A cura
del Laboratorio di didattica della matematica

# Bollettino dei docenti di matematica

68

Maggio
2014

Ufficio
dell'insegnamento medio
Centro
didattico cantonale

Bollettino
dei docenti di matematica
68

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport



ISBN 978-88-86486-90-3

# Bollettino dei docenti di matematica 68

Maggio
2014

Ufficio dell'insegnamento medio
Centro didattico cantonale

Indice


| | | | |
|---|---|---|---|
| | Prefazione | | 7 |
| I. | Varia | | |
| | 1. | John Nash a vent'anni dal Nobel<br>Gianfranco Gambarelli | 9 |
| | 2. | Didattica moderna e la matematica senza tempo<br>Silvio Maracchia | 19 |
| | 3. | Giovanni Bosco e un libro sulla matematica<br>Bruno D'Amore | 25 |
| | 4. | Le parole «difficili»<br>Giorgio Mainini | 33 |
| II. | Matematica | | |
| | 1. | Il teorema di Pick e i sistemi<br>di disequazioni diofantine lineari<br>Paolo Hägler | 49 |
| III. | Didattica | | |
| | 1. | Calcolo mentale-approssimato-strumentale<br>Gianfranco Arrigo | 53 |
| | 2. | Calcolo della probabilità alla scuola media<br>Le concezioni degli allievi<br>Massimo Anghileri | 63 |
| | 3. | «Atomi & Molecole» e «Terne perfette e imperfette»<br>Una proposta per avvicinare gli allievi all'aritmetica<br>Cristina e Claudio Ruggeri-Chierici | 87 |
| | 4. | Matematica, cosa ne pensano i bambini:<br>indagine in una prima elementare<br>Lorella Maurizi | 103 |
| | 5. | Proposte di attività sulle frazioni<br>Bernardo Mutti | 109 |
| | 6. | Gocce di didattica<br>Spunti e riflessioni dalla ricerca<br>in didattica della matematica<br>Alberto Piatti | 113 |

IV. Giochi

1. Agorando 1
Una curiosità geometrica
Paolo Hägler e Giorgio Mainini — 117

Soluzione del Quiz numero 50 — 118

V. Segnalazioni

1. Convegno Nazionale n. 28
Incontri con la Matematica — 119

2. Recensioni — 123

# Prefazione

Il numero apre con un articolo di Gianfranco Gambarelli, il matematico italiano specialista in teoria dei giochi che è stato protagonista della Tavola rotonda organizzata dalla SMASI lo scorso 28 marzo. Parla in modo particolare della sua amicizia con John Nash. Segue un nuovo contributo di Silvio Maracchia, un po' diverso dal solito. La rubrica Varia accoglie poi un gustoso intervento di Bruno D'Amore su nientedimeno che… don Giovanni Bosco. Giorgio Mainini veste per noi l'abito dell'etimologo, fornendo un prezioso documento sicuramente utile agli insegnanti di ogni ordine scolastico.

La sezione Matematica accoglie un originale lavoretto di Paolo Hägler.

Ricchissima, come sempre, la sezione dedicata alla Didattica. Si inizia con un articolo di Gianfranco Arrigo che conclude la serie di scritti dedicati all'insegnamento del calcolo nella scuola elementare e che dovrebbe interessare anche gli insegnanti della scuola media nell'ottica della continuità fra i due ordini di scuola. Sempre con molto piacere si propone poi la sintesi dell'ottimo lavoro di diploma di Massimo Anghileri, nuovo insegnante di matematica alla Scuola media di Stabio. Una gradita sorpresa è la proposta di due insegnanti della Scuola elementare di Losone, Cristina e Claudio Ruggeri-Chierici, concreta testimonianza di un lavoro coscienzioso svolto in classe. Molto interessante l'indagine proposta da Lorella Maurizi, sulle concezioni che hanno i bambini di prima elementare su che cos'è la matematica: ottimo punto di partenza per costruire un percorso formativo. Alberto Piatti ci propone la seconda puntata delle sue Gocce di didattica, dedicata alla valutazione formativa. Si conclude con una nuova proposta di Bernardo Mutti, concernente il concetto di frazione.

La rubrica Giochi si presenta con una nuova veste e con due «nuovi» autori: Paolo Hägler e Giorgio Mainini. Titolo: Agorando. Novità: le soluzioni possono essere inviate per e-mail a un apposito indirizzo. È terminato così il ciclo di Aldo Frapolli, durato ben 50 numeri. Lo ringraziamo di nuovo per l'ottimo lavoro fornito.

Si chiude con le segnalazioni e le recensioni.

# I. Varia

## 1. John Nash a vent'anni dal Nobel Umanità e genialità nella vita del grande matematico portato sullo schermo da Russell Crowe[1]

Gianfranco Gambarelli[2]

«A beautiful mind» won four Oscars and two «Golden Globes». Directed by Ron Howard and starring Russell Crowe, the film was inspired by the life of John Nash, who was awarded the Nobel Memorial Prize in Economic Sciences. This connection between science and the cinema is mainly due to the turbulent and astonishing events in the great mathematician's life, as well as the importance of his discoveries. Nash is more than just a «Nobel» winner, bearing in mind that his results are well-known to the majority of economics students throughout the world.

*«A beautiful mind*» ha vinto quattro Oscar e due «Golden Globe». Diretto da Ron Howard e interpretato da Russell Crowe, trae spunto dalla vita di John Nash, premio Nobel per l'Economia. Questa connessione fra scienza e cinema è dovuta principalmente alle tormentate e sorprendenti vicende del grande matematico, nonché all'importanza delle sue scoperte; Nash è qualcosa di più di un «Nobel», visto che i suoi risultati sono noti a gran parte degli studenti di scienze economiche in tutto il mondo.

### 1. Una vita sorprendente

Nato nel 1928 a Bluefield (West Virginia) si laurea in Matematica a Princeton e inizia a lavorare con John von Neumann, Lloyd Shapley e Harold Kuhn. Quest'ultimo gli sarà vicino negli anni bui, gli darà la notizia del «Nobel» e ne farà la presentazione ufficiale a Stoccolma, nel corso della cerimonia di consegna. Nash si occupa principalmente di Teoria dei Giochi, ma anche in altri settori della Matematica trova importanti risultati. In uno di essi è peraltro anticipato da un italiano. Nash scrive in proposito: *«Accadde che lavorassi in parallelo con Ennio de Giorgi, che operava a Pisa. Egli fu il primo a raggiungere la vetta almeno per il caso, particolarmente importante, delle equazioni ellittiche»*[3]. Verso la fine degli anni '50 si ammala di schizofrenia e inizia una drammatica peregrinazione fra vari istituti di cura. Solo nei primi anni '90 nuovi farmaci gli permettono di riacquistare un certo equilibrio mentale. Nel

1. Questo articolo è una versione ampliata e aggiornata di altri pubblicati su *Didattica delle Scienze*, *Atti del Congresso Nazionale Mathesis di Bergamo*, *Atti dell'Ateneo di Scienze, Lettere ed Arti di Bergamo* e *MatematicaMente*.
2. Ordinario di Matematica, Teoria dei Giochi e delle Decisioni nell'Università degli Studi di Bergamo. http://dinamico.unibg.it/dmsia/staff/gambar.html
3. *«It happened that I was working in parallel with Ennio de Giorgi of Pisa, Italy. And de Giorgi was first actually to achieve the ascent of the summit (of the figuratively described problem), at least for the particularly interesting case of elliptic equations»*. (Nash, 1955).

1994 vince il Nobel per i risultati, ottenuti negli anni ’50 sulla Teoria dei Giochi e riprende gradualmente a muoversi negli ambienti scientifici.

Nel 1998 esce il libro di Sylvia Nasar «*A beautiful mind*» che risulterà finalista al Premio Pulizer. Una versione in italiano viene pubblicata l’anno seguente dalla Rizzoli con il titolo «*Il genio dei numeri*». Nel gennaio 2002 esce una pubblicazione di taglio più scientifico, «*The essential John Nash*» di Sylvia Nasar e Harold Kuhn. Ancora a gennaio esce il film, che si porta subito ai vertici delle classifiche di pubblico in tutto il mondo.

## 2. Un carattere difficile

Dice di lui Barbara Bonvento: *«La fame di affetto che lo spingeva a cercare le amicizie più diverse e il non volere, allo stesso tempo, essere dominato dagli altri, spiegano i suoi rapporti umani complessi e gli amori di vario genere vissuti in maniera turbinosa e scostante».*

*«Mentre per anni»* scrive Sylvia Nasar *«l’uomo Nash rimaneva congelato in uno stato di sogno, un fantasma che vagava per Princeton scarabocchiando lavagne e studiando libri religiosi, il suo nome cominciò a comparire ovunque – in testi di economia, articoli di biologia evolutiva, trattati di scienze politiche, riviste matematiche»*[4]. È di Shapley l’osservazione da cui hanno tratto spunto i titoli delle opere a lui dedicate: *«Ciò che lo ha redento è stata una chiara, logica, bellissima mente.*[5]

Oggi, sedata la malattia, Nash ha ritrovato un po’ di serenità. Le manifestazioni di affetto e i riconoscimenti che continuano a pervenirgli da ogni parte del mondo accademico sono una testimonianza, oltre che dell’enorme importanza dei suoi studi, anche dell’umanità che ha saputo offrire a chi lo ha conosciuto veramente.

## 3. La Teoria dei Giochi

La Teoria dei Giochi è la scienza matematica che analizza situazioni di conflitto e ne ricerca soluzioni competitive e cooperative (più tecnicamente si tratta di «interazione strategica»). Le applicazioni di tale teoria sono molteplici: dal campo economico a quello militare, medico, biologico, sociale, psicologico, finanziario, politico, ambientale, sportivo. Per un’introduzione digeribile anche da non matematici segnalo il mio volumetto del 2003, che si è giovato del contributo di Guillermo Owen per la parte storica. La Teoria nasce nel 1928 con un articolo di John von Neumann e trova i primi importanti impieghi nella seconda guerra mondiale. Il matematico è, infatti, padre del mitico MANIAC (coperto dal segreto militare) precursore del Mark1. I primi utilizzi del neonato computer consistono nell’applicazione della Teoria dei Giochi all’elaborazione delle quote di sgancio per i bombardieri, dei percorsi dei convogli che

4. *«While Nash the man remained frozen in a dreamlike state, a phantom who haunted Princeton in the 1970s and 1980s scribbling on blackboards and studying religions texts, his name began to surface everywhere – in economics textbooks, articles on evolutionary biology, political science treatises, mathematics journals»*. (Nasar, 1998)
5. *«What redeemed him was a clear, logical, beautiful mind».* (Nasar e Kuhn, 2002)

minimizzano la probabilità di intercettazioni nemiche e così via. Un nuovo passo fondamentale è favorito dall'incontro a Princeton fra von Neumann e l'economista Oskar Morgenstern; da quell'interazione nasce nel 1944 il testo destinato a rivoluzionare i rapporti fra Matematica ed Economia.

## 4. Giocatori e mosse, strategie e pagamenti

Ogni «giocatore» è un soggetto razionale che può scegliere fra varie «mosse». Ad esempio, se il giocatore è un commerciante, le sue mosse possono essere: aumentare o diminuire o lasciare invariati i prezzi di suoi articoli; le mosse di un acquirente possono essere cambiare o restare fedele a un prodotto o a un fornitore; le mosse di un responsabile di logistica militare possono essere inviare un convoglio lungo un certo percorso, piuttosto che lungo un altro.

Una «strategia» è una distribuzione di probabilità sulle mosse. Ad esempio i convogli possono essere inviati periodicamente, per il 30% dei viaggi su un percorso e per il 70% su un altro; i prezzi dei prodotti possono essere variati in rotazione e così via. In dipendenza dalle strategie adottate da tutti i giocatori, ognuno riceve un «pagamento» che può essere positivo, negativo o nullo. Un gioco si dice «a somma costante» se per ogni vincita di un giocatore v'è una corrispondente perdita per altri. In particolare, un gioco «a somma zero» fra due persone rappresenta la situazione in cui il pagamento viene corrisposto da un giocatore all'altro.

## 5. I risultati di Nash

I principali risultati di von Neumann per i giochi a due persone riguardano la somma costante. Il problema dei giochi a somma variabile viene affrontato all'inizio degli anni '50 da John Nash, che introduce e sviluppa il concetto di «equilibrio» per giochi a due o più giocatori. Un insieme di strategie adottate da tutti costituisce un equilibrio di Nash se a nessuno conviene cambiare la sua scelta, nel caso in cui tutti gli altri mantengano fissa la loro. Consideriamo ad esempio un gioco costituito da vari giocatori, ciascuno dotato di un numero finito di mosse. Supponiamo che la regola dei pagamenti assegni vincite positive a tutti i giocatori, nel caso in cui tutti insieme scelgano la loro prima mossa; ancora vincite positive a tutti, nel caso in cui tutti insieme scelgano la loro ultima mossa; vincite nulle a tutti, altrimenti. È facile verificare che l'insieme delle strategie per cui ognuno usa al 100% la sua prima mossa costituisce un equilibrio di Nash: infatti, se tutti usano la loro prima mossa, a nessuno conviene cambiare da solo, perché passerebbe da una vincita positiva a una vincita nulla. Per lo stesso motivo, l'insieme delle strategie per cui ognuno usa al 100% la sua ultima mossa costituisce un equilibrio di Nash. Ovviamente non tutti i giochi sono così semplici. Nash affronta anche il problema delle strategie di contrattazione e della ripartizione della vincita ottenuta. La «soluzione cooperativa di Nash» per giochi a due persone costituisce un importante contributo alla risoluzione di conflitti.

## 6. I successivi sviluppi

Gli equilibri di Nash vengono in seguito approfonditi da Reinhald Selten con l'introduzione dei relativi «raffinamenti». La soluzione cooperativa di Nash viene generalizzata da John Harsanyi a casi di più di due giocatori, in alternativa a un altro concetto di soluzione cooperativa: il «valore per giochi a n persone», introdotto nel 1953 da Lloyd Shapley. All'inizio degli anni '60 Thomas Schelling avvia importanti studi su problemi di conflitto in ambito energetico, ambientale, di armamenti e di disarmo. Ancora in quel periodo Robert Aumann e Michael Maschler danno il via ai «giochi a informazione incompleta». Aumann sviluppa utilissimi modelli su giochi di mercato continui, o infiniti, o ripetuti e crea una scuola diffusa in tutto il mondo.

Harold Kuhn dà uno sviluppo fondamentale ai Giochi in forma estesa (cioè con mosse alternate dei giocatori) e ai collegamenti fra Teoria dei Giochi e Programmazione Matematica. Grazie al famoso teorema da lui elaborato con Albert W. Tucker nel 1951 sull'ottimizzazione vincolata, Kuhn è oggi l'unico matematico vivente il cui nome compare sui libri di base di Matematica applicata. La società da lui diretta, *Mathematica*, consentì ai due futuri «Nobel» Selten e Harsanyi di applicare la Teoria dei Giochi al problema del disarmo.

Nel 1965 il testo *«Game Theory»* di Guillermo Owen (giunto in seguito alla terza edizione) costituisce la «fase Gutemberg» della teoria, in quanto la diffonde in tutto il mondo grazie alle traduzioni in giapponese, polacco, romeno, russo, tedesco e così via. Owen (che riceverà in seguito una nomination per il Nobel) lavora anche con Shapley per applicazioni politiche dei Giochi e generalizza il suo «valore». Avrò l'onore di lavorare anch'io con Owen sia in campo politico-finanziario (1994 e 2002) che in ambito storicio (2004) e di averlo ospite fisso a Bergamo.

Dal 1994 a oggi, sono stati assegnati dieci Premi Nobel per l'Economia a studiosi di Teoria dei Giochi: oltre a Nash, John Harsanyi e Reinhard Selten (1994), Robert J. Aumann e Thomas C. Schelling (2005), Roger Myerson, Leonid Hurwicz ed Eric Maskin (2007), Alvin Roth e Lloyd Shapley (2012). Molti sono i problemi ancora aperti sia nella Teoria che nelle applicazioni; in particolare per i Giochi Cooperativi segnalo due recenti raccolte di tali problemi, edite da me e Vito Fragnelli (2013a e 2013b).

## 7. Realtà e fiction

Il libro di Sylvia Nasar, a prescindere dalle inevitabili lacune, è sostanzialmente veritiero. Una piccola polemica è sorta in Italia per una descrizione riportata dalla Nasar sull'aspetto fisico di Ennio De Giorgi, ma è poi risultato che si trattava essenzialmente di un'infelice traduzione in italiano del testo inglese. Il successivo libro scritto dalla Nasar in collaborazione con Harold Kuhn costituisce un'importante integrazione sia per gli aspetti scientifici (trattati in modo un po' dilettantesco nell'opera precedente) che per le bellissime testimonianze fotografiche. Fra queste, particolarmente suggestiva è la riproduzione della tesi di laurea di Nash, ove già appaiono chiaramente la definizione degli equilibri e il teorema di esistenza, che lo avrebbero portato al Nobel.

Per quanto riguarda il film, le differenze dalla realtà sono molteplici. Intanto Nash è alto e magro e Alicia piccola e paffutella; ciò appare ribaltato nelle figure di Russel Crowe e Jennifer Connelly. Un figlio di Nash che risale a una relazione precedente il matrimonio è ignorato. Ancora ignorato è il fatto che Alicia e John, dopo una separazione durata molti anni (nel corso dei quali Alicia aveva comunque seguito da vicino le vicende dell'ex-marito) si sono risposati il primo giugno 2001. L'episodio in cui John spazza via le pedine alla fine di una partita di dama non risulta dalle testimonianze dei suoi compagni di studi. Ciò naturalmente non lo esclude, ma sembra più attendibile che l'adattatore cinematografico abbia preso spunto dall'invenzione, fatta da Nash, di un gioco simile alla dama, che divenne molto popolare nella sala dei matematici di Princeton. A proposito di tale sala, la «cerimonia delle penne» (secondo cui tutti i matematici presenti a *Fine Hall* depositavano la loro penna sul tavolo di uno studioso che riconoscevano superiore) è molto suggestiva, ma inventata. Ancora inventato è il discorso durante la cerimonia del Nobel: è noto infatti che in tale circostanza il premiato si limita a ricevere l'onorificenza senza dire nulla; i soli *speakers* sono il cerimoniere e il presentatore delle motivazioni (in questo caso Harold Kuhn). Nel film i risultati scientifici sono quasi completamente trascurati; nei rari casi in cui appaiono sono per lo più imprecisi. Ad esempio molte delle formule scritte sulle lavagne e sui vetri delle finestre non riguardano i lavori di Nash e la soluzione illustrata con l'episodio della «bionda» nel bar non costituisce un equilibrio di Nash, né tantomeno una soluzione cooperativa di Nash per giochi a due persone (in quanto i giocatori coinvolti sono tre). Non è il caso di fare delle puntualizzazioni sulla consistenza dei successivi deliri, per non rovinare l'emozione del film a chi non l'avesse ancora visto. Il giudizio complessivo è comunque, per opinione pressoché unanime, estremamente positivo, tenuto conto che la drammatizzazione cinematografica deve spesso viaggiare con ali proprie. Il punto focale della pellicola sta nella frase pronunciata da Alicia in un momento particolarmente difficile della malattia: *«ho bisogno di credere che qualcosa di straordinario possa accadere»*. Il bellissimo messaggio per tutti gli infelici è che qualcosa di straordinario è davvero accaduto.

## 8. Qualche testimonianza personale

### 8.1. Gerusalemme

Incontrai per la prima volta Nash a Gerusalemme nell'estate del '95, in occasione dei festeggiamenti per il compleanno di Robert Aumann, che avevo conosciuto a Capri qualche anno prima. Si trattava della seconda uscita di Nash da Princeton dopo i lunghi decenni trascorsi in ospedale e la cerimonia del Nobel. Egli si stava lentamente riprendendo e riacquistava interesse per la Teoria dei Giochi. Aumann gli aveva fatto, in pochi giorni, una sintesi dei progressi di tale teoria negli ultimi quarant' anni ed egli si appassionava in particolare agli sviluppi dei Giochi cooperativi. Per vari motivi conoscevo Selten e Harsanyi; fu così che gli venni presentato. Seduti su una panchina di pietra in un giardino fiorito, parlammo con tranquillità e lunghe pause per una mezz' ora. Era un piacere sentirlo raccontare con semplicità le sue impressioni sul viaggio, le suggestioni di Gerusalemme, la cerimonia del Nobel (*«c'era una gran confu-*

*sione, mi portavano in macchina di qua e di là, poi Harold fece la mia presentazione ufficiale, ricevetti il premio e mi trovai a stringere tante mani»*). Si capiva che aveva ancora alcune difficoltà relazionali, era comunque ben felice della svolta che aveva preso la sua vita.

### 8.2. La busta gialla

Riuscii anche a essergli utile, perché la sua assenza dalle attività scientifiche degli ultimi decenni gli aveva impedito di seguire un campo su cui si stava appassionando: il «valore di un gioco». Mi ero occupato molto dell'argomento fin da studente, quando il mio relatore Giorgio Szegö, nel corso di un convegno a Varenna, mi aveva presentato a Shapley e da quell'incontro era uscito nel (1990) il primo algoritmo per il calcolo rapido dello «Shapley value». Dopo una lunga parentesi di lavoro in banca, avevo ripreso in mano i Giochi cooperativi e in particolare i più recenti «valori», arrivando (con l'aiuto di Cesarino Bertini e Izabella Stach) a costruire una formula generale in grado di unificarli e confrontarli. Fu così che potei fargli un po' da consulente quando iniziò a lavorare alla costruzione di un nuovo «valore di Nash» a tutt'oggi non completato. Ne uscirono alcune bozze che ricevetti in una busta gialla. Nella pagina introduttiva egli mi faceva questo onore: *«Ora, in dicembre, sto per spedire questo lavoro alle persone che ho ivi citato; Gambarelli, Gomes, Shapley e Selten; richiedendo i loro commenti»*[6].

Oltre alle fasi di consulenza di cui sopra, alcuni miei risultati lo hanno direttamente interessato. Ricordo in particolare una sua e-mail in cui mi chiedeva notizie di un lavoro che avevo presentato a Bilbao (uscito nel 2007) perché voleva citarlo in una sua successiva pubblicazione[7].

### 8.3. Bergamo

Stava nascendo una forte simpatia fra noi. Non fu quindi per me una sorpresa ricevere la sua adesione al convegno che stavo organizzando a Bergamo nel marzo 1996. Era la sua terza uscita da Princeton, dopo Stoccolma e Gerusalemme. Ritrovai in lui una grande carica di entusiasmo e di curiosità per tutti gli aspetti della vita che gli erano mancati: ad esempio volle subito accompagnarmi a una partita di pallavolo ove giocava mio figlio Daniele e seguì con passione e interesse la competi-

6. *«Now, in December, I am just sending this to names mentioned in the text; Gambarelli, Gomes, Shapley and Selten; and inviting comments».*
7. *«I am working now, again, after an interruption, on preparing for a publication describing the first stage of my work with 'Agency Models' for applying something akin to the old 'Nash Program' to cooperative CF games (of three players) described by a characteristic function. I wanted to include among the references your work on 'Transforming games from characteristic into normal form' along with other citations illustrative of routes followed by various researchers concerned with the general problem (like Harsanyi was) of effectively studying cooperative games of more than two players. But I was not able to find your paper in other than a 'working paper' form or as a published abstract. If there is a publication location (even if it hasn't appeared yet) then I could use that in my list of references».*

zione, chiedendomi informazioni su regole e strategie. Il convegno riuniva studiosi illustri: da William Lucas a Ehud Kalai (editori scientifici di due importanti riviste di Teoria dei Giochi) a Guillermo Owen, con cui avevo iniziato a lavorare. Tutti i partecipanti guardavano con affetto e timore reverenziale questo vecchietto gentile, alto e magro, abbigliato in modo un po' «casual», che rappresentava un momento tanto importante nella storia della Matematica e dell'Economia. Era poi una fortissima emozione vederlo seguire con curiosità le conferenze sui «raffinamenti degli equilibri di Nash» ove venivano presentati gli sviluppi dei suoi studi di quarant'anni prima, sviluppi che lui aveva per lo più ignorati. La sua relazione, che avevo strategicamente posta alla fine della manifestazione, portò un'emozione ancora più forte. Occorre precisare che la sua assenza dai convegni degli ultimi decenni aveva indotto in molti partecipanti la convinzione che egli non fosse più vivo da tempo. Nel vederlo, gesso alla mano, esprimere con esile voce le sue argomentazioni, si aveva l'impressione di sentir parlare Cartesio, Lagrange … la Storia. Quando infine pronunciai il breve saluto di chiusura, fui talmente sopraffatto io pure dall'emozione, che dovetti ricominciare da capo un paio di volte. La sera portai i convegnisti alla «Trattoria dell'Alpino» per una cena rustica. In quell'occasione Marilù Petit chiese a Nash quali fossero i risultati di cui era autore, che egli riteneva più significativi; egli citò la soluzione cooperativa, in quanto gli «equilibri di Nash» erano, a suo parere, abbastanza ovvii.

I rapporti di Nash con Bergamo proseguirono anche l'anno seguente. Dopo una breve apparizione a Washington, il suo quinto viaggio fu ancora qui. Tornò a trovarci nel giugno 1997 insieme ad Harold Kuhn, che mi aveva in passato ospitato a Princeton e che già conosceva Bergamo (ricordava in particolare una serata di festeggiamenti per il ritorno dell'Atalanta in serie A); qualche anno dopo avremmo conferito a Kuhn e a Szegö la laurea honoris causa. Nash rimase da noi per una settimana cercando di mettere a punto il suo nuovo modello e volle tornare più volte all'«Alpino», dove si sentiva ormai di casa. Anche Kuhn tornò spesso a trovarmi, con o senza manifestazioni ufficiali, ad esempio per festeggiare il compleanno di sua moglie Estelle.

### 8.4. Ancora in Italia

Dopo il suo rientro continuammo a scambiarci e-mail. Talora mi raccontava problemi di famiglia, talora faceva qualche commento (anche divertente) su fatti di cronaca italiana; altre volte mi parlava di qualche sua nuova idea.

Tornò in Italia in altre circostanze; in particolare partecipò ai funerali di Ennio De Giorgi, con cui aveva instaurato un rapporto di amicizia. Ci scambiammo varie considerazioni in proposito: Nash ricordava il momento di desolazione quando gli fu riferito del teorema uscito pochi mesi prima del suo in un giornale italiano di piccola tiratura. Da parte mia, ricordavo un'occasione in cui De Giorgi mi era venuto in aiuto: un convegno nazionale di Matematica applicata ove avevo sostenuto l'opportunità di insegnare ai nostri studenti alcuni elementi di Logica formale. Alla compatta reazione negativa dei «baroni» del mio raggruppamento, egli diede con la sua vocetta esile e piena di intercalari una lunga risposta che zittì tutti (anche per via della sua posizione indiscussa) e creò qualche problema a me, (alla vigilia dei concorsi accademici…) ma alla fine tutto si aggiustò. Per la cronaca, insegno tuttora un po' di Logica alle mie matricole.

Nel frattempo le conferenze di Nash avevano acquisito scioltezza e sicurezza; alla fine Nash rispondeva senza problemi alle domande del pubblico. La fama datagli dal film e i conseguenti inviti in tutto il mondo avevano completato il miracolo auspicato da Alicia.

## 8.5. Nel mondo

Iniziò a partecipare ai convegni quadriennali della Game Theory Society (GTS). Ci incontrammo così a Bilbao, Marsiglia e Istambul. Ogni volta che mi vedeva a un pranzo o una cena, mi voleva al suo tavolo. Gli episodi da ricordare in quegli e altri incontri sono innumerevoli; mi limiterò a un paio. Al convegno mondiale dei matematici di Pechino, nell'agosto 2002, ritirai il materiale in segreteria e mi sedetti a un tavolo per smistarlo. A un certo punto sentii un gran clamore alle mie spalle: voci in tutte le lingue, flash di fotografi… lui e Alicia si erano seduti dietro di me, aspettando che mi accorgessi di loro.

Nell'agosto 2010 la mia amica Marilda Sotomayor organizzò a San Paolo una celebrazione dei sessant'anni dei Nash equilibri, con un migliaio di partecipanti, fra cui otto premi Nobel. Lo staff della GTS, cui era affidata l'organizzazione scientifica, stabilì che le plenarie dovessero essere effettuate a coppie di VIP: nella prima conferenza uno sarebbe stato il chairman e l'altro il relatore, poi i ruoli si sarebbero scambiati. Sergiu Hart, presidente della GTS, era abbinato a Nash, che al mattino aveva partecipato alla sessione parallela da me presieduta e mi aveva visto gestire i tempi con decisione. Nel pomeriggio lo incontrai prima del suo impegno e gli chiesi: «Come va? Sei pronto?». Rispose un po' incerto: «sono preoccupato, perché non ho mai fatto il chairman in vita mia». Cercai di tranquillizzarlo, poi andai a prendere posto nel gigantesco auditorium. Quando Nash, saliti faticosamente gli scalini del palco, si sedette, alzò gli occhi e mi vide di fronte a lui. Allora si rialzò, scese, venne da me e mi chiese di tenergli libero il posto di fianco, perché voleva che lo aiutassi a fare il chairman. Poi risalì, disse «Ladies and gentlmen, Sergiu Hart», ridiscese e si sedette da me. Quando mancavano pochi minuti, gli dissi che era il momento di avvisare Hart. Lui non se la sentì e Hart proseguì inconsapevole. Dopo qualche minuto, vista la situazione, feci un cenno all'oratore; questi capì al volo, mi chiese quanto mancasse e al mio cenno successivo terminò la frase e passò la parola.

## 8.6. Ancora a Bergamo

Nel marzo 2008 venne a Brescia per una conferenza congiunta con Aumann, Piergiorgio Odifreddi ed io, organizzata da Riccardo Venchiarutti per conto dell'Istituto ISEO. Gli ospiti, accompagnati dalle mogli, vollero pernottare a Bergamo e cenarono a casa mia. Ciò comportò una certa difficoltà, per via della cucina rigorosamente kosher necessaria per i coniugi Aumann. Alla fine tutto andò bene, tant'è che Aumann chiese gentilmente a Piergiorgio di tradurre le sue congratulazioni e la sua gratitudine per l'ottima cena. Mentre Aumann parlava, Odifreddi traduceva in simultanea: «Non avete capito niente; ci avete dato da mangiare delle cose orribili, schifose, blasfeme, per cui andremo all'inferno…» (un po' come Benigni ne «La vita è bella»). Nash, pur non conoscendo l'italiano, fu il primo degli ospiti ad accorgersi dello scherzo e si piegò su una poltrona per una risata irrefrenabile. Venne anche nell'ottobre 2009 ospite di «Bergamo Scienza» (ing. Andrea Moltrasio) e in quell'occasione volle conoscere la famiglia di mia sorella Edelweiss (sei figli e una miriade di nipoti) che lo accolse con una bellissima cena, nel corso della quale egli scattò numerose fotografie che avrebbe poi inviato a tutti. La cosa si sarebbe ripetuta…

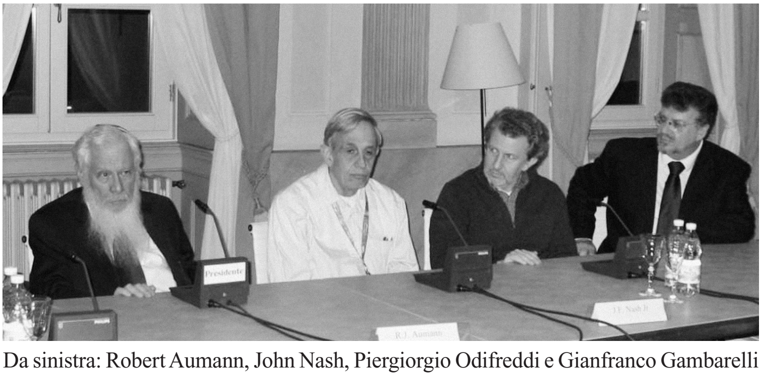
Il suo ritorno più recente ebbe luogo nella settimana dal 26 settembre al 3 ottobre 2013, con un percorso Princeton-Bergamo-Princeton. Venne insieme a moglie e figlio, invitato dall'International Alumni Association of Scuola Mattei (prof. Ezio Di Giulio). Fu accolto ancora in famiglia da mia sorella, mia moglie, i miei figli Gretel e Daniele e parenti vari. Tenne in Università un colloquio pubblico per conto di ISEO, cui parteciparono gli amici Barbara Sorgato, Riccardo Venchiarutti, e Piergiorgio Odifreddi.

## 8.7. I miei studenti

Ogni volta che mi capita qualche ospite illustre cerco di metterlo in contatto con i miei studenti (nell'aula della lezione o altrove) per dare loro il privilegio e l'emozione di un incontro diretto, al di la delle conferenze ufficiali. Ciò è avvenuto più volte con Nash, che i ragazzi hanno visto entrare a sorpresa nell'aula della lezione di Teoria dei Giochi. Nel viaggio più recente alcuni di loro hanno anche collaborato con entusiasmo come guide turistiche per tutta la famiglia.

## 8.8. La religione

In occasione del più recente viaggio a Bergamo, Nash si appassionò a varie questioni religiose. Volle visitare, insieme ad Alicia e Johnny, la casa natale di Papa Giovanni XXIII a Sotto il Monte. Nel corso di un pranzo e una cena con Gianfranco Rusconi (direttore del mio Dipartimento) e sua moglie Grazia, ascoltò affascinato il racconto di Piergiorgio su una lunga lettera che aveva appena ricevuto dal Papa Emerito in risposta al suo libro del 2011 *Caro Papa, ti scrivo*. Papa Ratzinger lo aveva anche autorizzato a pubblicare quella lettera in un successivo volume che Odifreddi aveva in preparazione. Nash seguì il racconto con viva attenzione ed emozione… forse, in seguito, qualcosa scriverà lui pure…




Da sinistra: Robert Aumann, John Nash, Piergiorgio Odifreddi e Gianfranco Gambarelli

## Bibliografia

Bonvento B. (1999). Una bellissima mente. *Periodico di Matematiche,* VII, 6, 2, p. 98.
Fragnelli V. e Gambarelli G. (eds.) (2013a). Open Problems in the Theory of Cooperative Games. *Special Issue of International Game Theory Review*, vol. 15, 2. (eds.) (2013b). Open Problems in the Applications of Cooperative Games. *Special Issue of International Game Theory Review*,vol. 15, 3.
Gambarelli, G. (1990). A New Approach for Evaluating the Shapley Value. *Optimization,* 21, 3, 445-52.
(2003) *Giochi competitivi e cooperativi* (II ed.). Torino: Giappichelli.
(2007) Transforming Games from Characteristic into Normal Form. *International Game Theory Review*, *Special Issue devoted to Logic, Game Theory and Social Choice*
(S. Vannucci and A. Ursini, eds.) Vol. 9, Number 1, 87-104.
Gambarelli G. e Owen G. (1994). Indirect Control of Corporations. *International Journal of Game Theory,* 23, 4, 287-302.
(2002) Power in Political and Business Structures, in: *M.J.Holler, H. Kliemt, D. Schnidtchen and M.E.Streit, Power and Fairness (Jahrbuch für Neue Politische Ökonomie, Vol. 20)*. Tübingen: Mohr Siebeck, 57-68.
(2004) The coming of Game Theory. *Essays on Cooperative Games - in honor of Guillermo Owen* (G. Gambarelli, ed.) *Special Issue of Theory and Decision,* Vol. 36. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1-18.
Kuhn, H.W. e Tucker A.W. (1951). *Nonlinear programming.* University of California Press, 481-492.
Nash, J. F. Jr. (1950). Equilibrium Points in n-Person Games. *Proc. of the National Academy of Sciences*, *U.S.A.*, 36, 1, 48-49.
(1950). The Bargaining Problem. *Econometrica*, 18, 155-62.
(1955). Autobiography. *Les Prix Nobel 1994.* Stockholm: Norstedts Tryckeri, p. 278.
Nasar S. (1998). *A beautiful mind.* New York: Simon & Shuster (I ed.), p. 19.
Nasar S. e Kuhn H. (2002). *The essential John Nash*. Princeton: Princeton University Press, p. xii.
Odifreddi, P.G. (2011) *Caro Papa, ti scrivo*. *Un matematico ateo a confronto con il papa teologo*. Milano: Mondadori.
Owen, G. (1968). *Game Theory* (1st ed.) (II ed. 1982) (III ed. 1993). New York: Academic Press.
Shapley, L. S. (1953). A Value for n-person Games. *Contributions to the Theory of Games* (H. W. Kuhn and A. W. Tucker eds.), II. Princeton: Princeton University Press, 307-317.
Von Neumann, J. (1928). Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen*, 100, 295-320. Translated by S. Bargmann in (1959) in R.D. Luce and A.W. Tucker (Eds.), as *On the Theory of Games of Strategy*.
Von Neumann J. e Morgenstern O. (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton: Princeton University Press.

# 2. Didattica moderna e la matematica senza tempo

Silvio Maracchia

This article recalls some practical teaching notions that can be used in any type of education, but especially in the early grades of study. Timeless notions, one could argue. A prominent place is given to mathematics and the importance it has in the maturation of the learner.

## 1. Premessa

Non c'è dubbio che la pedagogia sia una scienza con le sue procedure che derivano da regole raggiunte da secoli di osservazioni e di sperimentazioni, diventate però talvolta troppo teoriche e distaccate dal contesto in cui si opera. In Italia, ad esempio, esiste da tempo una laurea in pedagogia costituita da svariate discipline tecniche e culturali ma già nel liceo pedagogico si studiano discipline quali la Psicologia, l'Antropologia, la Pedagogia vera e propria e la Sociologia.

In questo articolo noi intendiamo per pedagogia ciò che si può dedurre dal suo significato etimologico: «pedagogia», dal composto greco *pàidos* e *àgo* e cioè la pratica del condurre, guidare il fanciullo. È solo in un secondo tempo che la pedagogia passò dalla professione dell'educazione alla teoria dell'educazione. Ma è solo del primo aspetto che intendiamo parlare, enumerando alcune moderne teorie limitate solo alla semplice educazione del fanciullo o del giovane, senza entrare negli sviluppi teorici e psicologici. In altre parole, una indicazione moderna e pratica del docente dettate dalla pratica dell'insegnamento diretto. Con l'eccezione della matematica con brevi indicazioni senza tempo.


Figura 1. Oggi. (di Chito[1])


Figura 2. Duemila anni fa. (di Chito)

1. Figlio dell'autore.

## 2. Principi di didattica moderna

1. Anzitutto l'insegnamento dev'essere il più possibile «liberale» intendendo con questo un insegnamento non costrittivo, imposto senza alcuna giustificazione e senza mettere in discussione le opinioni del discente, qualunque esse siano. In altre parole l'uomo libero deve imparare senza costrizioni e nessun insegnamento introdotto a forza permane stabilmente ma, anzi, guasta i contenuti.
2. Bisogna piuttosto, ove è possibile, e questo può essere raggiunto in quasi tutti gli aspetti, insegnare come se si giocasse, cosicché è maggiormente possibile osservare le predisposizioni di ciascuno.
   [Riguardo poi alla matematica notiamo che essa è insegnata in ogni parte della terra e, possiamo dire, come nessun'altra materia, quasi alla stessa maniera dovunque. Almeno da un certo punto in poi. La letteratura, la storia, la lingua, la religione, forse anche molte scienze, hanno subito e subiscono notevoli variazioni a seconda dell'epoca e del posto ove vengono insegnate. La matematica, come fosse prescritta per legge, si trova ovunque e uguale. E quando una cosa accade sempre, è stato osservato, vuol dire che è legge di natura. Ma anche la matematica, anche a tacere la sua grande utilità, può insegnarsi attraverso un gioco ben studiato.]
3. Nell'insegnamento ci si può servire talvolta di esempi particolari che parzialmente possano indicare gli aspetti di una certa situazione o di un certo procedimento senza però perdere di vista la necessità che si dovrà sempre tendere al raggiungimento di regole generali. Attenti però a una specializzazione troppo spinta nelle classi superiori che elimini ogni contatto tra le varie materie insegnate.
4. Un'altra considerazione può essere fatta, valida per ogni disciplina ma in particolare per quelle scientifiche: non ammassare all'inizio di un argomento tutte le premesse su cui basare l'intera teoria, ma assumerle via via che si rendono necessarie in modo da non sovraccaricare troppo l'insegnamento con cognizioni che saranno utili solo molto tempo dopo. Questo avviene, ad esempio, nel concentrare sin dall'inizio le regole grammaticali, le coniugazioni dei verbi e le varie eccezioni, anziché graduarle scegliendo a bella posta un percorso in cui esse vengano impiegate gradatamente.
   [Riguardo alla matematica ricordiamo che essa costringe pian piano al ragionamento, sia in casi pratici e sia astratti, cosicché coloro che diventano esperti in tale disciplina risultano maggiormente acuti e in grado di distinguere il vero dal verosimile con buona probabilità. E questo sia dalle prime nozioni di aritmetica e sia dalla geometria.]
5. Una condizione essenziale, infine, per un buon insegnante, è quello di mostrare una effettiva fiducia nella disciplina insegnata, un entusiasmo reale in modo da conseguire l'importante risultato di ottenere la fiducia dei discenti, senza la quale spesso si respinge l'insegnamento stesso. In questo modo i discepoli sono portati a seguire il maestro: l'entusiasmo, quello vero, è contagioso.

6. La maggior parte dell'insegnamento tende a dare una informazione culturale atta a creare in ciascun discente una propria visione del mondo, una propria cultura. Un buon supporto consiste anche nel mettere in evidenza, quando è possibile, anche l'utilità di ciò che si apprende, una utilità pratica che si manifesta principalmente via via che si snodano gli anni di apprendimento.

In questo secondo aspetto dell'insegnamento, la matematica, che pure produce una maturità cui abbiamo accennato, appare facilmente utile nella pratica corrente di ogni manifestazione umana.

## 3. Una sorpresa

Veniamo allora allo scopo precipuo di questo articolo che consiste nel mostrare che le indicazioni elencate sopra e che ricalcano moderni dettami di didattica di pedagogia pratica, senza ricorrere cioè alla teoria scientifica psicologica dell'insegnamento, hanno le loro radici, anzi sono proprio le stesse che venivano indicate da circa duemila, duemila cinquecento anni or sono! A questo proposito ricalchiamo i punti elencati sopra

1. Riguardo all'insegnamento «liberale» possiamo ricordare quanto scrisse Proclo di Licia (V sec. d. C.) parlando di Pitagora (580-500 a.C. circa) che avrebbe fatto «*dello studio della geometria un insegnamento liberale (paideíaj œleuqérou)*[2]*». «L'uomo libero*[3] – scrive Platone (428/7-348/7 a. C.) – *non deve imparare alcuna disciplina attraverso una servile costrizione. Infatti le fatiche corporali fatte per forza non producono alcun male al corpo, mentre nessun insegnamento introdotto a forza permane stabilmente nell'anima*[4]*»*
2. «*Non educare quindi per forza, o egregio amico, i fanciulli nelle discipline, ma come se giocassero, affinché tu sia maggiormente in grado di vedere a cosa tenda ciascuno per natura*»[5]. «*Conviene dunque che questo insegnamento* [della logistica o calcolo e dell'aritmetica] *venga ordinato per legge»* e dunque, data la sua necessità in ogni manifestazione, resa obbligatoria «*per facilitare il passaggio dell'anima dal divenire alla verità e all'essere*»[6].

2. Molto è stato detto dagli studiosi sul significato di quell'«*insegnamento liberale*» che alcuni traducono con «insegnamento teoretico», altri con «insegnamento libero» ecc. (v. ad esempio M. Timpanaro Cardini, *Pitagorici. Testimonianze e Frammenti*, Fsc. I, La Nuova Italia, Firenze 1958, p. 31; oppure *Proclus de Lycie* a cura di Paul Ver Eecke, Desclée de Brouwer, Bruges, 1948, p. 57, entrambi impegnati a stabilire le loro e le altrui accezioni del vocabolo). Come sia, è noto che l'insegnamento pitagorico, da quanto ne scrive Giamblico nella sua *Vita pitagorica,* era assolutamente privo di imposizioni, fatta eccezione per il silenzio col quale accogliere i vari insegnamenti.
3. Non lo schiavo.
4. Platone, *Repubblica* 536 e.
5. Platone, *Repubblica*, 536 e – 537 a. Questo brano segue immediatamente quello citato sopra.
6. Entrambi i passi si trovano in Platone, *Repubblica*, 525 e.

3. *«…Il fatto che sia reale quanto si dice in un determinato esempio non aiuta per niente la nostra dimostrazione»* scrive Aristotele che si riferisce piuttosto agli esempi che, per mostrare una certa proprietà, prendono in considerazione figure necessariamente imperfette. In un altro brano, poi, egli considera non definitiva la dimostrazione che la somma degli angoli di un triangolo sia uguale a due angoli retti, se questa dimostrazione viene eseguita su triangoli particolari e non in generale[7]. Riguardo poi al pericolo di una eccessiva specializzazione, ricordiamo un passo di *Dell'Oratore* di Cicerone[8]: «*E, non solo quest'arte* [scil. l'oratoria] – *riprese Crasso – ma anche molte altre sono scadute dalla loro primitiva grandezza per causa delle divisioni del loro smembramento in parti minute»*. A questo punto Cicerone fa svariati esempi ed elogi di sapienti forniti di una conoscenza generale della loro materia specifica (oltre a quella per altre discipline).
4. Da Aristotele: «*È altresì utile non assumere ordinatamente e di seguito gli assiomi, onde si sviluppano i sillogismi; sarà bene accostare di volta in volta una premessa che si riferisce ad una certa conclusione ad una premessa che si riferisce ad un'altra conclusione. Quando infatti le premesse vengono esplicitamente accoppiate secondo la loro destinazione, sarà senz'altro più facile scorgere cose ne deriverà*»[9]

   [La capacità che ha la matematica, aritmetica e geometria, di rendere maggiormente acuta la mente, rende essenziale e insostituibile il suo insegnamento. Le testimonianze sono numerosissime; ci limitiamo pertanto solo a poche enunciazioni. Da Platone[10] «*Vedi dunque, o amico, dissi, che effettivamente questo insegnamento (máqhma, màtema) rischia di diventare indispensabile (…) E poi? Non hai già osservato che coloro che sono veri calcolatori sono acuti nell'apprendere quasi tutte le discipline, e che i tardi, quando sono stati ammaestrati ed esercitati nel calcolo, quand'anche non ne ricavino altro vantaggio, pure diventano più acuti e progrediscono?*[11]»

   Riguardo alla capacità della geometria di educare il discepolo, ricordiamo il lungo brano di Quintiliano (35/40-100 d.C. circa) (*Istituzione Oratoria*, I,34) di cui riportiamo solo alcuni passi: «*Riguardo alla geometria si afferma che una parte è utile per le tenere età. Sostengono infatti che gli animi ne sono stimolati e l'ingegno sollecitato, e che deriva da lì quell'agilità di percezione, ma pensano che quella scienza, a differenza delle altre, non è utile quando è acquisita, ma all'atto di venire ap-*

7. Aristotele, *Secondi Analitici*. Il brano è piuttosto lungo, ne indichiamo soltanto la collocazione: 74 a, 25 – 74 b, 4
8. Cicerone (106-43 a. C.), *Dell'Oratore*, III,XXXIII.
9. Aristotele (384-322 a. C.), *Topici*, 156 a, 23-26. Così dirà, circa un millennio dopo, anche Pierre de la Ramée (Petrus Ramus 1515-1572).
10. *Repubblica,*526 a,b.
11. Annota a questo punto Attilio Frajese (*Platone e la matematica nel mondo antico*, Universale Studium, Roma, 1963, p.133) che: «*questo è uno dei passi che fa di Platone il fondatore dell'insegnamento matematico. Nel passo seguente ancora di più sarà detto per la geometria*». Si veda anche *Le leggi* 747 a-d.

*presa (…) Avendo infatti una duplice suddivisione, e riguardo ai numeri e alle figure, la conoscenza dei numeri non soltanto all'oratore è necessaria, ma a chiunque abbia almeno ricevuto una elementare istruzione. (…) e* [così] *la conoscenza della geometria*».]

5. Da Quintilano (*Istituzioni Oratorie*, VIII, *Proemio*): «*C'è tuttavia bisogno di una via per i principianti, ma piana e facile ad iniziarsi e a indicarsi. Pertanto il maestro esperto scelga tra tutti gli argomenti migliori e insegni infine quelle parti per ora che piacciono, avendo tralasciato ogni indugio di confutare le altre teorie. I discepoli, infatti, ti seguiranno dove li condurrai*».
6. Abbiamo parlato, nei paragrafi precedenti anche dell'utilità di un buon insegnamento per la maturazione che una buona conoscenza fornisce una volta che il discente la acquisisce. Non c'è dubbio però che tale conoscenza può essere sfruttata anche nella pratica di ogni giorno. Gli esempi sarebbero innumerevoli e si potrebbero scegliere in ogni campo. *In matematica, ad esempio, gli antichi hanno tramandato numerosi esempi di pratiche applicazioni, dalla individuazione da parte di Didone dell'area massima da scegliere con un perimetro assegnato per potersi insediare con i suoi compagni; alla distribuzione dei campi da assegnare ai soldati vincitori da parte del generale romano; alle straordinarie armi costruite da Archimede per respingere l'assedio di Marcello (fisica-matematica, potremmo dire) ecc.*

## 4. Conclusione

Che cosa è possibile trarre dal confronto tra le raccomandazioni di una moderna didattica, diciamo così sul campo, e le indicazioni analoghe di oltre duemila anni fa?

La risposta più ovvia è che, pur nelle grandi mutazioni avvenute in quasi tutti i campi, sociali soprattutto, ma anche nell'enorme sviluppo delle scienze, nella nascita e nella crescita di civiltà, di esperienze storiche, di letterature cui hanno contribuito notevoli personalità, storici e poeti, nonostante manifestazioni artistiche diverse, pittoriche, musicali eccetera, eccetera; nonostante tutto ciò, l'uomo *è rimasto sostanzialmente lo stesso!*

Lo stesso nelle sue esigenze primarie, affettive e intellettive; lo stesso nella capacità di apprendere e nei modi migliori per farlo. Se è vero, come è vero, almeno per noi, che l'uomo è un prodotto di una lunga evoluzione non ancora terminata, se mai lo sarà, allora possiamo concludere che duemila, ma anche cinquemila o diecimila anni, sono troppo pochi per poter notare significative distinzioni nei modi e nei criteri di apprendimento.

Noi non abbiamo la preparazione e neppure la volontà per entrare nella complessa indagine scientifica della evoluzione e poter così stabilire se siamo o no ancora delle scimmie appena appena rivestite da una vernice di civiltà, sempre pronta a scomparire per sollecitazioni che investono la sopravvivenza nostra o della nostra famiglia più o meno allargata. La tesi che Desmond Morris ha sostenuto nel suo famoso saggio *La scimmia nuda*[12] per cui, a onta della nostra presunta civilizzazione, noi siamo tuttora una delle centonovantatrè specie di scimmie con tutti i loro impulsi e le esigenze, per quanto interessante e rivelatrice, non può essere da noi né respinta né accettata.

Alla stessa maniera non mi posso addentrare nelle profonde indagini antropologiche e filosofiche insieme di Alexis Carrel, premio Nobel per la medicina (1912), autore del famoso saggio *L'uomo questo sconosciuto*[13] nel quale egli cerca di mettere a nudo la natura dell'uomo, soffocata soprattutto da motivi economici devianti, auspicando un nuovo tipo di docenti atti ad insegnare nuove regole di vita. Ci sarebbe molto da dire sulla tesi, anzi sulle tesi, sostenute da Carrel, ci limitiamo a ripetere una sua osservazione che, riguardo al nostro tema, appare piuttosto condivisibile: «*poca osservazione e molto ragionamento portano all'errore, molta osservazione e poco ragionamento portano alla verità*». Sembra di sentire quanto ebbe a scrivere Ernest Fenollosa nel suo saggio *L'ideogramma cinese come mezzo di poesia* (1936) nel quale viene mostrata che la scrittura cinese era permeato anche di indicazioni poetiche[14]: «*La poesia va d'accordo con la scienza, ma non con la logica. Quando usiamo la copula, quando esprimiamo inclusioni soggettive, la poesia sfuma*».

Con questo non vogliamo negare, sia chiaro, l'importanza della logica, i suoi legami con la matematica e la sua ricerca del ragionare corretto; solo che essa non deve essere spinta all'eccesso anche perché accade che «*il sillogismo ripetutamente perde la presa sulla realtà*» cosicché potrebbe accadere che «*il logico non arriva mai alla radice*»[15]. Talvolta l'esperienza sul campo esaminata con intelligenza e senza pregiudizi può essere più fattiva di una teoria perfetta ma troppo astratta. E questo vale nella didattica come in ogni altra cosa.

12. Il titolo originale di questo fortunato libro è *The Naked Ape*. A Zoologist's Study of the Human Animal, stampato nel 1967 a Londra e tradotto l'anno dopo per i tipi della Bompiani appunto con il titolo indicato sopra.
13. Titolo originale: *L'homme cet inconnu*, prima edizione 1935, pubblicato in numerose edizioni da Bompiani e recentemente (2013) dalla Luni editrice. Notiamo che nella *Prefazione d*ell'edizione Bompiani del 1938 è scritto. «*Questo libro si rivolge a tutti coloro il cui compito quotidiano è l'educazione, la formazione e la direzione degli individui: ai maestri, agli igienisti, ai medici, ai sacerdoti, agli avvocati, ai magistrati, ai professori, agli ufficiali, agli ingegneri, ai capitani di industria nonché a tutti coloro che in umiltà si pongono il problema del nostro corpo, della nostra coscienza e dell'universo*».
14. Il saggio si trova, ad esempio, nelle *Opere scelte di Ezra Pound* (Mondadori, 1970, pp. 373-407) dato che il poeta americano ne ha fatto la traduzione e ne ha scritto l'Introduzione e posto varie note esplicative.
15. Le due frasi sono di Ezra Pound e le abbiamo tratte da Ezra Pound, *Aforismi e detti memorabili,* (T. E. Newton, Roma, 1993, pp. 31 e 28) in cui vengono indicati anche da dove esse sono state tratte.

# 3. Giovanni Bosco e un libro sulla matematica

Bruno D'Amore[1]

Around the mid-1800s, the famous Don Giovanni Bosco, saint of the Catholic Church canonized by Pope Pius XI in 1934, wrote a book about mathematics and the units of measure for young workers and peasants. The edition referred to is the second, that of 1849. Few people know of this book. Given the illustrious name of the author, we have therefore decided to present it to teachers, after having studied its characteristics.

## 1. Premessa

Alcuni anni fa, un editore bolognese decise di ristampare un libro non troppo conosciuto, anzi stupefacente per i più:

**Don Bosco**
*Il sistema metrico decimale, preceduto dalle quattro prime operazioni dell'aritmetica ad uso degli artigiani e della gente di campagna*
Per cura del sacerdote Bosco Gio.
Edizione seconda migliorata ed accresciuta.
Torino, 1849.
Per Gio. Battista Paravia e Comp.
Tipografi-Librai sotto i portici del Palazzo di Città.

(Titolo chilometrico, com'era d'uso a quei tempi ed ancor più prima; nomi propri tagliati, altro atteggiamento tipico).

Quel Don Bosco è lui, è proprio lui, Giovanni Bosco, canonizzato da Pio XI nel 1934, uno dei pochi «santi subito», in meno di 50 anni dalla morte. Che questo personaggio si fosse occupato di matematica lascia stupefatti tutti coloro ai quali lo dico; e pochi sanno che scrisse anche un libretto di filosofia, che oggi potremmo chiamare di epistemologia, dato che contiene molti riferimenti alla filosofia della scienza (non banali).

L'editore mi chiese la prefazione; l'accettai subito, dopo aver però chiaramente ed onestamente fatto presente all'editore che la prefazione ad un santo fatta da un ateo avrebbe potuto non essere gradita ad alcuni; alla sua insistenza, mi misi al lavoro. In pochi giorni, il testo era pronto e nelle mani dell'editore.

1. CADE, Doctorado interinstitucional, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá

Chi non pubblica libri non lo sa, ma attualmente questo genere di impegni è diventato assai complesso; l'editore può decidere all'ultimo momento di sospendere la cosa e così ti puoi ritrovare ad aver fatto un lavoro inutile.

Fu il nostro caso; dopo anni, la stampa di questo libro sembra rimandata *sine die*. A me dispiacque non solo e non tanto per l'inutile lavoro fatto, tuttavia gradevole, ma anche perché vedevo e vedo che coloro ai quali racconto questa storia ne sono curiosamente attratti… E così ho deciso di pubblicare lo stesso questa prefazione che non è più una prefazione, ma il commento al libro di matematica di un santo cattolico. Non che sia l'unico caso, di santi interessati alla matematica è piena la storia; ma questo è uno moderno, attuale, contemporaneo, e famoso per tutt'altro, per il suo impegno civile e sociale.

## 2. Prefazione o, meglio, prefazione non andata a buon fine

Sarto, garzone, fabbro, prestigiatore, cameriere, stalliere, acrobata, direttore, sacerdote e santo cattolico: a pochi personaggi al mondo si possono ascrivere tutti questi attributi, ma sì al piemontese Giovanni Melchiorre Bosco (1815-1888), fondatore dei Salesiani e delle Figlie di Maria Ausiliatrice. Per uno che vive in Colombia e che in continuazione viaggia nei Paesi dell'America Latina, il personaggio don Bosco è come un mito: tra i *Colegios* privati migliori del continente, certamente svettano per la loro pedagogia attiva, concreta e ben definita, quelli che portano questo nome. Non è un caso: i viaggi del Nostro in Argentina hanno creato un rapporto di stima e fiducia fra il suo personalissimo modo concreto di intendere la vicinanza agli umili, specie ai giovani diseredati, e questo mondo latino, così pieno di contraddizioni per quel che concerne la vita sociale.

Sappiamo anche che, nonostante il notevole ritardo e le difficoltà con cui intraprese gli studi, la sua preparazione culturale fu abbastanza forte e, soprattutto, ampia; il che l'ha portato a pubblicare molte decine di opere su svariati argomenti, una delle quali, questa, della quale sono gentilmente stato incaricato di scrivere una presentazione di tipo tecnico; mai avrei pensato, ateo come sono, di scrivere un giorno la prefazione al libro di un santo; ma, si sa, la matematica mette tutti d'accordo. E poi ho sempre avuto una stima particolare per questo personaggio degli umili, così vicino al mio modo di pensare; lo accetterei *in toto*, non fosse che per un episodio che non riesco ad accettare, il famoso rogo dei libri protestanti, fatto assai poco caritatevole e culturalmente riduttivo, specie se viene da uno che ha avuto il coraggio di difendere il Cristo dell'Amiata contro la potenza clericale romana. Ma si sa, erano altri tempi, e non è mio compito, qui, quello biografico.

L'opera di cui parlo fu edita una prima volta nel 1849 e una seconda volta nello stesso anno ed ha avuto fieri assertori della falsa attribuzione al Bosco; ma mi pare che la polemica si sia calmata e che oggi nessuno metta più in dubbio questa attribuzione; meglio, così ho la libertà di parlarne facendo riferimento a lui e non a un ipotetico autore sconosciuto.

Comincio con una presentazione dell'opera abbastanza dettagliata. Il linguaggio nel quale essa è scritta è una versione di quei linguaggi italiani colti che fiorivano alla fine della prima metà del secolo XIX; si pensi che *I Promessi Sposi*, nella loro versione definitiva, videro la luce fra il 1840 e il 1841; ma questa opera voleva e doveva essere esempio di linguaggio popolare assai colto, il che richiese lunghi studi, viaggi e meditazioni all'Autore, obbligandolo a sciacquare i panni nell'Arno, tutti lussi che il Bosco non si poteva permettere. Il suo, dunque, è il linguaggio personale, ricercato, curato ma non di livello colto, nel quale un sacerdote poco più che trentenne poteva pensare di esprimersi per iscritto per essere letto dai suoi parrocchiani contadini e artigiani. Certo, si trovano varie incoerenze linguistiche, come quando nessun redattore in casa editrice rilegge il testo consegnato dall'autore, o come quando l'autore corregge male le bozze e non s'avvede degli errori immessi dal tipografo; per esempio appaiono soggetti al plurale e verbi relativi al singolare. Ma questo nulla toglie al valore dell'opera.

Lo scopo dichiarato del libro è quello di evitare «frodi» da parte dei fornitori e delle aziende agli artigiani e ai contadini sui prezzi, sulla base dei continui cambi di unità di misura, fatto tipico all'epoca; bastava infatti spostarsi di poco, di comune o di regione, per trovare tutt'altro genere di unità e riuscire a tenere tutto sotto controllo era un'impresa disperata nella quale certo aveva la peggio l'umile, l'ignorante, a favore del quale si muove l'Autore.

Anche l'occasione è dichiarata esplicitamente; di lì a pochi anni sarebbe entrato in vigore il sistema metrico decimale che avrebbe messo fine a quella baraonda di sistemi locali ma che, lì per lì, creava, a sua volta, un bel bailamme.

Mi si permetta un ricordo personale; ero in Scozia per motivi di studio e ricerca quando la Gran Bretagna decise di aderire al sistema metrico decimale, alcuni decenni fa. A tutti gli artigiani e negozianti veniva dato in omaggio una specie di disco ruotante multiplo che permetteva le conversioni più importanti; ma la gente lo odiava e faceva una grande fatica a usarlo, anche persone di una certa qual cultura. Alla fine, ha vinto la tradizione, come tutti sappiamo. Immaginate come doveva essere l'accoglienza del sistema metrico decimale nel Piemonte contadino di metà del secolo XIX. Eppure il Bosco vi vedeva la possibilità che finissero certe «frodi» a danno degli umili lavoratori.

Certo, la lingua matematica non sempre è adatta alla volgata, ma l'Autore dice chiaramente che userà un linguaggio non troppo formalmente corretto pur di essere capito; e dunque, non ci si aspetti un linguaggio matematico rigoroso in questo libro, ma solo (o quasi) lingua naturale.

All'inizio, correttamente, il Bosco dichiara quali sono i suoi riferimenti bibliografici e afferma: «Le opere dei chiari professori Giulio, Milanesio, Borghino, il trattato di aritmetica stampato da un Fratello delle Scuole cristiane, mi servirono di norma». Sarò grato a chiunque potrà aiutarmi a risalire da queste righe a citazioni bibliografiche complete. Insiste però nel dire che quella che abbiamo in mano è una seconda edizione migliorata ed accresciuta.

E così inizia la breve opera, nella quale la matematica è presentata come base per poter poi parlare delle unità di misura del sistema metrico decimale ed assomiglia assai ai trattati d'abaco medievali e rinascimentali soprattutto quelli di stile italiano, sia nella esposizione che nei contenuti.

La base della matematica (non dell'aritmetica, ma proprio della matematica: della geometria non è mai citato il nome) sono «le quattro operazioni»; si tratta di quelle che noi chiamiamo oggi ‘operazioni razionali’ (perché sono chiuse in Q, insieme dei numeri razionali, facendo qualche opportuna e doverosa restrizione nella divisione per l’uso dello zero come divisore): l’addizione, la sottrazione, la moltiplicazione e la divisione.

Come nei trattati d’abaco medievali e come nei manuali per la scuola primaria, non si fanno troppe differenze fra i vari insiemi numerici; si parla di N, insieme di numeri naturali, senza dirlo mai; non ci sono i numeri interi, tanto lo scopo sono quelle misure dove servono numeri assoluti; e, d’improvviso, appare la virgola, come se questo fatto potesse aver luogo in N.

Ma attenzione, lettore, questo non è un testo di matematica, questo è un prontuario per passare da vecchie unità di misura a nuove; e la matematica che vi si introduce ha puro scopo algoritmico e di servizio, nessuno scopo teorico.

Un’idea geniale è quella di servirsi di dialoghi per introdurre le varie problematiche, consolidarle e aprire la strada a problemi; si susseguono dunque domande D e risposte R, fin dall’inizio, quando il tema è la base dell’aritmetica, sempre in linguaggio naturale colloquiale, fino alla fine del manuale, in stile pedagogico maieutico didascalico: per fare questo e questo, si fa così e così.

I dialoghi portano sempre a una problematica (nel primo, per esempio: Per fare le operazioni bisogna conoscere i numeri) che viene di seguito affrontata: Regole per conoscere i numeri.

Si scrivono e si denominano i numeri, meglio per noi sarebbe dire le cifre; come nei manuali medievali, lo zero vien posto dopo il 9 con queste parole: «0 non significa nulla e serve solo per rimpiazzare le altre cifre» e a far crescere i valori.

Non ci sono limiti alla grandezza dei numeri, si danno scritture in parole e in cifre dei numeri naturali subito fino a mille milioni che sono chiamati ‘un bilione’.

Al termine di una unità, subito appaiono pochi e specifici esercizi relativi ad essa, e poi prosegue il dialogo che porta a nuove necessità teoriche e formali.

Le denominazioni aritmetiche proposte sono per lo più arcaiche, sparite da tempo dalla nostra lingua; per esempio i termini di una addizione (oggi detti ‘addendi’) sono qui detti ‘poste’.

Impariamo un sacco di cose, curiosità e fatti storici; per esempio che la moneta allora in circolazione in Piemonte era il franco, ma vi torneremo; apprendiamo che Torino contava all’epoca 140.000 abitanti, oggi ne conta un milione.

Molte sono le preoccupazioni di tipo teorico; per esempio che si possono sommare franchi con franchi, ma non franchi con rubbi, unità di misura di capacità per materiali non liquidi, come il grano, per esempio. Oggigiorno si considera addizione solo un’operazione fra numeri, e non fra oggetti o qualità; la domanda tipica dell’epoca era se si potessero addizionare 3 mele con 2 pere, con varie risposte che potrei qui citare e analizzare; la tendenza odierna è di dire che il verbo addizionare riguarda i numeri (3 e 2) e non gli oggetti cui quei numeri fanno eventualmente riferimento come quantità.

E poi ci sono le preoccupazioni di tipo formale; l’Autore insegna ad addizionare in colonna in un modo identico al nostro; più complessa è la prova della correttezza dell’addizione per eseguire la quale bisogna saper dividere a metà le singole ‘poste’ (addendi) che compaiono nell’addizione (operazione, il dividere a metà, che non è ancora stata affrontata).

Seguono esercizi sull'addizione, cioè situazioni problematiche elementari per risolvere le quali si deve eseguire un'addizione; si noti che la struttura è quella seguita oggi nei testi scolastici per gli allievi di primaria con la differenza che, in questi ultimi, quelli che sono esercizi vengono impropriamente chiamati 'problemi' e che sono sempre tanti, spesso un numero eccessivo; in questo libro del Bosco, sono sempre pochissimi.

Questa è la struttura che si ripete; segue un dialogo per introdurre la sottrazione, i suoi termini, l'algoritmo in colonna. In esso, vengono distinti i casi in cui bisogna ricorrere al prestito e, quando ci sono delle cifre 0, allora il metodo diventa più specifico e spiegato nei dettagli, con vari esempi trattati a lungo.

La prova della correttezza della sottrazione è quella usuale: per verificare cha $a–b$ dia $c$ si addiziona $c$ con $b$ per ritrovare $a$. E poi, seguono esercizi sulla sottrazione. Dialogo sulla moltiplicazione introdotta come addizione ripetuta e subito le tabelline moltiplicative, quelle che molti chiamano 'pitagoriche', ma tralasciando le inutili; per esempio, la tabellina del 4 inizia da $4\times4$ e prosegue con $4\times5$ e così via, dato che $4\times2$ e $4\times3$ sono già stati studiati nelle tabelline del 2 e del 3 sotto forma di $2\times4$ e $3\times4$ rispettivamente. Dunque, per esempio, la tabellina del 9 si riduce a $9\times9$. Non c'è il caso 0 né 1 né 10.

A questo punto viene introdotto l'algoritmo della moltiplicazione, quello stesso più in uso oggi in Italia; la prova che viene proposta è la classica cosiddetta 'prova del 9'. Seguono alcuni esercizi sulla moltiplicazione.

Voglio notare, a questo punto, che i testi degli esercizi proposti non sono neutri e indifferenti al lettore; vi è spesso in essi una morale sottesa che qualcosa insegna:

> 1. Un padre spende in giuoco e ghiottonerie fr. 7 in ogni domenica;
> quanto scialacquerà in 52 settimane ovvero in un anno?
> 2. Un figlio consuma in gozzoviglie e fumare tabacco 2 fr. per settimana,
> quanto avrebbe infine dell'anno astenendosi da tali vizi?

Si tratta di messaggi nascosti di una certa efficacia: se il figlio non gozzoviglia e non fuma, alla fine dell'anno si ritrova in tasca un gruzzolo di 100 franchi circa, una bella sommetta … Meditate, giovani artigiani Piemontesi!

E poi apprendiamo molto dall'uso di unità di misure locali, continuamente citate:

> 5. Quanto si deve pagare per 85 brente di vino a fr. 12 la brenta?
> 6. Quanto si deve pagare per 223 emine di fromento a fr. 5 l'emina?

Si riprende con la stessa tecnica, un dialogo sulla divisione, seguito dall'algoritmo della divisione, lo stesso che si insegna in Italia ai bambini di oggi.

Due note: la prima è che gli esempi fatti sono tutti con resto nullo; la seconda è che l'autore avvisa che la divisione può «patire qualche eccezione» con gli attuali sistemi di misura ma che, con l'introduzione del sistema decimale, queste non ci saranno più.

Fa anche cenno alla parola 'frazione', ma solo in senso colloquiale non matematico; curiosamente, il tema matematico non è mai nemmeno sfiorato.

La prova della divisione $a:b=c$ è ragionevole: si moltiplica $b\times c$ per ritrovare a. Non si pongono casi 'strani' nei quali appare 0 a dividendo o divisore, tanto nella pratica queste sottigliezze non servono.

Seguono gli esercizi sulla divisione che, per gli stessi motivi di cui sopra, voglio evidenziare:

> 1. Un signore, mosso da vero spirito di carità, assegna fr. 233 da distribuirsi a 9 povere famiglie. Quanti fr. toccheranno a ciascuna?
> 2. Un ragazzo generoso vuole regalare 500 noci a 20 suoi compagni; quante ne avrà ciascuno?

Si noti che nell'esercizio 1., dato ma non risolto, la divisione 233:9 non dà resto zero …

A questo punto, la matematica di base che serve per il vero scopo del libro è stata tutta esposta; o almeno sembra: mancano i numeri razionali del tipo 0,1 oppure 0,01 che sono fondamentali nel sistema metrico decimale: ma vedremo come il Bosco sistema questa cosa in maniera concreta, senza troppa teoria.

Ci siamo dunque, l'aritmetica è finita, arriva il tanto atteso dialogo sul sistema metrico decimale, la vera novità del libro.

Il metro viene introdotto:

1. rispetto alle misure di lunghezza d'uso locale, alle quali contadini e artigiani sono abituati;
2. con la famosa definizione che chiama in causa la dimensione della Terra.

Scrive infatti Bosco: «La parola metro significa misura, ed è lungo 23 oncie 113 del piede liprando. Questo metro è la diecimilionesima parte del quarto del meridiano terrestre, ossia della circonferenza della terra. Vale a dire se intorno alla terra si tirasse un filo, e che questo filo si dividesse in quaranta milioni di parti uguali, una parte formerebbe la lunghezza del metro».

Sappiamo che questa misura si fa risalire all'Accademia delle Scienze di Francia e stabilita nel 1791 e che divenne ufficiale nel 1795 in Francia.

Ma un ingenuo contadino o un tranquillo operaio si chiedono a che cosa serva tutto questo cambiamento. Seguiamo le sagge e illuminate parole del Bosco:

> D. Perché si vuole preferire questo nuovo sistema all'antico che già abbiamo in uso? R. Per più ragioni, tra cui quella che rende molto più facile il calcolo, ma quello che è più, essendo il metro in tutte le parti del mondo uguale, si eviterà la grande varietà di pesi e di misure che occorrono ne' varii stati, come nel nostro regno, e talora in una medesima provincia. Per questa diversità di pesi e di misure uno va esposto ad errori ed inganni di ogni genere. Il che di leggieri si eviterà in tutti quei luoghi in cui si farà uso del nuovo sistema.

Vengono introdotte a questo punto tutte le unità di misura del SMD, ma tutto viene basato sul metro, anche il peso e la capacità, e perfino il valore monetario in modo non chiarissimo:

> Il franco risulta anche dal metro giacché pesa cinque grammi, ovvero la sesta parte dell'oncia.

Si noti che il termine «lira» è considerato superato, rispetto al più moderno «franco»; il valore del franco è stabile, il valore della lira cambia di zona in zona e dunque deve essere abbandonato. Vengono introdotti i prefissi: etto, deca, miria etc. E, a questo punto, i sottomultipli e le scritture con la virgola, per necessità e simbolismo, e senza riferimenti alla matematica: 0,1; 0,01; e così via. Cioè: non c'è alcuna giustificazione o premessa teorica, un decimo di qualcosa si scrive 0,1 punto e basta.

A questo punto si danno tutte le conversioni dalle vecchie unità di misura di tutte le tipologie di grandezze nelle nuove, con opportune tabelle e schemi, molto efficaci.

Solo alcune note curiose: le misura di capacità antiche distinguono i liquidi dalle 'materie asciutte' ma nel sistema nuovo questa distinzione cessa; eppure sappiamo che a lungo, e ancora oggi, in molte parti del mondo, esistono unità di misure per la capacità che non hanno a che fare con il litro o con il decimetro cubo. Per esempio, qui in Colombia, nella quale vige il sistema decimale ufficialmente, mi sono dovuto abituare a comprare la benzina in galloni (un gallone è circa 3,8 l) perché il prezzo è espresso in galloni e il display del distributore misura in galloni (un gallone di benzina costa circa 8000 pesos, dunque più o meno 3,2 €; dunque un litro di benzina costa meno di un euro); mentre la capacità del latte (e in genere degli altri liquidi commestibili) è espressa in litri e quella dei contenitori di patate si dà in *bultos* che non misurano il peso, ma la capacità, appunto (più o meno 50 kg massa).

Naturalmente, anticamente, in ogni Paese e dunque anche in Piemonte, c'erano molte più unità di misura assai diverse a seconda dell'oggetto in questione: misure per le legna, fieno, ghiaia e simili; ora, come dice anche Bosco, tutto questo tende a sparire, l'unità di misura non dipenderà più dall'oggetto misurato.

Ma, si sa, ci sarà resistenza, la gente farà fatica ad adattarsi; ed ecco allora apparire l'analogo di quei cerchi concentrici che ho visto in Scozia; nel libro di Bosco sono sostituiti da comode tavole comparative.

Lasciatemi dire a questo punto che sono strabiliato e commosso, nonché ammirato, dalla grande competenza dell'Autore per quanto concerne la vita dei campi e degli artigiani, vita che egli conosceva assai bene, come sappiamo dalle sue numerose biografie.

Torniamo al libro: a questo punto sono entrati in circolazione i numeri decimali, cioè quelli per la cui espressione formale si richiede una virgola e quindi si rende necessario, questa volta al contrario, un bel dialogo sull'addizione decimale e regole relative, con esercizi finali; seguono sottrazione, moltiplicazione e divisione tra numeri decimali, con lo stesso stile, con specifiche regole per moltiplicare e dividere per 10 e suoi multipli.

Naturalmente, oramai la divisione non ha più resto zero e dunque si fa uso della virgola per trovare il quoziente, cosa non necessaria (o, meglio, tenuta celata) qualche decina di pagine prima.

Segue una nuova tavola di conversione con numeri fissi per trasformare un'unità di misura antica in quella moderna e viceversa (viene fatto esplicito riferimento al Piemonte); e segue un dialogo specifico per spiegare come si applicano questi numeri fissi, una specie di eserciziario con tanti esempi diversi. Non solo si mostra come si fa, ma viene anche spiegato come si trovano questi numeri fissi, ovviamente paragonando tra loro multipli di misure antiche alle nuove, multipli scelti in modo opportuno.

Questo è il tema più a lungo trattato e, d'altra parte, è forse quello più concreto e necessario ai lavoratori cui l'opera è destinata; ritengo sia molto probabile che un contadino o un operaio saltasse la prima metà del libro, per usare queste tavole.

Sotto la voce «ragguaglio», abbiamo ora una sezione curiosa; per abituare i lavoratori dei campi e gli artigiani a valutare ad occhio le nuove misure, così come erano abituati a fare con le vecchie, viene data una tabella di… conversione ad occhio, per esempio:

> 1 centimetro ha circa la larghezza dell'unghia del dito mignolo.
> 2 centimetri corrispondono alla grossezza del dito di un uomo.
> 1 decimetro alla larghezza della mano.
> 2 decimetri alla spanna ordinaria di un uomo.
> 1 metro ha 10 volte la larghezza della mano.
> 1 metro corrisponde ad un lungo passo.

Un'appendice a parte sotto forma di dialogo è riservata al valore monetario; mi piace in particolare questa domanda con relativa risposta:

> D. Che cosa intendesi per monete?
> R. Diconsi monete quei pezzi d'oro, d'argento o di rame che servono a valutare il prezzo d'un oggetto o d'un lavoro.

Vi appare un tema che sarà assai caro ai contemporanei marxisti, il lavoro come merce con un suo proprio valore. I tempi sono maturi per queste considerazioni sociali e, certo, un difensore dei diseredati non può che cogliere questi aspetti, anche se in modo fugace.

Altra piccola nota: tra le monete non sono previste quelle cartacee.

Seguono una serie di tabelle di trasformazioni fra i valori delle monete in corso, non solo in Piemonte, assai utili oggi come notizia storica ghiotta per i curiosi come me. Finisce il tutto, senza alcun commento, ma con la parola FINE scritta al centro in grassetto, come fosse l'epilogo di un film; segue l'indice che chiude.

Si rincorrono in quest'opera aspetti tipicamente medievali e moderni, aspetti sociali ed etici, aspetti meramente pratici; ma quel che colpisce è il rispetto per i deboli, il desiderio di creare per loro uno strumento non dico di emancipazione, ma di difesa; e trovo attraente e notevole il fatto che Bosco non ricorra alla preghiera e al perdono, come avrebbero fatto altri santi, ma alla cultura scientifica, anche secondo me vero baluardo e vera arma per l'emancipazione e la crescita del rispetto delle classi meno fortunate.

Nella classica diatriba teologica, nella quale Dante è maestro ma che fu trattata da Agostino di Tagaste, fra 'spirito contemplativo' e 'spirito attivo', tutta la storia di Giovanni Bosco testimonia che è possibile scegliere il secondo e questo libro, in ogni sua riga, ne è una testimonianza.

# 4. Le parole «difficili»

Giorgio Mainini

In mathematics, but not only, you can encounter «difficult» words as apothem, homothety, parallel, trapeze,... which, for a novice student, represent an additional difficulty in learning the discipline. However, if one knows what the etymology of these words is, confusion would most likely be avoided and one would understand these terms better. In this paper we will present the etymology of some «difficult» words, thinking mainly about the students in the first 9-10 years of schooling, and we show how words «external» to mathematics are related to some «internal» words. One will also draw the attention to «false friends», words which seem to have the same origin but that, in fact, originate differently.

## 1. Introduzione

Durante un corso di geometria per docenti di Scuola elementare una maestra osservò che i suoi allievi, come tutti i loro coetanei, nei primi anni di scuola sono inondati, o investiti, da una gran quantità di parole nuove e difficili come «parallelo», «perpendicolare», «diagonale», «isoscele», … Capita quindi con una certa frequenza che, pur avendo la risposta giusta, la sbaglino perché confondono le parole: «le diagonali di un quadrato sono *parallele*». In realtà sanno benissimo come sono, ma la confusione con *perpendicolari* li ha traditi. Il problema si ripete anche alla Scuola media (omotetia, simmetria, polinomio, …) e anche dopo (logaritmo, isomorfismo, …). E non solo a matematica: metafora, litote, strofa, endecasillabo, isobara, isoipsa, conurbazione, xilografia, osmosi, idrolisi, perigonio, epatite, miocardio e chi più ne ha più ne metta.

Qualche riflessione è opportuna.

Tanto per cominciare, molte parole «difficili» potrebbero benissimo essere sostituite: *metafora*, per esempio, non significa altro che *portato di là*, quindi andrebbe bene, per esempio, *trasporto*. L'idea della primavera con lo spuntare delle foglioline *verdi* viene trasportata nell'espressione «gli anni *verdi*» o la resistenza di un certo metallo ci fa dire «avere una salute di ferro». Allo stesso modo *litote*, dal greco *litòtes* (semplicità) potrebbe essere sostituito, in una delle sue accezioni, da *attenuazione*: «non mi sento troppo bene» invece di «sto male». Ma qui sto andando oltre i calzari.

Poi: l'idea di fare economia di pensiero dovrebbe indurci a pensare che «diagonale», «diametro», «diapositiva» avranno pur in comune qualcosa: che cosa significa *dia*? E «sinedrio», «poliedro», «cattedra» dovrebbero far sorgere la curiosità sul significato di *edr*. È quindi pensabile che, conoscendo un certo numero di «pezzi base» si possa risalire, anche se con qualche approssimazione, al significato di parole sconosciute.

Infine: perché non pensare all'interdisciplinarietà? Una collaborazione tra insegnanti di italiano, matematica, geografia, scienze naturali e altre ancora (penso a teologia, vescovo, vangelo, epifania, Pasqua, scoliosi, lordosi, barella, Germania, …) troverebbe in questo campo una vasta applicabilità.

## 2. Un primo elenco di parole

Ora vengo al sodo, con qualche premessa:

- l’elenco che segue è evidentemente incompleto: tratta solo di parole che si incontrano nella matematica della SE e della SMe, e nemmeno di tutte;
- la trascrizione dal greco antico è un po’ a «alla buona». La ϑ (una z dura, come la doppia z di «carezza», che altri pronunciano come il th inglese di «the» e altri ancora semplicemente t) è resa con th, la χ (che suona come il ch del tedesco «ich») con ch, la ψ (psi) con ps, la vocale υ con ü, la γ (che in greco è sempre dura come la g in «gusto») con gh, la ξ (csi) con x, il dittongo greco ου (da pronunciarsi u) con u, Inoltre non ho fatto la distinzione tra ε (épsilon, e corta) e η (eta, e lunga) né tra ο (òmicron, o corta) e ω (òmega, o lunga); la trascrizione dall’arabo è ridotta all’essenziale, senza segni diacritici[1];
- per non sempre ripetere «gr.» e «lat.», le parole greche saranno in **grassetto** e quelle latine in ***grassetto corsivo***;
- parecchi lemmi sono seguiti da parole non necessariamente attinenti alla matematica: l’intento è quello di favorire l’insegnante che voglia ampliare il discorso;
- alcuni sono seguiti anche da «**Attenzione**», dove sono elencati vocaboli che sembrano avere lo stesso etimo, ma che invece sono di altra origine;
- parecchi etimi sono ripetuti: lo scopo è quello di permettere di «incrociarli», così da favorirne l’apprendimento;

1. Vedi http://it.wikipedia.org/wiki/Segni_diacritici
e http://it.wikipedia.org/wiki/Traslitterazione_dall%27arabo

**acuto**
***acutus*** da ***acuo***: appuntire, aguzzare. Si pensi a ***acus***: ago.

**addizione**
***additio***, da ***àddere***: aggiungere.

**adiacente**
***ad*** accanto, ***iacére***: giacere.

**algebra**
arabo *al-giabr*: unione, connessione, completamento. Deriva dal titolo del libro *Al-Kitab al-mukhtasar fi hisab al-giabr wa'l-muqabala* (Compendio sul calcolo per completamento e bilanciamento) del matematico, astronomo, astrologo e geografo persiano Abu Ja'far Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (ca. 780 – ca. 850). al-Khwarizmi indica la regione dove nacque, il Khwarizm, regione dell'Asia Centrale, ed è l'etimo di «algoritmo».

**algoritmo**
arabo, da al-Khwarizmi, *nisba*[2] del matematico, astronomo, astrologo e geografo persiano Abu Ja'far Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (ca. 780 – ca. 850). Procedimento di calcolo esplicito e descrivibile con un numero finito di regole che conduce al risultato dopo un numero finito di operazioni.

**apotema**
**apò**: giù, **thèma**, da **tìthemi**: mettere, porre. **thèma** è strettamente imparentato con **thésis** (v. il lemma). Nel linguaggio dei matematici medioevali: «segmento di grandezza determinata collocato in una posizione determinata».

**area**
***area***: piazza, campo. Estensione di una superficie, da non confondere con «superficie».

**aritmetica**
**arithmòs**: numero.
uno: **èis**, (**mìa**, **èn**); due: **düo**; tre: **trèis** (**trèis**, **trìa**); quattro: **tèssara**/**tèttara**; cinque: **pénte**; sei: **èx**; sette: **eptà**; otto: **oktò**; nove: **ennéa**; dieci: **déka**; undici: **éndeka**; dodici: **dòdeka** o **düokàideka**; tredici: **treiskàideka**; venti: **èikosi**; cento: **ekatòn** (ecatombe: sacrificio di cento buoi); mille: **chìlioi**, diecimila: **müriοi**/**müria**. Zero per i greci (e non solo per loro) non era un numero: per indicare mancanza avevano le parole **udèis**: nessuno e **medèis**: nessuno, niente. In greco moderno, zero è **medèn**, forma neutra di **medèis**. Per quanto segue: **mégas**: grande; **gìgas**: gigante; **téras**: mostro, prodigio.

2. *Nisba*: nell'onomastica araba indica il luogo di appartenenza o di provenienza geografica, reale o simbolica, recente o antica. Il nostro era nativo di Khwarizm, regione dell'Asia Centrale.

Dai nomi dei numeri così come trascritti sopra si formano i nomi dei poligoni e dei poliedri. Modificati in modo «strano» formano i prefissi per le potenze di mille, per esempio in informatica: kilo: $10^3$; mega: $10^6$; giga: $10^9$; tera: $10^{12}$; peta: $10^{15}$; exa: $10^{18}$; zetta: $10^{21}$; yotta: $10^{24}$. Per la memoria: a partire da tera, quante sono le triplette di 0 (zeri). Ed.: exa: sei triplette di 0, cioè 18 zeri. Una curiosità: per un motivo storico/cronachistico, il numero $10^{100}$ viene chiamato googol, da cui Google. Un'altra curiosità: la triscàidecafobia (**fòbos**: paura, come **dèima**: terrore. Fobos e Deimos [figli di Ares/Marte, sono le divinizzazioni del terrore suscitato dalla guerra] sono i nomi dei due satelliti di Marte) è la paura irragionevole del numero tredici.

**assioma**

**axìoma**, per alcuni da **àxios**: degno, per altri da **axióo**: stimare, ritenere giusto (a me pare la stessa cosa, ma…): considerazione, cosa ritenuta giusta per una sua intrinseca evidenza[3].

**base**

**bàsis**: piedestallo, fondamento, piede, base, da **bàino** andare, camminare.

**calcolo**

***calculus*** (dim. di ***calx***: sasso, ghiaia): sassolino, pietruzza. Si pensi all'abaco o all'uso di rappresentare i numeri (figurati) disponendo sassolini. Pure sassolini sono, naturalmente, anche quelli renali e biliari.

**cateto**

(**katà-**: all'ingiù) **kàthetos** da **kathìemi** calare. **kàthetos** è aggettivo, riferito probabilmente a linea. Linea tirata giù, nel senso di perpendicolare. Curiosamente, «catètere» ha la stessa etimologia: mandar giù (o mandar dentro, per chi ha già avuto il piacere…). **kata-**: all'ingiù, ma anche contro, verso, in vista di, secondo, sopra (a scelta…). cataclisma (**klüso**: bagnare, lavare. Si pensi anche a clistere, cloaca e chiavica, da cloaca), catafratto (*katà*: sopra, **fràsso**: proteggere: coperto d'armatura, da catafratta), catalessi (**lambàno**: prendere, afferrare, che ha una forma verbale in **leps-**. In neuropsichiatria, stato in cui il paziente appare irrigidito, come se fosse afferrato dalla volontà di un altro), catalisi (**lüo**: sciogliere), catalogo (*katà*: secondo, **lògos** da **légo**: raccogliere, adunare, contare, discorrere, affermare: enumerazione ordinata), catapulta (*katà*: contro, **pàllo**: brandire, lanciare), catarro (*katà*: in giù, **réo**: scorrere), catarsi (*katà*: insù, **àiro**: elevare. Purificazione. Stesso etimo di catari: netti, puri [e forse di Caterina]. Eretici dualisti medievali - albigesi, manichei, pubblicani o pauliciani, ariani, bulgari, bogomili ecc. e in Italia patarini -, diffusi soprattutto nella Francia settentrionale e meridionale nel XIII secolo), catarrine (*katà*: all'ingiù, **rìs**, **rinòs**: naso. Scimmie con le narici rivolte in basso), catastrofe (*katà*: all'ingiù, **stréfo**: girare, rivolgere: rivolgimento, capovolgimento, sconvolgimento. Da **stréfo** anche strofa), catechesi/catechismo (*katà*: (in giù), **echéo**: fare eco. Forma di istruzione nella quale si ri-

3. Sulla differenza tra assioma e postulato, vedi per esempio http://www.treccani.it/enciclopedia/assioma/

chiede dal discente la ripetizione delle parole del docente), categoria (*katà*: secondo, **agoréuo**: tenere un discorso [in piazza: **agorà**]. Classificazione: si pensi a come organizza il suo discorso un oratore), cateratta (*katà*: all'ingiù, **règnümi**: rompere, spaccare. Parte dirupata dove le acque si precipitano dirompenti), catodo (*katà*: all'ingiù, **odòs**: cammino, strada. Discesa: la denominazione, introdotta da Faraday, deriva dal fatto che il verso della corrente elettrica è dall'anodo verso il catodo, secondo potenziali decrescenti. **ànodos**, anodo, ovviamente, significa salita), cattedra/catedra/dial. cadrega (*katà*: sopra, **édra**: sedia, trono). **Attenzione**: catalano, catalpa (spagn. *catalpa*, forse da sioux *catawba*: famiglia di piante), catamarano (tamil *kattu*, legare, *maram* albero), catana (o katana: spada giapponese a lama curva e a taglio singolo di lunghezza superiore ai 60 centimetri usata dai samurai), catanzarese, catanese, catapecchia (etim. incerta), catena, caterva, catering (inglese *to cater*: rifornire, provvedere di cibo).

**cartesiano**

da Cartesio, nome latinizzato di René Descartes (La Haye en Tourenne 1596 – Stoccolma, 1650)

**centro**

**kéntron**, da **kentéo**: pungere. Buco lasciato dal compasso.

**cerchio/circolo**

***circulus***, diminutivo di ***circus*** circo, orbita; edificio a pianta allungata.

**cilindro**

**külìndo**: rotolare.

**circonferenza**

***circum***: attorno, *****ferentia*** da ***ferre***: portare. Linea portata, tracciata attorno. Se vista come un'ellisse speciale, la si può definire come una curva di eccentricità 0 (zero).

**compasso**

***cum*** con, ***passus***: passo, piccola unità di misura. Strumento che serve a fare passi come gli altri, a riportare un segmento di data lunghezza.

**congettura**

***coniectura***, da ***conìcere***, (***cum-iàcere***: gettare insieme): riunire in un solo punto, interpretare. Giudizio fondato su vari indizi, che si mettono assieme.

**congruente**

***cum*** insieme; *****grùere*** verbo solo supposto: andare (?) combaciare, coincidere, corrispondere. **con-/com-/co-**: consecutivo (***sequor***: seguire. Quindi: che segue standogli insieme, vicino), concatenare, concausa, concedere (***cédere***: cedere, arrendersi, camminare, da cui anche incedere), concepire (***càpere***: prendere, accogliere in sé), concilio (***calare***: convocare, chiamare), concistoro (***sìstere***: fermarsi, stanziare), compagno (***panis***: pane. Quindi commensale; per altri da ***pagus***: villaggio. Quindi compaesano), combinare (***bini***: due: accoppiare, poi per estensione mettere insieme), compasso (***passus***: passo, piccola unità di misura), coincidere (***in***: dentro, ***càdere***: cadére), correggere. Per ridere: «coprodotto»: di film prodotto da parecchi enti, ma dovrebbe essere «comprodotto»; propriamente: **kòpros**: sterco, ***dùcere***: condurre. Quindi fognatura, … **Attenzione**: conato, conceria, comasco, comando, colesterolo, …

**cono**

**kònos**: pigna, strobilo, «frutto» delle conifere.

**corollario**

***corolla*** (diminutivo di ***corona***, corona). Proposizione che si ricava da un'altra, come un petalo che esce dalla parte centrale del fiore.

**cubo**

***cubus***, **kübos**: dado.

**diagonale**

**dia** attraverso; **gonìa** angolo. Che attraversa un angolo.

**dia-**: diametro (**métron**: misura, da **metréo**: misurare), diaspora (**sporà**: seme, da **speiro**: seminare, da cui anche sperma), diacronico (**chrònos**: tempo, periodo), diabete (**bàino**: andare, perché i liquidi se ne vanno attraverso l'urina), diavolo (**bàllo**: gettare, colpire, ferire, perché «colpisce di traverso», cioè calunnia), diafano (**fàino**: apparire, da cui anche epifania), diaframma (**fràgma**: palizzata), diagnosi (**gnòsis**: nozione, conoscenza: venir a sapere mediante i sintomi), diagramma (**gràfo**: scrivere, mostrare con uno scritto o un disegno), dialisi (**lüo**: sciogliere), diapositiva, diarrea (**réo**: scorrere), diatermia (**thermòs**: caldo), … **Attenzione**: diamante, diario, Diana (= diana, del giorno [***dies***], luminosa), diazocomposto (composto organico aromatico contenente un gruppo caratteristico costituito da due atomi di azoto uniti da doppio legame).

**-gono**: poligono, goniometro, tetragono (che ha 4 angoli, quadrato, ma anche irremovibile, fermo, resistente. V. inglese *square*. Dante: *avvegna ch'io mi senta Ben tetragono ai colpi di ventura* [*Par.* XVII, 23-24]), trigonometria, … **Attenzione**: **gono-**: primo elemento di parole composte della terminologia medica e biologica, da **gònos**: seme, generazione, indicante relazione con gli organi della generazione. Es.: gonococco, gonorrea.

**dimostrazione**

***de***: a proposito di, intorno a; ***monstrare***: indicare, far vedere.

**divisione**

***divìdere*** dividere. Propriamente separare, fare più parti.

**ellisse**

**ellèipsis**: mancanza, da **lèipo**: lasciare indietro, abbandonare, mancare, eclissarsi. Un modo moderno, cioè non alla greca, di capire il «mancare» consiste nel definire l'ellisse come una curva di eccentricità minore di 1.

**equilatero**

***aequus*** uguale, ***latus***, ***lateris*** lato, propriamente fianco del corpo umano. **equi-**: equilibrio (***libra***: peso, bilancia), equinozio (***nox***, ***noctis***: notte), equivoco (***vox***, ***vocis***: voce). **Attenzione**: equino (***equus***: cavallo), equipaggio (francese *équiper*: fornire del necessario per esercitare un'attività. Propriamente imbarcarsi, antico germanico *skip*: barca), equiseto (***equus***, ***saeta***: pelo, crine).

**esponente**

***ex***, fuori; ***pònere***, porre, mettere. Messo fuori, messo, in qualche modo, in evidenza. **es-**, **e-**, **s-**: erudire (***rudis***: rozzo); esagerare (***agger***: argine, terrapieno, trincea); esame (***examen***: ago della bilancia, da ***exìgere***: pesare); esangue (***sanguis***: sangue. Senza sangue, quindi stanco, morto); esasperare (***asper***: aspro); esaudire (***audìre***: ascoltare); escludere (***clàudere***: chiudere, da cui anche chiave, conclave); …; sbocciare (uscire dal boccio); sbucciare; scamiciare, scarcerare; … **Attenzione**: composti con esa- (**èx**: sei): esagono, esaedro, esarca, …

**euclideo**

da Euclide. Di lui si sa pochissimo: probabilmente nacque intorno al 320 a.C. e morì intorno al 290 a.C. Secondo Proclo ha lavorato a Alessandria d'Egitto durante il regno di Tolomeo I. Considerato tra i massimi matematici dell'antichità classica, è autore degli «Elementi», opera in 13 libri sulla geometria piana (i primi sei), sui rapporti tra grandezze (i successivi quattro) e sulla geometria solida (gli ultimi tre).

**frazione**

***fractus***, rotto, da ***fràngere***, spezzare, rompere, fare dei pezzetti, dividere in parti. frattura, frattale, frangivento, frana, frangia, fragile, frammento, fragore (che rompe i timpani), frangente, frantoio, … In dubbio: fracassare (probabile incrocio di ***fràngere*** con ***quassàre***, intensivo di ***quàtere***, scuotere) e frasca (forse nel senso di ramo staccato dall'albero). **Attenzione**: fragola, fragrante (da ***fragràre***: avere odore), franco (libero da tasse), francese, e tutti i composti con fra- (in mezzo).

**geometria**

**ghè**: terra, **metrìa** da **mètron**: misura. Propriamente l'arte di misurare la terra (si pensi al moderno geometra). **ghè-**: geografia, geologia, geodesia (**daio**: dividere, distribuire), georgica, Giorgio (**èrgon**: lavoro; azione, opera: agricoltore. Da **èrgon** anche energia; demiurgo; **dèmios**: pubblico, da **dèmos**: popolo: propriamente lavoratore pubblico. Nella filosofia platonica il dio artefice dell'universo), … per **-metro** e **metro-** vedi il lemma.

**incommensurabile**

***in*** particella che nega, ***cum***: insieme, ***mensurabilis*** da ***mensura***; misura. Che non può essere misurato con la stessa unità di misura di qualcosa d'altro. ***mensus*** è forma del verbo ***metìri***: misurare. Si pensi a **métron**. **in-/il-/im-/ir-**: incerto, invisibile, …, illogico, illegale, …, immaturo, impossibile, …, irregolare, irrazionale, … **Attenzione 1**: «incommensurabile» è un aggettivo della stessa famiglia di «maggiore», «uguale», … che non possono essere usati «da soli», ma solo in relazione con qualcosa d'altro. Per esempio, dire «La ricchezza di Bill Gates è incommensurabile» è dire una sciocchezza. **Attenzione 2**: composti con ***inter-***: tra, in mezzo; durante, mentre; di, tra (partitivi); indicante relazione; prefisso verbale: invasare, intenerire, indietreggiare, … Anche se talvolta mantiene il significato latino di «dentro»: incanalare, infondere, incorniciare, …

**intersezione**

***inter***: fra, ***sectio***, da ***secàre***: tagliare. L'insieme dei punti appartenenti a due figure.

**iperbole**

**üpèr**: sopra, **bàllo**: lancio; sovrabbondanza. Un modo moderno, cioè non alla greca, di capire il «sovrabbondanza» consiste nel definire l'iperbole come una curva di eccentricità maggiore di 1.

**ipotenusa**

**üpò** sotto, **tèino** tendere: linea tesa sotto.

**ipo-**: ipocalorico, ipocentro (**kéntron**, da **kentéo**: pungere. Punto interno della crosta terrestre in cui ha origine un terremoto), ipocondria (**chòndrios**: cartilagine del diaframma costale: malessere, noto già in epoca antica, che si riteneva localizzato nella fascia addominale), ipocrita (**üpokritès**: attore, in particolare quello che imitava uno straniero, da **krìno**: separare, distinguere, da cui criterio), ipofisi (**füo**: crescere, generare, da cui anche **füsis**: natura, da cui fisica), ipogeo (**ghè**: terra: sotterraneo. Da **ghè**-: geografia, geologia, georgica, Giorgio, …), ipoteca (**tìthemi**: porre, quindi mettere sotto, impegnare), ipotesi (**thésis**: posizione, ancora da **tìthemi**, quindi supposizione), ipoteso (***tensus***, da ***tèndere***: tendere, stendere, distendere)…

**ipotesi**

**üpò**; sotto, **thésis**: posizione (da **tìthemi**: mettere, porre). Proposizione supposta, supposizione. Per **ipo-**: vedi il lemma «ipotenusa».

**isoscele**

**ìsos** uguale, **skélos** gamba.

**iso-**: isometria (**métron**: misura, da **metréo**: misurare), isomorfo (**morfè**: forma), isotopo (**tòpos**: luogo. Che sta nello stesso luogo, cella, nella tavola di Mendeleev), isobara (**barüs**: gravoso, che preme, linea che unisce i punti della superficie terrestre aventi la stessa pressione atmosferica), isobata (**bathüs**: profondo, da cui anche batiscafo, **skàfos**: nave, carena), isoipsa (**üpsos**: altezza), isoterma (**thermòs**: caldo), isocrono (**chrònos**: tempo, periodo. Es.: pendoli isocroni), … **Attenzione**: isola e derivati.

**lemma**

**lèmma**, da un tema del verbo **lambàno**: prendere. Premessa, quindi proposizione preliminare che si dimostra in vista della dimostrazione di un teorema.

**matematica**

**màthema**, (da un tema di **manthàno**: apprendere, imparare, studiare):

conoscenza, dottrina, scienza, studio. Secondo una tradizione non si sa quanto attendibile, nella scuola pitagorica i discepoli si distinguevano in due categorie: gli acusmatici (da **acòuo**: udire, da cui acustica), che dovevano stare zitti ed ascoltare (pare per un paio d'anni!) prima di diventare, se lo meritavano, matematici, cioè quelli veramente interessati allo studio, all'apprendimento della disciplina.

**-metro e metro-**

**métron**, da **metréo**: misurare. geometria (**ghè**: terra. Si pensi al significato moderno di «geometra»), ettometro (**ekatòn**: cento), chilometro (**chìlioi**: mille), simmetria (**sün**: con), perimetro (**perì**: intorno: lunghezza, del contorno, da non confondere con il contorno stesso), goniometro, manometro (**manòs**: raro, vuoto), barometro (**barüs**: pesante, da cui barione: particella elementare composta di tre *quark*; se composta di un *quark* e di un *antiquark*, la particella è un mesone – **mésos**: mezzo – se puntiforme, come si ritiene, cioè non composta di altre particelle, allora è un leptone – **leptòs**: leggero), anemometro (**ànemos**: vento), dinamometro (**dünamis**: potenza), igrometro (**ügròs**: umido), idrometro (**üdor**: acqua), radiometro (***radius***: verga, raggio di una ruota, poi raggio di un oggetto luminoso, poi raggio di un oggetto emittente onde elettromagnetiche), sismometro (**seismòs**: terremoto), spettrometro (***spectrum***: ***spec-*** da ***spécere*** = ***spìcere***: guardare, ***-ctrum***: che indica strumento [***aratrum***, ***rostrum***]), termometro (**thermòs**: caldo. Attenzione: il termometro misura la temperatura, non il calore), tachimetro (**tachüs**: veloce); metropoli (**pòlis**: città. Presso i Greci la città madre rispetto alle colonie da essa fondate), metronomo (**nòmos**: legge, norma), metrologia (**lògos**: parola, discorso, dottrina). **Attenzione**: metropatia (**métra**: utero, **pàthos**: dolore, patimento, sofferenza, ma anche emozione, passione), metrorragia (emorragia uterina), endometrite,…

**moltiplicazione**

***multus*** molto, ***plicare*** piegare. Propriamente piegare molte volte, poi far crescere di numero o di quantità (il che è vero in N, ma non in Z, né in Q, né in R). Da ***plicare*** anche semplice (***simplex***: ***sim*** da ***sine*** senza, ***plica*** piega): che non ha pieghe, che si vede bene). Spiegare (***ex*** fuori) è togliere le pieghe, quindi rendere semplice.

**monomio**

**mònos**, solo; **ònoma**, nome (con contrazione dei due «òno» in uno solo).

**mono-**: monogamo (**gàmos**: matrimonio); monogramma (**grafo**: scrivere); monolito (**lìthos**: pietra, sasso); monologo (**lògos**: discorso); monomania (**manìa**: pazzia, da **màinomai**: delirare, infuriare da cui anche menade: baccante, propriamente furente, forsennata); monopolio (**pòlion**: vendita. Quindi niente a che fare con **pòlis**: città); monotono (**tònos**: accento); monarchia (**archè**: signoria, governo, potere);…

**omotetia**

**omòs** (anche **òmoios**), simile; **thetòs**, collocato, da **tìthemi**: mettere. Trasformazione del piano o dello spazio in sé stesso per la quale l'immagine è «ugualmente posta» rispetto all'argomento, cioè è disposta in modo tale che segmenti corrispondenti siano paralleli. **omo-**, **omeo-**: omeopatia (**pàthos**: affetto, dolore, emozione, passione); omogeneo (**ghénos**: genere); omonimo (**ònoma**: nome); omoplata (**platüs**: largo: scapola, Da cui anche platano e Platone, il cui nome era Aristocle: il soprannome Platone gli fu dato per la larghezza delle spalle); omosessuale da cui omofobia (omo[sessuale]fobia, **- fòbos**: paura **-**, avversione ossessiva per gli omosessuali); omofilia (**filos**: amico, **filìa***:* amicizia); omologare (**lògos**: discorso: consentire, approvare); … **Attenzione**: òmero; omicidio (***homo***: uomo; ****cidio***: ***caedo***: uccidere o anche ***òccido***: idem)

**opposto**

***ob*** contro, davanti, ***pònere*** porre. Messo di fronte. **ob-/op-**: oppresso (***prémere***: pigiare, calcare), occludere (***clàudere***: chiudere), obiettivo (***iacére***: giacere), occupare (***càpere***: prendere), ossequente (***sequi***: seguire), offendere (***fèndere***: urtare, ferire), obbligare (***ligàre***: legare), opportuno (***portus***: porto. Comodo per giungere a terra, quindi adatto, favorevole)… **Attenzione**: oppio, oplite

**ortogonale**

**orthòs**: diritto, retto, esatto; **gonìa**: angolo

**orto-**: ortocentro (punto di intersezione delle altezze di un triangolo; centro: **kéntron**, da **kentèo**: pungere. Propriamente buco lasciato dal compasso), ortodosso (**dòxa**: opinione, giudizio), ortodonzia (**odùs**, **odòntos**: dente), ortofonia (**fonè**: suono), ortografia (**gràfo**: scrivere), ortopedia (**pàis**, **paidòs**: ragazzo, fanciullo: arte di prevenire e correggere vizi di conformazione), ortottica (**orào**, guardare, vedere [da cui anche panorama, **pan**: tutto], che in certe sue forme presenta il tema **ops**-: branca dell’oculistica, da ***oculus*** occhio), … **Attenzione**: ortomercato, ortofrutticolo, ortolano.

**ottuso**

***obtusus***, da ***obtundere***: spuntare, smussare. Quindi il contrario di «acuto»: appuntito.

**parabola**

**parà**: accanto, vicino; **bàllo**: lancio; quindi paragono, ravvicino, uguaglio. Un modo moderno, cioè non alla greca, di capire l’«uguaglia» consiste nel definire la parabola come una curva di eccentricità uguale a 1. Per para- v. il lemma «parallelo».

**parallelo**

**parà**: accanto; **àllos**: altro. Che sta accanto all’altro. **para-**: parallelogrammo/a (**grammè**, da **gràfo**, scrivere: linea), parallelepipedo (**epìpedos**: piano), parallasse (**allàsso**: cambiare: angolo che si forma tra le direzioni di vista di un oggetto quando si cambia il punto di vista da uno ad un altro che gli sta accanto), parabola (lancio vicino, quindi paragono, ravvicino, uguaglio: l’eccentricità della parabola è uguale a 1; nell’iperbole è maggiore di 1 e nell’ellisse è minore di 1. Nel significato di paragone, allegoria: le parabole evangeliche), parentesi (**en**: dentro; **thésis**: cosa messa, da **tìthemi**: mettere), parastato, parabancario, paradigma (**dèigma**: cosa mostrata, da **dèiknümi**: mostrare), paradosso (**dòxa**: opinione, giudizio), paranoia (**nùs**: ragione, mente), … **Attenzione**: para- può anche derivare da parare, proteggere. Es.: (tiro) parabile, paracadute, parabordo, parabrezza; paradiso (**paràdeisos**: giardino, parco, dall'iranico *pairidaeza*: recinto circolare), … **allo-**: alloglotto (**glòssa**: lingua, idioma, ma anche lingua organo dell'apparato digerente), allofono (**fonè**: suono), allomorfo (**morfè**: forma). **Attenzione**: allocco, allocare (***locus***: luogo. Mettere in un luogo idoneo. Dall'inglese *to allocate* prende il significato di ripartire, ad es. beni fra più enti), allocuzione (***loqui***: parlare), allodola, …

**parentesi**

**parà**: accanto; **en**, dentro; **thésis**: cosa messa, da **tìthemi**: mettere. Per **para-** vedi il lemma «parallelo».

**perpendicolare**

***per***: sopra; ***pendìculum*** da ***pèndere***: essere sospeso, con il suffisso –***ulum*** che fa da diminutivo: filo a piombo.

**piramide**

**püramìs**: piramide. Etimo sconosciuto: c'è chi pensa che derivi da **pür**: fuoco, perché finisce a punta come una fiamma.

**poliedro**

**polüs**: molto, **édra**: sede, trono, base.

**-edro**: diedro: **dis** due volte, da **düo** due, triedro (**trèis**: tre), tetraedro (**téssara**: quattro), pentaedro (**pénte**: cinque), esagono (**èx**: sei), ettaedro (**eptà**: sette), **oktò**: otto, **ennèa**: nove, **déka**: dieci, **éndeka**: undici, **dòdeka**: dodici, **èikosi**: venti, **ekatòn**: cento (ecatombe: sacrificio di cento buoi), **chìlioi**: migliaia, **mégas**: grande, **müriàs**: miriade, quantità di 10'000 unità, **gìgas**: gigante; **téras**: mostro, prodigio; **mikròs**: piccolo.

**polinomio**

**polüs**, molto; **ònoma**, nome.

**poli-**: poliandria (**anèr**, **andròs**: uomo maschio); policromia (**chròma**: colore), poligamia (**gàmos**: matrimonio); poliedro (**édra**: sede, trono, base), poliginia (**günè**: donna), poligono (**gonìa**: angolo); poliarchia (**archè**: signoria, governo, potere); policlinico (**klinikòs**: che si fa presso il letto, da **klinè**: letto, a sua volta da **klìno**: distendersi); polipo (**pùs**, **podòs**: piede); …

**Attenzione**: politica (**pòlis**: città), polizia (da politica), polire, poliomielite (**poliòs**: grigio, **müelòs**: midollo), …

**postulato**

***postulatum***, da ***postulare***: richiedere, pretendere, volere, desiderare. Proposizione che, anche se non evidente né dimostrata, si chiede all'interlocutore di accettare[4]. Per il «non evidente» si pensi al V postulato di Euclide sull'unicità della parallela ad una retta data per un punto che non le appartiene.

4. Sulla differenza tra postulato e assioma, vedi per esempio http://www.treccani.it/enciclopedia/assioma/

**prisma**

**prìsma**, da **prìzo**: segare. Cosa segata, divisa.

**problema**

**pro**: davanti, **blèma**: getto, colpo, da un tema di **bàllo**: lancio. Propriamente «ciò che si lancia davanti». In didattica si distingue chiaramente «problema» da «esercizio»: il primo viene lanciato, come «novità», davanti all'allievo, cui si chiede di darsi da fare per trovare una soluzione, mettendo in gioco le proprie facoltà intuitive e creative; il secondo è proposto per consolidare apprendimenti già incontrati. **pro-**: proboscide (**bòsco**: nutrire, pascere); procedere (***cédere***: camminare, avanzare); procinto (***cìngere***: cingere, allacciare. Propriamente allacciarsi – per esempio la toga – per compiere un lavoro); proclamare (***clamàre***: gridare, annunciare, dichiarare); proclive (***clivus***: pendenza); procrastinare (***cras***: domani); prodigo (***àgere***: guidare, indurre, che in certi composti diventa ***ìgere***); prodromo (**dròmos**: corsa); profano (***fanum***: tempio, luogo consacrato agli dei); professore (***fàteor***: manifestare, far conoscere, confessare); profondo: (***fundus***: parte inferiore); progetto (v. «problema»); … **Attenzione**: probabile (***probàre***: esaminare, valutare, giudicare); proconsole (***pro***: invece); procurare (***pro***: a favore di, in difesa di, ***curàre***: aver cura, occuparsi); prossimo (***pròximus***: vicinissimo, sup. ass. dell'avverbio ***prope***: vicino); protagonista (**pròtos**: primo, **agonistès**: attore); proteico/proteiforme (da ***Pròteus***, **Protheüs**: dio che poteva assumere diversi aspetti)

**punto**

***pungere***: propriamente puntura, piccolo foro fatto introducendo uno strumento acuminato.

**quadrato**

***quadratus***, da ***quadrare***: mettere bene insieme, quadrare. Si sente ***quatuor***: quattro.

**quoziente quoto**

***quotiens***/***quoties***: quante volte. Caso generale: risultato della divisione: quante volte il divisore sta nel dividendo. ***quotus***, ***-a***. ***-um***: aggettivo interrogativo: quanto?, in che quantità? Per taluni è il risultato della divisione quando il resto è 0 (zero).

**raggio**

***radius***: verga, raggio di una ruota, poi raggio di un oggetto luminoso, poi raggio di un oggetto emittente onde elettromagnetiche.

**retta/o**

***rectus***, ***-a***, ***-um*** (da ***régere*** dirigere, guidare dritto): che è diritto/a.

angolo retto, rettangolo, rettilineo, rettifica (***fàcere***: fare, che nei composti fa spesso ***ficere***), rettore (dial. *regiuu*, *regiura*), re, reggia (***regia*** [***domus***] casa regale), rettoscopia (intestino retto, così detto perché più o meno diritto, **skopéo**: guardare). **Attenzione**: rettile (***répere***: strisciare).

**rotazione**
***rota***: ruota. L'atto di far ruotare.

**scaleno**
**skalenòs**: zoppicante, disuguale.

**segmento**
***segmentum*** (da ***secare***: tagliare) taglio, striscia.

**semi-**
***semis*** metà. semicerchio, semipiano, semisfera, semispazio, semiasse, semidìo, semifinale, semifreddo, seminterrato, … **Attenzione**: semita (da Sem, figlio di Noè), semico/semiotico, semiotica (**séma** o dal suo dim. **semeiòn**: segno, da cui anche semaforo, -**fòros** da **féro**: portare; fosforo da **fòs**: luce, da cui anche fotone, fotografia, …), seminare (***semen***: seme, da cui anche seminario).

**sfera**
**sfàira**: palla per giocare.

**sghembo**
antico tedesco *slimb(s)* storto, tortuoso. (Tedesco moderno: *schlimm*: cattivo, brutto, non retto).

**simmetria**
**syn**, con, insieme, **métron**, misura, da **metréo**: misurare. **sin-**, **sim-**: sinagoga (**agòn**: riunione); sincope (**kòpto**: percuotere, rompere); sincrono (**chrònos**: tempo); sinonimo (*sin* per esprimere identità, **ònoma**: nome); sindaco (**dike**: giustizia, diritto, regola: patrocinatore, che tratta gli affari (di una città o di altro), da **dike** anche dicastero); sinedrio (**édra**: sede, trono, base, da cui anche poliedro e simili); sinfonia (**fonè**: suono); sinodo (**odòs**: strada, via, cammino); … simbolo (**ballo**: gettare, lanciare, ma nel composto mettere); simpatia; simposio (**pòsis**: bevanda); … **Attenzione**: sincero; sinopia (terra rossa, da Sinope, città sul Mar Nero); sindone (ebraico *sadin*: tessuto fine, mussolina); singolare; singhiozzo; sinistro; …; simile; simonia; simulare; …

**somma**
***summus***, ***-a***, ***-um***: altissimo, più in alto di tutti. Con gli algoritmi arabici importati da Fibonacci per l'addizione e la moltiplicazione il risultato veniva scritto sopra gli addendi o i fattori.

**sottrazione**
***sub*** sotto, ***tràhere*** trarre, togliere. Propriamente portar via da sotto, eventualmente con destrezza, nei due sensi: con frode o con abilità.

**spigolo**
***spiculum***, diminutivo di ***spica***, che è il pungiglione delle api o l'infiorescenza dell'aglio. Poi, dall'infiorescenza si passò alla forma degli spicchi dell'aglio e

poi agli spigoli dei corpi solidi. Da notare la desinenza –***ulus***/***a***/***um*** che indica un diminutivo (***calculus***, ***parvulus*** [piccolino, pargolo], ***circulus***, ***fabula*** [***fari***: parlare]: raccontino, favola, fiaba) corrispondente a **-iòn**: **dàimon-daimònion** (demone: divinità, nume; demonio: genio, genietto), **séma-semeiòn**, **tràpeza-trapézion**.

**superficie**

***super***: sopra, ***ficies***, per ***facies***, faccia. Propriamente faccia superiore, più genericamente la parte esterna di un corpo. Da non confondere con area.

**teorema**

**theòrema**, ricerca, meditazione, da **theorèo**, esaminare, osservare o da **theàomai** con lo stesso significato. teoria; teatro; teodolite (**odòs**: strada). **Attenzione**: teogonia (**theòs**: dio; **gònos**: generazione, nascita); teologia (**lògos**: parola, discorso, dottrina).

**termine** (delle operazioni)

***terminus*** o ***termen***: estremità, confine. Si pensi ai termini di un terreno. Come mai assume il significato di «numero che entra in un'operazione« non so. Ma che interessa è che le desinenze in -endo, -ando indicano «che deve essere» + «part. pass. di verbo». Ad es. dividendo = che deve essere diviso (sì, anche mutande = che devono essere cambiate); le desinenze in -tore, -sore indicano «che fa ciò che dice il verbo». Ad es. divisore = che divide; numeratore = che conta le parti; denominatore = che da il nome alla frazione. **Attenzione**: terme, termometro, termìte (**thermòs**: caldo; ted. Thermit, marchio di fabbrica: miscela di alluminio in polvere e di ossidi di ferro che, convenientemente accesa, sviluppa una notevole quantità di calore), termidoro (**dòron**: dono), tèrmite (insetto).

**tesi**

**thésis**: posizione (da **tìthemi**: mettere, porre). Proposizione che richiede una dimostrazione. sintesi, antitesi, parentesi, protesi; …

**totale**

***totalis*** (da ***totus***, ***-a***, ***-um***): intero, ogni cosa.

**trapezio**

**trapézion** (diminutivo di **tràpeza** tavolo, mensa, banco): tavolino.

**traslazione**

***trans***: di là, ***latus***: portato, dal verbo ***ferre***: portare, che ha una forma in ***latum***. Si pensi a latore. Da ***ferre*** calorifero, conifera, … **Attenzione**: latomìa (**làs**: pietra, **tomè**: taglio, da **tèmno**: tagliare, cava di pietre. Da **tomè** si hanno i vari lobotomia, appendicectomia, isterectomia (**üstera**: utero). Gli ec- da **ektòs**: fuori

**vertice**

***vertere***: voltare, girare, volgere. Cima, comignolo, pinnacolo, perché la linea da ascendente diventa discendente.

## 3. Fare dell'etimologia un gioco

Se si conoscono i significati di un certo numero di termini base, quelli elencati sopra per cominciare possono bastare, si possono da un lato scoprire i significati di parole sconosciute o inventarne di nuove. *Parametro*? *Catabasi*? Ci sono, nel vocabolario, o le abbiamo inventate noi? Diceva don Milani «Finché ci sarà uno che conosce 2000 parole e uno che ne conosce 200, questi sarà oppresso dal primo. La parola ci fa uguali.»

È bello e commovente sapere che ogni 6 gennaio si reincontrano due sorelle: *Epifania* e *Befana*. È interessante sapere che cosa sono i *tropici* del Cancro e del Capricorno. Perché, quando si va a sciare, è una buona cosa indossare una giacca *idrorepellente*?

Le parole raccontano anche la nostra storia: *albicocca*, *ragazzo*, *vampiro*, *cabala*, *Pasqua*, *cravatta*, *moro*, *elfo*, *bianco*, *vigliacco*, *guerriglia*, tanto per esemplificare, ci dicono quanto l'Europa sia, almeno quanto gli Stati Uniti, un crogiolo di culture. E di questi tempi mi sembra una nozione indispensabile da trasmettere.

Ci sono etimi che hanno generato talmente tanti figli che se ne è quasi perso il conto. *fari*, in latino, significa parlare. Se si parla di qualcuno, quello ha una certa *fama*, che può essere buona o cattiva: nel secondo caso sarà un *infame* o *nefando*, di cui non si deve parlare.

Se si racconta, si narra una *favola* o una *fiaba*. Se uno si inventa storie *favolose*, *favoleggia*. Naturalmente, nelle favole ci sono *fate* e castelli *fatati*.

Persino gli Dei erano sottoposti al *fato*, cioè una sorta di super-dio che aveva parlato, e una forma di canto portoghese di intonazione triste sul tema del destino è il *fado*. Il destino dell'uomo era regolato dalle *Fate*, dette anche Parche e in Grecia Moire (Cloto da *klòtho*: filare, che filava il filo della vita, Lachesi, *làchos* destino, Atropo, *a* alfa privativa e *trépo* volgere, che il filo lo tagliava, perché la morte è inevitabile «non si può girarle in giro»).

Chi parla è *fans* e chi non parla è *infans*, da cui, *fante*, *infante* e *enfant*. Poi, sia il fante, visto come giovanetto, perché sa parlare, sia l'enfant, visto come ragazzo cresciuto, accompagna e serve il cavaliere andando a piedi, ed ecco litaliano *fanteria*, il francese *infanterie* e il tedesco *Infanterie*. Poi qualcuno ha imparato a cavalcare ed è diventato un *fantino*.

Una ragazzina sarà una *fanciulla*, e se serve in casa una *fantesca*.

Un tizio che si abbandona al bla bla sarà detto *fatuo* o, volendo esagerare, un *fantoccio*, e starlo ad ascoltare è *nefasto*, al contrario dei giorni *favorevoli* o *fausti*. Tutti abbiamo conosciuto un qualche *Fausto*, ma nessun Nefausto.

Senza dimenticare che l'uomo è l'unico animale dotato di *favella*.

Un buon oratore non dovrà essere solo *facondo*, ma anche *affabile*, così come un giocatore dovrà comportarsi con *fair* play (*fairy*: antico francese *faerie*, francese moderno *féerie*, a sua volta da *fée*, insomma da fata): comportarsi come le fate delle fiabe.

Altro?

Poveri noi, maestri (*magis* di più) che dobbiamo stare agli ordini dei ministri (*minus* di meno)!

E che carriera hanno fatto sia l'usciere posto alla barriera che separava il giudice dal pubblico, che da cancelliere è diventato Cancelliere o Kanzler o Chancellor (presidente dell'organo al vertice di una università), sia il domestico addetto alla cura dei cavalli che da *maréchal* è diventato al minimo maresciallo dei carabinieri o addirittura Maresciallo di Francia!

## 1. Il teorema di Pick e i sistemi di disequazioni diofantine lineari

Paolo Hägler

What kind of application can the Pick's theorem have? This article presents a link between this theorem and a system of Diophantine's linear inequalities.

Cercando di risolvere un problema di tipo probabilistico, mi sono imbattuto nella necessità (in un caso particolare) di scoprire quante soluzione intere avesse il sistema di disequazioni formato dalle seguenti relazioni:

$a, b \in \mathbf{N}$

$0 < a < b \leq 100$

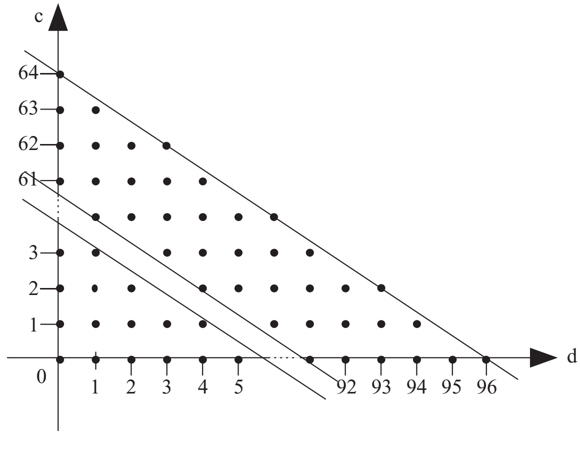
$(a-1)/2 + (b-1-a) + 2\,(100-b) \geq 100$

Questo sistema può essere facilmente semplificato (con l'opportuno cambio di variabili $c=a-1$ e $d=b-a-1$) in

$3c + 2d \leq 192$

con $c, d \in \mathbf{N}$

Se rappresentiamo questo sistema di disequazioni diofantine lineari su un piano cartesiano ci accorgiamo che otteniamo un triangolo rettangolo posto su un geopiano.




Come fare quindi a calcolare quante sono le soluzioni? In questo caso la risposta è piuttosto semplice, poiché 192 è multiplo sia di 2 sia di 3, e pertanto la figura ottenuta si presta per utilizzare il teorema di Pick. Ricordiamo che questo afferma che, dato un poligono su un geopiano con tutti i vertici in corrispondenza di punti di coordinate intere, si ha che la sua area è data dalla somma della quantità di punti di coordinate intere all'interno del poligono con la metà della quantità dei punti di coordinate intere sul bordo del poligono al quale va sottratta un'unità, ossia:

$A = I + B/2 - 1$

dove A è l'area del poligono, I la quantità di punti a coordinate intere all'interno del poligono, e B la quantità di punti a coordinate intere sul bordo del poligono.

Nel nostro caso specifico il triangolo rettangolo ha cateti che misurano 96 e 64, e pertanto conosciamo la sua area (3072). Possiamo anche trovare piuttosto facilmente la quantità di punti a coordinate intere che si trovano sul bordo del poligono; in effetti ce ne sono 97 e 65 sui due cateti, e 1+MCD(96;64) = 33 sull'ipotenusa. Quindi, in totale, evitando di contare due volte i vertici, abbiamo 97+65+33 – 3 = 192 punti a coordinate intere sui bordi.

Applicando il teorema di Pick possiamo quindi determinare la quantità di punti all'interno del poligono ed otteniamo:

$3072 = I + 192/2 - 1$

da cui $I = 2977$

Di conseguenza il numero di soluzioni del sistema di disequazioni precedenti è

$B + I = 192 + 2977 = 3169$

Possiamo generalizzare, almeno in parte, questo risultato.

Sia dato il sistema

$a x + b y \leq c$

con $x, y \in \mathbf{N}$

dove a, b e sono noti e con c multiplo di mcm(a;b) [per semplificare la notazione in seguito utilizziamo $c = \alpha a$ e $c = \beta b$].

Allora le soluzioni sono:

$B + I = B + A + 1 - B/2 = A + B/2 + 1 =$

$= \alpha \beta/2 + (\alpha + \beta + \mathrm{MCD}(\alpha;\beta))/2 + 1 =$

$= (\alpha \beta + \alpha + \beta + \mathrm{MCD}(\alpha;\beta) + 2)/2$

Purtroppo non si è sempre così fortunati da avere c multiplo di mcm(a;b), ma questo risultato può essere utilizzato per velocizzare l'algoritmo per il calcolo della quantità di soluzioni del sistema.

Senza questo risultato è necessario passare in rassegna tutte le possibilità per una variabile e calcolare quante sono quelle per l'altra, eseguendo la somma; ma possiamo sfruttare questo risultato in almeno due modi.

Dato il sistema

$a x + b y \leq c$

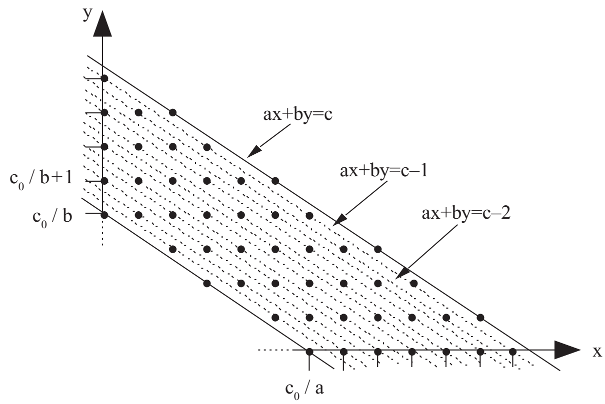
con $x, y \in \mathbf{N}$

possiamo procedere come segue. Possiamo utilizzare il risultato precedente per calcolare la quantità di soluzioni di

$a x + b y \leq c_0$

con $x, y \in \mathbf{N}$

con $c_0$ il più grande multiplo di mcm(a;b) inferiore a c (o il più piccolo multiplo di mcm(a;b) superiore a c se si vuole procedere togliendo le soluzioni di troppo) e in seguito risolvere le equazioni diofantine $a\,x + b\,y = d$ per ogni $d \in \mathbf{N}$ con $c_0 < d \leq c$ (rispettivamente $c_0 \geq d > c$).

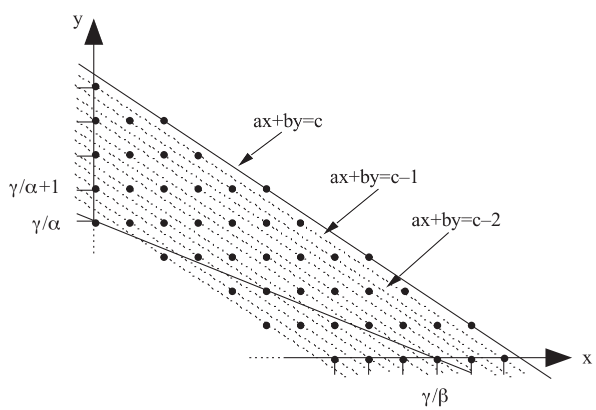



La seconda possibilità, più pratica qualora mcm(a;b) sia grande, è calcolare la quantità di soluzioni di

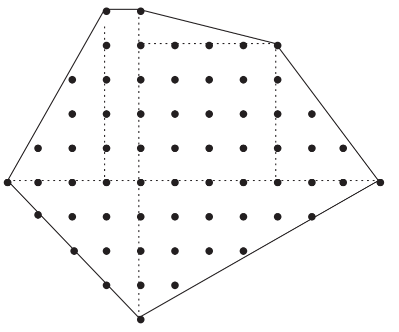
$\beta\,x + \alpha\,y \leq \gamma$

con $x, y \in \mathbf{N}$

con $\alpha = \mathrm{Int}(c/a)$, $\beta = \mathrm{Int}\,(c/b)$ e $\gamma = \alpha\,\beta$ (dove Int() è la funzione parte intera inferiore), e in seguito risolvere le equazioni diofantine $a\,x + b\,y = d$ per ogni $d \in \mathbf{N}$ con $\min(a\,\beta;\alpha\,b) < d \leq c$ verificando di non avere già contato le soluzioni trovate con il sistema precedente.




In casi ancora più generali, con più disequazioni, è possibile scomporre il poligono in triangoli rettangoli (ed eventualmente alcuni rettangoli) e calcolare le soluzioni all'interno di ogni figura. In questo caso bisogna poi sottrarre le soluzioni in comune a due figure (lungo un lato comune) e infine aggiungere i punti in comune a 3 o 4 figure, avendoli sottratti ciascuno una volta di troppo.



# 1. Calcolo mentale-approssimato-strumentale

Gianfranco Arrigo

The article concludes a series of contributions intended to propose the re-evaluation of reasoned calculation, i.e. the mental calculation with the support of algebraic writing and schematic methods showing its conceptual aspect. By approaching the calculation with these techniques it is possible to avoid the learning of Arabic algorithms (or calculation in column) completely, replacing rote learning of rigid algorithms with flexible techniques which leave a lot of room for creativity.

## 1. Introduzione

Gli algoritmi arabici (i metodi del calcolo in colonna) – introdotti da noi da Leonardo Pisano, detto anche Fibonacci (~1180-~1250) – per il tramite del suo famoso *Liber abaci*, furono usati per circa sette secoli dalla maggior parte dell'umanità. Negli ambienti scientifici e lavorativi furono sostituiti, almeno in parte, dal calcolo logaritmico e dalle calcolatrici meccaniche, a partire dal XVII secolo. Scomparvero del tutto con l'avvento degli strumenti elettronici a basso costo, a cominciare dalle *calcolatrici tascabili* e dai *personal computer*, a partire dagli anni settanta del secolo scorso. Del tutto? No, si praticano ancora, in larga misura, nella scuola elementare.

Chiediamoci perché. Le ragioni sono molteplici. Fra le più ci sembra di poter riconoscere: un certo scetticismo degli insegnanti di fronte alle innovazioni che la didattica propone, la poca propensione di taluni a modificare il proprio insegnamento, la pressione psicologica dei genitori che vorrebbero vedere insegnata ai loro figli la matematica che essi stessi hanno imparato e, non da ultimo, i programmi ufficiali che, salvo eccezioni, continuano a proporre questo modo di calcolare.

Per contro, gli insegnanti che stanno applicando in classe il *calcolo ragionato* sono entusiasti e gli allievi operano con piacere e acquisiscono capacità sorprendenti. Possono benissimo fare a meno del calcolo in colonna.

## 2. Il calcolo ragionato al posto del calcolo in colonna

Sostituire l'insegnamento del calcolo in colonna con il calcolo ragionato significa tagliare un ramo ingombrante e inutile dell'insegnamento, di natura fondamentalmente algoritmico-mnemonica (la matematica soggiacente è in gran parte nascosta) e promuovere al suo posto un modo di calcolare cosciente e formativo: il calcolo mentale, la scrittura in riga – propedeutica all'apprendimento del calcolo generalizzato, o letterale – e l'impiego di schemi grafici che evidenziano l'aspetto concettuale.

Il calcolo ragionato è fondamentalmente calcolo mentale che si avvale anche del supporto carta-penna. Il suo apprendimento si estende al di fuori dell'algoritmico, abbraccia in gran parte il concettuale, lo strategico, il comunicativo e tocca anche in modo significativo la gestione delle trasformazioni semiotiche (Fandiño Pinilla, 2008). Quindi possiamo affermare senza ombra di dubbio che l'apprendimento del calcolo ragionato è completo e costituisce un'ottima introduzione all'apprendimento dell'algebra elementare; non così si può dire del calcolo in colonna, il cui apprendimento è (quasi) esclusivamente di carattere mnemonico.

Ma c'è di più. L'attività basata sul calcolo in colonna può essere assimilata al compimento di un percorso obbligato, che presenta una serie di regole che occorre memorizzare. Queste però non sono propriamente concetti o procedimenti matematici, ma azioni che, se compiute correttamente, diventano, sì, coerenti con la matematica soggiacente, senza però che l'operatore ne sia cosciente (si pensi, per esempio, all'«abbassare una cifra» nella divisione), per cui si possono eseguire correttamente addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni senza che queste fondamentali operazioni aritmetiche siano concettualmente apprese, senza operare alcuna scelta strategica (perché non c'è nulla da scegliere), senza che vi sia l'esigenza di spiegare il proprio operato ad altri (perché tutti fanno così), senza che vi sia l'opportunità di scegliere un determinato registro semiotico (perché ve n'è uno solo).

La pratica del calcolo ragionato si basa sulla conoscenza ben fondata delle quattro operazioni dell'aritmetica, in particolare delle proprietà associativa, commutativa e distributiva. Si sviluppa soprattutto operando attività di analisi e di sintesi e si nutre continuamente con l'intuizione e l'invenzione. L'allievo impara subito che, di fronte a un calcolo anche semplice, gli conviene prima di tutto decidere *come* fare. Può, per esempio, cambiare registro semiotico operando una *conversione* dall'algebrico allo schematico; o ancora, all'interno di un determinato registro, procedere con un *trattamento* (D'Amore, 2013) scegliendo le strategie che meglio crede. In questo modo accumula esperienza e impara come realmente ci si muove nell'eseguire calcoli. Questo allievo non vedrà di certo la matematica come disciplina rigida, che occorre soprattutto memorizzare («materia arida», come qualcuno la dipinge), ma come un mondo stimolante nel quale impara a muoversi autonomamente, dove incontra oggetti che, compatibilmente alle sue capacità, a poco a poco riesce a scoprire e a situare in una rete concettuale, traendone profitto, meraviglia, soddisfazione e quindi piacere.

## 3. Che cos'è il «calcolo ragionato»

Lo mostriamo passando in rassegna alcuni esempi significativi. L'impatto di questo modo di praticare il calcolo diventa più importante col procedere delle classi dalla prima alla quinta. Nell'appendice il lettore può prendere visione di una proposta di distribuzione dei contenuti nelle varie classi.

## 3.1. Addizione e sottrazione

### 3.1.1. Addizione

Alla base di tutto sta la conoscenza del sistema di numerazione in base 10. All'inizio ci si limita ai numeri naturali e ci si esercita con le scomposizioni additive, in particolare quelle coerenti con la forma polinomiale: unità (u), decine (da), centinaia (h) e migliaia (k) ); più tardi, decimi (d), centesimi (c) e millesimi (m). L'uso dei simboli tra parentesi non è strettamente necessario, ma raccomandato. Per esempio:

764 = 700 + 60 + 4 (= 7 h + 6 da + 7 u)

Sono importanti le scomposizioni additive della decina, che presto si estendono alle successive potenze di dieci:

8+2=10, 80+20=100, 800+200=1000

e in seguito 8+20, 80+2, 800+20,…

che si possono anche scrivere con i simboli

8 u + 2 da (= 8 + 20 = 28), 8 da + 2 u,…

e più tardi (per esempio):

8 h + 2 da (= 80 da + 2 da = 82 da = 820), oppure 16 h + 23 u (= 1600 u + 23 u = 1623)

Continuando: 18+2, 8+12, 18+12, 48+52 = 40+8+50+2 = 90+10 = 100,…

Prossimo passo: 7+8=7+(3+5)=(7+3)+5, dove le parentesi servono per spiegare la successione del ragionamento (o altri modi di scomporre), presto estesi ai multipli di dieci e di 100: 70+80, 700+800,…

È sorprendente notare la soddisfazione dei bimbi quando riescono a calcolare con «numeri grandi»! Il coronamento di ciò è l'esecuzione di addizioni usuali in riga, per esempio:

318 + 477 = 300+10+8+400+70+7 = 700+80+15 = 795

anche con più di due addendi

76+123+225 = 70+6+100+20+3+200+20+5 = 300+110+14 = 424

L'addizione in colonna può (forse) rivelarsi più veloce, però col calcolo in riga si guadagna negli aspetti concettuale (imperniato sulla scomposizione polinomiale dei numeri) e strategico (scelta del percorso additivo); inoltre non vi è la difficoltà di ricordare i riporti.

Si impara poi a conoscere le cosiddette *addizioni vincenti*.

**Presenza di complementi alla decina o al centinaio o al migliaio.**

Uso congiunto delle proprietà associativa e commutativa che permette di stabilire un primo interessante principio: *"per calcolare una somma di più addendi si può iniziare dove si vuole e procedere nell'ordine desiderato; basta considerare tutti gli addendi, ciascuno una sola volta"*. Agli allievi basta conoscere questo principio; non è necessario che sappiano riconoscere subito le singole proprietà. Per esempio

39 + 78 + 11 = (39 + 11) + 70 + 8 = 50 + 70 + 8 = 128

Gli allievi imparano da soli questa tecnica, anche perché «fa fare molto meno fatica».

**Presenza di addendi ripetuti.**

Da introdurre quando gli allievi sanno le tabelline.

Per esempio

$5 + 5 + 3 + 3 + 3 + 6 + 6 + 3 + 4 + 4 + 4 + 4 + 3 + 5 + 4 + 6 + 6 + 6 =$

$= 5 \times 3 + 3 \times 5 + 6 \times 5 + 4 \times 5 = 15 + 15 + 30 + 20 = 30 + 50 = 80$

Un calcolo come questo non si presta per essere fatto in colonna e risulta arduo da effettuare anche usando una calcolatrice.

**Presenza di addendi vicini.**

Questa tecnica esige una conoscenza minima della moltiplicazione e della sottrazione.

$702 + 705 + 696 + 710 + 695 = (700 \times 5) + 2 + 5 - 4 + 10 - 5 =$

$= 3500+8 = 3508$

L'esecuzione in colonna è nettamente perdente.

L'abilità nell'eseguire calcoli mentali dev'essere continuamente sviluppata, così come l'abitudine a servirsi della scrittura matematica, almeno inizialmente o di fronte ad addizioni di una certa complessità. Gli allievi più abili giungono presto a eseguire determinate addizioni anche senza scrivere. Importante è che tutti, in un modo o in un altro, in casi semplici o più difficili, ci riescano. E se non si incontrassero casi vincenti? Si creano!

Esempio:

$238 + 584 + 75 = 235 + 3 + 65 + 10 + 584 = (235+65) + (3+10) + 584 =$

$=300 + 584 + 13 = 897$

Il bello è che lo stesso calcolo può essere fatto in molti altri modi, se necessario anche allungando la successione di passaggi, ciò che dà coraggio all'allievo e che lo rende sempre più autonomo.

### 3.1.2. Sottrazione

La sottrazione nasce insieme all'addizione. Il primo impatto è del tipo: $17 + \ldots = 24$, che può essere risolto per esempio pensando di partire da 17 e di giungere prima a 20 (con +3) e poi a 24 (con +4) trovando il numero sconosciuto $7=3+4$. L'apprendimento della sottrazione formale avviene con l'equivalenza tra le due forme $17 + \ldots = 24$ e $24 - 17 = \ldots$, passaggio delicato perché si deve operare un trattamento all'interno del registro algebrico, con l'introduzione di un nuovo simbolo.

In generale vi sono due tecniche per eseguire una sottrazione:

$73 - 17 = (73 - 10) - 7 = 63 - 7 = (63 - 3) - 4 = 60 - 4 = 56$ (o altre variazioni di questo tipo) oppure

$$17 \xrightarrow{+3} 20 \xrightarrow{+50} 70 \xrightarrow{+3} 73 \text{ da cui } 73 - 17 = 3+50+3 = 56$$

La seconda è vivamente raccomandata sia per allievi in difficoltà sia in casi difficili, dove, col calcolo in colonna, occorre operare il «prestito». Chi avesse ancora dubbi, provi a eseguire in colonna la sottrazione 2014–1789 e confronti il metodo col seguente

$$1789 \xrightarrow{+11} 1800 \xrightarrow{+200} 2000 \xrightarrow{+14} 2014 \text{ da cui}$$

$2014 - 1789 = 11 + 200 + 14 = 225$

Osserviamo che ogni sottrazione può essere trasformata in addizione. Come vedremo in seguito, lo stesso si può dire della moltiplicazione e persino della divisione.

## 3.2. Moltiplicazione e divisione

### 3.2.1. Moltiplicazione

Alla base dell'apprendimento vi è la memorizzazione dei prodotti basilari, cioè delle tabelline. Ciò deve avvenire come atto finale di un procedimento di costruzione basato sul concetto di moltiplicazione come addizione di addendi fra loro uguali. Vediamo qualche esempio.

$7 \times 2 = 7 + 7 = 14$; $7 \times 3 = (7 \times 2) + 7 = 14 + 7 = 21$; $7 \times 9 = (7 \times 10) - 7 = 70 - 7 = 63$; …

Se si conosce $7 \times 9$, si conosce anche $9 \times 7$. Ecco un buon momento per attirare l'attenzione degli alunni sulla commutatività del prodotto.

Come per l'addizione, anche in questo ambito è bene estendere subito il contesto numerico in cui si opera.

Se si sa che $6 \times 8 = 48$, si può calcolare facilmente $60 \times 8$; $6 \times 80$;
$60 \times 80$; …

Ma la novità più importante è l'introduzione della proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto ad addizione e sottrazione.

Per esempio: $13 \times 8 = (10 + 3) \times 8 = (10 \times 8) + (3 \times 8) = 80 + 24 = 104$

Le parentesi superflue possono anche col tempo essere tralasciate: apprendere la gerarchia delle operazioni e l'uso delle parentesi non costituisce un ostacolo insormontabile e può essere compiuto senza fretta.

Per acquisire maggiore abilità nel calcolo mentale, è bene memorizzare anche qualche quadrato oltre alla classica tavola pitagorica:

$11 \times 11 = (10 + 1) \times 11 = 10 \times 11 + 1 \times 11 = 110 + 11 = 121$
$12 \times 12 = 144$; $13 \times 13 = 169$; $15 \times 15 = 225$; $25 \times 25 = 625$

Si possono infine facilmente calcolare i quadrati del tipo: $20 \times 20$;
$30 \times 30$; …

Come per l'addizione, vi sono anche le *moltiplicazioni vincenti*.

$2 \times 5 = 10$;
$2 \times 50 = 4 \times 25 = 5 \times 20 = 100$;
$2 \times 500 = 4 \times 250 = 8 \times 125 = 5 \times 200 = 25 \times 40 = 1000$

Vediamo due esempi:

$8 \times 189 \times 125 = (8 \times 125) \times 189 = 1000 \times 189 = 189'000$
$16 \times 37 \times 125 = (8 \times 2) \times 37 \times 125 = (8 \times 125) \times (2 \times 37) =$
$= 1000 \times 74 = 74'000$

Rimangono però i… casi disperati, per esempio: $552 \times 97$

Possiamo cambiare registro semiotico e operare la conversione dall'algebrico allo schematico.

Prima possibilità: mediante la tabella.

| | 500 | 50 | 2 |
|---|---|---|---|
| 90 | 45000 | 4500 | 180 |
| 7 | 3500 | 350 | 14 |

da cui: 552 × 97 = 45'000 + (4500 + 3500) + (350 + 180) + 14 =
= (45'000 + 8000) + (530 + 14) = 53'544

Seconda possibilità: con uno schema a frecce.

500 + 50 + 2

x 90 x 7 x 90 x 7 x 90 x 7

45'000 + 3500 + 4500 + 350 + 180 + 14 = 53'544

### 3.2.2. Divisione

La divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione, nel senso che, per esempio, da 6x7=42, seguono le due divisioni 42:6=7 e 42:7=6. È uno stimolo in più per rinfrancare la memorizzazione dei prodotti di base.

Se il dividendo supera il centinaio, si opera una scomposizione additiva in due addendi dei quali almeno uno dev'essere multiplo del divisore. Per esempio:

112 : 8 = (80+32) : 8 = (80 : 8) +(32 : 8) = 10 + 4 = 14
115 : 8 = (80+32+3) : 8 = (80 : 8) +(32 : 8) + (3 : 8) = 10 + 4 + (3 : 8) =
= 14 + (3 : 8)
o, se si preferisce, « = 14 resto 3».

Se il divisore ha due cifre, allora i casi sono due:

a) il divisore è scomponibile in un prodotto con fattori diversi da 1 e «comodi». Per esempio:
612 : 18 = (612 : 2) : 9 = 306 : 9 = (270 + 36) : 9 = 270 : 9 + 36 : 9 =
= 30 + 4 = 34

b) altrimenti si può di nuovo operare la conversione al registro schematico, che comporta anche un importante aspetto concettuale: considerare la divisione come successione di sottrazioni di uno stesso numero (il divisore). Quindi calcolare (845 : 65) significa trovare quante volte occorre sottrarre 65 al dividendo 845 fino a ottenere un numero minore di 65 (che è il resto). Gli allievi hanno però imparato che per eseguire una sottrazione è più comodo partire dal sottraendo e procedere additivamente.
Vediamo come si può fare

$$65 \xrightarrow{\text{x}\mathbf{10}} 650 \xrightarrow{+65\text{x}\mathbf{2}} 780 \xrightarrow{+65\text{x}\mathbf{1}} 845$$

Risultato 845 : 65 = 10+2+1 = 13
Anche la divisione è trasformata in addizione!

Un esempio più difficile e in forma abbreviata. 7236 : 67 = ?

$$67 \xrightarrow{\mathbf{100}} 6700 \xrightarrow{\mathbf{5}} 7035 \xrightarrow{\mathbf{2}} 7169 \xrightarrow{\mathbf{1}} 7236$$

Risultato 7236 : 67 = 100+5+2+1 = 108

Per eseguire la divisione in questo modo è buona cosa essere abili nel moltiplicare un numero di due cifre (il divisore) per 2, 4, 5, 10, 20, 40, 50, 100, 200, 400, 500, 1000, … In sostanza basterebbe saper moltiplicare velocemente per 2, 4 e 5; per gli altri è solo un «gioco di zeri». Moltiplicare per 2 e per 4 ed eventualmente per 8 consiste nel *raddoppiare* (successivamente). Moltiplicare per 5 consiste nel *dimezzare* (dopo aver moltiplicato per 10).

In questo scritto ci siamo limitati a operare nell'insieme dei numeri naturali. I principi e le tecniche del calcolo ragionato sono direttamente estendibili al campo dei numeri razionali. Per esempio:

2,7 × 0,08 = 27 d × 8 c = 27 × 8 m = (20+7) × 8 m = (160+56) m =
= 216 m = 0,216
76 : 0,04 = 7600 : 4 = 3800 : 2 = 1900 oppure 76 : 0,04 =
= (76x25) : (0,04x25) = 1900 : 1 = 1900
Basta sapere che: 10x10=100; 10x100=1000; 0,1x0,1=0,01;
0,1x0,01=0,001;
oppure che: da × da = h, da × c = k, d × d = c, d × c = m.

## 4. Calcolo approssimato e strumentale

Contrariamente alla tradizione scolastica che ha (quasi) sempre esaltato il risultato esatto o, quando non è possibile, il risultato «con precisione a meno di …», nell'insegnamento odierno assume molta importanza il calcolo approssimato. Questo dev'essere eseguito senza alcun ausilio tecnologico. Nelle attività umane del nostro tempo si usa demandare alla macchina ogni procedimento di calcolo. Dalla cassa registratrice, all'erogatore di carburante, alla calcolatrice tascabile, al personal computer e per finire ai centro di calcolo, disponiamo di apparecchiature sofisticate che ci evitano il compito di eseguire calcoli fastidiosi, facendoci risparmiare energia psichica e tempo. Non sempre, però, si può usare la macchina e non sempre il ricorso a essa è giustificato. In molte situazioni ci si trova a dover farsi un'idea di una certa somma di denaro o di una misura di altra natura, sul momento, senza poter usare alcuno strumento tecnologico. Ma anche quando si esegue un algoritmo con l'ausilio della macchina è assolutamente necessario stimare il risultato che questa ci ritorna e interpretarlo adattandolo alla situazione che si sta considerando. Tutto ciò per evitare di essere in balìa della tecnologia e ancor più per fornire il contributo che solo la mente umana può dare. Eseguire un calcolo approssimato significa operare due interventi: a) arrotondare opportunamente i termini numerici; b) eseguire un calcolo ragionato.

Nel punto a), l'avverbio «opportunamente» va capito bene. Non si tratta solo di rendere più «facili» i numeri, ma anche di fare in modo che con essi si possano facilmente applicare le strategie del calcolo ragionato (ciò che è sempre possibile). Perché il calcolo approssimato deve essere di facile esecuzione. Chi è più abile nel calcolo mentale riesce a ottenere stime più vicine al risultato esatto; ma anche chi opta per arrotondamenti più grossi ottiene stime affidabili. Il calcolo approssimato offre la possibilità a ognuno di agire secondo le proprie capacità.

Esempio: stima della seguente espressione numerica

$17 : (1{,}44 \cdot 3{,}17) \cong 17 : (1{,}5 \cdot 3) = 17 : 4{,}5 \cong 18 : 4{,}5 = 36 : 9 = 4$

Eseguire un calcolo con uno strumento elettronico significa tradurre un'espressione algebrica in una sequenza di comandi espressi nel linguaggio dello strumento.

Esempio di calcolo strumentale:

l'espressione

17 : (1,44 · 3,17)

per l'uso di una calcolatrice tascabile può essere tradotta nella sequenza:

17 ÷ [( 1.44 x 3.17 )] = 3.72415001

il risultato dato dalla calcolatrice è a sua volta un'approssimazione del valore esatto che qui è un numero razionale il cui periodo si compone di 79 cifre.

Se si usa un foglio di calcolo, l'espressione assume la forma

=A1 / (A2 * A3)

avendo cura di mettere nelle celle A1, A2 e A3 ordinatamente i numeri 17, 1.44, 3.17

Come si vede, nel registro del linguaggio simbolico si possono operare più trattamenti, che a loro volta rafforzano la capacità di usare questi linguaggi.

A questo punto, se il calcolo eseguito è l'espressione risolvente di un problema, occorre interpretare il risultato in funzione di ciò che rappresenta. Se fosse una misura di lunghezza espressa in metri e volessimo la precisione a meno di 1 cm, scriveremmo 3,72 m; se invece fosse la misura in km di un tratto di strada, potremmo adottare il risultato 3,724 km (oppure 3724 m).

Il foglio elettronico potrebbe avere, per esempio, la forma:

| dato 1 | dato 2 | dato 3 | risultato |
|---|---|---|---|
| 17 | 1.44 | 3.17 | 3.724150018 |

Il foglio elettronico, rispetto alla calcolatrice, offre il duplice vantaggio di mostrare dati e risultato insieme (in modo da permettere di variare a piacimento i dati e di vedere immediatamente come cambia di conseguenza il risultato) e di esigere l'introduzione di formule in linguaggio algebrico: proprio lo stesso che si impara col calcolo ragionato (e che accompagnerà l'allievo durante l'intero ciclo di studi).

## Bibliografia

Arrigo G. (2000). Il calcolo a scuola, ovvero: l'inizio di un cambiamento epocale. *Bollettino dei docenti di matematica, nr. 40*. Bellinzona: UIM-CDC. 57-68

Arrigo G. (2012). Sperimentazione sul calcolo numerico: introduzione al calcolo strumentale nella scuola elementare. *Bollettino dei docenti di matematica, nr. 64*. Bellinzona: UIM-CDC. 55-62

D'Amore B. (2013). *Primi elementi di semiotica*. Bologna: Pitagora

Fandiño Pinilla M.I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica*. Trento: Erickson.

## Appendice

### Proposta di programma per l'insegnamento del calcolo[1]

### Classi prima e seconda

– Richiamare la sequenza numerica
– Contare in senso progressivo e regressivo (anche a 2 a 2, …)
– Contare oggetti (anche suddividendoli in insiemi equipotenti)
– Collocare e riconoscere i numeri sulla retta numerica
– Leggere e scrivere i numeri in base dieci
– Eseguire addizioni e sottrazioni entro il 10 (all'inizio anche con le dita delle mani)
– Eseguire addizioni e sottrazioni sulla linea dei numeri
– Comporre e scomporre additivamente i numeri fino a 10
– Memorizzare gli amici di 10
– Eseguire addizioni e sottrazioni oltre il 10 con «tappa» alla decina
– Scomporre in decine e unità
– Eseguire addizioni con più addendi, sfruttare la presenza di «amici di 10», scrivendole anche in riga con un primo impiego delle parentesi (che inizialmente possono anche avere la forma di scatolette, casette, …)
– Abituarsi a calcolare addizioni con più di due addendi, iniziando da dove si vuole e procedendo opportunamente con gli addendi rimanenti (uso combinato delle proprietà associativa e commutativa, senza né nominarle né introdurle separatamente).
  Es. $7 + 8 + 3 + 12 = (7 + 3) + (8 + 12) = 10 + 20 = 30$
– Eseguire catene di operazioni con addizioni e sottrazioni
– Raggiungere un numero con una serie di addizioni/sottrazioni.
  Es. $16 = 8 + 4 + 2 + 1 + 1$, $8 = (12 – 2) – 2$
– Addizionare e sottrarre multipli di 10
  Es. $30 + 20 = 50$, $70 + 60 = 130$, …
– Trovare il precedente e il successivo di un numero naturale
– Trovare il doppio e, se esiste, la metà di un numero naturale
– Risolvere problemi di addizione e sottrazione
– Eseguire moltiplicazioni come addizioni ripetute
– Costruire additivamente le tabelline
  Es. $7 \times 3 = 7 \times 2 + 7 = 14 + 7 = 21$
– Eseguire prime divisioni. Es. da $7 \times 8 = 56$ segue $56 : 7 = 8$ e/o $56 : 8 = 7$
– Eseguire divisioni come sottrazioni ripetute e/o additivamente partendo dal divisore. Es. $65 : 13= 5$; additivamente $13 + 13 + 13 + 13 + 13$ oppure $65 – (13 + 13 + 13 + 13 + 13)$
– Risolvere problemi di moltiplicazione e divisione
– Iniziare a memorizzare le tabelline

1. Proposta di Marina Giacobbe, Lorella Maurizi e Tiziana Minazzi, insegnanti sperimentatrici di Verbania, che hanno già applicato il calcolo ragionato in un ciclo completo di cinque anni.

**Classe terza**

– Approfondire il sistema numerico decimale e la scomposizione polinomiale di un numero naturale
– Apprendere strategie di calcolo sulle quattro operazioni: scomposizioni additive, scrittura in riga e uso delle parentesi, uso di tabelle e diagrammi a frecce, riconoscere i casi vincenti di addizioni e moltiplicazioni, uso della proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione e alla moltiplicazione, raddoppiare e dimezzare,… (Es. Vedere nell'articolo).
– Eseguire primi esempi di calcolo approssimato e di stima del risultato
– Introduzione ai numeri decimali in situazioni concrete
– Prime addizioni e sottrazioni con numeri decimali

**Classi quarta e quinta**

– Perfezionare i metodi di calcolo con le quattro operazioni con i numeri naturali e la scrittura in riga, con particolare attenzione all'uso delle parentesi.
– Multipli, divisori, numeri primi e scomposizioni moltiplicative
– Ampliare la conoscenza delle operazioni con i numeri dai naturali ai decimali (in particolare: moltiplicazione fra decine, centinaia, migliaia, decimi, centesimi, millesimi,…)
– Introdurre l'uso della calcolatrice per eseguire sequenze di calcoli (impiego di parentesi, della memoria di deposito e di qualche comando particolarmente utile, a scelta)
– Riprodurre schematicamente un procedimento di calcolo eseguito (o da eseguire) con la calcolatrice
– Risolvere un problema che permetta di usare convenientemente la calcolatrice: tradurre l'iter risolutivo in un'unica espressione numerica, arrotondare opportunamente i valori numerici, eseguire mentalmente una stima del risultato, programmare ed eseguire il calcolo dell'espressione numerica mediante la calcolatrice, confrontare il risultato con la stima, interpretare il risultato secondo la situazione posta dal problema. (Es. Vedere nell'articolo).
– Introduzione all'uso del foglio elettronico. (Es. Vedere nell'articolo).
– Risolvere problemi numerici usando opportunamente le tecniche apprese del calcolo mentale, approssimato o strumentale.

# 2. Calcolo della probabilità alla scuola media Le concezioni degli allievi[1]

Massimo Anghileri[2]

For some time mathematics programs include the teaching of probability in secondary schools. There are two main reasons for this: prepare the students to cope with high school level without undue difficulty and know the importance of probability as a tool for understanding the world. My goal is twofold: to investigate what the students' prior knowledge and their ability to solve probabilistic problems are and to look into the difficulties and the barriers which might be a hindrance in the process of learning.

## 1. Introduzione

I piani di formazione per la matematica prevedono da tempo l'insegnamento della probabilità alla scuola media. Le ragioni che spingono all'insegnamento della probabilità sono riconducibili a due grandi obiettivi: da una parte il calcolo della probabilità costituisce una parte importante della matematica e come tale va insegnato, anche in funzione propedeutica, per mettere in grado gli studenti di affrontare insegnamenti superiori nei gradi di istruzione successivi, senza dover affrontare un gradino di difficoltà troppo ampio. Dall'altra lo studio della probabilità rappresenta uno strumento di comprensione del mondo che ci circonda, per sua natura permeato di situazioni caratterizzate da situazioni di incertezza e scarsa prevedibilità.

Le ragioni che sostengono quest'ultimo obiettivo, in particolare per la scuola media, sono diverse e ampiamente riconosciute: è chiara l'utilità della conoscenza della statistica e della probabilità nella vita di tutti i giorni, nelle professioni e nello sviluppo del pensiero critico, oltre che come strumento di ausilio alla comprensione di altre discipline studiate a scuola.

Anche se non mancano approcci innovativi e materiali da usare in classe sono reperibili in diverse pubblicazioni e in rete, appare utile in questa fase affrontare il problema della trasposizione didattica dei contenuti con un approccio sperimentale, basato sull'osservazione delle conoscenze pregresse e degli atteggiamenti spontanei degli allievi nell'approccio a problemi probabilistici, per progettare interventi formativi adatti.

L'obiettivo del mio lavoro si inserisce proprio in questo contesto: indagare quali sono le preconoscenze degli studenti, quali le loro capacità esistenti nel risolvere determinati problemi in ambito aleatorio prima che questi argomenti vengano sviluppati a scuola; e contemporaneamente cogliere quali sono le difficoltà e le barriere che si

1. Sintesi del lavoro di diploma del Master of arts in secondary education SUPSI-DFA, anno accademico 2012/2013. Relatore: Michele Impedovo.
2. Insegnante alla Scuola media di Stabio.

frappongono all'apprendimento. Da molte ricerche in didattica è emerso che gli studenti sarebbero in grado di affrontare, a diversi livelli di difficoltà, tematiche legate alla probabilità già a partire dalla scuola elementare. Un approccio di questo tipo permetterebbe di incontrare le difficoltà in maniera graduale. Tuttavia è raro che questi contenuti vengano affrontati prima della scuola media superiore, quando addirittura non prima degli studi accademici. Ma nel frattempo gli allievi sono anche soggetti a stimoli esterni alla scuola, che permettono loro di formarsi determinate concezioni in ambito probabilistico e di affrontare alcune tematiche autonomamente, con tutti i rischi del caso.

Così è stato anche per il gruppo di allievi di terza media, corso attitudinale, che ho seguito nella mia sperimentazione, la gran parte dei quali – ma non tutti – digiuni di teoria della probabilità.

## 2. Quadro teorico di riferimento

Anche se l'insegnamento della probabilità alla scuola media non vanta una tradizione particolarmente significativa, non mancano contributi illustri alla ricerca da parte degli studiosi di didattica e non solo.

I campi di interesse abbracciano diversi aspetti dell'apprendimento della probabilità, in particolare l'ambito delle conoscenze preesistenti negli studenti.

In letteratura uno dei primi, per ordine di tempo, importanti contributi che si trovano viene da Piaget e Inhelder (1975), che a lungo si sono occupati di studiare l'approccio ai problemi probabilistici in allievi di diverse età. In verità Piaget ha condotto questi studi interessandosi non solo a un loro impiego nella didattica della probabilità a scuola, ma allo scopo di verificare e corroborare la sua teoria sugli stadi di sviluppo mentale. Questa teorizzazione può interessare soprattutto la costruzione di un itinerario didattico per allievi di diverse età.

Così, indicativamente, nel cosiddetto periodo «preoperazionale», la consapevolezza dei meccanismi dei processi aleatori è ancora piuttosto bassa: si assiste a una certa confusione tra ciò che in un processo è aleatorio e ciò che può essere determinato. Dal punto di vista della combinatoria la determinazione di uno spazio campionario completo avviene senza un criterio e una strategia definita. Nelle situazioni di scelta in condizioni di incertezza i criteri dirimenti adottati possono essere eterogenei e non fondati su considerazioni numeriche.

Nei bambini della fase concreta operazionale, invece, la comprensione del concetto di casualità è migliore, anche se si assiste ancora a una sovrastima della capacità di previsione di eventi attraverso una loro fittizia modellazione. Migliore è comunque il discernimento tra situazioni casuali e deterministiche. Anche la capacità di trovare tutte le combinazioni che compongono uno spazio campionario è maggiore: nel farlo gli allievi mostrano di impiegare delle strategie, che tuttavia non sempre vengono portate avanti in piena coerenza. Il numero inizia in questa fase a venire impiegato come strumento informativo sul quale basare delle scelte, anche se, non essendo ancora adeguatamente sviluppato il concetto di proporzionalità, pure le scelte basate sui numeri rivelano ragionamenti non sempre corretti.

Ulteriore passo avanti gli allievi lo fanno entrando nella fase formale operazionale. In essa sono in grado di determinare, usando precise strategie, tutte le possibili combinazioni in uno spazio campionario, in situazioni ovviamente non troppo complesse; sanno usare criteri numerici per ordinare eventi di probabilità diverse, facendo ragionamenti di tipo proporzionale; dimostrano di comprendere la legge dei grandi numeri e di osservare come determinate distribuzioni di probabilità divengano più regolari e simmetriche all'aumentare del numero delle prove.

Un passo avanti negli studi sull'apprendimento di concetti probabilistici è quello compiuto da Efraim Fischbein (1975-1987), che in tempi diversi ha ripreso, parzialmente rivedendo e ampliando, le conclusioni di Piaget. Fischbein ha lavorato sulle intuizioni matematiche, elaborando una teoria che le classifica in due categorie, a seconda che siano frutto esclusivo dell'esperienza personale dell'individuo o che derivino da un insegnamento specifico nella materia. È proprio su questo elemento nuovo, di interesse centrale per la scuola, che si è focalizzata l'attenzione di Fischbein, cioè lo studio degli effetti di un intervento formativo per valutare, nei differenti stadi operazionali già considerati da Piaget, le modifiche operate dal modo di agire e pensare degli allievi.

Riassumendo il risultato di questi studi, si può affermare che i massimi effetti di un intervento formativo si hanno con un pubblico che è almeno nello stadio formale operazionale, quindi con allievi del secondo biennio della scuola media. In questa fascia d'età, un intervento formativo, secondo Fischbein, rappresenta uno stimolo efficace per meglio costruire e ristrutturare le concezioni in ambito aleatorio.

Negli stadi precedenti, viceversa, la didattica dei concetti non elementari ha un effetto limitato fintanto che non viene sviluppato il senso di proporzionalità, elemento fondamentale per comprendere alcuni ragionamenti probabilistici. Ci possono essere comunque alcuni effetti positivi dagli interventi formativi su allievi allo stadio concreto operazionale nella concezione di strategie di confronto probabilistico.

Minimi invece gli effetti della formazione specifica in bambini di età prescolare. Il discorso ovviamente cambia quando si parla in generale di educazione al pensiero non deterministico, intesa in senso lato: abituarsi all'idea che l'incertezza caratterizza gran parte delle attività umane, apprendere un linguaggio preciso, acquisire esperienza diretta di situazioni casuali sono apprendimenti che hanno una loro efficacia, anche su bambini della scuola dell'infanzia.

Ho sempre trovato intriganti, ancora prima di occuparmi professionalmente di didattica come insegnante, gli studi condotti da Kahneman e Tversky (1972-1974) sui cosiddetti «bias» o «tunnel della mente», ossia sulle falle del pensiero euristico. I due studiosi si sono occupati in particolare di indagare quali strategie vengono messe in campo dalle persone per compiere ragionamenti di tipo probabilistico, in particolare per operare scelte o prendere decisioni in condizioni di incertezza. Una importante osservazione derivata da questi studi, che è valsa il premio Nobel per l'economia ai due studiosi, è che ci sono dei precisi meccanismi di pensiero che conducono sistematicamente a determinate conclusioni in ambito probabilistico. Questi meccanismi sono generalmente conosciuti: in alcuni casi si rivelano utili per effettuare conclusioni corrette in ragionamenti probabilistici, per contro in altri casi portano a commettere errori tipici, ben evidenziati dalle ricerche.

I meccanismi, etichettati sulla base dei processi mentali coinvolti, sono quelli detti dell'**aggiustamento**, dell'**ancoraggio**, della **rappresentatività**, della **disponibilità**.

Nel meccanismo definito dell'**aggiustamento** ad esempio si giunge a stimare la probabilità di un evento non noto a partire da quella di un evento noto, basandosi tuttavia in alcuni casi su ragionamenti fallaci e quindi arrivando a conclusioni errate. Gli esperimenti dimostrano che solitamente si sovrastimano le probabilità degli eventi congiunti e si sottostimano le probabilità di eventi disgiunti.

L'**ancoraggio** è un processo che influenza le nostre scelte, condizionando le valutazioni, anche in campo probabilistico, sulla base delle prime informazioni che vengono acquisite, che fungono appunto da «ancora», da riferimento assoluto, al quale ci si aggrappa per ogni successiva considerazione.

Il criterio della **disponibilità** invece descrive come di frequente, nella valutazione della probabilità del verificarsi di un evento, si ragioni condizionati dalle proprie limitate esperienze precedenti, alle quali si attribuisce un peso maggiore rispetto a quello che dovrebbero avere.

Analogamente, nel valutare la probabilità che un oggetto appartenga a una classe, o che un evento nasca da un certo processo, ci si basa unicamente sulla presunta **rappresentatività** dell'oggetto rispetto alla classe o dell'evento rispetto al processo.

È interessante notare come gli studi dimostrino che la tendenza a compiere questo tipo di ragionamenti sia così radicata che in alcuni casi non sono solamente le persone digiune di nozioni di calcolo della probabilità a incappare nell'errore ma anche chi, pur senza essere specialista, abbia ricevuto una formazione specifica sul calcolo della probabilità[3].

Diversi altri studiosi successivamente hanno percorso le strade aperte da Kahneman e Tversky, in larga misura confermandone le scoperte e approfondendone le implicazioni, anche in ambiti esterni alla scuola. Una tra questi è Gerd Gigerenzer (2002), che da una parte conferma i risultati di Kahneman e Tversky e dall'altra su diversi aspetti vi si contrappone. In particolare Gigerenzer si è soffermato ad analizzare le conseguenze che una errata formulazione e interpretazione delle informazioni probabilistiche hanno in campo medico. Un aspetto che divide e contrappone Gigerenzer da Kahneman è la valutazione delle origini e del senso da attribuire a questi errori. Non condivisa da tutta la comunità ma da approfondire l'ipotesi portata da Gigerenzer (1995) e da alcuni colleghi (Martignon & Wassner, 2002) secondo la quale lavorando al calcolo delle probabilità sulle frequenze assolute (per esempio «quattro su 7») anziché sulle percentuali (per esempio «57.1%») si ottengano risultati migliori nell'apprendimento della materia.

A partire circa dagli anni '90 del secolo scorso lo studio della probabilità in molti Paesi è entrato a far parte del curriculum di studio in matematica in un più vasto gruppo di scuole e non più esclusivamente confinato al secondario superiore. Questo è accaduto parallelamente alla crescita del numero di ricerche sulla didattica della probabilità e al moltiplicarsi dei contributi da parte degli studiosi.

In particolare ci si è soffermati sull'opportunità di insegnare la probabilità agli allievi più piccoli, rispondendo al contempo anche alla domanda su «cosa» insegnare, oltre che «quando». L'interesse degli studi in questo campo è caduto infatti

3. Si veda anche l'articolo di G. Arrigo apparso sul numero 60 di questa rivista, nelle pagine 59-82.

sulla necessità di estendere l'ambito di interesse degli insegnamenti nello studio della probabilità. Si è vista la necessità di andare oltre i concetti sviluppati tradizionalmente a scuola, che abbracciano quasi esclusivamente la probabilità classica, solitamente insegnata attraverso applicazioni quali giochi di carte, estrazioni di palline da un'urna, lancio di dadi, situazioni non così vicine all'esperienza quotidiana degli allievi.

Interessanti da questo punto di vista le osservazioni di Gal (2005), che si è occupato degli aspetti legati all'alfabetizzazione numerica. Se è importante che gli studenti acquisiscano una familiarità con i concetti probabilistici per appropriarsi di uno strumento di comprensione e di integrazione nel mondo, quali sono i contenuti e le modalità con i quali veicolarli per un apprendimento efficace dei concetti in ambito aleatorio?

La risposta di Gal è articolata e abbraccia una serie di aspetti che un docente deve considerare quando costruisce un itinerario didattico. Sintetizzando gli obiettivi al quale questi aspetti fanno capo, si può tuttavia affermare che lo scopo è quello di fornire agli studenti le basi per essere in grado di comprendere e interpretare affermazioni e giudizi probabilistici, per generare valutazioni e giudizi sulle situazioni aleatorie sulla base delle informazioni disponibili e di conseguenza essere in grado di operare autonomamente delle scelte in condizioni di incertezza attraverso criteri razionali.

Riallacciandomi al discorso iniziale, ribadisco che, per poter fare un lavoro organico a scuola, nell'intenzione di fornire basi solide per un'educazione in ambito probabilistico, occorre comprendere quale sia il livello di conoscenze e di esperienze e il modo col quale gli allievi affrontano i problemi e da lì partire per costruire un percorso adatto alle loro capacità ed esigenze.

## 3. Domande di ricerca

Lo scopo principale del lavoro è indagare quali sono le preconoscenze degli allievi nell'ambito del calcolo delle probabilità, per cercare di capire quali problemi sono in grado di risolvere prima di un intervento formativo. Inoltre si vuole indagare quanto le preconoscenze e le concezioni sviluppate autonomamente possano essere d'aiuto nell'affrontare un percorso di studio sull'argomento alla scuola media e quanto per contro possano rappresentare un ostacolo nell'approfondimento della materia.

D1. Nello studio della probabilità, che padronanza hanno gli studenti del linguaggio naturale e del linguaggio matematico, dei concetti di base e delle strategie da impiegare per la soluzione di alcuni semplici quesiti, prima di ogni altro intervento formativo sull'argomento?

D2. Messi di fronte a problemi in ambito aleatorio che richiedono approcci metodologici diversi (classico, frequentista, soggettivista), come si muovono gli studenti per trovare la modalità più adatta per rispondere ai singoli quesiti?

D3. Nei ragionamenti su problemi di probabilità, gli allievi cadono nelle stesse trappole in cui cadono gli adulti quando impiegano le loro conoscenze euristiche? Quali deduzioni corrette riescono a fare gli allievi e dove incontrano maggiori difficoltà?

D4. Quali concezioni hanno gli allievi in merito all'equità di un gioco di scommesse? In quali situazioni riescono a elaborare dei criteri per stabilire se e come un gioco può essere equo?

## 4. Ipotesi di ricerca

Le ipotesi sono elaborate sulla base della conoscenza della classe in cui si sono svolte le sperimentazioni e su ciò che ho potuto dedurre dalla letteratura consultata.

I1. Mi aspetto una discreta padronanza del linguaggio naturale in ambito probabilistico. Probabilmente minore la consapevolezza di come vengono rappresentate in matematica le probabilità. Mi attendo che alcuni problemi vengano risolti con facilità, come descritto anche in letteratura, e che altri diano filo da torcere agli allievi.

I2. Trovo assai poco plausibile che gli allievi giungano autonomamente a determinare precisamente gli «ambiti di competenza» delle tre diverse concezioni di probabilità, che presumibilmente ancora non conoscono. Mi attendo tuttavia che noteranno la necessità di adottare metodi diversi per rispondere ai quesiti proposti.

I3. Alcune delle domande usate nelle sperimentazioni di Kahneman e Tversky sono molto sottili e mi attendo che anche gli studenti cadano negli stessi tranelli in cui cadono gli adulti. Per quanto riguarda gli altri generi di problemi, immagino risulteranno difficili quelli che coinvolgono probabilità composte ed eventi indipendenti, essendo argomenti non banali per chi non li ha mai affrontati in un corso.

I4. Il risultato atteso è che negli studenti i quesiti sull'equità dei giochi stimolino una riflessione che li porti in qualche modo a comprendere che in un gioco aleatorio deve esserci una relazione tra la somma pagata per giocare, la probabilità di vincita e la posta in gioco. Non mi aspetto che qualche studente riesca a formalizzare questa relazione, che può tuttavia venir impiegata correttamente in qualche caso particolare.

## 4. Metodologia

### 4.1. Tipologia e tempi della ricerca

La ricerca è di carattere prettamente qualitativo e del tipo di ricerca-azione. I dati sono stati raccolti sia sotto forma di elaborati scritti (testi liberi, quesiti e problemi da risolvere), sia attraverso l'osservazione sistematica di quanto avviene in classe. In classe si sono alternati momenti di raccolta dei dati a momenti in cui gli argomenti sono stati discussi insieme. La prima fase, di raccolta dei dati, argomento per argomento, ha sempre preceduto la seconda, di discussione e introduzione dei contenuti. Nel tempo in cui si è svolta la sperimentazione, durata poco più di un mese nel periodo compreso tra febbraio e aprile, la successione dei momenti è stata la stessa.

### 4.2. Campione di riferimento

La ricerca si è svolta esclusivamente in una terza media, corso attitudinale. Parecchie sono state le domande poste, tuttavia il numero di soggetti intervistati (17 unità) è così ridotto che qualsiasi analisi di tipo quantitativo non può essere estrapolata dal contesto della classe.

Il campione preso in esame sembra relativamente rappresentativo di una terza media attitudinale, sia per il rendimento in matematica, sia per le attitudini e l'interesse verso la materia. Solo 3 allievi sostengono di aver studiato alcuni argomenti di probabilità negli anni precedenti.

### 4.3. Modalità di somministrazione dei questionari

Seguendo i principi della ricerca azione e vedendo l'occasione di raccolta dei dati anche come un momento formativo per gli allievi, i questionari e le situazioni problema su argomenti nuovi non sono stati erogati esclusivamente in forma individuale ma anche in situazioni di lavoro a coppie o a gruppi.

In questi casi ovviamente non si è inteso raccogliere dati sulle conoscenze o le capacità dei singoli, ma osservare, secondo la filosofia socio-costruttivista, la capacità del gruppo di produrre risultati in qualche misura nuovi.

La lente è posta sulle preconoscenze degli allievi e sulle loro intuizioni in campo probabilistico, anticipando sempre con una fase di raccolta dati un successivo momento di confronto, consolidamento e approfondimento sulle situazioni affrontate.

I dati sono stati rilevati principalmente tramite questionari che prevedono risposte aperte o risultati numerici. I dati sono stati raccolti e vagliati singolarmente.

Ecco in sintesi le attività di raccolta dati svolte, con qualche indicazione sugli argomenti e sulla tipologia didattica:

- Conoscenze di base sulla probabilità, linguaggio e risoluzione di semplici problemi – raccolta dati individuale
- Approccio classico, frequentista, soggettivista – attività a gruppi
- Eventi composti, indipendenza di eventi – individuale
- Equità dei giochi – attività a coppie più un'attività di gruppo

Nell'analisi dei risultati riporto diversi stralci delle risposte fornite dagli allievi.[4]

## 5. Analisi e interpretazioni dei risultati

Di seguito riporto i risultati della ricerca, suddivisi per le quattro aree tematiche elencate nella pagina precedente.

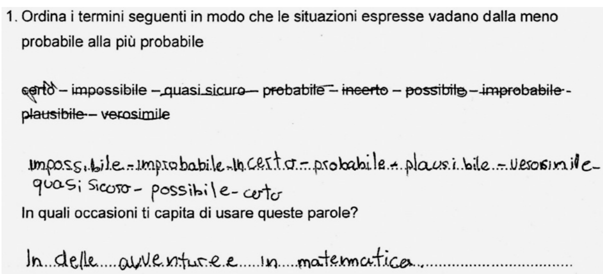
4. Tutti i materiali distribuiti agli allievi, che comprendono i testi con i quesiti da risolvere, sono in possesso dell'Autore e a disposizione di eventuali interessati.

## 5.1. Conoscenze di base sulla probabilità e sul relativo linguaggio

In questa prima batteria di domande, erogate in forma individuale, ho voluto sondare la conoscenza del linguaggio impiegato nel trattare eventi aleatori, nei vari registri, in particolare il linguaggio naturale e l'uso del numero come misura di probabilità.

Altro scopo del questionario è stato quello di indagare quale fosse la consapevolezza della pervasività dei fenomeni aleatori nel nostro mondo, anche per verificare se non ci fosse negli allievi quella che in letteratura viene definita «l'illusione della certezza» (Gigerenzer, 2002). Da ultimo ho voluto testare la loro capacità nell'affrontare alcuni semplici problemi probabilistici, per verificare che si potesse iniziare un itinerario su alcune basi comuni e che alcuni prerequisiti fossero presenti.

Nel primo quesito è stato richiesto di ordinare degli aggettivi che indicano il grado di incertezza relativa a un evento. L'ordinamento è stato reso volutamente un po' arduo comprendendo nella lista alcuni termini dal significato sfumato, come «plausibile» e «verosimile». Sostanzialmente gli allievi hanno mostrato di conoscere il significato dei termini, anche se mi ha colpito il fatto che l'aggettivo «possibile» in tre casi è stato associato a situazioni di certezza maggiori di quanto mi attendevo. In un caso, forse per distrazione, è stato messo dopo «certo».


1. Ordina i termini seguenti in modo che le situazioni espresse vadano dalla meno probabile alla più probabile

certo – impossibile – quasi sicuro – probabile – incerto – possibile – improbabile – plausibile – verosimile

impossibile – improbabile – incerto – probabile – plausibile – verosimile – quasi sicuro – possibile – certo

In quali occasioni ti capita di usare queste parole?

In delle avventure e in matematica

Abbastanza variate invece le risposte relative alle situazioni in cui vengono impiegati i termini elencati. Diversi soggetti hanno risposto che sono usati in situazioni di incertezza, qualcuno, scolasticamente, ha osservato che vengono usati in matematica nel calcolo della probabilità, qualcun altro ha scritto che li usa raramente, altri sostengono che sono usati molto di frequente. Un allievo ha risposto: *«Quando mi serve valutare una situazione da svolgere»*, avendo già in mente quindi situazioni di scelta in condizioni di incertezza.

Nella terza parte del quesito 1 veniva chiesto di trovare un'altra scala di valutazione, più «matematica«, per rappresentare gradi diversi di incertezza. La gran parte degli studenti ha indicato nelle percentuali il modo per rappresentare il grado di incertezza, in un paio di risposte si suggeriva di usare i numeri da 1 a 10, una ragazza ha scritto semplicemente *«giusto»* o *«sbagliato»*, facendo forse emergere una concezione della matematica come di una disciplina che esclude l'incertezza dal suo campo d'azione.

La prima parte del secondo quesito, sulla probabilità di avere testa nel lancio di una moneta e sulla probabilità di avere croce le risposte sono state tutte corrette, tranne in un caso in cui la domanda è stata probabilmente male interpretata e la risposta è stata 0%. Lo stesso vale per la domanda sulla probabilità che esca un numero maggiore di sei lanciando un classico dado da gioco. Interessante come in questo caso gli allievi abbiano usato diversi registri comunicativi: alcuni hanno scritto *«impossibile»*, altri hanno usato la percentuale, un allievo ha scritto *«zero probabilità su 6»*, dimostrando così di avere poca chiarezza in testa sul significato dei termini «probabilità» e «possibilità», spesso confusi dagli studenti.

Sempre legato al modo di comunicare la misura di situazioni aleatorie il quesito numero 3:

3. E' possibile secondo te definire un massimo nella probabilità che si verifichi un evento? E un minimo? Quali parole useresti nel linguaggio naturale?

È certo, è improbabile

Come esprimi in percentuale la probabilità di un evento che sicuramente si verificherà? E un evento che di sicuro non si verificherà?

la probabilità è del 100% per la prima, per la seconda 0%.

E in un'altra forma numerica, non percentuale?

10/10 e 0/10

Quella mostrata nella scansione precedente è una delle poche imprecisioni riscontrate: quasi tutti gli studenti hanno correttamente indicato in «impossibile» e «certo» o «sicuro» i termini estremi di quantificazione minimo e massimo nell'ambito delle probabilità.

Un po' deludente invece, avendo lavorato a lungo in classe sulle diverse rappresentazioni dei numeri razionali e reali, il fatto che, pensando a una rappresentazione alternativa alle percentuali, a nessuno degli studenti siano venuti in mente i numeri espressi in forma decimale, oltre alle frazioni, indicate da gran parte della classe.

Nessun problema nel quesito 4, sulla probabilità di uscita del 3 nel lancio del dado, prevista da tutti correttamente ed espressa in diversi casi nella forma di percentuale del 16,6%.

Nel quesito 5 si è voluto osservare quali fossero le interpretazioni degli studenti di una frase di contenuto probabilistico piuttosto semplice: «Domani a Bellinzona la probabilità di pioggia è 30%». Più della metà degli allievi hanno sostanzialmente riformulato la frase senza aggiungere ulteriori interpretazioni. Interessanti alcune considerazioni, come quella di R.: *«a rigor di logica non è corretta, ma la vaghezza della frase da commentare potrebbe lasciare spazio anche a questa interpretazione».*

5. Le previsioni meteo dicono: "Per domani a Bellinzona c'è una probabilità di pioggia del 30%." Come interpreti questa frase? Cerca di spiegarlo nella maniera più precisa possibile.

Che su le 24 ore del giorno ci sono delle probabilità in certo tot d'ore pioverà (24:100.30=7,2)

La frase ti fornisce un'informazione precisa o hai qualche incertezza nell'interpretazione? Quale informazione in più vorresti per averla più precisa?

Qualche incertezza

La seconda domanda del quesito 5 non è stata interpretata come mi sarei aspettato: nessuno ha ritenuto l'informazione di per sé insufficiente (Quando pioverà? Per tutto il giorno o per un breve scroscio? Sarà una pioggia forte o una pioggerellina?), piuttosto ne hanno sottolineato l'incertezza. Lo scopo della domanda era quello di capire con quale spirito critico gli allievi recepiscono le informazioni di carattere probabilistico. Il quesito andrebbe probabilmente riformulato, proponendo magari un altro esempio.

> 6. Le previsioni del tempo danno probabilità del 50% di pioggia al sabato e 50% di pioggia la domenica in Ticino. Qual è la probabilità di pioggia in tutto il weekend?
>
> Il 50% per ogni giorno.

La ragazza che ha dato la risposta ha trovato un modo per evitare la domanda che aveva in sé una ambiguità di fondo: si richiede la probabilità che piova in almeno un giorno nel weekend oppure la probabilità che la pioggia cada, per qualche tempo indefinito, in entrambi i giorni del weekend? Nel primo caso la probabilità teorica è del 75%, nel secondo caso è del 25%. Non so se gli allievi abbiano colto l'ambiguità della domanda, in ogni caso praticamente tutti hanno risposto, senza commentare il loro dato, che la probabilità è del 50%.

Le domande successive erano tra loro collegate: vi si chiedeva rispettivamente di elencare eventi certi e impossibili (domanda 7) ed eventi molto soggetti alle leggi del caso. Essendo delle domande aperte le risposte in alcuni casi sono state abbastanza curiose, anche se non sempre all'apparenza coerenti con la domanda. In questo caso lo scopo era di vedere quali fossero le rappresentazioni degli allievi in merito al caso nella vita di tutti i giorni: quanto più ricchi e variati gli esempi, tanto maggiore è la consapevolezza della pervasività del caso nell'esperienza umana. Ecco un esempio di risposta interessante, basata sulle conoscenze scientifiche (e geografiche) dell'allievo:

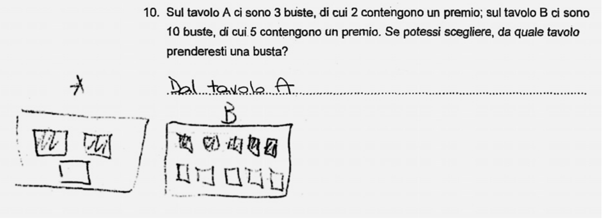
> 7. Elenca un evento che sei certo che si verificherà (probabilità massima assoluta) e un evento che di sicuro non si verificherà (probabilità minima assoluta).
>
> Che la Terra verrà inghiottita dal sole. La Svizzera avrà il Mare.
>
> 8. Elenca degli eventi che secondo te sono molto soggetti alle leggi del caso: possono verificarsi o non verificarsi con grande incertezza.
>
> Il terremoto

Altre risposte lasciano forse intendere una visione del caso limitata a situazioni più stereotipate:

> 8. Elenca degli eventi che secondo te sono molto soggetti alle leggi del caso: possono verificarsi o non verificarsi con grande incertezza.
>
> Vincere il lotto. Trovare soldi per terra
>
> Vincere a poker

Le ultime due domande sono più tecniche: bisogna trovare una risposta corretta ragionando sulle situazioni proposte. Nel quesito 9 si presenta una classica situazione dei problemi sulla probabilità: la pesca al buio dei calzini dal cassetto. Nel problema ci sono 4 calzini rossi e 4 bianchi, si chiede il numero minimo di calze da prendere per essere sicuri di averne due dello stesso colore. La maggioranza delle risposte sono state corrette, ossia 3 calzini, anche se si segnalano 3 risposte che indicano in 6 il numero minimo e un allievo ha dato come risposta 7.

All'ultima domanda di questa prima serie tutta la classe ha risposto correttamente, confermando di comprendere correttamente che per confrontare delle probabilità si debba in questo caso lavorare sulle proporzioni. Una studentessa, non so se per sua utilità o per meglio giustificare la sua risposta, ha pensato di produrre uno schema della situazione:


10. Sul tavolo A ci sono 3 buste, di cui 2 contengono un premio; sul tavolo B ci sono 10 buste, di cui 5 contengono un premio. Se potessi scegliere, da quale tavolo prenderesti una busta?

Dal tavolo A

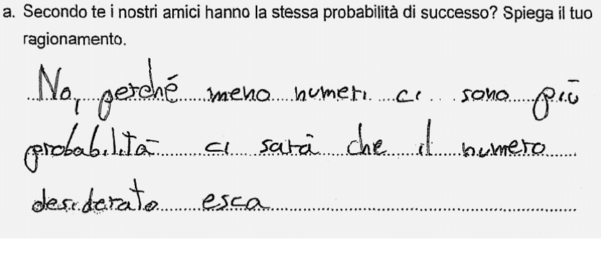


## 5.2. Approccio classico, frequentista, soggettivista

Per far emergere la consapevolezza della necessità di avere diverse interpretazioni della probabilità ho proposto un'attività a gruppi con tre situazioni-problema da affrontare. I lavori mi sono anche serviti per raccogliere ulteriori informazioni in merito alle concezioni degli allievi.

### Approccio classico

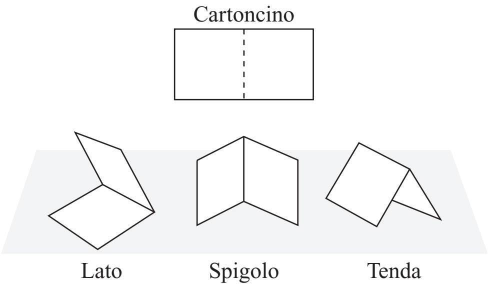
Il primo quesito era relativo alla probabilità di uscita del numero 5 in tre situazioni di gioco diverse: alla tombola, ai dadi, pescando una carta a caso da un mazzo di 40. I tre eventi andavano ordinati per probabilità crescente e andavano espresse le relative probabilità. I gruppi non hanno avuto alcun problema a rispondere alla domanda e le risposte raccolte erano tutte corrette. Le probabilità trovate sono sempre state espresse in forma di frazione. Dalle risposte raccolte emerge anche la consapevolezza del fatto che la grandezza dello spazio campionario è un fattore che determina la probabilità di successo nel gioco:


a. Secondo te i nostri amici hanno la stessa probabilità di successo? Spiega il tuo ragionamento.

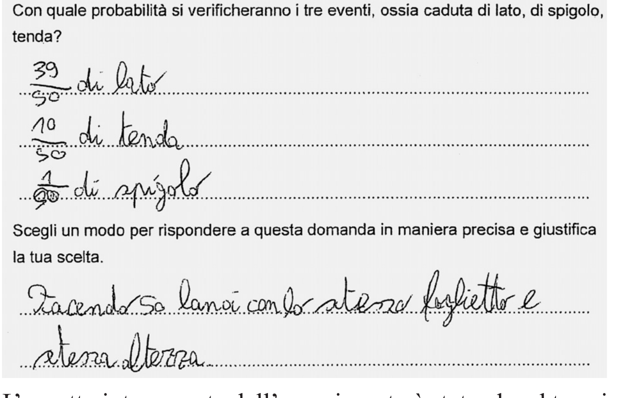
No, perché meno numeri ci sono più probabilità ci sarà che il numero desiderato esca

### Approccio frequentista

Nella seconda situazione problema si chiedeva ai gruppi di trovare la distribuzione di probabilità di un evento che può avere tre esiti distinti. L'evento è il lancio di un cartoncino rettangolare simmetrico piegato a metà e gli esiti possibili sono caduta di lato, di spigolo, oppure caduta su spigoli non consecutivi formando una sorta di tenda canadese.




Girando per i banchi ho notato qualche momento di smarrimento quando si è trattato di dare risposta ai semplici quesiti posti da questa situazione, che chiedevano con quale probabilità si verificano i tre tipi di caduta del cartoncino, anche se nella scheda distribuita era indicato che il cartoncino andava lanciato e la situazione testata fisicamente. Sono state necessarie delle brevi discussioni con i gruppi per far emergere negli allievi l'idea che in questo caso l'approccio doveva essere sperimentale e che la probabilità andava misurata a posteriori, basandosi su un numero sufficiente di tentativi per avere valore significativo. A partire da questa osservazione gli allievi si sono dimostrati autonomi nello svolgere le prove e nel discutere criticamente come condurre l'esperimento per avere i dati più precisi possibili.


Con quale probabilità si verificheranno i tre eventi, ossia caduta di lato, di spigolo, tenda?

$\frac{39}{50}$ di lato

$\frac{10}{50}$ di tenda

$\frac{1}{50}$ di spigolo

Scegli un modo per rispondere a questa domanda in maniera precisa e giustifica la tua scelta.

Facendo 50 lanci con lo stesso foglietto e stessa altezza

L'aspetto interessante dell'esperimento è stato che al termine dell'attività c'è stato un momento di confronto tra i gruppi e i dati sono stati raccolti in una tabella alla lavagna: le probabilità misurate indipendentemente erano sostanzialmente concordanti, mostrando una netta prevalenza di cadute di lato del cartoncino, un ridotto numero di cadute a formare una tenda e un numero esiguo di uscite di spigolo. Questa coerenza mostrata dai numeri ha dato credibilità all'esperimento condotto dagli allievi e, almeno limitatamente a questa situazione, all'approccio frequentista nel calcolo delle probabilità.

**Approccio soggettivista**

Per valutare la familiarità degli studenti con la stima in ambito probabilistico e la loro flessibilità nell'adattarsi a valutazioni in ambiti diversi, nel lavoro a gruppi ho messo anche un'attività di previsione di risultati sportivi, basata su un torneo di tennis in corso proprio nei giorni in cui veniva svolta l'attività. Nei fogli distribuiti ho allegato un breve testo, preso dal sito della Radiotelevisione della Svizzera Italiana (RSI), che forniva informazioni sui giocatori presenti nel torneo, sui loro risultati precedenti e sul calendario degli incontri previsti:

> "Sarà derby elvetico agli ottavi di finale del Masters 1000 di Indian Wells. Roger Federer (ATP 2) e Stanislas Wawrinka (18) hanno infatti superato, entrambi in due set, Ivan Dodig (60) rispettivamente Lleyton Hewitt (98).
> [...]
> Il vincente di questo ottavo andrà a incontrare chi si imporrà nel match tra lo spagnolo Rafael Nadal, testa di serie numero 5, e il lettone Ernests Gulbis (67), il quale arriva da una serie di 13 vittorie consecutive (essendosi appena imposto a Delray Beach partendo dalle qualifiche).
>
> Il bilancio delle sfide tra i due rossocrociati pende tutto verso il basilese che si è imposto 12 volte nelle 13 occasioni in cui i due si sono incrociati. L'ultimo derby risale agli ottavi dell'ultimo Masters 1000 di Shanghai, con il successo di Federer in tre set. Mentre bisogna risalire fino al 2009, ottavi di Montecarlo, quindi sulla terra rossa, per trovare la vittoria del vodese. Il duello di maggior prestigio tra i due compagni di Davis è però senz'altro il quarto di finale degli Australian Open 2011, vinto da Federer comodamente in tre set."

L'attività richiedeva di stimare la probabilità di vittoria agli ottavi di finale di Federer contro Wawrinka, di stimare la probabilità di vittoria agli ottavi di finale di Nadal contro Gulbis e infine di indicare la probabilità di avere un incontro ai quarti di finale con la coppia Federer – Nadal.

Le prime risposte erano aperte a considerazioni personali, tipiche dell'approccio soggettivista nel calcolo della probabilità, mentre la risposta all'ultima domanda è conseguenza diretta delle due precedenti risposte: le vittorie ai quarti sono eventi indipendenti tra loro e le relative probabilità vanno moltiplicate (a meno di eventi piuttosto improbabili, come il ritiro, prima dell'incontro, di uno dei due partecipanti che hanno diritto ad accedere ai quarti). La probabilità di eventi composti non è ancora stata vista e di conseguenza si vuole osservare fin dove si spinge l'intuizione degli allievi.

Le sorprese, positive, non sono mancate. Innanzitutto per prevedere la probabilità di successo di Federer contro Wawrinka alcuni gruppi hanno estrapolato il dato dei precedenti incontri (12 su 13 a favore di Federer) per ottenere la percentuale di probabilità. Il loro punto di vista soggettivo ha suggerito che in questo caso un approccio frequentista poteva funzionare. Altri gruppi hanno operato una scelta basata su altri criteri, prettamente soggettivi, motivandola con delle argomentazioni più discorsive.

> Secondo te chi vincerà tra Federe e Wawrinka? Con quale probabilità?
>
> Vince Federer con il 92,3% di possibilità
>
> Come hai fatto a fornire quel valore di probabilità?
>
> Facendo 100:13(partite disputate)·12(partite vinte)
>
> Chi vincerà tra Nadal (5° in classifica) e Gulbis (67° ma con 13 vittorie consecutive)? Con quale probabilità?
>
> Nadal perché è più alto in classifica - possibilità stimata 80%

È stato per me sorprendente invece rilevare che due dei cinque gruppi sono giunti autonomamente e senza suggerimenti all'intuizione che per ottenere la probabilità di un incontro Federer – Nadal le due probabilità andavano moltiplicate.

Con le informazioni che hai, con quale probabilità pensi ci sarà un incontro tra Nadal e Federer? In base a cosa fai questa stima?

59% ci sarà l'incontro

Facendo : $\frac{85 \cdot 70}{100} = 59\%$

**Eventi composti, indipendenza di eventi**

Dopo le prime lezioni in cui si sono visti alcuni concetti fondamentali nel calcolo delle probabilità, la fase di raccolta dati è proseguita con una serie di problemi di varia natura pensati per consolidare le conoscenze acquisite, verificare la capacità degli studenti di lavorare criticamente su situazioni nuove e per introdurre, sempre in forma di problema, il concetto di eventi indipendenti, peraltro già incontrato nel quesito sul torneo di tennis.

Nel problema 1 di questa serie si chiede quale sia la probabilità di estrarre, da un cesto di 30 uova sode alle quali vengono aggiunte 3 uova crude, un uovo crudo. Un po' inatteso il dato che tra le risposte raccolte ci fossero ben 6 errori, in cui la probabilità è stata calcolata pari a 1/10 anziché pari a 1/11, come dovrebbe essere.

Il secondo quesito è in qualche modo accoppiato con il quesito 10: lo stesso problema, in cui bisogna operare una scelta, viene presentato in due forme diverse. Nella prima versione si enfatizza la probabilità di riuscita, nella seconda versione i rischi. Gli allievi non cadono nel tranello, solo uno non mantiene la coerenza delle risposte.

Nel terzo quesito sono emersi prepotentemente gli errori che alcune euristiche di pensiero portano a fare nell'ambito della probabilità: ciò che alcuni studiosi hanno scoperto valere per gli adulti sembra valere anche per degli adolescenti. Ecco il testo del problema e una risposta abbastanza rappresentativa di quanto hanno scritto gli allievi:

3. "Oreste è un ragazzo metodico, riflessivo, porta gli occhiali e legge tanto."
   Conoscendo queste caratteristiche di Oreste, ordina gli eventi descritti da quello che ritieni meno probabile al più probabile:
   a. Oreste nel tempo libero gioca a calcio
   b. *Oreste nel tempo libero frequenta un circolo di scacchi*
   c. Oreste da grande lavorerà in una casa editrice
   d. Oreste da grande lavorerà in una fabbrica
   e. Oreste nel tempo libero frequenta un circolo di scacchi e gioca a calcio

   Eventi ordinati per probabilità crescente: d/a/e/c/b

Così espresso il testo poteva portare a risposte non corrette dal punto di vista logico e così è stato. Quasi tutti hanno dato come più probabile l'evento «e.» rispetto all'evento «a.», di cui l'evento «e.» rappresenta un caso particolare: una persona che gioca a calcio e a scacchi sicuramente gioca a calcio. Inoltre tutti danno come molto più probabile che un ragazzo sia iscritto a un circolo degli scacchi rispetto che giochi a calcio, cosa chiaramente contraria all'esperienza comune e a una concezione razionale della probabilità soggettiva. Lo stesso vale per il futuro professionale: sono molte di più le persone che trovano un generico lavoro in una generica «fabbrica» piuttosto che quelle che lavorano in una casa editrice, anche se la stragrande maggioranza delle risposte ha dato come più probabile un futuro impiego in una casa editrice. La domanda è stata costruita sull'esempio di quelle proposte nei famosi esperimenti di Kahneman e Tversky. Ho cercato di adattarla cambiando il contesto per renderlo più vicino a quello degli allievi delle scuole medie. L'esito delle risposte è molto chiaro.

Il problema successivo ha evidentemente messo in difficoltà gli allievi, nessuno dei quali ha risposto correttamente: si trattava di trovare la probabilità di avere almeno un 6 nel lancio di due dadi. Molti non hanno proprio risposto alla domanda (nella seconda parte si rimandava a una simulazione al calcolatore e questo probabilmente ha condizionato il loro comportamento), nessuno ha realizzato la tabella con le uscite possibili, le risposte ricevute erano espresse in forma frazionaria (1/6 la risposta più frequente) senza commento, tranne questa:

4. Qual è la probabilità di ottenere almeno una volta un 6 lanciando due volte un dado? (Un modo, un po' laborioso, ma efficace, per rispondere può essere quello di costruire una tabella con tutte le combinazioni possibili e contare quelle favorevoli.)

Possibilita con un lancio = $\frac{1}{6}$ con due = $\frac{2}{6}$

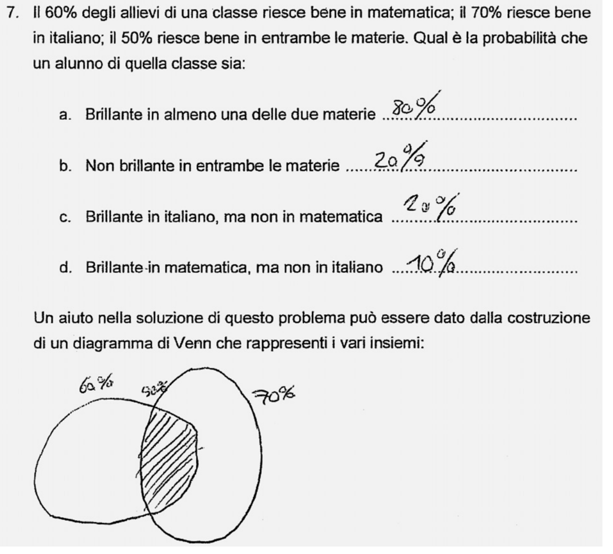
Mi aspettavo viceversa che la domanda successiva non avrebbe dato troppe difficoltà agli allievi, ma le confusioni non sono mancate.

5. Nella classe di Arturo ci sono 10 maschi (Arturo compreso) e 8 femmine. Oggi in classe è assente un allievo. Calcola la probabilità che sia assente:
   a. Arturo 1/18
   b. Un maschio 1/10
   c. Arturo o una femmina 1/18

Il punto «a» è stato risolto con una buona riuscita, tutti tranne 6 hanno risposto correttamente 1/18 e i 6 che hanno risposto 1/10 probabilmente sono stati sviati dalla frase «è assente un allievo», intendendo per allievo un maschio. In effetti anche questa interpretazione è da considerarsi del tutto lecita: l'ambiguità è intrinseca nell'uso della lingua italiana e per eliminare ogni fraintendimento il testo andrebbe modificato. Va tuttavia sottolineato che interpretando per «allievo» un allievo maschio il quesiti b e c perdono in parte di significato, riconducendosi di fatto al caso banale della certezza («b») e nel quesito «c» a un'enunciazione equivalente del quesito a.

Sempre corretta la risposta alla semplice, prima domanda del problema successivo sulla probabilità di nascita di un pulcino maschio da un uovo. Al contrario, mai corretta la previsione della probabilità di avere almeno un maschio da due uova: molte le risposte che davano la stessa probabilità, ½, data per un uovo e solo due studentesse si sono avvicinate alla risposta corretta rispondendo rispettivamente 70% e 80%. Non è chiaro tuttavia il ragionamento o la stima che le abbia condotte a quel risultato giacché nulla hanno scritto in proposito.

Nel quesito 7 solo un allievo ha completato la risposta in maniera corretta corredandola anche di un adeguato diagramma di Venn, come suggerito dall'esercizio.



7. Il 60% degli allievi di una classe riesce bene in matematica; il 70% riesce bene in italiano; il 50% riesce bene in entrambe le materie. Qual è la probabilità che un alunno di quella classe sia:

a. Brillante in almeno una delle due materie 80%

b. Non brillante in entrambe le materie 20%

c. Brillante in italiano, ma non in matematica 20%

d. Brillante in matematica, ma non in italiano 10%

Un aiuto nella soluzione di questo problema può essere dato dalla costruzione di un diagramma di Venn che rappresenti i vari insiemi:



Il problema probabilmente per molti non è nuovo; si risolve, anche senza conoscere la probabilità, con l'insiemistica e la logica: alcune risposte giuste erano senza diagramma o con diagramma impreciso.

Il quesito 8 proponeva questa situazione:

*«Paolo e Francesca giocano ai dadi, lanciando a turno un dado. Vince chi ottiene il punteggio maggiore; se il punteggio è lo stesso, si pareggia. Calcolare: a) la probabilità di pareggio; b) la probabilità che vinca Paolo; c) la probabilità che vinca Francesca. (Pure in questo caso una tabella può aiutare. O anche una buona intuizione».*

Hanno risposto correttamente quegli studenti che seguendo il consiglio hanno costruito la tabella con tutte le occorrenze possibili nel gioco, su mie indicazioni. Ho notato anche molti errori. C'è stato chi ha provato a stimare la probabilità in percentuale ed è coerentemente arrivato a totalizzare il 100%, ponendo uguale la probabilità di vincita di Paolo e di Francesca; ad esempio con una terna 20%, 40%, 40%. Ci sono studenti che hanno trovato corretto dare come risultato un'equiprobabilità dei 3 eventi, dando a ciascuno di essi probabilità 1/3, ma c'è anche chi, sempre supponendo l'equiprobabilità, ha assegnato a ogni esito la probabilità del 50%.

Anche il quesito 9 è parte delle domande somministrate negli esperimenti di Kahneman e Tversky e l'ho inserito come verifica anche di quell'aspetto. In effetti affronta un tema di una difficoltà che non sarebbe opportuno affrontare in classe. Riferisco comunque l'esito dell'esperimento. A differenza di quanto riportato dagli studiosi, la classe appare spaccata in due e nel riferire il motivo della scelta i risultati si specchiano *«Nella clinica B perché ci sono meno bambini»* oppure *«Nella clinica A perché ci sono più bambini».*

9. In una città ci sono due cliniche con il reparto maternità, una molto più grande dell'altra: nella prima (clinica A) nascono in media da 45 bambini al giorno, nell'altra (clinica B) mediamente 15.

In quale è più probabile che nascano in un giorno più del 60% di bambini dello stesso sesso? Perché?

Nella clinica A perché nascono più bambini e quindi ci sono più possibilità

Del quesito 10 si è già detto, in quanto collegato con il quesito 2.

Il quesito 11 è arrivato per ultimo e probabilmente gli allievi erano stanchi, inoltre la necessità di dare un termine all'attività ha fatto sì che alcuni non siano riusciti a completare quest'ultimo esercizio. Forse anche per queste ragioni l'esito è stato negativo, nessuna risposta giusta. Si trattava di intuire il meccanismo di calcolo della probabilità di eventi composti. Visto il risultato avuto nella prova precedente sul torneo di tennis, mi sarei aspettato un risultato migliore. Forse la differenza è dovuta al fatto che nel caso del torneo la strutturazione degli eventi «a catena» era immediatamente visibile e il passaggio da una situazione alla sua modellizzazione matematica era di più facile comprensione. Anche la rappresentazione numerica delle probabilità mediante un numero decimale non ha aiutato, rappresentazione che sin dall'inizio gli allievi hanno mostrato di non amare particolarmente.

11. Giacomo, guidatore distratto, parcheggia spesso in una zona che prevede il disco orario. Con una probabilità di 0,4 si dimentica di mettere il disco. Nel parcheggio talvolta passa a fare il controllo la polizia: la probabilità che questo accada quando parcheggia Giacomo è uguale a 0,2. Calcola la probabilità dei seguenti eventi, mostrando eventuali passaggi e ragionamenti fatti.

a. Giacomo dimentica il disco orario e non prende la multa

75% -> $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$ 100:4·3=75

b. Giacomo prende la multa (parcheggiando una volta)

25% -> 100-75

c. Giacomo non prende la multa (parcheggiando una volta)

70%

d. Giacomo prende la multa per due volte consecutive

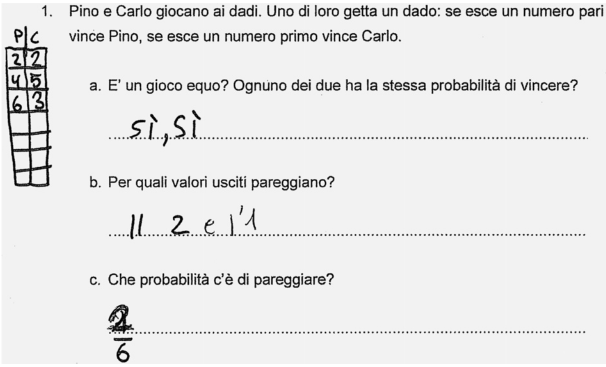
30%

### Equità di un gioco

Ultimo argomento affrontato nell'itinerario e nella raccolta di preconoscenze degli allievi è stato quello dell'equità dei giochi. È un argomento che personalmente ho trovato illuminante quando l'ho incontrato la prima volta a scuola e mi sembra formativo anche dal punto di vista non matematico: insegna qualcosa del mondo reale e dei suoi potenziali pericoli.

Mi sembrava interessante capire quali idee avessero gli allievi in merito appunto ai criteri per stabilire l'equità dei giochi di scommesse.

Il primo punto del primo quesito è stato risolto correttamente da tutta la classe: non tutti gli allievi tuttavia hanno compreso correttamente il senso di «pareggiare» nel gioco, ossia di trovarsi nella situazione in cui entrambi i giocatori vincono, oppure entrambi perdono. Errori di conseguenza ci sono stati nel secondo e nel terzo punto. Ecco una risposta corretta invece:


1. Pino e Carlo giocano ai dadi. Uno di loro getta un dado: se esce un numero pari vince Pino, se esce un numero primo vince Carlo.

| P | C |
|---|---|
| 2 | 2 |
| 4 | 5 |
| 6 | 3 |

a. E' un gioco equo? Ognuno dei due ha la stessa probabilità di vincere?

sì, sì

b. Per quali valori usciti pareggiano?

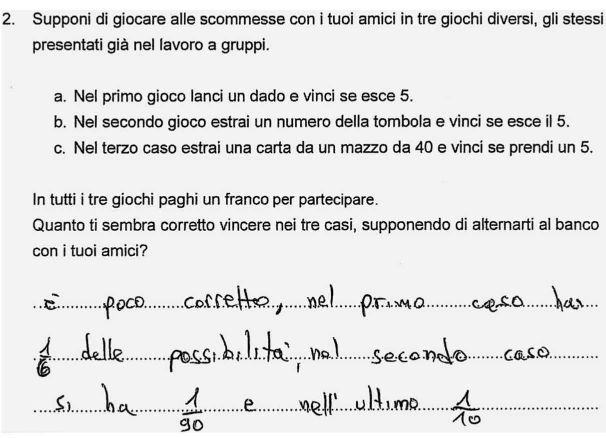
Il 2 e l'1

c. Che probabilità c'è di pareggiare?

$\frac{2}{6}$

Nel secondo quesito gli allievi hanno avuto difficoltà a rispondere. Si chiedeva loro di stabilire una vincita corretta in tre diversi giochi. A loro era chiaro quale fosse la probabilità di vittoria, anche perché sugli stessi dati avevano già lavorato nell'attività a gruppi, ma non sono riusciti a tradurre questo dato in un premio equo per giocatore e banco.

Notando la loro difficoltà ho discusso con alcuni di loro per aiutarli a riflettere su come ottenere una risposta: questi allievi hanno poi risposto correttamente, ma è chiaro che non lo avrebbero fatto in piena autonomia. Da notare, in questo come in altri quesiti, che la difficoltà talvolta è insita nella comprensione del testo, come nell'esempio riportato.

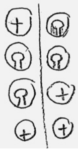

2. Supponi di giocare alle scommesse con i tuoi amici in tre giochi diversi, gli stessi presentati già nel lavoro a gruppi.

a. Nel primo gioco lanci un dado e vinci se esce 5.
b. Nel secondo gioco estrai un numero della tombola e vinci se esce il 5.
c. Nel terzo caso estrai una carta da un mazzo da 40 e vinci se prendi un 5.

In tutti i tre giochi paghi un franco per partecipare.
Quanto ti sembra corretto vincere nei tre casi, supponendo di alternarti al banco con i tuoi amici?

è poco corretto, nel primo caso hai $\frac{1}{6}$ delle possibilità, nel secondo caso si ha $\frac{1}{90}$ e nell'ultimo $\frac{1}{10}$

Alla luce di quanto osservato per questo quesito, appare poco spiegabile l'esito di quello successivo, risolto correttamente da quasi tutti gli allievi. Può darsi che sulla buona riuscita abbiano influito i numeri «tondi» usati nell'esercizio e può anche darsi che le osservazioni fatte nell'esercizio precedente siano state colte dalla classe.

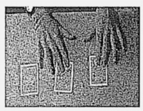


3. Giochi con un tuo amico al lancio di due monete: decidete che chi lancia vince 10 Fr se esce due volte testa. Supponendo di alternarvi a tenere il banco e a lanciare i ~~dadi~~ monete, qual è la quota giusta da versare per partecipare al gioco come lanciatori?

$\frac{1}{4}$ di vincere. 10 : 4 · 1 = 2,5 Ogni volta devi versare 2,5 Fr.

Buona anche la riuscita nel quesito 4, basato sul noto gioco delle tre carte. Tutti hanno trovato che il gioco è svantaggioso, facilitati anche in questo caso dalla presenza di numeri piccoli. Alcuni hanno semplicemente risposto «svantaggioso», altri, come nell'esempio sotto, hanno anche motivato la loro risposta:

4. Conosci il gioco delle tre carte? In quel gioco ci sono tre carte, tra le quali un unico asso di quadri. Un abile manipolatore, dopo aver mostrato l'asse di quadri mescola le tre carte tenendole sepre rivolte verso il basso, sopra a un tavolo. Al termine del rimescolamento bisogna individuare l'asso di quadri tra le tre carte.



Supponi che chi tiene il gioco (il banco) ti dà 10 Fr se trovi l'asso, mentre tu ne lasci 5 ogni volta.
Ti sembra equo, vantaggioso o svantaggioso partecipare, se anche guardando con attenzione il banco non riesci a vedere dove va a finire l'asso da trovare?

È svantaggioso, la possibilità di perdere sono $\frac{2}{3}$ e se vinci guadagni solo il doppio al posto che il triplo

Da un certo punto di vista il quesito 5 è stato quello dalle risposte più curiose. Si trattava di trovare la probabilità di vincita alla roulette puntando sul rosso e di fare considerazioni sull'equità del gioco e sulla convenienza di andare al casinò e a giocare alla roulette.

Solo tre studenti tra tutti hanno stabilito che il gioco è equo, ma va anche aggiunto che, di questi tre, una ha aggiunto *«circa»* tra parentesi e un altro ha messo la probabilità corretta di vincere, ossia 18/37, lasciando entrambi capire che per equo a loro modo di intendere vale anche *«solo leggermente svantaggioso»* o *«non troppo iniquo»*.

La domanda successiva chiedeva di trarre delle conseguenze dalla considerazione sull'equità del gioco. Si chiedeva se era quindi conveniente andare a giocare al casinò, chiedendo anche di motivarne le ragioni: gli studenti hanno messo considerazioni razionali, ma anche frasi fatte e osservazioni ovvie.

Alla prima categoria, delle considerazioni razionali, appartiene il maggior numero di risposte, nelle quali si fa riferimento alla probabilità di vincere che è minore di ½. Alcuni hanno scritto l'osservazione, corretta ma poco utile, che è conveniente andare se si vince e non conveniente quando si perde. Qualcuno ha completato l'esercizio con delle frasi fatte: due allievi hanno scritto che non è conveniente perché il banco vince sempre (di questi uno con il curioso refuso «il bianco vince sempre»), un altro allievo ha scritto di no «perché i soldi servono per altro».

Nel quesito successivo ho voluto uscire dal contesto dei giochi per entrare in un altro ambito, quello delle assicurazioni, che ricopre una grande importanza nella vita di ciascuno. Ho cercato di creare un contesto vicino agli allievi della scuola media.

6. Ettore sta acquistando una fiammante mountain bike e il negoziante gli si rivolge dicendo: “Visto che comperi una bici così bella, di 1'000 franchi, ti consiglierei di assicurarla contro il furto. Le statistiche dicono che c'è una possibilità su 200 che ti venga rubata nel giro di un anno e l'assicurazione costa solamente 7 franchi.”

Supponendo che il negoziante ti stia fornendo informazioni corrette, secondo te è onesto il prezzo richiesto dall'assicurazione? Come fai a stabilirlo?

Sì, il prezzo è onesto. Ci sono poche probabilità che succeda il furto ma la bici costa 1000 fr. e 7 fr. non è molto..

Nelle considerazioni di questa allieva rientrano tutti i dati salienti del problema e si intuisce che in qualche modo li abbia messi in relazione tra loro per giungere alla sua conclusione, anche se è chiaro che non ha colto quale doveva essere la relazione matematica.

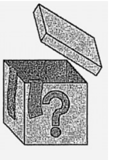
Lo stesso si può dire degli altri allievi: alcuni hanno fatto delle considerazioni adottando di fatto un criterio soggettivo per la valutazione. È chiaro invece che l'equità dell'offerta è da valutare oggettivamente, mentre dal punto di vista soggettivo si può valutare se aderire o no, anche quando consapevoli della inevitabile «iniquità» delle assicurazioni, a seconda della propria disposizione al rischio.

Alcuni studenti riportano la soluzione corretta, ma va detto che ci sono giunti solo dopo aver chiesto un aiuto e dopo uno scambio di osservazioni con me. Credo che non sarebbero arrivati a determinare la soluzione senza questo intervento.

Nel settimo e ultimo quesito di questa raccolta di dati, come nel caso precedente un po' si è pagata la stanchezza e il fatto che, dovendo a un certo punto ritirare il lavoro, qualcuno non è riuscito a terminare. Diversi infatti i quesiti non completati.

Chi ha svolto l'esercizio verosimilmente non ha seguito il consiglio di realizzare un albero probabilistico, già visto e spiegato in classe in esercizi precedenti: l'impressione è che molte risposte siano state date seguendo semplicemente l'intuito senza verificare che questo inducesse in errore. La seguente risposta ne è un esempio: si suppone, erroneamente, che sia più probabile prendere due nastri dello stesso colore rispetto a due di colore diverso per la predominanza di un colore nella scatola e si ritiene che per «bilanciare» la situazione vadano messi nastri di colore diverso in ugual numero.

7. Alex e Giovanni decidono di fare un gioco. Mettono due nastri rossi e quattro nastri blu in una scatola. Ognuno di loro pesca un nastro dalla scatola senza guardare (e senza rimetterlo nella scatola). Giovanni vince se i due nastri sono dello stesso colore e Alex vince se i due nastri pescati sono di colori diversi.



Il gioco è equo?

No, ha più possabilità di vincere Giovanni

Se non è equo, quanti nastri di ciascun colore dovresti mettere nella scatola per avere un gioco equo?

4 nastri rossi e 4 nastri blu.

Per rispondere alle domande può essere utile costruire qui sotto un albero di probabilità, come quello usato per rispondere alla domanda sulle multe per il disco orario.

In classe sono stati poi discussi tutti i problemi con le diverse soluzioni.

## 6. Risposte alle domande di ricerca

R1. Gli studenti ancora digiuni da ogni nozione scolastica hanno dimostrato di avere una discreta padronanza del linguaggio naturale per definire e comprendere situazioni probabilistiche, anche se ho potuto osservare alcune imprecisioni nell'uso di certi termini. Hanno dimostrato di avere una certa flessibilità nell'adottare diversi registri numerici per esprimere valori probabilistici, prediligendo comunque la forma percentuale e frazionaria rispetto alla forma decimale, poco usata. Positiva la loro risposta a semplici quesiti di calcolo di probabilità, anche in situazioni di scelta.

R2. Nella soluzione di problemi semplici l'approccio classico è quello che, anche negli studenti, appare più naturale adottare. Affrontare una situazione in cui la probabilità vada ottenuta «a posteriori» con un approccio di tipo frequentista sembra meno naturale per gli allievi, che devono essere incoraggiati per attuarla, almeno la prima volta. Anche nell'approccio soggettivista, dopo qualche smarrimento iniziale, gli allievi si sentono poi liberi di fare le loro considerazioni e diverse strategie vengono messe in campo per giungere alla soluzione.

R3. Gli stessi quesiti che hanno indotto in errore gli adulti coinvolti negli studi sperimentali traggono in inganno anche gli allievi di scuola media, in maniera sistematica. Arrivati a questa età, alcune euristiche di pensiero sono simili a quelle degli adulti.

R4. Il concetto di equità matematica di un gioco non è noto agli allievi, che talvolta includono tra i giochi equi anche quelli che giudicano solo leggermente iniqui. Apparentemente sembra comunque che riescano a elaborare autonomamente una concezione matematica di equità di un gioco nelle situazioni molto ben definite. Soprattutto sembrano fare la differenza i valori numerici in campo: per numeri bassi e «parlanti» le cose funzionano; le difficoltà aumentano con numeri più grandi e, per determinare l'equità, si passa da criteri numerici a considerazioni più vaghe e generiche di una situazione.

## 7. Conclusioni

Un aspetto sempre più sottolineato nella moderna didattica della probabilità è l'importanza di fornire una visione ampia degli strumenti e degli approcci al calcolo della probabilità. In questo ambito si inserisce la sperimentazione sull'atteggiamento degli allievi di fronte a situazioni che richiedono approcci diversi. La sensazione avuta osservando gli allievi è che si siano trovati di fronte a un iniziale senso di smarrimento nell'affrontare un problema matematico attraverso prove ripetute o stime soggettive dei fenomeni in gioco. È come se gli allievi inizialmente credessero che quel modo di procedere fosse poco «matematico» o forse semplicemente poco «scolastico», lontano da ciò che normalmente viene richiesto in classe. La sensazione però è che poi si siano presto adattati a quella metodologia di lavoro cogliendone la scientificità.

Ritengo comunque importante che a questi stimoli iniziali, utili a comprendere l'essenza dei diversi approcci alla probabilità, seguano altri interventi rafforzativi, attraverso esempi e situazioni diverse. Questo permetterebbe agli studenti di cogliere fino in fondo l'importanza che ognuno di questi approcci ha nell'ambito della disciplina e il suo peso nell'accrescere la conoscenza dei fenomeni stocastici nel nostro mondo.

L'argomento dell'equità dei giochi aleatori ha suscitato un certo interesse negli allievi e ha permesso di far trasparire alcune loro concezioni. Quello che mi è sembrato emergere, dai risultati è che un'idea di equità, seppur vaga, è presente già prima di ogni intervento didattico. Si tratta di un'idea embrionale, non sostenuta da alcun criterio matematico che permette di discriminare con un preciso calcolo situazioni di gioco eque da situazioni non eque. Si coglie, nelle considerazioni degli allievi, che essi colgano l'esistenza di una certa relazione tra le grandezze utili per determinare l'equità di una data situazione, ma la formalizzazione appare ancor lontana.

Ho però notato che in alcuni casi particolari la relazione è stata correttamente impiegata. Si tratta di casi isolati caratterizzati tra le altre cose da una configurazione numerica tale da permettere agli allievi di «vedere» subito la soluzione. In questo senso è parsa discriminante non solo la situazione e il relativo modello elaborato dagli allievi, ma proprio la tipologia di numeri in gioco: se piccoli e «facili» l'intuizione è risultata più raggiungibile.

A margine dell'ambito di ricerca scelto, mi sembra interessante riportare anche una considerazione in merito all'itinerario didattico svolto. Durante la scelta degli argomenti mi sono trovato a dover operare una selezione, favorendo alcuni aspetti a scapito di altri. Nonostante abbia dedicato all'argomento un tempo non trascurabile, ossia circa tre-quattro settimane, ho avuto ancora l'impressione di avere molto da approfondire e da consolidare in classe. Visti i limiti temporali imposti anche dalla programmazione annuale, abbastanza fitta per una classe terza attitudinale, la conclusione naturale è che sia poco efficace e poco compatibile con gli altri argomenti del piano di formazione confinare in unico lasso di tempo lo studio della probabilità, ma anzi, come accade per gran parte degli altri argomenti, si dovrebbe iniziare in prima con la presa di conoscenza e via via riprendere e approfondire negli anni i vari concetti.

## Bibliografia

Batanero, C., Henry, M., & Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. In *Exploring Probability in School* (pp. 15-37). Springer US.
Cañizares, M. J., & Batanero, C., & Serrano, L., & Ortiz, J. J. (2003). Children's understanding of fair games. In *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education.*
Fischbein, E. (1975). The intuitive sources of probabilistic thinking in children. Dordrecht, Olanda: Reidel.
Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics.* Dordrecht, Olanda: Reidel.
Gal, I. (2005). Towards «probability literacy« for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. In *Exploring Probability in School* (pp. 39-63). Springer US.
Garfield, J., & Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: Implications for research. *Journal for research in Mathematics Education*, 44-63.
Gigerenzer G. (2002). Reckoning with risk. Learning to live with uncertainty. London: Penguin Books, 2002. Trad. it.: Quando i numeri ingannano. Imparare a vivere con l'incertezza. Milano: Raffaello Cortina, 2003.
Gigerenzer, G., & Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats. *Psychological review, 102*(4), 684-704.
Greer, B. (2001). Understanding probabilistic thinking: The legacy of Efraim Fischbein. *Educational Studies in Mathematics*, 45(1-3), 15-33.
Greer, B., & Mukhopadhyay, S. (2005). Teaching and learning the mathematization of uncertainty: Historical, cultural, social and political contexts. In *Exploring Probability in School* (pp. 297-324). Springer US.
Kvatinsky, T., & Even, R. (2002). Framework for teacher knowledge and understanding about probability. In *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics ICOTS-6.*
Jones, G. A., & Thornton, C. A. (2005). An overview of research into the teaching and learning of probability. In *Exploring Probability in School* (pp. 65-92). Springer US.
Langrall, C. W., & Mooney, E. S. (2005). Characteristics of Elementary School Students' Probabilistic Reasoning. In *Exploring Probability in School* (pp. 95-119). Springer US.
Martignon L., & Wassner, C. (2002). Teaching decision making and statistical thinking with natural frequencies. In *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching of Statistics. Ciudad del Cabo: IASE.*
Negrini P., & Ragagni M. (2005). *La probabilità*. Roma: Carocci.
Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in children*. New York: Norton.
Piattelli Palmarini, M. (1993). *L'illusione di sapere.* Milano: Arnoldo Mondadori Editore
Serradó A., & Azcárate P., & Cardeñoso J. M. (2006). Analyzing teacher resistance to teaching probability in compulsory education. *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics - ICOTS-7*
Tversky, A., & Kahneman, D. (1975). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 141-162). Springer Netherlands.
Way, J. (2003). The development of children's reasoning strategies in probability tasks. In Mathematics Education Research: Innovation, Networking, Opportunity: Proceedings of the Twenty-sixth conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (Vol. 2, pp. 736-743).
Watson, J. (2005). The probabilistic reasoning of middle school students. In *Exploring Probability in School* (pp. 145-169). Springer US.

# 3. «Atomi & Molecole» e «Terne perfette e imperfette» Una proposta per avvicinare gli allievi all'aritmetica

Cristina e Claudio Ruggeri-Chierici[1]

This article presents a didactic proposal to familiarize the students of the first cycle of elementary school to arithmetic. Through a movement game and its considerations in the classroom, the students are encouraged to represent, process, convert, and coordinate various semiotic registers: these are basic operations to reach conceptualization. The alternation of reflection with the phases of the game has the dual function of motivating students to learn numeracy, and to verify how this is implemented as a skill.

## 1. Premessa

La proposta didattica presentata in queste pagine scaturisce da una riflessione sul campo, la scuola elementare, e sorge dall'esigenza di portare gli allievi ad acquisire competenze in merito a calcoli in lingua aritmetica espressi nelle forme più varie:

dalla 7+5=… alla …=7–5, dalla 7–…=5 alla 7=…–5

da completare con numeri appartenenti all'insieme dei naturali e, per citare un altro esempio,

la 7 … 12 … 5

che va completata con i segni aritmetici a mo' di uguaglianza.

L'idea di progettare un percorso, che miri agli obiettivi indicati, con inizio fin dai primi giorni della prima elementare senza fare uso del formalismo, nasce per due motivi principali.

1. Gli incoraggianti risultati rilevati al termine della seconda elementare dopo aver messo in campo i primi lavori incentrati attorno a terne di numeri sostanzialmente simili a quelle che, in questo scritto, vengono denominate «terne perfette». Gli allievi avevano manifestato dimestichezza nel gestire i calcoli espressi in lingua aritmetica.
2. La possibilità, intravista durante le prime applicazioni dei lavori appena citati, di anticipare il percorso lavorando con gli allievi senza l'uso del formalismo che la lingua aritmetica comporta.

Le scelte per la progettazione, la successiva realizzazione e la continua messa a punto del lavoro, che inizialmente consisteva esclusivamente in «Atomi&Molecole» e che, nel corso dell'applicazione ha visto l'aggiunta di «Terne perfette e imperfette», sono state intraprese sulla base di due spinte complementari.

1. Insegnanti nella Scuola elementare di Losone.

– Da un lato l'interesse per la didattica della matematica, con riferimento agli Autori Brousseau e D'Amore e suoi collaboratori del NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica) di Bologna, ha portato a riconoscere l'importanza di lavorare con accortezza sui registri semiotici per raggiungere competenza concettuale (D'Amore, 1999a).
– Dall'altro l'interrogarsi sulla professionalità dell'insegnante ha convogliato l'interesse verso il tema dei sistemi complessi, trovando approfondimento attraverso la lettura di alcuni saggi sulla scienza della complessità, citiamo qui *Formicai, imperi, cervelli* di Alberto Gandolfi (1999), e la rilettura di Edgar Morin (2000 e 2001), *La testa ben fatta* e *I sette saperi necessari all'educazione del futuro*.

Sulla base di queste due spinte, abbiamo scelto di:
– Confrontare l'allievo con varie rappresentazioni semiotiche, diverse appunto per i registri semiotici adottati, identiche per il significato delle relazioni aritmetiche espresse, per giungere alla costruzione di concetti;
– Preparare per l'allievo un contesto d'apprendimento complesso, nel quale far dialogare ordine-disordine-organizzazione al fine di spronare l'allievo e la propria mente a rompere rigidi schemi di pensiero e formarne nuovi più flessibili e in numero superiore.

## 2. Le nostre scelte

Un contesto complesso è assai funzionale all'apprendimento. Come pensarlo, prepararlo, realizzarlo?

Vista l'età degli allievi, 6 anni, abbiamo pensato ad una situazione ludica che presenti almeno alcune fra le caratteristiche dei sistemi complessi. La concezione dei sistemi complessi, sintetizzata nell'identikit proposto da Gandolfi (1999), è stata il filtro per leggere e ritoccare il sistema classe-situazione ludica inizialmente a nostra disposizione.

Per riuscire a rendere il sistema classe-situazione ludica più simile ad uno complesso ci è stato utile ricercare una cornice entro la quale inserirlo.

Una volta riconosciuta la natura intrinsecamente complessa dell'aritmetica, in quanto si occupa delle relazioni fra i numeri interi focalizzandosi sia sulle proprietà dei numeri stessi sia sulle operazioni che fra di essi possono avvenire, abbiamo individuato l'aritmetica quale tema d'apprendimento. Se, come tema, ci è parsa subito ideale, meno adatta ci è parsa quale cornice per un gioco da proporre ad allievi entrati da pochi giorni nella scuola elementare. Ricercando un'altra tematica, intrinsecamente complessa nella quale inserire il gioco, siamo approdati al mondo della chimica. Un mondo parecchio lontano dai bambini di sei anni. Eppure lì tutto filava liscio: nel caos gli atomi si muovono liberamente e hanno la possibilità di unirsi ad altri atomi formando così delle molecole. Il caso può favorire gli incontri fra gli atomi, ma soltanto precise regole permettono la costituzione di vere e proprie molecole. È possibile stabilire un parallelismo con il mondo dell'aritmetica: i numeri sono entità distinte quanto gli atomi nel mondo della chimica e hanno la possibilità di stringersi in relazione con altri. Affinché una relazione fra numeri esista, è necessario che abbia un fondamento di validità secondo regole aritmetiche.

Assumendoci il rischio della non comprensione del contesto da parte degli allievi, ma fermamente convinti della proponibilità della metafora, abbiamo deciso di inserire il gioco nella cornice del mondo delle particelle.

Nella descrizione del mondo delle particelle appaiono con evidenza alcune fra le caratteristiche dei sistemi complessi, come l'alto numero di elementi, la non linearità delle interazioni, il dinamismo, l'imprevedibilità, i fenomeni di autorganizzazione, l'autonomia parziale degli elementi, che abbiamo tenuto in considerazione per dare le basi al nostro lavoro.

Oltre a quanto appena detto, nella preparazione di un sistema di apprendimento complesso, abbiamo voluto far fruttare un'ulteriore caratteristica dei sistemi in questione: la presenza di cicli di feedback, che abbiamo individuato quale *motore*. Qualche parola in merito.

Nei sistemi complessi è possibile trovare due tipi di cicli di feedback: uno negativo e uno positivo. Il primo funge da stabilizzatore del sistema, in quanto l'output torna ad agire sull'elemento iniziale del ciclo inibendolo o bloccandolo. Il secondo, invece di inibire, stimola. Ne consegue l'aumento degli effetti prodotti dal ciclo e l'autorafforzamento dello stesso. È proprio a questo secondo tipo di ciclo che abbiamo pensato, quale *motore*. Perché non sfruttare le caratteristiche della complessità per *motivare* all'apprendimento?

Per questo abbiamo voluto intercalare la riflessione alle fasi di gioco in modo da permettere agli allievi di apprendere conoscenze aritmetiche e avere così la possibilità di attuarle in forma di competenze nella successiva fase di gioco. Inoltre abbiamo inserito vincoli e varianti differenti in ogni fase di gioco affinché sia vissuto ogni volta come un'intrigante sfida.

## 3. La proposta

Dal gioco Atomi&Molecole, pensato per la prima elementare, fino alle proposte di Terne perfette e imperfette, che possono aver luogo durante i due anni successivi, l'allievo ha la possibilità di confrontarsi con rappresentazioni semiotiche espresse attarverso i seguenti registri:

– la lingua naturale;
– gli schemi;
– la lingua aritmetica.

La nostra volontà di portare l'allievo a vivere in prima persona nel mondo dell'aritmetica, ha fatto nascere il gioco-riflessione Atomi&Molecole che consta di due componenti che si alternano e rincorrono vicendevolmente mantenendosi in continuo dialogo. Da un lato vi è il gioco e dall'altro la riflessione, completata da un eventuale allenamento. Il gioco, primo componente con il quale vengono confrontati gli allievi di prima elementare fin dai primissimi giorni di scuola, ha la funzione di calarli (meglio se in numero elevato, una cinquantina come nel nostro caso) in una piacevole situazione ludica numerica. Sia la riuscita che la non riuscita individuale o di gruppo nel momento di gioco vogliono essere da stimolo per la riflessione e il possibile allenamento previsti in aula e circoscritti al piccolo gruppo classe. Riprendere casi vissuti durante il gioco per andare oltre, cercando di scandagliare nelle relazioni fra i numeri, porta gli allievi ad apprendere nuove idee possibili per tessere relazioni fra i numeri stessi. Queste novità possono venire adeguatamente allenate in aula così che gli allievi si sentano ben preparati per la prossima sfida-gioco che ha luogo in palestra o in un altro grande spazio.

In Atomi&Molecole, situazione ludica ispirata a «La borsa delle lettere» letta in Staccioli (1998), ogni allievo assume il ruolo di «numero-atomo».

- Ogni numero-atomo porta con sé una carta sulla quale appare un numero scritto in cifre;
- viene immerso in un «caos numerico» costituito da molti numeri-atomo: un contesto ricco di possibilità d'incontro;
- è tenuto a cercare di unirsi a due altri numeri-atomo per formare una «terna-molecola» nel rispetto di due condizioni:
  1. i tre numeri della terna-molecola devono andare bene insieme per qualche buon motivo che abbia pertinenza aritmetica;
  2. tutti gli allievi della terna-molecola devono essere in grado di esplicitare, attraverso un registro semiotico a loro scelta, la motivazione aritmetica che tiene uniti i numeri;
- il numero-atomo, unito agli altri componenti della terna-molecola, si presenta all'insegnante, che ascolta e prende nota della terna presentata e della relativa motivazione aritmetica, elementi da utilizzare nella fase di riflessione;
- dopo aver effettuato un «percorso agitante», un rapido slalom insieme ai componenti della terna-molecola, ed essersi surriscaldato, riguadagna l'indipendenza dalla terna-molecola e torna a muoversi liberamente nel caos numerico. Ricomincia da capo la ricerca e continua il gioco fino al termine del tempo a disposizione.

Ogni numero-atomo, a gioco concluso, è pronto per iniziare la riflessione, che avviene in classe dopo qualche ora, come descritto in precedenza. E se la nuova sfida-gioco è già annunciata ed imminente, la motivazione sale per migliorare il più in fretta possibile le proprie competenze. La motivazione a tuffarsi nel nuovo gioco a questo punto viene dalla percezione di competenza appena sviluppata attarverso riflessione ed eventuale allenamento. Nella sfida-gioco annunciata, oltre a poter sfoderare le proprie competenze percependone la forza, l'allievo si trova confrontato con un nuovo vincolo-sfida. E via che riparte la motivazione per tornare in aula a riflettere ed allenarsi. Dialogo, alternanza, rincorsa fra gioco e riflessione/allenamento: una spirale di motivazione a sostegno dell'apprendimento delle relazioni fra i numeri.

«Terne perfette e imperfette», che ha luogo in aula a partire dalla seconda elementare, è la continuazione di Atomi&Molecole e porta gradualmente l'attenzione degli allievi verso la lingua aritmetica. I numeri, sempre raggruppati in terne, vengono scritti in cifre, liberati quindi dalla cornice rettangolare che caratterizzava il gioco-riflessione precedente, e bloccati in riga. La varietà di terne diminuisce, poiché la focalizzazione verte unicamente sulle possibili operazioni fra i numeri. Gli allievi sono messi nella condizione in cui l'unica possibilità di movimento, per individuare le relazioni fra tre numeri, deve avvenire nella loro immaginazione. Il movimento richiesto è interno: il ricordo del movimento nel grande spazio avvenuto a più riprese in prima elementare può essere d'aiuto per innescare il movimento interno utile alla ricerca di relazioni numeriche. Attraverso giochi e riflessioni viene introdotto l'uso della lingua aritmetica che, con molta concisione, riesce ad esprimere le relazioni che intercorrono fra i numeri che compongono ogni terna.

**Obiettivi cognitivi**

- Sviluppare la capacità di individuare relazioni fra i numeri.
- Ampliare le possibilità di esplicitazione della relazione che tiene insieme i numeri scelti, attraverso l'utilizzo di registri semiotici diversi.
- Costruire i concetti sui quali si basano le relazioni numeriche con particolare riferimento a: successioni, somma, sottrazione.

## 4. Descrizione della proposta: Atomi & Molecole

### 4.1. Il gioco

Il gioco sommariamente descritto in precedenza, nei primissimi giorni di prima elementare può essere giocato nella stessa modalità, ma prevedendo la sostituzione dei numerali con delle collezioni disegnate su carte simili a queste.

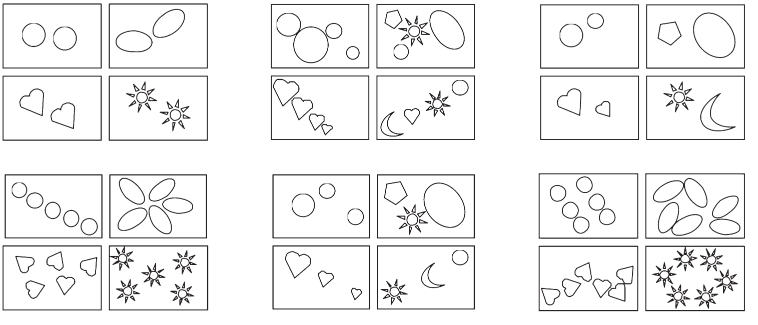


Figura 1. Le carte-collezione

La sfida per gli allievi, nel ruolo di «collezione-atomo», consiste quindi nel ricercare relazioni che abbiano pertinenza e di conseguenza esplicitarle. La pertinenza aritmetica, richiesta nel gioco con i numerali, non è qui esclusiva.

Quale motivazione sarebbe possibile per questa terna-molecola?[2]

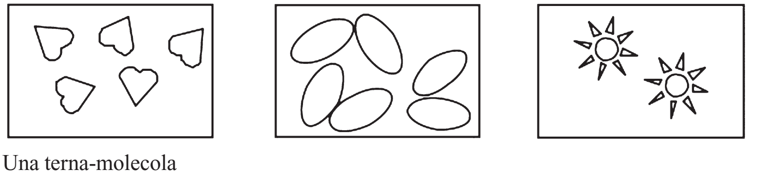


Figura 2. Una terna-molecola

2. Per esempio: tutte e tre le carte presentano collezioni con elementi sempre grandi uguali.

**Requisiti**

Per la versione con le collezioni: nessuno.
Per la versione con i numerali: saper leggere i numeri scritti in cifre presentati.

**Obiettivi**

Il gioco al «grado zero», presentato in precedenza, come pure le versioni con variabili e vincoli che verranno indicate, mirano a[3]:

- sviluppare l'immaginazione di relazioni possibili che legano il proprio numero (o la collezione) con altri; (apprendimento concettuale)
- sviluppare la verbalizzazione attraverso la lingua comune, provando a esplicitare la relazione che tiene in relazione tutti e tre i numeri scelti (o le collezioni scelte); (apprendimento comunicativo)
- sviluppare velocità ed efficacia affinché il gioco continui ad essere dinamico; (apprendimento algoritmico)
- sviluppare la presa di decisione quando il contesto presenta molte possibilità. (apprendimento strategico)

**Durata**

Il percorso, che si snoda sull'intero anno di prima elementare, si compone di 5 tappe. Ogni tappa dura ca. 2 unità didattiche (UD) consecutive: 1 di matematica e 1 di educazione fisica.

**Luogo**

Palestra.

**Materiali sempre necessari**

Attrezzi per la palestra per costruire i *percorsi agitanti*. È opportuno preparare questi brevi percorsi in funzione degli obiettivi che l'educazione fisica prevede nel momento in cui viene proposta la tappa (per esempio: semplici slalom).

Carte «Atomi & Molecole collezioni».

Carte «Atomi & Molecole numeri».

Occorrente per registrare le combinazioni e le esplicitazioni esposte.

I vincoli e le variabili del gioco previsti per le 5 tappe e l'indicazione dei rispettivi materiali specifici vengono presentati al punto 4.3, in quanto in stretta relazione con la parte di riflessione/allenamento.

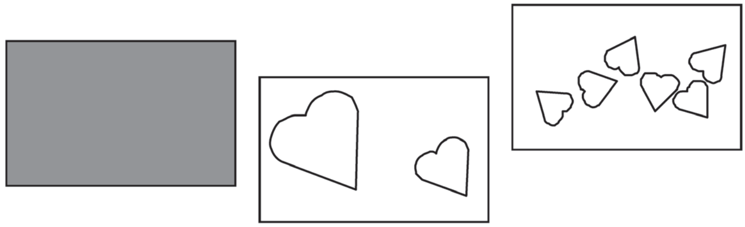
## 4.2. Riflessione/allenamento

Si è rivelato efficace introdurre gli allievi alla riflessione mostrando due delle tre carte (vedi esempio sottostante) e ponendo loro la domanda: *«Quale carta potrebbe esserci sotto il cartellino grigio? E perché proprio quella che stai pensando?»*. L'allievo è spinto immediatamente nella ricerca di una motivazione a sostegno della propria idea e nella consegnuente formulazione in lingua comune della stessa. Alla for-

3. Si fa riferimento alla classificazione degli apprendimenti di Fandiño Pinilla (2008).

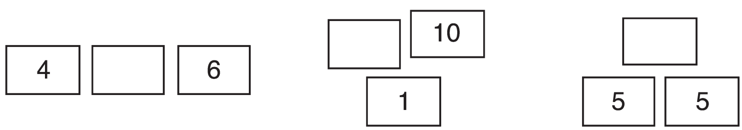
mulazione in lingua comune viene data molta attenzione così da poter gettare le basi per il passaggio successivo verso altri registri semiotici[4].

Esempio con le collezioni



Visto che nel gioco le carte sono spostabili, anche durante la riflessione è possibile modificare la loro collocazione. Le disposizioni differenti sono state d'aiuto per iniziare a registrare con chiarezza e concisione le varie relazioni e hanno permesso l'apparire di nuove idee per individuare relazioni: la rappresentazione grafica, un diverso registro semiotico, ha così favorito l'apprendimento concettuale.

Esempio con i numeri




Da sinistra:

1. Numeri in successione: il numero mancante può essere il 5 (ma non necessariamente);
2. In ognuno dei numeri appare la cifra 1: l'11 potrebbe completare la terna;
3. Questa situazione ha ricordato agli allievi la possibilità di operare con i numeri. Dal gruppo classe è scaturita la decisione che nel cartellino disposto più in alto potrebbe essere scritto il risultato della somma degli altri due.

Per fare in modo che gli allievi amplino le loro competenze, è possibile effettuare vari allenamenti. La varietà degli stessi cerca di favorire negli allievi la formazione di strutture di pensiero flessibili e di preservarli dal pericolo di crearsi troppo presto strutture rigide che potrebbero costituire un impedimento nel processo di costruzione delle conoscenze.

4. In particolare la lingua aritmetica: si veda la continuazione del lavoro con «Terne perfette e imperfette».

**Requisiti**

Saper leggere i numeri presentati scritti in cifre.

**Obiettivi**

- sviluppare l'immaginazione di relazioni possibili con le quali potrebbero essere messi in relazione due dei tre numeri (o le collezioni); (apprendimento concettuale)
- sviluppare la verbalizzazione in lingua comune, esplicitando la relazione che tiene in relazione tutti e tre i numeri scelti (o le collezioni scelte); (apprendimento comunicativo)
- sviluppare la gestione di registri semiotici attraverso l'uso di rappresentazioni grafiche (vedi posizione dei cartellini numerici); (apprendimento semiotico)
- sviluppare la capacità combinatoria per ottenere maggior varietà nelle relazioni fra le carte date; (apprendimento strategico)
- ev. attraverso l'allenamento sviluppare l'efficacia nell'individuare relazioni e nel fare proposte per le carte nascoste. (apprendimento algoritmico)

**Durata**

Ognuna delle 5 tappe di riflessione/allenamento, che inizia appena dopo aver svolto il gioco secondo la rispettiva variante, ha una durata da definire in rapporto al contesto della classe.

**Luogo**

Aula scolastica.

**Materiali sempre necessari**

Registrazioni delle combinazioni e delle esplicitazioni esposte dagli allievi durante il gioco.

Carte Atomi & Molecole collezioni.

Carte Atomi & Molecole numeri.

### 4.3. Descrizione delle tappe e rispettivi materiali specifici

**Tappa 1 Per conoscere il gioco Atomi & Molecole**

La tappa inizia in palestra, dove il materiale è già pronto per giocare.

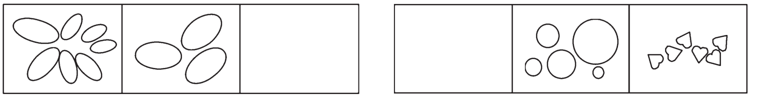
Agli allievi, raccolti in gruppo, vengono illustrate le nozioni di atomi e molecole attraverso un racconto nel quale appaiono pure i seguenti punti chiave, funzionali al gioco:

- moltissimi atomi vagano disordinatamente nello spazio;
- gli atomi, per riuscire a connettersi e diventare molecole, devono rispettare le due regole:
  1. possono connettersi soltanto a 3 a 3;
  2. i 3 atomi si connettono solo se hanno qualcosa di speciale che li tiene insieme;

– la molecola, quando si agita, si surriscalda e i tre atomi ritornano liberi a vagare nello spazio cosmico e hanno di nuovo la possibilità di riconnettersi con altri atomi.

È opportuno evitare di esemplificare mostrando le carte, soprattutto la prima volta in cui si presenta il gioco. Questo offre l'opportunità agli allievi di restare aperti nella ricerca di possibilità per stringere in relazione gli elementi. Il gioco viene svolto con le carte Atomi & Molecole collezioni, come pure la rispettiva parte di riflessione/allenamento in aula.

Dopo aver riflettuto insieme sono per esempio possibili proposte su scheda del tipo: *«Quale cartellino inseriresti? Disegnalo. Tieniti pronta/o a spiegare perché!»*



**Tappa 2 Per iniziare a mettere in relazione numeri**

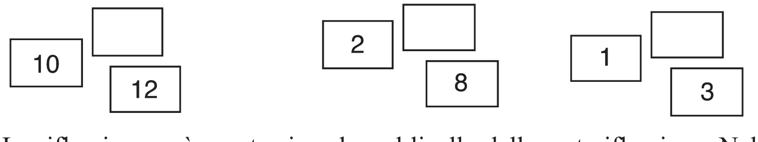
In palestra, gli allievi a conoscenza del gioco base, al grado zero, vengono sorpresi con un nuovo tipo di carte dove appaiono i numerali da 1 a 10 invece delle collezioni. L'impatto con le prime relazioni numeriche fa emergere le concezioni degli allievi che vanno accuratamente considerate nella successiva riflessione in aula attraverso per esempio stimoli del tipo:


*«Sotto il grigio, che ne dite del 2?»*
*«E quindi il 16 non va bene sotto il grigio.»*

Considerando l'età degli allievi, sei anni, è utile mantenere la focalizzazione sull'uso della lingua naturale al fine che diventi un mezzo fluido sia per l'espressione del proprio pensiero sia per la condivisione e la co-costruzione.

**Tappa 3 Per mettere alla prova le proprie conoscenze sulle relazioni numeriche e avvertire la necessità di ampliarle**

Gli allievi, giocando ad Atomi&Molecole in palestra, hanno la possibilità di sfoderare le loro competenze e di sentirsi stuzzicati ad apprenderne altre, dato che fra le carte appaiono anche i numeri 11 e 12. In aula è possibile continuare la riflessione/allenamento sulla stessa linea delle tappe precedenti: *«Quale numero inseriresti? Scrivilo. Tieniti pronta/o a spiegare perché!»*




La riflessione può spostarsi anche sul livello della metariflessione. Nel nostro caso, dato che fra le relazioni possibili è emerso: *«Insieme a 10 e 12 metto 1,* *così in tutti e tre c'è sempre l'1.»*, è stata occasione per introdurre e iniziare a distinguere i termini *numero* e *cifra.*

**Tappa 4 Per iniziare a rappresentare le differenti relazioni numeriche**

Questa volta il gioco, sempre nel grande spazio della palestra, mette gli allievi di fronte ai numeri fino a 20 e alla novità della doppia carta: due, quindi, i numeri a disposizione. Visto che ogni atomo può contribuire alla molecola con uno solo dei numeri, si trova a dover valutare fra un ventaglio più ampio di opportunità per connettersi. Come si attiverà l'allievo per rispondere in modo efficace alla nuova situazione data? Si focalizzerà su un solo numero alla volta? Sceglierà di ricercare altri due atomi restando contemporaneamente concentrato su entrambi i suoi numeri? Sarà pronto a sganciarsi da un atomo con il quale si è inizialmente connesso se intravede la possibilità di aggregarsi ad una coppia vagante di atomi e formare immediatamente una molecola?

Disporre della doppia carta ha contribuito a rendere il gioco ancora più intrigante per gli allievi, ad aumentare la complessità della situazione e a favorire il pensiero probabilistico. Il tutto ha facilitato l'emergere di vari tipi di relazioni fra due numeri. Per esempio:

*«Quale numero proporreste con 4 e 6?»*
*«Il 5, perché 4, 5, 6 sono in fila.»*
*«Il 2, perché 2, 4, 6 sono numeri in fila e si salta sempre via un numero.»*
*«Allora anche 8 va bene! 4, 6, 8.»*
*«Il 10, perché se aggiungi 4 a 6 arrivi a 10.»*
*«Il 2, perché 4 e 2 danno 6.»*

Volendo registrare i differenti tipi di relazione, è emersa la necessità di essere sintetici e chiari. È stato concordato di variare la disposizione delle carte (vedi esempi al punto 4.2).

**Tappa 5 Per avere la percezione di competenza**

L'aggiunta delle carte con i numeri 30, 40, …, 100 e il mantenimento della doppia carta, ha in taluni allievi stuzzicato e in altri soddisfatto la curiosità riguardo ai «numeri grandi». Questa volta, per gli allievi è stata l'occasione per dimostrare le proprie competenze e sentirsi abili nel connettere numeri ed esplicitare le relazioni.

Relazioni numeriche scaturite nel corso dell'anno:

– Numeri identici;
– Numeri che contengono la stessa cifra;
– Numeri in successione (consecutivi e a 2 a 2 o a 3 a 3) sia in ordine crescente che decrescente;
– Somme (n+n «gemelli», +1, +2, +10, altri);
– Sottrazioni (soprattutto in relazione ai «gemelli», –1, –2);
– Altro tipo: 1, 2, 4 *«perché se fai il doppio di 1 hai 2 e se fai il doppio di 2 hai 4»*.

## 5. Descrizione della proposta: Terne perfette e imperfette

Le terne volgono l'attenzione dell'allievo sull'uso della lingua aritmetica: le esplicitazioni delle relazioni numeriche, fino ad ora in lingua comune o esplicitate attraverso rappresentazioni grafiche (le disposizioni delle carte), sono ora richieste attraverso il graduale impiego dei segni aritmetici (+ – < = >).

Per iniziare il lavoro, gli allievi vengono confrontati con un tipo di terna che, di comune accordo, nel nostro caso, è stato denominato «perfetto». I tre numeri di una terna «perfetta» permettono, con la massima certezza, la formazione di un calcolo completo di risultato, quindi è vincolante l'impiego del segno = insieme a + o –.

Un esempio:

I numeri 3 8 5 costituiscono una terna perfetta, dato che con essi almeno una relazione di equivalenza è possibile. Uno dei modi per esprimerla è: 8 = 5 + 3.

Bloccare in riga i tre numeri, che gli allievi riconoscono come numeri sicuri per ottenere un calcolo completo di risultato, li porta a chinarsi anche su quei casi che fino a quel momento non avevano magari considerato. Ben diverso è riconoscere una sottrazione di fronte a 9…7…2 rispetto a 2…9…7, quando il numero maggiore sta in seconda posizione.

Restare nei vincoli, in particolare dovendo inserire il segno = nelle terne «perfette», pone l'allievo nella condizione di fare pratica del movimento interno e non più di quello visibile come in Atomi&Molecole. Attua il movimento interiore, quello dell'immaginazione, per la costruzione di concetti.

In seguito gli allievi sono chiamati a riflettere su un altro tipo di terna, che, nel nostro contesto, è stato distinto dal precedente apponendogli l'aggettivo «imperfetto». I tre numeri della terna «imperfetta»[5], per contro, non permettono la composizione di un calcolo completo di risultato, quindi necessitano l'uso dei segni < o > insieme a + o –.

Un esempio:

I numeri 4, 8, 5 costituiscono una terna imperfetta, dato che con essi non può esistere alcuna (elementare) relazione di equivalenza. I segni < o > diventano interessanti per esprimere le relazioni esistenti. Una possibile relazione fra questi tre numeri consiste nel confronto del valore 4 con il risultato che si ottiene dalla sottrazione 8–5. Tale relazione può essere esplicitata scrivendo 4 > 8 – 5.

Che cosa può accadere nella testa di un allievo abituato ad avere a che fare con terne «perfette» quando si trova di fronte a terne del tipo 3 9 7? La volontà di completare la terna seguendo l'abitudine, usando quindi i segni = insieme a + o –, permette all'allievo di scontrarsi con l'impossibilità. Lo schema adottato per le terne «perfette» entra in crisi. Questa fragilità dello schema rappresenta una condizione ideale per la ricerca di ciò che potrebbe risolvere il caso numerico con efficacia: l'impiego dei segni < o >.

5. Le prime terne «imperfette» presentate erano simili a 7 9 3, con numeri molto *vicini* a quelli di una terna «perfetta».

Nel percorso si è rivelato molto utile l'uso di terne, sia perfette sia imperfette, aventi un posto libero: un avvicinamento alle equazioni. Questa sfida ha calato gli allievi nella intensa ricerca del numero mancante inseribile e ha permesso di far emergere le competenze acquisite.

**Requisiti**

Nel campo numerico definito (a dipendenza delle competenze degli allievi), dominare, o almeno svolgere con scioltezza, somme e sottrazioni.

**Obiettivi**

- sviluppare l'uso dei segni aritmetici per ampliare le proprie conoscenze in merito, al fine di accedere ad una comprensione più estesa del loro significato; (apprendimento concettuale)
- applicare la capacità combinatoria per ottenere tutte le possibili diverse posizioni dei tre numeri della terna; (apprendimento algoritmico)
- sviluppare la gestione di registri semiotici attraverso la trasformazione da un registro all'altro (lingua comune, rappresentazioni grafiche (entrambe usate in Atomi&Molecole), lingua aritmetica); (apprendimento semiotico)
- sviluppare l'acquisizione della lingua aritmetica, esplicitando la relazione che tiene in connessione tutti e tre i numeri scelti; (apprendimento comunicativo)
- sviluppare la capacità di individuare un numero mancante valido da inserire nel posto libero di una terna, la cui relazione è già esplicitata attraverso i segni aritmetici; (apprendimento strategico)
- attraverso l'allenamento sviluppare l'efficacia nell'individuare relazioni, nell'inserire i segni aritmetici, nell'inserire i numeri mancanti. (apprendimento algoritmico)

**Durata**

Il percorso è la continuazione di Atomi&Molecole ed è proponibile fin dai primi mesi di seconda elementare. Si snoda nel corso della seconda e può pure continuare nella classe successiva[6].

**Descrizione delle attività e rispettivi materiali**

Le attività qui presentate sono pensate come componenti base da proporre, riproporre, intrecciare e far dialogare in vista del raggiungimento degli obiettivi.

Gli allenamenti indicati sono da intendere come possibili, in quanto mirano al raggiungimento dell'obiettivo contrassegnato con l'asterisco.

**Attività 1 Dai numeri mobili ai numeri fissi in riga**

Ripescare nella memoria Atomi&Molecole, magari rigiocandolo.

6. In terza elementare sono state introdotte le «Nuove terne perfette» 5…6…30 la cui relazione è esplicitabile con x e =. Permutando i tre numeri in riga (per esempio 6…30…5), nasce la necessità di inserire un nuovo segno, :, insieme a =.

Isolare i numeri che permettono di comporre un calcolo completo di risultato.

Scrivere in riga i tre numeri e chiedere: *«Come possiamo riuscire, molto brevemente e senza parole, a far capire quale relazione potrebbe tenere insieme questi tre numeri?»*

Identificare un'etichetta (nome o nome e aggettivo) condivisa dall'intera classe per denominare «i tre numeri che vanno bene insieme per formare un calcolo completo di risultato», per esempio terna perfetta.

**Attività 2 Una terna, tante possibilità (senza segni aritmetici)**

Piccola attività combinatoria per ricercare le possibili permutazioni dei tre componenti di una terna.

**Attività 3 C'è un posto libero nella terna perfetta! (di soli numeri)**

Presentare solo due numeri di una terna evidenziando il posto libero.
*«Quale numero potrebbe essere inserito?»*

**Attività 4 Una terna, tante possibilità (con segni aritmetici)**

Scegliere una terna e scriverla in tutte le possibili posizioni.
Inserire i segni aritmetici.

**Attività 5 C'è un posto libero nella terna «perfetta»! (con segni aritmetici)**

Variante 1
Presentare solo due numeri di una terna evidenziando il posto libero.
*«Quale numero potrebbe essere inserito?»*
*«E adesso quali segni aritmetici vanno inseriti?»*

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **11** | | **1** | **13** | | **1** | **15** | | **1** | **17** | | **1** |
| **2** | **11** | | **2** | **13** | | **2** | **15** | | **2** | **17** | |
| **3** | | **11** | **3** | | **13** | **3** | | **15** | **3** | | **17** |
| | **4** | **11** | | **4** | **13** | | **4** | **15** | | **4** | **17** |
| | **11** | **5** | **5** | **13** | | **5** | **15** | | **5** | **17** | |
| **11** | **6** | | **13** | | **6** | **15** | **6** | | **17** | | **6** |
| **11** | | **7** | **13** | **7** | | **15** | **7** | | **17** | **7** | |
| **8** | **11** | | | **13** | **8** | **8** | **15** | | **8** | **17** | |
| | **11** | **9** | **9** | **13** | | | **15** | **9** | | **17** | **9** |
| **11** | | **10** | **13** | | **10** | **15** | | **10** | **17** | | **10** |

Variante 2

Presentare solo due numeri di una terna evidenziando il posto libero. I segni aritmetici che esplicitano la relazione sono già scritti e non possono essere spostati.

5 + … = 16 *«Quale numero potrebbe essere inserito?»*

**Attività 6 8…12 ?**

*«Il 4 andrebbe bene, ma ecco che mettiamo 5. Questa terna non è più «perfetta». Come possiamo fare? C'è una relazione fra questi numeri?»*

Dopo aver lavorato in modo laboratoriale, giungere a introdurre i segni < e > da impiegare insieme a + o a –.

Evidenziare, per esempio attraverso un contorno/scatola, i due numeri che si intendono sottrarre o sommare. + e – vincolano quei due numeri che, legati e nel rispetto della relazione (sottrazione o somma), danno un unico valore che va confrontato con il valore del numero della terna rimasto solo. Una volta presa la decisione, inserire > o <.

$\boxed{\mathbf{8 \quad 5}}$ **12**  $\boxed{\mathbf{8 + 5}}$ **12**  $\boxed{\mathbf{8 + 5}}$ **> 12**

Identificare un'etichetta (nome o nome e aggettivo) condivisa dall'intera classe per denominare la nuova terna, per esempio terna «imperfetta».

Esempi di attività:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **11** | | **1** | **13** | **10** | **3** | **5** | | **15** | **24** | **17** | **7** |
| **3** | **11** | **8** | **5** | **13** | | **7** | **15** | **8** | **17** | **9** | **13** |
| **5** | | **11** | **7** | **20** | **13** | **9** | **4** | **15** | **1** | **17** | **18** |
| | **7** | **11** | **5** | **9** | **13** | **16** | **1** | **15** | **7** | **3** | **17** |
| **3** | **11** | **9** | **1** | **13** | | **3** | **15** | **11** | **5** | **17** | **12** |
| **11** | **10** | | **13** | **10** | **2** | **15** | **4** | | **17** | **9** | **6** |
| **11** | **4** | **8** | **13** | **4** | | **15** | **11** | **6** | **17** | **8** | |
| **6** | **11** | **17** | **8** | **13** | **6** | **8** | **15** | | **10** | **17** | |
| **5** | **11** | **4** | **8** | **13** | **5** | | **15** | **10** | | **17** | **2** |
| **11** | **9** | **2** | **13** | | **10** | **15** | **13** | **2** | **17** | **4** | |

**Attività 7 C'è un posto libero nella terna imperfetta!**

Variante 1

Presentare solo due numeri di una terna evidenziando il posto libero.

13…6 *«Quale numero potrebbe essere inserito? Attenzione, la terna deve essere «imperfetta»!»*

*«E adesso quali segni aritmetici vanno inseriti?»*

Variante 2

Presentare solo due numeri di una terna evidenziando il posto libero. I segni aritmetici che esplicitano la relazione sono già scritti e non possono essere spostati. 13 – …< 6 *«Quale numero potrebbe essere inserito? Attenzione, deve essere «imperfetta»!»*

Per trovare un numero (n) in grado di soddisfare la relazione espressa attraverso la terna 13 – …< 6 è necessario ricordare che il segno meno vincola il 13 con n. Quindi il risultato di questa sottrazione dovrà essere minore di 6.

$\boxed{\mathbf{13\ -\ \ldots}}$ **< 6**  $\boxed{\mathbf{13\ -\ 10}}$ **< 6**

## 6. Riflessioni

Come dichiarato nella Premessa la proposta didattica presentata è frutto di una riflessione sul campo e si basa su un'esperienza durata quattro anni. È possibile affermare che gli obiettivi cognitivi relativi all'intera proposta sono stati raggiunti.

Miravano a:

– sviluppare la capacità di individuare relazioni fra i numeri;
– ampliare le possibilità di esplicitazione della relazione che tiene insieme i numeri scelti, attraverso l'utilizzo di registri semiotici diversi;
– costruire i concetti sui quali si basano le relazioni numeriche con particolare riferimento a: successioni, somma, sottrazione.

Riguardo al primo obiettivo, se all'inizio del percorso gli allievi appena entrati nella scuola elementare si limitavano a mettere in relazione numeri perché identici o perché in successione (sempre +1), al termine del primo anno sono stati in grado di individuare almeno altre quattro relazioni possibili: presenza della stessa cifra in ognuno dei numeri, altre possibili successioni (per esempio: sempre +3), possibilità di somma, possibilità di sottrazione.

Con l'ampliamento delle possibilità di relazione gli allievi hanno avuto la possibilità di sganciarsi piuttosto in fretta dall'idea che «i numeri servono solo per contare» e iniziare a vedere le caratteristiche dei numeri, percepite a volte come intriganti. I numeri sono «oggetto di studio» e non solo «al servizio di».

Riguardo al secondo obiettivo è possibile affermare che la richiesta di esplicitazione ha spinto fin da subito gli allievi nello sforzo di «cercare le parole per dire davvero quello che ho nella testa» e ha reso in seguito naturale, e con sforzo assai ridotto, l'esplicitazione stessa dei pensieri: utilissima competenza sfoderabile su più fronti. Usare un registro semiotico e fare conversioni fra registri semiotici diversi ha permesso agli allievi di mantenere vivo il significato che i vari registri veicolano. Iniziare con le carte spostabili ed esprimere le relazioni con parole proprie, passare alle rappresentazioni delle carte in posizioni diverse, utilizzare i dadi speciali con i segni aritmetici per esplicitare relazioni fra terne numeriche, fin qui tutto senza matita, ha favorito l'avvicinamento al significato della lingua aritmetica e all'uso della stessa per completare silenziosamente, stavolta con la matita, terne di numeri bloccati in riga. Molto rari sono stati gli errori di lettura o utilizzo scorretto o confusione di segni aritmetici. Se dominata, la lingua aritmetica può essere silenziosa, stringata, efficace.

Il terzo obiettivo, riguardante la costruzione degli apprendimenti concettuali (in particolare successioni, somme, sottrazioni) è stato raggiunto in modo sicuro dagli allievi: non vi sono state confusioni fra i concetti. Inoltre gli spostamenti dei numeri, dapprima visibili attraverso i movimenti fisici in Atomi&Molecole e in seguito sempre più invisibili per l'occhio umano in «Terne», sono avvenuti con dinamismo. È possibile affermare che tale dinamismo ha per esempio permesso agli allievi di continuare a costruire il concetto di uguaglianza di valori e di apprendere a trattare con i segni = e > evitando di approdare e rimanere invischiati negli schemi « = significa *fa* e quindi va sempre posto sulla destra verso la fine di ogni calcolo», « > si usa per confrontare due soli numeri».

Un ciclo di feedback positivo si è innescato collegando e rafforzando la disponibilità a costruire schemi flessibili, la messa in discussione delle proprie idee, l'apertura ad accoglierne e valutarne altre: preziosi e utili atteggiamenti facilitatori dell'apprendimento.

Al di là dei tre obiettivi generali è possibile segnalare soddisfazione nel vedere che gli allievi manifestano rilassatezza nell'affrontare un'equazione del tipo «25 = 36 – …», quindi «con il segno = all'inizio», o nel cogliere la loro dimestichezza, e a tratti anche la velocità, nel giostrarsi con i numeri componenti le «Terne» e i segni aritmetici corretti.

Ulteriore soddisfazione nasce dal riconoscere che la percezione personale di competenza sentita dagli allievi, la sicurezza dinamica nel dominare l'argomento, è davvero un'utile linfa per la motivazione.

Se l'applicazione di Atomi&Molecole nella sua doppia spirale si è rivelata utile per un tempo determinato – prima elementare –, l'utilizzo di Terne nel corso della seconda non sembra aver esaurito il suo potenziale. Come accennato nel corso della presentazione della proposta didattica è stato possibile accorgersi a più riprese che Terne non si deve fermare con il concludersi della seconda. In terza elementare, per esempio, si è rivelato utile per introdurre la lingua aritmetica come possibilità di esplicitazione delle relazioni fra numeri nei casi di moltiplicazione e divisione sfruttando la sua immediatezza e il suo potere silenzioso.

## Bibliografia

D'Amore B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora Editrice.
Fandiño Pinilla M.I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica: Valutare e intervenire in modo mirato e specifico*. Trento: Erickson.
Gandolfi A. (1999), *Formicai, imperi, cervelli: Introduzione alla scienza della complessità*. Bellinzona: Edizioni Casagrande. Torino: Bollati Boringhieri editore.
Morin E. (2000). *La testa ben fatta: Riforma dell'insegnamento e riforma del pensiero*. Milano: Raffaello Cortina Editore.
Morin E. (2001). *I sette saperi necessari all'educazione del futuro*. Milano: Raffaello Cortina Editore.
Staccioli G. (1998). *Il gioco e il giocare*. Roma: Carocci editore.

## Sitografia

Robazza C. (2010). *Apprendimento motorio: approfondimenti metodologici (Modulo 7)*.
http://cird.unive.it/dspace/bitstream/123456789/259/7/Modulo_7.pdf
Ruggeri C. e Chierici C. (2011). *Gioco sportivo paradossale: una ricerca esplorativa.*
http://www.qims.ch/internet/qims/it/qims/praxis/hilfsmittel/downloads.parsys.74966.downloadList.2952.DownloadFile.tmp/giocosportivoparadossaleruggerichierici2011.pdf

# 4. Matematica, cosa ne pensano i bambini: indagine in una prima elementare

Lorella Maurizi[1]

The article is the result of a survey on the thoughts and the expectations of first-grade students towards mathematics. From the analysis of their thought processes the teacher is able to draw valuable suggestion for their own teaching.

Ricomincio il ciclo con una nuova prima elementare, o meglio una prima classe di scuola primaria. Siamo a Verbania nella scuola «Maria Peron» , settembre 2013, classe numerosa con ben 23 bambini. A ogni ciclo (e questo è per me il sesto!) mi chiedo come saranno questi bambini, che aspettative avranno nei confronti della scuola, delle maestre, che cosa pensano e soprattutto *come* pensano, cioè quali percorsi mentali sono loro usuali. L'esperienza mi ha insegnato che inevitabilmente ogni 5 anni le cose cambiano e anche molto. Ogni quinquennio mi trovo davanti a bambini diversi che basano i loro ragionamenti su principi ed esperienze differenti, non sono né meglio né peggio dei loro predecessori, semplicemente sono diversi e hanno un diverso modo di «funzionare».

E per me come maestra è molto importante cercare di capire il loro «funzionamento». Circa dieci anni fa la ricerca in campo psicologico ha cominciato a capire che i bambini anche piccoli imparano a conoscere il mondo che li circonda proprio come fanno gli scienziati, cioè eseguono esperimenti, analizzano statistiche e formulano teorie intuitive sul mondo fisico, biologico e psicologico (teoria della mente riformulata in «teoria della teoria» di Alison Gopnick[2].) Partendo quindi dal presupposto che tutti i bambini di tutte le epoche hanno opinioni personali su ogni argomento, cioè si costruiscono idee e pensieri su tutto, idee non necessariamente corrette, ma «aggiustabili» nel tempo e con l'aiuto delle esperienze, presupposto che mi convince appieno e, dovendo insegnare loro matematica per 5 anni, ho pensato di cominciare facendo una piccola indagine su quello che i *miei* bambini pensano sia la matematica.

Ve ne faccio un breve resoconto.

1. Insegnante alla Scuola Primaria «Maria Peron», Verbania, membro del RSDDM Bologna.
2. Professoressa di psicologia e filosofia alla University of California, Berkeley (USA).

Primi giorni di scuola, subito dopo l'accoglienza e la formazione delle classi, chiedo:

*Bambini cos'è secondo voi la matematica?*

– è quella cosa che studia i numeri (Margherita)
– la matematica serve a dividere i numeri grandi da quelli più piccoli (Andrea)
– serve per fare per esempio 2+3 che fa 5 (Leonardo)
– fa le operazioni (Emma)
– anche quelle difficili difficili come il per (Elena)
– i numeri li conoscono anche quelli che parlano inglese o francese, sono sempre uguali (Alessandro).

*Bambini, chiedo ancora, cosa fa quindi il matematico?*

– il matematico studia i libri con tanti numeri (Mattia)
– il matematico usa la calcolatrice e il computer (Sofia)
– secondo me il matematico studia anche gli animali, per esempio va in Africa e osserva quelli che vede, maestra a me piacciono tanto gli animali! (Greta)
– ma no, quello è il lavoro del veterinario! (Silvia)
– sì, ma se conta magari quanti leoni vede o quante zampe hanno lo può fare il matematico... (Greta)
– il matematico non è uno scienziato perché non inventa cose nuove, visto che i numeri ci sono già (Matteo).

Chiedo ancora: *i numeri cosa sono?*

– sono delle cose importanti perché servono per contare (Francesco)
– sono le cose con cui funziona la matematica (Leonardo)
– senza i numeri non ci sarebbe la matematica (Lucrezia)
– senza i numeri però non potremmo fare un sacco di cose tipo fare la spesa o comprare le figurine (Devrim)
– senza i numeri non sapremmo neanche quanti siamo in classe! (Matilde)

*Dove avete incontrato/visto per la prima volta i numeri?*

E qui si scatenano: in televisione; al nido c'era un gioco di cubetti con su i numeri; i numeri del telefono e del telefonino; sulle candeline della torta del mio compleanno; sulle targhe delle macchine, sulle case ecc,…

*Qual è il numero più grande?*

– non si sa non si può sapere (Sara)

Questa affermazione arrivata dopo un po' di silenzio, mi sorprende perché in classe abbiamo parlato a lungo dei numeri, ma non avevamo affrontato l'aspetto dell'infinità dei numeri. Allora insisto:

*Quanti sono i numeri?*

– sono tanti tanti, credo tantissimi(Francesco)
– mio fratello dice che non si sa quanti sono, nessuno lo sa (Asia)
– io dico che sono infiniti (Greta)

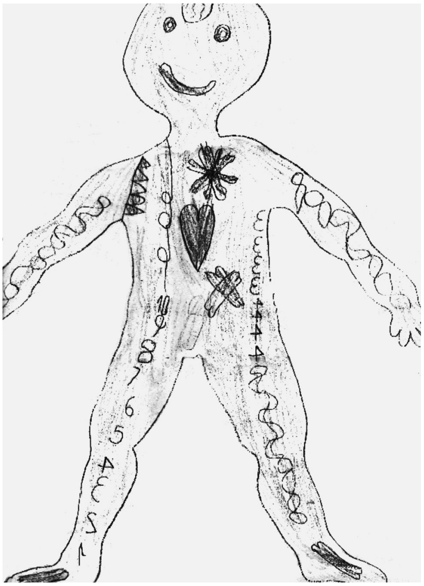
*Ma cosa vuol dire infiniti?*

– quando vuoi contare, per esempio, i sassolini che ci sono in spiaggia al lago, inizi e conti 1,2,3 e poi conti, conti e non ti fermi (Matteo)
– infiniti vuol dire che non si sa qual è il numero più grande (Emma)

*Qual è il numero più piccolo?*

E qui nessuna esitazione, *standing ovation* per lo zero!

La settimana successiva, nell'ambito di un'attività di scienze sulla percezione del corpo umano, chiedo ai bambini di disegnare, all'interno di una sagoma data, tutto quello che pensano ci sia dentro al loro corpo e Marta fa il seguente disegno



Incuriosita chiedo a Marta come mai oltre a ossa, cuore, cervello ecc. nella sua sagoma ci siano due lunghe serie di numeri.

E Marta mi spiega che: «i numeri noi li abbiamo dentro da quando si nasce poi veniamo a scuola e impariamo a tirali fuori!»

Insisto: *ma come mai li hai posizionati lungo la gamba e sul tronco?*

– perchè tutti nella testa non ci stavano, sono tanti sai maestra!

A questo punto pensando che passare da un registro semiotico a un altro può essere rivelatore ho proposto ai bambini di realizzare un disegno dal titolo «Dov'è la matematica» e vi propongo qui di seguito qualche esempio.


Alcune opere sono molto poetiche, come quella di Andrea per il quale la matematica, tra le altre cose, serve per contare le stelle; altre sono più vicine alle quotidiane esperienze dei bambini, come ci spiega Francesco, la matematica serve per contare i denti anche quelli che cadono.


Giulia riassume il generale pensiero della classe in una opera risolutiva: la matematica sono i numeri che servono per contare tutto!

La settimana successiva giochiamo con la linea dei numeri disegnata in corridoio e chiedo ai bambini di esprimere delle considerazioni.

– Se fai meno sulla linea non lo puoi sempre fare, perché se torni indietro e vai dopo lo zero cadi giù perché non c'è più niente (Leonardo)
  *Cadi giù dove?* Chiedo,
– Insomma non puoi stare in equilibrio sulla linea e cadi perché è come se ci fosse un buco (Margherita)
– È vero maestra! (Haleney)
– Invece il più lo puoi sempre fare perché da quella parte la linea c'è sempre (Alessandro)

– Sì, col più siamo tranquilli! (Mattia)

– Eh sì, dopo il 20 (la nostra linea in corridoio si ferma a 21…) la linea va avanti, va avanti e poi ancora avanti e poi sale, sale, sale,… (Sofia)

Verifico con altre domande che è opinione diffusa che più i numeri crescono più vanno in salita….

– Ma la linea non finisce mai (Lucrezia)

– Mio fratello che fa la quinta dice che ci sono numeri anche dopo lo zero (Asia)

– Sì, li so anch'io, sono quelli di quando fa freddo tipo sotto zero. Ma quelli sono diversi (Elena)

– Ci sono anche nell'ascensore dell'Esselunga[3] (Devrim)

– Sono andato anch'io nell'ascensore dell'Esselunga… (Michele).

Che cosa posso dedurre da un'indagine di questo tipo? che aiuto può dare alla mia didattica d'aula?

Posso dedurre che le operazioni mentali che sono alla base dei processi di pensiero e conoscenza dei bambini in merito alla matematica, ma non solo, si basano sulla descrizione della realtà attraverso l'osservazione diretta del mondo che li circonda, dall'analisi degli elementi e dalla registrazione dei dati esperienziali e sensoriali.

E perciò sarà necessario creare in aula situazioni di interazione diretta degli alunni tra gli oggetti, la natura, le esperienze della vita quotidiana, quindi spazi aperti a esperienze concrete.

E fin qui niente di nuovo.

Ma posso anche dedurre che i percorsi di pensiero dei bambini non sono molto dissimili da quelli degli scienziati e che siccome hanno capacità cognitive molto superiori a quanto si pensi è possibile osare e proporre loro riflessioni matematiche interessanti, non banali (come per esempio il concetto di infinito). Inoltre utilizzare la classe come soggetto pensante e la riflessione partecipata con il contributo di tutti come strumento di lavoro è una potente arma educativa. Penso che un gruppo di bambini sia in grado di argomentare con la discussione, la previsione e la deduzione di varie ipotesi che possono essere utili per interpretare i fatti e gli eventi.

Perciò coraggio insegnanti, alzate il tiro! Il percorso è faticoso e pieno di insidie, ma se pretenderete di più dai vostri alunni vedrete che vi regaleranno piacevoli sorprese!

3. Supermercato della zona.

# 5. Proposte di attività sulle frazioni

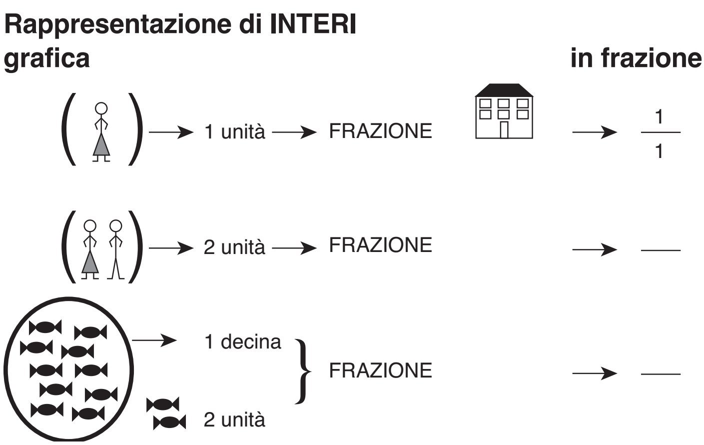
Bernardo Mutti

## 1. Programmazione delle attività

Le attività proposte mirano a introdurre ai concetto di frazione, di parti equivalenti e di numero intero, permettendo di sviluppare le capacità di astrarre e favorendo una prima memorizzazione dei termini. Il materiale è costituito di una raccolta di schede di apprendimento[1].

**Scheda 1**

**Frazione INTERO**
Disegna accanto a ogni rappresentazione di un intero un'altra simile e la frazione corrispondente.




(Assegnare più situazioni)

1. Dello stesso autore vedi anche l'articolo «Apprendere giocando», BDM 58, pag. 98-100.

Disegna accanto a ogni frazione-INTERO una rappresentazione grafica corrispondente.

**frazione** **rappresentazione grafica**

$\frac{3}{3} \longrightarrow$

$\frac{7}{7} \longrightarrow$

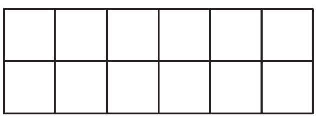
**Scheda 2**

**Diverse rappresentazioni di una frazione**

Disegna poligoni equivalenti nella griglia INTERO e scrivi accanto la frazione corrispondente.

Accorgimenti: è opportuno che i vertici dei poligoni coincidano con nodi della griglia e che i poligoni siano colorati diversamente.

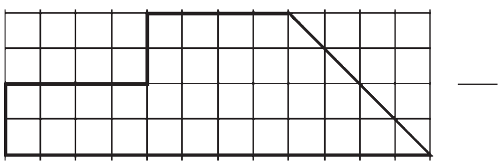
Ogni poligono ottenuto è una parte (o frazione) dell'INTERO.



FRAZIONI
(scheda operativa)

(Riprodurre più griglie-interi)

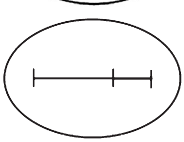
Esempio:



**Scheda 3**

Indica con una frazione la parte colorata rispetto all'intero.

INTERO $\frac{\text{numero delle parti colorate:}}{\text{numero totale delle parti:}}$ ______

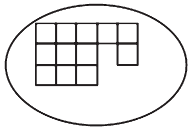


INTERO $\frac{\text{numero delle parti colorate:}}{\text{numero totale delle parti:}}$ ______

(Assegnare più situazioni)

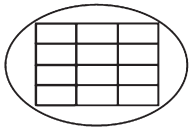
**Scheda 4**

Dividi in parti equivalenti le linee e le superfici e colorane una parte. A destra indica la frazione corrispondente.



INTERO

numero delle parti colorate: ______
numero totale delle parti:



INTERO

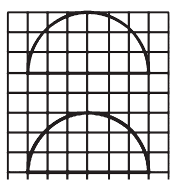
numero delle parti colorate: ______
numero totale delle parti:

(Assegnare più situazioni)

**Scheda 5**

Dividi in parti equivalenti e colora ciò che indica la frazione accanto.

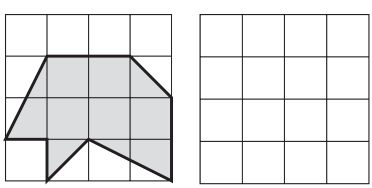
Se nella frazione trovi dei puntini, inventa una frazione e colora la parte corrispondente.

| | | Frazione | Valore dell'intero |
|---|---|---|---|
| INTERO |  | $\frac{1}{5}$ | $\frac{5}{5}$ |
| INTERO |  | $\frac{....}{....}$ | $\frac{....}{....}$ |
| INTERO (superficie) |  | $\frac{1}{4}$ | $\frac{....}{....}$ |
| INTERO (superficie) | | $\frac{....}{....}$ | $\frac{....}{....}$ |

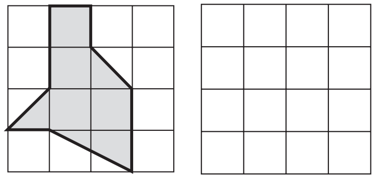
(Assegnare più situazioni)

**Scheda 6**

In ogni coppia di griglie INTERO devono esserci due poligoni non congruenti, la cui superficie rappresenta la stessa frazione, che devi scrivere a destra. Completa.



$\frac{....}{....}$



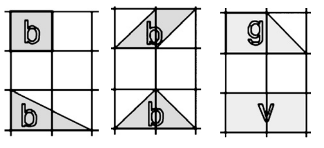
$$\frac{....}{....}$$

(Assegnare più situazioni)

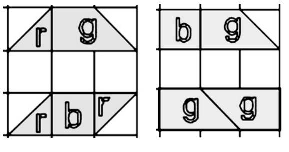
**Scheda 7**

Su griglie quadrate sono date 7 figure di base, i cui colori sono indicati con lettere (r=rosso, b=blu, g=giallo, v=verde).

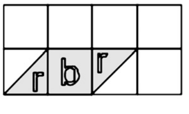

(figura minima)




Con esse si possono costruire altri poligoni, componendole in modo da far combaciare lati congruenti. Esempi:



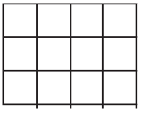

Esprimi con frazioni, sotto ogni poligono, il rapporto di ogni parte colorata con il poligono intero e la loro somma. Esempio:



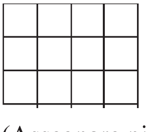

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{4}{4}$$

(Assegnare più situazioni)

Rappresenta graficamente i calcoli indicati a destra



$$\frac{4}{6}+\frac{2}{6}=\frac{6}{6}$$



$$\frac{4}{10}+\frac{3}{10}+\frac{3}{10}=\frac{10}{10}$$

(Assegnare più situazioni)

# 6. Gocce di didattica Spunti e riflessioni dalla ricerca in didattica della matematica[1]

Alberto Piatti[2]

## La valutazione formativa: una componente fondamentale per lo sviluppo dell'autonomia del docente e dell'allievo

Il tema di questo intervento è la valutazione formativa. La riflessione parte da alcune citazioni tratte da un articolo di sintesi[3] dove l'autore, Ian Clark, ha riassunto in chiave critica circa 200 fonti bibliografiche relative alla valutazione formativa. La tesi principale dell'articolo è che la valutazione formativa, in quanto processo di regolazione e riscontro continuo del percorso di insegnamento e apprendimento, sia fondamentale per sviluppare le capacità di apprendimento autonomo nell'allievo (Self-regulated Learning. SRL). Consiglio vivamente la lettura di questo articolo a tutti i docenti che desiderano rendere il proprio insegnamento più centrato sui bisogni degli allievi e che hanno come obiettivo lo sviluppo dell'autonomia intellettuale degli allievi.

## La valutazione formativa è un processo volto a promuovere l'apprendimento

«La valutazione formativa non è un test o uno strumento, bensì un processo volto a promuovere l'apprendimento nel corso degli anni di scolarità, al fine di permettere lo sviluppo di strategie di apprendimento su cui gli allievi potranno poi contare lungo tutto l'arco della loro vita. La valutazione formativa non è uno strumento di misura: non è strutturata con lo scopo di fornire una sintesi degli apprendimenti in momenti pre-determinati. Piuttosto, essa è concepita per sostenere l'insegnamento e l'ap-

1. Gli spunti forniti e le opinioni espresse, pur essendo suggerite dall'articolo considerato, sono da considerarsi un punto di vista soggettivo dell'autore della presente rubrica, che se ne assume la completa responsabilità, e non un risultato di ricerca.
2. Responsabile della formazione dei docenti di scuola media presso la SUPSI-DFA a Locarno e docente di didattica della matematica. alberto.piatti@supsi.ch
3. Ian Clark (2012) Formative Assessment: Assessment is for Self-regulated Learning. Educational Psychology Review 24 (2). Springer.

prendimento attraverso una focalizzazione e un'esplicitazione delle competenze metacognitive e della strutturazione del contesto di apprendimento necessari per lo sviluppo della capacità di apprendimento autonomo; una pianificazione e un monitoraggio delle attività svolte e una riflessione critica, ma non giudicante, sull'apprendimento. La valutazione formativa è utilizzata in modo collaborativo da allievi e docenti per regolare continuamente il processo di apprendimento e per migliorare le prestazioni.[4]»

Ingenuamente si tende a pensare che la valutazione formativa si differenzi dalla sommativa esclusivamente per l'assegnazione o meno di una nota. Questa idea è molto lontana dalla verità. La valutazione formativa, infatti, si differenzia principalmente per due aspetti fondamentali: lo **scopo** e la **collocazione temporale**.

La **valutazione sommativa** si situa di regola al termine di un percorso di insegnamento/apprendimento e ha come scopo la verifica della corrispondenza tra gli obiettivi stabiliti all'inizio del percorso e quelli effettivamente raggiunti dagli allievi al termine. Si tratta quindi di un **atto puntuale volto a un bilancio**. Questo bilancio può confluire in una nota a fini certificativi, anche se non è strettamente necessario.

La **valutazione formativa** è invece un processo continuo, volto a raccogliere, tramite osservazione e interazioni verbali e scritte, elementi utili rispettivamente al docente per regolare la propria attività di insegnamento, all'allievo per regolare il proprio apprendimento. Si tratta dunque di un **processo continuo di riscontro al docente e all'allievo per guidare nella giusta direzione il percorso di insegnamento e apprendimento**. In questo senso si può affermare che «*assessment may consist of hard data, but more often and more importantly of 'tacit knowledge', i.e. knowledge that both the teacher and student obtain through discussion, reflection and experience*»[5], ovvero: *la valutazione (formativa) può consistere in una raccolta di dati strutturata, ma più spesso e più efficacemente consiste in conoscenza tacita, ovvero una conoscenza che il docente e gli allievi ottengono tramite la discussione, la riflessione e l'esperienza.*

In quest'ottica **tutti i docenti che svolgono attività d'insegnamento in una classe effettuano in continuazione, consapevolmente o meno, attività di valutazione formativa**: ad esempio quando pongono una domanda diretta a un allievo, quando chiedono di esplicitare un ragionamento svolto o una strategia applicata, quando si fanno consegnare un compito svolto a casa, quando assegnano un esercizio da svolgere individualmente in classe, ecc. La domanda che deve porsi un docente non è dunque se egli svolga o meno valutazione formativa, ma piuttosto quanto ne sia consapevole e quanto la utilizzi per regolare in continuazione la propria attività di insegnamento e per fornire un riscontro continuo agli allievi.

Heritage[6] afferma che «*the purpose of formative assessment is to promote further learning, its validity hinges on how effectively learning takes place in sub-*

4. Articolo citato, p. 217, (Traduzione dell'autore).
5. Voogt, J. E Kasurien, H. (2005) Finland: Emphasizing development instead of competition and Comparison. In: Formative assessment: Improving learning in secondary classrooms, 149-162. Paris, OECD publishing. Citato da Clark (2012).
6. Heritage, M. (2007). Formative assessment: What do teachers need to know and do? Phi Delta Kappan, 89 (2), 140-145. Citato da Clark (2012).

*sequent instruction*», ovvero: *lo scopo della valutazione formativa è promuovere ulteriori apprendimenti, la sua validità dipende quindi da quanto efficacemente ed efficientemente si realizzano gli apprendimenti successivi.* In generale, **la valutazione formativa è una pratica fondamentale per progettare e realizzare un insegnamento efficace, efficiente e vicino ai bisogni degli allievi**.

Allo stesso tempo, la valutazione formativa è indispensabile per fornire un riscontro continuo agli allievi sullo sviluppo dei loro apprendimenti a livello cognitivo e meta-cognitivo e sostenere di conseguenza lo sviluppo di capacità di apprendimento autonomo. Tutti noi docenti adulti siamo in grado di studiare e approfondire autonomamente una tematica, ma abbiamo potuto sviluppare questa capacità nel tempo solo grazie ai riscontri che i docenti e le altre persone che si sono occupate della nostra educazione e istruzione ci hanno fornito nel corso del tempo. Nell'articolo del Clark si trova un interessante elenco di capacità e atteggiamenti tipici della persona in grado di apprendere autonomamente. Secondo quanto riportato nell'articolo, una persona è in grado di apprendere autonomamente se è in grado di:

– autovalutarsi,
– tenere appunti e monitorare il proprio apprendimento,
– cercare aiuto presso esperti e/o pari,
– esprimere un pensiero a parole, anche se si è da soli,
– adattare e inventare nuove strategie di apprendimento,
– stabilire obiettivi e pianificare la progressione degli apprendimenti,
– strutturare l'ambiente di apprendimento,
– gestire il tempo,
– impegnarsi in un percorso di apprendimento con i pari,
– usare risorse esterne alla classe,
– essere determinata e portare a termine quanto iniziato,
– regolare il progresso negli apprendimenti imponendosi premi o sanzioni,
– memorizzare e richiamare mentalmente informazioni,
– essere consapevole dei propri mezzi.

Da questo elenco emerge chiaramente la necessità, per sviluppare tali capacità, di confrontarsi in continuazione con docenti che forniscano all'allievo, lungo tutto il percorso di apprendimento, un riscontro non solo in merito ai risultati ottenuti, ma anche rispetto alle metodologie applicate, alle risorse attivate e alle competenze attivate e/o sviluppate.

Riassumere il tema trattato in poche pagine è impresa impossibile, spero tuttavia che queste poche righe possano suggerire agli insegnanti spunti di riflessione in merito alla loro pratica di insegnamento. Rimango volentieri a disposizione del lettore per richieste di approfondimento o per prese di posizione. Prima di terminare, mi permetto come sempre di formulare alcuni consigli pratici tratti dalla realtà quotidiana della formazione degli insegnanti presso il DFA a Locarno, rispettivamente dall'articolo considerato.

**Consigli concreti per sviluppare la valutazione formativa in classe:**

1. Per integrare in modo consapevole la valutazione formativa nella propria pratica didattica è indispensabile creare occasioni di osservazione e d'interazione verbale autentica e profonda con gli allievi. A tal fine è necessario proporre attività che permettano al docente di assumere un ruolo da regista/osservatore (ad esempio lavori di gruppo, lavori individuali, consegna di compiti svolti a casa, ecc.) o di moderatore/intervistatore (discussioni in classe, domande dirette, ecc.). questo richiede però il coraggio di…
2. … allontanarsi dal classico modello di lezione frontale o frontale/dialogata, per aprirsi con curiosità alla varietà di idee e di strategie d'apprendimento e di risoluzione di problemi degli allievi, e di…
3. … lavorare non solo a livello cognitivo, ma anche e soprattutto a livello meta cognitivo: chiedendo di esplicitare ragionamenti, metodologie applicate e risorse attivate, e sviluppando, attraverso un continuo confronto docente-allievi e allievo-allievo, la capacità di autovalutazione degli allievi.

**Consigli concreti per sviluppare le capacità di apprendimento autonomo negli allievi:**[7]

Concretamente, per favorire lo sviluppo di competenze di apprendimento autonomo negli allievi, il docente può:

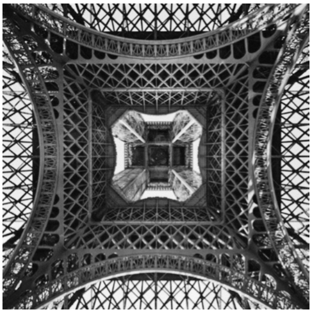
1. comunicare agli allievi gli obiettivi della lezione e i criteri di successo,
2. impegnare gli studenti in discussioni sulle strategie e le abitudini di studio;
3. coinvolgere gli studenti nella pianificazione dei lavori futuri;
4. informare gli studenti su dove possono ricevere aiuto e darvi accesso;
5. creare opportunità per lavorare a livello meta cognitivo, per creare consapevolezza di sé stessi in qualità di persona che apprende;
6. creare un ambiente di apprendimento produttivo e non competitivo, privo di rischi per l'autostima, basato sulla cooperazione e il dialogo,
7. supportare gli studenti quando assumono maggiore responsabilità per il loro apprendimento;
8. creare opportunità per partecipare attivamente e con regolarità al processo di apprendimento insieme ai docenti e ai pari, in un clima di uguaglianza e mutualità;

a partire dalla scuola dell'infanzia fino alle scuole superiori, adattando tali misure alle capacità e all'età degli allievi.

7. I presenti suggerimenti sono un adattamento di quelli riportati nell'articolo di Clark alle pagine 221 e 222.

# Agorando 1
# Una curiosità geometrica

Paolo Hägler e Giorgio Mainini

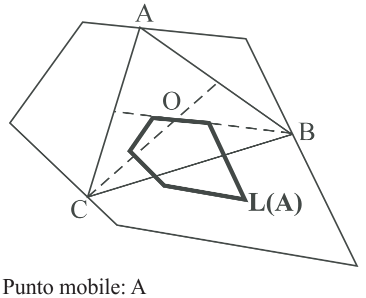


La Tour Eiffel a naso in su.

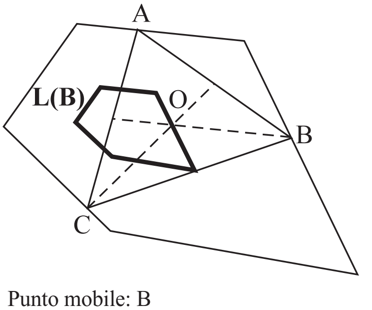
Dato un qualunque poligono[1], scegli tre punti qualsiasi A, B e C sul contorno, e chiama O il baricentro del triangolo ABC. Se un vertice di ABC, ad esempio A, percorre il contorno del poligono, che figura traccia O?

(In altre parole: al muoversi di A sul contorno, qual è il luogo geometrico L(A) del punto O?)

Un esempio per una prima congettura:




Punto mobile: A




Punto mobile: B

Sembra che i luoghi L(A) [e L(B)] siano figure omotetiche al poligono dato. Sarà vero? Cambierebbe qualcosa se il poligono dato non fosse convesso?

Per il premio, oltre che della correttezza, della completezza e dell'originalità della risposta, si terrà conto anche della «favoletta» che il solutore costruirà intorno al problema. Le soluzioni vanno inviate al seguente indirizzo e-mail:

agorando.bdm@gmail.com

1. Per poter lavorare con un programma di geometria dinamica, ma qualsiasi altra figura andrebbe bene.

# Soluzione del Quiz numero 50

*Per festeggiare il più piccolo numero naturale che si può scrivere come somma di due quadrati in esattamente* ***tre modi*** *diversi dovremmo arrivare fino al Quiz numero* ***325****.* Troppo per l'autore. Ecco il perché, come ci hanno scritto Tito e Alberto, allievi di prima liceo a Bellinzona:

| n | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $n^2$ | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 100 | 121 | 144 | 169 | 196 | 225 | 256 | 289 | 324 | 361 |
| 1 | 1 | 2 | 5 | 10 | 17 | 26 | 37 | 50 | 65 | 82 | 101 | 122 | 145 | 170 | 197 | 226 | 257 | 290 | 325 | 362 |
| 2 | 4 | 5 | 8 | 13 | 20 | 29 | 40 | 53 | 68 | 85 | 104 | 125 | 148 | 173 | 200 | 229 | 260 | 293 | 328 | 365 |
| 3 | 9 | 10 | 13 | 18 | 25 | 34 | 45 | 58 | 73 | 90 | 109 | 130 | 153 | 178 | 205 | 234 | 265 | 298 | 333 | 370 |
| 4 | 16 | 17 | 20 | 25 | 32 | 41 | 52 | 65 | 80 | 97 | 116 | 137 | 160 | 185 | 212 | 241 | 272 | 305 | 340 | 377 |
| 5 | 25 | 26 | 29 | 34 | 41 | 50 | 61 | 74 | 89 | 106 | 125 | 146 | 169 | 194 | 221 | 250 | 281 | 314 | 349 | 386 |
| 6 | 36 | 37 | 40 | 45 | 52 | 61 | 72 | 85 | 100 | 117 | 136 | 157 | 180 | 205 | 232 | 261 | 292 | 325 | 360 | 397 |
| 7 | 49 | 50 | 53 | 58 | 65 | 74 | 85 | 98 | 113 | 130 | 149 | 170 | 193 | 218 | 245 | 274 | 305 | 338 | 373 | 410 |
| 8 | 64 | 65 | 68 | 73 | 80 | 89 | 100 | 113 | 128 | 145 | 164 | 185 | 208 | 233 | 260 | 289 | 320 | 353 | 388 | 425 |
| 9 | 81 | 82 | 85 | 90 | 97 | 106 | 117 | 130 | 145 | 162 | 181 | 202 | 225 | 250 | 277 | 306 | 337 | 370 | 405 | 442 |
| 10 | 100 | 101 | 104 | 109 | 116 | 125 | 136 | 149 | 164 | 181 | 200 | 221 | 244 | 269 | 296 | 325 | 356 | 389 | 424 | 461 |
| 11 | 121 | 122 | 125 | 130 | 137 | 146 | 157 | 170 | 185 | 202 | 221 | 242 | 265 | 290 | 317 | 346 | 377 | 410 | 445 | 482 |
| 12 | 144 | 145 | 148 | 153 | 160 | 169 | 180 | 193 | 208 | 225 | 244 | 265 | 288 | 313 | 340 | 369 | 400 | 433 | 468 | 505 |
| 13 | 169 | 170 | 173 | 178 | 185 | 194 | 205 | 218 | 233 | 250 | 269 | 290 | 313 | 338 | 365 | 394 | 425 | 458 | 493 | 530 |
| 14 | 196 | 197 | 200 | 205 | 212 | 221 | 232 | 245 | 260 | 277 | 296 | 317 | 340 | 365 | 392 | 421 | 452 | 485 | 520 | 557 |
| 15 | 225 | 226 | 229 | 234 | 241 | 250 | 261 | 274 | 289 | 306 | 325 | 346 | 369 | 394 | 421 | 450 | 481 | 514 | 549 | 586 |
| 16 | 256 | 257 | 260 | 265 | 272 | 281 | 292 | 305 | 320 | 337 | 356 | 377 | 400 | 425 | 452 | 481 | 512 | 545 | 580 | 617 |
| 17 | 289 | 290 | 293 | 298 | 305 | 314 | 325 | 338 | 353 | 370 | 389 | 410 | 433 | 458 | 485 | 514 | 545 | 578 | 613 | 650 |
| 18 | 324 | 325 | 328 | 333 | 340 | 349 | 360 | 373 | 388 | 405 | 424 | 445 | 468 | 493 | 520 | 549 | 580 | 613 | 648 | 685 |
| 19 | 361 | 362 | 365 | 370 | 377 | 386 | 397 | 410 | 425 | 442 | 461 | 482 | 505 | 530 | 557 | 586 | 617 | 650 | 685 | 722 |

*Abbiamo costruito in excel la tabella allegata che propone tutte le somme di due quadrati di numeri naturali e trovato che il primo numero con la proprietà indicata da Archie è il 325.*
*Dalla tabella si vede bene che ci sono esattamente tre modi:*
$325 = 1^2 + 18^2 = 6^2 + 17^2 = 10^2 + 15^2$
*E si vede anche che non ci sono numeri minori di 325 che godono di tale proprietà. Ci sono molti numeri che, come il 50, si possono esprimere come somma di due quadrati, ma il primo che può essere espresso come somma di tre quadrati è il 325.*
*Abbiamo notato che i punti (1,18), (6,17) e (10,15) si trovano su una circonferenza di raggio* $5\sqrt{13}$ *e vorremmo approfondire.*

Bravi! Strategia elementare ed efficace. A loro è stato assegnato il premio speciale, consistente nella raccolta completa dei 50 Quiz pubblicati da Aldo Frapolli. Senza approfondire, facciamo osservare che la tabella proposta contiene interessanti elementi per giungere a congetture e prime generalizzazioni. Con metodi analoghi e forse un po' meno raffinati, hanno proceduto anche altri lettori che hanno individuato la soluzione. Ringraziamo tutti di cuore per essersi lasciati tentare dall'*occasione d'oro*.

La soluzione poteva essere individuata in modo più elegante facendo capo a risultati della teoria dei numeri. In tale direzione si sono mossi Giorgio Mainini e Paolo Hägler che hanno segnalato due interessanti indirizzi web, dove si possono trovare altrettante soluzioni che forniscono spunti a chi desidera approfondire la matematica sottostante alle «ricette» proposte.

**http://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_Fermat_sulle_somme_di_due_quadrati**

Vi si legge fra l'altro che: nelle sue *Osservazioni su Diofanto* Fermat spiega il metodo per trovare un numero intero esprimibile in esattamente n modi diversi come somma di due quadrati non nulli. Raddoppiamo n e scomponiamo 2n come prodotto di fattori primi. Una volta diminuiti di 1 tali fattori, attribuiamo i numeri ottenuti come esponenti di numeri primi congrui a 1 modulo 4.

Esempio: si vuole trovare un intero esprimibile in tre modi diversi come somma di due quadrati. Si scompone 6 come prodotto di fattori primi (2 e 3). Diminuiamo di 1 e otteniamo 1 e 2. Attribuendo 1 e 2 come esponenti di due primi congrui a 1 modulo 4 (per esempio 13 e 5) otteniamo: $13^1 \cdot 5^2 = 325$ che si esprime in tre modi diversi come somma di quadrati: $325 = 1^2 + 18^2 = 6^2 + 17^2 = 10^2 + 15^2$

**http://oeis.org/A016032**

Il sito propone la successione di numeri naturali $(a_n)_{n\in N}$, dove $a_n$ è «il primo naturale che si può esprimere in esattamente n modi come somma di due quadrati».

In esteso $(a_n)$ = 2, 50, **325**, 1105, 8125, 5525, 105625, 27625, 71825, 138125, 5281250, 160225, …

# 1. Convegno Nazionale n. 28 Incontri con la Matematica Parliamo tanto e spesso di Didattica della matematica

Castel San Pietro Terme (Bologna)
7 - 8 - 9 novembre 2014
Direzione: Bruno D'Amore, Martha I. Fandiño Pinilla
e Silvia Sbaragli

**Programma delle conferenze**

**Venerdì 7 novembre, Centro Congressi Artemide**
**Tutti gli ordini scolastici**

14.30-15.00 **Inaugurazione** alla presenza delle Autorità del mondo politico ed accademico.
15.15-16.00 **Mirko Degli Esposti** (Uni Bologna): L'irragionevole efficacia della matematica nelle scienze (naturali e umane).
16.00-16.45 **Mario Ferrari** (Uni Pavia): L'incertezza del matematicamente certo.
17.15-18.00 **Giulia Capri** (Coop Quadrifoglio, Bologna) e **Giovanni Nicosia** (NRD Bologna): Aritmetica, dal gioco dell'oca al soroban. Esperienze di mediazione semiotica con studenti con difficoltà speciali.
18.00-18.45 **Bruno D'Amore** (DIA Uni Distrital F. J. de Caldas, Bogotà, NRD Bologna): Illusioni, panacee, miti nell'insegnamento-apprendimento della matematica.

**Sabato 8 novembre, Centro Congressi Artemide**
**Scuola Primaria e Secondaria**

15.00-15.45 **Silvia Sbaragli** (SUPSI/DFA, Locarno – NRD Bologna): Una lettura didattica della metafora degli «occhiali della matematica».
15.45-16.30 **Giorgio Bolondi** (NRD – Uni Bologna) e **Marisa Di Luca** (Ist. «A. Volta», Pescara): Comprendere per apprendere in matematica. I risultati di una ricerca.
17.00-17.45 **Pietro Di Martino** (Uni Pisa): Le prove INVALSI in classe: osservare e interpretare come strumento didattico.
17.45-18.30 Relazione a sorpresa.

**Sabato 8 novembre**
**Salone delle Terme, Albergo delle Terme**
**Scuola dell'Infanzia**

15.00-15.45 **Rossana Falcade** (SUPSI/DFA, Locarno) e **Paola Strozzi** (Istituzione Scuole e Nidi d'Infanzia del Comune di Reggio Emilia): Il gioco dei paesaggi.

15.45-16.30 **Anna Aiolfi** e **Monica Bellin** (IC Spinea 1, Venezia): Lo spazio attorno a noi: un progetto in continuità per capire le cose del mondo.

17.00-17.45 **Elisa Passerini** (Bologna): Conta e incanta. Acquisizione della competenza numerica in età evolutiva.

17.45-18.30 **Benedetto Di Paola** (GRIM – Uni Palermo): Matematica in sezione: tradizioni culturali, pedagogiche e didattiche vicine e lontane.

**Programma dei seminari**

**Sabato 8 novembre, Sala Giardino, Albergo delle Terme**
**Scuola dell'Infanzia**

08.30-09.15 **Anna Aiolfi** (IC Spinea 1, Venezia): Conteggio e strategie risolutive: esperienze e attività con le carte da gioco per lo sviluppo delle abilità matematiche.

09.15-10.00 **Claudio Poretti** (ISC Lugano) e **Silvia Sbaragli** (SUPSI/DFA, Locarno – NRD, Bologna): Rappresentazioni spontanee di risoluzioni di problemi in continuità tra scuola dell'infanzia e scuola primaria.

10.30-11.15 **Mariangela Ruisi** e **Aurora Sunseri Trapani** (GRIM, Palermo): Forma, dimensione e posizione di oggetti nello spazio: l'oculo manualità come presupposto per lo sviluppo della motricità alla scuola dell'infanzia. Uno studio di caso.

11.15-12.00 **Laura Battaini** e **Silvia Fumagalli** (SI Lugano e SE Stabio, Svizzera): «Sola...mente per giocare». Giochi matematici in continuità.

**Scuola Primaria e Secondaria di I Grado**
**Centro Congressi Artemide**

08.30-09.15 **Silver Cappello** (dottorando, Uni Bolzano) e **Bruno Gentilini** (Rete C8 per la valutazione, Giudicarie, Trentino): «Emozioni a scuola». Disaffezione vs piacere di apprendere nelle scuole del Trentino.

09.15-10.00 **Annarita Monaco** (Roma, RSDDM Bologna) e **Laura Branchetti** (NRD Bologna, dottoranda, Uni Palermo): La risoluzione di problemi: strategie e rappresentazioni spontanee in evoluzione.

10.30-11.15 **Martha Isabel Fandiño Pinilla** (Uni Bologna, NRD Bologna): Problemi nella scuola primaria: Devo ragionare o devo risolvere?

11.15-12.00 **Emanuele Danese** e **Beniamino Danese** (Reinventore, Verona): Gli esperimenti con materiali semplici e l'insegnamento della matematica.

**Scuola Secondaria di I e II grado,**
**Albergo delle Terme**

08.30-09.15 **Stefano Barbieri**, **Francesca Scorcioni** e **Michela Maschietto** (LMM, Uni Modena e Reggio Emilia): Approccio al teorema di Pitagora: elementi di didattica laboratoriale.
09.15-10.00 **Leonardo Tortorelli** (Liceo «G. Marconi» di Conegliano, Treviso): Geometriko / Gioco di apprendimento strategico della geometria piana.
10.30-11.15 **Andrea Bonfiglioli** (Uni Bologna): Alcune considerazioni e suggestioni sull'infinito in matematica.
11.15-12.00 **Rachele Vagni** e **Denise Lentini** (Enfap, Emilia Romagna) e **Giorgio Bolondi** (NRD, Bologna): Doremat – La musica della matematica.

**Domenica 9 novembre**
**Seminari per la Scuola dell'Infanzia**
**Sala Giardino, Albergo delle Terme**

08.30-09.15 **Iole Barbarino** e **Medica Silvia** (GRIM, Palermo): Gli insegnanti si raccontano: analisi di alcuni misconcetti nella didattica della geometria piana alla scuola dell'infanzia e primaria.
09.15-10.00 **Angelica Di Domenico**, **Sonia Martinelli** e **Elena Mock** (DECS, Canton Ticino): Siamo fatti di numeri.
10.30-11.15 **Anna Cerasoli** (L'Aquila): Alla conquista dei primi numeri.
11.15-12.00 **Silvia Medica** e **Mariangela Ruisi** (GRIM, Palermo): Rappresentazioni semiotiche e processi cognitivi messi in atto in matematica da allievi con bisogni educativi speciali nella scuola dell'infanzia e primaria.

**Seminari per la Scuola Primaria e Secondaria di I grado,**
**Centro Congressi Artemide**

08.30-09.15 **Sergio Vastarella** (dottorando Uni Bolzano): La Flipped Classroom nella scuola primaria: un'esperienza di statistica attraverso un nuovo metodo didattico basato sull'uso integrato delle ICT nei processi d'insegnamento-apprendimento.
09.15-10.00 **Anna Cerasoli** (L'Aquila): Matemago: a caccia di problemi.
10.30-11.15 **Vito R. Franzosi** e **Rony C. de Oliveira Freitas** (IFECT, Espírito Santo, Brasile): Multibase: applicazione per *tablet* basata sul Materiale Dourato Montessori.
11.15-12.00 **Anna Maria A. Mariotti** (Uni Siena) e **Andrea Maffia** (dottorando Uni Modena e Reggio Emilia): Chi non impara a memoria le tabelline?

**Seminari per la Scuola Secondaria di I e II grado,**
**Salone delle Terme, Albergo delle Terme**

08.30-09.15 **Maura Iori** (NRD Bologna, dottoranda Uni Palermo): La dimensione semio-cognitiva implicata nell'attività di risoluzione di problemi: analisi di alcuni esempi.

09.15-10.00 **Federica Ferretti** (NRD Bologna, dottoranda Uni Bologna): Le motivazioni e le convinzioni degli studenti in matematica: un *case study* analizzato con il quadro teorico delle rilevazioni internazionali OCSE-PISA.

10.30-11.15 **Marta Venturini** (dottoranda Uni Bologna) e **Simon Fraser** Uni, Vancouver): Tecnologie digitali nella valutazione.

11.15-12.00 **Annarosa Serpe** e **Maria G. Frassia** (Uni della Calabria): Simulazione di fenomeni aleatori: un esempio di laboratorio dal reale al virtuale.

Per avere ulteriori informazioni, ci si può rivolgere a:
Servizio Economia del Territorio – Turismo e Cultura
Comune di Castel San Pietro Terme (BO)
P.zza XX Settembre, 4 – Castel San Pietro Terme (BO) – 40024

Dal lunedì al venerdì: ore 9.00-13.00 (giovedì anche 15.00-17.45)
Laura Troini – Tel. 051.6954127 – ltroini@cspietro.it – Fax 051 6954179

Responsabile del Servizio:
Dott.ssa Rita Lugaresi – Tel. 051 6954150 – rlugaresi@cspietro.it

Siti
http://www.cspietro.it
http://www.dm.unibo.it/rsddm
http://www.incontriconlamatematica.org
http://www.incontriconlamatematica.net

# 2. Recensioni

**Pellegrino C. (Tito). (2010). I miei percorsi matematici. Scritti di C. Pellegrino (anni 1974-2009). Modena: Athena. ISBN: 9788886980609.**

Tito Pellegrino (non molesterò il Lettore con l'usare il nome proprio Consolato, che tanto nessuno l'ha mai usato negli ultimi 40 anni… e qualcuno perfino l'ignora: Tito è *Tito*) ha lasciato l'Università di Modena per raggiunti limiti di età (cronologica) verso la fine del 2009; e, per testimoniare al mondo che l'andare in pensione non è sinonimo di starsene tutto il giorno con le mani in mano, come qualcuno ingenuamente ipotizza, ha iniziato l'impresa principe sognata da ciascun autore, sarcastico ed ostinato, raccogliere in un'opera unica tutti gli scritti prodotti negli anni, sotto forma di articoli.

Tito ha scritto 117 lavori, 4 dei quali appartengono alla categoria «libri», altri alla categoria «recensioni», altri ancora alla «compilazione» o «rassegna»; dunque si trattava di raggruppare i restanti circa 100 articoli in un blocco unico.

E così ha coraggiosamente fatto, con il sapiente e delicato aiuto di Anna (dietro un grande uomo c'è sempre una donna non solo grande ma, in questo caso, soprattutto… paziente) ricavando un'opera in 3 tomi dagli affascinanti titoli dal sapore antico:

– Parte 1ª: *Apprendistato e formazione* (1974-1983); pagg. XXXIV + 114;
– Parte 2ª: *Periodo di mezzo* (1984-1995); pagg. XXXIV + fino a 428;
– Parte 3ª: *La vitalità* (1996-2009); pagg. XXXIV + fino a 692.

Le immagini scelte per le singole copertine dei tomi sono a mio avviso già di per sé stesse significative; nell'ordine:

– W. Blake, 1794: *The Ancient of Days* (God as an Architect);
– L'«Impresa» dell'*Accademia del Cimento*;
– A. Dürer (1514): *Melancolia I*.

In tre immagini dotte e suggestive, chi lo conosce lo riconosce…

Ora, stare a dire quel che contengono i singoli volumi mi pare inutile; Tito, lo sanno tutti, come matematico si è occupato di grafi, categorie, modelli, quadrati latini, codici; ma fin dal 1984 si è buttato in quella disciplina che taluni chiamano *matematiche elementari*, riprendendo il felice termine da Felix Klein, con qualche incursione nella *didattica della matematica*, discipline distinte e diverse, con fini separati, che qualcuno ancora confonde. Voglio ricordare esplicitamente che Tito è stato uno dei primi studiosi del software di geometria dinamica *Cabri Géomètre*; non s'è occupato solo delle sue possibilità didattiche, come molti tra noi; lui l'ha declinato anche verso applicazioni di più alto livello matematico.

So che mi odierà per quanto sto per scrivere: sebbene il lavoro matematico duro-e-puro di Tito sia assai più che apprezzabile (tanto che, alla giornata di studi che il Dipartimento di Matematica dell'Università di Modena ha dedicato in suo onore il giorno 21 aprile 2010, molti docenti affermati hanno riconosciuto alle ricerche matematiche di Tito meriti scientifici di alto livello), credo però che il suo nome resterà per sempre legato alla sua caparbia sagace coraggiosa e multiforme creatività, espressa nei lavori «in do minore», come dice lui, alla divulgazione al servizio della scuola e dell'immagine della matematica.

Qui, in quest'ambito, tutti gli siamo debitori di qualcosa.

Io, in prima persona, per quella forza intellettuale che ho sempre scorto nella sua produzione; non mi vergogno di affermare che alcuni problemi da lui lanciati in quest'àmbito mi hanno talvolta ossessionato e sempre appassionato, specie quelli legati al tangram, quelli legati agli sviluppi dei poliedri e quelli relativi al posizionamento della macchina fotografica su una piantina, data l'immagine (il più facile dei tre, ma dagli sviluppi incredibili).

Tito sa entrare a fondo negli argomenti, con passione scientifica e con distacco semantico, spaccando un capello in quattro, trovando antefatti e bibliografie sommerse negli angoli più remoti delle citazioni nascoste, sa scovare antefatti e risultati, sa connettere teorie e idee i cui legami ai più sfuggono.

Averlo come referee di una rivista o come relatore a un convegno o come autore di una raccolta o come sottile curatore di una rassegna, è una sicurezza; ci metterà un po' più degli altri ma quando il lavoro arriva è perfetto, preciso, magistrale. (Semmai poi perde il file che lo conteneva, ma il cartaceo resta).

Voglio qui ricordare la generosità verso i giovani autori; intanto per quanto concerne la matematica, più d'uno degli ordinari di oggi confessa di essersi erto sulle spalle del gigante generoso Tito (e lasciatemi un po' parafrasare, che è così divertente!); poi come referee. Il direttore (editor) di una rivista deve decidere a chi mandare i lavori che vengono proposti, e non è così banale come si potrebbe credere a prima vista. Non si tratta solo di decidere in base all'argomento, ma anche in base alle caratteristiche dell'autore, allo stimolo che gli si deve/può dare (specie se è un giovane), alla necessità del momento, dal punto di vista redazionale, per esempio; eccetera eccetera eccetera.

Bene, Tito sa leggere un articolo come un ragno tesse una tela, come un microscopio sa mostrare i fatti più reconditi di un oggetto minuscolo, come un bisturi affilato sa entrare nel tessuto; legge, capisce, penetra e discute con l'autore, come se ne fosse un coautore; e se questi non dimostra una stupida superbia, come a volte capita, ma anzi mostra di gradire suggerimenti tesi a migliorare l'esposizione, se è un giovane, poi, Tito è disponibile a condurlo per mano, come un paterno amorevole fratello maggiore sa fare.

Nel settembre del 1986 tentai a Bologna un esperimento, un Convegno Nazionale numero zero sulla didattica della matematica; fu tale il successo che, anche grazie alle sollecitazioni di Francesco Speranza, nostro comune rimpianto multiforme maestro, decisi di farlo diventare un evento stabile, annuale. E così, nel 1987 nacquero gli *Incontri con la matematica*, ogni anno, a novembre, a Castel San Pietro. Il convegno n. 1 si chiamò, tanto per essere espliciti: *La matematica e la sua didattica*; parlando con l'Editore Armando Armando di Roma, che aveva assunto l'onere degli Atti, si pensò anche all'eventualità di far nascere una rivista di ricerca nella disciplina, con l'obiettivo di rivolgersi agli insegnanti; in sostanza, per dare agli insegnanti notizie di quel che si faceva nella ricerca in didattica della matematica, senza disdegnare anche la matematica stessa. Ne discussi a lungo, con Francesco Speranza, e così la rivista nacque, lo stesso 1987, con un solo numero.

Negli anni, la rivista si è rinforzata; le testimonianze di interesse, gli abbonamenti, molti dei quali da parte di enti all'estero, l'interesse di autori di prestigio a pubblicarvi, mi spinsero ogni anno a scelte di … espansione. Per vari motivi, la rivista è stata chiusa alla fine del 2009, ma da molti anni pubblicava 4 numeri l'anno; mai abbiamo avuto ritardi nell'uscita o abbiamo fatto ricorso all'escamotage di numeri doppi; abbiamo più volte ritoccato l'aspetto grafico; dal 1993 la pubblicava l'Editrice Pitagora; per vari anni abbiamo avuto il sostegno economico dell'Università di Bologna, con il permesso di pubblicarne il logo in copertina; siamo passati in pochi anni dalla Didattica A (A come *Ars docendi*, dunque dedicata ai problemi dell'insegnamento) ad una Didattica B (focalizzata alla epistemologia dell'apprendimento); negli ultimi 15 anni siamo recensiti su *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* e su altre importanti riviste internazionali analoghe.

Abbiamo però mantenuto alcune caratteristiche peculiari della rivista: pubblicazione in italiano (a parte un solo fascicolo), rubriche dedicate alla matematica, avvisi di convegni e altre attività, numerose recensioni di libri, grande apertura alla ricerca internazionale, prezzo bassissimo.

Giunti al ventesimo anno di pubblicazione, presentammo l'indice analitico, un indice analitico raffinato e completo, molto particolareggiato, dovuto alla profonda perizia e all'amichevole complicità di Anna Borrelli e Tito, appunto. L'ultimo fascicolo dell'ultimo anno, ottobre 2009, fu il proseguimento di quello, definitivo e completo.

Stessa cosa, pari pari, potrei ripetere a proposito degli atti del convegno di cui sopra; Anna e Tito curarono, al XX, uno splendido, comodo, geniale, completo indice analitico.

L'opera che Tito presenta oggi è di fausto e favorevole auspicio per il futuro, e da molti diversi punti di vista.

Quel che lui ha fatto per la matematica potrebbe e dovrebbe essere seguito da nobili e convinti studiosi delle altre discipline; questa è un'opera poliedrica e perciò leggibile da varie persone che, attratte da un argomento, finiscono poi con l'incuriosirsi agli altri; per questo è un esempio nobile da seguire.

La sua opera è sempre stata dedicata a far conoscere le matematiche elementari e a curare di conseguenza l'immagine della nostra bistrattata ma stupenda disciplina, amata da una cerchia ristretta che potrebbe invece esplodere, qualora iniziative come questa proliferassero, e se, invece dell'accanimento di alcuni e non volersi far capire dai più, anche i matematici più bravi e riconosciuti accettassero di tanto in tanto di far sapere al lettore qualcosa sulla matematica che qualunque (o quasi) persona colta in altri campi sia in grado di capire. Illustri matematici l'hanno fatto in passato, ma soprattutto studiosi di altre discipline, di tanto in tanto, non disdegnano la nobile arte della buona *divulgazione*. Non è disonorevole pensare in questa direzione e i risultati potrebbero essere eccellenti.

Le iniziative destinate a migliorare l'immagine della matematica sono tante, onestamente sempre di più; e, mi par di vedere, nel contesto internazionale, di sempre maggior livello; questa opera di Tito ben si presta a essere usata, insieme ad altre dello stesso, per dare una mano in questa necessaria direzione.

(B. D'Amore)

**Bersani R., Peres E. (2013). Matematica proverbiale. Concetti matematici nascosti tra le pieghe dei proverbi popolari. Milano: Ponte alle Grazie / Adriano Salani. ISBN: 978-88-6220-761-4.**

Negli anni sono stato abituato a tutto da Ennio Peres, visto che è riuscito a sorprendermi più volte con libri e trovate pieni d'ingegno e di arguzia unici; ma questo, scritto insieme al collega Bersani, beh, questo ha qualcosa di magico: onestamente mai avrei pensato ad una «matematica dei proverbi», anche se ho scritto un libro intero promettendo e dimostrando che «la matematica è dappertutto».

Se mi avessero chiesto quale e quanta matematica c'è nei proverbi, al massimo avrei detto che «Chi fa da sé fa per tre» è un bell'esempio di moltiplicazione sensata e ragionevole, ma forse nulla più. Immaginate dunque la sorpresa, trovandomi di fronte a un libro di 276 pagine denso denso di relazioni fra la matematica, i proverbi e le massime. Penso di poter asserire che si tratta del libro più esilarante degli ultimi anni.

E il bello è che la matematica è vera, non finta; c'è la topologia, la logica, la crittografia, la probabilità, l'aritmetica, la geometria, … E quante cose s'imparano sulla lingua italiana, sugli anagrammi, sulla poesia, sulla matematica ricreativa, sulla teoria dei giochi, … Tanto che verrebbe voglia di far leggere questo libro a due categorie speciali di persone:

a) quei ragazzi che asseriscono di non amare la matematica perché è noiosa e priva di fantasia;
b) quegli insegnanti che non sanno che cosa proporre ai propri allievi a fine giornata, quando tutti ma proprio tutti non ne possono più di equazioni da risolvere, o di funzioni da disegnare.

Nel caso a), ci vuol poco a rendersi conto che quella convinzione è errata, profondamente errata; se c'è una disciplina al mondo ricca di fantasia e tutt'altro che noiosa, è proprio la matematica; dovreste leggere che cosa sono capaci, Riccardo ed Ennio, di scrivere a proposito del proverbio «Chi cerca trova» o «Non c'è due senza tre» o «Tra il dire e il fare c'è di mezzo il mare»; pura lucida follia dettata da una fantasia strepitosa ma sorretta da una logica schiacciante, troppo divertente per non farti restare a bocca aperta (in più occasioni, io stesso ho riso come un matto).

Nel caso b), ci sarà solo l'imbarazzo della scelta; «Due torti non fanno una ragione» o «Ogni promessa è debito» possono riempire ore, non buchi, a fine lezione; e, e questo è il bello, senza lasciare la matematica seria, anche se il modo è faceto.

Il libro, poi, è ricco di giochi matematici, alcuni noti e altri meno; di indovinelli divertenti; di storie che conquistano; non possono lasciare indifferente il lettore, lo attraggono o lo trascinano in questo mare che si chiama «matematica ludica» che, per essere divertente, non è meno seria dell'altra (ma quale *altra*?). Cosicché questo libro presenta un valore aggiunto: fornisce a chi ne ha bisogno una riserva infinita di storie magiche, di quelle che affascinano la compagnia e che possono contribuire a riempire una serata.

Ogni tanto i nostri due Autori ricordano di essere essi stessi matematici; e allora, eccoli alle prese con spiegazioni dotte su una quantità vastissima di questioni, nozioni, teoremi, leggi, teorie; dato il generale contesto affascinante e affabulatore del libro, sono comunque perdonati, vuol dire che l'insegnante (caso b) approfitterà di questi momenti; e semmai lo studente (caso a) salterà queste pagine. Ma sono pagine preziose, invece, perché il tono del discorso resta comunque semplice e piano, narrativo e conquistatore, anche se ci stanno raccontando cose non del tutto banali.

Finisco (Tutto è bene quel che finisce bene). A pagina 269 una cosa che mi ha fatto morire dal divertimento, l'indice analitico, un'idea strepitosa. Si tratta di una tabella di due colonne che dura 6 pagine; nella prima colonna il nome di un argomento matematico (Antinomia, Assi cartesiani, Astrazione, …); nella seconda il proverbio corrispondente. Bisogna ammetterlo, chi altri mai ci avrebbe pensato?

(B. D'Amore)

Progetto grafico
Bruno Monguzzi
Prestampa
Taiana
Stampa
Veladini

Redazione
Laboratorio di didattica della matematica
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera

Telefono
091 814 18 21/22/24
Fax
091 814 18 19
gianfranco.arrigo@span.ch

Amministrazione
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera
Fax
091 814 18 19

Esce due volte all'anno
a maggio e a dicembre

Abbonamento annuo
SFR 30
€ 16

**Bollettino dei docenti di matematica**
**68**

In questo numero: note sulla teoria dei giochi, di G. Gambarelli; la didattica vista da S. Maracchia; la matematica di don Giovanni Bosco, raccontata da B. D'Amore; l'etimologia in didattica, di G. Mainini; un po' di matematica con P. Hägler; didattica del calcolo, di G. Arrigo; calcolo delle probabilità nella scuola media, di M. Anghileri; un'idea didattica di C. e C. Ruggeri-Chierici; la matematica secondo i bimbi, di L. Maurizi; attività sulle frazioni, di B. Mutti; le Gocce di didattica, di A. Piatti; il nuovo quiz Agorando 1, di P. Hägler e G. Mainini; segnalazioni e recensioni.



ISBN 978-88-86486-90-3
Fr. 18.–

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport