=\left(n+1\right)\left(n^2+n+1\right)+2+4+\ldots+2\,n=\left(n+1\right)\left(n^2+n+1\right)+\left(n+1\right)n=$$

$$=\left(n+1\right)\left(n+1\right)^2=\left(n+1\right)^3$$

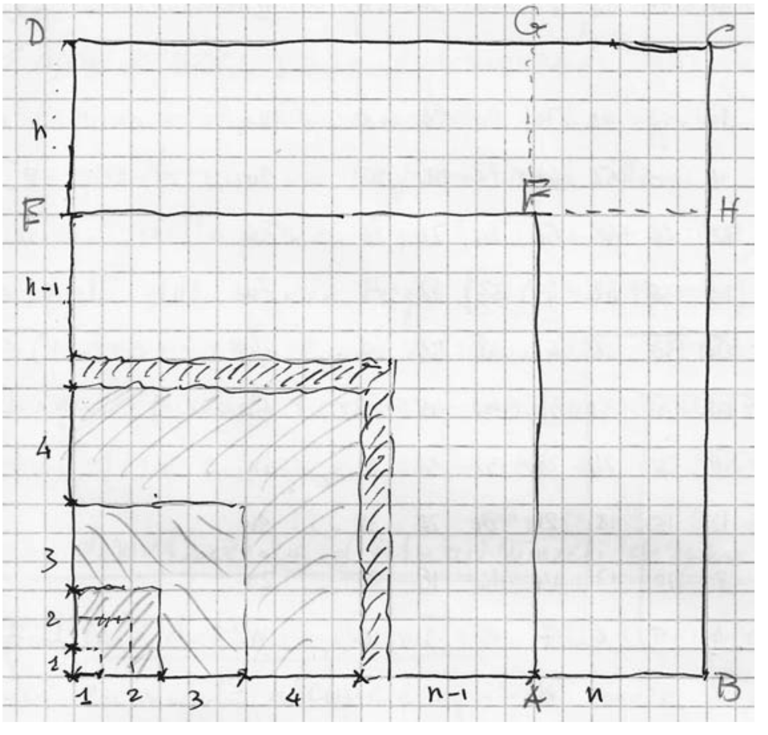
3. 1 dà il primo numero cubico; la somma di 1 + 2 = 3 numeri dispari (1+3+5) dà quella di primi due cubi: 1^3+2^3; la somma di 1+2+3 = 6 numeri dispari (1+3+5+7+9+11) dà per somma quella dei primi tre numeri cubici: $1^3+2^3+3^3$ e così via.
4. Notiamo che i numeri dispari sono (1+n) n /2 e pertanto l'ultimo numero dispari è $2\cdot(n+1)\,n / 2 - 1 = n^2 + n - 1$ valore che incontreremo di nuovo.

4. Una singolare dimostrazione

Una bella dimostrazione, forse la prima, si trova in Al-Karaj (Alkarki X-XI secolo) connessa con l'aritmogeometria pitagorica se non addirittura risalente ad essa[5]. Essa è ottenuta considerando un quadrato il cui lato ha lunghezza

$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-1) + n$ per cui la sua area è

$(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n - 1 + n)^2$.



Tale area è uguale alla somma, a partire da $1=1^3$, dei vari gnomoni via via invadenti il quadrato e rispettivamente di aree 2^3; 3^3; $4^3\ldots$; n^3 dimostrando così la nostra formula (a). Per giustificare, infatti, la misura dell'ultimo gnomone ABCDEF osserviamo che la sua area è data dalla somma dei due rettangoli ABCG uguale a

$$n\,(1+ 2 + 3 + 4 + \ldots + n-1 + n)$$

e EFGD uguale a

$$n\,(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n-1)$$

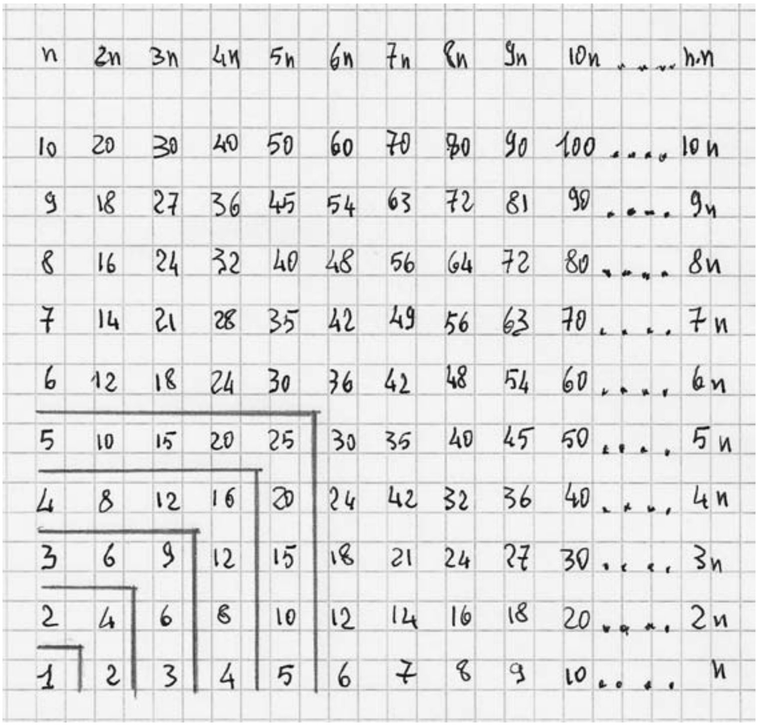
cioè:

$$n\,\frac{(n+1)n}{2} + n\,\frac{(n-1)n}{2} = n^3$$

5. Cfr. Thomas Heath, *A History* of *Greek Mathematics* Vol. I, Oxford, 1921, pp. 109-110; oppure Ettore Bortolotti, *Storia delle Matematiche elementari* in *Encicl. delle Mat. Elem.*, Vol.3°, parte sec. Hoepli, 1954, p. 643.

5. Una nuova dimostrazione[6]

Una nuova dimostrazione, in un certo senso vicina alla precedenza è la seguente, derivante dalla tavola pitagorica[7].



n	2n	3n	4n	5n	6n	7n	8n	9n	10n	....	n·n
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	....	10n
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	....	9n
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	....	8n
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	....	7n
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	....	6n
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	....	5n
4	8	12	16	20	24	42	32	36	40	....	4n
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	....	3n
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	....	2n
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	....	n

Ebbene, le somme dei singoli «gnomoni» indicati solo in alcuni casi nella figura, danno per risultato i successivi numeri cubici. Infatti, in generale, considerando la somma tra l'ennesima riga e l'ennesima colonna (n-simo «gnomone») si ha:

$$n(1+2+3+4+\ldots+n)+n(1+2+3+4+\ldots+n-1)$$

$$=n\left[\frac{(n+1)n}{2}+\frac{n(n-1)}{2}\right]=n^3$$

Pertanto, sommando tutti gli «gnomoni» che formano il nostro quadrato si ha appunto $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$

Ma tutti gli stessi numeri ottenuti dalla somma degli «gnomoni», si possono anche ottenere dalla somma di tutti i numeri della prima riga (in basso):

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$$

6. Questa dimostrazione mi è stata mostrata, durante una mia conferenza nella quale avevo solo mostrato la proprietà (a) come esempio di bellezza matematica dal professore Silvano Rossetto.
7. È solo per assimilarla alla dimostrazione precedente che abbiamo capovolto la tavola pitagorica; il professore Rossetto non me ne voglia.

con quelli della seconda:

$$2\,(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n)$$

della terza:

$$3\,(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n)$$

e così via sino alla

$$n\,(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n)$$

ottenendo, ponendo $1+2+3+4+ \ldots + n$ in evidenza,

$$(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n)\,(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n) = (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n)^2$$

6. Conclusioni

Gauss è senza dubbio uno dei più grandi matematici di ogni tempo; la ricchezza dei suoi interessi spaziano in tutti i rami di quella, la matematica appunto, che definì la *regina di tutte le scienze* e nei quali contribuì con risultati eccezionali.

Ebbene, tra i vari rami della matematica egli predilesse l'aritmetica definendola a sua volta la *regina delle matematiche*[8]. L'aritmetica, d'altronde, ha la caratteristica di presentare proprietà facili da mostrare e spesso difficili da dimostrare attirando l'attenzione di tutti i grandi matematici.

Nel nostro esempio abbiamo considerato una relazione, bella da vedere e facile da dimostrare: una combinazione notevole. Per chi scrive, la contemplazione della nostra formula, al di là della dimostrazione e della sua verità strettamente matematica, dà una sensazione di bellezza e di mistero che si avvicina a quella vertigine di cui si è accennato all'inizio del presente lavoro.

8. Cfr. Gino Loria, *Storia delle Matematiche*, Cisalpino-Goliardica, Milano 1982, p. 818.

1. Il passo più lungo

Sulla necessità di non buttare a mare
(in nome di un vacuo modernismo) teorie di didattica
della matematica che spiegano, in maniera perfetta,
situazioni d'aula reali

Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla[1]

At some research institutes and among some researchers there is an attitude of scrapping of old theories that, despite being perfectly able to answer research questions, are only guilty of being dated. But the most recent theories do not always have emerged to respond to the same research questions of the previous ones, and therefore they do not incorporate and do not replace them, but simply supplement them. We believe that a modernism that is an end in itself harms the skills in mathematics education of future generations of researchers and users (such as, for example, teachers).

1. I fatti

Nell'anno scolastico 2008-2009, tra le prove nazionali italiane invalsi di matematica destinate agli studenti delle classi quinte di Scuola Primaria, appariva la seguente proposta:

> D9. Maria, Renata e Fabio misurano a passi la lunghezza della loro aula. Maria conta 26 passi, Renata ne conta 30 e Fabio 28.
> Chi ha il passo più lungo?
> ☐ A. Renata.
> ☐ B. Fabio.
> ☐ C. Maria.
> ☐ D. Non si può sapere.

I risultati nazionali in percentuale sono stati i seguenti:
mancata risposta: 0,2

A: 42,9; B: 2,2; C: 49,5; D: 5,1

A prima vista, il risultato è eccellente: il 49,5% di studenti italiani dà la risposta esatta. Ma, se si legge da un altro punto di vista, il 50,5% di studenti italiani NON dà la risposta esatta ad un problema che nulla ha a che vedere con le competenze / conoscenze matematiche ma solo con il buon senso e con la capacità di leggere un testo e di immaginarsi la situazione.

Lasciamo pure stare quello 0,2% che non dà risposta, quel 2,2% che dà una risposta del tutto fuori di luogo e quel 5,1% che, non sapendo che cosa rispondere,

1. Membri del NRD, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia e del Mescud, Universidad Francisco José de Caldas, Bogotà, Colombia.

si rifugia nella classica scappatoia «Non si può sapere»; e puntiamo invece tutta l'attenzione sulle due risposte che hanno un certo senso:

senso corretto, quello sperato (risposta C): ha il passo *più* lungo chi fa *meno* passi per misurare l'aula: 49,5% di risposte;

senso sbagliato (risposta A): ha il passo *più* lungo chi ha fatto *più* passi per misurare l'aula: 42,9% di risposte.

Abbiamo chiesto commenti su questo risultato a insegnanti di matematica di diversi livelli, a genitori non insegnanti, a colleghi matematici nulla aventi a che fare con la ricerca in didattica della matematica; commenti informali, beninteso, solo per capire che tipo di percezione essi hanno di questo risultato. Facile immaginare le risposte: la «colpa» è degli studenti che «non sanno più leggere» e che «non sanno concentrarsi»; poi della scuola che «non insegna più a ragionare»; e poi degli insegnanti che «non sanno insegnare» e «pretendono sempre meno». Sono commenti così ovvii e scontati che nemmeno ci mettiamo a esaminarli.

Abbiamo chiesto il parere, in particolare, a insegnanti di livello primario, i più interessati al risultato; in questo caso appare una spiegazione del fenomeno che non faceva capolino negli altri casi, una lamentela su come le prove proposte dall'invalsi siano «diverse da quelle cui gli studenti sono abituati»; il D9 rientra fra i problemi poco comuni, una specie di trabocchetto diabolicamente teso agli studenti; riportiamo una frase, fra tutte: «Noi i bambini li abituiamo a certe situazioni problematiche, e in quelle loro sono bravi e competenti; poi arrivano queste e loro non le riconoscono».

Dunque, esistono «situazioni problematiche costruite secondo un certo accordo fra bambini e insegnanti» e «situazioni problematiche diverse da quelle, dunque inattese».

2. Le prove e i risultati

Abbiamo rifatto il test esattamente identico in Colombia, in Spagna, a Cipro, in Francia e in altri Paesi; i risultati ottenuti sono sostanzialmente identici.[2]

L'estremo «negativo» è il seguente, effettuato su un totale di 83 studenti:

mancata risposta: 0% - A: 89,2% - B: 3,6% - C: 6% - D: 0% - risposta multipla: 1,2%. Riportiamo i test proposti agli studenti, nelle diverse lingue:[3]

Spagnolo:

D9. Maria, Renata y Fabio miden a pasos la longitud de su aula. María cuenta 26 pasos, Renata cuenta 30 y Fabio 28. ¿Quién tiene el paso más largo?
☐ A. Renata.
☐ B. Fabio.
☐ C. María.
☐ D. No se puede saber

2. Per la raccolta di questi dati ringraziamo per la loro gentile collaborazione alcuni colleghi: tra questi soprattutto Angélica Molano, Clara Rivera e Deissy Narváez.
3. Ringraziamo i colleghi dei vari Paesi per la preziosa collaborazione.

Francese:

D9. Marie, Renata et Fabio mesurent avec ses pas la longueur de leurs salle. Marie compte 26 pas, Renata compte 30 et Fabio 28. Qui a le pas le plus long?
☐ A. Renata.
☐ B. Fabio.
☐ C. Marie.
☐ D. On ne peux pas le savoir.

Inglese:

D9. Mary, Renata and Fabio measure with their steps the length of the classroom. Mary counts 26 steps, Renata counts 30 and Fabio 28. Who has the longest step?
☐ A. Renata.
☐ B. Fabio.
☐ C. Mary.
☐ D. You can not know.

Sorprende il fatto che la somma delle percentuali date alle risposte diverse dalla corretta (C) siano sostanzialmente identiche? No, non ci sorprende affatto.

Abbiamo provato a dialogare con alcuni di questi bambini, tutti attorno ai 10 anni di età, per cercare di capire quali fossero eventuali cause *legate al testo*. È facile vedere, infatti, che il testo è viziato da quelli che si chiamano «dati impliciti» o «supposti»; per esempio, non è detto che i bambini appartengano alla stessa classe e che stiano misurando la stessa aula. La ricerca ha molto bene messo in evidenza che molti dei testi degli esercizi e dei problemi proposti nelle aule sono inficiati da questo vizio e che i bambini si reinventano implicitamente il testo proposto, riformulandolo in modo spontaneo, più consono alle loro esigenze; anzi, la ricerca ha evidenziato questo fatto chiedendo esplicitamente ai bambini di riformulare i testi dei problemi per poterli rendere adatti e più facilmente risolubili a bambini di altre classi. Si veda, per esempio, D'Amore et al. (1995).

Ma le interviste (informali) mettono in evidenza che tutti i risolutori hanno senza alcuna ombra di dubbio ipotizzato, in accordo con l'anonimo estensore del testo invalsi, che i tre bambini stessero misurando la loro stessa aula, anzi che appartenessero alla stessa classe, anzi (secondo molti) che fossero amici.

Dunque, il problema non è questo. C'è dell'altro.

3. La teoria delle situazioni e il contratto didattico

La teoria delle situazioni, ideata da Guy Brousseau fin dalla fine degli anni '60 e resa oggetto condiviso di studio internazionale fin dai primi anni '80, spiega perfettamente quel che succede.

Ci sono accordi non detti, non espliciti che fanno sì che insegnanti e allievi costruiscano modalità di interpretazione dei test e di soluzione degli stessi. La teoria è talmente nota che ci sembra offensivo stare qui a spiegare oltre.

Le tipiche indicazioni normative che l'insegnante dà allo studente, «leggi bene il testo», «individua i dati utili», «leggi la domanda» etc., costringono senza alcuna possibilità di scampo il bambino-solutore a disinserire la sua capacità logico – critica basata sull'esperienza anche extra scolastica (più lunghi sono i passi, minore è il numero che esprime la misura della stanza) e farsi carico di clausole implicite: «più lunga uguale più passi» (non importa di che cosa si stia parlando), senza prendere in esame la situazione, ma solo afferrando acriticamente le consegne numeriche. Cioè si guardano i numeri e la relazione fra essi, non il significato semantico della proposta e della situazione proposta.

La famosa frase di un bambino infuriato perché il ricercatore-insegnante lo costringeva a ragionare invece che a risolvere («Uffa, ma io devo risolvere il problema, non devo ragionare»), la dice lunga sul comportamento contrattuale che il bambino assume.

Nel nostro problema ci sono dei dati, tre numeri: 26, 30, 28; e una domanda che contiene la frase: «più lungo». Per 5 anni i bambini sono stati invitati a ragionare sul fatto che «più lungo» sta in sintonia con «maggiore», che si indica con >; mettiamo in ordine i tre numeri: 30 > 28 > 26. La risposta non può che essere 30. Nulla importa la condizione descritta, nulla la logica invocata dal testo: si devono rispettare gli accordi presi con l'insegnante.

Ma, ripetiamo, queste cose sono così note che non andiamo oltre; riteniamo che tutti i nostri lettori le conoscono e le sappiano applicare criticamente a questa situazione.

La cosa che può colpire è il fatto che gli insegnanti vivano come «trabocchetto teso ai bambini» il test proposto, perché non corrisponde agli standard, alla domanda che, secondo molti di loro, sta alla base dell'attività di risoluzione dei problemi: qual è l'operazione aritmetica (razionale) da fare?

La maggior parte degli insegnanti intervistati dice esplicitamente che loro insegnano ai bambini a riconoscere se, nella risoluzione di un problema, va usata l'addizione, o la sottrazione, o la moltiplicazione, o la divisione. Ed i libri di testo rispondono infatti a questa scelta didattica, distinguendo fin dalla prima primaria sezioni con esercitazioni nella modalità seguente: problemi di addizione, problemi di sottrazione etc.; anzi, spesso appaiono anche sezioni così titolate: problemi impossibili, problemi con dati mancanti, problemi con dati sovrabbondanti (mancano quasi sempre i problemi con dati contraddittori che non sono mai piaciuti agli insegnanti fin dalla loro proposta nei cosiddetti Nuovi Programmi per la Scuola Elementare del 1985; qualcuno li include fra i problemi impossibili) (D'Amore, Sandri, 1993).

In queste situazioni, dopo 5 anni di condizionamento e di insegnamento, che cosa può fare un allievo, se non comportarsi secondo contratto?

Dicevamo sopra che questo comportamento e questa reazione degli insegnanti potrebbe sorprendere, ma noi non siamo affatto sorpresi. Tutto, tutto ciò, è parte degli studi rivelatori di Guy Brousseau e dei suoi allievi, all'interno della teoria delle situazioni. Fenomeni ben spiegati scientificamente, in modo dettagliato, senza ombra di dubbio, senza scappatoie (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, Sarrazy, 2010).

4. Le teorie successive

La teoria delle situazioni è stata una delle prime a nascere, tutti noi ricercatori in didattica della matematica di una certa età ne siamo stati affascinati; era la prima volta che dei matematici facevano riflessioni di questo tipo sull'apprendimento della matematica.

Ma poi la didattica della matematica si è evoluta, e sono nate tante altre teorie, inutile elencarle qui: ne vedremo brevemente qualcuna fra poco. Molte di esse sono evoluzioni della teoria delle situazioni, altre esaminano questioni diverse; alcune sono nate e defunte, altre si sono sviluppate in maniera impensabile.

Le teorie nascono e muoiono, si possono porre tra loro in contrasto o cercare di collegare o addirittura far collimare facendole aggregare in teorie più comprensive. Sono molti gli studi in questa direzione, noi ci limitiamo solo a citare: Prediger, Bikner-Ahsbahs, Arzarello (2008), Radford (2008a, b, 2011), Bikner-Ahsbahs, Dreyfus, Kidron, Arzarello, Radford, Artigue, Sabena (2010).

Ma le teorie nuove nascono con scopi ben precisi, non solo per assorbire ed includere le teorie precedenti, ma per studiare fatti che alle precedenti sfuggivano o per studiare fatti che alle precedenti non interessavano (D'Amore, 2007).

Così, teorie costruite successivamente a quella delle situazioni hanno avuto scopi diversi, sono state ben accettate nel panorama dei ricercatori internazionali, ma non hanno sostituito la teoria delle situazioni perché avevano altri scopi.

Per esempio, la teoria APOS (che descrive come le Azioni vengono interiorizzate nei Processi e poi incapsulate come Oggetti mentali, che prendono il loro posto in più sofisticati Schemi cognitivi) (Tall, 1999), creata da Ed Dubinski negli anni '80, ha avuto grande successo internazionale (e grandi critiche), ma tra i suoi scopi non c'è quello di capire le situazioni d'aula così come riesce a fare la teoria delle situazioni.

Per esempio, il grande apparato introdotto da Raymond Duval attorno al 1993 per mostrare come le attività di insegnamento – apprendimento della matematica in aula siano fortemente connesse con le tre azioni cognitive di rappresentare, trattare, convertire della semiotica, ha portato alla nostra disciplina frutti eccellenti, ma nulla aventi a che fare con le descrizioni che la teoria delle situazioni ci ha insegnato ad osservare e riconoscere (Duval, 1993, 1995).

Per esempio, la teoria EOS (Enfoque Onto Semiotico) ha un grande successo internazionale da quando fu creata lungo il corso degli anni '90 da uno dei gruppi di ricerca operanti presso l'università di Granada, quello con a capo Juan Godino; tale teoria ingloba la cosiddetta TAD (teoria antropologica della didattica) creata da Yves Chevallard nei primi anni '90, ma ha scopi dichiarati diversi da quelli della teoria delle situazioni (D'Amore, Godino, 2006, 2007; Font, Godino, D'Amore, 2007).

Per esempio, la teoria semiotico culturale di Luis Radford ha la capacità di spiegare modalità di apprendimento relazionate con attività semiotiche da parte degli studenti, per esempio nell'apprendimento della generalizzazione, che nessuna delle teorie precedenti ha, ma non include lo studio generale delle situazioni d'aula, che le sono estranee. Indubbiamente si tratta di una delle teorie che, più delle altre, ha cambiato il nostro atteggiamento di fronte all'apprendimento e alla didattica della matematica; in pochi anni si è imposta con una autorevolezza che lascia stupiti, tanto che non è facile ricostruirne la storia (cosa che noi abbiamo fatto, anche chiedendo aiuto allo stesso creatore: Radford, 1998, 2000a, b, 2001, 2003, 2006a, b).

E così via, potremmo continuare a lungo a citare teorie che hanno fatto seguito alla teoria delle situazioni, con le loro caratteristiche innovative e funzionali, a volte solo descrittive, a volte operative.

Ora, l'atteggiamento che si riscontra presso alcuni centri di ricerca e presso alcuni ricercatori e docenti di didattica della matematica di snobbare le teorie di una certa età a favore delle nuove è a dir poco ridicolo; uno degli articoli di Radford, presentato alla stampa nel 1998 uscì solo nel 2003 perché a quel tempo la maggior parte delle riviste di didattica della matematica rifiutava senza appello gli articoli che parlavano di semiotica; dobbiamo dire che, ancora nel 2005, uno degli autori di questo articolo incontrò una certa difficoltà a pubblicare un suo lavoro perché, diceva un referee «si cita troppo Raymond Duval» (abbiamo conservato quella lettera).[4]

Ma questo è quel che succede sempre, agli anticipatori; Guy Brousseau cominciò ad elaborare la sua teoria che poi ha avuto fortuna internazionale già negli anni '60, e nei '70 era già matura; ma gli toccò aspettare il 1986 per vedersi pubblicato il suo più famoso articolo, forse il più citato articolo al mondo del nostro settore (Brousseau, 1986). Il fatto è che negli anni '60 e '70 le riviste di, diciamo così, didattica della matematica, rifiutavano articoli così «strampalati e strani» come venivano allora giudicati i suoi; gli toccò pubblicare su una *Revue de laryngologie, otologie, rinologie* (Brousseau, 1980)! A quei tempi, i nomi che dettavano legge erano quelli di Zoltan Dienes, Georges e Frédérique Papy, … i quali, più che creare teorie, proponevano sistemi di insegnamento a volte bizzarri basati su proprie intuizioni. Gli studi di Brousseau dedicati a stroncare duramente questi approcci all'insegnamento della matematica sono ben noti ed hanno avuto un esito evidente: chi ricorda più questi nomi? Senza una teoria scientificamente basata su approcci epistemologici sensati e fondati, questi episodi sono destinati a perdersi.

Ma le teorie solide, quelle che danno risultati, quelle che permettono di capire l'atteggiamento di studenti e insegnanti nelle situazioni d'aula, non vanno dimenticate, anzi vanno messe alla base, all'inizio, di qualsiasi corso che possa servire a chi di queste teorie deve far uso concreto in aula, gli insegnanti, e ai futuri ricercatori (stiamo parlando, rispettivamente, di corsi per insegnanti in formazione iniziale o in servizio, e di corsi di master o dottorato). Altrimenti, un giorno, qualcuno crederà di scoprire quelle cose, ignaro che erano già state studiate, darà loro un nome nuovo, credendo di proporre un avanzamento nello studio della didattica della matematica.

Il che sarebbe ridicolo assai.

Sarebbe come ri-scoprire che esistono formule generali che usano solo operazioni razionali ed estrazione di radice quadrata per trovare le radici delle equazioni algebriche generali di III grado a coefficienti interi o razionali, con buona pace di Tartaglia e Cardano.

4. L'articolo uscì comunque nel 2006.

5. Ma non c'è solo la teoria delle situazioni …

Sempre traendo spunto dalle prove Invalsi, visto che se ne parla tanto … Nel 2012, in I media, è stato dato il seguente quesito:

Quale delle seguenti operazioni dà il risultato più grande?
☐ A. 10×0,5
☐ B. 10×0,1
☐ C. 10:0,5
☐ D. 10:0,1

Ed ecco il risultato ottenuto su un campione di oltre 20.000 studenti:

A: 71,2%; B: 4,9%; C: 10,0%; D: 10,8%;
Non risponde: 2,2%.

Meraviglia, sorpresa, sconforto, rabbia da parte degli insegnanti? No, ovvia risposta da parte degli studenti, diciamo noi. Se ci avessero chiesto in via preventiva quale sarebbe stato il risultato, lo avremmo azzeccato in pieno.

Nel libro D'Amore (1999), non a caso pubblicato anche in spagnolo e portoghese, nei capitoli 4, 5 e 12, si spiega esattamente che cosa si nasconde dietro questa risposta così gettonata, chiamando in causa tre tipologie di ricerche:

1. la teoria delle immagini e dei modelli nella costruzione della conoscenza matematica,
2. gli studi affascinanti e precisissimi di Efraim Fischbein (1920-1998),
3. alcune considerazioni di Gérard Vergnaud dei primi anni '80.

Tutto spiegato in poche pagine, tanto che non vale la pena di entrare qui in dettagli. Ma questo tipo di considerazioni, che spiegano benissimo il comportamento degli studenti, non sono più «di moda», quasi non si insegnano più nei corsi di didattica della matematica, si danno per scontate; ed è un atteggiamento sbagliato, controproducente. Se gli insegnanti di scuola primaria e media conoscessero queste teorie, saprebbero che cosa fare per evitare la scelta massiccia della risposta A:

1. aspettare a far creare agli studenti il modello (sbagliato) di moltiplicazione, lasciarlo ancora come una immagine che opera in N^2 in attesa di ampliare il dominio numerico a Q,
2. abbandonare lo stereotipo di «schieramento» come unico modello figurale intuitivo della moltiplicazione, fornendo invece altri modelli intuitivi per un unico modello formale, ed evitare in tutti i modi il sorgere di modelli parassiti,
3. allargare l'insieme delle situazioni che danno senso alle situazioni di moltiplicazione e divisione.

E così abbiamo citato implicitamente le tre teorie di base.

Ma se queste cose non si insegnano agli insegnanti in formazione e in servizio, continueremo ad avere la risposta A, continueremo a stracciarci le vesti in segno di furiosa reazione, continueremo a dare la «colpa» a degli studenti che abbiamo formato noi e che abbiamo obbligato noi a rispondere A, credendo (e qui esplode l'ironia) di fare il loro bene.

Testi citati

Bikner-Ahsbahs A., Dreyfus T., Kidron I., Arzarello F., Radford L., Artigue M., Sabena C. (2010). Networking of Theories in Mathematics Education. In: Pinto M.F., Kawasaki T.F. (Eds.). *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 1, 145-175. Belo Horizonte, Brazil: PME.
Brousseau G. (1980). Les échecs électifs dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. *Revue de laryngologie, otologie, rinologie*. 101, 3-4, 107-131.
Brousseau G. (1986). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. 7, 2, 33-115.
D'Amore B. (1996). *Elementi di didattica della matematica*. Prefazione di Colette Laborde. Bologna: Pitagora. I premio assoluto nazionale di pedagogia 2000: *Lo stilo d'oro*. [Versione in lingua spagnola ampliata ed aggiornata: 2006, *Didáctica de la matemática*. Prefazioni di Colette Laborde, Guy Brousseau e Luis Rico Romero. Bogotà: Magisterio]. [Versione in lingua portoghese ampliata ed aggiornata: 2007, *Elementos de didáctica da matemática*. Prefazioni di Colette Laborde, Guy Brousseau, Luis Rico Romero e Ubiratan D'Ambrosio. São Paulo: Livraria da Física].
D'Amore B., Franchini D., Gabellini G., Mancini M., Masi F., Matteucci A., Pascucci N., Sandri P. (1995). La ri-formulazione dei testi dei problemi scolastici standard. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 18A, 2, 131-146. [Questo articolo è stato ristampato in lingua inglese su: Gagatsis A., Rogers L. (Eds.) (1996). *Didactics and History of Mathematics*. Erasmus ICP 954 G 2011/11. Thessaloniki. 53-72].
D'Amore B., Godino D.J. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*. 1, 9-38.
D'Amore B., Godino D.J. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en Didáctica de la Matemática. *Relime*. 10, 2. 191-218.
D'Amore B. (2007). Voci per il dizionario: Frabboni F., Wallnöfer G., Belardi N., Wiater W. (Eds.) (2007). *Le parole della pedagogia. Teorie italiane e tedesche a confronto*. Torino: Bollati Boringhieri. Voci: Didattica disciplinare (pp. 72-75), Formazione in scienze naturali (pp. 140-142), Formazione in matematica (pp. 145-147), Scienza (pp. 335-337). [Esiste una versione di questo testo in lingua tedesca].
D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Marazzani I., Sarrazy B. (2010). *Didattica della matematica. Alcuni effetti del «contratto»*. Prefazione e postfazione di Guy Brousseau. Bologna: Archetipolibri.
D'Amore B., Sandri P. (1993). Una classificazione dei problemi cosiddetti impossibili. *La matematica e la sua didattica*. 3, 344-346. [Questo articolo è stato ristampato in: Gagatsis A. (Ed.) (1994). *Didactiché ton Mathematicon*. Erasmus ICP 93G 2011/II. Thessaloniki. 247-252 (in greco), 579-584 (in francese). Questo articolo è stato inoltre ristampato su: *Cahiers de Didactique des Mathématiques*. 16-17, giugno 1995, 11-28 (in greco), 103-110 (in francese)].
Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65.
Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.
Font V., Godino D.J., D'Amore B. (2007). An onto-semiotic approach to rappresentations in mathematical education. *For the learning of mathematics*. 27, 2, 2-7 and 14.
Prediger S., Bikner-Ahsbahs A., Arzarello F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *ZDM Mathematics Education.* 40, 165-178.
Radford L. (1998). On Signs and Representations. A Cultural Account. *Scientia Paedagogica Experimentalis*. 35 (1), 277-302.
Radford L. (2000a). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*. 42 (3), 237-268.
Radford L. (2000b). Students' processes of symbolizing in algebra. A semiotic analysis of the production of signs in generalizing tasks. In: Nakahara T., Koyama M. (Eds.) (2000). *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME-24). Hiroshima University, Japan. 4, 81-88
Radford L. (2001). Factual, Contextual and Symbolic Generalizations in Algebra. In: Marja van den Hueuvel-Panhuizen (Ed.) (2001). *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Freudental Institute, Utrecht University, The Netherlands. 4, 81-88.
Radford L. (2003). On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought. In: Anderson M., Sáenz-Ludlow A., Zellweger S., Cifarelli V. (Eds.) (2003). *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing*. Ottawa: Legas Publishing. 49-79.

Radford L. (2006a). Elements of a Cultural Theory of Objectification. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics*, Radford L., D'Amore B. (Eds.), *Culture and Mathematical Thinking*. 103-129.
Radford L. (2006b). Semiótica y educación matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics,* Radford L., D'Amore B. (Eds.), *Culture and Mathematical Thinking*. 7-21.
Radford L. (2008a). Theories in mathematics education: A brief inquiry into their conceptual differences. ICMI 11 Survey Team 7. *The notion and role of theory in mathematics education research*. Working paper.
Radford L. (2008b). Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities. *ZDM Mathematics Education.* 40, 317–327.
Radford L. (2011). La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación. El caso de la didáctica de las matemáticas [The evolution of paradigms and perspectives in research. The case of mathematics education]. In: Vallès J., Álvarez D., Rickenmann R. (Eds.) (2011). *L'activitat docente: intervenció, innovació, investigació* [*Teacher's activity: Intervention, innovation, research*]. Girona (Spain): Documenta Universitaria. 33-49.
Tall D. (1991). Reflections on APOS theory in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. In: Zaslavsky O. (Ed.) (1991). *Proceedings of the 23rd Conference of PME, July 1999*. Haifa, Israel. 1, 111–118.

2. Esperienze analoghe reale e virtuale a confronto nella scuola dell'infanzia

Laura Battaini[1], Alberto Battaini e Guido Gottardi[2], Silvia Sbaragli[3]

This research focuses on the comparison of two similar experiments carried out in kindergarten lived in the real and virtual environment through the use of *Cabri Elem*. The results obtained show that the use of technological means for this educational level has yielded good results showing in some ways richer and more effective than the situation into reality, to other more rigid and binding, thus demonstrating the importance of using different approaches and different didactic tools to achieve significant learning.

1. L'influenza delle tecnologie a livello didattico

Il supporto delle tecnologie didattiche, se usate con consapevolezza e criticità, ha oggi una grande influenza nell'interesse e nello sviluppo cognitivo dei bambini, perché può rappresentare un amplificatore delle capacità sensoriali, motorie e raziocinanti che racchiudono in sé le tre modalità di rappresentazione della realtà: attiva, iconica e simbolica (Bruner, 1992).

Alcuni studi sulle risorse digitali, in particolare sugli eserciziari on line, dimostrano i limiti di queste risorse sul piano didattico (Artigue, Gueudet, 2008) dato che il modello sottostante è nella maggioranza dei casi trasmissivo e ostensivo.

Le potenzialità delle tecnologie possono essere invece notevoli se si strutturano e realizzano situazioni significative di apprendimento aperte che coinvolgono attivamente gli allievi nel processo di costruzione delle conoscenze, stimolando la loro curiosità, incoraggiandoli alla scoperta e sollecitandoli a provare, sperimentare e verificare.

Le tecnologie possono consentire il ricorso in forma integrata a diversi linguaggi; si adattano a diversi stili di apprendimento, perché permettono l'attivazione di diversi canali sensoriali, rispondendo in modo efficace ai diversi stili cognitivi degli alunni; consentono di velocizzare e di rendere più accattivanti le lezioni frontali; sono utili per incentivare i processi di cooperazione, di ricerca e di autovalutazione; catalizzano fortemente l'attenzione e permettono di condividere contenuti con tutto il gruppo classe.

Integrare nuove e vecchie tecnologie può significare quindi proporre le attività didattiche in maniera sempre differente e perciò maggiormente stimolante, in modo da migliorare la qualità dei processi di insegnamento/apprendimento.

---

1. Docente SI Lugano.
2. Docenti SE, animatori del Gruppo Cabri Elem Ticino.
3. DFA – SUPSI, Locarno.

2. Il software *Cabri Elem*

In questi ultimi tre anni sono state realizzate in Ticino alcune esperienze con il software *Cabri Elem*, creato da *Cabrilog Francia*, che rappresenta un'evoluzione del noto *Cabri Géomètre*. Tale software, attualmente in fase di realizzazione e sperimentazione, permette la creazione di percorsi utili per sviluppare apprendimenti specifici nell'ambito della matematica.

In particolare, *Cabri Elem* può rappresentare una proposta molto interessante e intrigante per affrontare situazioni matematiche, per mezzo dell'informatica, adatte prevalentemente alla scuola elementare.

Come sostiene Colette Laborde (2010, p. 30): *«A causa della natura stessa della matematica, l'accesso agli oggetti matematici non può avvenire che in maniera indiretta, tramite la mediazione di rappresentazioni semiotiche (D'Amore, 2003; Duval, 2000). Il contesto di apprendimento in matematica è da questo punto di vista particolarmente sensibile nella scuola primaria, poiché si tratta d'introdurre contemporaneamente gli oggetti matematici e le loro rappresentazioni, quando gli allievi sono ancora nella fase di costruzione di conoscenze sulla realtà che li circonda. Dev'essere quindi svolto un triplice lavoro nell'insegnamento della matematica:*

- *introdurre gli oggetti matematici come modelli del reale;*
- *introdurre in maniera indissociabile le rappresentazioni di questi oggetti per poterne parlare e poter operare su di loro;*
- *contribuire a una migliore conoscenza del reale di pari passo con il procedere nel mondo matematico.*

L'informatica è in grado di fornire un nuovo tipo di rappresentazioni manipolabili, dinamiche e interattive. La creazione delle risorse deve partire da questo nuovo tipo di rappresentazioni per consentire il verificarsi di apprendimenti».

In particolare, il lavoro con *Cabri Elem* può implicare un approccio da parte dei docenti all'insegnamento – apprendimento della matematica che si sviluppa come ricerca – azione in aula e in un contesto in cui l'azione dell'allievo e l'errore assumono grande valore. Con l'uso di *Cabri Elem*, anche la manipolazione degli oggetti cambia; vengono infatti ampiamente favorite manipolazioni dinamiche e interattive, facendo riferimento alle teorie costruttiviste che evidenziano l'importanza della retroazione dell'ambiente rispetto all'azione del soggetto apprendente.

Con questo software, il docente programma le attività e le propone all'allievo, lavorando in due ambienti:

- *Cabri Elem Creator*, l'ambiente di creazione, che mette a disposizione diversi strumenti per la preparazione delle attività; molti di questi hanno attinenza con la geometria. Non è necessario possedere specifiche competenze informatiche per creare attività di geometria, mentre la programmazione di attività aritmetiche richiede qualche conoscenza tecnica maggiore.
- *Cabri Elem Player* è l'ambiente nel quale lavora l'allievo, dove è invitato a svolgere le attività che gli sono proposte. La grafica del *Player* richiama un foglio o un quaderno tradizionali.

È molto importante comprendere, inoltre, che ogni attività può essere archiviata in modo ragionato per tenere traccia e documentare i lavori fatti dagli allievi. In tal modo si può ritornare su contenuti e procedure, riprenderli per ulteriori confronti e riflessioni, modificarli, migliorarli, completarli…

In questa ricerca abbiamo voluto indagare l'impatto che può avere l'uso di questo software nella scuola dell'infanzia.

3. Un'esperienza con *Cabri Elem* nella scuola dell'infanzia

Nell'anno scolastico 2010/11 è stata condotta dal gruppo *Cabri Elem* una ricerca in alcune sezioni di scuola dell'infanzia che si è posta come obiettivo generale di indagare le abilità dei bambini nell'usare il computer in sezione e le differenze, i limiti e le potenzialità di un'attività virtuale rispetto a una analoga realizzata nel reale. Sono diversi i progetti che si sono occupati dell'inserimento delle tecnologie nella prima infanzia, evidenziando risultati interessanti dal punto di vista del miglioramento nei processi di insegnamento/apprendimento, basta pensare al progetto *KidSmart Early Learning*, promosso dalla fondazione IBM Italia e sperimentato con successo negli Stati Uniti e in sei paesi europei (Mantovani, Ferri, 2006). Gli obiettivi generali di questo progetto sono:

- avvicinare i bambini alla tecnologia;
- favorire i processi di apprendimento facendo leva sul gioco e sulla creatività;
- favorire la socializzazione tra i bambini;
- mettere in atto un programma di formazione per gli insegnanti atto a rendere le tecnologie «familiari» in modo da integrarle correttamente nel curriculum prescolare.

L'uso delle tecnologie nella scuola dell'infanzia può costituire un arricchimento dei contesti formativi, soprattutto tenendo conto che i bambini di oggi sono «nativi digitali». Come affermano Costabile e Serpe (2009, p. 9): *«Il computer, come strumento informatico, mette a disposizione del bambino capacità di progettare strategie, di imparare a imparare, ma soprattutto di imparare facendo; pertanto, nella scuola dell'infanzia non deve essere considerato solo come uno 'strumento per imparare', ma un ausilio didattico per consentire forme di comunicazione ed interazione, attraverso procedure interattive, che permettono la maturazione di abilità mentali superiori e tecniche operative di apprendimento».*

Come affermano gli «Orientamenti programmatici per la scuola dell'infanzia – Ufficio delle scuole comunali» del Canton Ticino (2010): *«La scuola dell'infanzia non è luogo d'insegnamento di discipline. Non si tratta perciò di presentare concetti o anticipare contenuti tipici della scuola elementare, ma di lavorare con situazioni che presentano una valenza matematica. I bambini nella scuola dell'infanzia non fanno matematica, ma esperienze per avviare abilità di tipo profondo espresse nel linguaggio e nell'atteggiamento positivo verso la ricerca di soluzioni in ambito matematico: il tutto sul terreno della quotidianità, cioè dei vari momenti ricorrenti che si susseguono nella giornata educativa»*. Più avanti nello stesso testo si afferma: *«Il mondo è pieno di nu-*

meri, quindi risulta importante valorizzare le precedenti esperienze dei bambini nel contare e nel riconoscere simboli numerici, fatte nei contesti di gioco e di vita familiare e sociale», per questo abbiamo scelto l'aritmetica come ambito privilegiato di analisi.

Già ricerche precedenti condotte nella scuola dell'infanzia (Costabile, Serpe, 2010a) avevano messo in evidenza che adeguati ambienti apprenditivi con il software didattico *INF@0.1* (Costabile, Golemme, 2007) contribuiscono a rafforzare apprendimenti specifici in matematica.

4. Domande di ricerca

Le domande che ci siamo posti sono le seguenti:

D1. Quali sono le capacità e le conoscenze dei bambini di scuola dell'infanzia nel campo informatico (uso del mouse e/o del trackpad, intuizioni riguardanti i pulsanti presenti nelle varie schermate e il loro uso, capacità di affrontare a livello informatico situazioni nuove e/o impreviste, …)?

D2. Quali differenze si possono rilevare a livello cognitivo e socio-affettivo tra due situazioni numeriche analoghe, una condotta in una situazione reale e una virtuale? In particolare, quali diverse strategie e abilità sono messe in campo nelle due situazioni analoghe: reale e virtuali e quali diversi atteggiamenti?

5. Ipotesi di ricerca

Le ipotesi di ricerca iniziali sono le seguenti:

I1. A nostro parere i bambini di scuola dell'infanzia possiedono numerose competenze di base in campo informatico, come: muovere il mouse, usare la tastiera, dimostrare buone capacità nel gestire gli strumenti disponibili (pulsanti di riascolto, freccia per passare alla pagina successiva, …).

I2. A nostro parere dal punto di vista socio-affettivo la situazione virtuale può risultare per i bambini maggiormente coinvolgente e accattivante, essendo un'esperienza che esula da quelle che solitamente vengono proposte, consentendo così di rilevare una maggiore predisposizione da parte dei bambini a eseguire l'attività. Inoltre, dal punto di vista disciplinare, con quantità numeriche piccole (fino al 10) non dovrebbero emergere differenze sostanziali tra l'esperienza condotta nel reale e quella condotta a livello virtuale, mentre con quantità più grandi le potenzialità offerte dall'ambiente informatico dovrebbero condurre a prestazioni migliori: la presenza del numero scritto e udito (valore aggiunto dell'attività con il computer, difficile da realizzare nel reale) e il cambiamento dei numeri rappresentati nello stagno[4] dovrebbero aiutare il bambino a individuare il numero di oggetti presenti dopo spostamenti.

4. La schermata interattiva rappresenta uno stagno popolato da animaletti che si possono spostare a piacimento (vedere le immagini che seguono).

6. Metodologia e campione di riferimento

La ricerca è stata articolata in tre fasi: progettuale, operativa e di analisi ed ha avuto durata temporale di un anno scolastico. La fase progettuale è consistita nello studio e nella realizzazione di quaderni Cabri Elem specifici per questo livello scolastico, che potessero risultare accattivanti per i bambini e allo stesso tempo significativi dal lato degli apprendimenti. Tali quaderni sono stati resi disponibili ad alcune sezioni campione, allo scopo di calibrarli al meglio dal punto di vista della comprensione e dell'uso da parte dei bambini. In seguito è stato strutturato lo scaffolding inerente la ricerca basato sulla proposta di due attività aritmetiche analoghe: la prima realizzata nel reale con oggetti concreti e la seconda realizzata, una quindicina di giorni dopo, con l'uso del computer, allo scopo di rilevare le competenze mostrate dai bambini del III livello (5 anni) nei due diversi contesti (reale/virtuale). Si sono così creati percorsi apprenditivi analoghi per confrontare vissuti esperienziali plurisensoriali con situazioni di realtà virtuale.

Le analogie tra le due attività sono facilmente riscontrabili leggendo le domande poste ai bambini.

Le attività erano accompagnate da un colloquio individuale per indagare più in profondità le conoscenze e le abilità dei bambini in ambito prevalentemente aritmetico e in parte informatico. Tale colloquio è stato impostato in modo da dare la massima attenzione alle intuizioni dei bambini e allo scopo di promuovere l'esplorazione e la scoperta in ogni singola fase. Tutte le esperienze sono state filmate, riviste e analizzate da parte dello stesso ricercatore.

Abbiamo inoltre coinvolto le docenti titolari, chiedendo loro di assistere all'attività, senza influenzare il bambino, per creare un clima sereno e per renderle partecipi di questa esperienza.

È poi seguita la fase di riflessione e analisi comparativa tra gli atteggiamenti e i comportamenti dei bambini messi in atto nei processi formativi reale e virtuale, e quali diverse risorse e strategie sono state utilizzate. Le sezioni coinvolte nella ricerca sono tutte ticinesi: una della scuola dell'infanzia di Bissone; una della scuola dell'infanzia Bozzoreda di Pregassona (Lugano); tre della scuola dell'infanzia Piccolo Mondo di Pregassona (Lugano); una della scuola dell'infanzia di Taverne.

Si tratta di quattro sedi di città (tre sezioni di una stessa sede, che ne comprende quattro e una di una sede un po' più piccola, che ne comprende due), una di un paese relativamente grande e una di uno piccolo. Soprattutto nelle sedi di città abbiamo la presenza, in stragrande maggioranza, di allievi di origine straniera, alcuni con qualche difficoltà linguistica derivante da un uso quotidiano di un'altra lingua.

Il campione intervistato comprende:
- 18 Maschi: (15 nati nel 2005; 4 nel 2004)
- 21 Femmine: (18 nati nel 2005; 2 nel 2004).

7. Attività proposte

7.1. Situazione reale R

Prima fase 10 banane-giocattolo da spostare da un piatto a un altro; i piatti risultano diversi come forma.

Inizialmente si chiedeva ai bambini di spostare liberamente le banane da un piatto all'altro; quando sembravano soddisfatti del loro lavoro, li si interrompeva per porre le seguenti domande:

– *Quante banane ci sono in questo piatto? E in quello?*
– *Che cosa succede ai numeri se sposto una banana da un piatto all'altro? Come hai fatto a dirlo?*

Dopo aver messo 4 banane in un piatto e 6 nell'altro:

– *Dove ci sono più banane? Come fai a dirlo?*
– *Prepara tu 2 piatti con quantità diverse e io indovino dove ce ne sono di più.*

Abbiamo poi rimesso le 10 banane dalla stessa parte e chiesto:

– *Fai in modo che restino solo 4 banane da questa parte.*

Seconda fase Le 10 banane precedenti più altri 10 frutti, uguali fra loro (i bambini potevano scegliere tra mele o pere) da spostare da un piatto a un altro. Si lasciavano provare i bambini dapprima liberamente; quando sembrava fossero soddisfatti del loro lavoro, si interrompevano e si ponevano le seguenti domande:

– Quante sono le banane in tutto? Quante mele (o pere) ti devo dare per averne la stessa quantità?
– Quante banane e quante mele ci sono in questo piatto? E in questo? (dopo aver proceduto a diversi spostamenti).
– Fai in modo che ci sia la stessa quantità di banane e di mele (o pere) nelle due parti. Come fai a dirlo?

L'attività qui descritta ha origini nobilissime, dato che si basa e ricalca i primi celebri esperimenti di Guy Brousseau sul conteggio, degli anni '70, che tanta fortuna ebbero e che segnarono una decisiva svolta negli studi in didattica della matematica. Anzi, questo è un bell'esempio di come oggi, avendo a disposizione strumenti attraenti e sofisticati, possiamo ancora sfruttare ottimi esempi di pratica didattica in un ambiente diverso.

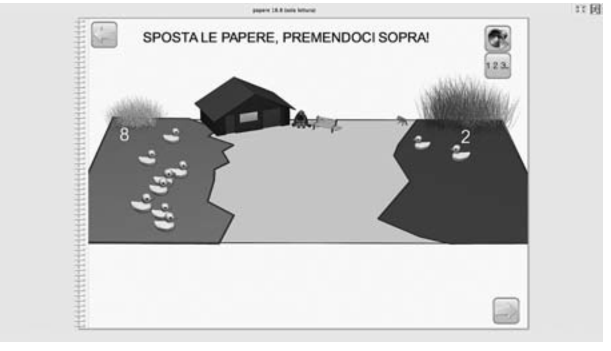
7.2. Situazione virtuale V

Le situazioni virtuali proposte si basano essenzialmente sul vissuto esperienziale, quindi su una forma percettivo-motoria dell'oggetto.

Prima fase Schermata con 10 papere, due stagni, uno più chiaro e uno più scuro (il numero di parere coincidente al numero di banane della situazione nel reale è stato scelto per creare una stretta analogia dal punto di vista numerico).

Gli aiuti offerti dalla situazione virtuale sono:

- la possibilità di riascoltare la consegna (offerta anche nella situazione reale);
- numero delle papere visibile in cifre;
- la possibilità di ascoltare il nome delle cifre.



Si lasciavano provare i bambini dapprima liberamente; quando sembrava fossero soddisfatti del loro lavoro, li si interrompeva e si ponevano le seguenti domande:

- *Quante papere ci sono in questo stagno? In quello?*
- *Che cosa succede a questi numeri se sposto una papera di qua? Come hai fatto a dirlo?*

Abbiamo spostato 4 papere nello stagno chiaro e 6 in quello scuro:

- *Dove ci sono più papere? Come fai a dirlo?*
- *Quante sono le papere in tutto?*
- *Prepara tu 2 stagni con quantità diverse e io indovino dove ce ne sono di più.*

Dopo aver rimesso le 10 papere nello stagno chiaro.

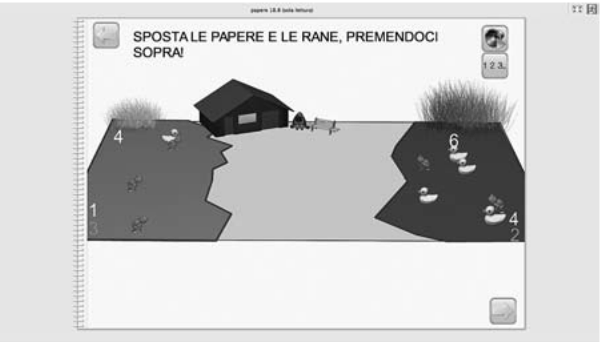
- *Fai in modo che restino solo 4 papere nello stagno più chiaro.*
- *Quante papere ci sono in tutto?*

Seconda fase Schermata con 10 papere e 10 rane, due stagni, uno più chiaro e uno più scuro.

Gli aiuti offerti dalla situazione virtuale sono:

- possibilità di riascoltare la consegna (offerta anche nella situazione reale);

– all'interno degli stagni ci sono tre numeri: quello giallo delle papere, quello verde delle rane e quello bianco corrispondente al totale (tutti «udibili»);



Si lasciavano provare i bambini dapprima liberamente; quando sembrava fossero soddisfatti del loro lavoro, li si interrompeva e si ponevano le seguenti domande:

– *Quante papere ci sono in questo stagno? In quello? Quante rane?*
– *Quante papere e quante rane ci sono nello stagno chiaro? E in quello scuro? (dopo aver proceduto a diversi spostamenti).*
– *Fai in modo che ci sia la stessa quantità di rane e di papere nei due stagni. Come fai a dirlo?*

È seguito poi un momento più libero, durante il quale siamo andati più in profondità con le domande con chi dimostrava di usare i numeri con disinvoltura (A che cosa servono questi numeri? Il numero bianco che cosa indica? E gli altri?…).

8. Risultati di ricerca

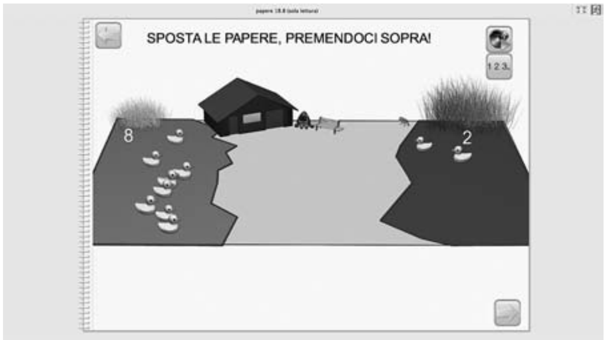
8.1. Conoscenze e abilità informatiche

Ai bambini è stato chiesto se sapevano usare il computer.

– 25 rispondono di sì (alcuni dichiarano di usarlo anche da soli);
– 13 dicono di non averlo mai usato;
– 1 bambina afferma di usarne uno finto.

Durante il lavoro non si notano differenze sostanziali tra chi dichiara di aver già utilizzato il computer e gli altri, se non la necessità di qualche minuto in più per prendere dimestichezza con gli strumenti.

Tutti dimostrano comunque di essere a loro agio con questo strumento e di sapere come muoversi. Ad esempio nessuno esita ad usare la freccia verde per muoversi da una pagina all'altra, anche senza indicazioni da parte dell'adulto, così come tutti scoprono immediatamente come spostare una papera da uno stagno all'altro.



Ciò è in linea con quello che dichiarano diversi studi in questo àmbito: «Se prendiamo in considerazione i bambini tra gli 0 e i 12 anni, ci rendiamo conto che sono loro i veri nativi. Hanno un'esperienza diretta sempre più precoce degli schermi interattivi digitali – consolle per i videogiochi, cellulari, computer, iPod – così come della navigazione in Internet. Nelle loro case e nelle loro camerette, infatti, i media digitali sono sempre più presenti insieme alle esperienze di intrattenimento, socializzazione e formazione che vengono mediate e vissute attraverso Internet e i social network, oltre che dalle consolle per videogiochi» (Gruppo NumediaBios, 2008/2009).

8.2. Confronto dei risultati tra situazione reale R e virtuale V



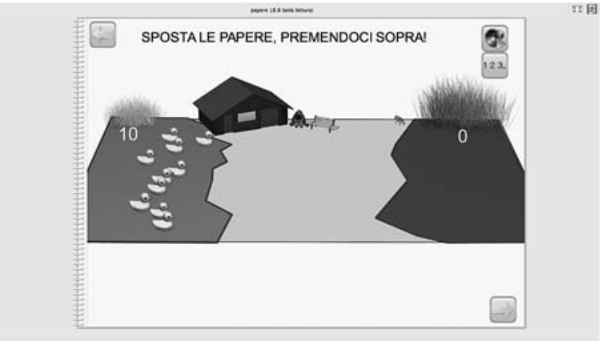

8.2.1. Confronto prima fase

R1. Quante banane ci sono nel piatto quadrato? E nel piatto rotondo? (Dopo averne spostate alcune a piacere).
– 35 bambini su 37 riescono a dare una risposta corretta. Questi bambini procedono con il conteggio; una ventina non ha bisogno di contare le ba-

nane se la quantità è uguale o inferiore a 4, dando perciò la risposta immediatamente, mentre contano le banane nell'altro piatto.
– solo 2 bambini su 37 non danno la risposta esatta, dimostrando di non riuscire a contare oltre il cinque o il sei («Non so dirlo perché non sono grande come la mamma»; «Uno, due, tre, quattro, cinque, sedici, trenta, …»).

V1'. Quante papere ci sono nello stagno chiaro? E in quello scuro? (Dopo averne spostate alcune, a piacere).
Tutti i 39 bambini danno la risposta corretta.
– 29 riconoscono i numeri senza esitazione; alla domanda: «Come fai a dirlo?» rispondono: «Guardo il numero scritto»;
– 8 procedono in parte con il conteggio, poi scoprono i numeri scritti;
– 2 procedono con il conteggio.

Fin dall'inizio si notano differenti atteggiamenti nei confronti dell'attività: maggiore motivazione e grande entusiasmo nel lavorare con il computer e una maggiore sicurezza dovuta alla presenza dei numeri scritti. Anche la presenza di elementi grafici nella schermata contribuisce ad aumentare l'interesse per l'attività (particolarmente apprezzata la presenza del cane che abbaia, anche se poco rilevante per quanto riguarda l'aspetto disciplinare). Va osservato che la difficoltà linguistica di alcuni bambini messa in evidenza nel paragrafo 6 non influenza la capacità di comprendere e di dare una risposta alle domande previste dall'attività.



R2. Come cambiano i numeri se sposto una banana da un piatto all'altro?
– 31 bambini su 37 rispondono esattamente, sia dalla parte dove le banane aumentano, sia dalla parte dove diminuiscono;
– 3 bambini sbagliano a dare la risposta nella parte dove le banane aumentano;
– 2 bambini sbagliano a dare la risposta dove le banane diminuiscono;
– 1 solo bambino non riesce a dare la risposta corretta ai numeri di nessuno piatto.
Tutti procedono a verificare la risposta tramite reiterati conteggi.

V2'. Che cosa succede ai numeri se sposto una papera da uno stagno all'altro? (Si chiedeva ai bambini di anticipare, rispondendo alla domanda prima di eseguire l'operazione).

– 28 bambini su 39 rispondono in modo esatto nella parte dove si deve aggiungere;
– 20 rispondono correttamente dalla parte dove si deve sottrarre.

Dopo aver eseguito l'operazione, al momento del controllo, solo 2 bambini procedono con un conteggio, gli altri guardano i numeri, dimostrando una buona consapevolezza, leggendoli senza ricorrere al loro ascolto (cosa comunque sempre possibile; qualcuno lo fa solo per il piacere di sentire la voce, utilizzando questa possibilità come gioco più che come necessità).

In questa seconda situazione, ancor più che nella prima, la presenza dei numeri facilita molto, soprattutto dal punto di vista motivazionale, permettendo ai bambini di non dovere ricorrere sempre al conteggio. Nel reale questa necessità di contare continuamente per rispondere alla domanda demotiva ben presto soprattutto i bambini maggiormente in difficoltà; la presenza dei numeri si dimostra quindi importante soprattutto per loro. Dal lato cognitivo i risultati sono confrontabili; a volte il conteggio nel reale porta a un risultato più corretto rispetto alla decodifica del numero scritto a livello virtuale.

R3. Chiudi gli occhi; noi spostiamo le banane (6 da una parte e 4 dall'altra) e tu devi dirci, una volta aperti gli occhi, da che parte ce ne sono di più.

– 32 bambini su 37 danno la risposta esatta immediatamente;
– 4 su 37 hanno qualche esitazione prima di rispondere, per poi rispondere comunque correttamente;
– 1 solo bambino dà la risposta sbagliata.

Come fai a dirlo?

– La stragrande maggioranza (30 su 39) dice di aver contato;
– Gli altri motivano la risposta in altro modo: «Perché ho visto che sono di più»; «Perché sì»; «Perché il piatto è più grande»; …

Il tipo di domanda basata sulla riflessione e spiegazione delle proprie scelte pone ad alcuni bambini diverse difficoltà, per questo alcuni forniscono risposte non attinenti con la domanda posta.

V3'. Chiudi gli occhi; noi spostiamo le papere (6 da una parte e 4 dall'altra) e tu devi dirci, una volta aperti gli occhi, da che parte ce ne sono di più.

Tutti rispondono in modo corretto, senza grandi incertezze.

Come fai a dirlo?

– 29 affermano di aver guardato i numeri;
– 2 di aver contato;
– altre motivazioni: «Non lo so perché»; «Perché ce ne sono un po' troppe da questa parte»; «Perché le hai spostate»; …

Anche in questo caso la presenza dei numeri si dimostra particolarmente importante, soprattutto per i bambini più in difficoltà, perché rassicurati dalla loro presenza e perché permette loro di non ricorrere sempre al conteggio; anche nel reale comunque l'esiguità degli oggetti permette una verifica quasi immediata.

R4. A questo punto a 28 bambini che si sono resi disponibili a continuare l'attività abbiamo proposto di diventare protagonisti, preparando i due piatti mentre noi tenevamo gli occhi chiusi. Abbiamo chiesto loro di trovare una soluzione «difficile».

– 11 presentano piatti assai squilibrati dal punto di vista numerico, facilmente identificabili;
– 7 ripropongono la situazione 6 e 4;
– 4 bambini propongono la soluzione 5 e 5, dimostrando di essere coscienti della difficoltà (su richiesta esplicita dell'adulto riescono ad argomentare la loro scelta, giustificandola ampiamente);
– 6 bambini propongono la soluzione 5 e 5, ma senza essere coscienti del fatto che i due piatti presentano lo stesso numero di banane. Alla richiesta, infatti, di spiegare perché la loro proposta fosse difficile, rimangono sorpresi, non sanno rispondere e l'impressione è che la scelta sia stata abbastanza casuale.

V4'. A 30 bambini abbiamo proposto di diventare protagonisti, preparando i due stagni mentre noi tenevamo gli occhi chiusi. Abbiamo chiesto loro di trovare una soluzione «difficile».

– Tutti gli interpellati preparano coscientemente due stagni con 5 papere da una parte e 5 dall'altra.

Qui le differenze sono notevoli: nel reale è risultata più divertente (alcuni bambini hanno nascosto un piatto in modo da ricorrere forzatamente al conteggio) e i bambini si sono dimostrati molto interessati, anche perché diventavano protagonisti. Con il computer invece è risultato tutto più facile ma, forse proprio per questo, meno interessante; per questo molti bambini sono voluti passare velocemente alla domanda successiva.

R5. Fai in modo che restino solo 4 banane nel piatto rotondo (dove sono state spostate tutte).

– 19 bambini su 37 procedono spostando una banana alla volta e reiterando il conteggio;
– 2 bambini procedono spostando le banane a due a due;
– 2 bambini spostano tutte le banane nel piatto quadrato, poi ne rimettono 4 in quello rotondo;
– 13 spostano le banane a mucchietti, reiterando i conteggi e aggiustando finché rimangono 4 banane nel piatto rotondo;
– 1 bambina isola 4 banane nel piatto rotondo e sposta poi le altre (è una delle bambine che ha dimostrato di essere più in difficoltà).

V5'. Fai in modo che restino solo 4 papere nello stagno scuro (dopo averle messe tutte nello stagno scuro).

– 32 spostano le 6 papere, controllando i numeri; non si preoccupano troppo delle papere che spostano, guardano soltanto il numero scritto dello stagno scuro, aspettando che diventi 4. Qualche difficoltà si è mostrata soltanto nello stabilire quale sia lo stagno scuro e quale il chiaro, derivante da una poca differenza nelle tonalità del colore.

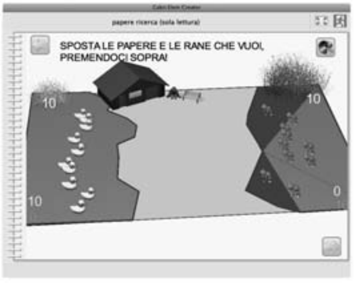
– 7 spostano le papere e le contano dalle due parti.

8.2.2. Confronto seconda fase

R1. Quante sono le banane in tutto? Quante mele (o pere) ti devo dare per averne la stessa quantità?

– 30 bambini devono ricontare le banane per dire che sono 10; alcuni le devono ricontare anche dopo pochi secondi, alla richiesta di sapere quante devono essere le mele;
– solo 3 bambini ricordano il numero esatto, senza dover procedere ad un conteggio;
– 5 sbagliano il conteggio e dichiarano un numero di banane diverso da 10.

V1'. Quante papere ci sono in tutto? (Con il computer non è stato possibile chiedere: «Quanti oggetti ti servono per avere la stessa quantità», in quanto le rane erano già presenti nella schermata proposta).



– 15 rispondono effettuando un calcolo (addizione), esplicitando «… di qua ce ne sono 3, di là 7, in tutto fa 10»;
– 13 spostano tutte le papere in uno stagno e guardano il numero scritto;
– 7 contano le papere a una a una;
– 4 non rispondono, cambiando argomento o affermando di non saperlo.

Nessuno, né nel reale né con il computer, dimostra di «ricordare» che gli oggetti sono 10. La richiesta di sapere quanti sono gli oggetti in tutto comporta nel reale un conteggio reiterato che porta ben presto a un affaticamento eccessivo; con il computer è invece possibile ripetere più volte (dopo aver spostato ulteriormente le papere) la stessa domanda, soprattutto a quei bambini che ricorrono all'addizione. Saper rispondere correttamente si dimostra inoltre molto gratificante, per la soddisfazione personale di riuscire a superare una situazione difficile.

R2. Quante banane e quante mele ci sono in questo piatto? E in questo? (Dopo aver proceduto a diversi spostamenti).

– 31 bambini danno la risposta corretta procedendo a reiterati conteggi;

– 6 forniscono la risposta immediatamente, senza contare, nel caso le banane siano meno di 5 e procedendo al conteggio solo dove la quantità è maggiore.

V2'. Quante papere e quante rane ci sono nello stagno chiaro? E in quello scuro? (Dopo aver proceduto a diversi spostamenti).
– 19 bambini danno la risposta corretta guardando subito il numero scritto in bianco;
– 14 danno la risposta corretta, guardando i numeri colorati scritti;
– 6 procedono con un conteggio.

R3. Prepara due piatti uguali, uno per te e uno per la/il tua/o amica/o.
– 16 bambini procedono con reiterati conteggi, mettendo a posto di continuo le quantità fino ad equilibrare i due piatti;
– 14 bambini procedono mettendo prima tutte la banane da una parte e le mele dall'altra, poi spostando una banana e una mela per volta, contandole; alcuni si fermano «eliminando» alcuni oggetti, considerati in esubero; li reintegreranno alla fine e solo su esplicita richiesta.
– 5 bambini consegnano un piatto con tutte le banane e uno con le mele;
– 3 bambine procedono con una soluzione iconica che abbiamo definito «artistica»: creano un disegno (una faccia, una barca) da una parte e la riformano dall'altra, correggendo fino a che tutte e due le figure sono uguali.

– 1 sola bambina non fornisce la soluzione, dichiarando di essere stanca e di voler cambiare attività.

V3'. Fai in modo che ci siano due stagni uguali.
– 14 bambini mettono 5 rane e 5 papere in ogni stagno;
– 12 mettono 10 animali per parte, senza preoccuparsi della distinzione tra papere e rane;
– 9 mettono tutte le papere da una parte e tutte le rane dall'altra;
– 2 mettono 6 rane e 6 papere da una parte e 4 rane e 4 papere dall'altra;
– 1 bambino sposta tutto in uno stagno poi sposta 1 papera e 1 rana per volta fino a raggiungere l'equilibrio;
– 1 bambina conta ripetutamente le due quantità, malgrado avesse già detto che c'erano i numeri.

Nel reale ha particolarmente colpito la soluzione iconica definita «artistica», non riproducibile con il computer (il percorso delle papere e delle rane è unico, predefinito; non è possibile disporle a piacimento).

Con il computer è stato interessante notare le varie soluzioni, in gran parte dovute a diverse interpretazioni della richiesta volutamente ampia: due stagni uguali. I numeri scritti sono comunque sempre messi in gioco; anche nella soluzione «6 rane e 6 papere da una parte e 4 rane e 4 papere dall'altra» il numero scritto gioca evidentemente un ruolo molto importante. In questo caso i bambini guardano solo i numeri «verdi e gialli» (papere e rane), senza considerare quello bianco (numero totale), non capendo così la funzione specifica di ciascun numero rappresentato.

R4. Alla domanda posta: «Quanta frutta c'è in tutto?» quasi tutti i bambini dimostrano difficoltà con quantità superiori al 10. Questa domanda è stata inserita durante lo svolgimento della ricerca, suggerita dalle risposte precedenti dei bambini. È sembrato interessante approfondire ulteriormente l'aspetto numerico; se, nel conteggio, la maggior parte non ha problemi fino al 12-13, a partire dal 14 alcuni cominciano ad essere insicuri. È lo stesso motivo che ci ha portati ad inserire la possibilità di «ascoltare» i numeri nelle schermate al computer.

V4'. Che cosa indica il numero bianco?

– 27 bambini rispondono che indica il numero di tutti gli animali, delle papere e delle rane messe assieme (senza che fosse stato dichiarato dal ricercatore in precedenza);
– 6 dichiarano di non saperlo;
– ci sono poi altre risposte varie: «È il numero del cane»; «Non conta niente»; «È il numero dello stagno», …

Che numeri sono quelli colorati? A che cosa servono?
(domande non poste a tutti).

– 23 bambini danno la risposta corretta;
– 6 danno la riposta corretta solo dopo alcune prove;
– 5 confondono i numeri (in questo caso mostriamo loro che li possono «ascoltare»);
– altre risposte varie: «20 papere e 10 rane»; «Sono le zampe delle rane»; «È il numero di là»; «È il numero di niente»; …

Ai bambini che si sono dimostrati particolarmente capaci abbiamo chiesto in seguito il numero totale degli animali.

– 5 bambini hanno risposto eseguendo correttamente un'addizione;
– 2 hanno nominato le 10 papere e le 10 rane, poi hanno aggiunto il cane;
– 3 hanno proceduto ad un conteggio di tutti gli animali (cane compreso).

Per questa domanda le differenze tra reale e virtuale sono notevoli: nel reale, ancora una volta, i reiterati conteggi, benché necessari, provocano ben presto demotivazione e stanchezza; con il computer invece la presenza dei numeri (e dei colori diversi, a dipendenza della funzione del numero stesso) permette approfondimenti maggiori e i bambini si dimostrano molto interessati e partecipano molto volentieri. Nel virtuale vi è inoltre la presenza di animali «di disturbo» (il cane) che permette di complicare la domanda e richiede maggiore attenzione e di uscire dallo schema papere/rane.

9. Risposte alle domande di ricerca

Siamo ora in grado di rispondere alle domande di ricerca:

R1. I risultati hanno dimostrato che i bambini usano il computer con grande facilità, anche quelli che hanno dichiarato di non averlo mai utilizzato. Tutti i bambini hanno velocemente compreso la funzione dei vari pulsanti; anche di fronte a pulsanti nuovi sono riusciti a usarli coerentemente, grazie a tentativi e intuizioni. Per quanto riguarda invece mouse e trackpad, i bambini hanno dimostrato di avere abilità differenti: alcuni maneggiavano con facilità e sicurezza sin da subito entrambi gli strumenti, altri hanno inizialmente faticato con entrambi, soprattutto perché l'attività richiede grande precisione, visto che bisogna premere su un'immagine relativamente piccola (papera o rana) per far partire l'animazione e perciò lo spostamento della stessa.

R2. A livello cognitivo le esperienze effettuate hanno permesso di notare alcune differenze sostanziali tra reale e virtuale. Nell'attività virtuale la presenza dei numeri scritti che cambiano al variare delle quantità presenti negli stagni ha permesso ai bambini, come previsto, di evitare molti e reiterati conteggi, favorendo da una parte l'associazione tra numero scritto e quantità (i bambini potevano vedere con immediatezza il numero che cresceva o diminuiva al variare del numero degli oggetti presenti) e ha permesso a molti bambini di trovare strategie diverse dal conteggio.

Diversi bambini hanno eseguito delle vere e proprie operazioni, soprattutto di addizione ma anche di sottrazione: «Da questa parte ci sono 7 papere; se ne sposto una diventano 6»; «Le papere sono 10 in tutto; se da questa parte ce ne sono 2, dall'altra ce ne sono 8, perché 8 e 2 fa 10». Inoltre, in questo tipo di esperienza i bambini si dimenticavano meno una quantità già dichiarata, rispetto alle attività svolte nel reale, in quanto la presenza del numero non lo permetteva; ciò ha consentito una maggior velocità di esecuzione, una maggior precisione ma anche maggiore disponibilità ad affrontare ulteriori domande o difficoltà.

In generale, nel virtuale più bambini sono riusciti a dare risposte corrette rispetto al reale, grazie agli strumenti forniti.

Va però segnalato che una difficoltà riscontrata nell'attività con il computer è stata la presenza di più numeri nella schermata con papere e rane che ha confuso alcuni bambini portandoli a considerare il numero totale degli animali presenti (bianco) come risposta alla domanda: «Quante rane ci sono?». Solo dopo la richiesta di un controllo la maggior parte dei bambini si è resa conto che i numeri da considerare erano altri (numero verde per le rane, giallo per le papere). Nell'attività virtuale rispetto a quella nel reale, alla richiesta di formare due stagni «uguali», si è notato un aumento di bambini che metteva tutte le papere da una parte e le rane dall'altra, oppure che terminavano l'attività quando avevano 10 oggetti per parte, indipendentemente dalla «qualità» degli stessi, dando così maggior importanza al numero. Inoltre, l'attività virtuale, più rigida in questo caso rispetto a quella nel reale, non ha permesso quelle soluzioni che abbiamo definito «artistiche», in cui i bambini si aiutavano con le forme per dividere gli oggetti o usavano la strategia di eliminare oggetti in esubero.

Per quanto concerne la motivazione ad effettuare l'attività:

– nel reale 6 bambini (anche se con tempi e forme diverse) si sono stancati abbastanza presto di fare l'attività e hanno voluto cambiarla o hanno cominciato a parlare d'altro;
– nel virtuale con 3 bambini (gli stessi che già non avevano completato l'attività nel reale) non siamo riusciti a completare il percorso. Si tratta di bambini già segnalati al servizio di sostegno pedagogico e dichiarati non pronti ad entrare nella scuola elementare, che hanno avuto cali di concentrazione e che si sono lasciati distrarre da altro («Cambiamo gioco»; «Cosa c'è qui?», …). A livello socio-affettivo l'uso della macchina si è dimostrato molto accattivante e ha permesso ad alcuni di accorgersi più facilmente di eventuali errori senza «subire» l'intervento dell'adulto (ad esempio, quando i bambini dovevano anticipare quante papere sarebbero rimaste in uno stagno, potevano facilmente accorgersi di aver sbagliato la previsione e perciò correggersi).

10. Conclusioni

Il confronto delle due esperienze analoghe vissute nel reale e in ambiente virtuale è stato estremamente interessante e arricchente per tutte le persone coinvolte e ha fornito aspetti di positività, nella direzione degli obiettivi pedagogici-formativi e disciplinari prefissati. In particolare, il passaggio dalla realtà sensibile a quella virtuale e viceversa si è manifestato non solo possibile, ma efficace e produttivo, come avevano dimostrato anche ricerche effettuate da Costabile e Serpe (2010).

Tramite i risultati ottenuti, possiamo affermare che l'uso del mezzo informatico ha fornito buoni risultati mostrandosi per certi aspetti più ricco ed efficace rispetto alla situazione nel reale, per altri più rigido e vincolante, dimostrando così l'importanza di usare didatticamente diversi approcci e diversi strumenti per raggiungere apprendimenti significativi. In particolar modo, la dimensione ludica insieme a quella interattiva fornita dall'uso del computer ha favorito aspetti motivazionali, interesse concreto per lo strumento informatico, aumento della partecipazione.

Il computer come mediatore può rappresentare nella scuola dell'infanzia un potente strumento didattico che, utilizzato in maniera critica e adeguata, può sviluppare competenze cognitive e metacognitive. Va però tenuto in considerazione che questo rappresenta solo uno degli strumenti a disposizione della formazione, che va utilizzato insieme ad altri mezzi classici (pennarelli, fogli, materiali didattici, …) e per il quale va valutata di volta in volta la reale utilità didattica e il ruolo, perché possa risultare un efficace ausilio all'apprendimento. Bisogna inoltre stare attenti a che non diventi un mezzo al quale abbandonare i bambini, lasciandoli soli di fronte alla macchina, illudendosi così che la stessa prenda il posto del docente.

Fin dalla scuola dell'infanzia è possibile realizzare percorsi che alternino momenti reali a momenti virtuali, finalizzati alla crescita della personalità degli allievi, a favorire facoltà cognitive, esperienziali, emotive e sociali. Il computer in sezione può essere utilizzato come strumento di appoggio per sviluppare concetti e per facilitare strategie di apprendimento per tentativi ed errori. Questa ricerca ha dimostrato che è proprio la ricchezza di strumenti diversi che permette di sviluppare aspetti che possono risultare in certi casi anche complementari. Non ci si può limitare in nessun livello scolastico, ma in particolare nella scuola dell'infanzia, a proposte univoche; è la varietà di attività e l'apertura della scuola ai moderni cambiamenti come le tecnologie e i nuovi linguaggi che consentano di migliorare i contesti formativi, arricchendo la qualità dei processi di insegnamento ed apprendimento.

Ringraziamenti

Vogliamo ringraziare tutti coloro che hanno permesso di effettuare questa ricerca così ricca e significativa. In particolare, l'ispettrice Elena Mock per averci sostenuto nell'intero progetto Cabri Elem, le docenti delle sezioni coinvolte in questa ricerca: Daniela Agustoni, Sonia Martinelli, Silvia Riva, Francesca Rossini, Prisca Theus e Roberta Udabotti, i loro allievi e i direttori scolastici interessati.

Bibliografia

Artigue M., Gueudet G. (2008). *Ressources en ligne et enseignement des mathématiques.* http://www3.acclermont.fr/pedago/maths/pages/UE2008/actes/.
Battaini A., Campolucci L., Gottardi G., Sbaragli S., Vastarella S. (2011). *Uso del PC, della LIM, delle TIC e del software didattico dinamico.* Progetto Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere. Vol. 13. Bologna: Pitagora.
Bruner J.S. (1990). *Acts of meaning*. Harvard University Press, Mass, Cambridge. [Trad. It. Bruner J.S. (1992). *La ricerca del significato. Per una psicologia culturale.* Torino: Bollati Boringhieri].
Costabile F.A., Serpe A. (2009). *Un laboratorio per la scuola dell'infanzia con INF@0.1. Esperienza monitorata nell'a.s. 2007/08.* Cosenza: Luigi Pellegrini.
Costabile F.A., Serpe A. (2010a). La «prima matematica» con INF@0.1: un'esperienza monitorata nell'anno scolastico 2007/08. In: D'Amore B., Sbaragli S. (Eds.). (2010). *Matematica ed esperienze didattiche*. Bologna: Pitagora. 80-81.
Costabile F.A., Serpe A. (2010b). *Il computer nella scuola dell'infanzia. Esperienze di laboratorio. Con INF@0.1, anno scolastico 2008/09.* Cosenza: Luigi Pellegrini.
D'Amore B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica.* Bologna: Pitagora.
Duval R. (2000). Basic issues for research in mathematics education. In: T. Nakahara, M. Koyama (Eds.) (2000). *Procedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Hiroshima: Hiroshima University. 1, 55-69.
Gruppo NumediaBios (Ed). (2008/2009). *Digital Learning - La dieta mediale degli studenti universitari italiani.* Università Milano Bicocca.
Laborde C. (2010). Uso della didattica per progettare attività informatiche e interattive di matematica nella scuola primaria: la collana 1-2-3 … Cabri. In: D'Amore B., Sbaragli S. (Eds.). (2010). *Matematica ed esperienze didattiche*. Bologna: Pitagora. 29-35.

3. Matematica ed emozioni[1] Quarta attitudinale e quarta base: vissuti ed aspettative

Sara Casartelli[2]

This research empathises the role played by emotions in the mathematics school experience of students attending the 9th grade in Switzerland, Tessin. It also consider the expectations and anxieties connected with mathematics and the important role played by this subject considering the separation in Level A and Level B existing at that grade in this land. I have used students' narratives (120 autobiographic essays) and analysed them with the T-Lab software.

1. Introduzione

L'esistenza di una suddivisione in corsi attitudinali e corsi base di matematica a partire dalla terza media è stata per me una scoperta molto recente: provengo dall'Italia dove questa realtà non è conosciuta. Mi hanno quindi colpito molto, come colpiscono sempre le novità, le modalità e le regole che dirigono questa suddivisione.

Interessante per me è che l'accesso a molte scuole superiori sia subordinato alla frequenza dei corsi attitudinali e quindi ho voluto orientare questa ricerca proprio agli allievi di quarta media, coinvolti nella scelta scolastica o professionale.

Mi interessava sapere come vivono loro, nel momento in cui devono effettuare questa scelta, senza avere «campo libero», bensì essere a volte molto condizionati dalla carriera scolastica, e in particolar modo matematica, che hanno avuto negli anni precedenti.

2. Quadro teorico

2.1. Emozioni e didattica

Questa ricerca vuole evidenziare il ruolo giocato dai fattori affettivi ed emotivi nel vissuto scolastico matematico e nelle aspettative/ansie future legate alla matematica di allievi di quarta media, concentrandosi sul confronto tra quanto emerge da allievi che frequentano il corso attitudinale ed allievi del corso base.

Trattando di emozioni è quasi d'obbligo partire dal contributo dato alla ricerca in questo settore da Daniel Goleman e alla sua «intelligenza emotiva»: con que-

1. Sintesi del lavoro di diploma del corso SUPSI, Master of Arts in Education, anno accademico 2011/2012. Relatrice: Silvia Sbaragli.
2. Insegnante alla Scuola media di Gravesano.

sto termine Goleman indica la *«capacità di riconoscere i nostri sentimenti e quelli degli altri, di motivare noi stessi, di gestire positivamente le nostre emozioni, tanto interiormente, quanto nelle relazioni sociali»* (Goleman, 1996).

Già nel 1983 H. Gardner aveva distinto le capacità intellettuali da quelle emotive, presentando un modello nuovo di intelligenza che individuava ben sette forme distinte: abilità verbali, logico-matematiche, spaziali, cinestetiche, musicali, interpersonali ed intrapersonali (Gardner, 1987). A seguire, R.J. Sternberg, nel 1985, ha distinto tre intelligenze: analitica (pensiero astratto), creativa (pensiero divergente) e pratica (pensiero operatorio) (Sternberg & Spear-Swerling, 1998). Un modello completo dell'intelligenza emotiva è stato proposto poi da P. Salovey e J. Maier nel 1990, riutilizzato da Goleman nel 1995 per comprendere come le «risorse emotive» si rivelino essere decisive nella vita lavorativa e scolastica e quanto le reazioni emotive e le abitudini, anche quelle più radicate, siano rimodellabili e gestibili, introducendo così il concetto di «competenze emotive». È a partire dagli anni '80 che alcuni ricercatori hanno iniziato a valutare il ruolo dei cosiddetti «fattori affettivi» (emozioni, convinzioni ed atteggiamenti) nell'apprendimento della matematica: Cobb (Cobb, 1986), Schoenfeld (Schoenfeld, 1983) e McLeod (McLeod, 1992) sono stati i primi ad occuparsi di queste intuizioni, sviluppate in Italia negli anni '90 da Pellerey ed Orio (Pellerey & Orio, 1996) e ampliamente trattate poi sia da Pietro Di Martino che da Rosetta Zan (Zan, 2000a) (Zan, 2000b) (Zan, 2000c) (Di Martino, 2003).

«Fino a poco tempo fa le difficoltà in matematica erano ritenute per lo più riconducibili a difficoltà cognitive, epistemologiche o motivazionali. Il ruolo dei fattori affettivi e in particolare delle emozioni nell'interpretazione delle difficoltà in matematica degli studenti era considerato, sia nella pratica scolastica che nella ricerca in educazione matematica, marginale e confinato a situazioni di disagio molto specifiche.» (Di Martino, 2009). Nella realtà si è però visto che non è così: ricerche recenti hanno allargato di molto gli orizzonti e fattori affettivi e cognitivi non sono più da considerare separatamente, soprattutto in casi di allievi con difficoltà in matematica.

Analogamente si è anche visto come *«l'affettività non sia necessariamente un ostacolo all'attivazione di processi risolutivi razionali (come spesso si pensa facendo riferimento ad emozioni come l'ansia), ma sia invece un fattore cruciale per investire risorse in tali processi»* (Zan, 2006a).

Infine è importante ricordare che gli aspetti affettivi rientrano anche nel concetto di competenza: *«la competenza è non solo l'uso e la padronanza di conoscenze (sempre dunque riferite all'allievo), ma pure un insieme di atteggiamenti che mostrano la disponibilità 'affettivamente positiva' a volerne far uso (…)».* (D'Amore, Godino, Arrigo, Fandiño Pinilla, 2003).

2.2. Aspetti emotivi positivi e negativi

Sono questi due aspetti legati ai fattori emotivi, la difficoltà e resistenza ad affrontare la matematica da parte di alcuni allievi contrapposta all'attitudine, alla passione e alla grande motivazione di altri, che per semplicità definisco «aspetti emotivi negativi» e «aspetti emotivi positivi» che vorrei approfondire.

Tutti gli insegnanti sanno che quando i propri studenti sono ansiosi, adirati o depressi non imparano; infatti quando le emozioni prendono il sopravvento la concentrazione e la capacità mentale, che gli scienziati cognitivi chiamano memoria di lavoro, viene inibita. Diventa impossibile tenere a mente le informazioni rilevanti per portare a termine ciò a cui ci stiamo dedicando (Goleman, 1996).

Considerando invece l'effetto di una motivazione positiva, la prevalenza di sentimenti di entusiasmo, fervore e fiducia in sé stessi, facilita la realizzazione dei propri obiettivi. *«Studi condotti su atleti olimpionici, musicisti di fama mondiale, e grandi maestri di scacchi hanno messo in evidenza che l'aspetto comune a tutti questi individui è la capacità di auto motivarsi in modo da sopportare durissimi programmi di studio o allenamento»* (Goleman, 1996).

L'ansia e la preoccupazione di far bene può per alcuni studenti essere la principale causa di fallimento, mentre per altri è un'efficace motivazione. Gli psicologi descrivono il rapporto tra ansia e prestazione con il modello matematico della curva di Gauss[3]: il punto massimo rappresenta il rapporto ideale. È proprio questo livello moderato di nervosismo che dà la spinta verso un'ottima prestazione; un livello troppo basso di ansia non motiva sufficientemente ad impegnarsi mentre un'ansia esagerata sottrae risorse all'elaborazione di una soluzione. (Goleman, 1996)

In un'intervista sul New York Times del 3 febbraio 1987 rilasciata a Daniel Goleman, Martin Seligman, fondatore della *psicologia positiva*, afferma: *«La mia impressione è che, dato un determinato livello di intelligenza, il reale successo di un individuo sia funzione non solo del talento, bensì della capacità di sopportare la sconfitta»*. Sono rimasta molto colpita proprio perché ritengo che quest'ultima è la qualità che manchi maggiormente ai miei allievi: la perseveranza, la caparbietà e la capacità di far fronte alle sconfitte. È allora forse su queste caratteristiche emotive che noi insegnanti potremmo lavorare di più, per migliorare l'apprendimento.

«L'impressione che la matematica sia difficile, coinvolga più direttamente l'autostima, o sia una disciplina da evitare costituiscono aspetti di un atteggiamento metacognitivo generale[...]. Vari sondaggi nel mondo della scuola hanno messo in luce come la matematica non goda di un elevato tasso medio di popolarità» (Cornoldi, Caponi, Falco, Focchiatti, Lucangeli e Todeschini, 1995). Nel libro «Matematica e metacognizione» gli autori sopra citati presentano con estrema accuratezza credenze e stereotipi relativi alla matematica e sottolineano come la poca popolarità di cui gode questa materia *«provoca serie conseguenze sullo sviluppo delle preferenze di studio e sulle scelte curriculari»*. Questi autori evidenziano come *«Un soggetto che riesce molto bene in matematica è considerato più intelligente rispetto a un altro che riesce bene in altre materie. L'insuccesso in matematica appare più definitivo e irreversibile di quello in altre materie, in cui, si pensa, con un po' di applicazione e aiuto si possono ottenere dei discreti risultati. [...] Per gran parte delle persone non è piacevole iniziare un'attività in cui è facile sbagliare e l'errore è immediatamente e insindacabilmente rilevabile. Questo può costituire un elemento di attrazione e di sfida (come un attacco a rete nel tennis o un indovinello) se ci si sente adeguati e si ritiene di potercela fare. In caso contrario si sviluppa un'ansietà che aumenta al primo insuccesso e che invita a desistere o comunque fa perdere lucidità»*.

3. In questa interpretazione particolare della gaussiana si considera il tasso di nervosismo in ascissa e il rendimento in ordinata.

2.3. «Local affect» e «global affect»

Inés Maria Gòmez–Chacòn (2000) sottolinea una distinzione che ritengo importante per il mio lavoro: evidenzia come sia fondamentale separare la componente emotiva «locale» da quella da lei definita «globale».

Quello che lei chiama «local affect» si riferisce ai cambiamenti di sentimenti o alle reazioni emotive vissute dagli allievi impegnati nella risoluzione di una situazione matematica e permette di correlare reazioni emotive a processi cognitivi corrispondenti alle diverse fasi di lavoro. Diversamente, il «global affect» è il risultato dei continui contributi del «local affect» alla costruzione del concetto di sé o di credenze e preconcetti sulla matematica in generale e sul suo studio. Per esplorare il «global affect» occorre considerare uno scenario complesso, che considera l'apprendimento della matematica come un elemento che contribuisce alla costruzione dell'identità sociale del giovane allievo: considera quindi anche l'influenza socio-culturale vissuta dall'allievo, le credenze e le pressioni sociali e familiari legate all'apprendimento della matematica, alla riuscita in matematica e all'insuccesso scolastico in questa materia.

È proprio questo «global affect» che considero necessario andare ad osservare: per capire la dimensione affettiva dell'allievo in relazione alla matematica occorre contestualizzare le reazioni emotive nella realtà sociale che le produce.

2.4. Il testo autobiografico narrativo

Un racconto autobiografico ben si presta a comprendere emozioni complesse e permette di avere uno sguardo più ampio, aprendo la possibilità per ulteriori ricerche future. Dalla lettura degli articoli di Di Martino e Zan è nata quindi la scelta dello strumento principale di raccolta dati che ho deciso di utilizzare: un testo libero, cioè materiale di tipo narrativo.

Gli autori sopra citati hanno motivato ampiamente questa scelta facendo riferimento a Bruner e alla sua distinzione fra pensiero logico scientifico e pensiero narrativo. Questo autore sostiene infatti che *«attraverso il racconto autobiografico il pensiero narrativo permette di dare coerenza, significato e ordine alla propria esperienza, riorganizzandone gli eventi»* (Bruner, 1992, p. 59).

Utilizzare racconti autobiografici dà la possibilità agli allievi di descrivere gli aspetti che *loro* ritengono importanti.

Ogni testo ci racconta una «storia»: quella del rapporto con la matematica che chi scrive ha costruito. La varietà delle storie racconta la diversità degli allievi e del loro rapporto con la matematica. (Zan & Di Martino, 2004)

2.5. Emozioni e atteggiamento

La semplicità della dicotomia positivo / negativo, tradizionalmente e legittimamente operata in letteratura, contrasta con la complessità di emozioni che emerge con prepotenza dai testi degli allievi. La lettura dei temi mette sì in evidenza la diversità delle disposizioni emozionali associate alla matematica (mi piace / non mi piace), ma anche, e soprattutto, la varietà di esperienze che l'etichetta 'matematica' comprende. (Zan & al., 2004).

In particolare, sempre sulla base dei lavori fatti da Zan e Di Martino, appaiono significative le convinzioni che l'allievo ha sulla matematica (strumentale / relazionale), spesso riconoscibili dalle convinzioni che ha sul successo (riuscita / non riuscita), e quelle che ha sulle proprie capacità (autoefficacia).

La semplice opzione *mi piace* / *non mi piace* può allora combinarsi con diverse visioni della matematica e con diverse immagini di sé. Sono queste combinazioni diverse a essere significative dal punto di vista didattico. È a questa combinazione di emozioni e convinzioni che gli autori sopra citati danno il nome di «atteggiamento».

Osservare l'atteggiamento di un allievo assume quindi un significato ben preciso: non si osserva solo la sua disposizione emozionale, ma anche la sua visione della matematica, e le convinzioni che ha su di sé. (Zan & al., 2004)

Nel presente lavoro, che si occupa di emozioni, assume un ruolo importante per me docente osservare l'atteggiamento dell'allievo verso la matematica in quanto ponte di collegamento proprio tra le emozioni legate a questa materia e raccontate nei testi e le aspettative scolastiche o professionali future dell'allievo stesso. Le scelte future infatti risultano essere condizionate, oltre che dalle emozioni provate e vissute, anche dalla visione personale che ogni allievo si è costruito nel corso degli anni intorno alla matematica e sicuramente anche dal senso di autoefficacia/fiducia in se stessi che gli allievi provano quando si trovano a dover affrontare situazioni matematiche.

3. Domande e ipotesi di ricerca

3.1. Domande di ricerca

D1. Quali emozioni associano gli allievi di quarta corso attitudinale e di quarta corso base al proprio vissuto matematico? A che cosa attribuiscono queste emozioni?

D2. Si rilevano differenze significative tra i due diversi gruppi?

D3. Quali aspettative e possibilità professionali future legano gli allievi di quarta corso attitudinale e di quarta corso base alla riuscita/non riuscita in matematica?

3.2. Ipotesi di ricerca

I1. Ipotizzo di ritrovare spesso nei racconti degli allievi dei corsi attitudinali vissuti emotivi positivi, dove la matematica è considerata materia piacevole, divertente e gratificante alternati a meno frequenti, ma comunque presenti, vissuti emotivi più faticosi raccontati da allievi che non vivono la riuscita e il successo nei corsi attitudinali. Mi aspetto infatti di arrivare a evidenziare come per alcuni allievi sia stato difficile ma fondamentale frequentare i corsi attitudinali e come la pressione esterna familiare e sociale ne abbia imposto la scelta a prescindere dall'attitudine e dalla capacità effettiva.

Dalla lettura dei testi degli allievi del corso base mi aspetto invece che emerga un rapporto negativo con la matematica e con la scuola in gene-

rale, e quindi emozioni associate a questo rapporto, più difficile, accompagnato a volte anche da una rassegnazione nei confronti di una materia ritenuta troppo difficile, astratta e lontana dalla propria realtà.
In entrambi i gruppi di allievi le emozioni provate mi aspetto che vengano associate soprattutto al docente, precedente o attuale, e a caratteristiche specifiche attribuite alla materia. In alcuni casi prevedo che emergerà un rapporto molto diverso, e quindi emozioni molto diverse, tra la materia matematica vissuta durante le ore di lezione e invece il test di matematica, evento isolato e con sue caratteristiche precise.

I2. Mi aspetto di trovare sostanziali differenze, soprattutto per quel che riguarda l'attribuzione di cause specifiche da parte degli allievi dei due gruppi oggetto di analisi ai propri successi o insuccessi in matematica; prevedo descrizioni che presentino stati emotivi più negativi e rassegnati nei corsi base contrapposti a più piacere e gioia nei corsi attitudinali. Ipotizzo che le cause saranno legate a non motivazione e a non voglia nei corsi base, contrapposte a invece grande impegno e voglia di riuscire nei corsi attitudinali.

I3. Ciò che mi attendo possa emergere dai testi e dai questionari redatti dai ragazzi del corso attitudinale è fiducia e ottimismo nelle proprie capacità accompagnate da una visione abbastanza rosea di possibilità professionali future dovuta al fatto di riuscire nei corsi attitudinali; ipotizzo anche di trovare racconti di allievi che manifestano timore di compromettere la propria possibilità professionale o di proseguimento degli studi con un fallimento nei corsi attitudinali. Nei corsi base ipotizzo di riscontrare negli scritti di molti allievi la paura di non poter scegliere liberamente ciò che desidererebbero fare in futuro a causa della loro scarsa riuscita scolastica e di restare invece vincolati a scuole/professioni meno interessanti ai loro occhi a cui però si può accedere anche con i corsi base.

4. Metodologia di ricerca

Il primo passo consiste nel confrontare 60 testi narrativi autobiografici di allievi di quarta media del corso attitudinale con quelli di altrettanti allievi che del corso base di matematica.

La traccia assegnata è la seguente:

«Sei in quarta, corso attitudinale/corso base: scrivi del tuo rapporto con la matematica fino a oggi.

Proiettati avanti di un anno, fuori dalla Scuola Media, cosa ti aspetti che succederà, sempre rimanendo legati all'ambito matematico?

Scrivi liberamente il tuo vissuto, le aspettative, le paure e le ansie legate alla matematica, al peso che questa materia ha assunto nel tuo vissuto scolastico e a quello che credi che assumerà in futuro».

Seguendo Zan e Di Martino (2004) ho deciso di utilizzare T-LAB: un software di elaborazione di testi costituito di un insieme di strumenti linguistici e statistici per l'analisi dei testi.

Nella mia ricerca limiterò l'utilizzo di T-LAB principalmente all'analisi delle associazioni di alcune parole chiave legate alle emozioni con la parola chiave matematica e, successivamente, all'analisi comparativa dei testi degli allievi dei corsi attitudinali e corsi base (analisi delle specificità) lasciando il resto a possibili futuri sviluppi di questa ricerca.

Il passo successivo è mirato a individuare le aspettative future, sia professionali che di proseguimento degli studi e per fare questo, in aggiunta a quanto emerge dai testi, ho somministrato a tutti gli allievi un breve questionario che si compone di 11 domande[4] volte a individuare quale sia il peso assunto dal fatto di frequentare in quarta media il corso attitudinale o quello base di matematica nel momento in cui gli allievi si trovano a effettuare la scelta per il proprio futuro, sia lavorativo che di proseguimento studi.

Tutta la prima parte di domande poste serve unicamente per portare l'allievo nella giusta predisposizione per rispondere compiutamente alle domande 10 e 11. Ho ritenuto infatti più efficace «portare per mano» l'allievo facendolo riflettere su alcuni punti della sua carriera scolastica e su alcune caratteristiche della sua posizione/rendimento attuale, piuttosto che proporre una lunga introduzione che probabilmente molti non avrebbero nemmeno letto e che comunque sarebbe stata meno incisiva.

Le analisi dei testi con T-LAB, mirata all'individuazione delle emozioni e al confronto fra i due diversi gruppi di allievi, l'elaborazione dei dati raccolti tramite i questionari, volta a far emergere maggiormente le aspettative future degli allievi, sono i principali strumenti utilizzati in questa ricerca e vanno ad affiancarsi a un'attenta lettura e analisi personale degli scritti degli allievi volta invece a contestualizzare, validare e armonizzare le conclusioni a cui giungerò.

5. Fase I: analisi dei testi «Io e la matematica»

5.1. Somministrazione, raccolta e lettura dei testi

Ho spiegato agli allievi per quale ragione stavo chiedendo di scrivere un racconto autobiografico che trattasse del loro rapporto con la matematica dalle elementari a oggi e che descrivesse anche le prospettive e le aspettative future. Analogamente l'ho spiegato ai colleghi che a loro volta l'hanno riportato ai propri allievi. Ho dato molta importanza a questa spiegazione; ritengo infatti che se i ragazzi sanno che chi leggerà quanto hanno scritto è veramente interessato a sapere cosa hanno vissuto loro, a conoscere la loro storia scolastica matematica, allora saranno anche più motivati a raccontarsi.

Ho scartato alcuni testi insignificanti e col resto ho proceduto alla trascrizione su computer e a una prima lettura, che ha evidenziato le interessanti potenzialità di ricerca offerte dal software utilizzato: non è stato un lavoro semplice decidere quale via percorrere tra tutte le possibilità di ricerca che la lettura di ogni nuovo testo offre e tutte le analisi possibili effettuabili con questo strumento.

4. Il questionario può essere richiesto all'autrice.

5.2. Analisi dei testi con T-LAB

5.2.1. Alcune scelte prima di partire

Ho scelto di unire tutti i testi dei corsi attitudinali in un unico file, così come quelli dei corsi base; ciò è stato dettato dalla necessità di voler fare lavori di pulitura dei testi stessi e di poter quindi velocemente modificare o sostituire alcuni termini utilizzati dagli allievi. In un primo tempo infatti ho ricopiato i testi esattamente come scritti dagli allievi, con errori ortografici, termini dialettali e vocaboli inventati; prima di procedere all'analisi ho però corretto tutte quelle che per il software risultano altrimenti essere non-parole, non esistendo nel vocabolario italiano.

Il prodotto finale è quindi formato da due grandi corpus, di più facile gestione. Questa decisione preclude la possibilità di effettuare alcuni tipi di analisi con T-LAB, ma è un'ottima soluzione se ci si limita al confronto tra quanto emerge dai corsi attitudinali e quanto dai corsi base, obiettivo principale di questo lavoro.

Ho poi sostituito:

- maestro, maestra, sore, soressa, professore, professoressa con il termine docente;
- corsi A, corsi B, gli A, i B, i livelli con i termini corsi attitudinale e corsi base;
- verifiche, prove, esperimenti, espe con il termine test;
- nota, punteggio, punti con il termine voto.

T-LAB per prima cosa conta la frequenza con cui compare una parola e offre poi la possibilità di scegliere e personalizzare le parole chiave, raggruppandone diverse in un unico lemma a cui viene attribuito un unico significato: operando a priori le sostituzioni descritte sopra ho ipotizzato quindi che il significato che i diversi allievi volessero attribuire ai diversi termini utilizzati fosse lo stesso, esattamente come fa il software. Quando invece riporterò stralci dei temi degli allievi li trascriverò nella forma originale, riportando sia gli errori di ortografia che le espressioni gergali. Questo perché gli errori di ortografia possono testimoniare la difficoltà nell'esprimersi, e certe espressioni gergali possono sottolineare il coinvolgimento emotivo di chi le usa.

5.2.2. Una prima analisi

T-LAB come primo passo nell'importare il corpus da analizzare richiede di assegnare una variabile ai diversi testi che lo compongono: nel mio caso (solo due testi) la variabile è una sola, che ho chiamato «livello», e che assume i valori liv_A o liv_B.

A questo punto, avendo già effettuato precedentemente una revisione ortografica, ho proceduto alle prime analisi. Innanzitutto ho voluto avere una visione generale dei testi che sto analizzando:

- il corpus liv_A è formato da 1554 parole diverse tra loro con occorrenza 8759 raggruppate in 1006 lemmi;
- il corpus liv_B è formato da 1456 parole diverse tra loro con occorrenza 8367 raggruppate in 979 lemmi;

Per parole diverse il software intende tutte quelle parole che presentano una qualsiasi minima differenza: parole con la stessa radice lessicale vengono automaticamente ricondotte ad un unico lemma da T-LAB. La lemmatizzazione comporta che le forme dei verbi vengano ricondotte all'infinito presente, quelle dei sostantivi e degli aggettivi al maschile singolare, quelle delle preposizioni articolate alla loro forma senza articolo, e così via; si ottiene in questo modo un certo numero di unità lessicali che il software sfrutta per le elaborazioni statistiche. Per occorrenza invece T-LAB intende la quantità risultante dal conteggio del numero di volte (frequenza) in cui una unità lessicale ricorre all'interno del corpus in analisi. Come si può notare esiste una differenza quantitativa tra liv_A e liv_B, ma non tanto significativa quanto mi sarei aspettata: questo è sicuramente un aspetto positivo e permette un più efficace e valido confronto tra le produzioni testuali dei due gruppi.

5.2.3. Le emozioni

La prima domanda di ricerca vuole scoprire quali emozioni associano alla propria esperienza legata alla matematica gli allievi dei due gruppi in osservazione e anche le cause che hanno dato vita a queste emozioni. Sono andata quindi a cercare all'interno dei corpus tutte le parole associate in qualche modo alle emozioni; non sono molte, o meglio, non sono molto variate.

Facendo riferimento a Goleman (1996) le emozioni primarie sono: rabbia, tristezza, paura, gioia, amore, disgusto e vergogna. Ognuno di questi termini indica una famiglia di emozioni caratterizzate da termini differenti in intensità, spontaneità e modalità di manifestazione. Ad esempio, per la paura il gruppo di sensazioni differenti associate è: ansia, timore, nervosismo, preoccupazione, apprensione, cautela, esitazione, tensione, spavento, terrore, fobia e panico (allegato B).

Di tutti i termini volti a descrivere le dimensioni emozionali all'interno dei testi in analisi ho riscontrato: adorazione, fascino, agitazione, amore, ansia, passione, odio, disinteresse, disprezzo, divertimento, fatica, insicurezza, noia, panico, paura, pena, piacere, preoccupazione, schifo, soddisfazione, spavento, speranza, umiliazione. Molti appaiono solo una volta quindi risultano essere significativi solo ansia, odio, divertimento, fatica, noia, panico, paura e piacere. Ho deciso di raggruppare alcuni dei termini scartati in un unico lemma, ipotizzando una uguaglianza di significato attribuito nei diversi contesti: adorazione, fascino, passione, gradevolezza, ispirazione li ho sostituiti tutti con «amore» (valenza emotiva positiva) mentre disinteresse, pena, schifo, umiliazione, persecuzione, ignoranza, fallimento, orribile, tremendo, stupido, ecc. li ho sostituiti con «disprezzo» (valenza emotiva negativa). Anche «panico» è un raggruppamento di termini con uguale significato (ipotetico): blocco, confusione, crollo, impallato, annebbiato, tilt, incubo, ecc. L'osservazione più importante riguarda il piacere: sia «mi_piace» *che* «non_mi_piace» (e tutti i loro derivati) sono raggruppati nel lemma «piacere»; è fondamentale per questa ricerca dividere i due lemmi perché di opposto significato e manifestazione di opposto stato emotivo.

5.2.4. Elaborazioni e riflessioni su tutto il corpus: parola chiave matematica

T-LAB assembla i due testi liv_A e liv_B in un unico corpus oggetto di analisi. Nel caso di un corpus costituito da più testi, perché questo sia un insieme utilmente analizzabile, si richiede che le sue parti abbiano due caratteristiche che li rendano comparabili:

a) una qualche omogeneità tematica e/o del contesto in cui sono stati prodotti, in modo da ottenere dati tra loro confrontabili;
b) un equilibrato rapporto tra le loro dimensioni, sia in termini di occorrenze sia in termini di kbytes, per non incorrere in anomalie di tipo statistico.

Nel mio caso liv_A rappresenta il 51,17% dell'intero corpus e liv_B il restante 48,83%: un rapporto molto equilibrato che permette un valido confronto. Sono partita con l'analisi delle co-occorrenze richiedendo come output un diagramma radiale volto a esplorare le associazioni presenti tra le parole chiave, prima in tutto il corpus completo successivamente nei singoli sottoinsiemi liv_A e liv_B. Nei diagrammi radiali, la parola chiave scelta è posta al centro. Gli altri lemmi sono distribuiti intorno a essa, ciascuno a una distanza proporzionale al suo grado di associazione. Le relazioni significative sono quindi del tipo uno-a-uno, tra il lemma centrale e ciascuno degli altri. La prima parola chiave selezionata è stata «matematica» e qui di seguito sono presentati gli output ottenuti analizzando l'intero corpus.

LEMMA	COEFFICIENTE
io	0,492
MEDIA	0,484
ELEMENTARE	0,481
mi_piace	0,469
materia	0,456
ANNO	0,447
CAPIRE	0,435
SERVIRE	0,428
DOCENTE	0,421
FUTURO	0,413
DIFFICOLTÀ	0,408
RIUSCIRE	0,394
scuola	0,353
rapporto	0,344
IMPEGNARE	0,344
PRIMA	0,34
non_mi_piace	0,335
LAVORO	0,315
PAURA	0,3
DISPREZZO	0,296
ANSIA	0,294

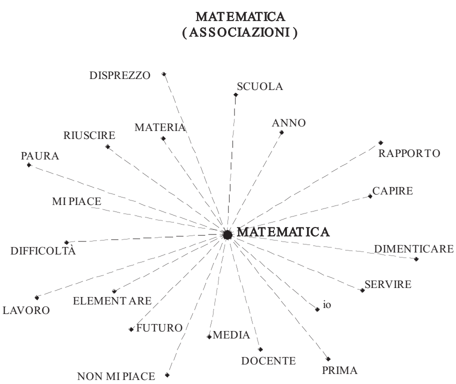


Figura 1. Diagramma radiale e relativi coefficienti di associazione di tutto il corpus: parola chiave «matematica».

Un'espressione molto frequente associata alla parola chiave «matematica» è la distinzione in «mi_piace» o «non_mi_piace», cioè gli allievi segnalano la loro disposizione emozionale verso questa materia e, considerando il corpus nel suo insieme, la distribuzione tra le opposte dichiarazioni è abbastanza bilanciata (indici di associazione 0,47 e 0,33).

A seguire noto che compaiono altre due parole chiave «io» e «docente» molto vicine al termine matematica (indici di associazione 0,49 e 0,42) e dalla lettura dei testi emerge proprio che la disposizione emozionale verso la materia è spesso legata ai soggetti attivi coinvolti nel processo di insegnamento-apprendimento. Spesso il narrante presenta come decisivo il ruolo del proprio docente nella costruzione del rapporto con la matematica, giudicandolo responsabile della riuscita o del fallimento.

Ecco alcuni stralci di quanto scritto dagli allievi, estratti con la funzione di «Analisi tematiche – Estrazione di contesti chiave» da T-LAB. Segnalo alla fine, tra parentesi, se questi scritti provengono dai corsi attitudinali o dai corsi base:

> *«Io penso che anche il maestro influenzi sul risultato, perché se tu hai un maestro che ti spiega e ti ripete anche cento volte pur di farti capire è diverso che averne uno che se*

ne frega completamente. Ti viene anche voglia se vedi che al maestro gli interessi. Per me è stato così, la matematica mi è sempre piaciuta perché il mio maestro era molto bravo». (liv_A)
«Fin dalle elementari mi è sempre piaciuta la matematica soprattutto grazie al maestro, da quando ho avuto lui la matematica è diventata, se così si può dire, una passione». (liv_A)
«In prima e seconda elementare o avuto un maestro che non mi non mi piaceva per niente e forse per questo non riuscivo a seguire bene le lezioni di matematica, mi faceva un po' paura». (liv_B)
«L'unico motivo per cui mi piace è perché con la nuova soressa capisco tutte le cose, e se magari non le capisco lei me le rispiega senza gridarmi». (liv_B)

Ricercando invece le emozioni manifestate, le uniche che appaiono associate significativamente a matematica sono «paura», «disprezzo» e «ansia» (indici di associazione pari rispettivamente a 0,3 - 0,296 e 0,294).

Esiste anche una relazione molto forte con i termini «elementare», «media» e «anno», usati dagli allievi per descrivere l'evoluzione del proprio stato emozionale nei confronti della matematica nel tempo, evoluzione molto diversa a seconda del soggetto narrante come si può ben rilevare leggendo alcuni stralci dei racconti:

«All'elementari la matematica faceva letteralmente schifo, ma alle medie è migliorato tutto, soprattutto dalla terza media con il nuovo docente». (liv_B)
«Il mio rapporto con la matematica fino a ora è: all'elementari la matematica era la mia materia preferita mentre adesso mi piace sempre meno, soprattutto le lettere». (liv_A)
«Non ci vado molto d'accordo, non mi appassiona e non la capisco al volo, ma cerco di impegnarmi. Nonostante questo volevo dire che per me la matematica alle elementari era sempre facilissima non avevo difficoltà a capire le cose era la mia materia preferita. Adesso no, sono cambiato io e è cambiata anche lei». (liv_A)
«Allora il mio problema con la Matematica è cominciato alle elementari. Dalla prima alla terza elementare è andata, ma dalla quarta è cominciato il problema. Perché dalla quarta è arrivata una nuova maestra, mentre dalla prima alla terza ce ne era un'altra che era molto brava. Con quella nuova ogni volta che non capivo qualcosa lei non mi rispiegava, ma mi diceva di arrangiarmi. Da lì è continuata così e non ho capito più nulla». (liv_B)

5.2.5. Elaborazioni e riflessioni su tutto il corpus: le emozioni

Analizziamo più approfonditamente alcuni termini specifici legati alle emozioni e presentiamoli in ordine di frequenza con cui compaiono: disprezzo (comprende tutti i termini specificati precedentemente con valenza emotiva fortemente negativa), paura, ansia, panico, noia, amore, speranza, odio, soddisfazione e calma.

Le più ricorrenti sono emozioni che evidenziano un coinvolgimento molto forte; anche Di Martino e Zan (2010) hanno evidenziato come queste emozioni negative appaiono inevitabili in ogni incontro/scontro con la matematica e quanto spesso nelle storie da loro raccolte e che raccontano di difficoltà in matematica il coinvolgimento emotivo negativo sia descritto con termini quasi esagerati. Sono gli stessi termini che ritrovo anch'io nei racconti degli allievi:

«Diciamoci pure che negli ultimi due anni che ho passato non ho imparato niente della matematica o se ho appreso, veramente poco, ma ho imparato cosa vuol dire umiliazione e stare male». (liv_B)
«La matematica non mi è mai piaciuta, come le lasagne. Io sono bravo in matematica

ma non riesco a esprimere quello che potrei fare. Tutto incominciò in prima media quando mi diedero (…) come docente di matematica, in terza invece crollai avendo come docente di matematica (…). Per questo adesso odio la matematica e se potessi non la nominerei nemmeno perché mi fa davvero schifo e mi fa stare male». (liv_B)
«Io e la matematica ci siamo sempre odiati. È un odio reciproco. Io a matematica soffro e trovo tremendo portare il peso che tutti capiscono e io no. Ho sempre paura che la maestra mi chiede qualche cosa e che tutti poi mi deridono perché io non la so». (liv_A)
«Il nostro docente delle elementari ci faceva star male, magari umiliandoci davanti alla classe per un brutto voto. Per lui la matematica è tutto, e non riesce a capire che non tutti sono portati. Io invece ho imparato a fare finta di niente, anche se dentro mi sento morire ogni volta che mi consegnano una verifica». (liv_B)

Procedendo con T-LAB a una analisi delle frequenze concernenti le relazioni tra le unità lessicali (parole o lemmi) presenti nel corpus si ottengono grafici radiali dove i termini più vicini alla parola chiave scelta sono quelli che hanno la maggiore probabilità di precederla (predecessori) o di seguirla (successori).

Ipotizzando che l'emozione espressa sia per lo più associata al termine che la precede e/o che la segue i risultati sono molto interessanti.

Per quanto riguarda «disprezzo», sia come predecessore che come successore, il termine più probabile risulta essere «matematica», confermando quanto riscontrato e intuito dalla semplice lettura dei testi; procedendo con «paura» le probabilità risultano essere ancora più elevate. (figura. 2)

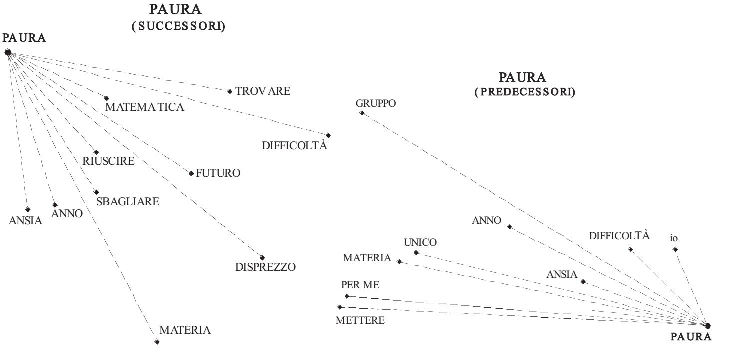


Figura 2. Predecessori e successori: parola chiave «paura».

Continuando la ricerca dei predecessori e successori i risultati sono riportati nella tabella sottostante:

Predecessore 1	Predecessore 2	Parola chiave	Successore 1	Successore 2
Prendere	Matematica	Disprezzo	Matematica	Io
Ansia	Matematica	Paura	Matematica	Riuscire
Test	Matematica	Ansia	Materia	Paura
Capire	Test	Panico	Materia	Anno
Trovare	Matematica	Noia	Aspettare	Io
Calcolo	Matematica	Amore	Matematica	Capire
Anno	Futuro	Speranza	Riuscire	Matematica
Anno	Matematica	Odio	Matematica	Difficoltà

Tabella 1. Predecessori e successori. Parole chiave: termini che descrivono emozioni.

Il termine «matematica» compare praticamente sempre, confermando quanto ipotizzato: le emozioni raccontate sono riferite proprio alla materia oggetto di indagine. Tornando a lavorare sulle cause a cui le emozioni sono attribuite ho deciso di utilizzare gli indici di associazione tra le parole chiave usate per descrivere le emozioni (o le disposizioni emozionali verso la matematica: «mi_piace» e «non_mi_piace»), e i primi 7 lemmi che risultano più frequentemente associati alle stesse emozioni. Si ottiene la seguente tabella a doppia entrata:

Parola chiave	**lemma 1**	**lemma 2**	**lemma 3**	**lemma 4**	**lemma 5**	**lemma 6**	**lemma 7**
mi_piace	matematica	elementare	prima media	materia	anno	iniziare	docente
	0,47	0,29	0,27	0,27	0,25	0,25	0,24
non_mi_piace	matematica	prima media	docente	materia	anno	geometria	io
	0,33	0,29	0,23	0,21	0,21	0,20	0,19
paura	ansia	matematica	anno	riuscire	io	capire	docente
	0,34	0,3	0,28	0,28	0,27	0,23	0,2
disprezzo	prendere	matematica	riuscire	docente	capire	anno	io
	0,29	0,29	0,28	0,25	0,25	0,23	0,20
ansia	paura	matematica	test	lungo	capire	fretta	io
	0,34	0,29	0,28	0,25	0,23	0,21	0,20
panico	capire	test	matematica	riuscire	anno	disprezzo	foglio
	0,32	0,30	0,24	0,23	0,20	0,20	0,20
noia	matematica	capire	lezione	dimat	elementare	argomenti	terza media
	0,23	0,20	0,19	0,18	0,18	0,17	0,15
amore	matematica	docente	terza media	allievo	persona	anno	capire
	0,23	0,23	0,22	0,20	0,20	0,19	0,18
speranza	matematica	anno	futuro	impegnare	riuscire	capire	ansia
	0,29	0,19	0,24	0,23	0,23	0,20	0,19
odio	capire	matematica	docente	futuro	io	riuscire	rimanere
	0,27	0,24	0,21	0,17	0,17	0,15	0,13

Tabella 2. Indici di associazione. Parole chiave: termini che descrivono emozioni o disposizioni emozionali.

Sommando tra loro gli indici di associazione dei lemmi che compaiono in più posizioni della tabella (e raggruppando tra loro alcuni termini a cui attribuisco uguale significato) si ottiene la seguente rappresentazione grafica:

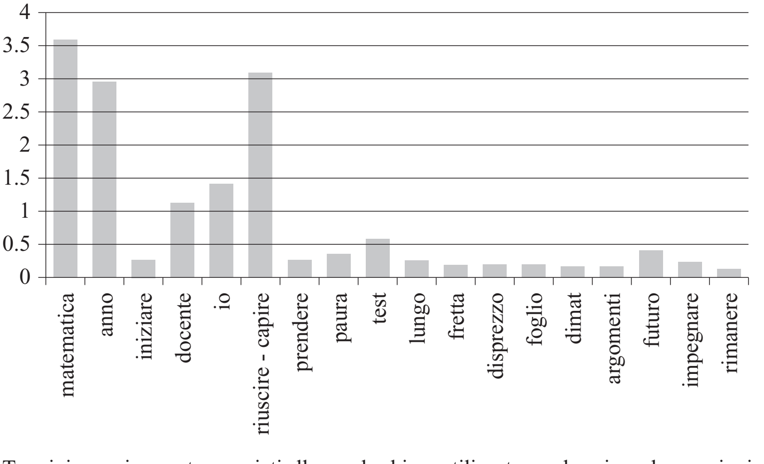


Figura 3. Termini maggiormente associati alle parole chiave utilizzate per descrivere le emozioni.

Oltre al termine «matematica», risultano fortemente associati alle diverse parole chiave utilizzate dagli allievi per descrivere il proprio stato emozionale il lemma «riuscire-capire», «anno» (comprende anno, prima e terza media e elementare), «io» (comprende io, allievo e persona), «docente», «test» e «futuro». Spesso nei racconti degli allievi emerge quanto la disposizione emozionale dipenda dal fatto di sentirsi adeguati, cioè di riuscire in matematica e di capire quanto venga proposto in classe.

> *«Io personalmente non ci capivo nulla quando spiegava, e dato che non comprendevo niente era brutto. Non riuscivo benissimo in matematica e per questo non mi garbava».* (liv_B)
> *«Io in matematica alle elementari riuscivo bene e la amavo ma alle medie non capivo niente e la odiavo in prima e seconda. Adesso mi piace semplicemente, capisco e in classe sto bene».* (liv_B)

Per quel che riguarda sia il lemma «anno», usato per raccontare l'evoluzione della propria storia nel tempo, che i lemmi «io» e «docente», soggetti attivi coinvolti nel processo di insegnamento-apprendimento, ho già evidenziato precedentemente quanto spesso questi siano associati alla matematica e alle emozioni che questa materia suscita, presentando anche alcuni stralci di testo d'esempio. Del termine «docente» me ne occuperò anche nella successiva analisi, essendo uno dei termini che compaiono specificamente nei testi degli allievi dei corsi base.

5.2.6. Elaborazioni e riflessioni sui sottoinsiemi liv_A e liv_B: parola chiave matematica

Analogamente a quanto fatto per il corpus unico sono qui presentati i diagrammi radiali con i rispettivi indici di associazione per i sottoinsiemi liv_A e liv_B, sempre con parola chiave matematica. La prima cosa che ho notato è che nei testi dei corsi attitudinali non è significativamente associato il lemma «non_mi_piace» con «matematica». Nei corsi base invece la dicotomia mi_piace/non_mi_piace rimane abbastanza equilibrata (indice di associazione di 0,45/0,38). Il grado di associazione con «io» e «docente» è decisamente più elevato nei corsi base. Oltre a queste osservazioni è importante sottolineare la comparsa nei corsi attitudinali dell'emozione «ansia» (con grado di associazione maggiore rispetto a disprezzo) e di «paura» nei corsi base.

LEMMA	COEFFICIENTE
ELEMENTARE	0,488
mi_piace	0,487
MATERIA	0,486
io	0,468
MEDIA	0,461
FUTURO	0,445
CAPIRE	0,437
ANNO	0,429
RIUSCIRE	0,422
SERVIRE	0,415
SCUOLA	0,383
RAPPORTO	0,369
ANSIA	0,361
IMPEGNARE	0,356
DIFFICOLTÀ	0,338
DOCENTE	0,331
VIVERE	0,319
PROBLEMA	0,31
PORTARE	0,305
DISPREZZO	0,304

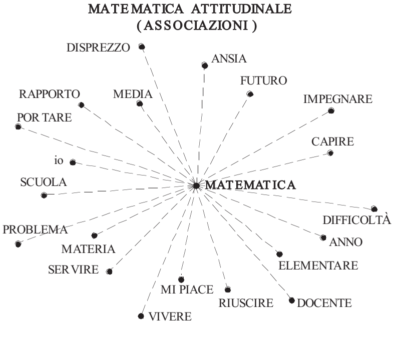


Figura 4. Diagramma radiale e relativi coefficienti di associazione dei sottoinsiemi liv_A: parola chiave *matematica.*

LEMMA	COEFFICIENTE
io	0,517
MEDIA	0,51
DOCENTE	0,505
DIFFICOLTÀ	0,475
ELEMENTARE	0,475
ANNO	0,468
mi_piace	0,448
SERVIRE	0,444
CAPIRE	0,435
MATERIA	0,42
PRIMA	0,397
non_mi_piace	0,38
FUTURO	0,373
RIUSCIRE	0,36
CAMBIARE	0,351
IMPEGNARE	0,332
LAVORO	0,332
PAURA	0,326
SCUOLA	0,32
RAPPORTO	0,314

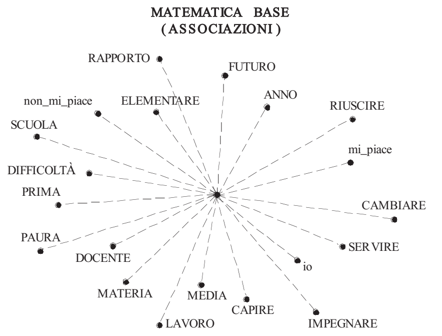


Figura 5. Diagramma radiale e relativi coefficienti di associazione dei sottoinsiemi liv_B: parola chiave *matematica.*

5.2.7. Elaborazioni e riflessioni sui sottoinsiemi liv_A e liv_B: analisi comparative

Per completare il confronto tra liv_A e liv_B, utilizzo la funzione Analisi comparative–Analisi delle specificità. Questo strumento consente di verificare quali siano le unità lessicali tipiche (o anche esclusive) dei sottoinsiemi del corpus importati originariamente.

Termini specifici liv_A	**Frequenza assoluta**	**Termini specifici liv_B**	**Frequenza assoluta**
Ansia	46/58	Docente	93/127
Portare	15/16	Base	36/45
Credere	22/29	Corso	53/75
Impegnare	44/66	Bravo	21/28
Lavorare	8/9	Spiegare	24/33
Studiare	28/41	Provare	12/15
Noia	20/28	Disprezzo	48/78
Soddisfazione	7/8	difficoltà	56/94

Tabella 3. Analisi delle specificità.

L'emozione «ansia» compare quasi esclusivamente nei corsi attitudinali, a conferma dell'ipotesi formulata in partenza di come per alcuni allievi sia stato difficile ma fondamentale arrivare a essere nei corsi attitudinali e di come il fatto di fare fatica a raggiungere un successo in questi corsi sia origine di preoccupazione. La lettura delle loro storie conferma quanto evidenziato dal software:

> *«Sì, la matematica mi fa paura, ma più che paura mi mette ansia, ansia di non riuscire a raggiungere il 4.5, di non riuscire a stare nei corsi attitudinali, ansia di non riuscire a proseguire nel migliore dei modi; sì, si può chiamare paura».* (liv_A)
> *«Anche alle elementari eseguire gli esercizi più semplici mi era quasi impossibile. L'unica ansia vera che ho è che questo problema possa chiudermi delle porte in futuro, soprattutto perché so che se sono nei corsi attitudinali, è solo grazie alla media che ho nelle altre materie».* (liv_A)
> *«Ho deciso di impegnarmi e di voler passare dal livello base al livello attitudinale. A dicembre della quarta media ci sono riuscita ma sempre con voti nettamente insuffi-*

cienti. Infatti ho passato un anno praticamente a non capirci niente e a fine anno mi ha abbassato molto la media e non sono riuscita a entrare in nessun'altra scuola. La matematica è così: se non va può rovinarti tutto. Quindi ho deciso di ripetere l'anno. Adesso sono davvero in ansia che la stessa cosa si ripeta ancora e anche a casa mia mamma mi stressa». (liv_A)

Per quanto riguarda i corsi base, le parole specifiche che ritengo molto legate tra loro sono docente, corso base, spiegare e difficoltà. Dalla lettura dei testi emerge in modo prepotente l'attribuzione al docente dell'insuccesso in matematica, fatto questo confermato anche dalla precedente analisi che considerava la somma degli indici di associazione e che legava il lemma docente in particolare a non_mi_piace, disprezzo e odio. Spesso addirittura l'insuccesso descritto è imputato al docente delle scuole elementari, al suo modo di spiegare e di relazionarsi con gli allievi. Fatto invece molto meno presente nei racconti dei corsi attitudinali:

«In terza media abbiamo cambiato maestro e lì è stata la tragedia. Quando entravo in classe mi veniva l'ansia e la paura perché quando sbagliavo tutti mi deridevano e mi sentivo inutile, umiliata. Spesso il maestro, secondo me apposta, mi mandava alla lavagna per svolgere dei calcoli, non so il perché ma andavo totalmente in panico e non riuscivo a capire neanche quello che stava succedendo intorno a me. In questo inizio di quarta media invece entro in classe più sicura e più convinta di me stessa grazie alla nuova soressa. Per ora la matematica mi piace». (liv_B)

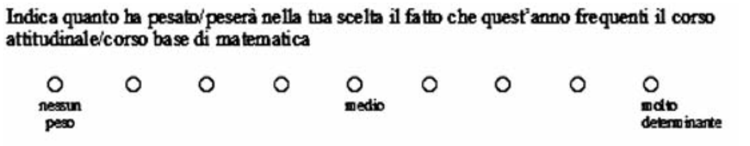
Per gli allievi dei corsi attitudinali che non sperimentano una riuscita in matematica e che quindi descrivono emozioni con una forte valenza negativa, la causa principale di questo insuccesso è attribuita a se stessi, alla materia in sé o a difficoltà intrinseche nei singoli argomenti (ad esempio il calcolo letterale o la geometria); raramente viene coinvolto il docente e il suo atteggiamento:

«Da piccolo mi piaceva tanto la matematica. Tutti mi dicevano che era una materia orribile, io non capivo, dicevo pure che l'adoravo. Ora capisco tutto, detesto la matematica, è una materia che non mi piace per niente soprattutto perché non capisco alcune cose e rimango da solo indietro: è umiliante e triste, mi fa sentire stupido. Spero comunque che la matematica non sia più un problema nel mio futuro. Io penso che in futuro la matematica mi piacerà perché, visto che la matematica serve nella vita e io farò un mestiere che mi piace, la userò con piacere». (liv_A)
«Il mio rapporto con la matematica non è stato proprio il massimo. Sin dalle elementari ho sempre fatto fatica, l'ho disprezzata. Le mie paure su questa materia erano la mia insicurezza, la paura di sbagliare e di essere presa in giro dai miei compagni, di fare la figura dell'idiota. Ma quest'anno sto riuscendo a sconfiggere la mia insicurezza, la mia paura di sbagliare e le cose vanno meglio». (liv_A)

6. Fase II: analisi del questionario «Aspettative future»

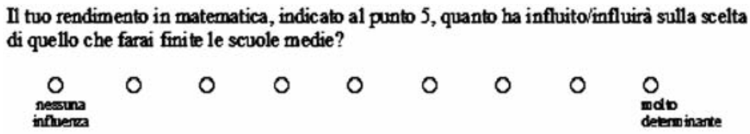
6.1. Analisi delle risposte

Obiettivo principale del questionario sottoposto agli allievi è di integrare con dati quantitativi quanto già osservato nei testi liberi per arrivare a rispondere meglio alla terza domanda di ricerca:


Indica quanto ha pesato/peserà nella tua scelta il fatto che quest'anno frequenti il corso attitudinale/corso base di matematica

nessun peso — medio — molto determinante

Figura 6. Domanda 10 del questionario.


Il tuo rendimento in matematica, indicato al punto 5, quanto ha influito/influirà sulla scelta di quello che farai finite le scuole medie?

nessuna influenza — molto determinante

Figura 7. Domanda 11 del questionario.

Le risposte date dagli allievi dei corsi attitudinali e dei corsi base alla domanda 10 sono presentate nel grafico seguente:

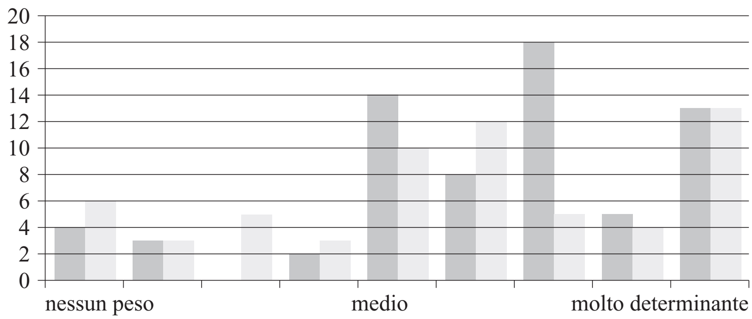
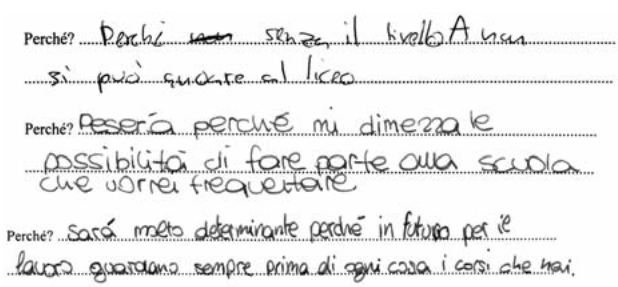


Figura 8. Distribuzione del peso attribuito al corso frequentato nella scelta professionale/scolastica futura (■ allievi A, ■ allievi B).

Il peso attribuito è distribuito tra i diversi valori possibili in modo molto diverso tra i due corsi, mentre non cambiano quasi per niente le risposte date al perché chiesto subito dopo. Infatti tutti gli allievi che hanno risposto con un «molto determinante» hanno poi dato la medesima spiegazione a questa scelta, pur usando parole differenti; qui di seguito alcuni ritagli d'esempio.


Perché? Perchè ~~non~~ senza il livello A non si può andare al liceo

Perché? Peserà perché mi dimezza le possibilità di fare parte alla scuola che vorrei frequentare

Perché? Sarà molto determinante perché in futuro per il lavoro guardano sempre prima di ogni cosa i corsi che hai.

Figura 9. Risposte tipiche degli allievi di entrambi i corsi.

Frequentare i corsi base o i corsi attitudinali è visto come l'elemento che può determinare il futuro dell'allievo: in alcuni casi viene vissuta molto male l'esclusione dai corsi attitudinali, soprattutto se matematica è l'unica materia dove si sperimenta l'insuccesso.

> *«La cosa che mi fa star male è che essendo nei livelli B non potrò andare al liceo e quando ne parlo, come adesso, questa cosa mi rattrista perché è davvero l'unica materia in cui non vado bene. Penso che se continuerò a stare nei B non andrò davvero avanti nel futuro. Lo penso sempre. Mi dovrò sempre accontentare di fare una seconda scelta».* (liv_B)

Dalla lettura dei testi emerge molto bene il disagio e il senso di impotenza di alcuni allievi dei corsi base che ritengono di avere le possibilità future «dimezzate» (termine usato sopra dall'allievo) rispetto ai compagni dei corsi attitudinali, confermando quanto presentato nelle ipotesi.

I numerosi «nessun peso» o «peso medio» scelti dagli allievi del corso base sono spesso seguiti dalla risposta *«Boh!»* oppure *«Non so»* o ancora *«Non ho capito»* (risposta data in 14 casi su 31). Non sono quindi delle vere e proprie scelte, quanto delle non-scelte, dettate o da mancanza di motivazione a partecipare all'indagine o dalla non comprensione del compito richiesto.

Gli allievi che hanno specificato nella domanda 9 di non avere ancora compiuto una scelta riguardo al proprio futuro e di non sapere cosa sceglieranno, sono 11: in 7 hanno attribuito «nessun peso» al fatto di frequentare i corsi base, mentre, curiosamente, gli altri 4, per lo stesso motivo, hanno optato per la scelta «peso medio».

Il fatto di attribuire poca importanza e poca attenzione al questionario ha nuovamente confermato la validità della scelta del testo narrativo come strumento principale di analisi, supportata inoltre dalla inaspettata ricchezza dei testi raccolti tra gli allievi dei corsi base. A seguire i risultati delle risposte ricevute alla domanda 11:

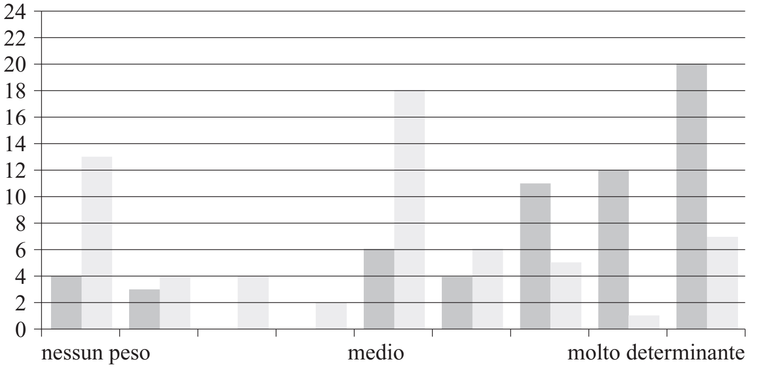
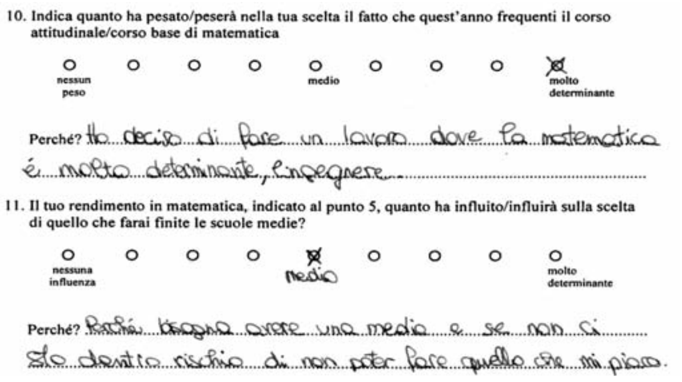


Figura 10. Distribuzione del peso attribuito al rendimento in matematica nella scelta professionale/scolastica futura (■ allievi A, ■ allievi B).

È interessante osservare come la distribuzione delle risposte è, per i corsi attitudinali, più spostata verso la scelta *peso medio* rispetto a quella data precedentemente. Il peso assegnato al rendimento scolastico è decisamente minore rispetto a quello assegnato al fatto di essere nei corsi attitudinali, come ben spiegano i seguenti esempi:


10. Indica quanto ha pesato/peserà nella tua scelta il fatto che quest'anno frequenti il corso attitudinale/corso base di matematica

nessun peso — medio — molto determinante

Perché? Ho deciso di fare un lavoro dove la matematica é molto determinante, Ingegnere.

11. Il tuo rendimento in matematica, indicato al punto 5, quanto ha influito/influirà sulla scelta di quello che farai finite le scuole medie?

nessuna influenza — medio — molto determinante

Perché? Perché bisogna avere una media e se non ci sto dentro rischio di non poter fare quello che mi piace.

Figura 11. Risposte tipiche degli allievi del corso attitudinale.

Nei corsi base la maggioranza degli allievi (46 su 60) ha invece lasciato completamente bianco lo spazio successivo a disposizione per segnalare la motivazione della scelta o, nuovamente, sono comparsi i *«Boh!»* e *«Non lo so»*. L'impressione è ancora una volta di una non-scelta e scarso interesse.

7. Conclusioni

7.1. Risposta alle domande di ricerca

Sulla base delle analisi effettuate con T-LAB, dopo una ripetuta e attenta lettura dei testi raccolti e successivamente alle elaborazioni dei questionari di indagine, è possibile sintetizzare le riflessioni fatte e rispondere alle domande di ricerca formulate.

R1. Le emozioni associate alla matematica che emergono dall'analisi dei testi dei due gruppi di allievi sono:

- disposizione emozionale positiva verso la matematica evidenziata dal lemma «mi_piace» con un coefficiente di associazione di 0,47. Nell'Allegato C sono presentati alcuni contesti elementari dei liv_A e liv_B dove questa associazione compare. L'associazione con il lemma «non_mi_piace» ha un coefficiente decisamente inferiore (0,33) e nell'Allegato D sono presentati alcuni contesti elementari dove i lemmi «non_mi_piace» e «matematica» sono contemporaneamente presenti;
- paura, con un coefficiente di associazione pari a 0,3;
- disinteresse, pena, schifo, umiliazione, persecuzione, percezione negativa di sé sostituite tutte genericamente dal lemma «disprezzo», con un coefficiente di associazione pari a 0,29;
- con coefficienti più bassi (inferiori al 0,25) sono presenti anche ansia, panico, noia, amore, speranza e odio.

Queste emozioni o disposizioni emozionali sono associate più frequentemente oltre che al termine matematica, alla sperimentazione di un successo o di un fallimento in questa materia (termini riuscire-capire). Forte risulta essere anche l'associazione con il termine docente, e dalla lettura dei testi, soprattutto con il maestro delle scuole elementari. Decisamente meno frequenti, ma comunque presenti, sono i riferimenti al momento del test (causa di ansia e panico) e al futuro (causa di speranza).

R2. Le differenze tra i due gruppi di allievi esistono.

Per prima cosa, come ipotizzato, le differenze sono evidenti per quel che riguarda l'attribuzione delle cause che hanno originato gli stati emotivi descritti; infatti la specificità quasi esclusiva dei lemmi «docente», «difficoltà» e «spiegare» negli scritti di allievi dei corsi base conferma quanto intuito dalla lettura dei testi: emerge in modo prepotente l'attribuzione al docente del proprio insuccesso in matematica.

Dai testi degli allievi dei corsi attitudinali emerge maggiore ottimismo, anche mentre stanno manifestando l'emozione più negativa (visibile negli ultimi stralci di racconto presentati); questo ottimismo è proprio da ricondurre all'attribuzione della causa che genera le emozioni stesse. Goleman (1996), descrivendo un esperimento dello psicologo Martin Seligman, definisce l'ottimismo *«sulla base del modo in cui gli individui spiegano a se stessi i propri successi e i propri fallimenti»*: gli ottimisti attribuiscono il fallimento a cause modificabili in futuro (l'insicurezza, la paura di sbagliare nell'ultimo caso citato), mentre i pessimisti attribuiscono lo stesso fallimento ad aspetti e circostanze su cui loro stessi non hanno alcun controllo (il docente, appunto).

Un dato interessante, di cui però non è stato possibile avere riscontro dalle analisi con il software (che permette unicamente di scattare una fotografia), è la grande diversità tra le emozioni associate al proprio vissuto in matematica prima di frequentare il corso base e quello attuale; ho notato che per alcuni allievi di questo gruppo le emozioni descritte attualmente evidenziano più serenità e senso di adeguatezza, contrapposte a frustrazione e sensazione di fallimento sperimentata precedentemente. Anche queste nuove e positive emozioni vengono spesso associate al docente, o meglio, al cambiamento di docente e questo giustifica la forte associazione tra l'emozione «amore» (raggruppamento di adorazione, fascino, passione, gradevolezza, ispirazione) e il lemma «docente» presentato nella Tabella 2.

> *«Ma devo dire che da quando ho cambiato soressa la voglia mi è tornata soprattutto perché la mia nuova insegnante alla quale la passione non manca di certo mi ha spronata a tirare fuori le mie qualità e andare a matematica è diventato più piacevole se non addirittura bello. Allora ho pensato che non ero solo io a sbagliare a impegnarmi poco e che se magari la soressa di prima si impegnava di più anche lei io adesso ero diversa e con diverse possibilità».*

R3. Come mi aspettavo in partenza (ipotesi 3) emerge una grossa differenza tra le aspettative e possibilità professionali future degli allievi dei due corsi, riscontrabile sia dalla lettura dei testi che dalle analisi del questionario (strumento che si è dimostrato valido soprattutto per i corsi attitudinali). Oltre a ottimismo e fiducia nelle proprie possibilità da parte di chi sperimenta la riuscita in matematica (corso attitudinale), emerge da coloro i quali pensano a un proseguimento di studi al liceo, timore e preoccupazione legati principalmente alle difficoltà che si aspettano di trovare in questa scuola e all'importanza maggiore che si pensa verrà attribuita alla riuscita in matematica. Rispetto alle ipotesi formulate è emersa una notevole differenza: non è ritenuto così fondamentale riuscire in matematica nei corsi attitudinali, bensì è essenziale esserci, per avere *«più porte aperte e più possibilità per il futuro»*.

Nei corsi base molti allievi (23 su 60) temono di non poter scegliere liberamente ciò che desidererebbero fare in futuro, ma, mentre in 7 hanno attribuito peso molto determinante al fatto di essere nei corsi base, i restanti 16 hanno selezionato opzioni diverse, a volte incoerenti con la motivazione addotta.

Da segnalare anche i 5 allievi dei corsi base che hanno invece idee professionali chiare e orientate; emerge dai testi autobiografici il sollievo di frequentare attualmente il corso base, che non precluderà loro l'accesso a quanto scelto per il futuro e dove in matematica sperimentano finalmente un successo gratificante.

Accanto a queste prospettive ho trovato racconti (riscontrabili anche nel questionario dai «*boh*» o *«non so»* e dalle numerose non-scelte) di allievi che non si preoccupano affatto del futuro, non avendo un'idea chiara di che cosa gli piacerebbe fare e, soprattutto, non vedendo un collegamento tra le aspirazioni che hanno e la propria situazione attuale in matematica alla scuola media.

7.2. Limiti della ricerca e sviluppi futuri

La potenzialità del testo narrativo come strumento principale di ricerca lascia molte possibilità di proseguire, approfondire e continuare quanto fatto in questo lavoro.

Soprattutto ritengo che sarebbe interessante indagare meglio il contesto che ha prodotto le emozioni qui raccontate, eventualmente mediante interviste agli allievi stessi e ai loro familiari. I testi spesso raccontano di difficoltà che meriterebbero di essere approfondite, sviscerando meglio le cause che hanno portato gli allievi a fare certe affermazioni.

Come affermato da Zan e Di Martino nel citato articolo del 2004, *«Da allora abbiamo continuato a raccogliere temi (...) ma soprattutto abbiamo continuato a leggerli»*. Anch'io penso che sia così: il materiale raccolto può essere valorizzato da una continua rilettura, ogni storia apre la strada a un possibile lavoro di ricerca.

Ritengo che il grande pregio dell'aver usato un testo come strumento della ricerca sia da «pagare» in termini di considerazioni personali e osservazioni non supportate da veri e propri dati scientifici, bensì espresse in seguito a sensazioni e intuizioni avute durante la lettura personale degli scritti degli allievi: è difficile indagare sulle emozioni senza in qualche modo lasciarsi trasportare dalle emozioni stesse e forse questo è proprio il limite di questo lavoro.

Bibliografia

Bruner J. (1992). *La ricerca del significato. Per una psicologia culturale*. Torino: Bollati Boringhieri.

Cobb P. (1986). Context, goals, beliefs and learning mathematics. *For the learning of mathematics*. 2-9.

Cornoldi C. Caponi B. Falco G. Focchiatti R. Lucangeli D. e Todeschini M. (1995). *Matematica e metacognizione*. Trento: Erickson.

Di Martino P. (2009). «La macchina di ferro senza cuore»: matematica ed emozioni negative in classe. *Incontri con la matematica n 23*. Bologna: Pitagora. 61-65

Di Martino P. (2003). The role of affect in the research on affect: the case of attitude. *CERME 3. Bellaria, Italy*. Disponibile in: http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG2/TG2_zan_cerme3.pdf. [8 giugno 2011]

Di Martino P. e Zan R. (2010). «È la prima volta che scrivo queste cose» il rapporto con la matematica nei racconti degli studenti. *Incontri con la matematica n 24* (pp. 23-28). Bologna: Pitagora.

Gardner H. (1987). *Formae mentis*. Milano: Feltrinelli.

Goleman D. (1996). *Intelligenza emotiva*. Milano: Rizzoli.

Gòmez-Chacòn I. M. (2000). Affective influences in the knowledge of mathematics. *Educational Studies in Mathematics. An International Journal*, 2 (43). 149-168.

McLeod D. (1992). Research on affect in mathematics education: a reconceptualization. *Handbook of research on mathematics learning and teaching*. New York: MacMillan. 575-596.

Pellerey M. e Orio F. (1996, 2). La dimensione affettiva e motivazionale nei processi di apprendimento della matematica. *ISRE*, 52-73.

Salovey P. e Maier J. (1990). Emotional Intelligence. *Imagination, Cognition and Person n 9*. 185-211.

Schoenfeld A. (1983). Beyond the purely cognitive: belief system, social cognitions, and metacognitions as driving forces i intellectual performance. *Cognitive Science*. 329-363.

Sternberg R. J. e Spear-Swerling L. (1998). *Le tre intelligenze*. Trento: Erickson.

Vignati R. (2005). A scuola dalle Emozioni. Disponibile in:
http://digilander.libero.it/dibiasio.neoassunti/TEMATICA5/Disabilita/scuola%20emozioni.pdf [21 giugno 2011]

Zan R. (2007). Miti e pratiche del recupero: alcune riflessioni. *Incontri con la matematica n 21*. Bologna: Pitagora. 575-596.

Zan R. (2006a). 20 anni di convegni, di ricerca,… di figli e di animali strani. *Incontri con la matematica nr. 20*. Bologna: Pitagora. 73-80.

Zan, R. (2006b). Dall'idea di errore a quella di fallimento: un cambiamento dell'approccio alle difficoltà in matematica. Incontri con la matematica n. 20 (pp. 223-226). Bologna: Pitagora.

Zan R. (2000a). Emozioni e difficoltà in matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 23A (3-4)*. 207-327.

Zan R. (2000b). Le convinzioni. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 23 (2)*. 161-198.

Zan R. (2000c). Atteggiamenti e difficoltà in matematica. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 23A (5), 441-466.

Zan R. e Di Martino P. (2004). «Io e la matematica»: una, cento, mille storie. Incontri con la matematica n 18 (pp. 65-72). Bologna: Pitagora.

4. Giochiamo con la matematica

Gianni Callegarin[1]

In this article we present situations *adidactique* regarding real life and the history of mathematics shown as game activities. These situations can be a vehicle to overcome negative ideas about mathematics and doing mathematics. We illustrate how such activities as these can induce student to search relations between different knowledges to achieve maths competence (skill?).

Introduzione

L'invito contenuto nel titolo di questo articolo potrebbe sembrare futile, inconsistente e inutile, ma non si può negare che poche discipline, come la matematica, provocano emozioni positive e purtroppo anche negative, come frustrazione, accompagnata da sensazioni di incontrollabilità (Zan, 1998, 2007).

Ad esempio uno studente che, in ambito scolastico, non riesca ad eseguire operazioni tra numeri decimali, prova emozioni negative come quelle sopra descritte. A un certo punto rinuncia, ritiene che i calcoli tra numeri decimali siano difficili, noiosi e inutili. Ma lo stesso studente, in un ambito pratico come riscuotere il resto alla fine di una spesa, ci può stupire per la naturalezza nell'eseguire i calcoli. Assume il controllo della situazione, dimostrando le competenze che il suo insegnante non gli attribuiva. Riuscire a trasferire le competenze dall'ambito pratico alla situazione scolastica è un bel problema.

Allora perché non portare situazioni concrete nell'ambito scolastico?

L'esperienza di noi tutti a scuola come docenti, ma anche come studenti, ci suggerisce che niente più che una situazione adidattica (Brousseau, 2008) può risolvere il problema, perché secondo Brousseau: *«lo studente acquisisce una conoscenza essendo in grado di applicarla a una situazione esterna»*. Un'interpretazione di una situazione adidattica può essere quella di applicare la matematica alla realtà e può offrire agli studenti la possibilità di provare emozioni positive. Situazione adidattica non significa considerare, ad esempio, un problema che rappresenti una situazione didatticamente inconsueta, proponendo solamente una ricetta per risolvere il problema; ma attirare lo studente alla soluzione del problema, proponendogli quesiti che lo facciano diventare protagonista e non spettatore, consentendogli di riscontrare nell'applicazione pratica del sapere in gioco, le conoscenze necessarie per affrontare gli argomenti che

1. Insegnante al Liceo Classico Statale «C. Bocchi» di Adria (Rovigo), membro del RSDDM, Bologna

generano sentimenti di ansia e frustrazione. Finalmente lo studente potrà costruire il «proprio» sapere, che non sarà un'abilità temporanea, ma un suo patrimonio culturale.

Tutto ciò potrà condurre lo studente ad implicarsi personalmente, non solo rispondendo alle domande-provocazione del docente, ma anche a cercare e trovare nuove strade nella costruzione del sapere, a prendere decisioni e scelte consapevoli.

In questo modo si acquisiscono le tanto discusse competenze in matematica, senza confonderle con le conoscenze, perché (Sbaragli, 2010) *«Oltre ai contenuti (saperi) all'interno della disciplina matematica, occorre saper gestire una loro rielaborazione cosciente e attiva, legata quindi alla motivazione e alla volizione, che ne permettano l'uso e l'interpretazione in situazioni problematiche e la padronanza di collegamenti tra contenuti diversi. Quando l'allievo osa al di là delle consuetudini della vita d'aula, creando collegamenti tra conoscenze diverse, nasce l'idea del superamento della semplice conoscenza verso la competenza»* (per un'ampia panoramica su competenze in matematica si veda Arrigo, D'Amore, Godino, Fandiño Pinilla, 2003).

Ritengo che una delle cause di fallimento in matematica sia la convinzione radicata in molte persone, studenti, genitori e insegnanti, che vedono nella matematica una disciplina strumentale, legata all'acquisizione di formule e regole che consentano di risolvere esercizi e problemi «preconfezionati», ricorrendo solo alla propria memoria e alla capacità di ripetere azioni e procedure. Tutto ciò avviene, senza mai far capo alle capacità di ragionamento e deduzione, capacità che devono essere stimolate dal docente, perché la comunicazione tra docente e allievi non può avvenire in un solo verso. Secondo Godino (Godino, 2003): *«Se il nucleo della comunicazione si realizza solo dall'insegnante verso gli alunni in forma scritta attraverso la lavagna, gli alunni impareranno della matematica diversa e acquisiranno una visione differente della matematica rispetto a quella che si ottiene con una comunicazione più ricca tra insegnante e alunni».*

Poi ancora Godino sui contenuti: *«Inoltre, le situazioni da realizzare devono essere basate su problemi genuini che attraggano l'interesse degli alunni fino a permettere di assumerli come propri e di desiderare di risolverli».*

Quindi, visualizzare gli aspetti teorici della matematica con attività di gioco, con riferimenti alla realtà, alla natura può essere un'arma in più per far cambiare le convinzioni che si mostrano deleterie nell'apprendimento della matematica.

Un altro modo per modificare queste convinzioni negative sulla matematica e sul «fare matematica» può essere il ricorso alla storia della matematica, ai percorsi che hanno portato persone (anche i matematici lo sono) a vere e proprie creazioni.

Secondo D'Amore e Fandiño Pinilla (2006): *«È l'essere umano che crea la matematica, a volte con successo, a volte dopo fallimenti; la crea per i suoi bisogni o per quelli di altri, o la crea semplicemente per il gusto di crearla, come capita per una poesia o per un'opera d'arte figurativa».*

Sul ricorso costante alla storia nell'insegnamento della matematica voglio ricordare le parole semplici ma profonde (come sempre) di Giorgio Bagni (Bagni, 2009)[2]: *«sono estremamente convinto della grande importanza dei riferimenti storici e*

2. Questa citazione è tratta da un'intervista (reperibile su *You Tube*) al Prof. Giorgio Bagni, a margine dell'incontro di formazione per le scuole del Miranese sulle Indicazioni per il Curricolo «La Matematica in prospettiva interculturale», Istituto Comprensivo «C. Goldoni» di Martellago (VE), 28 04 2009.

geografici nell'uso didattico quotidiano in matematica in tutti i livelli di scuola. La storia e la didattica della matematica possono interagire in due modi: il primo come spunto per dare motivazione agli studenti, il secondo per capire dove un oggetto matematico ha le sue radici storiche e geografiche».

Proprio la ricerca delle radici storiche e geografiche di un oggetto matematico può essere l'occasione per ripercorrere le difficoltà, le ansie, gli errori, che un matematico ha provato e incontrato. Perché le emozioni, che potrebbero sembrare esclusivamente negative, dovrebbero essere per lo studente stimolo per voler apprendere, riconoscendo nell'errore un'occasione di crescita, dimostrando, finalmente, di aver volontà e interesse di conoscere. A questo proposito, parlando ancora di competenze, concordo con tanti studiosi (ad esempio D'Amore, 2000, 2003) che vanno oltre un misero elenco di conoscenze e capacità tecniche, chiamando in causa, appunto, l'aspetto volitivo, emozionale.

Ritengo che il ricorso ad attività, come quelle che mi accingo a descrivere, faccia parte di quel tipo di iniziative in genere attraenti per gli studenti e profondamente educative perché servono a mostrare che cosa sia la matematica e come si possa applicare a tante altre discipline. Situazioni in cui si fa ricorso al gioco e ad applicazioni alla realtà, alla storia della matematica, potrebbero essere chiamate *situazioni emozionali*, perché danno proprio il senso della conoscenza, legato alla scoperta della matematica come disciplina legata a emozioni e non più, come troppo spesso viene descritta, fredda, arida e ripetitiva applicazione di formule e regole.

Situazione 1. Pitagora e la musica[3]

Questa serie di lezioni è stata proposta a un gruppo di studenti di una classe prima che, all'inizio dell'anno scolastico, aveva evidenziato alcune difficoltà sui numeri razionali. In particolare emergevano misconcezioni (D'Amore 1999, Sbaragli 2005) derivanti da convinzioni maturate in ambito scolastico e familiare sulla rappresentazione di un numero razionale nella retta dei numeri, sulla definizione e sul significato di frazione.

Le lezioni prendono spunto da resoconti di alcuni storici dell'antichità, come ad esempio Giamblico e Proclo, ma anche di storici della matematica (che a loro volta si rifanno agli autori sopra citati) come Boyer, Kline, Ghevergese e Bagni.

L'argomento è la scoperta, probabilmente avvenuta nell'ambito della scuola pitagorica, della relazione tra numeri e musica.

Di Pitagora si dice fosse matematico, filosofo, mago e musicista. Proprio dalla musica potrebbe aver avuto origine il suo pensiero. Racconta Giamblico che Pitagora passando davanti all'officina di un fabbro fu attirato dall'armonia dei suoni che ne uscivano. Precisamente fu attratto dal suono dei martelli, a volte consonante a volte dissonante. Una consonanza è l'effetto gradevole che si ottiene suonando insieme diverse note in relazione armonica, una dissonanza è l'effetto causato da suoni senza relazione armonica e che produce un senso di instabilità, di tensione, cioè sgradevole

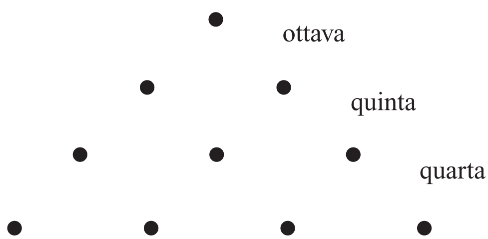
3. (NDR) Dal punto di vista della teoria musicale, l'autore si è attenuto ai testi orignali di Pitagora, pur essendo cosciente che agli occhi odierni non tutto quadra.

all’ascolto. Alcuni musicisti non sono d’accordo con queste definizioni, ritenendo che non necessariamente suoni dissonanti siano sgradevoli.

Pitagora, incuriosito, entrò e prese in mano i martelli dei fabbri, cominciando a batterli su vari pezzi di ferro. Molto presto si accorse che i martelli che producevano suoni consonanti avevano masse che formavano rapporti ben definiti.

Ad esempio usando due martelli di massa una il doppio dell’altra, si producevano due note distanti un’ottava (ad esempio due mi), se le masse erano una volta e mezza l’una dell’altra (cioè stavano nel rapporto 3 a 2, si ottenevano note distanti una quinta (ad esempio un do e un sol), se le masse erano una i 4/3 una dell’altra le note si distanziavano di una quarta (do, fa) considerata dissonante nel Medioevo.

Queste sono le consonanze principali che corrispondono ai rapporti 2/1, 3/2, 4/3. Questi rapporti sono formati dai numeri naturali 1, 2, 3, 4. Proprio questi sono i numeri che formano tetractys (figura sottostante), i rapporti tra i numeri che lo costituiscono danno luogo all’armonia.



Pitagora potrebbe aver pensato di riprodurre l’effetto sonoro, ascoltato presso l’officina del fabbro, con dei calici e una caraffa d’acqua. Versando l’acqua nei calici, in modo che contenessero acqua nei rapporti sopra citati e percuotendoli con un oggetto metallico, si accorgeva che il calice colmo e quello pieno a metà producevano suoni distanti un’ottava. Insomma le note prodotte dai bicchieri pieni a metà, per un terzo… erano consonanti alla prima. Mentre riempiendo i bicchieri in modo casuale si producevano suoni dissonanti. La successione di rapporti 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5,… provocava un’armonia sorprendente (forse proprio in questa «situazione» parlò di armonia?), inducendolo a pensare che tutto l’universo fosse sede di suoni magici, «la musica delle sfere».

Pitagora in gioventù imparò a suonare la cetra, quindi non gli sarà sfuggito che con corde di lunghezza doppia una dell’altra si possono ottenere note distanti un’ottava, con corde di lunghezza una volta e mezza una dell’altra note distanti una quinta. Quindi con due corde (uguali come diametro) lunghe una il doppio di un’altra si producono due Do, distanti un’ottava una dall’altra (il rapporto è 1/2). Le note intermedie si possono produrre con corde la cui lunghezza si può esprimere dai rapporti: 9/16 Re, 5/8 Mi, 2/3 Fa, 3/4 Sol, 5/6 La, 15/16 Si. I rapporti sono compresi tra 1 e 1/2.

Pitagora, come uno scienziato dei nostri tempi, da questo «esperimento» dedusse che musica, matematica e natura fossero un’unica entità. Esattamente pensava esistessero tre tipi di musica:

– prodotta da uno strumento;
– prodotta dal corpo;
– prodotta dal cosmo.

I tre tipi di musica coincidevano (erano consonanti) dando luogo a un effetto emotivo sull'uomo e dandogli la possibilità di dedurre le leggi dell'universo da quelle sulla musica che, a loro volta, erano ricavate dalla matematica.

Sicuramente la scoperta delle relazioni tra musica e matematica gli fece capire che il numero fosse l'essenza di tutte le cose. Insomma in questo frangente potrebbe aver detto la celebre frase *«tutto è numero»*.

Questa scoperta così profonda gli diede grande popolarità, al punto da farlo ritenere una divinità o, perlomeno, un depositario della saggezza divina.

A questo punto ho rispolverato la mia chitarra Fender per convincere gli studenti un po' scettici e far loro toccar con mano, nel senso che, anche loro, hanno iniziato a suonare e a mettere in relazione suoni, cioè note, con i numeri. Dopo aver pizzicato la corda più grossa che corrisponde a un mi basso, abbiamo misurato la distanza tra capotasto e selletta. Poi ho fatto notare che nella tastiera c'era un unico tasto con due punti ed è l'unico che permette di produrre la stessa nota, naturalmente più alta (per chi sapeva di musica, distante un'ottava). Misurando la distanza tra la selletta e il tasto con due punti, si otteneva la metà rispetto a prima. Suonando le due note contemporaneamente (mi alto e mi basso) con due chitarre l'effetto ottenuto era gradevole o meglio consonante.

Il rapporto tra le misure delle corde era 1/2.

Poi abbiamo (più loro che io) prodotto note distanti una quinta, una quarta, sempre effettuando le misure relative e abbiamo notato che ciò che era stato detto in precedenza era corretto: si formano dei rapporti ben definiti e naturalmente suonando le note assieme si ottiene un effetto consonante.

Questa lezione è stata concepita con l'intenzione di presentare l'insieme dei numeri razionali in modo inconsueto, facendo ricorso a situazioni reali, come suonare (in modo consonante) uno strumento musicale. Gli stessi studenti hanno suggerito situazioni simili (ad esempio bicchieri pieni d'acqua, mezzi pieni…) e quindi hanno contestualizzato la conoscenza in ambiti diversi dai consueti, modificando e affinando la terminologia fino a quel momento usata nel maneggiare le frazioni.

È bastata una mia domanda per dare luogo a un'accesa e produttiva discussione: quando si definisce una frazione si dice che occorre dividere una grandezza in parti uguali. Questa affermazione è adeguata a tutte le situazioni che abbiamo visto?

Secondo Francesca, quando abbiamo misurato la lunghezza della corda di chitarra che produce un mi basso e la lunghezza ottenuta agendo sul tasto con i due punti, le due parti della corda erano proprio uguali. Quindi la definizione data è corretta.

Marcello, basandosi sul momento della lezione in cui si parla di bicchieri, faceva un'osservazione assolutamente non banale e per questo condivisa da pochi: *«I bicchieri che producono note distanti un'ottava contengono quantità di acqua uno il doppio dell'altro, ma l'acqua del secondo bicchiere non si ottiene dividendo in parti uguali il primo bicchiere»*.

Io chiedevo lumi sul significato di uguale. Ricevendo varie risposte, con la conclusione che la parola uguale può essere usata in contesti diversi e che questa volta andava riferita alla capacità del bicchiere, non ad un modo per «dividere» il bicchiere. Sono emerse varie idee, alcune a sostegno di quello che diceva Francesca, altre a favore dell'opinione di Marcello. A questo punto ho disegnato la classica figura che si usa (o si dovrebbe usare, al posto della torta tagliata in fette «uguali», cioè geometricamente congruenti) per iniziare a spiegare le frazioni (quella a sinistra nella figura sottostante).

E questo sembrava dar ragione all'asserzione di Francesca, ma quando ho disegnato un'altra figura (quella a destra), ho messo in crisi Francesca e chi le dava ragione, perché le quattro parti che prima erano riconosciute da tutti come uguali, nella seconda figura non erano più uguali. Nella prima figura le quattro parti si dicono (in geometria euclidea) congruenti (nel linguaggio comune uguali) nella seconda le quattro parti non sono congruenti, però (in linguaggio matematico) sono equiestese, cioè hanno la stessa area (uguali secondo l'area). I giovani sorprendono sempre. Infatti a questo punto Giacomo proponeva di tagliare la classica torta proposta nella scuola primaria, non più come farebbe una perfetta casalinga, ma in parti dello stesso peso (meglio: massa), ma non della stessa forma. Grande ilarità della classe, ma anche soddisfazione perché, anche senza il taglio perfetto della torta, ciascuno avrebbe mangiato la stessa quantità di torta degli altri.

Quindi il problema sta nel significato della parola uguale e il contesto in cui si usa e ciò va sottolineato fortemente dal docente, quando si vuole spiegare che cos'è una frazione a tutti i livelli scolastici (Fandiño Pinilla, 2006; Campolucci, Maori, Fandiño Pinilla e Sbaragli, 2006).

Situazione 2. La riscoperta dei prodotti notevoli come argomento legato alla realtà.

Quando si affronta lo studio dei prodotti notevoli, in particolare il quadrato di un binomio, nasce una delle misconcezioni[4] più diffuse: l'allievo nello sviluppare il quadrato del binomio dimentica il doppio prodotto.

Ciò succede nonostante sia stata presentata (o meglio fatta scoprire) la verifica per via algebrica ($(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = \dots$) e quella per via geometrica (che sarà ripresa nelle righe successive), alla maniera di Euclide. Quanto appreso sul quadrato di un binomio viene dimenticato, perché l'argomento è ritenuto slegato da ogni altro. Quando lo studente lo incontra, ad esempio, nella risoluzione di un'equazione algebrica, non lo riconosce e gli attribuisce una sorta di proprietà distributiva, elevando al quadrato il primo e il secondo monomio, ma omettendo il doppio prodotto. Gli studenti non rilevano alcun legame tra l'argomento (quadrato di un binomio) e quelli

4. Secondo B. D'Amore (D'Amore, 1999): «Una misconcezione è un concetto errato e dunque costituisce un evento da evitare; essa non va vista sempre come una situazione del tutto o certamente negativa: non è escluso che per poter raggiungere la costruzione di un concetto, si renda opportuno passare attraverso una situazione momentanea, ma in corso di sistemazione».

successivi (equazioni algebriche). Questo, probabilmente, avviene perché l'argomento non evidenzia alcun legame con situazioni applicative e quindi è fine a se stesso, quindi non è collegabile alle equazioni. Per contro, se il sapere in oggetto fosse calato in una situazione concreta, si potrebbe generare un cambio di atteggiamento nei suoi confronti e, più in generale, nei confronti della matematica. Lo studente potrebbe abbandonare l'atteggiamento fatalista che lo porta all'uso di regole e formule per ottenere i risultati voluti dall'insegnante. Scoprirà la rilevanza del quadrato di un binomio e, soprattutto, non sarà una scoperta fatta per compiacere l'insegnante ma per propria volontà e soddisfazione.

D. Paola e G. Alessi (2002) propongono, come collegamento interdisciplinare, i prodotti notevoli e la dilatazione dei materiali.

Molti di noi sanno che al cambiare delle stagioni e, quindi, della temperatura, le porte e le finestre delle nostre case fanno più o meno fatica a chiudersi. Ma, forse, non tutti sanno che anche un ponte al variare della temperatura cambia le proprie dimensioni. Naturalmente questo cambiamento, che si chiama dilatazione, è maggiormente rilevabile per l'estensione orizzontale del ponte che, tra le sue dimensioni, è la più grande, cioè la sua lunghezza.

Per facilitare le cose inizialmente ci occupiamo della dilatazione di un corpo, come nel caso del ponte, che avvenga in misura preponderante in una sola dimensione. Una dilatazione di questo tipo si chiama dilatazione lineare e dipende dalla variazione di temperatura secondo la legge fisica $\ell = \ell_0 (1 + \lambda T)$ (1), dove ℓ_0 è la lunghezza del corpo (prima dell'aumento di temperatura, che viene detta temperatura iniziale), ℓ la lunghezza dopo l'aumento di temperatura di T gradi centigradi (simbolo °C) e il coefficiente λ, che si chiama coefficiente di dilatazione lineare e che dipende dalla sostanza di cui è costituito il corpo.

Gli autori propongono il seguente problema:

Si chiede di calcolare la lunghezza e quindi l'allungamento di un ponte di ferro dopo che la temperatura è aumentata da –10°C a 30°C, sapendo che la lunghezza a –10°C è di 100 m (il coefficiente di dilatazione lineare del ferro è $12 \cdot 10^{-6}$ m/°C).

Soluzione

Applicando l'equazione (1) che determina la legge fisica della dilatazione lineare di un solido (in questo caso del ponte), si ha:

$\ell = 100\,(1 + 12 \cdot 10^{-6} \cdot 40)\text{m} = 100{,}048$ m,

dove $\ell_0 = 100$ m, $\lambda = 12 \cdot 10^{-6}$ m/°C

e la variazione di temperatura T = 40°C

Quindi il ponte si allunga di 0,048 m, cioè di 4,8 cm.

Occupiamoci ora della dilatazione di un corpo in due dimensioni, detta dilatazione superficiale. Supponiamo di voler costruire una finestra inserendo una sottile (agli studenti è stato chiesto «perché sottile?») lastra di vetro quadrata il cui lato misura 1 m. Aumentando la temperatura la lastra si dilata, di quanto aumenta l'area della lastra a causa della dilatazione (coefficiente di dilatazione del vetro $8 \cdot 10^{-6}$ m^2/°C)?

Come cambia la legge e come si modifica il coefficiente di dilatazione?

Soluzione

La lastra deve essere sottile altrimenti dovremmo tener conto di una dilatazione, oltre che in lunghezza e larghezza, anche nello spessore della lastra, cioè di una dilatazione volumetrica.

Per ottenere la legge fisica della dilatazione superficiale ci serviamo del quadrato di un binomio.

Indichiamo con ℓ_0 il lato della lastra quadrata e la sua misura è 1 m. La sua area è $A_0 = \ell_0^2 = 1\ m^2$. Quando la temperatura aumenta di T °C, il lato si dilata secondo la legge $\ell = \ell_0\,(1 + \lambda T)$ e la sua area sarà:

$$A = \ell^2 = \left[\ell_0\,(1 + \lambda T)\right]^2 = \ell_0^2\left[1 + 2\,\lambda T + (\lambda T)\right]^2$$

Conoscendo il coefficiente di dilatazione del vetro e l'aumento di temperatura, ad esempio T=40°C, il termine $(\lambda T)^2 = (8 \cdot 10^{-6} \cdot 40)^2 = (3{,}2 \cdot 10^{-4})^2 \approx 10^{-7}$ è molto più piccolo degli altri e quindi influisce in modo impercettibile sul risultato: si può dunque trascurare. (Gli studenti hanno verificato in altri casi che il termine $(\lambda T)^2$ è molto piccolo ed è quindi trascurabile). La legge di dilatazione superficiale diventa: $A = A_0^2\,(1 + 2\,\lambda T)$. Il coefficiente di dilatazione è il doppio di quello lineare (che è piccolissimo per tutte le sostanze).

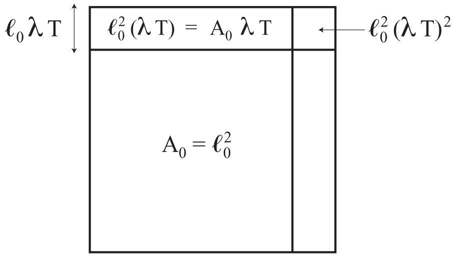
Dalla legge di dilatazione lineare, utilizzando il quadrato di un binomio e omettendo un addendo trascurabile, abbiamo ottenuto la legge di dilatazione superficiale. Questo lavoro è svolto dagli studenti, come sempre sotto il controllo del docente, il quale stimola ponendo domande e incoraggiando la ricerca di relazioni.

In questo modo, il quadrato di un binomio dovrebbe perdere l'immagine di oggetto inutile e fonte di alcune misconcezioni. Anzi, in questo caso, avendo trascurato un quadrato, il termine «doppio prodotto» si rivela decisivo ai fini del risultato.

La struttura algebrica del quadrato di un binomio si può «studiare» anche nel registro geometrico, metodo privilegiato dai Greci, per esempio da Euclide. La figura seguente illustra e dimostra la formula del quadrato di un binomio, senza che sia necessaria alcuna altra spiegazione.

Noi che siamo abituati all'argomentazione testuale aggiungeremmo:
l'area del quadrato di destra è uguale all'area di quello di sinistra, cioè:
$(a + b)^2 = a^2 + a\,b + a\,b + b^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$.

Calando la formula della dilatazione superficiale nel registro geometrico, si ottiene la figura seguente, rappresentazione della formula della dilatazione superficiale:



Si vede bene come il termine trascurato è veramente ininfluente.

Situazioni reali e concrete, come quelle appena viste, permettono allo studente di dare senso allo studio del calcolo letterale, nel nostro caso del quadrato di un binomio, e di rendersi conto dell'importanza di giungere a un risultato completo e corretto. Asserzioni del tipo «Prof, ho poi solo dimenticato un termine», per giustificare la dimenticanza del «doppio prodotto» non si dovrebbero più sentire.

Quando si parla di termini che cambiano in modo trascurabile, come l'area del quadratino, si ha l'occasione, con le dovute cautele e con spirito euristico, di spingere lo studente a immaginare un valore di λ molto piccolo, più piccolo di qualsiasi numero che riesca ad immaginare, quindi la conseguente area del citato quadratino per permettergli di costruire una prima immagine mentale di infinitesimo.

Già che ci siamo, potremmo continuare osservando che le finestre delle nostre case, al cambio di stagione e quindi di temperatura, risultano più o meno difficili da chiudere. Con l'aumentare della temperatura, si ha una crescita del volume (non sempre, ad esempio il ghiaccio…) e si ha dunque una dilatazione di volume.

È possibile ricavare la legge di dilatazione volumetrica con una procedura analoga alla precedente?

Per semplificare la questione prendiamo in considerazione un cubo.

Quale sarà la legge di dilatazione per un cubo di lato ℓ_0 (quindi di volume $V_0 = \ell_0^3$) per un aumento di temperatura di T°C? Vediamo.

Il volume del cubo di lato $\ell_0 (1 + \lambda T)$ è $V = \ell^3$ e per un aumento di temperatura di T°C, il volume diventa:

$$V = V_0 (1 + \lambda T)^3 = V_0 \left[1 + 3 \lambda T + 3(\lambda T)^2 + (\lambda T)^3\right]$$

Anche in questo caso abbiamo usato i prodotti notevoli.

Come nel caso della lastra di vetro è opportuno far eseguire agli studenti alcune verifiche assegnando V_0 e λ; essendo λ molto piccolo per tutti i materiali e dato che l'aumento di temperatura è dell'ordine di qualche decina di gradi, si ha che i termini λT sono anch'essi piccoli (a questo punto si potrebbe tentare di introdurre la nozione di ordine di grandezza) ed elevandoli alla seconda e alla terza (e naturalmente anche a potenze maggiori) diventano sempre più piccoli, quindi si possono trascurare. La legge di dilatazione cubica trascurando i termini $3(\lambda T)^2$ e $(\lambda T)^3$ si modifica in $V = V_0 (1 + 3 \lambda T)$.

Il coefficiente di dilatazione cubica è il triplo di quello lineare.

Il quadrato e il cubo di un binomio sono stati impiegati per ricavare buone approssimazioni delle leggi di dilatazione superficiale e di volume. Questo risultato dev'essere raggiunto dagli studenti mediante una discussione tra loro e con l'insegnante, in modo che il termine «prodotto notevole» non sia solamente un brutto ricordo scolastico, ma qualcosa che si ricollega alla realtà.

Situazione 3. Talete e il suo senso pratico: come misurò la distanza di una nave dalla terra.

In alcune scuole dove ho insegnato ho proposto un'attività che ho chiamato «mateatro», che coniuga matematica e teatro, avendo come obiettivi la stesura e la rappresentazione di un testo teatrale. Studiando la vita, le opere, le creazioni di un matematico ho cercato di far immedesimare (teatro) le ragazze e i ragazzi che hanno partecipato, nelle situazioni che hanno vissuto alcuni matematici. Scoprendo che un matematico, come un artista, crea e prova sentimenti di frustrazione e di esaltazione.

Prima di iniziare la stesura del testo ho tenuto alcune lezioni sul matematico oggetto di studio del mateatro. Una di queste lezioni ha riguardato Talete, la sua formazione culturale, le sue creazioni e le sue invenzioni. In questo percorso non mi sono potuto esimere dal parlare delle civiltà precedenti, quella greca antica per lo sviluppo della matematica, proponendo alcune citazioni sull'importanza delle civiltà egizia e babilonese per lo sviluppo della cultura e in particolare della matematica.

J. G. Ghevergese (2003) ricorda che Morris Kline (Kline, 1962) nel suo libro «Mathematics: a cultural approach» dedica solamente tre pagine allo sviluppo della matematica in Egitto e in Babilonia, respingendo ogni tentativo di attribuire importanza a questi contributi, definendoli: *«pressoché insignificanti»*. Poi aggiunge: *«La matematica degli egizi e dei babilonesi è come lo scarabocchiare dei bambini che stanno imparando a scrivere in confronto alla grande letteratura»*.

Carl B. Boyer sembra essere d'accordo con Kline quando scrive (Boyer, 1990): *«La matematica pre-ellenica presenta un certo numero di lacune abbastanza evidenti. I papiri e le tavolette esistenti contengono soltanto casi e problemi specifici, senza alcuna formulazione di teoremi o regole di carattere generale. Ci si chiede se queste antiche civiltà fossero realmente in grado di cogliere i principi unificatori che costituiscono il cuore della matematica»*. Ma in seguito riconosce che: *«Un'analisi più approfondita ci induce a essere più cauti in proposito…»*. Poi, sul fatto che numerose tavolette contengano molti problemi risolti *«in base a certi metodi e regole riconosciuti»*, egli conclude: *«Raccolte così vaste di problemi simili non potevano essere il risultato del puro caso»*.

Sempre Boyer, sulla dimostrazione, ritiene che se ne possa trovare traccia nelle civiltà pre-elleniche quando scrive: *«Il termine dimostrazione (…) significa cose diverse a livelli diversi e in tempi diversi; pertanto è azzardato affermare categoricamente che le popolazioni pre-elleniche non avessero alcun concetto di dimostrazione»*.

Poi ancora Boyer: *«I Greci hanno assimilato le conoscenze di Egiziani e Babilonesi nel campo della matematica, in particolare nella Geometria, dandole una struttura logica. Talete in questo sembra aver avuto una parte fondamentale»*.

Figura 1, 2, 3. Papiro di Ahmes, Tavoletta Plimpton e Tavoletta Baqir.

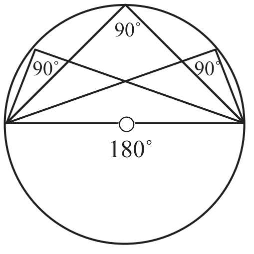
Sul contributo delle civiltà egiziana e babilonese riguardo alla geometria e sulla discussione circa la dimostrazione in geometria, Ghevergese asserisce: *«(…) il semplice fatto che i problemi che richiedono algoritmi specifici per la loro soluzione siano raggruppati insieme nel papiro di Ahmes*[5] *come nelle tavolette babilonesi*[6] *indica che c'era una certa comprensione della generalità delle regole soggiacenti. È stato anche rilevato che in molte soluzioni geometriche dei greci ogni passo è identico al passo corrispondente nelle soluzioni algebriche dei babilonesi»*. Poi ancora: *«Nella matematica di queste due civiltà* [Egiziana e Babilonese] *tali procedimenti e verifiche* [abilità tecnica nel calcolo e insiemi simili di problemi] *devono essere considerati come una forma di dimostrazione in senso lato»*.[7]

5. Nome dello scriba egizio che lo trascrisse nel 1650 a. C. da un altro papiro di tre secoli prima (figura 1).
6. Tavoletta Plimpton 322 risalente almeno al 1650 a. C. (figura 2).
7. Tavoletta Baqir 1950 risalente circa al 2000 a. C. (figura 3).

A Talete vengono attribuiti alcuni teoremi, come il seguente che ha come enunciato: *«Un angolo inscritto in una semicirconferenza è retto».*

Questo teorema è detto anche «teorema di Dante» perché citato nella Divina Commedia[8].

«o se del mezzo cerchio far si puote
triangul sì ch'uno retto non avesse».



Tutte le figure riguardanti teoremi attribuiti a Talete sono state realizzate dagli studenti con Cabri. In classe si è discusso sul fatto che essendo figure «dinamiche», cioè che possono essere modificate, consentono di verificare alcuni teoremi di geometria euclidea.

A questo punto, tra gli studenti è nata una discussione (provocata anche dalle citazioni precedenti) sul fatto che tali verifiche possano costituire una dimostrazione alla maniera dei babilonesi e comunque una valida alternativa alla dimostrazione, senza peraltro sostituirla appieno.

Talete si recò in Egitto e Babilonia e secondo la testimonianza di Proclo nel Commento al primo libro degli Elementi di Euclide: *«(…) andò dapprima in Egitto e da qui introdusse lo studio della Geometria in Grecia. Non solo fece egli stesso parecchie scoperte, ma insegnò ai suoi allievi i principi che stavano alla base di molti altri, seguendo in alcuni casi un metodo più generale, in altri uno più empirico».*

Per la stesura del testo teatrale su Talete era necessario qualcosa che ne illustrasse la capacità di realizzare in ambito pratico le sue scoperte teoriche e fosse, contemporaneamente, funzionale alla messa in scena, coinvolgente per gli studenti e, di riflesso, per gli spettatori a teatro.

Si dice che Talete abbia inventato, usando la similitudine (probabilmente rifacendosi a quello che aveva appreso durante i suoi numerosi viaggi), un procedimento per calcolare la distanza di una nave da un determinato porto.

Sia NT la distanza di una nave (N) dalla terra ferma (T) (figura 4).

Supponiamo di trovarci sopra a un faro (anche questa figura è stata realizzata da una studentessa), O rappresenta i nostri occhi e H il punto dal quale teniamo (perpendicolarmente al faro) un bastone HA parallelo alla superficie del mare (TN). Guardando la nave N, il raggio visuale uscente dall'occhio interseca il bastone in P, è possibile misurare HP. Dato che i due triangoli OHP e OTN sono simili (quindi i lati sono in proporzione) posso scrivere la proporzione NT : HP = OT : OH, da cui posso ricavare NT = (HP · OT) / OH.

8. Dante Alighieri, Divina Commedia, Paradiso, canto XIII, 101, 102.

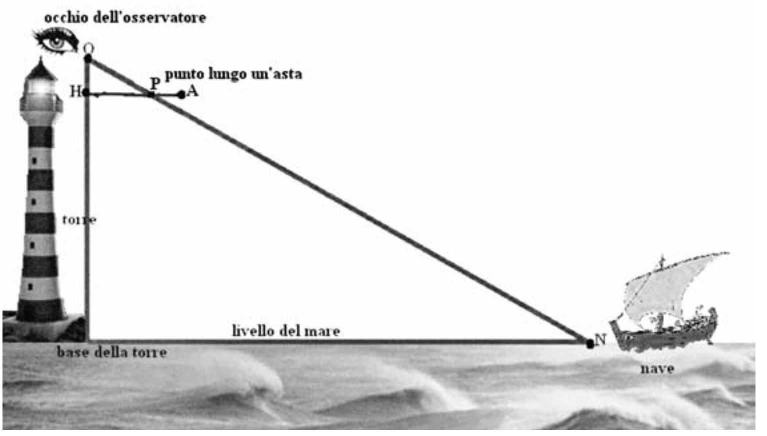


Figura 4. Distanza di una nave dalla terra ferma.

Durante la rappresentazione teatrale, Talete spiega all'allievo Pitagora come trovare la distanza tra la nave e il porto. Pitagora interagisce con il maestro, fornendo, anche ai non matematici, la possibilità di capire la situazione. Insomma non si tratta della classica lezione frontale, ma di una costruzione voluta e consapevole del sapere, presentata con domande e provocazioni da parte di Talete, risposte e domande da parte di Pitagora. L'allievo Pitagora ha interagito con il maestro Talete utilizzando un supporto grafico, costituito da carboncino e papiro. Non si poteva però dimenticare il pubblico che è stato agevolato nella comprensione con diapositive realizzate dagli studenti.

Situazione 4. Pitagora e il cavolo

Queste lezioni erano dirette agli studenti di una classe seconda di scuola media superiore, che avevano familiarità con gli argomenti: proporzioni, similitudine e sezione aurea, conosciuti anche nell'ambito di altre discipline come per esempio storia dell'arte.

Il riferimento storico è, ancora una volta, a Pitagora e alla sua scuola.

I numeri naturali, oltre a essere messi in relazione con le note musicali, erano anche collegati alla geometria, nel senso che ogni figura è pensata come composta da monadi, unità indivisibili, che potremmo rappresentare con punti. Delle tante figure geometriche studiate da Pitagora e dalla sua scuola ci occupiamo del pentagono stellato, che è stato assunto come simbolo della scuola.

Tracciando le diagonali di un pentagono regolare ABCDE (figura 5), si ottiene il pentagono stellato. I punti d'intersezione tra le diagonali del pentagono F, G, H, I, L formano un altro pentagono regolare LIHGFL (quello colorato). Tracciando ancora le diagonali nel pentagono LIHGFL, si forma un altro pentagono. I pentagoni sono tra loro simili (angoli congruenti e lati in proporzione). Ripetendo le stesse azioni (tracciare le diagonali), si possono costruire pentagoni regolari tutti tra loro simili.

La proporzionalità tra i lati può essere facilmente verificata, notando la presenza di triangoli simili, ad esempio ABD e LID, oppure ABD e EFD).

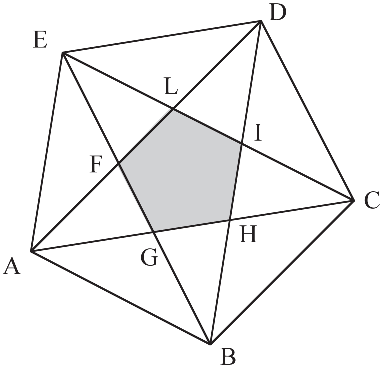
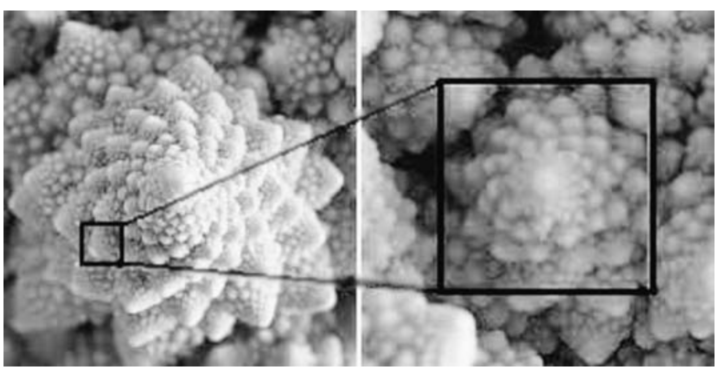


Figura 5. Pentagono regolare.

Se prendiamo in considerazione ABD e ABH, si possono scrivere diverse proporzioni, ad esempio BD : AB = AB : BH e, dato che AB DH, si ottiene BD : DH = DH : BH . Nel segmento BD una sua parte, cioè DH, è media proporzionale tra il segmento e la parte rimanente (BH). Questo modo di dividere, anzi di sezionare, un segmento è stato chiamato sezione aurea. Il segmento medio proporzionale DH è detto la sezione aurea del segmento. Gli studenti avevano già affrontato la «sezione» in matematica e a storia dell'arte, quindi non hanno avuto esitazioni nel reiterare il procedimento. Infatti la sezione di un segmento può essere, a sua volta, divisa in due parti, che siano una media proporzionale dell'altra. Si può così continuare, con un limite fisico, dato dal fatto che la manualità ci impedisce di andare troppo oltre, non però di immaginare che si possa sempre procedere.

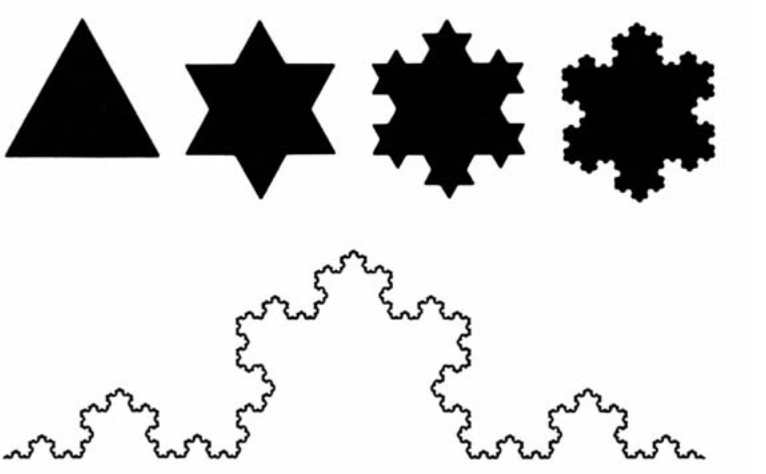
A questo punto, tra l'ilarità degli studenti, ho fatto portare in classe alcuni cavoli. L'ilarità ha lasciato il posto alla meraviglia quando si è notato che un cavolo ha un aspetto particolare: la sua forma si riproduce, come si può vedere nelle immagini sottostanti.



Gli studenti si sono divertiti ad analizzare varie qualità di cavolo e hanno deciso che il più «bello» è il cavolo romano, il cui aspetto ricorda quello che succede con il pentagono stellato, ossia che la forma si ripete su scale diverse.

Ho consigliato loro di cercare informazioni sui frattali e hanno trovato che: (Wikipedia) *«Un frattale è un oggetto geometrico che si ripete nella sua struttura allo stesso modo su scale diverse, ovvero che non cambia aspetto anche se visto con* *una lente d'ingrandimento».* Si può considerare inventore della Geometria frattale Benoît Mandelbrot (1924-2010) e navigando sul web si possono ammirare diverse forme frattali: è iniziata così una gara a chi trovava l'immagine frattale più bella.

Per tornare all'apprendimento attivo, ho proposto la curva di Koch, la cui costruzione inizia con un triangolo equilatero di lato 1 (unità arbitraria). Successivamente si suddivide ogni lato in tre segmenti fra loro congruenti costruendo su quello centrale un altro triangolo equilatero. Si forma una poligonale chiusa. Su ogni lato si può ripetere la costruzione e continuare.



Alcuni studenti hanno costruito la curva con riga e compasso, altri con il computer, ottenendo forme frattali come quelle della figura precedente. A questo punto ho chiesto di concentrare l'attenzione su un lato del primo triangolo, che misurava 1(u), cercando la misura della prima poligonale, della seconda, ecc.

La seconda poligonale misura 4/3, la terza 16/9 cioè $(4/3)^2$, la quarta 16/27 cioè $(4/3)^3$. L'ennesima poligonale $(4/3)^n$. Così la curva di Koch, detta anche isola di Koch, misura $3\cdot1=3\cdot(4/3)^0$ per la prima isola, $3\cdot(4/3)^1$ per la seconda, $3\cdot(4/3)^2$. Il perimetro dell'isola diventa sempre più grande, tende a infinito, pur avendo un'area finita, perché delimitata da una poligonale.

Conclusioni

Le situazioni come quelle descritte possono indurre l'allievo a costruire il proprio sapere, facendogli acquisire la volontà di agire e la consapevolezza che potrà spendere il proprio sapere nella società. Gli allievi demotivati nei confronti della matematica, perché la ritengono avulsa dalla realtà, potranno cambiare le loro convinzioni sulla matematica e quindi anche il modo di affrontarla.

Il ricorso a situazioni riferite alla realtà o alla storia della matematica potrà agevolare la costruzione del sapere e il raggiungimento di competenze matematiche. Perché (Fandiño Pinilla, 2003): *«La competenza matematica si riconosce quando un individuo vede, interpreta e si comporta nel mondo in senso matematico».* In questo modo una persona non sarà più soggetta a quella sorta di sdoppiamento della personalità: impacciato con la matematica a scuola, competente in situazioni reali (mi sto riferendo alla situazione illustrata all'inizio di questo articolo, riguardante la difficoltà ad operare con numeri decimali a scuola contrapposta alla facilità con cui la stessa per persona maneggia i numeri decimali in una situazione reale). Potrà essere consapevole delle proprie conoscenze e, finalmente, riuscirà a spenderle nella realtà quotidiana come studente e come cittadino.

Se l'aspetto cognitivo è base essenziale per la costruzione del sapere in matematica, è anche vero che i richiami a situazioni reali e alle vicende umane che hanno condotto all'evoluzione di un concetto sono legati strettamente agli aspetti affettivi.

Occorre operare un cambiamento radicale rispetto all'insegnamento «tradizionale», quello già citato delle situazioni «preconfezionate» in cui attraverso regole e formule – a fatica memorizzate e presto dimenticate – si risolvono esercizi ripetitivi, mai problemi che richiedano all'allievo una elaborazione personale delle conoscenze, raggiungibile per mezzo del confronto e della discussione (fra allievi insieme all'insegnante).

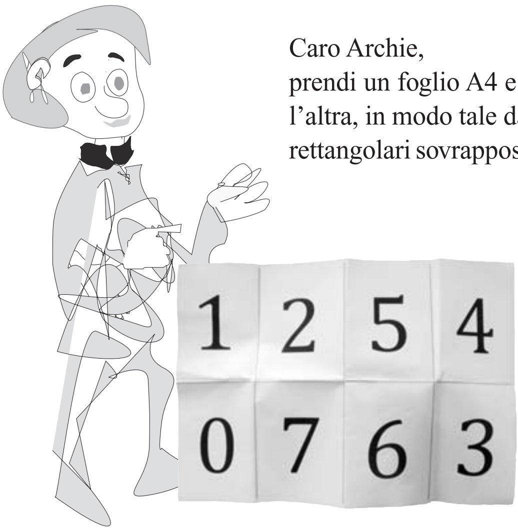
Certamente le molte attività che alcuni testi scolastici propongono, legate alla storia della matematica e alle applicazioni della matematica alla realtà, possono facilitare i cambi di convinzione nei confronti della matematica. Occorre che situazioni come quelle descritte diventino consuetudini e dunque che l'attività didattica sia mirata alla costruzione di conoscenze e al raggiungimento di competenze: apprendimenti, questi, fruibili anche al di fuori della scuola.

Bibliografia

Arzerello F., Robutti O. (2002). *Matematica*. Brescia: La Scuola.
Bagni G. T. (1996). *Storia della matematica vol. 1.* Bologna: Pitagora.
Boyer C. B. (1990). *Storia della matematica.* Verona: A. Mondadori.
Brousseau G. (2008). *Ingegneria didattica ed Epistemologia matematica.* Bologna: Pitagora.
Campolucci L., Maori D., Fandiño Pinilla M.I., Sbaragli S. (2006). Cambi di convinzione sulla pratica didattica concernente le frazioni. *La matematica e la sua didattica.* 3.* 353-400.
D'Amore B.(1999). *Elementi di Didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.
D'Amore B. (2009). *Matematica stupore e poesia. Firenze:* Giunti.
D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2006). Matematica, da disciplina a materia *Riforma & Didattica*. 4, vol. 10. 27-29. Reggio Calabria: Falzea.
D'Amore B., Godino J., Arrigo G., Fandiño M. I. (2003). *Competenze in matematica.* Bologna: Pitagora.
D'Amore B., Oliva P. (1994). *Numeri.* Milano: Franco Angeli.
Fandiño Pinilla M.I. (2006). Trasposizione, ostacoli epistemologici e didattici: quel che imparano gli allievi dipende da noi. Il caso emblematico di frazioni, area e perimetro. In:
Paola D., Alessi G.. (2002). *Mat* $\exists$ *Mat* α. Libido S. Giacomo (MI): Bruno Mondadori.
Sbaragli S. (2006). Diverse chiavi di lettura delle misconcezioni. *Rassegna.* Istituto Pedagogico di Bolzano. XIV, 29, 47-52.
Ghevergese G. J. (2003). *C'era una volta un numero.* (2003) Milano: Il Saggiatore.
Kline M. (1991). *Storia del pensiero matematico I.* Torino: Einaudi.
Kline M. (1962). *Mathematics: a cultural approach.* London: Addison-Wesley.
Loria G. (1950) *Storia delle matematiche*. Milano: Hoepli.
Nicosia G. (2010) *Cinesi, scuola e matematica.* E.book. Scaricabile gratuitamente in http://www.lulu.com/
Sbaragli S. (2011) Le competenze nell'ambito della matematica. *Difficoltà in matematica.* 7/2, 143-156.
Sbaragli S. (2005). Misconcezioni «inevitabili» e misconcezioni «evitabili». *La matematica e la sua didattica.* 1. 57-71.
Zan R. (1998) *Problemi e convinzioni.* Bologna: Pitagora.
Zan R. (2007) *Difficoltà in matematica.* Milano: Springer.

Quiz numero 49: Piegatura strategica

Aldo Frapolli



Caro Archie,
prendi un foglio A4 e esegui 3 piegature appropriate, una dopo l’altra, in modo tale da ottenere una «pila» formata di 8 «fogli» rettangolari sovrapposti che, detto per inciso, hanno formato A7.
Riapri il foglio A4 e scrivi su entrambe le facce di ognuno degli 8 «fogli» lo stesso numero preso da 0 a 7, nell’ordine che vedi su questa mia copia.

Ora effettua le stesse piegature iniziali e osserva in quale ordine si trovano gli otto numeri nella «pila» ottenuta.

D’accordo Moore! Ecco qua.

Bene!
Ti sfido a trovare un tipo di piegatura del foglio che porti alla «pila» ordinata crescente, cioè:
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

A me viene … 0, 3, 4, 1, 2, 5, 6, 7

A tutti voi affezionati lettori del Quiz rivolgiamo la medesima sfida lanciata da Moore:

Con quale particolare piegatura è possibile ottenere la pila ordinata da 0 a 7?

Fra i vari solutori estrarremo a sorte colui o colei che si aggiudicherà un bel libro di Quiz matematici.

Soluzione del Quiz numero 48

Nessuna soluzione corretta ci è pervenuta dai lettori. Vi proponiamo pertanto la soluzione della redazione. Analizzando la situazione, prestando attenzione al numero di biglie di colore rosso (R) presenti nei due gruppi di 4 elementi, si possono distinguere i quattro casi disgiunti seguenti, per ognuno dei quali – ammesso che si sia verificato – si possono facilmente calcolare le probabilità di vittoria di R, B e N:

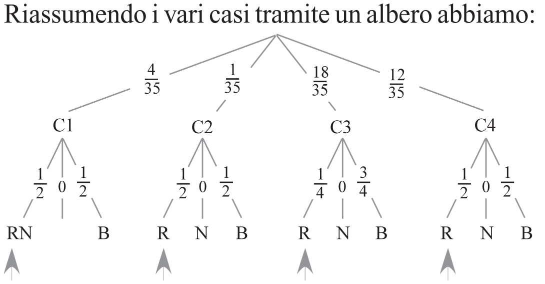
Caso	Gruppo	Numero di biglie	Vincitore al 1° turno	Vincitore al 2° turno	Probabilità di vittoria di R nel caso considerato
C1	I°	3R + 1B	R	R o B	$p(R)=\frac{1}{2}$ $p(B)=\frac{1}{2}$
	II°	3B + 1N	B		
C2	I°	3R + 1N	R	R o B	$p(R)=\frac{1}{2}$ $p(B)=\frac{1}{2}$
	II°	4B	B		
C3	I°	2R + 2B	R o B, con $p(R)=\frac{1}{2}$ $p(B)=\frac{1}{2}$	R o B	$p(R)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ $p(B)=\frac{3}{4}$
	II°	1R + 2B + 1N	B		
C4	I°	2R + 1B + 1N	R	R o B	$p(R)=\frac{1}{2}$ $p(B)=\frac{1}{2}$
	II°	1R + 3B	B		

La probabilità che si verifichi C1 si ottiene dal prodotto delle probabilità che la prima biglia sia R, la seconda sia R, la terza sia R e la quarta sia B, per il numero di possibilità di scegliere le tre posizioni delle biglie R, cioè $\binom{4}{3}=\binom{4}{1}=4$, infine ancora per 2 visto che il primo e il secondo gruppo sono interscambiabili.

Dunque $p(C1)=\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{5}\right)\cdot 4\cdot 2=\frac{4}{35}$. Analogamente si ottengono:

$$p(C2)=\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\right)\cdot 4\cdot 2=\frac{1}{35},\ p(C3)=\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\right)\cdot 6\cdot 2=\frac{18}{35},\ p(C4)=\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{5}\right)\cdot(6\cdot 2)\cdot 2=\frac{12}{35}$$

Riassumendo i vari casi tramite un albero abbiamo:



Quindi la probabilità totale che vinca R è:

$$p(R)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{35}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{35}+\frac{1}{2}\cdot\frac{18}{35}+\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{35}=\frac{26}{70}=\frac{13}{35}\cong 0{,}371=37{,}1\%$$

Evidentemente la probabilità che vinca il nero è p(N)=0; di conseguenza la probabilità che vinca il bianco è p(B)=0,629

2. Giochi per allievi in difficoltà

Stefan Meyer[1]

1. La gara delle macchine[2]

1.1. Il gioco

Si tratta di una gara con le macchine che si svolge tra l'educatore (maestra) e il bambino o tra alunni. Vince chi raggiunge per primo la casella dell'arrivo.

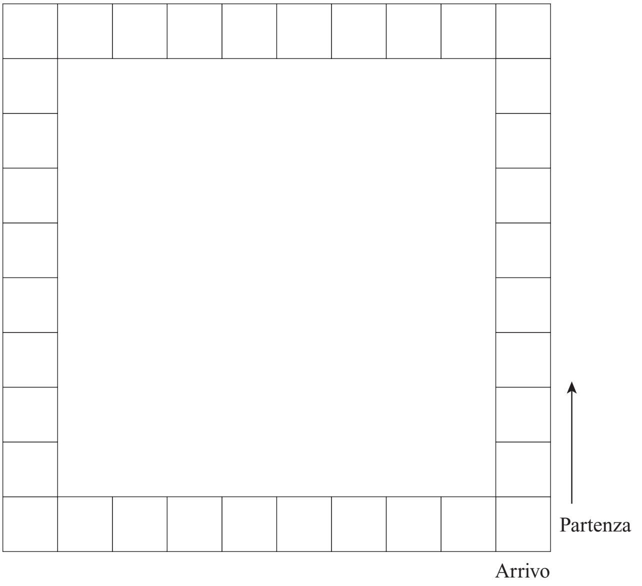


Figura 1. Il circuito della gara delle macchine: la casella dell'arrivo e quella della partenza coincidono.

1. Docente della *Interkantonale Hochschule für Heilpädagogik* di Zurigo. HfH di Zurigo 2010 / Università di Bologna 2011, stefan.meyer@hfh.ch
2. Fonte: Baroody & Gannon, 1983, citato in Ginsburg, 1987, S. 471f. Ringrazio Gianfranco Arrigo dell'aiuto per la traduzione.

Materiale necessario:

– due grandi dadi
– un cartellone con disegnato un circuito a quadretti (come nella figura 1 oppure una variante suggerita dagli allievi)
– una pedina (magari a forma di auto da corsa) per ogni concorrente.

1.2. Le regole del gioco

Il bambino lancia i due dadi e conta (percepisce) i punti ottenuti su entrambi. Contati i punti, muove la sua pedina sul circuito di tante caselle quanto è la somma dei punti ottenuti. Si può dare una consegna del tipo: «Conta tutti i punti, così saprai di quanto puoi muoverti!» O anche: «Conta semplicemente ogni punto del primo dado e poi continua con quelli dell'altro dado».

1.3. Commento

Il gioco contiene propriamente un compito semplice. Ci sono però dei bambini che hanno difficoltà a comprendere le regole. Hanno bisogno di aiuto per contare, come contare sul primo dado e poi continuare sul secondo. Se questa operazione dovesse risultare troppo difficile, si potrebbe giocare con un solo dado.

1.4. Possibilità di osservazione:

Quali sono le strategie elementari del contare? Come le usa il bambino? Come il bambino cambia le strategie del contare?

Quale strategia del contare viene usata?

Ci sono punteggi dei dadi che il bambino sa percepire senza contare? Per esempio nominando «rettangolo» il punteggio 4, cioè **: :** = 4.

Come il bambino percepisce di contare sul primo dado e poi subito continuare col secondo dado, finché tutti i punti sono conteggiati?

Il bambino percepisce con un colpo d'occhio / simultaneamente che 2 più 3 punti sui dadi fanno 5?

1.5. Esperienze e commento (Stefan Meyer)

1.5.1. Bambini con deficit leggeri o senza deficit

I bambini giocano volentieri e con perseveranza. Il gioco della gara delle macchine può essere variato (usando per esempio cavallini o figurine). I bambini fanno la connessione fra le esperienze del gioco e le esperienze di apprendimento in classe. Sorprendono spesso i maestri con esclamazioni del tipo «eureka!», aggiungendo:

«Ma l'addizione è semplice, come con i due dadi»

«Questo calcolo è semplice, guardi che cosa so fare (prende i dadi per spiegare l'azione aritmetica)» Svolgendo il gioco con un'attitudine ludica e curiosa si fanno apparire diverse risorse sconosciute dei bambini, e questi vissuti diventeranno i mattoni della costruzione dell'apprendimento, importanti sia per il bambino che per l'insegnante.

Nel caso in cui il bambino non voglia entrare nel gioco, è indispensabile ristudiare l'ambiente, la relazione, le risorse, il vissuto ecc. Visto che l'allestimento del gioco è molto variabile può darsi che cambiando la forma del percorso o l'aspetto delle pedine si potrebbero già aumentare l'operatività e la voglia di giocare. Poi c'è da considerare quali siano le conoscenze pregresse sui numeri, del saper contare, della lingua e dei concetti di relazione come «più di…», «aggiungere», «togliere» e la conservazione della quantità. È anche probabile che per il bambino sia troppo difficile giocare con due dadi. O che le capacità motorie e visive siano limitate e che ciò richieda una nuova costruzione del gioco nel senso della grandezza degli oggetti o del luogo in cui si gioca (dentro o fuori aula). Il gioco non porta senso se non vengono rispettati gli aspetti emozionali e relazionali. L'integrazione di questi aspetti nel concetto del gioco e nel concetto dell'educazione è una condizione *sine qua non* e una risorsa potentissima! Non integrando le emozioni e le relazioni dei bambini si producono danni personali e culturali.

Invece di utilizzare i dadi si potrebbero usare cartoncini di uguale formato, ma con punti o numeri diversi, messi in un sacchetto (della fortuna), dal quale poterli estrarre casualmente. Contando i punti o leggendo i numeri si trova di quante caselle si può procedere. Questo sacchetto della fortuna è un contenitore integrante nel senso che si possono usare sia i cartoncini con i punti sia quelli con i numeri. Sarà molto interessante osservare i bambini durante i processi nei quali chiariscono e adeguano il contenuto e le regole del sacchetto della fortuna.

Baroody & Gannon (1983 citato in Ginsburg, 1987, S. 471f) sottolineano che i maestri dovrebbero approfittare delle variazioni di questi tipi di giochi differenziati basandosi su ipotesi. Di questo fanno parte anche le discussioni o i conflitti con le cifre e i numeri (quantità). Il saper modulare e regolare i conflitti in un gruppo è un indicatore della qualità dell'apprendimento e dell'insegnamento. La volontà del gruppo-gioco di continuare è la volontà di saper giocare bene. Il gioco come attività è come uno specchio sul quale le persone proiettano i desideri di vincere, il saper attenersi alle regole, il controllo sociale, la reversibilità, i ruoli sociali, i ruoli del gioco, ecc. Lo specchio permette di riconoscere l'osservato e il vissuto.

1.5.2. Bambini o persone con grandi deficit

Educando e insegnando a bambini o a persone con grandi deficit o con grandi problemi di comportamento si nota subito che le qualità di questo gioco non possono essere utilizzate automaticamente come un bene funzionante o come una medicina. Spesso viene detto che è impossibile giocare con tale persona o che questa non abbia interesse per nessun gioco o che sia fissata su certe azioni che sembrano gioco. Bisogna tener conto delle diverse visioni del mondo, influenzate da fattori biologici (per esempio, la sindrome di down, la x-fragile, lesioni gravi ecc.) o causate da traumi gravi o da combinazioni di deficit e trauma (Cuomo, 2011b e incontro con studio di un caso del 22-11-2011). In vista di tali casi è indispensabile osservare il contesto e le risorse. Il gioco o i giochi faranno parte di un progetto d'intervento globale nelle coordinate del metodo «emozione di conoscere» (ricerca, insegnamento, azione; Cuomo (2011a).

In casi gravi il gioco, se bene inserito in un progetto, offre un percorso ludico e non ammaestrante (metodistico o didatticistico) nell'apprendimento di prassi approfondite, delle relazioni, dei pensieri, della lingua, della motricità, dei concetti aritmetici e dell'emozione. Il bambino con deficit gravi potrebbe sentirsi offeso, in ansia o in confusione, se le modalità del gioco, delle regole e delle relazioni non sono modulati adeguatamente alle risorse e al desiderio di far parte dell'esistenza degli altri.

1.6. La camera come campo di gioco

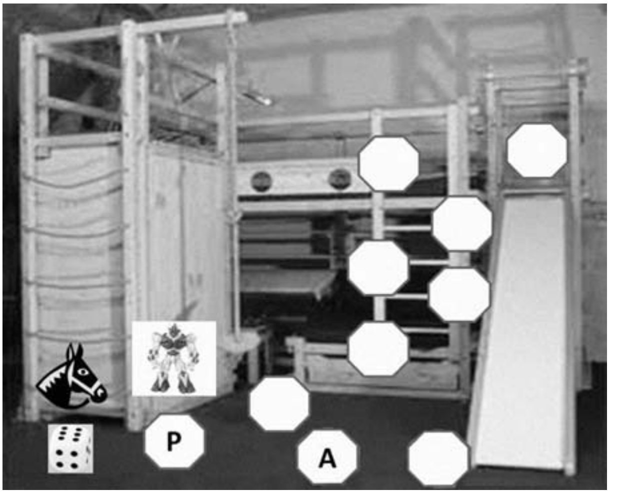


Figura 2. Esempio delle possibili variazioni di questo gioco.

Usando un dado e due pedine nella stanza dei bambini si potrebbe creare in quel rapporto contesto-comportamento fino ad allora confuso (per esempio in un bambino con la sindrome x-fragile) un percorso contenente regole e riti. Dal momento in cui il bambino ha capito e appreso la struttura del gioco, egli stesso potrebbe trasferire tale struttura in un contesto più ampio o in un contesto diverso come il quartiere o la scuola. L'integrazione nei giochi è diritto e compito che parte dal *maternage* evolvendosi in modi sempre più complessi e sociali. Si auspica per ogni sistema sociale, riferendosi al pensiero «*cogito ergo sum*» di Descartes, una visione più generale come *«ludunt ergo sunt»*: giocano quindi esistono.

Bibliografia

Cuomo, N. (2011). L'emozione di conoscere e il desiderio di esistere. Rivista.
Internet: http://rivistaemozione.scedu.unibo.it/ [22.11.2011]
Cuomo, N. (2011b). Filo di Arianna. Articolo elettronico. Internet: http://www.xfragile.net/scheda.asp?idprod=281&idpadrerif=55 [22.11.2011]
Ginsburg, H.P. (1987). Assessing Arithmetic. In D.D. Hammill (Ed.), Assessing the abilities and instructional needs of students (S. 441-523). Austin: pro-ed.
Wittmann, E. Ch., Müller G. N. (1990). Handbuch produktiver Rechenübungen (Band 1). Stuttgart: Klett, S. 17-18 und 168 (Kopiervorlage).
Moser Opitz, E. (2001). Zählen, Zahlbegriff, Rechnen. Bern: Haupt, S. 125f.

1. Al mercato con Euclide

Bruno Jannamorelli

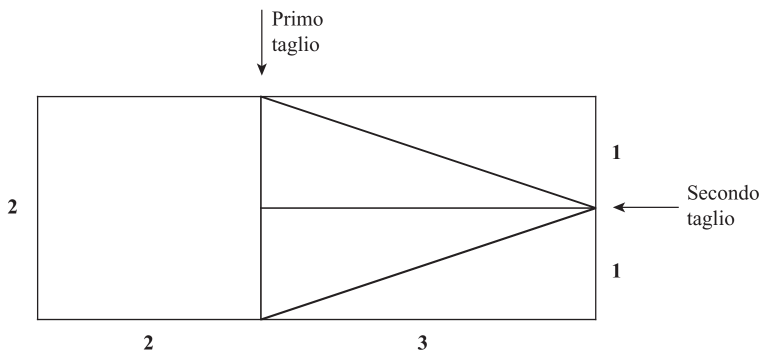
Marta è una brava casalinga assillata dalla preoccupazione di risparmiare denaro per arrivare a fine mese. Una mattina, al mercato rionale, è attratta da un venditore di stoffe che offre a buon prezzo spezzoni di tessuti per tovaglie.

«Forse ho trovato la soluzione che cercavo per ricoprire il tavolo della taverna con una bella tovaglia!», pensa fulmineamente Marta e acquista il pezzo di tessuto che le piace di più.

Appena rientrata in casa, stende il tessuto sul tavolo della taverna ma… il tavolo è un quadrato 3m x 3m mentre il tessuto è un rettangolo 2m x 5m.

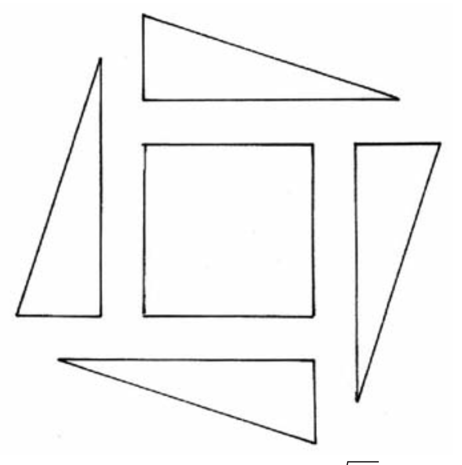
Marta si rende conto che il tessuto è più che sufficiente per ricoprire il tavolo, ma come bisogna tagliarlo e ricucirlo utilizzandolo interamente senza buttarne via nemmeno un pezzettino? Inoltre è necessario che il numero di tagli sia il più piccolo possibile, in modo da economizzare il tempo per effettuare le cuciture.

Dopo qualche notte insonne, Marta trova la soluzione ottimale: con tre tagli ottiene cinque pezzi che, opportunamente accostati, formano un quadrato.

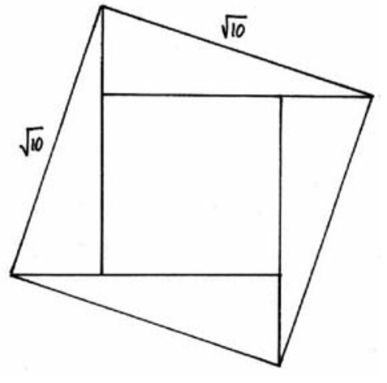


I due rettangoli 3 x 1 si sovrappongono e si tagliano lungo una diagonale (Terzo taglio).

Ecco i cinque pezzi ottenuti da Marta:

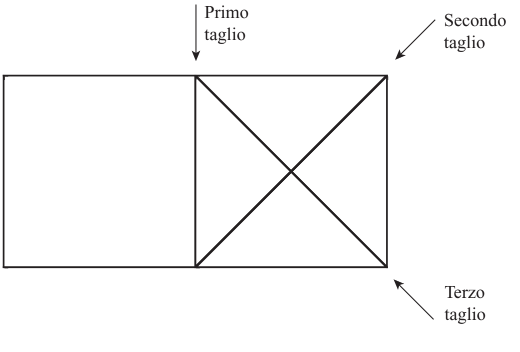


Ed ecco il quadrato, di lato $\ell = \sqrt{10}$

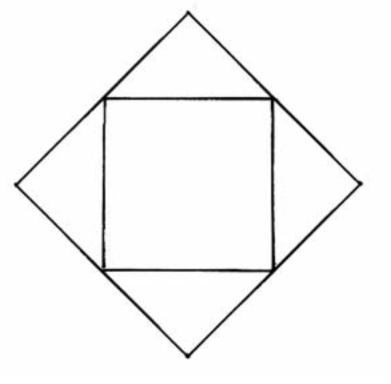


La storia non finisce qui…

Marta racconta alla sua amica Carla la soluzione trovata per trasformare un rettangolo in un quadrato equivalente a esso e, per puro caso, anche Carla da tempo vuole ricoprire un tavolo quadrato 4m x 4m. Passa qualche giorno e Carla chiede aiuto all'amica per quadrare un tessuto rettangolare 3m x 6m acquistato al mercato dal solito venditore. Questa volta il problema si presenta più difficile e la soluzione di Marta fallisce. Però Nicòl, la nipotina di Marta trova un'altra soluzione sempre con tre tagli…



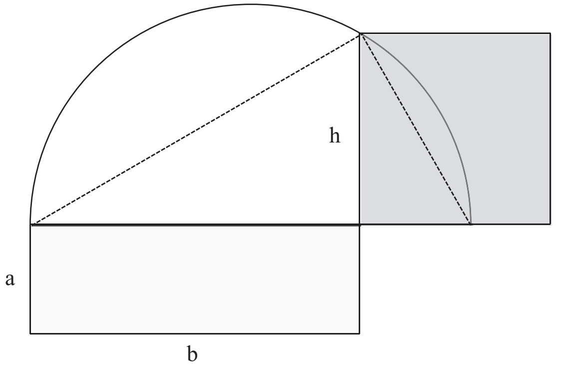
Ottiene un quadrato di lato $\ell = 3\sqrt{2}$



Il problema della quadratura di un rettangolo si diffonde in tutto il mercato rionale …

Ancora una volta è Nicòl che risolve il problema di «quadrare» un rettangolo rivolgendosi a nonno Beppe, un professore di matematica in pensione.

«Se il rettangolo ha dimensioni a, b allora il quadrato ad esso equivalente ha il lato». Questa è la conclusione della spiegazione di nonno Beppe, accompagnata da una figura che richiama a Nicòl il secondo teorema di Euclide. Dopo aver chiesto conferma al nonno se la figura da lui disegnata è proprio quella vista sul libro di Geometria, la ragazza esclama con forza: «Finalmente ho capito a cosa serve il secondo teorema di Euclide! Serve a quadrare un rettangolo».



La soluzione trovata da Nicòl è applicabile a tutti i rettangoli di dimensioni a, b, con b=2a.

Il quadrato equivalente al rettangolo ha il lato

$\ell = \sqrt{a\,b} = \sqrt{a \cdot 2a} = a\sqrt{2}$ come previsto da Euclide.

Il quadrato ottenuto con i tre tagli di Marta ha il lato

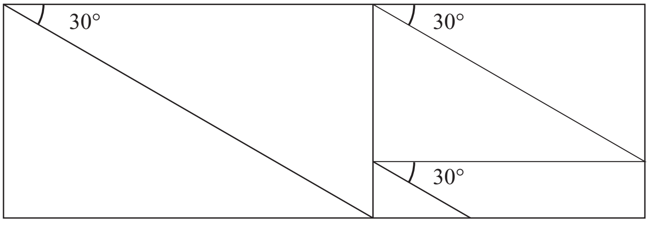
$\ell = \sqrt{2 \cdot 5} = \sqrt{10}$ sempre in accordo con il teorema di Euclide.

La Geometria non risolve tutto … però aiuta!

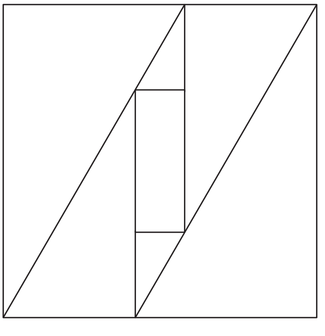
Quando sembra tutto risolto e in piazza non si parla più di quadrare rettangoli di stoffa, una mattina Francesca compra un pezzo di stoffa 30cm x 90cm per coprire un tavolo quadrato di lato 50cm. Ricordando la lezione del nonno di Nicòl, Francesca e le sue amiche sanno che il quadrato equivalente al rettangolo di stoffa deve avere il lato $\ell = \sqrt{90 \cdot 30} = 30\sqrt{3}$. Ben presto scoprono che, in questo caso, non si possono applicare né i tagli di Marta né quelli di Nicòl. Lo sconforto assale le sarte perché Euclide non suggerisce loro la soluzione. *«Ho capito* – esclama Nicòl – *il teorema di Euclide ci dice come deve essere lungo il lato del quadrato, ma non risolve il problema pratico della realizzazione del quadrato».*

«La geometria è solo teorica – rincara Marta – *non risolve i problemi pratici!»*

Dopo svariati tentativi andati a vuoto, Nicòl si rivolge nuovamente a nonno Beppe il quale fornisce una soluzione con sei tagli.



Ecco il quadrato di lato $\ell = 30\sqrt{3}$.



Le amiche di Nicòl si convincono che con la geometria è possibile risolvere problemi pratici diversi da quegli esercizi scolastici contrabbandati per problemi, ma bisogna conoscere gli strumenti di questa nobile disciplina. La soluzione trovata da nonno Beppe è stata facilitata dal secondo teorema di Euclide che gli ha fornito la lunghezza del lato del quadrato, ma poi bisogna saper costruire quel lato come altezza di un triangolo equilatero di lato 60.

«La soluzione di nonno Beppe è un Tangram a rovescio. Non ho i sette pezzi per ricostruire il quadrato come nel Tangram, ma devo ritagliare dal rettangolo i pezzi necessari a costruire un quadrato. È molto più interessante! Altro che i problemi sull'applicazione dei teoremi di Euclide che devo risolvere a scuola…»

1. Convegni e appuntamenti

Leggere la matematica
La didattica della matematica come chiave di lettura delle situazioni d'aula

Giovedì 27 giugno 2013 – Ore 8.30
Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI, Locarno

Programma

8.30 Accoglienza e registrazione dei partecipanti
9.00 Saluto delle autorità
Emanuele Berger, direttore della Divisione scuola e coordinatore del Dipartimento educazione, cultura e sport (DECS)
Francesca Antonini, responsabile bachelor Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI
9.30 Convinzioni e pratiche didattiche sulle frazioni dalla scuola dell'infanzia alla scuola elementare. **Silvia Sbaragli**
10.00 Pausa caffè
10.30 Errori e difficoltà in matematica. **Rosetta Zan**
11.15 L'avventura dei problemi di matematica nella scuola dell'infanzia e nella scuola elementare. **Martha Isabel Fandiño Pinilla**
12.00 Pausa pranzo
14.00 Il contratto didattico, tipico della scuola elementare, fa capolino già dalla scuola dell'infanzia. **Bruno D'Amore**
14.45 Rappresentazioni dei numeri: la storia come strumento interpretativo. **Giorgio Bolondi**
15.30 Pausa caffè
16.00 La probabilità a misura di bambino. **Alberto Piatti**
16.30 Artefatti per agire, per discutere e per capire in matematica: dalla scuola dell'infanzia alla scuola elementare. **Rossana Falcade**
17.00 Sintesi conclusiva della giornata. **Gianfranco Arrigo**
17.20 Saluto finale. **Michele Mainardi**, direttore del Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI

Iscrizioni

Indicare nome, cognome, indirizzo postale, telefono, e-mail, entro il **7 giugno 2013**. Per posta: SUPSI, Dipartimento formazione e apprendimento, Piazza San Francesco, CH-6600 Locarno, via e-mail: dfa.fc@supsi.ch. La partecipazione è gratuita.

Convegno Nazionale n. 27: Incontri con la Matematica

La didattica della matematica come chiave di lettura delle situazioni d'aula

Castel San Pietro Terme (Bologna)
8 – 9 – 10 novembre 2013

Programma delle conferenze

Venerdì 8 novembre

Centro Congressi Artemide

15.00–15.30 Inaugurazione
15.30–16.15 **L. Cannizzaro** (Uni Roma I, La Sapienza): Esempi di situazioni che testimoniano come si possa assicurare ai bambini ed ai loro insegnanti: calma, pluralità, affettività, curiosità
16.15–17.00 **P. Contucci** (Uni Bologna): Insegnare la Probabilità. Come (?) e perché (!)
17.00–17.30 Intervallo
17.30–18.15 **M. I. Fandiño Pinilla** (NRD Bologna): Il passo più lungo
18.15–19.00 **R. Dainese** (Uni Bologna): Il bicchiere mezzo pieno: la matematica promotrice di inclusione.

Sabato 9 novembre

Centro Congressi Artemide: Scuola Primaria e Secondaria

15.00–15.45 **M. Ferri** (Uni Bologna): Oltre la terza dimensione
15.45–16.30 **S. Fornara e S. Sbaragli** (DFA Locarno): Italmatica. Riflessioni per un insegnamento/apprendimento combinato di italiano e matematica
16.30–17.00 Intervallo
17.00–17.45 **I. Vannini** (Uni Bologna): La qualità della didattica tra valutazioni formative e valutazioni di sistema
17.45–18.45 **L'Aquila Signorina**: Dante e la matematica (spettacolo teatrale).

Salone delle Terme, Albergo delle Terme: Scuola dell'Infanzia

14.30–15.15 **L. Cannizzaro** (Uni Roma I, La Sapienza): 'Infantile'. Il linguaggio corrente priva l'infanzia della sua stupefacente complessità.
15.15–16.00 **I. Aschieri, P. Vighi** (Uni Parma) e P. R. Micheli (Fidenza): Dal bidimensionale al tridimensionale: le casette si trasformano in cubi
16.00–16.45 **D. Lenzi** (Uni Lecce): Alcune considerazioni su discalculia e dislessia
16.45–17.15 Intervallo
17.15–18.00 **A. Cerasoli** (L'Aquila): Insieme per una fiaba
18.00–18.45 **A. Angeli** (Lucca, RSDDM Bologna): Verso il concetto di tempo.

Sabato 9 novembre: 9.00–13.00
Domenica 10 novembre: 9.00–12.30

Seminari, comunicazioni e manifestazioni di contorno per i diversi ordini di scuola

Per informazioni dettagliate

Dott.ssa Rita Lugaresi
tel. (+39) 051 6954150, e-mail: rlugaresi@cspietro.it
Siti http://www.dm.unibo.it/rsddm, http://www.incontriconlamatematica.org

2. Recensioni

Bruno D'Amore, Martha Isabel Fandiño Pinilla e Maura Iori. (2013). Primi elementi di semiotica. Prefazioni di Raymond Duval e Luis Radford. Bologna: Pitagora Editrice. ISBN: 88-371-1877-5. Pagg. 128, € 16,00.

Ecco un libro che gli studiosi e gli insegnanti di matematica più desiderosi di conoscere gli sviluppi della ricerca in didattica della matematica attendevano da tempo. I recenti contributi, fra i quali quelli di Duval e Radford -autori delle due prefazioni-, hanno aperto un nuovo grande settore di studio, quello concernente le rappresentazioni semiotiche, che in matematica sono essenziali, visto che gli oggetti matematici non sono accessibili né percettivamente né strumentalmente.

Tuttavia, come sottolineano gli autori nella loro Premessa, *«molte delle analisi e delle ricerche non arrivano all'insegnante, alla scuola, alla pratica quotidiana e questo fatto è deleterio perché sancisce sempre di più lo iato che c'è tra il mondo della ricerca e quello che a noi interessa di più, quello della scuola militante, nella quale, quotidianamente, i problemi di mancato apprendimento emergono con forza, con sorpresa ed amarezza da parte degli insegnanti più sensibili»*.

L'opera appare suddivisa in due parti con caratteristiche nettamente distinte. La prima è un saggio teorico sintetico e storico-filosofico, pensato per dare al lettore – insegnante, ma non solo – una prima chiara visione della tematica, con parecchi rinvii a opere e articoli specializzati che rendono possibile uno studio più approfondito dell'intera tematica. Nella seconda parte, di natura squisitamente didattica, gli Autori presentano una ricca successione di situazioni da loro vissute nelle scuole, classificate secondo i vari aspetti teorici messi in evidenza nella prima parte.

Il percorso storico-filosofico – oltre che, ovviamente, didattico – inizia con Platone, con la sua metafora dell'Iperuranio, inaccessibile agli umani, nel quale troviamo per esempio «unità», «numero», «punto», «retta», entità che vengono in qualche modo proiettate e rese visibili all'uomo. Prosegue poi con Aristotele che vede gli oggetti matematici già come «concetti universali» prodotti dal pensiero che partono dagli enti del mondo sensibile. Si fa accenno in seguito alla semiotica degli Stoici nella quale si fa già distinzione tra parole e segni, e a quella degli Epicurei che distingue «ciò che appare» (ciò che è accessibile ai sensi) da «ciò che non appare» (oggetti non immediatamente accessibili). Euclide usa le rappresentazioni semiotiche come oggetti del discorso veri e propri (triangolo, cerchio ecc., costruiti con riga e compasso «ideali») e non come idee o forme pure. Agostino d'Ippona (o di Tagaste) accetta la concezione epicurea; inoltre, seguendo gli Stoici, definisce il segno in relazione alla mente dell'interprete e fornisce metafore come, ad esempio, il «fumo» che significa «fuoco», cioè il segno che che fa venire in mente qualcos'altro.

Nel Medioevo il problema del segno assume finalità religiose, riferite soprattutto all'interpretazione delle Scritture. Nel solco tracciato dalla teoria agostiniana troviamo fra gli altri Pietro Ispano e Guglielmo di Ockam. Per quest'ultimo i concetti sono segni naturali prodotti nell'intelletto dall'azione delle cose.

Fino al XVII secolo, nella discussione sul segno, si sono susseguite parecchie dispute importanti che hanno portato a una scissione fondamentale. Da una parte chi vedeva il segno come un nome vuoto, un ente di ragione (*ens rationis*) contrapposto all'ente reale (*ens reale*). Dall'altra parte troviamo coloro che fondano la nozione di segno su una relazione, complessa e articolata, tra i due enti.

Per Descartes gli esseri umani non conoscono direttamente le cose, ma soltanto le proprie idee delle cose. Circa un secolo dopo, Immanuel Kant fornisce contributi decisivi allo sviluppo della semiotica. Significativo il suo paragone «così come il liquido adotta la forma del recipiente che lo contiene, le impressioni sensoriali adottano le forme che sono loro imposte dalle strutture cognitive». Si arriva così ai secoli XIX e XX con Charles Sanders Peirce, che è considerato il fondatore della semiotica moderna. Per lui i segni, a differenza di Kant, non sono condizioni trascendentali, soggettive o mentali di esperienza possibile, ma condizioni per cui la differenza tra interno ed esterno non gioca alcun ruolo: «Il meglio del pensiero, soprattutto su argomenti di matematica, si ottiene sperimentando con l'immaginazione su un diagramma o su un altro schema; ciò aiuta il pensiero ad averlo davanti agli occhi». Peirce distingue tre tipi di segni: immagine, diagramma e metafora. Sappiamo come in matematica l'uso di metafore è inevitabile, usuale: «asse orizzontale», «asse verticale», «questa funzione è crescente» ecc. sono esempi notissimi.

Anche il fondatore della linguistica moderna, Ferdinand de Saussure, si esprime chiaramente sul tema della semiotica distinguendo la *langue* (sistema di regole, prodotto sociale che consente di comunicare) dalla *parole* (l'atto linguistico concreto, contingente, variabile del parlante). Quanto al segno, per De Saussure, è un'entità psichica a due facce: il *significante* (componente fonetica, sequenza di lettere) e il *significato* (idea, quel che si «pensa»).

Nel discorso si inserisce anche Piaget che, nel suo costruttivismo genetico, giunge alla convinzione che la funzione semiotica (che include imitazioni, gioco simbolico, immagini mentali, gesti e lingua naturale) inizia proprio quando c'è una differenziazione tra significanti e significati. Importanti contributi sono forniti anche da Vygotskij, secondo il quale il segno funge da strumento dell'attività psichica, in modo analogo all'utensile nel lavoro.

La parte teorica chiude con un cenno a Umberto Eco. «La semiotica ha a che fare con qualsiasi cosa possa essere *assunta* come segno. È segno ogni cosa che possa essere assunta come un sostituto significante di qualcosa d'altro.»

La seconda parte ha un titolo molto significativo: «La semiotica nella didattica: una presenza esplicita ma spesso dimenticata». Per costruire cognitivamente un oggetto matematico, bisogna imparare a far uso con una certa padronanza di diverse sue rappresentazioni semiotiche.

Si susseguono, nell'ordine, diversi paragrafi dedicati agli insegnanti: vere e proprie perle da leggere, meditare e, soprattutto, assimilare nella propria pratica di classe. Di seguito i titoli.

- Esempi di varie rappresentazioni semiotiche di uno stesso oggetto matematico in differenti registri e di rappresentazioni ausiliarie
- Ogni rappresentazione veicola aspetti concettuali diversi dello stesso oggetto o di più oggetti
- Su alcune rappresentazioni semiotiche ridondanti
- Area e perimetro e angolo: come fattori semiotici rendono impossibile costruire cognitivamente in modo corretto gli oggetti matematici
- Rappresentazioni semiotiche e trasformazioni di una rappresentante in un'altra
- Semiotica e noetica.

Il libro chiude con un capitoletto concentrato sul processo di trasformazione semiotica, uno dei grandi temi studiati, fra gli altri, dal NRD di Bologna. Si mette in risalto l'importanza dei «trattamenti» (trasformazioni all'interno di uno stesso registro semiotico) e delle «conversioni» (trasformazioni da un registro in un altro). Operazioni fondamentali nell'apprendimento di concetti, ma anche delicate, che meritano la massima attenzione da parte dell'insegnante.

A questo punto ogni conclusione mi sembra inutile. A chi insegna ed è alle prese con serie difficoltà di apprendimento, a tutti quelli che vogliono progredire nella conoscenza didattica e rinforzare la propria competenza professionale, è offerta un'occasione assolutamente da non perdere. (G. Arrigo)

Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla. (2013). La nonna di Pitagora. Prefazione di Maurizio Matteuzzi. Bari: Edizioni Dedalo. ISBN: 978-88-220-4172.2. Pagg. 192, € 15,00.

«Ma chi l'ha detto che non si può scherzare sui temi aventi a che fare con la matematica?», così esordiscono i due autori nella prefazione di questo divertente, istruttivo e… innovativo libretto. Si compone di due parti distinte che Matteuzzi nella sua dotta prefazione suggerisce di chiamare «quella delle cose false» e «quella delle cose vere». Si potrebbe obiettare: perché non leggere solo «quella delle cose vere»? Occorre rendersi conto che gli autori ci presentano un nuovo, originale strumento pedagogico. La prima metà (delle cose false) ci conduce in un ambito fantasioso, spiritoso e… menzognero. Ma ogni storiella, come una fiaba, trasmette una grande verità. Una verità che molto spesso si tace per pudore, per tradizione culturale. I matematici, gli insegnanti, le svariate persone che s'interessano di matematica queste «verità» se le raccontano al bar o nei momenti di svago, (quasi) mai quando hanno a che fare con scolari e studenti. Peccato, perché l'eccessiva serietà – specie se ostentata – non è amica dell'apprendimento. Ora, per gustare le storielle, occorre conoscere la storia vera dei personaggi presi in considerazione, ciò che gli studenti ignorano completamente. E allora, si chiederà il lettore, perché non mettere prima la storia vera? Sarebbe come indicare subito l'assassino in un racconto giallo, oppure (e purtroppo è prassi assai seguita) iniziare con ipotesi-tesi-dimostrazione la presentazione di un teorema che si vuole insegnare agli studenti liceali. Ecco allora l'uovo di Colombo in materia didattica: divertirsi in modo intelligente e mirato con una situazione divertente, divergente fin che si vuole, ma che prepara mente e spirito, ragione ed emotività a un apprendimento serio, corretto, rigoroso quanto basta. Per dirla con Matteuzzi, «uno studente non si dimenticherà mai più della nonna di Pitagora che sviluppa a maglia i quadrati dei cateti e dell'ipotenusa». Nella prima parte si è forse mancato di rispetto alla figura di Pitagora matematico? No, lo si è reso più umano, più simpatico e il suo teorema… più divertente da imparare.

Sempre nella prima parte, dopo Pitagora, seguono nell'ordine altre gustose storielle dedicate al genio di Archimede; al dotto Euclide; alla grande e sventurata Ipazia di Alessandria d'Egitto; alla milanese Maria Gaetana Agnesi, matematica e benefattrice; a Eudosso di Cnido che riesce a dimostrare la correttezza del rapporto 1/3 fra il volume del prisma e della relativa piramide, usato da Archimede; al grande Talete, alle prese con triangoli simili; al razionalista René Descartes che intuisce il sistema di coordinate che prenderà il suo nome, a Leonhard Euler matematico stakanovista, a Giuseppe Peano il logico torinese molto sensibile alla didattica.

La seconda parte è un piccolo testo di storia della matematica, anzi dei matematici, gli stessi della prima parte, passati in rassegna nello stesso ordine. Questa volta però sono visti in modo «serio» certamente, ma con lo stile semplice e accattivante che contraddistingue le opere di questi due prolifici autori. (G. Arrigo)

Maurizio Matteuzzi (2012). La teoria della forma. Studio sull'invarianza dell'espressione. Roma: Aracne. ISBN 978-88-548-4798.9. Pagg. 320, € 20,00.

Impossibile recensire per davvero questo libro, lo riscriverei daccapo, più lungo, perché non potrei non interpretare ogni frase secondo parametri personali da lettore imbrigliato in una co-costruzione con l'Autore; e anche perché questo libro l'ho visto nascere 40 anni fa; e poi perché sulle teorie miste anch'io ho lavorato, cercando spiegazioni più semantiche che metalogiche, pubblicando da solo e con l'Autore; e infine perché certe analisi semiotiche più recenti mi hanno portato sulla strada di teorie pragmatiste che ora mi spingono a rivedere certe mie posizioni.

Impossibile recensire, e dunque non resta che accompagnare, ribattere, chiosare, confermare; come quando di queste cose, all'inizio, si parlava con Enzo Melandri, dio della conoscenza stoica, ma anche di ardite analogie che facevano impazzire Maurizio (l'Autore) e me, per ignoranza più restio di tutti a costruzioni così ricche di guglie.

Vediamo.

La frase «y=3x+1 è una retta» significa in una teoria mista che «una data retta è una retta»; si può leggere formalmente e dunque interpretare solo perché ci mettiamo d'accordo su aspetti sintattici (che = è più coesivo di + e di ×, nascosto nella scrittura 3x); altrimenti si potrebbe frantumare in «'y=3x' +1 è una retta» che non ha senso solo perché quel +1 esprime qualcosa che non so interpretare nella forma nella quale si esprime la scrittura; la forma dunque è sostanza, ma la sostanza è stata ridotta a forma in via preliminare, proprio per dare l'idea di quel che si vuole poter interpretare. Qual è l'*a priori* e quale l'*a posteriori*?

Ci hanno insegnato Ettore Carruccio ed Enzo Melandri a interpretare in Leibniz il senso di *ars demonstrandi* e di *ars inveniendi*; certo, le spiegazioni di allora accontentavano due principianti filosofi, ma ha ragione l'Autore quando dice che c'è qui sotto, in questa distinzione apparentemente solo basata su una logica di atteggiamento, molto di più; dal punto di vista della forma (teorie formali?) c'è un mondo intero da vagliare secondo i due aspetti (dimostrare e cercare, tanto per fare le cose facili); ma il cercare è dimostrazione e viceversa, a ben guardare; se poi ci mettiamo in situazioni prettamente metalogiche e metamatematiche, la divisione sfuma o, meglio, le coppie di apparenti opposti si rafforzano. Da una parte c'è la consapevolezza, dall'altra una specie di ignoranza (dotta) sbandierata, ma falsa nell'oggettivo, nell'ontologico e nel processo di costruzione cognitiva (che è poi la base dell'*inveniendi*). Dio, quante cose ci sarebbero da dire. Non m'ero accorto d'essere caduto prigioniero di Cusano.

Scrive l'Autore che «mentre ogni empirismo è costituito su teorie individuanti, … una teoria individuante non deve essere necessariamente empirista» e chiama in causa, ovviamente, Leibniz e il *principium individuationis*. Replico oggi come allora che tutto dipende da «chi» o «che cosa» sia l'individuo; in un universo costituito da zero individui questa asserzione suona male, ma anche in un universo formato da un solo individuo, universo nel quale l'individuazione (dalla categoria all'individuo) è costituita dalla semplice nominalizzazione che può ridursi anche solo alla indicazione, tanto non ci sono equivoci possibili; e allora l'empirismo della teoria relativa a quell'universo, ogni empirismo, coincide con la nominalizzazione, con una semiotica che si limita a un rappresentante univoco che fa coincidere l'universo con l'oggetto e non ha bisogno di aggettivi. Anche in questo caso, una teoria estesa va studiata come specifica, con cura, perché il dibattito individuo-universale va ripensato daccapo.

Mi ha fatto morire d'invidia il paragrafo 5.1, *La rifondazione della semantica*, avrei voluto scriverlo io, sintetico, precisissimo, denso, durissimo; in una pagina e mezzo, apparentemente narrativa, l'Autore dà delle stoccate che poi serviranno di base nell'ardita costruzione finale.

E poi si passa al nostro eterno dibattito su individui e classi; negli ultimi 20 anni, per motivi epistemologici legati alla mia ricerca in didattica della matematica, ho tentato di definire cosa sia un «oggetto matematico», un'entità ontologica ingarbugliata e sfuggente; anch'io ho fatto ricorso agli stessi Autori, interpretandoli talvolta in modi tra loro diversi; ho delineato per alcuni oggetti delle … storie epistemologiche che rivelassero due modi d'evoluzione, una diciamo così cumulativa e una ampliativa; ho fatto gli esempi di «retta» e di «addizione» del tutto scelti a caso. Ma non ne sono felice, né sono del tutto felice delle scelte fatte qui. Alcuni logici e alcuni informatici hanno cercato di condensare nella totalità l'individualità, dando alla classe un nome individuale per catturare l'essenza dei singoli individui che la compongono e la loro natura di individui appartenenti a una numerosità. La più famosa costruzione è il tentativo di Von Neumann di dare una definizione (?), costruzione (?) di N, l'insieme dei numeri naturali, con classi nelle quali, se da un lato si specificano gli individui, dall'altra si individualizza la classe stessa. Elegante, non c'è che dire, ma fallace. Una sorta di imbroglio epistemologico che non tiene alla critica semantica e formale (appunto) più severa. Ed è inutile, il che costituisce il peggior argomento contrario.

Nulla da ridire sulla scelta della mereologia, ne abbiamo discusso per anni e abbiamo anche pubblicato insieme su questo tema; così, nulla da ridire sulla scelta di una logica intensionale, e sui relativi problemi semiotici, le loro rappresentazioni grafiche a mo' di schemi.

Ma non posso continuare così, su ogni frase avrei da costruire, riflettere; e quest'opera è mostruosamente densa, un vero inno alla riflessione epistemologica. Una recensione deve essere breve, deve invogliare alla lettura dell'opera.

Mi fermo a questo, verso il fondo, quando l'Autore dice: «Una meta-teoria di una teoria mista, …, sarà teoria mista delle meta-teorie relative alle teorie pure di base»; sì, così sembra; ma le teorie di base potrebbero avere nei termini, nei soggetti, nei predicati, nelle proprietà, cose in comune che però sono riferite a enti diversi; e dunque non di accumulazione si tratta, ma di distinzione, distinzione funzionale e formale; in altre parole, potrebbe essere necessario specializzare le meta teorie delle teorie di base verso interpretazioni non tra loro assimilabili anche se apparentemente basate sugli stessi oggetti linguistici o logici. Una meta-teoria non sarebbe pertanto una semplice somma di meta-teorie, ma proprio in quel «mista» sarebbe racchiusa una necessità logico-semantica legata alla specificità del linguaggio che in due teorie apparentemente simili potrebbero avere sviluppi diversi e necessità diverse. Credo si potrebbero fare parecchi esempi.

Dio mio, che lettura avvincente, quanti riferimenti colti, che ricchezza filosofica a tutto campo, e quanto ancora si potrebbe dire, e quanto ancora resta da fare. (B. D'Amore)

Giorgio Israel e Ana Millán Gasca (2013). Pensare in matematica. Bologna: Zanichelli. ISBN 978-88-0819-361.2. € 46.00

I due autori perdoneranno l'apparente irriverenza iniziale, ma verso la fine della lettura di questo libro, accingendomi a pensare ad una sua breve recensione, volendolo riassumere in una frase, m'è venuto da parafrasare il titolo di un celeberrimo film di Woody Allen del 1972: Tutto quel che avreste voluto sapere sulla … matematica e che non avete mai osato chiedere a nessuno. Non siamo lontani dalla verità. Che cosa vuol dire modellizzare in matematica o con la matematica; quali sono gli assiomi dei numeri naturali; quali proprietà valgono per le operazioni binarie; quali sono le basi della geometria, da Euclide a Hilbert, con qualche cenno alle geometrie non euclidee; che cos'è, in poche parole, la statistica; che cosa vuol dire «ordine»; e così via, una sorta di enciclopedia delle conoscenze di base della matematica, a tutto campo, con precisione, ma senza ossessionare il lettore con linguaggi che ai più risultano ostici ed arcani.

Il lettore, ah sì, il lettore; va detto subito che questo non è un libro di matematica per matematici (i quali, forse, non ne hanno bisogno); il lettore-tipo al quale i due autori hanno pensato fin dall'inizio sono studenti universitari futuri docenti della scuola primaria; e, perché no?, docenti in servizio, quelli che hanno sempre tante domande, ma non sanno a chi farle, e spesso non sanno dove trovare un libro organizzato con tutte le risposte. E genitori, quei genitori che hanno voglia di dare una mano al proprio figliolo che si è un po' perso nel bosco della matematica, non importa il livello scolastico. E, aggiungo io, lettori curiosi, di quelli che avevano voglia di un libro solo che contenesse tanti argomenti, invece di rincorrere i temi dispersi su tanti volumi. Perché, spesso, l'unico libro di matematica presente in casa è un vecchio libro di testo scolare che, per prima cosa, è assai limitato nella teoria (i libri di testo, si sa, spesso sono soprattutto eserciziari) e spesso non è molto attendibile e non sempre sa dare le risposte agli incalzanti «perché?» dei nostri studenti più curiosi.

A tutti questi lettori piacerà enormemente il fatto che questo libro punta molto sulla storia (e, con questi due autori, entrambi prestigiosi storici della matematica, non poteva che essere così); ma una storia ben raccontata, dotta, ricca di date, di fatti, di nomi, di rinvii, attraente e specifica. So per esperienza quarantennale che la storia della matematica attira moltissimo il giovane studente, l'esperto insegnante e il lettore curioso; quando poi è narrata con questa sapienza, ricorrendo spesso, molto spesso, a fonti autorevoli dirette, allora affascina anche di più. Leggere l'originale dell'autore non è come sentirsi raccontare il suo pensiero da un terzo, dà un'emozione intensa e piacevole.

Il libro è stato pensato in origine per gli studenti di scienza della formazione, futuri maestri della scuola primaria; è per questo che, ogni tanto, gli autori fanno cenno a questioni aventi a che fare con l'apprendimento della matematica, soprattutto nella scuola primaria, ma non solo. Questo genere di considerazioni piaceranno parecchio a insegnanti, futuri e in servizio, e anche ai genitori, che vorranno verificarle sui propri figlioli.

Con un linguaggio piano e naturale, non soffocante, come talvolta capita, i due autori accompagnano il lettore in questo meraviglioso mondo della matematica, alla scoperta di una cultura che alcuni stolti non riconoscono come tale, offrendo appigli nel mondo dell'arte, della filosofia, della psicologia, ma senza mai turbare o appannare il cristallino viaggio matematico che, anzi, ne esce esaltato e non confuso. Perché la matematica ha questo di speciale e sorprendente, che il suo linguaggio e i suoi contenuti si prestano assai bene a fungere da supporto a qualsiasi altra disciplina. Questo libro ne è una bella dimostrazione.

Pensate che si parte da come si scrivono i numeri naturali e, in relativamente poche pagine, si arriva alle equazioni differenziali, ai problemi dell'infinito (numerabilità e continuità), ad alcune fra le più attuali considerazioni che la matematica è in grado di fare.

Senza tralasciare una continua ricerca dei come e dei perché, fin dalle primissime pagine, di ordine epistemologico o filosofico, perfino se la nostra disciplina debba avere nome singolare o plurale.

A tutte le categorie dei lettori precedentemente ricordate, mi permetto di aggiungere ancora gli studenti universitari dei corsi di matematica; se l'esperienza non m'inganna, ricordo alcune delusioni, come docente, quando mi rendevo conto che lo studente aveva anche ottime conoscenza parziali, locali, sui temi matematici, ma aveva perso la visione globale che, invece, questo libro riesce ad offrire.

Progetto grafico
Bruno Monguzzi
Prestampa
Taiana
Stampa
Veladini

Redazione
Laboratorio di didattica della matematica
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera

Telefono
091 814 18 21/22/24
Fax
091 814 18 19
gianfranco.arrigo@span.ch

Amministrazione
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera
Fax
091 814 18 19

Esce due volte all'anno
a maggio e a dicembre

Abbonamento annuo
SFR 30
€ 16

Bollettino dei docenti di matematica
66

In questo numero: J. Dhombres riflette sulle origini storiche delle formule algebriche; S. Beccastrini e P. Nannicini ricordano il matematico Renato Caccioppoli; S. Maracchia parla della bellezza di una formula algebrica; B. D'Amore e M. I. Fandiño Pinilla richiamano l'importanza di teorie del passato; A. Battaini, G. Gottardi e S. Sbaragli raccontano un'esperienza didattica «tra reale e virtuale»; S. Casartelli studia i vissuti scolastici e le relative aspettative di studenti di quarta media; G. Callegarin ci mostra un'attività sulle formule algebriche; A. Frapolli offre un nuovo quiz; S. Meyer regala giochi di apprendimento per allievi in difficoltà; B. Jannamorelli presenta una divertente attività di laboratorio; segnalazioni e recensioni.

ISBN 978-88-86486-88-0
Fr. 18.–

Repubblica e Cantone Ticino
Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport