A cura
del Laboratorio di didattica della matematica

Bollettino dei docenti di matematica

69

Dicembre
2014

Ufficio
dell'insegnamento medio
Centro
didattico cantonale

Bollettino
dei docenti di matematica
69

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport

ISBN 978-88-86486-91-0

Bollettino dei docenti di matematica 69

Dicembre
2014

Ufficio dell'insegnamento medio
Centro didattico cantonale

Indice

Prefazione 7

I. Varia

1. Ricordiamo Claudio Beretta
Gianfranco Arrigo e Giorgio Mainini 9

2. Una decostruzione della storia dei limiti
da François Viète agli ultrafiltri
Jean Dhombres 15

3. Balli caraibici e matematica
Aurelio Di Caprio 43

II. Matematica

1. L'arte dei crucipixel
Julia Pelloni 49

III. Didattica

1. Il dopo Matematicando
A spasso con la matematica per le strade di Locarno
Redazionale 69

2. Conversioni e trattamenti semiotici nel *problem solving*
Gianfranco Arrigo 85

3. Triangoli unitari
Saggio su un percorso costruttivo
dal basso all'alto in geometria
Stefan Meyer 105

IV. Giochi

1. Agorando 2
Una curiosa operazione geometrica
Paolo Hägler e Giorgio Mainini 117

Soluzione Agorando 1 118

V. Segnalazioni

1. Matematica: il grande spettacolo
Terza grande festa della matematica 119

2. Recensioni 123

Prefazione

Gianfranco Arrigo e Giorgio Mainini aprono questo numero con un sentito ricordo di Claudio Beretta, collega e membro del comitato scientifico, scomparso il 5 agosto scorso.

La rubrica Varia prosegue con un impegnativo articolo di Jean Dhombres sull'epistemologia del concetto di limite, la cui lettura è caldamente raccomandata a chi è chiamato a insegnare l'analisi agli studenti delle superiori. Segue una curiosa novità, di sicuro interesse: l'articolo di Aurelio Di Caprio sulla matematica dei balli caraibici.

La sezione Matematica accoglie con piacere una sintesi del lavoro di maturità (LAM) della studentessa Julia Pelloni che ci introduce nel mondo dei crucipixel: una bella situazione matematica che può essere sfruttata didatticamente a partire già dalla scuola media.

La sezione Didattica inizia con una relazione sul dopo «Matematicando. A spasso con la matematica per le strade di Locarno», manifestazione organizzata dal Dipartimento della Formazione e dell'Apprendimento della Scuola Universitaria Professionale di Locarno lo corso mese di maggio. Si prosegue con l'articolo di Gianfranco Arrigo sul ruolo delle trasformazioni semiotiche nel *problem solving*. Chiude Stefan Meyer, educatore di Zurigo, con un nuovo saggio su un percorso costruttivo dal basso all'alto in geometria.

La rubrica Giochi propone Agorando 2, seconda proposta dei nuovi giocologi Paolo Hägler e Giorgio Mainini.

Le segnalazioni invitano gli insegnanti della scuola dell'obbligo e i cultori della matematica alla terza Grande Festa della Matematica, che si terrà a Riccione (Italia), nei giorni 21 e 22 marzo 2015, nella splendida cornice del Parco Oltremare, tra delfini e falchi.

Da ultimo, interessanti recensioni proposte da Gianfranco Arrigo e da Bruno D'Amore.

1. Ricordiamo Claudio Beretta

Gianfranco Arrigo e Giorgio Mainini

Claudio Beretta was one of the founders of the *Bollettino dei docenti di matematica*[1] in May 1980. Since then, he had worked in our team first as a member of the editorial board, later as a member of the Scientific Committee. He wrote 30 articles that were published in the Bollettino, 7 of which were co-written. He passed away on August 5, 2014.

1. L'esperto di matematica nelle scuole medie ticinesi
(G.A.)

Finivano gli anni Sessanta. Avevo iniziato da poco la mia attività di insegnante al Liceo cantonale di Lugano, quando l'allora «commissario di matematica del Ginnasio», l'indimenticabile Angelo Boffa, mi incaricò di tenere una serie di corsi nello spirito della riforma detta «Matematica moderna» che in quel tempo dominava la scena della didattica della matematica. In sostanza si trattava di introdurre gli insegnanti nei rudimenti della logica, della teoria degli insiemi, dell'algebra delle strutture e della geometria delle trasformazioni, con particolare riferimento a ciò che si sarebbe potuto introdurre nel programma ginnasiale. Ricordo ancora l'aula di scienze dell'allora Ginnasio di Bellinzona e l'aula magna delle Scuole nord, sedi di quei corsi.

Regolarmente seduto in fondo c'era un giovane docente, parecchio irrequieto, che borbottava continuamente e che di tanto in tanto soleva intervenire con voce tonante, senza alzare la mano, come invece facevano i suoi colleghi. Da una parte ero infastidito da questa presenza, ma dall'altra apprezzavo il rigore e la sostanza che questi metteva nelle sue «sparate». Si chiamava Claudio Beretta.

Nel 1971, dopo la scomparsa di Angelo Boffa, fui incaricato di assumere la funzione di «commissario di matematica», in collaborazione dapprima con Giuseppe Piffaretti e in seguito con Francesco Cavalli. Una mattina di maggio del 1978, ricevo, credo, la telefonata più laconica della mia vita: *«Claudio Beretta. Ti informo che ho concorso al posto di esperto per l'insegnamento della matematica. Voglio mettere in ordine le cose. Click»*. Così iniziò il mio rapporto con il collega, che nel frattempo, a poco a poco, imparai a chiamare Tom. Rapporto molto particolare e impegnativo, il nostro, fatto di momenti di buona armonia e altri di profondi contrasti. Devo dire però che, dopo i momenti di crisi, ci siamo sempre ritrovati. Ci univa sicuramente la passione per

1. The founders were Lucio Calcagno, Franz Kraft, Luca Buzzi and the experts Gianfranco Arrigo and Claudio Beretta.

la matematica e la preoccupazione che la stessa venisse insegnata bene. Dal suo punto di vista, io ero un collega serio, studioso, aperto verso le scienze umane e la cultura italiana. Per contro, lui giocava ad essere persona creativa, abilissimo nelle relazioni pubbliche, molto sensibile alla cultura scientifica, insofferente alle stimolazioni che provenivano dalla psicologia e dalla pedagogia, convinto patriota e amante della cultura francese. Mentre io operavo soprattutto in Italia, in seno al Nucleo di ricerca in didattica della matematica di Bologna, lui entrava fortemente nell'organizzazione scolastica svizzera. Fu presidente della Società svizzera degli insegnanti di matematica e fisica e, in questa veste, volle intensamente e riuscì a fondare la Commissione Matematica della Svizzera Italiana. Nei suoi ripetuti viaggi oltre San Gottardo, stabiliva relazioni di amicizia ovunque ne valesse la pena, giungendo ad essere di casa anche a Palazzo federale. In questi due campi d'azione, ciascuno di noi operava autonomamente.

Insieme, però, abbiamo realizzato molte cose. Siamo stati coautori del volume per le classi quarte della serie di manuali per il ginnasio dapprima e per la scuola media poi, che portava il titolo *Matematica 4*. Ci siamo ritrovati in seguito coautori dei volumi per le terze e le quarte dapprima della serie *Dimensione matematica 1, 2, 3 e 4*, poi dell'innovativa serie *Atolli matematici 1, 2, 3 e 4*. I suoi contributi nella manualistica si sono sempre distinti per l'originalità e per il notevole livello di difficoltà. In questo ambito pensava soprattutto all'allievo capace e appassionato e molto spesso dovevo ricondurlo alla realtà delle classi, che accettava non senza borbottare. Oltre ai manuali, insieme abbiamo pubblicato due formulari. Il primo, per la scuola media, dal titolo *Formulario di matematica e di scienze naturali*, nel quale lui si era occupato con molta passione della parte non strettamente matematica. Era anche orgoglioso della copertina, sua creazione grafica che metteva in risalto la bellezza della matematica applicata alle scienze naturali. Il secondo era pensato per gli studenti delle scuole medie superiori e intitolato *Le cifre della matematica*, formulario strettamente di matematica, con un taglio didattico innovativo.

Ho usato l'aggettivo «innovativo» a proposito delle pubblicazioni realizzate con un gruppo di insegnanti che comprendeva anche Claudio Beretta: *Atolli matematici* e *Le cifre della matematica*, volumi che non hanno avuto successo editoriale – per molte ragioni delle quali non ha senso parlare in questo contesto –, ma opere di notevole apertura didattica e forte valore di novità, realizzate tenendo conto degli innumerevoli stimoli che giungono continuamente dal mondo della ricerca didattica.

Un altro versante di attività, Claudio ed io lo abbiamo vissuto partecipando sia ai corsi e ai simposi offerti dalla Società svizzera degli insegnanti di matematica, sia come membri attivi del GIRP, gruppo internazionale di ricerca in didattica della matematica, nato in ambiente francofono e successivamente allargatosi all'Europa intera.

In Svizzera abbiamo conosciuto André Delessert, matematico, rettore dell'Università di Losanna per un lungo periodo e autore di testi e articoli di grande spessore culturale, in particolare dedicati alla riflessione pedagogica. Siamo diventati amici al punto che gran parte delle sue pubblicazioni degli ultimi anni di vita apparvero, per sua volontà, in esclusiva nella nostra rivista[2].

Dal 1992 al 1999 abbiamo partecipato alle attività del GIRP, luogo d'incontro e di riflessione comune sulla didattica della matematica che ci ha fatto conoscere

2. Di Delessert sono stati pubblicati, nel Bollettino dei docenti di matematica, 12 articoli, tra il 1989 e il 2005.

persone importanti provenienti da varie regioni dell'Europa. Ricordo in particolare Georges Papy (il grande capo) e Angelo Pescarini, fra l'altro estimatore della nostra rivista, sulla quale ha pubblicato alcuni articoli dal 1992 al 1998[3]. Le settimane di studio del GIRP si svolgevano in diverse località europee. I momenti di lavoro si alternavano ad altri di svago, durante i quali si aveva la possibilità di visitare le diverse regioni, di conoscere la gastronomia e i costumi locali. Passare in rassegna tutte queste avventure – perché proprio di avventure si trattava – sarebbe fuori posto, ma qualcuna la voglio ricordare perché, in fondo, la grande umanità del nostro Tom si scopriva soprattutto in queste occasioni.

Nell'estate del 1992 la settimana del GIRP si svolse in Spagna, nella località di Las Navas del Marqués (Avila). Mi trovavo in vacanza con la famiglia in un campeggio nella regione di Girona. Tom mi raggiunse in quel paradiso: si presentò con una borsa in una mano e… lo spazzolino dei denti nell'altra. Nel frattempo i miei familiari erano rientrati in aereo e noi due ci godemmo un paio di giorni prima di partire con la mia macchina verso la meta lavorativa. Attraversammo tutta la Spagna fino ad arrivare, dopo una giornata intera di viaggio, nella regione di Castiglia e Léon. Grazie soprattutto alla verve del mio compagno, fu un viaggio avventuroso che non scorderò facilmente. Come non posso scordare, l'anno dopo, il viaggio di ritorno in aereo da Cagliari, quando ad un tratto ci siamo accorti che dal portabagagli situato sopra le nostre teste gocciolava l'olio d'oliva che Tom aveva acquistato da un contadino: una latta di cinque litri, malandata, mezzo arrugginita. E nemmeno l'avventura di Lussemburgo, quando, in tarda serata, in un *bistrot* della periferia, incontrammo alcune studentesse che stavano preparandosi per l'esame di matematica del giorno dopo. Tom salì subito in cattedra e dopo pochi minuti non aveva solo le allieve citate ma tutti gli avventori che lo seguivano, incuriositi da questo spettacolo, assolutamente insolito in quel luogo. Potrei continuare con questi ricordi, ma preferisco terminare con l'agosto del 1997 quando noi due fummo incaricati dal comitato del GIRP di organizzare la settimana di studio in Ticino. Si scelse Bignasco-Cavergno. L'inventiva e le grandi capacità organizzative del mio collega si esplicarono ai massimi livelli, tant'è vero che, ancora oggi, quando mi capita di incontrare – solitamente in convegni all'estero – qualcuno dei partecipanti a quella *rencontre*, mi si ripete sempre che la «settimana ticinese» è stata di gran lunga la più bella di tutto il ciclo del GIRP. Come non ricordare, in tale occasione, la gita in val Bavona a bordo dell'auto postale storico e le serate al Basodino e ai piedi della cascata di Foroglio?

Al di là di questi piacevoli ricordi, l'immagine più significativa di Claudio è quella di un collega, di un amico, che aveva un grande amore per il nostro Paese e per la sua scuola. Le sue battaglie più aspre e i suoi tormenti avevano quasi sempre come sfondo la formazione dei giovani, la qualità dell'insegnamento, la formazione dei docenti, l'organizzazione scolastica svizzera e in particolare ticinese. Quando si lavorava insieme a lui, nell'ufficio di Bellinzona, il tempo si fermava. Molto spesso era il personale delle pulizie che, in tarda serata, ci invitava bonariamente a smettere. A volte, ricevevamo la visita di Franco Lepori, allora capo dell'UIM[4], e con lui si parlava a bri-

3. Non ho citato Bruno D'Amore, che è stato anche presidente del GIRP, perché lo si conosceva già da tempo.
4. Ufficio dell'insegnamento medio, Bellinzona.

glia sciolta dei vari problemi relativi alla scuola media. Credo che a Franco piacessero queste chiacchierate, proprio perché, con Claudio, non erano mai banali, ma di sicuro parecchio trasgressive, nel senso che le regole d'ufficio erano gentilmente messe fuori dalla porta. Non credo di esagerare, ma diverse cose «serie», poi realizzate nella scuola, sono nate in quei momenti o, quantomeno, sono ivi state abbozzate.

2. L'organizzatore di incontri
(G.M.)

La prima volta che vidi Tom fu nel 1971, quando Gianfranco lo presentò agli insegnanti di matematica come nuovo esperto, e fu uno *choc*. Il suo primo intervento ci colpì tutti per la veemenza, tanto che ci domandammo da dove venisse quella specie di invasato. La seconda volta litigammo. Poi, per riallacciare i rapporti, gli spedii una pipetta portasigarette accompagnata da un bigliettino con scritto «Vale come calumet della pace». Il giorno seguente telefonò a mia moglie chiedendole quale tabacco fumavo e me ne regalò una busta. Lo scambio di doni funzionò, e diventammo amici, di un'amicizia più che quarantennale. Di Tom esperto è già scritto nel primo paragrafo e dunque di questa sua funzione tacerò. Mi piace invece parlare dell'amico come instancabile organizzatore di incontri tra autentici luminari e studenti delle Scuole medie superiori. Non solo conosceva una gran quantità di persone di alto livello, sia scientifico sia politico, ma aveva una facilità estrema nel conoscerne di sempre nuove. Grazie ai suoi rapporti che mantenne sempre con la Scuola politecnica federale di Losanna (EPFL), è riuscito a portare in Ticino professori che invogliassero gli studenti a prepararsi alle carriere scientifiche. Tra i conferenzieri ricordo, ma non sono i soli, il prof. Minh Quang Tran, direttore del *Centre de recherches en physique des plasmas* (CRPP), membro di diversi comitati europei e di quelli che si occupano del progetto di reattore a fusione ITER; il prof. Alfio Quarteroni, titolare della cattedra di modellistica e calcolo scientifico e membro dell'Accademia dei Lincei; il prof. Michael Grätzler, direttore del Laboratorio di fotonica e interfacce, inventore di un nuovo tipo di celle solari, Premio Balzan nel 2009 e Marcel Benoist nel 2013; la prof. Françoise Gisou van der Goot, co-fondatrice dell'*Institute of Global Health* e Premio Marcel Benoist nel 2009; il prof. Giorgio Margaritondo, fisico dello stato solido e vicepresidente dell'EPFL; il dott. Claude Nicollier, primo astronauta svizzero (quattro missioni nello spazio con l'ESA), che tiene corsi di progettazione e gestione di missioni nello spazio. Sono previsti per il 2015 un incontro con il prof. Michel Mayor, docente di astronomia all'Università di Ginevra e scopritore nel 1995 del primo pianeta extrasolare, Premio Balzan nel 2000 e Medaglia Albert Einstein nel 2004, e un altro, non ancora confermato, con la prof. Fabiola Gianotti, membro dell'Accademia dei Lincei e coordinatrice dell'esperimento ATLAS (nel cui ambito è stato osservato il bosone di Higgs) al CERN, del quale, all'inizio di novembre 2014, è stata nominata direttrice generale[5]. Qualcuno potrebbe pensare che tutta l'organizzazione consista nel fare qualche telefonata alla persona giusta. Invece il lavoro necessario è impegnativo e richiede la collaborazione di

5. È opportuno osservare che i titoli e i premi ottenuti dai professori citati sono solo una parte: ne ho tralasciati parecchi, forse troppi, per non appesantire il contributo.

parecchie persone. Ecco allora che Tom si è dato da fare per mettere insieme un gruppo di collaboratori, di cui era il capo riconosciuto e indiscusso. Come in tutti i gruppi che si rispettano ci sono i membri «operativi» e i membri «di rappresentanza». Del primo tipo fanno parte (uso il presente sottintendendo il futuro) direttori di liceo, funzionari del DECS[6], responsabili di società e di aziende pubbliche e parapubbliche interessate alle e dalle ricerche scientifiche e volontari di vario genere; del secondo tipo personalità dei campi medico, biologico, fisico a livello universitario oltre a politici, il cui compito è garantire che le conferenze siano veramente di alta levatura. Niente è gratuito: le trasferte a Losanna, il volo fino ad Agno e ritorno, la permanenza in albergo, i trasporti e quant'altro. E qui bisogna sottolineare la capacità di Claudio nel tirare giacchette a destra e a sinistra, coinvolgendo enti ai quali non viene subito di pensare: ma lui ce la faceva. E dove non ce la faceva, ci metteva del suo, senza chiedere niente in cambio. Il tutto veniva gestito a casa sua, a Verscio, durante cene spesso pantagrueliche. Perché, oltre al resto, Tom era anche un eccellente cuoco: sarà difficile dimenticare i risottini, i *roast beef* e gli altri manicaretti, che cucinava inalberando il tipico alto cappello, accompagnati da vini che andava a cercare con passione e competenza. Ho avuto la fortuna di far parte del gruppo operativo, con il compito di preparare le schede di presentazione dei conferenzieri e, soprattutto, di far loro da tassista. Ho così potuto passare indimenticabili pomeriggi e serate discutendo e ascoltando dalla loro voce gli «stati dell'arte» in varie discipline. È stato bellissimo essere informato sulla fusione nucleare durante una visita al parco San Grato di Carona; di luce di sincrotrone seduto sulla terrazza di un ristorante vista lago; dell'analogia tra i problemi del flusso del sangue in uno *stent* e quelli dell'attrito dello scafo di Alinghi con l'acqua di mare aspettando l'ammazzacaffè: esperienze di cui sarò sempre grato all'amico e che mi hanno tenuto vispo nel penultimo o terzultimo (spero) decennio della mia esistenza.

Figura 1. Claudio Beretta e Gianfranco Arrigo alla mostra Oltre il compasso, organizzata dalla Divisione della scuola nel periodo 18 ottobre – 19 novembre 1995 a Bellinzona, Castelgrande.

6. Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport del Canton Ticino.

L'ultima volta che lo vidi fu all'ospedale civico di Lugano, dove era ricoverato per un intervento chirurgico: gli portai un paio di pantofole perché aveva dimenticato le sue a casa e discutemmo di un incontro che avremmo dovuto avere in settembre con il direttore del DECS. Disgraziatamente arrivò prima il 5 agosto.

Ora sarà compito nostro, membri del gruppo, riuscire a mantenere in vita quanto è stato creato dall'entusiasmo di Claudio: è una scommessa che dobbiamo vincere, non solo *in memoriam*, ma anche per continuare ad offrire possibilità di approfondimento e stimoli agli studenti delle scuole medie superiori.

Dovrà essere pure compito nostro riuscire a convincere i mezzi di comunicazione di massa ad approfittare delle importanti presenze, qui in casa, per diffondere e sostenere una mentalità scientifica e un amore per le scienze che, purtroppo, sono ancora considerate attività intellettuali di serie B.

Figura 2. Claudio Beretta stringe la mano all'allora sindaco della Città di Lugano, nel giorno dell'inaugurazione della sede della SMASI, in via Torricelli 19. Era il 17 maggio 2009.

2. Una decostruzione della storia dei limiti da François Viète agli ultrafiltri[1]

Jean Dhombres

This paper raises the question of providing a correct posterity to a question from Vieta, after he explicitly obtained in 1591 the sum of all the terms of a decreasing geometric progression. Had he the right to zero the last term in the expression of the finite sum in order to obtain the limit? By referring to this question only, the indeterminacy of the reason of the progression is forgotten, thus the indication of a variable, and so a possible functional way prepared by Vieta, leading to Newton. By deconstructing more generally the history of limits, the goal is to abandon the beautiful idea of a contiuous path towards the abstraction finally reached today. Didactic thinking can benefit from such a process of doing history.

1. Le diverse limitazioni presenti nelle definizioni dei dizionari potrebbero costituire una storia dei limiti?

Nato nell'anno VI, benché arricchito successivamente con novità rivoluzionarie e arredato da molti esempi, il *Dictionnaire de la langue françoise* non assegna al vocabolo «limite» alcuna accezione matematica, nemmeno nell'edizione corretta e completata dall'*Académie* nel 1798. Mentre la si può invece trovare su un precedente articolo dell'*Encyclopédie* di Jean D'Alambert[2], e Denis Diderot aveva già pubblicato un libro di geometria differenziale. Il *Dictionnaire* dell'anno VI presenta essenzialmente il vocabolo al plurale. Ora, se l'origine è *limes*, cioè cammino che delimita due campi, e se i limiti sono i «confini che dividono, che separano un territorio, una Provincia, uno Stato da un altro[3]», la matematica non poteva fare alcunché, essendo una parola ambigua che mescolava l'idea di confine con quella di avvicinamento a qualcosa di esterno. Niente di più dell'idea di frontiera al plurale. Il buon senso ci insegna infatti che occorre una sola frontiera tra due paesi, anche se con due facce, ciascuna rivolta verso un interno, con due dogane distinte. Si poteva, a quell'epoca, concepire che la frontiera, per effetto di un'elaborazione del concetto di limite, potesse acquistare un significato proprio ed essere riferita a un solo stato? Vedremo pertanto sorgere la metamorfosi delle parole, grazie al pensiero matematico, ed è interessante, da questo punto di vista, considerare un'evoluzione che non dà alla matematica la prima parola.

Le difficoltà inerenti al termine *limite* fanno sì che non si sa se usare il singolare o il plurale per descrivere i confini del mondo, sia di quello conosciuto, sia di quello reale o del cielo. O anche quando si pensa a un confine tra i mondi sublunare e stellare. Un buon modo di aggirare queste difficoltà consiste nel considerare mobile

1. Traduzione di Gianfranco Arrigo e Giorgio Mainini.
2. Diderot D. (1749). *Mémoires sur les mathématiques*. Paris. Vedere anche Dhombres J. (1985). Diderot et les mathématiques. *Colloque du bicentenaire di Diderot*. 269-280.
3. *Dictionnaire de l'Académie françoise*, rivisto, corretto e aumentato dall'*Académie* stessa, nella quinta edizione del 1798, (vol. 2, p. 30).

il firmamento. Giordano Bruno, che propugnava un mondo senza limiti, conobbe una orribile fine al Campo dei Fiori, nel 1600.

Non è forse che ogni limitazione posta al termine *limite* viene dal rifiuto di fare ricorso esplicitamente all'infinito? Quest'altro termine non apparteneva al vocabolario usuale della matematica, ma era considerato nella metafisica e nella teologia. È diventato così un vocabolo proprio alla filosofia naturale, alla quale la matematica non aveva accesso, né forse quest'ultima ci voleva entrare. Il limite aveva un posto riservato ai pochi fortunati, come il vuoto che si considerava esistente solo nel pensiero, o il mondo celeste degli Aristotelici, un mondo esclusivo dei filosofi nel quale succederebbero cose diverse da quelle terrene limitate per loro natura e immobili. Ci volle l'audacia di Galileo per liberarci, non dai magnifici problemi dell'infinito, ma dalla proibizione che gravava su di loro di non poter essere studiati anche dal matematico e dal fisico.

Pubblicato nel 1983, il *Trésor de la langue française*, riporta una definizione del vocabolo *limite* ma lo considera al plurale (*limits*) e dà come esempio «le possibilità (intellettuali) che non possono essere oltrepassate». Interpreto le parentesi messe attorno all'aggettivo come conferma di un lapsus; il lessicografo positivista si ricorda delle limitazioni da mettere *a priori* su questo termine. Così, la storia della lingua, col passaggio dal plurale al singolare, nel caso del vocabolo *limite*, descriverebbe banalmente la storia progressiva della matematica, con l'abbandono successivo dei sensi metaforici derivati e inutilmente limitativi? Oppure occorre ricercare meglio accerchiando, se così si può dire, il nascondiglio dell'infinito nell'uso matematico del termine *limite*? Oppure ancora racchiudere volutamente nel solo termine di limite tutti i suoi aspetti collaterali, fino ai nostri giorni?

Gli storici concordano nel riconoscere che è solo a partire dagli inizi del XIX secolo che esiste una teoria dei limiti correttamente elaborata; dovuta a Augustin Louis Cauchy, nata simbolicamente nel 1789 e tramandata nell'insegnamento fino ai nostri giorni. Fu indissolubilmente associata al concetto che ci appare così semplice di numero reale, dal momento che è diventata il modello universale di ogni misura, per esempio della lunghezza. Che cos'è successo all'infinito? Cauchy ha effettivamente dato un criterio (detto appunto di Cauchy), cioè, detto in linguaggio matematico, ha enunciato una condizione necessaria e sufficiente affinché una successione infinita di numeri reali abbia un limite. Ma lo fece senza considerare esplicitamente questo valore limite[4]. Fu un atto analitico, ma non in senso kantiano, perché si verificò un'invenzione inattesa, risultato di un'intuizione sintetica *a priori*. Il limite superava se stesso, non limitandosi alla definizione che gli si voleva dare. Così Cauchy, all'inizio del suo *Cours d'Analyse* del 1821, poteva usare la notazione di limite direttamente riferita al limite di una successione. La definizione di limite si estendeva a ogni variabile, intesa come numero reale. Il vocabolario di Cauchy è eloquente, anche se poco matematico, e oppone il variabile al fisso, per mezzo di un nuovo verbo, «convergere», il cui merito consiste nel ribaltare il problema, l'infinito che diventa, se così si può dire, finito.

4. Non è il caso qui di tenere un corso di matematica. Basta consultare un qualsiasi manuale universitario. Si può anche vedere: Dhombres J. (1978). *Nombre, mesure et continu, Epistémologie et histoire*. Paris : Nathan e Arrigo G., D'Amore B. e Sbaragli S. (2010). *Infiniti infiniti*. Trento: Erikson.

Quando una quantità variabile converge verso un limite fisso, è spesso utile indicare questo limite con una notazione particolare; è ciò che faremo ponendo l'abbreviazione lim. davanti alla quantità variabile che si considera[5].

Superata questa tappa, o meglio accettato questo giro retorico, Cauchy poteva passare al plurale, ma per questo doveva modificare il concetto, senza però cambiare il termine.

Talvolta, mentre una o più variabili convergono verso limiti fissi, un'espressione contenente queste variabili converge, nello stesso tempo, verso più limiti, uno diverso dall'altro. Indicheremo allora uno qualunque di questi limiti con l'aiuto di parentesi doppie messe subito dopo l'abbreviazione lim., in modo da racchiudere l'espressione considerata[6].

Cauchy dà alcuni esempi conosciuti ancora oggi da qualsiasi debuttante nell'analisi, ma che allora segnarono un momento importante, tutti con x tendente a 0, come per esempio:

$$\lim.\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

$\lim.\left(\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ che prende solo *«due valori* $+\infty$ *e* $-\infty$*»*

$\lim.\left(\left(\sin\frac{1}{x}\right)\right)$ che prende «l'infinità[7]» dei valori compresi «tra i limiti -1 e $+1$».

L'idea per quest'ultimo caso, basata sulle successioni, è che per ogni valore reale y, compreso tra -1 e $+1$, si possono costruire valori reali x_n tali che la successione x_n converge verso 0, in modo che $\sin\frac{1}{x}$ converge verso y.

Oggi, nella pratica elementare del calcolo dei limiti di successioni, ci si fa l'idea di oscillazioni di ampiezza costante tra -1 e $+1$, sempre più raccolta attorno allo zero. È con una simile immagine, oggi ottenibile facilmente su uno schermo, purtroppo ancora rara sui manuali, che ci si può rendere conto del raggiro pratico che comporta il termine «successione»: è certamente il segno tangibile che per stabilire il concetto di limite si è fatto ricorso all'infinito, ma è un infinito calibrabile, perché numerabile. Anche se questa calibrazione viene nascosta infine dietro al termine dall'uso del verbo «calibrare», applicabile alla variabile intera. Il primo impiego della convergenza lo si riscontra in ottica geometrica, da Kepler, nel 1611, quando precisava fisicamente il cannocchiale astronomico usato da Galileo per mostrare il diverso moto dei satelliti di Giove: Kepler mostra raggi convergenti in un apparecchio ottico, che a loro volta definiscono un'immagine ottica (Figura 4). Che strano destino, quello di una

5. Cauchy A. L. (1821). *Cours d'Analyse de l'Ecole royale polytechnique, Première partie, Analyse algébrique*. Paris: de Bure, p. 13.
6. Ibidem, p. 14.
7. Curiosamente, Cauchy non usa l'articolo determinativo per il termine infinito, ma quello indeterminativo: «un'infinità».

parola che dapprima indica ciò che è «visto» per eccellenza, o il visto costruito, come direbbero sociologi e cognitivisti e che poi significa ciò che si vedrebbe solo dopo un'infinità di operazioni! Non è forse un tentativo di rendere finito l'infinito e quindi una forma di mascheramento accettabile?

La teoria di Cauchy, basata sulle variabili reali e della quale ho tralasciato di dire le imperfezioni relative al concetto di uniformità, fu anch'essa assoggettata alla topologia codificata agli inizi del XX secolo, ciò che permise di moltiplicare i tipi di limite, precisamente secondo tutte le topologie disponibili su vari tipi di spazi, dapprima sul piano, algebrizzati dal concetto di numero complesso. Occorre dire che la pluralità acquisita non risiedeva più nel concetto stesso, ma nelle diverse realizzazioni. È anche vero che il criterio di Cauchy non è valido in generale, ma solo per certi spazi detti completi, come certamente lo spazio dei numeri reali (secondo la topologia usuale). Si nota d'un tratto il ritorno alla concezione di numero reale proposta da David Hilbert nel 1899 nei suoi *Grundlagen der Geometrie*, dove egli definisce questi numeri (utilizzati da Cauchy per i limiti) come un insieme contenente i numeri naturali, munito di certe proprietà delle operazioni (addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione) e di relazione (ordine totale) e di compatibilità (l'addizione di un positivo a ogni dato numero non può che aumentare quest'ultimo), in modo che non si possa aggiungere nulla senza perdere nemmeno una di queste proprietà. Proveniente dalla teoria dei limiti, dapprima riferito ai soli numeri reali, il reale realizzava un *optimum*. La proprietà dell'insieme di questi oggetti chiamati numeri reali di essere completo sfociava nella considerazione che questi numeri non potevano essere superati nel ruolo di misura. Per dirlo con un'altra accezione del termine, attaccato non più all'oggetto ma al suo obiettivo, i numeri erano completi nel loro insieme. La topologia che aveva reso possibile il passaggio, la cui struttura può essere trovata nell'organizzazione della prima pagina concernente i limiti, dell'indice e dell'elenco dei capitoli del primo volume dedicato a questo argomento dagli *Élements de mathématiques* di Bourbaki (Figure 1, 2 e 3), si sviluppava a partire dai concetti di prossimità, di intorno senza quello di confine che suggeriva piuttosto l'idea di limite e senza nemmeno l'idea di successione che abbiamo visto presa in considerazione da Cauchy. La convergenza, partita da un'idea dell'ottica, si trovava matematicamente definita.

Parallelamente, la lingua si arricchiva del concetto di punto limite, testimone del fatto che un nuovo oggetto matematico generava la nuova idea, o per dirla con un ossimoro, la incarnava. L'espressione «punto limite» non era sola, ma con essa nascevano anche il punto di accumulazione, l'aderenza e, subito prima della seconda guerra mondiale, sorgeva inaspettatamente il termine «filtro», che si può incontrare nelle prime righe che Bourbaki dedica al limite. Proveniva dall'espressione «famiglia filtrante» (*net* in inglese). Un'attenta analisi mostra una stupefacente convergenza adattata alla necessità di avere un infinito non ridotto a quello indicato dall'idea di successione, ma, con la parola filtro, l'infinito non appare più lo stesso. Tutti questi termini sono dovutamente legati al concetto di limite della topologia. La teoria, che è epistemologicamente quella dei luoghi, dava un senso assoluto ai concetti di interno e di frontiera. È un completamento. Certamente questi concetti erano applicati a un dato sottoinsieme e la frontiera era definita come l'insieme dei punti limite del sottoinsieme non collocati all'interno. L'esterno di un sottospazio topologico aveva la sua definizione come interno del complementare. Passando dallo stato di concetto o di idea a quello di oggetto, la necessaria relatività di frontiera o di interno era data dalla scelta aprioristica di una topologia sull'insieme considerato.

§ 7. Limites

1. Limite d'un filtre.

Définition 1. — *Soient* X *un espace topologique,* $\mathfrak{F}$ *un filtre sur* X. *On dit qu'un point* $x \in X$ *est point limite* (ou simplement *limite*) *de* $\mathfrak{F}$, *si* $\mathfrak{F}$ *est plus fin que le filtre* $\mathfrak{B}(x)$ *des voisinages de* x *; on dit aussi alors que* $\mathfrak{F}$ *converge* (*ou est convergent*) *vers* x. *On dit que* x *est limite d'une base de filtre* $\mathfrak{B}$ *sur* X (ou que $\mathfrak{B}$ *converge vers* x) *si le filtre de base* $\mathfrak{B}$ *converge vers* x.

Cette définition et la prop. 4 du § 6, nº 3, donnent le critère suivant :

Proposition 1. — *Pour qu'une base de filtre* $\mathfrak{B}$ *sur un espace topologique* X *converge vers* $x \in X$, *il faut et il suffit que tout ensemble d'un système fondamental de voisinages de* x *contienne un ensemble de* $\mathfrak{B}$.

En accord avec la terminologie introduite au § 1, nº 2, on peut énoncer la prop. 1 de la façon suivante : pour que $\mathfrak{B}$ converge vers x, il faut et il suffit qu'il existe des ensembles de $\mathfrak{B}$ *aussi voisins qu'on veut de* x.

Si un filtre $\mathfrak{F}$ converge vers x, tout filtre *plus fin* que $\mathfrak{F}$ converge aussi vers x, en vertu de la déf. 1. De même, si on remplace la topologie de X par une topologie *moins fine*, le filtre des voisinages de x est remplacé par un filtre *moins fin* (§ 2, nº 2, prop. 3), donc $\mathfrak{F}$ converge encore vers x pour cette nouvelle topologie.

De façon imagée, on peut donc dire que, *plus une topologie est fine, moins il y a de filtres convergents pour cette topologie.* En particulier, pour la topologie discrète, les seuls filtres convergents sont les filtres de voisinages, car ces derniers sont les ultrafiltres triviaux sur X (§ 6, nº 4).

Soit Φ un ensemble de filtres sur X, qui convergent tous vers un même point x ; le filtre des voisinages $\mathfrak{B}(x)$ est moins fin que tous les filtres de Φ, donc aussi moins fin que le *filtre intersection* $\mathfrak{I}$ des filtres de Φ ; autrement dit, $\mathfrak{I}$ converge aussi vers x.

Figura 1. L'inizio del paragrafo dedicato ai limiti (§ 7). (Paris, Hermann, 1961, p. 77-78)

§ 6. Filtres 63
1. Définition d'un filtre 63
2. Comparaison des filtres 64
3. Bases d'un filtre 65
4. Ultrafiltres 67
5. Filtre induit 69
6. Image directe et image réciproque d'une base de filtre 70
7. Produit de filtres 71
8. Filtres élémentaires 72
9. Germes suivant un filtre 73
10. Germes en un point 76
§ 7. Limites 77
1. Limite d'un filtre 77
2. Point adhérent à une base de filtre 78
3. Valeur limite et valeur d'adhérence d'une fonction 80
4. Limites et continuité 82
5. Limites relativement à un sous-espace 83
6. Limites dans les espaces produits et les espaces quotients 84

Figura 2. Il dettaglio dell'indice del capitolo primo del primo volume di *Topologie générale* degli *Éléments de mathématques* di Bourbaki. (Paris, Hermann, 1961)

Limite (point) d'un filtre, d'une base de filtre : I, 7, 1.
Limite projective d'espaces topologiques, de topologies : I, 4, 4.
Limite projective d'espaces uniformes, de structures uniformes : II, 2, 7.
Limite (valeur) d'une fonction suivant un filtre, suivant un ensemble filtrant : I, 7, 3.
Limite (valeur) d'une fonction en un point, relativement à un sous-ensemble : I, 7, 5.
Limite (valeur) d'un germe d'application : I, 7, 3.
Limite (valeur) d'une suite : I, 7, 3.
Localement compact (espace) : I, 9, 7.
Localement connexe (espace) : I, 11, 6.
Localement fermé (ensemble) : I, 3, 3.
Localement finie (famille) : I, 1, 5.
Minimal (filtre de Cauchy) : II, 3, 2.

Figura 3. Voci dell'indice analitico concernenti il termine *limite*. (Paris, Hermann, 1961)

2. Decostruire l'astrazione intesa come regola continua del pensiero matematico

Sarebbe come dire che la ricchezza attuale del limite, ben inquadrata in una teoria formalmente rigorosa come la topologia, era attesa come progresso naturale volto a precisare il concetto dapprima abbozzato nell'*Encyclopédie* che non abbiamo ancora presentato e che in ogni caso era stato codificato da Cauchy? Certamente no! Così come non poteva essere atteso il fatto che una nuova e stupefacente astrazione dei limiti in senso topologico a partire dai filtri, concetto che mi ha meravigliato anche solamente nel nome, avrebbe generato effettivamente i numeri iperreali, dei quali i reali sarebbero solo una piccola parte. Di più, l'esistenza di questi nuovi numeri, che si dice siano stati derivati dall'analisi non standard, negava il carattere «completo» dei reali. Questo termine assumeva da allora un nuovo senso relativo. Che ne è dell'infinito del quale si aveva avuto solo una traccia nascosta nelle parole di successione e di convergenza? Se non appare più nel vocabolario topologico (per verifica basta consultare una parte dell'indice di Bourbaki, (vedere figura 3) è perché l'infinito si è ormai confortevolmente stabilito nella pratica matematica, grazie alla teoria degli insiemi e alla sua assiomatizzazione, senza la quale non sarebbe possibile alcuna topologia.

Una certa pigrizia filosofica nel mantenere l'aristotelismo come modo per presentare la conoscenza e anche una reazione secolare delle comunità intellettuali degli insegnanti nel non poter accettare i cambiamenti radicali che sembrava rimetterle in causa in quanto dispensatrici del vero sapere, resero arduo il cammino dei limiti, come vedremo nel seguito. E ho solo rievocato i fatti a partire dal XVIII secolo! Così se ne è fatto a buon mercato un processo continuo, riconoscibile col nome di estensione o di generalizzazione, sempre nel senso di un progresso il cui motore permanente sarebbe l'astrazione. La bella teoria della conoscenza che sottende largamente questa visione del mondo delle idee matematiche è quella di un processo, evidentemente umano ma autonomo, che si nutre solo di se stesso approfondendo continuamente il senso delle proprie creazioni, che, successivamente e senza distruzione, si arricchiscono di nuovi sensi, facendo impallidire quelli vecchi, senza però cancellarli. Una tale teoria della conoscenza ha trovato con lo strutturalismo il suo punto culminante in matematica nella seconda parte del XX secolo, più precisamente a partire dal principio secondo il quale le strutture fondamentali della matematica, essendo ormai conosciute, permettono di leggere il passato, il lunghissimo passato della matematica. La storia si sarebbe sviluppata normalmente per effetto della sola tensione di aggiornare le strutture, nonostante il freno applicato da quelli che, in determinate epoche, vogliono stabilire uno stato di conoscenza dogmatizzandolo. In questa prospettiva sono solo le tappe di dogmatizzazione che possono dare l'impressione di rivoluzione. Così, per coloro che adottano questa visione, della quale Bourbaki può essere ritenuto il leader, lo sviluppo futuro della matematica non può avvenire che così, con in più l'organizzazione del processo storico che ne permette l'accelerazione.

Raccontando altrimenti, per inciso a questo testo, la storia letteraria del termine *limite*, ho cercato di dare alcune piste anche per la decostruzione di una tale teoria della conoscenza e il mio proposito deve ora consistere nel demarcarla. Analizzerò l'apporto dato dall'*Encyclopédie* al termine *limite* e risalirò nel tempo non partendo dall'*Encyclopédie*, perché la maggior parte degli storici, in gran parte contrari alla visione di Bourbaki, assegnano al concetto di limite (limiti) un lungo periodo di sviluppo, che si estenderebbe dall'Antichità secondo una specie di moto continuo. A differenza degli strutturalisti, lo fanno legando il limite all'idea di infinito, concepita come idea ben più complessa, che talvolta agisce da stimolatore. Secondo certi storici, l'idea di infinito è stata eliminata perché troppo prossima a quella di limite, anche se non ne era proprio il motore. Se si manifestano in questo modo due visioni della storia della matematica, l'una in continuità con questioni dogmatiche e l'altra che si urta con complessi problemi di logica, si hanno di conseguenza importanti differenze nella pratica, cioè nello svolgimento stesso della storia della matematica? Da una parte un modo di vedere il limite come una serie di processi costruttivi che nascondono l'infinito evitandone l'uso esplicito e dall'altra un modo di pensare l'infinito come origine e fondamento teorico del limite, anche se questa è la sua forma attuale per mezzo della teoria degli insiemi. Nascondere qualcosa può essere motivo di costruzione. Ma se il limite appariva come aggiornamento dell'infinito matematico, come mai la parola infinito non appare nel limite? La stabilità acquisita dal termine *limite* pone anche un problema, se si riconosce che parecchie rivoluzioni matematiche hanno contribuito a modificare in profondità la percezione che abbiamo dello spazio e del tempo e che per quest'ultimo la riduzione è avvenuta unicamente a profitto dei numeri reali, con l'aiuto dell'idea di «flusso». È l'idea che Newton promuoveva col termine «fluenti» sulla quale fondava la percezione intuitiva del calcolo differenziale e integrale. Per altri storici, fra i quali i positivisti, dal momento che l'idea di infinito era riservata alla metafisica, e dunque rifiutata dai praticanti del calcolo, occorreva sbarazzarsene. Altri descrivono quindi l'invenzione degli insiemi e della relativa teoria di Georg Cantor a partire dal 1870 con quella delle cascate di infiniti, gli ordinali e i cardinali, come una vendetta nei confronti delle antiche limitazioni. Questi storici considerano i matematici cantoriani – quelli che come Poincaré furono ammiratori del «paradiso» creato da Cantor[8] – come quelli che hanno liberato il limite dalla maggior parte dei legami con l'infinito, fino alla cancellazione dell'idea di successione.

Se intendo qui decostruire la continuità affermata del pensiero relativo all'infinito come motore costante, non è altro che per capire la lunga assenza del termine «limite» (o equivalenti) col quale ho iniziato questo racconto e il mantenimento

8. Poincaré poneva anche lui questo genere di limitazioni, perché affermava che l'infinito attuale non esiste.

del vocabolo, invariato a partire dall'Illuminismo, anche dopo l'invenzione degli infinitesimi del calcolo differenziale e integrale grazie a Newton e a Leibniz nell'ultimo terzo del secolo XVII, fino alla situazione attuale, anche dell'analisi non standard, che non ha certamente posto il punto finale, ma dove l'infinito è stato totalmente abbandonato come problema. Se ho già detto dell'interesse di un tale percorso per capire le teorie della conoscenza che sottintendono sicuramente talune descrizioni storiche, l'interesse nel decostruire un concetto non sta sicuramente nel ridicolizzare i predecessori, le loro proibizioni e limitazioni, anche se non c'è nessuno che può impedire ogni tanto il piacere di tornare bambini. Occorre prima capire ciò che entra come lavoro saliente in una costruzione come quella del limite, e di conseguenza riconoscere i salti rivoluzionari, ma anche, lo vedremo, a che punto concetti matematici diversi si uniscono ed entrano a far parte di una monumentale costruzione, che non era stata assolutamente preparata in precedenza.

Riprendo l'*Enyclopédie* da dove l'avevamo lasciata aperta. Prima del XIX secolo e quindi prima di una propria costruzione matematica del concetto di limite, per la penna sapiente di Jean D'Alambert, essa affermava l'importanza essenziale del limite.

La teoria dei limiti è la base della vera Metafisica del calcolo differenziale[9].

La patata bollente sembra passare in mani diverse da quelle matematiche. Allo storico questa affermazione appare come un rigetto, perché contiene un rifiuto di considerare seriamente il concetto, senza dubbio per l'impossibilità di poterlo approfondire dal solo punto di vista matematico. Anche il *Trésor de la langue française* darà una definizione che espressamente riprendeva il genere della scolastica metafisica: il limite diventava infatti «valore al quale una grandezza può avvicinarsi senza mai raggiungerlo». Non è nemmeno una frontiera, ma un inaccessibile. Perché una tale limitazione, che non si presta a un uso serio in matematica? Si trattava di preservare il concetto metafisico dell'infinito dall'invadenza matematica. Interpretato sul piano valoriale, in *Trésor de la langue française*, l'infinito diventava esso stesso un limite perché «non potrebbe essere raggiunto dallo spirito umano». Inversamente, non si potrebbe pensare che D'Alambert, con la sua dichiarazione che è la metafisica che definisce il limite, quindi che non ne possedeva un concetto stabile, tentava di preservare la matematica dal pericolo di finire in una discussione interminabile, quella precisamente che proveniva dalla metafisica? È questa la ragione per la quale il *Trésor de la langue française* moltiplicò le scorrettezze di linguaggio? Presentava un testo errato a partire da un libro meraviglioso, *Les grands courants de la pensée mathématique*, di François Le Lionnais, uno degli animatori della rete ufficiale della radio francese degli anni 1950, che, prima della «matematica moderna», si sforzava di far penetrare la matematica nelle pratiche culturali di tutti. Ricopio dal *Trésor*, ed è la nona citazione concernente il «limite»:

Si dice che una funzione f(x) è [...] derivabile in un punto x, quando, se x' tende a x, il rapporto (f)x'–(f)x)/(x'–x) tende verso un limite ben determinato, chiamato derivata di f(x) nel punto x.

9. *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des arts et des sciences*, articolo «limite», notato 0 da D'Alambert. Questa definizione è ripresa in *Encyclopédie méthodique* nel 1785 (Figura 6).

Occorre evidentemente leggere f(x')–f(x), ma soprattutto indovinare che l'espressione «ben determinato» significa semplicemente il rifiuto dell'infinito. Ciò che non permetterà a nessuno di capire che l'esempio è stato scelto per giustificare il fatto che il limite di x' verso x è tale che il valore di x' non possa passare da x; infatti nella definizione del rapporto incrementale (f(x')–f(x))/(x'–x) questo deve sempre avere senso. Ho usato prima l'aggettivo «scolastica» che qui va inteso nel senso di dogma scolastico. Un tempo, infatti, nei programmi ufficiali, siccome il limite doveva servire solo per la derivata (intesa nel senso di differenziabilità, nell'opera citata, che non dovrebbe far capo a un rapporto), ci si mise a proibire il passaggio concernente la variabile tendente a un limite. Oggi consideriamo che ogni definizione ha il suo aspetto convenzionale e si giustifica solo con la propria esistenza; ma usandola per il limite ci si complicava la vita nello spiegare il «tendere verso», perdendo anche alcuni enunciati utili e piacevoli, come il fatto che la composizione di due funzioni continue è continua[10].

Non dimentichiamo nemmeno l'ironia che può trovare posto nell'uso del termine «metafisico», soprattutto quando è associato all'aggettivo «vero»! Prendiamo atto anche del fatto che D'Alembert restringeva il calcolo al solo calcolo differenziale, mentre il calcolo integrale, con le sue somme, come era inteso dai praticanti, per esempio da Pierre Bouguer, faceva intervenire pienamente i limiti, in un modo ancor più ricco. Fu la forza di Cauchy, colui che, come già detto, introdusse il primo concetto di limite matematicamente corretto, lo stabilire questa generalizzazione del limite, che permette di fare allo stesso modo calcolo differenziale e calcolo integrale, suggerendo ciò che sarebbe poi stato formalizzato dal concetto di filtro. E con ciò di fondare l'Analisi matematica su basi «sane», come afferma la maggior parte degli storici della matematica. Essi pensano soprattutto alle basi «malsane» degli infinitesimi o di altri indivisibili, come Cavalieri e Leibniz, ciascuno preso separatamente. Questa sanzione epistemologica degli storici è una prima, nel senso che cancella un orientamento intellettuale in un dominio considerato infallibile collettivamente e a lungo termine.

Nell'*Encyclopédie Méthodique* del 1785, prima di Cauchy, dunque, ma con lo stesso proposito di sanare, l'abate de La Chapelle interveniva per dare la propria definizione di limite, dopo la ripresa dell'articolo dell*'Enyclopédie*. Perché stimava di averne una, contrariamente alla posizione defilata di D'Alembert. Come quella ben posteriore del *Trésor de la langue française*, la definizione dell'abate de La Chapelle restringeva *a priori* il concetto. Si trattava di rifiutare un sorpasso del limite e il *Trésor* rifiuterà che lo si raggiunga.

Si dice che una grandezza è il limite di un'altra grandezza, quando la seconda può avvicinarsi alla prima di più di una grandezza data, piccola a piacimento, senza che la grandezza che si avvicina possa sorpassare la grandezza avvicinata; in modo che la differenza di una tale quantità al suo limite sia assolutamente indeterminabile[11].

L'abate de La Chapelle interpretava male l'ingiunzione di D'Alembert perché con l'espressione «indeterminabile» la mancanza di gusto di questa definizione

10. Se si vuole conoscere un aneddoto, il mio primo impegno come giovane insegnante all'Università di Nantes fu un corso in parallelo con un collega che adottava la definizione «resistente» di limite.
11. Mathématiques, tome second, Encyclopédie méthodique. Paris: Panckoucke, 1785, p. 309, 2^e colonne. Articolo notato con (E), lettera che designa l'abate de La Chapelle.

è di trasmettere «l'odore di vecchiaia» della metafisica, come l'aveva ben qualificata François Viète nel 1591 nella sua opera *Isagoge in artem analyticem*[12]. Questa definizione impediva le oscillazioni attorno al limite. Ora, un secolo e mezzo prima dei volumi matematici dell'*Encyclopédie méthodique*, Grégoire de Saint Vincent non esitava a disegnare degli zig-zag[13] (Figura 5) per illustrare questo concetto di limite, al quale consacrava un intero libro, il secondo del suo *Opus geometricum*, e dava un esempio pulito visibile nella figura 7, seguendo la linea ascendente ADEPGHIK… e la sua proiezione CAN… fino al limite B.

Si noterà che Grégoire de Saint Vincent ha sviluppato nel piano il limite per fargli perdere ogni carattere di monotonia. È una sorta di prima intuizione topologica. Si può anche osservare che Grégoire de Saint Vincent agisce in questo modo per risolvere un problema di media proporzionale, quindi per un calcolo di tipo musicale che i Greci avevano presentato come geometrico nel calcolo dell'intersezione di una parabola con un'iperbole, messe in modo che abbiano una sola intersezione reale.

57.

quæ hujus cavitati, tunc lentes immediatè junctæ sese mutuò ferè emendarent & altera alterius actionem aboleret, sic ut in alterius excessu nullam vel vilem medicinam repositam haberet oculus confusione laborans in remotis videndis. Divulsa verò hac continuâ lente, à cavâ, plus etiam convergerent radij in cavam incidentes, & sic à cavâ ne paralleli quidem amplius effici possent, nedum divergentes. Eadem multò magis in convexam minoris circuli competunt. Relinquitur igitur majoris circuli convexitas idonea.

Deniq; dico augeri speciem visibilium, si circulus convexitatis major sit. Nam per XXC. convexa lens solitaria auget visibilia. Etsi verò per XCVI. concava lens etiam solitaria minuit visibilia, verumq; est, & lentem convexam, & quæ per eam videntur; majora esse, si solitaria sit convexa, quàm si interponatur concava: tamen per XXCII. & XCIIX. hæc augmentatio & hæc diminutio major est in remotioribus. Cum ergò cava sit propè oculum, penè nulla erit ejus diminutio: & cum convexa longius ab oculo remota sit, major erit ejus augmentatio.

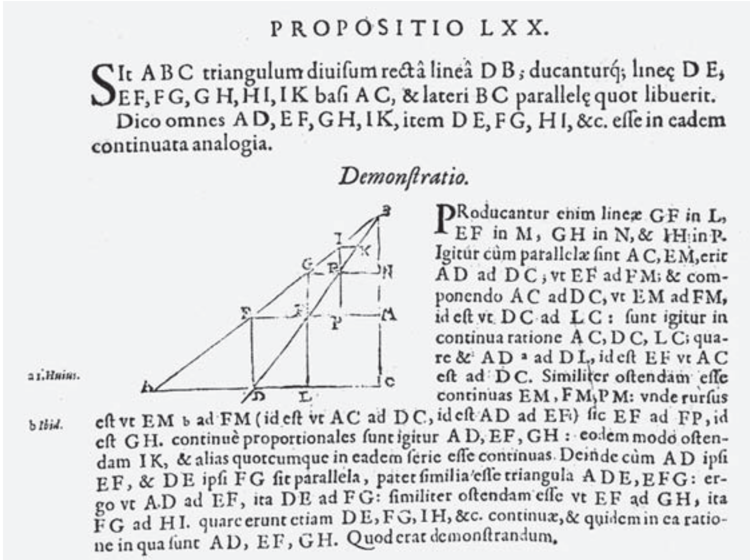
CIIX. PROPOSITIO.

Convexo posito in quacunq; distantiâ ab oculo, quodcunq; cavum, quod solitariè applicatum oculo, confusa præstet visibilia, quodque sit minori circulo cavum quàm quo utitur convexum, incerta distantiâ & situ inter oculum & convexum, distincta exhibet visibilia.

Est quasi conversa prioris sed liberior. Illic enim cavæ lentis situs erat datus proximè oculum, ideoq; unicus,

Figura 4. Dal Dioptrice di Kepler del 1611 (p. 57), figura che utilizza la convergenza in ottica.

12. François Viète, *Isagoge in artem analyticem*. Tours: Mettayer, 1591.
13. L'ordine dato alle figure in questo articolo non rispetta quello originale, allo scopo di dare alle stesse un ordine cronologico.



PROPOSITIO LXX.

SIt ABC triangulum diuisum rectâ lineâ DB; ducanturq; lineę DE, EF, FG, GH, HI, IK basi AC, & lateri BC parallelę quot libuerit. Dico omnes AD, EF, GH, IK, item DE, FG, HI, &c. esse in eadem continuata analogia.

Demonstratio.

PRoducantur enim lineæ GF in L, EF in M, GH in N, & IH in P. Igitur cùm parallelæ sint AC, EM, erit AD ad DC, vt EF ad FM; & componendo AC ad DC, vt EM ad FM, id est vt DC ad LC: sunt igitur in continua ratione AC, DC, LC; quare & AD a ad DL, id est EF vt AC est ad DC. Similiter ostendam esse continuas EM, FM, PM: vnde rursus est vt EM b ad FM (id est vt AC ad DC, id est AD ad EF) sic EF ad FP, id est GH. continuè proportionales sunt igitur AD, EF, GH: eodem modo ostendam IK, & alias quotcumque in eadem serie esse continuas. Deinde cùm AD ipsi EF, & DE ipsi FG sit parallela, patet similia esse triangula ADE, EFG: ergo vt AD ad EF, ita DE ad FG: similiter ostendam esse vt EF ad GH, ita FG ad HI. quare erunt etiam DE, FG, IH, &c. continuæ, & quidem in ea ratione in qua sunt AD, EF, GH. Quod erat demonstrandum.

a 1. Huius.
b Ibid.

Figura 5. Una giustificazione grafica del limite fatta da Grégoire de Saint Vincent in *Opus geometricum* del 1647 (proposizione 70 del libro II, p.92)

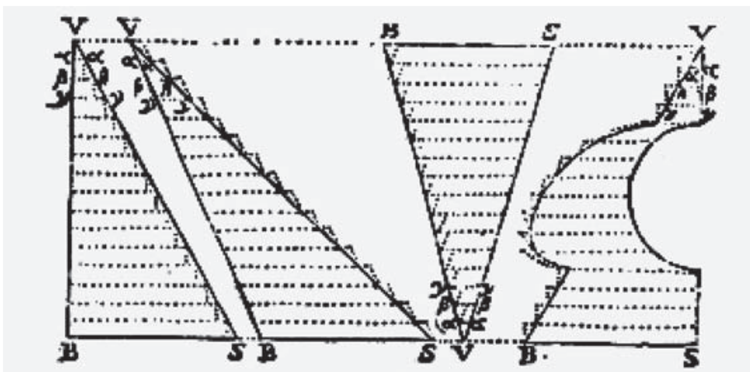


Figura 6. Un esempio di rigetto di John Wallis in *Arithmetica infinitorum* del 1656.

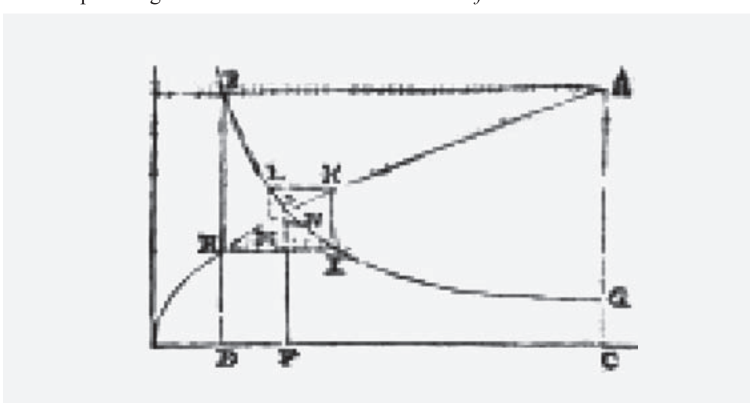


Figura 7. Contrarie alle definizioni future dell'*Encyclopédie* degli esempi di oscillazioni attorno a un limite, opera di Grégoire de Saint Vincent che si trova nel libro VI dell'*Opus geometricum*.

3. I pericoli di una generalizzazione spiegano una nuova limitazione surrettiziamente posta questa volta su ciò di cui si prende il limite

Nel secolo XVIII come pure nel XX nei dizionari non specializzati il limite è utilizzato solo sulle grandezze. Ciò risponde sempre a un bisogno di limitazione e implica che non si può parlare di limite di una figura geometrica. Un'immagine di John Wallis serve da controesempio (figura 6): vi si vedono i triangoli successivi iscritti che si schiacciano sul lato di un dato triangolo e, se si può dare un senso di limite alla linea a zig-zag, si vede che il perimetro del suo contorno non tende verso la lunghezza del lato (che rimane costante) mentre che l'area della superficie compresa tende verso l'area limite, come permette di concludere anche l'antico metodo di esaustione. Detto altrimenti, se si supera il concetto di grandezza, nel nostro caso prendendo una linea, il limite non possiede allo stesso modo ciascuna delle proprietà quantificate (qui la lunghezza) che si possono assegnare alla linea. Non si potrà pertanto dire che l'astrazione che si installa con il limite conserva solo l'essenziale, perché nell'esempio di Wallis il procedimento rimane monotono.

Si può capire perché il concetto di grandezza, con i suoi molteplici significati fenomenologici, sia oggi scomparso dal linguaggio matematico e lo si trova solo in quello fisico, anche nella meccanica quantistica. In fisica si parla di grandezze vettoriali, mentre nelle lezioni liceali di vettori. Siccome i numeri reali hanno fornito il concetto ideale di grandezza ai matematici, si può capire che Cauchy abbia basato la sua spiegazione dei limiti sugli stessi numeri reali. L'estensione del limite ad altri spazi, oltre i reali, non richiede più il concetto di grandezza. Ecco un esempio chiarissimo di un progresso che dimentica la sua origine.

Mentre la grandezza è una specie di fossile, è la traccia di una natura matematica inscritta nel mondo sotto diversi aspetti, i matematici con i soli numeri, qualificati di reali, o le quantità, fanno intervenire astrazioni senza substrato realistico. Con la limitazione alle grandezze, il limite, anche se inserito nella matematica dall'*Encyclopédie*, mantiene un lato «sperimentale», o fisico, cioè come se fosse nato da una «sensazione», per dirla con un linguaggio della scuola.

Fu anche il linguaggio della scienza inglese della fine del XVII secolo che consacrò l'*experimental philosophy*, prima di lasciare il posto, con Claude Bernard, alla «scienza sperimentale». Non si arrischia nulla dicendo che la presentazione del limite per mezzo della grandezza è quella di un «phainomenon», qualcosa, cioè, che i sensi conoscono della cosa, e il concetto matematico ne è una certa astrazione. Nello stesso senso con cui Aristotele parlava dei fenomeni del cielo per indicare l'apparato matematico destinato a rendere conto dei movimenti apparenti, quando invece Platone parlerebbe di realtà. Ma ci si dimentica di precisare che, per essere efficace, questa astrazione deve necessariamente distruggere ancora parte della percezione fisica, non essendo il limite obbligatoriamente quello di una grandezza crescente. La costruzione di Cauchy è dunque rivoluzionaria unicamente nell'analisi dei numeri reali.

Non senza premonizione, nell'*Encyclopédie méthodique* l'abate de La Chapelle si lanciava in una dimostrazione destinata a precisare il singolare del limite. Gli è che egli dimenticava in fretta la grandezza a profitto della quantità.

Se due grandezze A, B sono il limite di una stessa quantità C, queste due grandezze sono uguali[14].

E dava un riferimento: non poteva essere che mania di professore in cerca di pubblicità alla sua opera *Institutions de géométrie* del 1746, dove si doveva trovare «dimostrata esattamente» l'asserzione sopracitata. Non resisto al piacere di andare a vedere , alla fine del secondo tomo, tanto più che l'autore aveva dato un sottotitolo promettente alla sua opera, le sue «istituzioni» essendo «arricchite di note critiche e filosofiche sulla natura e gli sviluppi dello Spirito umano». Il sottocapitolo in questione è intitolato «una ricapitolazione del metodo di esaustione[15]», che si trova paradossalmente liberato da ogni aspetto di calcolo integrale perché si tratta della definizione di uguaglianza di quantità.

Il metodo di esaustione consiste, come abbiamo visto, nel mostrare che due o più quantità sono uguali quando non si può assegnare una determinata differenza[16].

Per mezzo di una convenzione, La Chapelle «assegna» questa asserzione che si fa fatica a considerare metodo. Nasconde un ragionamento per assurdo, concerne il concetto di limite, anche se il termine non viene scritto (nella citazione che segue si legge «senza fine»), così come quello di infinito, e interviene un «avvicinamento» non meglio precisato di due grandezze.

Ora, quando non si può assegnare una differenza tra due grandezze, ma che comunque si percepisce l'esistenza di una differenza che si assegnerebbe e che diminuirebbe senza fine, fino a scomparire non solamente alla percezione sensoriale, ma anche all'immaginazione, bisogna necessariamente convenire che queste grandezze sono uguali, perché due grandezze diverse avrebbero una differenza assolutamente determinata[17].

Questo linguaggio, ben poco matematico a causa dell'utilizzo di termini come «immaginazione», «assolutamente», «assegnare», è comunque notevolmente inserito in una matematica che non ha nulla di antico perché il concetto di convenzione sostituisce quello di assioma. Fa riferimento, ciò che per noi oggi è implicito, a testi vecchi più di un secolo. Mostrerò, non senza compiacimento per chi viene dalla regione Nantese, come si potrebbe chiamare in causa il nome di François Viète per uno scritto del 1591. Ma devo prima terminare, per così dire, con l'autore dell'*Encyclopédie méthodique*. Perché continua così:

Anche se questa verità è chiarissima e che la dimostrazione è semplice e sufficientemente convincente, non abbiamo ritenuto di limitarci a questa unica esposizione; se le verità matematiche non sono sempre chiarite dalla viva luce dei primi assiomi, almeno non si è mai contestato loro il vantaggio di suscitare nell'animo una completa convinzione (…)

Segue la dimostrazione della proposizione che enuncia che «se due grandezze A, B hanno come limite una stessa grandezza C, esse sono uguali». Il limite viene definito in una nota e ricordo che siamo alla pagina 332 del secondo volume dell'opera

14. Abbé de la Chapelle, *Institutions de géométrie*, Paris, Debure et Simon, 1746, tome 2, p. 332.
15. *Institutions de géométrie*, tome 2, p. 331.
16. Idem.
17. Ibidem.

evidentemente destinata alla scuola: questa nota sarà ripresa esattamente dall'*Encyclopédie méthodique* e l'abbiamo già citata. La dimostrazione dell'unicità del limite di «grandezze», l'uguaglianza di A e B nel testo di La Chapelle, è fatta per assurdo, cioè mostra che non si può supporre A e B diverse «senza cadere in contraddizione». È esattamente la dimostrazione che si utilizza oggi in un corso elementare sui limiti in topologia, anche se essa concerne i numeri reali (oppure oggi sugli elementi di uno spazio topologico, almeno separato, concetto che appare sull'elenco dei contenuti di *Topologie générale* di Bourbaki, in figura 2, e non su grandezze come nel 1785[18]. Questa identità formale, riferita a grandezze, nasconde una differenza considerevole e fa capire a che punto la matematica, molto spesso, non sorga dalla sola logica. Le stesse parole, la stessa sintassi, qui nel caso dei limiti, non significano la stessa conoscenza. In La Chapelle manca l'essenziale e quindi il resto è verbosità. Ho l'impressione che questa verbosità era ben avvertita dai contemporanei. In effetti non si sa mai, nonostante l'impiego del verbo «avvicinarsi», che cos'è una grandezza che ha un limite, la sua variabilità, ed è qui che ci si accorge che il concetto di funzione appare necessario, anche per capire quello di variabile. Si costata che il concetto di limite viene dopo quello di inassegnabile, che ai nostri occhi potrebbe definirlo, essendo il vero dato intellettuale di questo testo che pretende di essere anche filosofico. È forse il riferimento alla vera metafisica del limite secondo D'Alembert che l'articolo dell'abate La Chapelle intendeva correggere?

Considerevolmente aiutato dal calcolo infinitesimale, l'infinito conquistò un posto molto importante in matematica. Come prova, anche se aneddotica ma molto significativa, propongo il calcolo sugli arcobaleni eseguito da Edmund Halley nel 1700, che inventò un metodo per dimostrare che in effetti i due arcobaleni che generalmente si osservano potevano essere moltiplicati all'infinito, anche se una persona ne vedeva solo due[19].

Halley seguiva il metodo di Descartes, che faceva circolare il raggio luminoso all'interno di una goccia sferica di pioggia e calcolava un estremo nella direzione del raggio uscente, luogo angolare dell'arcobaleno[20]. Distingueva due casi: da una parte quello nel quale il raggio luminoso si rifletteva una volta all'interno della goccia e dall'altra quello nel quale si rifletteva due volte. L'idea di Halley, straordinaria in quanto si trattava di dimostrare un fenomeno fisico col solo calcolo, essendo l'osservazione impossibile, consistette nell'aumentare il numero di riflessioni. Se chiamiamo k questo numero, l'angolo i_k sotto il quale si situa il fenomeno dell'arco corrispondente è dato dall'espressione:

$$\sin i_k = \sqrt{\frac{(k+1)^2}{(k+1)^2 - 1} - n^2 \frac{1}{(k+1)^2 - 1}}$$

18. Tralascio la seconda dimostrazione del fatto che il limite di un prodotto è il prodotto dei limiti, che La Chapelle considera una tautologia, nel senso che si riduce a supporre la continuità del prodotto visto come funzione di due fattori.
19. Edmund Halley, De iride, sive de Actu Caelesti, dissertatio Geometrico, qua methodo directa hidis utriusq; Diameter, data Ratione refractionis, obtinetur: Cum solutione Inversi Problematis, sive Inventione rationis istius ex data Arcus Diametro, *Philosophical Transactions*, 1700-1701, p. 714-725.
20. Si veda ad esempio, Jean Dhombres, La raison graphique à l'épreuve des gouttes de pluie, des vents et des nuées, Entretiens de la Garenne-Lemot, Jackie Pigeaud (éd.), *Les nuées*, 2010, PUR, 2010, p. 167-190.

nella quale n indica ciò che oggi chiamiamo indice di rifrazione dell'acqua. Per comunicare che possiede una regola generale, Halley indica solamente: *& sic de caeteris*. E ci si divertì gratuitamente a immaginare che cosa succederebbe nel caso che il numero k tendesse all'infinito, ottenendo così l'angolo retto di incidenza, dunque un raggio luminoso tangente alla goccia di pioggia, indipendente quindi dall'indice k e anche dal colore della luce.

3. Si può veramente porre all'origine di una teoria dei limiti un testo interrogativo di Viète del 1591?

Il fatto che non riesco più a seguire D'Alembert nella sua spiegazione dell'*Encyclopédie* dove assicura che il concetto di limite serve a «chiarire parecchie proposizioni matematiche», limitandosi a giustificare il passaggio alle sole grandezze, mi porta a considerare François Viète e un rifiuto a lasciarsi attirare dal calcolo. D'Alembert prende in considerazione una sola proposizione, quella della somma di una progressione geometrica decrescente. Cioè specializza la grandezza in gioco e la sua variabilità perché si tratta di somme successive, dunque soggette a una numerabilità, a un conteggio, ciò che caratterizza la successione. Infatti D'Alembert considera i termini successivi

$a, b, b^2/a, b^3/a^2, \ldots, b^{k+1}/a^k, \ldots$, anche se non scritti così,

e le somme successive $a, a+b, a+b+\frac{b^2}{a}, a+b+\frac{b^2}{a}+\frac{b^3}{a^2}, \ldots, \sum_{k=0}^{n}\frac{b^{k+1}}{a^k}, \ldots$

obiettivamente quando $0<b<a$, che noi esprimiamo meglio nella forma

$$S_n = a\sum_{k=0}^{n}\frac{b^k}{a^k}$$

alla quale associamo

$$S_\infty = a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b^k}{a^k} = \frac{a^2}{b-a}$$

Per esempio, si dice che la somma di una progressione geometrica decrescente, il cui primo termine è a e il secondo b, è aa/b–a; questo valore non è proprio la somma della progressione, è il limite di questa somma, cioè la quantità che può approssimare fin che si vuole, senza arrivarci esattamente.

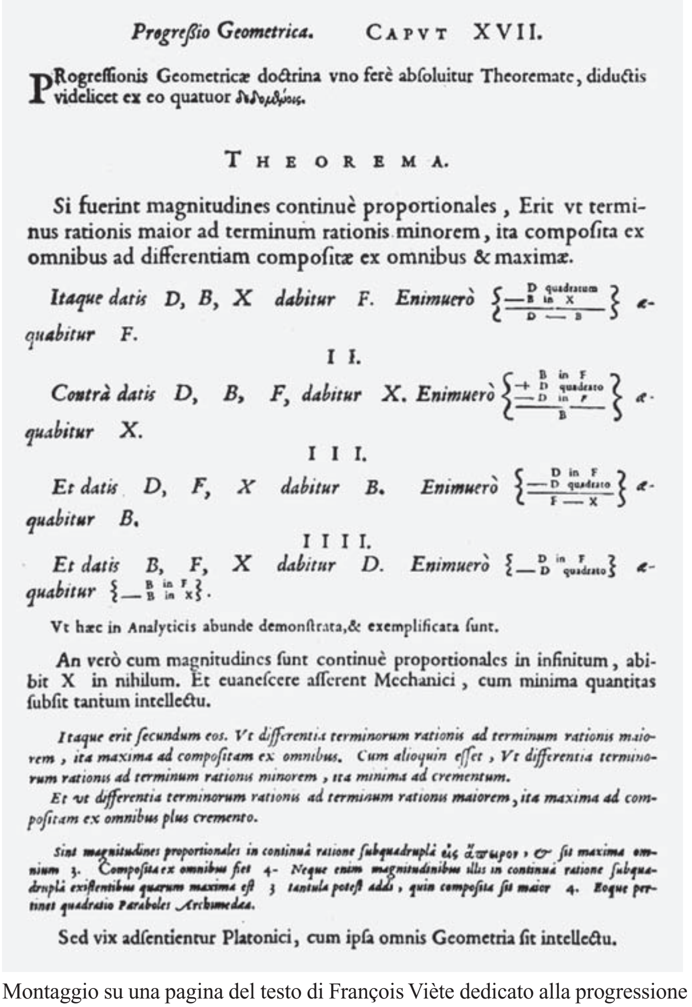
Si vede con questa «spiegazione» di D'Alembert che il plurale dovrebbe essere attribuito al concetto di somma, la grandezza effettivamente variabile secondo l'intero n reso visibile in S_n, ma che solo il limite permette di parlare di somma al singolare, ciò che noi abbiamo indicato con S_∞. D'Alembert continua così:

Perché, se e è l'ultimo termine della progressione, il valore esatto della somma è (aa–be)/(b–a) che è sempre minore di aa/b–a perché in una progressione geo-

metrica, anche decrescente, l'ultimo termine non è mai 0; ma, siccome questo termine si avvicina continuamente a zero, senza mai arrivarci, è chiaro che zero è il limite, e che di conseguenza il limite di (aa–be)/(b–a) è *aa/b–a se si suppone che e=0, cioè mettendo al posto di e il suo limite.*

Bisogna sempre diffidare quando nel corso di una dimostrazione si legge: «è chiaro». Ed è qui che il riferimento a Viète viene utile. Perché questo autore della fine del XVI secolo scriveva, sullo stesso tema di D'Alembert, ma sollevava la stessa questione: quella della costruzione di una teoria dei limiti.

In un testo stampato a Tours nel 1593 da Jamet Mettayer, probabilmente a spese dell'autore, testo che presenta saggi riuniti in una raccolta di tematiche diverse, presentate come risposte a obiezioni non esplicitamente riferite, Viète liquida in poche righe, meno di una pagina come si vede nella figura 8, la somme dei termini di una progressione geometrica infinita.



Progreßio Geometrica. CAPVT XVII.

PRogressionis Geometricæ doctrina vno ferè absoluitur Theoremate, diductis videlicet ex eo quatuor διδομένοις.

THEOREMA.

Si fuerint magnitudines continuè proportionales, Erit vt terminus rationis maior ad terminum rationis minorem, ita composita ex omnibus ad differentiam compositæ ex omnibus & maximæ.

Itaque datis D, B, X dabitur F. Enimuerò $\left\{\frac{D \text{ quadratum} - B \text{ in } X}{D - B}\right\}$ *æquabitur F.*

I I.

Contrà datis D, B, F, dabitur X. Enimuerò $\left\{\frac{B \text{ in } F + D \text{ quadrato} - D \text{ in } F}{B}\right\}$ *æquabitur X.*

I I I.

Et datis D, F, X dabitur B. Enimuerò $\left\{\frac{D \text{ in } F - D \text{ quadrato}}{F - X}\right\}$ *æquabitur B.*

I I I I.

Et datis B, F, X dabitur D. Enimuerò $\left\{D \text{ in } F - D \text{ quadrato}\right\}$ *æquabitur* $\left\{B \text{ in } F - B \text{ in } X\right\}$.

Vt hæc in Analyticis abunde demonstrata, & exemplificata sunt.

An verò cum magnitudines sunt continuè proportionales in infinitum, abibit X in nihilum. Et euanescere afferent Mechanici, cum minima quantitas subsit tantum intellectu.

Itaque erit secundum eos. Vt differentia terminorum rationis ad terminum rationis maiorem, ita maxima ad compositam ex omnibus. Cum alioquin esset, Vt differentia terminorum rationis ad terminum rationis minorem, ita minima ad crementum.

Et vt differentia terminorum rationis ad terminum rationis maiorem, ita maxima ad compositam ex omnibus plus cremento.

Sint magnitudines proportionales in continuâ ratione subquadruplâ εἰς ἄπειρον, & sit maxima omnium 3. Composita ex omnibus fiet 4. Neque enim magnitudinibus illis in continuâ ratione subquadruplâ existentibus quarum maxima est 3 tantula potest addi, quin composita sit maior 4. Eoque pertinet quadratio Paraboles Archimedea.

Sed vix adsentientur Platonici, cum ipsa omnis Geometria sit intellectu.

Figura 8. Montaggio su una pagina del testo di François Viète dedicato alla progressione geometrica nel 1593.

Se delle grandezze sono in proporzione continua, il termine più grande della ragione sta al termine più piccolo come la somma di tutti i termini meno il più piccolo sta a questa somma diminuita del più grande.

È una prima, con una tale generalità, e Viète la vuole così sintetica nel suo diciassettesimo capitolo; non si tratta di una *doctrina*, termine che rinforziamo traducendolo in «scienza», ma potrebbe bastare teoria.

Tutta la scienza della progressione geometrica si riassume più o meno in un solo teorema dal quale si deducono naturalmente quattro relazioni fra i dati[21].

Il dispositivo di Viète, che consiste nel non far giocare il numero di termini della serie, si capisce solo se si prosegue nella lettura e se si accetta che questo numero può diventare infinito. Più precisamente, nel suo esposto interviene – l'effetto sorpresa è voluto – un interrogativo che porta esplicitamente all'infinito.

Ma non si dovrebbe dire, quando delle grandezze sono in proporzione continua all'infinito, che X sparirà nel nulla?

Anche se è la prima volta in questo testo che Viète nomina l'infinito, la sua presenza era prevedibile già dalle prime righe, nascosta nell'enunciato testuale del teorema che sceglie di descrivere una decrescenza, anche se non è richiesta dalla formulazione di una progressione di un numero finito di termini. Per mezzo del gioco di X nel quale si svela l'infinito («il più piccolo termine»), la trascrizione testuale regge bene anche nel caso finito. Il registro nel quale si svolge il testo di Viète cambia brutalmente perché presenta un'opinione, come si usa scolasticamente.

E i Meccanicisti[22] *assicureranno che scompare perché la quantità più piccola esiste solo nell'intelletto.*

Il termine «ragione» adottato nell'enunciato del teorema viene da *terminus rationis* e indica per metonimia la proporzione continua, nel senso che è come un prolungamento della ragione. Quest'ultima è il rapporto tra il primo termine della proporzione continua e il suo successore e dà quindi la *ragione* della progressione. Ma non è esattamente il vocabolo scelto da Viète per indicare i differenti termini e ha inoltre scritto «progressione» nel titolo assegnato al suo capitolo: la progressione parte da un termine più grande e continua diminuendo con un secondo, ecc., fino al più piccolo. La decrescenza è espressa per mezzo della ragione, che è richiamata nel titolo del teorema. Rimane da fissare un arresto della progressione geometrica (secondo il qualificativo del titolo del capitolo), o della proporzione continua (secondo il qualificativo del teorema). Viète non parla di «somma» nella connotazione numerica o algebrica del ter-

21. È la traduzione dell'inizio del capitolo XVII di FRANCISCI VIETAE VARIORVM DE REBVS MATHEMATICIS RESPONSORUM, LIBER VIII. Cuius praecipua capita sunt, De duplicatione Cubi, et Quadratione Circuli. Quae claudit προχειρον, seu Ad Usum Mathematici Canonis METHODICA, Tvronis, apud I. Mettayer, typ. Regium, 1593.

22. Con qualche piccola imprecisione, scelgo di tradurre così il termine *Mechanici*, parola che ha una storia, a proposito dell'opposizione tra le arti meccaniche e le arti liberali, alla quale nella sua prima prefazione ai *Principia* Newton alluderà ancora.

mine, ma esprime la «composizione di tutti [i termini]», dai quali sottrae successivamente il più piccolo e il più grande, che non chiama primo e ultimo. Trattandosi di Viète, senza snaturare la sua intenzione, possiamo immediatamente leggerlo testualmente. E adotteremo pure la scrittura frazionaria delle proporzioni, tanto più che interviene qualche riga più in basso (figura 8). Ponendo un primo termine D, che, senza altra spiegazione salvo quella della «ragione», è «il più grande» della progressione, poi un secondo termine B, più piccolo, indicando con X il termine più piccolo e con F la somma di tutta la progressione, si può scrivere e leggere il teorema in modo diverso:

Dico esse ad B ita F minus X ad F minus D

$$\frac{F - x}{F - D} = \frac{D}{B}$$

Il vantaggio della presenza di questa X, il termine più piccolo, è di equilibrare la presentazione della proporzione con la quale il teorema riassume la progressione geometrica, ciò che noi vediamo nella formula scritta, che i contemporanei di Viète apprezzavano anche per l'equilibrio retorico dell'enunciato. L'interpretazione è molto facile se ci si limita a una progressione avente un numero finito di termini. Con la notazione odierna, con la quale è numerato ciò che Viète non può veramente ordinare col suo modo di usare le lettere non in ordine alfabetico (si passa da D a B, poi a F, grandezza che non si trova nella successione della progressione geometrica), si avrebbe, con n intero (≥1), che designa il numero di termini della progressione, e un termine generale notato $x_k = x_1\, r^{k-1}$ (la lettera D corrisponde a x_1, primo termine della progressione), con la ragione r, nel senso attuale, possiamo scrivere $r = x_1/x_2$. Ma la nostra scrittura attuale, facendo intervenire l'indicizzazione, e il numero n in forma generica, che non è necessariamente il numero di termini della progressione, enuncia altrettanto bene ciò che Viète intende per proporzione continua, che chiama ora progressione geometrica, con la costanza di un rapporto o ragione $r = x_n/x_{n-1}$. Se continuiamo la notazione indicizzata, chiamando ancora F_n la somma dei primi n termini della progressione, con la notazione di sommatoria diventata corrente oggi,

$$F_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

traduciamo l'enunciato di Viète con la formula

$$\frac{F_n - x_n}{F_n - x_1} = \frac{1}{r}$$

Questa scrittura ci fa prendere coscienza che l'intero n in Viète è sostituito dall'invenzione della X, ultimo termine considerato della progressione, quello che noi indichiamo con x_n e che scriviamo $x_1\, r^{n-1}$. La decrescenza della progressione non gioca alcun ruolo nell'espressione del risultato. Questo vale tanto se la ragione sia supposta superiore o inferiore a 1, quanto se il primo termine è inferiore al secondo (progressione crescente, ciò che il nome «progressione» suggerisce). Siccome la questione della generalità si pone, si potrebbe immaginare che la scelta di Viète di una progressione decrescente risulti da un rigore del linguaggio? Per poter designare i termini altrimenti che con «il primo», «il secondo», o «l'ultimo», che implica un ordine numerale, egli utilizza rispettivamente «il più grande», «il meno grande», «il più piccolo», dunque un ordine relativo alla grandezza dei termini utilizzati. Rimane il fatto che la messa in formula del teorema di Viète fa giocare ai due termini D e X un ruolo simmetrico, quando invece la formulazione dell'enunciato rompe questa simmetria. Non è difficile immaginare la proporzione continua esattamente inversa, il cui primo termine è X (ultimo della precedente) e il secondo è il penultimo della precedente, e così via fino ad arrivare al primo termine della progressione precedente, che diventa l'ultimo termine della nuova proporzione continua. Questa nuova proporzione continua, o progressione crescente, avente come ragione l'inverso della ragione della prima progressione geometrica, ha evidentemente la stessa somma della prima perché è composta dagli stessi termini. Allora, se la formula precedente è esatta, diventa ugualmente corretta la formulazione che inverte la ragione.

$$\frac{F_n - x_1}{F_n - x_n}\frac{x_1}{x_2} = \frac{r}{1}$$

Così è nella formulazione di Viète che si può ritrovare la generalità del risultato. Si pone di conseguenza il problema di capire perché egli ha cambiato la terminologia del suo tempo e ha evocato una progressione invece di una proporzione continua, volendola decrescente, abbandonando l'uso di primo termine, ultimo termine, ecc. La questione non è vana e nemmeno un artificio dello storico: è promossa da Viète che ha intitolato «doctrina» il suo corto lavoro. Ma per capire meglio ciò che ci vuol far capire, possiamo passare alla dimostrazione, luogo di spiegazione per eccellenza del matematico quando rifiuta di essere filosofo? No, perché Viète non ne dà.

Quella alla quale possono riferirsi i contemporanei di Viète è la dodicesima proposizione del libro settimo degli «Elementi di Euclide». Eccola nella prima versione che ne dava Clavius, una ventina d'anni prima dell'intervento di Viète che abbiamo discusso. Si noterà subito la presenza del linguaggio delle proporzioni, o piuttosto il vocabolario delle ragioni, con antecedente e conseguente, parole che evitano l'uso di primo e ultimo termine, così come quelle di grande e di piccolo usate da Viète. Ma l'enunciazione che riportiamo di seguito fa intervenire il numero intero n, precisamente detto «quantità qualunque» nel testo euclideo e che dà il numero di termini della progressione.

Se dei numeri in quantità qualunque sono in proporzione, come uno dei precedenti sta a uno dei conseguenti, così saranno tutti gli antecedenti relativamente ai conseguenti[23].

La dimostrazione è di una semplicità sconcertante, una volta adottata la definizione di proporzione continua che fissa la ragione con rapporti successivamente uguali e a partire dalla teoria delle proporzioni del libro 5, usando essenzialmente la proprietà di «addizione di proporzioni»: si tratta solamente delle proporzioni seguenti

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{A+C}{B+D}$$

Nel caso, basta iterare un «qualunque numero» di volte questa «addizione delle proporzioni» per ottenere il risultato formulato da Euclide, come pure quello enunciato da Viète.

23. *Euclidis Elementorum libri XV*, Roma, 1574 ; vedere anche l'ultima versione, *Christophoris Clavii Bambergensis e Societa Jesu. Operum mathematicorum, tomus primus*, Mayence, Antoine Hierat, Reinhard Eltz, 1611, libro 7, proposizione 12.

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_2}{x_3}=\frac{x_3}{x_4}=\ldots=\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}=\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{n-1}}{x_2+x_3+\ldots+x_{n-1}+x_n}$$

Ciò che dà esattamente

$$\frac{F_n-x_n}{F_n-x_1}=\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_2}{x_3}=\ldots=\frac{x_{n-1}}{x_n}$$

che si può leggere precisamente nella forma del teorema di Viète nel testo del 1593, eliminando certi termini delle uguaglianze di ragioni, o delle proporzioni. In modo tale che nel ricostruire la dimostrazione che lui non dà, l'insistenza stessa di Viète sulla scrittura «termine più piccolo» lascia disarmati: detto altrimenti, induce a riflettere. Ed è proprio l'intenzione di Viète. Non scrive un manuale, o un libro di studio per allievi, come le traduzioni degli Elementi di Euclide. Non dà quindi alcuna dimostrazione, né fa riferimento a una dimostrazione del teorema in linguaggio testuale, nel quale il termine chiamato X non figura se non come termine più piccolo: ecco una constatazione di maggiore importanza. Dal testuale al letterale, c'è un «meno» apparente che, quanto all'efficacia, può trasformarsi in un «più».

Occorre fare attenzione alle parole utilizzate. Infatti l'enunciato della proposizione di Euclide si riferisce esplicitamente a «numeri in proporzione», in quanto termini della progressione che in Viète sono, l'ha proprio scritto, grandezze (*magnitudines*) in proporzione continua. Come abbiamo letto, D'Alembert riprenderà questa limitazione alle grandezze diventate infine quantità in Cauchy, nel senso di numeri reali. Inoltre, la dimostrazione che figura in Euclide nel libro dell'aritmetica degli Elementi non è quella indicata sopra: Euclide, e con lui Clavius, utilizza l'espressione *parti di numeri*, nel senso di una ragione di numeri e di fatto non utilizza l'analogia degli «equimultipli», pienamente presente nel libro V.

In un bello e unico svolgimento analitico, Viète deduce altre formulazioni del teorema nella forma che fa intervenire X, precisamente quattro, perché vi sono quattro quantità in gioco, F, D, B e infine questa X dalla quale non si scappa. Dunque quattro modi per esprimere una qualsiasi di queste a partire dalle altre tre. Il numero di termini della progressione non figura fra queste variabili: ecco ciò che deve apparire notevole agli occhi del lettore di Viète. Questi dà *in fine* un nome al suo procedimento, quello di analisi. È un'analisi alla quale la classificazione delle quattro relazioni dapprima fa unicamente riferimento[24], poi la esplicita.

Vt hoc in Analyticis abunde demonstrata, et exemplificata sunt[25].

Che non ci sia algebrizzazione delle ragioni di Viète, nemmeno una numerizzazione, si può vedere nel fatto che egli non propone alcuna dimostrazione alge-

24. La numerazione delle quattro relazioni ha un senso teorico ed è un altro modo di dire che per un obiettivo scientifico Viète usa nel suo testo una disposizione o uno stile particolari.
25. Sfortunatamente, il riferimento è diventato oscuro per noi, per il fatto che non vi è calcolo algebrico identico nel libro già menzionato di Viète che è apparso immediatamente prima di *Isagoge in artem analyticam*. Ma certe opere di Viète sono andate perse. Ciò detto, calcoli analoghi si trovano a proposito delle formule di moltiplicazione degli angoli e in *Zététiques*, opera pubblicata dallo stesso Viète nel 1593.

brica per ottenere la somma di una progressione geometrica, che, abbiamo notato, non chiama più proporzione continua. Come funzionerebbe in sostanza una tale dimostrazione? Per semplice applicazione di una regola algebrica polinomiale. Basta scrivere

$$(1-r)\,(1+r+r^2+r^3+\ldots+r^{n-1}) = 1-r^n$$

La semplificazione che si effettua quando si sviluppa il primo membro non è dello stesso di quella che permette di ottenere F nel calcolo per «addizione di proporzioni» della somma: si ha questa volta un gioco algebrico su ciò che si chiama identità notevole. Il prezzo da pagare è di dimenticare l'omogeneità e quindi di numerizzare la ragione. Viète non lo ha fatto. Si vede ancor meglio che egli non ha la padronanza per poter seguire questa via, perché la formulazione algebrica dà esplicitamente la somma di una progressione partendo dal primo termine a e andando fino all'ultimo termine, quello numerato n, espresso da ar^{n-1}, contrariamente all'espressione di Viète nell'enunciazione del teorema con una proporzione non esplicitata. Soprattutto, la formulazione diretta fa intervenire un termine in più nella progressione, il termine (n+1)-esimo, scritto nella sua notazione ar^n.

$$(1-r)\,(a+ar+ar^2+ar^3+\ldots+ar^{n-1}) = a-ar^n$$

Indicando, come Viète, con F la somma della progressione il cui ultimo termine è ar^{n-1} e con a il primo, si deduce esplicitamente

$$F = \frac{a-a\,r^n}{1-r} = \frac{a^2-a^2\,r^n}{a-a\,r} = \frac{a^2-a\,r\,a\,r^{n-1}}{a-a\,r}$$

Non è la formulazione del teorema di Viète, che non ha esplicitamente F, ma solo una proporzione che fa intervenire F. Che F sia in questo modo determinata è detto anche da Viète. È anche la sua prima relazione e ciò segna il passaggio da una matematica delle proporzioni a una matematica delle formule e delle equazioni.

Si sarebbero potuti considerare altri riferimenti agli Elementi di Euclide per trovare un risultato equivalente a quello di Viète sulla somma di una progressione. Si ha per esempio in Clavius, nel suo *Epitomé des mathématiques* del 1584, una formulazione che consiste nello studiare il rapporto r–1, quello tra la differenza dei primi due termini e il primo termine. Clavius usa le progressioni crescenti, ma solo con numeri interi. Si può facilmente scriverla facendo intervenire la numerazione dei termini della progressione $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. L'essenziale è una proprietà d'invarianza dedotta dall'esistenza stessa della ragione della progressione geometrica.

$$\frac{x_1-x_2}{x_1} = \frac{x_2-x_3}{x_2} = \ldots = \frac{x_n-x_{n+1}}{x_n}$$

La proprietà si ottiene facilmente grazie alle regole delle proporzioni, partendo dalla proporzione

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \ldots = \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

e ricavando analogamente

$$\frac{x_1 - x_2}{x_1}, \frac{x_2 - x_3}{x_2}, \ldots, \frac{x_n - x_n}{x_n}$$

Infine basta applicare «l'addizione di proporzioni» per ottenere una semplificazione a cascata al numeratore, nel quale rimangono solo il primo termine e l'(n+1)-esimo.

$$\frac{x_1 - x_2}{x_1} = \frac{x_1 - x_{n+1}}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}$$

Per rendere «naturale» questa operazione, è sufficiente mettere l'espressione in forma polinomiale in funzione della ragione, per passare dal grado n–1, quello dell'ultimo termine o termine n-esimo, al grado n. Infatti, la scrittura esplicita della somma F (o meglio F_n) dà

$$F = \frac{x_1}{x_1 - x_2}\left(x_1 - x_{n+1}\right)$$

Si può però facilmente far sparire questo termine supplementare, facendo intervenire la ragione r, rapporto dei primi due termini:

$$F = \frac{x_1 - x_n}{1 - r} + x_n$$

Questa formulazione si trova in Clavius nell'*Epitomé* e in qualche altro autore e le grandezze x indicizzate sono numeri interi, ciò che mostra il ruolo numerico giocato dalla ragione. Ci si può domandare perché l'intero n, il numero di termini della progressione, non interviene. Abbiamo già risposto facendo notare l'assenza di considerazione del grado di un polinomio in Viète e subito segnalando l'importanza di questo concetto introdotto da Descartes: è l'algebra polinomiale che fa vedere il numero di termini nella formula che esprime la somma di una progressione. Ma si vede pure che il calcolo di n (come «relazione» nel senso di Viète, ne dà quattro, a partire dalle tre grandezze di una progressione) non si può fare senza passare da un'operazione di esponenziazione o di logaritmo[26]. Queste operazioni non figurano nell'*Art analytique* di Viète e i lavori di Bürgi e Napier appaiono più importanti.

26. Si ha, per esempio, se si vuole esprimere n a partire dal termine D della progressione, dalla ragione r o dal rapporto B/D tra il secondo termine e il primo, nella notazione di Viète e dal termine più piccolo X, usando il logaritmo in una base qualsiasi,

$$n = 1 + \frac{\log X/D}{\log B/D} = \frac{\mathrm{Log}\ X + \log B - 2\log D}{\log B - \log D}$$

L'espressione di n a partire da F, B e D sarebbe ancora più difficile, tenuto conto di una relazione che possiamo scrivere alla maniera di Viète, per vedere chiaramente che non poteva considerarla nella sua *Art analytique*: $DB^n – FDBN^{n-1} + (F–D) = 0$

Il lettore capisce subito il suggerimento di Viète. Il teorema è vero nella sua forma testuale perché è sufficiente uguagliare a zero[27] il termine più piccolo. In questa forma, possiamo dire, è una scrittura indefinita della somma di una progressione geometrica (l'intero n, il numero di termini, non è specificato e potrebbe eventualmente essere infinito). Non è forse questo il plus valore dell'algebra?

L'inserimento di un interrogativo epistemologico è curioso nella misura in cui Viète è uno di quelli che, nel XVI secolo, attiravano l'attenzione sulla separazione dei generi filosofico e matematico. Al punto che contrasta con la mescolanza fatta in questo corto testo, ma sarebbe insignificante in scritti di autori contemporanei. L'analisi di Viète potrebbe concludersi sul solo gioco di un'analogia regolata da un calcolo: uguagliare a zero una quantità indefinitamente piccola e raggiungere una formula molto vicina a quella che adottiamo usualmente [F=D/(D–B)·D], anche a scuola per la somma di una progressione geometrica convergente[28]. In quest'ultimo caso sarebbe solo stata una questione di stile. Non è così perché se il testo continuasse cesserebbe immediatamente l'analisi. Questa lascia il posto a una sintesi, nel senso che c'è costruzione e adeguamento della costruzione alla domanda «non si dovrebbe dire…?» Domanda che pone l'interrogativo del mantenimento dell'analisi. La sintesi comincia sintomaticamente con una definizione, quella dell'incremento ed è originale:

la differenza tra uno [qualunque] dei termini e la ragione sta a quella tra il termine [immediatamente] inferiore e la ragione, come la [grandezza] più piccola sta all'incremento.

Nel caso di una progressione con un numero finito di termini, l'incremento D gode di una definizione univoca,

$$\frac{x_n}{\Delta} = \frac{x_1 - x_2}{x_2}$$

La continuazione del ragionamento consiste nello stabilire l'annullamento necessario dell'incremento quando la progressione è infinita. Ma Viète non sente più il bisogno di un ragionamento completo; gli basta riferirsi al risultato che Archimede aveva splendidamente esposto in sintesi – «E questo è un fatto» – nella «Quadratura della parabola».

Per due grandezze proporzionali con ragione continua di un quarto all'infinito[29]*; sia 3 la più grande. La grandezza composta da tutte sarà 4. E questo è un fatto*[30]*, a queste grandezze che sono in ragione continua un quarto, delle quali la più grande è 3 non si può aggiungere nemmeno poco senza che la grandezza composta diventi superiore a 4.* Lo stile allusivo è senza equivoco: è per assurdo che si verifica che

27. Cioè porre X=0. Ora X è una grandezza secondo Viète, e lo zero non può esserlo, a quell'epoca, nemmeno in algebra, come abbiamo già detto.
28. È la forma frequentemente usata nel XVII secolo e che equivale alla formulazione dei nostri giorni. Vi sono apparentemente tre tradizioni relative alla dimostrazione di questo risultato e in ciascuna è «dimostrato» che qualcosa tende a zero: l'una di Viète, di tipo logico e ripresa poi da Fermat, l'altra geometrica (cioè che inserisce il calcolo in una figura) di Grégoire de Saint-Vincent (figura 9), e una che si riferisce alla meccanica di Isaac Barrow nelle sue *Lectiones geometricae* del 1671.
29. Nell'originale in greco (ειςαπειρον), Archimede somma $3+3/4+3/4^2+\ldots$ e stabilisce la formula del resto, cioè $3+3/4+3/4^2+\ldots+3/4^n+1/3 \cdot 3/4^n = 4/3 \cdot 3$. Con un doppio ragionamento per assurdo – e non un passaggio al limite – ottiene $3+3/4+3/4^2+\ldots+3/4^n+\ldots = 4$ In questo esempio, le notazioni di Viète danno $F=4$ e $\Delta_n = 1/4^n$.
30. *Composita ex omnibus fiet 4 – Neque enim magnitudinibus…*

l'incremento è nullo in questo caso particolare che vale la generalità. La continuità è così ristabilita nell'ordine storico.

Viète non si ferma mai! È passato dall'analisi alla sintesi e ha sollevato una questione che non è riuscito a risolvere. Il riferimento a una tradizione, quella del metodo di esaustione del quale Archimede è l'utilizzatore più attento, non è in ogni caso un argomento autorevole. Non è una critica alla tradizione: anzi è bene constatare che questa tradizione ingloba un tipo di dimostrazione del tutto soddisfacente, ma che non può avere seguito. Non può avere un ancoraggio algebrico; un assoggettamento della tradizione alla via algebrica la snaturerebbe. Viète ha inoltre mostrato la necessità di avere una «nuova algebra», che non ha niente di naturale, perché deve poter trattare le quantità indefinite come, nella situazione di una progressione infinita di termini, l'incremento D o x_∞ che abbiamo già incontrato. Queste quantità, nel caso di una progressione di un numero finito di termini, si comportano secondo l'algebra usuale (che in verità è già la nuova algebra del XVI secolo, quella indotta dalla teoria delle proporzioni). Se queste quantità si annullano in altre formule, analoghe o identiche, si ottiene del vero; questo vero è dimostrabile per esaustione, cioè risulta vero secondo la migliore tradizione; inoltre, queste quantità, anche nel caso di una progressione infinita, si combinano algebricamente in modo conveniente perché un rapporto di due quantità è uguale a un rapporto ben definito di quantità finite[31]. Il testo di Viète[32] riferisce su quest'ultima esperienza, essenziale ma non spiegabile matematicamente. Egli conclude rifiutando la fine, innegabilmente con un'esortazione a continuare:

Ma i Platonici daranno difficilmente la loro approvazione, in quanto per loro tutta la Geometria risiede nell'intelletto[33].

La continuazione sarà sintesi o analisi? L'esitazione indica l'annullamento delle differenze. Per il nostro obiettivo, è sufficiente aver stabilito, ben più a lungo di quello che fu necessario per il semplice calcolo matematico, che, con l'indicazione di un futuro necessario, il passaggio da uno stile all'altro è servito per far prendere coscienza a Viète dell'inutilità di un ritorno al passato e l'abbandono del va e vieni.

4. Gli effetti di un'algebrizzazione: da Viète all'analisi non standard che abolisce i modi di trattare i limiti di Cauchy

Vorrei molto rapidamente chiarire solo due cose concernenti il XX secolo e il suo modo di considerare i limiti e la convergenza. Da una parte ci tengo a indicare come il concetto di prossimità – assente nel questionario di Viète –, una volta messo nella forma degli intorni, permette agevolmente di sfociare alla costituzione di

31. Cioè =
32. Esperienza ripetuta su altri esempi, nel XVII secolo e agli inizi del XVIII (secondo la testimonianza del 1734 di George Berkeley in *The Analyst*).
33. Non voglio commentare questa frase che del resto è molto allusiva, spinta dall'evocazione dei meccanicisti, cioè da quelli che credono che la matematica delle cose reali non ha bisogno di gonfiarsi con dimostrazioni superflue, essendo il buon senso o più semplicemente l'efficacia a fornire la convinzione. È tutta la discussione che il Rinascimento riprende spesso a partire dalla *Vita di Marcello* di Plutarco, che oppone i meccanicisti ai platonici (come dice Amyot nella sua traduzione francese di poco anteriore al testo di Viète: «et Platon le [Archimede] gronda un petit d'avoir…»).

una topologia. Esamino un processo che troppo facilmente si dice di generalizzazione, quando invece mette in atto un metodo particolare, quello assiomatico, in gran parte sconosciuto prima del XX secolo. Si fabbricano a priori alcune proprietà che possono essere prese come assiomi di una teoria che ne ingloba una precedente, che potrà essere recuperata nei calcoli, lasciandosi guidare quasi automaticamente dagli assiomi posti. D'altra parte, ma nello stesso quadro assiomatico, indicherò il modo di introdurre il concetto di filtro a partire da quello di intorno e concluderò schizzando il modo algebrico di recupero dei numeri reali e dei loro limiti nel campo non standard degli iperreali. Questo è un risultato che non può assolutamente essere considerato una posterità di Cauchy – autore accreditato della prima teoria «rigorosa» dei limiti –, precisamente perché Cauchy si basa sulle «quantità reali», quasi considerate come un dato fenomenologico.

4.1. Gli intorni

Parrebbe normale definire un ε-intorno $Y_\varepsilon(x)$ di un numero reale x come il sottoinsieme dei numeri reali tali… L'idea è di eliminare questa espressione che fa intervenire un valore assoluto, per poter progettare una generalizzazione. Lo si farà elencando alcune proprietà, certamente dimostrate con l'impiego del valore assoluto, ma che si esprimono senza esplicitarlo. Si pensa allora a un intorno V(x) di x come un sottoinsieme per il quale esiste almeno un ε tale che V(x) contenga $Y_\varepsilon(x)$. È agevole verificare che la famiglia $Y(x)$ di tali intorni su x varianti nell'insieme dei numeri reali, verificano fra l'altro le quattro proprietà seguenti:

1. Per ogni V di $Y(x)$, x appartiene a V.
2. Ogni sottoinsieme di numeri reali contenente un V di $Y(x)$, appartiene a $Y(x)$.
3. L'intersezione di due sottoinsiemi di $Y(x)$ appartiene a $Y(x)$.
4. Per ogni numero reale x, esiste un V di $Y(x)$ tale che per ogni y di V l'intorno V appartiene a $Y(x)$.

Quest'ultima proprietà, evidentemente quella indotta dagli ε-intorni $Y_\varepsilon(x)$, suggerisce l'idea di attribuire un nome generico a questo genere di sottoinsiemi V. Si dirà che un sottoinsieme V è «aperto», se è intorno di ciascuno dei suoi punti. Gli aperti si possono anche descrivere con un certo numero di proprietà. L'insieme dei reali e il vuoto sono praticamente degli aperti per definizione, l'intersezione di un numero finito di aperti e l'unione qualunque di aperti è ancora un aperto. Si chiama topologia ogni famiglia di sottoinsiemi che possiedono le proprietà precedenti. Le cose sono state pensate in modo che, reciprocamente, data una topologia, si possano dedurre degli intorni, cioè dei sottoinsiemi che verificano le proprietà 1-4. Per poter parlare di punto limite in seno a una topologia, senza dover ricorrere a successioni, si può passare a un nuovo concetto, quello di filtro. Essa conduce a una convergenza, dunque a un concetto di limite, su uno spazio topologico qualunque; si riduce al concetto usuale per esempio nello spazio dei numeri reali.

4.2. I filtri

La famiglia *F* degli intorni di un punto x in uno spazio topologico possiede le tre seguenti proprietà:

1. Ogni sottoinsieme B contenente un A di *F* appartiene a *F*.
2. L'intersezione di due sottoinsiemi di *F* appartiene anche a *F*.
3. L'insieme vuoto non appartiene a *F*.

Si conviene di chiamare filtro una famiglia che possiede tali proprietà. Si dispone di un ordine evidente sui filtri, quello dell'inclusione: si introduce la denominazione «il filtro *F* è più fine del filtro *F'* se contiene *F'*». Il concetto di filtro, definito con un processo algebrico di strutture ordinate, permette di definire una convergenza su uno spazio topologico X: si dice che il filtro *F* converge verso un punto x di X, detto punto limite, se il filtro *F* è più fine del filtro costituito dagli intorni di x. Ecco come appare la definizione della continuità secondo i filtri, nel testo *Topologie générale* di Bourbaki:

4. *Limites et continuité.*

Soient X, Y deux espaces topologiques, f une application de X dans Y, $\mathfrak{B}$ le filtre des voisinages dans X d'un point $a \in$ X. Au lieu de dire que $y \in$ Y est limite de f suivant le filtre $\mathfrak{B}$ et d'écrire $y = \lim_{\mathfrak{B}} f$, on utilise la notation particulière

$$y = \lim_{x \to a} f(x)$$

et on dit que y est *limite de* f *au point* a ou que $f(x)$ *tend vers* y *lorsque* x *tend vers* a. De même, au lieu de dire que y est valeur d'adhérence de f suivant $\mathfrak{B}$, on dit que y est *valeur d'adhérence de* f *au point* a.

Figura 9. La definizione di continuità in *Topologie générale* di Bourbaki.

4.3. Gli ultrafiltri

Sempre nell'ordine si definisce un ultrafiltro su un insieme X come filtro per il quale non esiste alcun filtro più fine. È dunque l'elemento massimo dell'insieme ordinato dei filtri sull'insieme X. L'esempio banale di ultrafiltro è quello di tutti gli insiemi contenenti un punto x di n insieme X; ma ce ne sono altri, anche se non si possono definire senza usare la proprietà di massimalità. Si può allora stabilire che una condizione necessaria e sufficiente affinché un filtro *F* su uno spazio topologico converga verso un punto x è che ogni ultrafiltro più fine di *F* converga verso x. Allora per mezzo di una proprietà detta di separazione dei punti dello spazio topologico X con degli aperti, si riesce a recuperare ogni punto di X con un determinato ultrafiltro. Si può fare di più e disporre di una topologia sull'insieme di tutti gli ultrafiltri, per esempio nello spazio dei numeri reali, e così recuperare questo spazio e tutte le proprietà dei limiti di Cauchy, in qualità di sottospazio di numeri detti semplicemente iperreali. Si è così algebrizzata l'analisi usuale.

5. Conclusione

Non è facile oggi dire in che cosa consista la posterità dell'interrogativo di Viète e la domanda è senz'altro oziosa. Non ho presentato il lavoro di Viète come l'appello per una teoria del limite algebrizzata nel senso dell'analisi non standard. Ma mi è parso indispensabile almeno accennare a questa analisi, anche se non ha ancora conquistato tutti, e quindi di accennare ai filtri, alla topologia, ecc. La teoria che mi pare preconizzata da Viète concerne solo la messa in gioco di formule e sfocia in una pratica che si può definire di calcolo delle funzioni. Ha subito assunto un ruolo nel concetto di limite, utile per sviluppare una teoria delle funzioni continue, ma è stato necessario liberarsi dall'espressione algebrica nella quale la continuità appare quasi come un'evidenza formale. La formalizzazione della continuità in Cauchy, frutto della sua riflessione sui limiti, traduce la continuità come proprietà di conservazione del limite. Questa proprietà può benissimo essere definita con i filtri, che possono essere considerati una posterità di Cauchy.

Di Viète è l'indeterminazione della ragione della progressione geometrica (intesa come decrescente) che ha fissato l'attenzione sotto la forma che noi scriviamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

e quindi ha fissato il concetto stesso di variabile. In più è dovuta intervenire la composizione della variabile per ottenere un risultato generale e la sua demoltiplicazione in molte altre, per ottenere la somma della serie, come anche il primo e l'ultimo termine. Viète lanciava problemi di tipo funzionale.

Certo, la decostruzione effettuata qui conduce a una possibile ricostruzione – mania fortunata dell'epistemologia storica –, le due idee – isolare una variabile ed esprimerla – si ritrovano riunite nelle due serie che chiamiamo intere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

delle quali Newton, a partire da un caso particolare, quello della serie del binomio (che esprime in serie intera) lo estendeva a tutte le funzioni utili per la Meccanica celeste o più generalmente a tutte le funzioni che potevano intervenire in fisica matematica.

Questa ricostruzione ha suggerito un'altra pista per precisare l'idea di limite come quella che è utilizzata correntemente oggi. Analogamente e senza garanzia storica, un'altra pista potrebbe prevalere nella ricostruzione delle idee di Leibniz secondo l'analisi non standard.

Se tutte queste decostruzioni sui limiti che ho presentato dando anche alcune costruzioni fanno abbandonare il bel cammino di un progresso teso verso un'astrazione finalmente raggiunta oggi, la conclusione generale non deve condurre ad affermare che non vi sono che punti di vista relativi nella storia della matematica. Ciò che è stato realizzato è molto più ricco in una visione prospettica della matematica. La ragione risiede nel fatto che questa disciplina non funziona a temi separati, ma ubbidisce il più delle volte a concezioni d'insieme in modo che i differenti elementi in causa a una certa epoca non sono del tutto indipendenti e i loro legami costituiscono una *mathesis*. Scegliere un tema come i limiti torce necessariamente la realtà storica e rischia di far credere che c'è una sola via, se si tralasciano come cose obsolete le limitazioni a priori date agli oggetti elaborati. Ma comunque la scelta di un tema, anche se è pur sempre un paraocchi per lo storico, può insegnare che una volta c'era molto di più di quello che si vorrebbe vedere. Ecco giustificato il minuzioso esercizio di lettura di una sola pagina di Viète. Fra le diverse scuole di pensiero e anche al di sopra delle generazioni, si creano posterità che liberano lo storico dall'oneroso compito di dimostrare l'esistenza di un progresso continuo e costante. Decostruire un tema cercando di basarsi sulle inutili limitazioni che sono state introdotte, come abbiamo fatto nell'esempio dei limiti, permette dunque di ritrovare la ricchissima varietà di concetti che possono essere stati all'origine di molto di più del solo tema scelto.

3. Balli caraibici e matematica

Aurelio Di Caprio[1]

The Caribbean dances are very popular and practiced all over the world, and there are various types. The type that currently is of greater interest, especially among young people, is Caribbean couple dance, ie, salsa, merengue and bachata. In this article, we'll focus our attention on the merengue and bachata, and, especially, on the mathematics that lies behind some of their figures.

1. Introduzione

I balli caraibici sono molto diffusi e praticati in tutto il mondo e ne esistono di varie tipologie. La tipologia che attualmente riveste maggiore interesse, soprattutto tra i giovani, è quella dei balli caraibici di coppia, ovvero, la salsa, il merengue e la bachata. In questo articolo, focalizzeremo la nostra attenzione sul merengue e sulla bachata, e, soprattutto, sulla matematica che si cela dietro alcune loro figure.

2. Matematica applicata al merengue

Il merengue è, appunto, una danza caraibica di coppia nata molto probabilmente nella Repubblica Dominicana o ad Haiti intorno alla metà del XVI secolo. Come la maggior parte dei balli latino-americani la musica del merengue è caratterizzata da un ritmo molto veloce, quindi, anche le rispettive figure di movimento sono molto veloci. In tali figure si usano soprattutto le spalle e i piedi. Un'importante caratteristica del merengue che lo distingue dalle altre danze caraibiche è il profondo contatto tra i due partner di ballo, che danzano strettamente allacciati in gran parte delle figure. Le figure del merengue comprendono una figura di base e altre figure che consistono in una serie di volteggi semplici ma d'effetto. Molte figure, anzi, forse tutte, seguono modelli matematici ben precisi. Consideriamo, ad esempio, le figure denominate base sul posto, Para arriba, Para abajo, Vuelta a due battute, Vuelta a una battuta. Vedremo che sono rappresentate da elementi di sottogruppi dei movimenti diretti ed inversi del piano euclideo E^2. Consideriamo un uomo ed una donna che ballano una coreografia di merengue. Sia dato il punto A del piano E^2, he rappresenta l'uomo, e il

1. Ha conseguito la Laurea sia Triennale che Magistrale in Matematica presso la Seconda Università degli Studi di Napoli. Attualmente lavora come insegnante privato di matematica ed è docente di III fascia nelle graduatorie nazionali delle scuole pubbliche.

punto B dello stesso piano che rappresenta la donna. Allora, consideriamo il segmento AB del piano E^2

che rappresenta la distanza tra i due partner attaccati per eseguire la coreografia. Prima di analizzare la matematica dietro i passi del merengue, è opportuno specificare che il tempo musicale del merengue è costituito da 8 battiti, quindi, 8 istanti del tempo t; gli 8 battiti formano una battuta, ed ogni figura occupa una o più battute. Ad ogni battito, sia l'uomo che la donna battono il piede a terra, in un continuo alternarsi del piede destro e del piede sinistro. Analizziamo ora le figure citate all'inizio del paragrafo.

2.1. Base sul posto

Come si può intuire dal nome della figura, sia l'uomo che la donna restano fermi sul posto per tutti gli 8 battiti, sbattendo solo i piedi a terra ad ogni battito, quindi, il segmento AB resta fisso in E^2, pertanto, non compie alcun movimento. Dunque, ad AB è applicato il gruppo banale identico $\{id\}$, ove id è l'applicazione identica dei punti del piano E^2.

2.2. Para arriba – Para abajo

La figura Para arriba - Para abajo occupa una sola battuta, quindi 8 battiti. Durante i primi 4 battiti, l'uomo e la donna compiono il Para arriba, che consiste nel compiere una traslazione in avanti rispetto all'uomo, quindi, l'uomo cammina in avanti e la donna cammina all'indietro. Nei successivi 4 battiti, compiono il Para abajo, che è il contrario del Para arriba, quindi, si compie una traslazione all'indietro rispetto all'uomo. Dunque, il segmento AB compie ben 8 traslazioni, 4 nella direzione individuata dalla retta contenente il segmento AB e nel verso che va da A a B, e 4 nella stessa direzione ma nel verso opposto. Le traslazioni compiute in tale figura appartengono ad un sottogruppo del gruppo delle traslazioni di E^2; tale sottogruppo è un gruppo ciclico infinito generato dalla traslazione di vettore AM, con M punto medio del segmento AB, che denotiamo con τ_{AM}, quindi,

$$T_{AM} = \langle \tau_{AM} \rangle = \left\{ \tau^{i}_{AM} , i \in \mathbb{Z} \right\}$$

il gruppo generato da tale traslazione.

Si ha ad esempio, $\tau_{AM}(A) = M, \quad \tau_{AM}(M) = B, \quad \tau^2_{AM}(A) = \tau_{AM}(B)$, e così via.

2.3. Vuelta a 2 battute – vuelta a 1 battuta

Come si può dedurre dal nome, la figura Vuelta a 2 battute occupa ben 2 battute; è una figura in cui l'uomo batte i piedi sul posto, e dunque, rimane fisso in un punto del piano e la donna invece si sposta compiendo una rotazione del piano che ha centro nell'uomo. Quindi, se consideriamo il segmento AB, con A l'uomo e B sempre la donna, il punto A resta fisso, mentre il punto B compie una rotazione di angolo π/4 dal primo battito della prima battuta che marca la figura, all'ultimo battito della seconda ed ultima battuta, nella quale torna al punto di partenza. Quindi, AB compie una rotazione di centro A e angolo π/4, e, dunque, a tutta la figura è applicato il gruppo di rotazioni di E^2.

$$R_{A,\pi/4} = \left\{\rho^n_{A,\pi/4} \mid n = 0,1,2,\ldots,7\right\}$$

che è un gruppo ciclico di ordine 8 generato dalla rotazione $\rho_{A,\pi/4}$. Risulta $\forall\, k,m \quad \rho^k_{A,\pi/4} \circ \rho^m_{A,\pi/4} = \rho_{A,k\pi/4+m\pi/4}$

Il segmento AB ruota ad ogni 2 battiti. Quindi nei primi 2 battiti si ha $\rho_{A,\pi/4}(B) = B'$, nei successivi 2 battiti $\rho^2_{A,\pi/4}(B) = \rho_{A,\pi/4+\pi/4}(B) = \rho_{A,\pi/2}(B) = B''$ e così via fino al settimo e ottavo battito della seconda ed ultima battuta in cui risulta $\rho^8_{A,\pi/4}(B) = id(B) = B$, dove si torna al punto di partenza. Consideriamo ora il sottogruppo di $R_{A,\pi/4}$ generato dalla rotazione $\rho_{A,\pi/2}$. Esso ha ordine 4 e possiamo scriverlo esplicitamente

$$R_{A,\pi/2} = \left\{id, \rho_{A,\pi/2}, \rho_{A,\pi}, \rho_{A,3\pi/2}\right\}$$

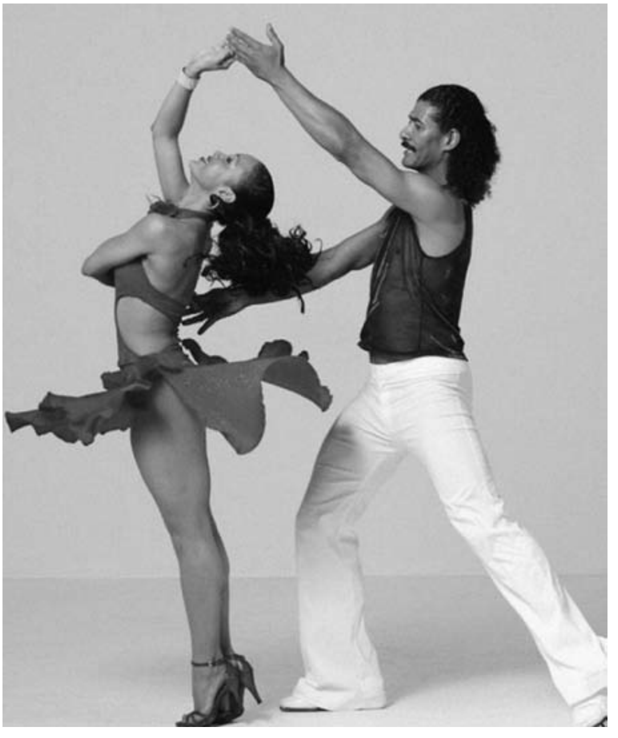
Tale gruppo è applicato alla figura Vuelta a 1 battuta, che è uguale a quella a 2 battute, con la differenza che AB ruota di π/2 invece che di π/4 , e, ovviamente, come si può dedurre dal nome della battuta, marca una sola battuta, quindi, solo 8 battiti. Se consideriamo un sistema di riferimento cartesiano xOy, nel quale supponiamo che A coincide con l'origine O e B sia un punto del semiasse positivo delle x, ci rendiamo conto che sia nella vuelta a 2 battute che nella vuelta ad 1 battuta, il segmento AB marca tutti i 4 quadranti del sistema xOy e la rotazione $\rho_{A,\pi/4}$ è rappresentata dalle equazioni

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi/4 & -\sin\pi/4 \\ \sin\pi/4 & \cos\pi/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mentre $\rho_{A,\pi/2}$ è rappresentata dalle equazioni

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi/2 & -\sin\pi/2 \\ \sin\pi/2 & \cos\pi/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ripetendo tutto in termini di coordinate cartesiane, nella Vuelta a 2 battute, avendo supposto che A coincide con O e B con un punto del semiasse positivo della x, si ha che, nei primi 4 battiti, AB ruota nel primo quadrante e si può verificare che al terzo e quarto battito il punto B si trova nel semiasse positivo della y. Lo stesso accade nei successivi battiti. In maniera del tutto analoga, nella Vuelta a 1 battuta si verifica che AB per tutti gli 8 battiti percorre i 4 quadranti.



3. Matematica applicata alla bachata

Altro ballo caraibico di coppia molto conosciuto è la bachata. Mentre il merengue ha un ritmo alquanto veloce, la bachata presenta un ritmo più lento e dolce, e i testi delle canzoni trattano il tema dell'amore in tutte le sue sfumature, sia idilliache sia drammatiche. L'origine della bachata risale agli anni Quaranta del secolo scorso, ed era diffusa solamente nei quartieri più poveri della Repubblica Dominicana. All'epoca, la bachata era anche chiamata la musica *de amargue* («musica da amarezza» in spagnolo), poiché i testi delle canzoni esprimevano le situazioni drammatiche e difficili relative a quel contesto sociale. Le classi sociali più ricche disprezzavano questo genere musicale, sia perché era diffuso tra i poveri, sia perché le movenze che caratterizzavano questo ballo erano considerate oscene e volgari. La bachata dell'origine, infatti, non presentava molte figure come la bachata moderna, ma l'uomo e la donna restavano abbracciati per tutta la durata del brano musicale, dondolandosi ed effettuando un provocatorio movimento d'anca al quarto battito musicale. Il ballo restò confinato nelle classi povere fino agli inizi degli anni Ottanta, in cui la bachata subì un processo di rivalutazione grazie ai mezzi di comunicazione e agli sforzi di molti compositori. Il primo compositore a rivoluzionare la bachata fu Luis Segura con il brano *Pena por ti*, grazie al quale la bachata iniziò a diffondersi in tutte le classi sociali, anche quelle più ricche che erano sempre state riluttanti. Altri compositori di ottimo livello permisero alla bachata di uscire dai confini dominicani e di riscuotere pian piano un notevole successo in tutto il mondo. La bachata riscosse successo in Italia alla fine degli anni Novanta, e lo sta riscuotendo tuttora. Proprio in Italia sono stati creati altri generi derivanti dalla bachata;

uno in particolare è il bachatango, le cui figure sono figure di bachata condite da tecniche di tango. Anche le figure di bachata seguono precisi modelli matematici. Prima di analizzarle, è opportuno specificare che il tempo musicale della bachata è di 4/4, quindi da una battuta costituita da 4 battiti uguali. La frase musicale è composta da 2 battute, quindi, da 8 battiti. In ogni figura di bachata, inoltre, accade sempre che al quarto e ottavo battito si faccia uno *step* con il piede, ossia, un passo senza peso con una sola punta del piede appoggiata. Detto ciò, consideriamo le seguenti figure di bachata: Base sul posto, Passo Base, Mirala. Consideriamo sempre il segmento AB nel piano euclideo E^2, dove il punto A rappresenta l'uomo e il punto B rappresenta la donna.

3.1. Base sul posto

La base sul posto della bachata è simile alla base sul posto del merengue e quindi l'uomo e la donna restano fissi sul posto per tutti gli 8 battiti, con la differenza che al quarto e ottavo battito compiono uno *step*. Pertanto, come accade nel merengue, anche a tale figura di bachata è applicato il gruppo identico $\{id\}$.

3.2. Passo Base

In tale figure, sia l'uomo che la donna avanzano perpendicolarmente alla direzione individuata dal loro segmento AB, verso sinistra nei primi 4 battiti e verso destra nei successivi 4 battiti. Possiamo allora dedurre che il segmento AB compie una traslazione τ_u, con u vettore perpendicolare ad AB, e la compie ben 2 volte nella prima battuta, mentre, nella seconda battuta, AB compie altre 2 volte la stessa traslazione ma nel verso opposto a quello della prima battuta. Pertanto, il Passo Base è rappresentato da elementi del sottogruppo delle traslazioni del piano euclideo generato da τ_u quindi

$$T = \langle \tau_u \rangle = \left\{ \tau_u^i = \tau_{iu} \mid i \in \mathbb{Z} \right\}$$

che è anch'esso un gruppo ciclico infinito. Per comodità, possiamo supporre che il vettore u abbia lunghezza pari alla metà della lunghezza di AB.

3.3. Mirala

La figura Mirala consiste nel giro della donna e nel giro dell'uomo. Si svolge in questa maniera: nei primi 4 battiti, l'uomo compie gli stessi passi che compie nella prima battuta del Passo Base, mentre la donna segue l'uomo avanzando e girando su se stessa. Nella battuta successiva accade il contrario, cioè la donna compie gli stessi passi della seconda battuta del Passo Base, mentre l'uomo, in maniera del tutto simmetrica alla donna nella prima battuta, avanza girando su se stesso. Dunque, consideriamo il punto C esterno alla retta AB, che supponiamo appartenga alla retta passante per A e perpendicolare ad AB, e tale che la distanza tra A e C sia pari alla metà del segmento AB. Sappiamo che per C passa un'unica retta p parallela alla retta AB. Sia M il punto medio di AB. Deduciamo che nel Mirala accade che nei primi 4 battiti il segmento AM compie la traslazione di vettore τ_u, con u vettore uguale ad AC, mentre, il segmento MB compie un ribaltamento di asse la retta p, che denotiamo con σ_p. Nei successivi 4 battiti, il segmento A'M'=$\tau_u(\tau_u(AM))$, compie il ribaltamento σ_p che riporta A'M' nel segmento di partenza AM, invece, M'B'=$\sigma_p(MB)$, compie 2 volte la traslazione τ_{-u} che riporta M'B' nel segmento di partenza MB.

Possiamo allora dedurre che sia al segmento AM che al segmento MB sono applicati i movimenti appartenenti al gruppo generato da τ_u e σ_p, che possiamo denotare con $\langle \tau_u, \sigma_p \rangle$.

4. Conclusione

Attualmente, il merengue e la bachata sono molto diffusi soprattutto tra i giovani. Sono sempre più le scuole di ballo in cui si insegnano, così come anche i locali in cui si organizzano serate a ritmo di merengue e bachata. Per quanto mi riguarda, la matematica non riesce a risparmiare neanche questo specifico settore. La bellezza e la precisione dei passi che si insegnano hanno i loro fondamenti in oggetti matematici ben precisi, in questo caso movimenti del piano euclideo. Dunque, l'apparente astrazione della matematica, ancora una volta, altro non è che una regolamentazione della nostra realtà, soprattutto quotidiana.

Che mondo sarebbe senza la matematica?…

1. L'arte dei crucipixel

Julia Pelloni[1]

In this article I will describe the Griddler - a game that, on the basis of enchained numerical data, allows you to discover a hidden image within a rectangular grid of different sizes - and I'll present the strategy to solve it, partly based on math rules that I've found out.

1. Introduzione

1.1. Storia del gioco

Il Crucipixel compare per la prima volta nel 1987 in Giappone. Il gioco viene inventato da Non Ishida, che, già nel 1988, pubblica il rompicapo sotto il nome di *Window Art Puzzle*, nome che viene sostituito nel 1990 dall'inglese James Dalgety con il nome *Nonogram*. Nello stesso anno il *Nonogram* comincia ad essere pubblicato in tutto il Regno Unito dal Sunday Telegraph finché nel 1993 appare il primo volume del gioco: *Book of Nonograms*. Il gioco si diffonde in altri paesi come Stati Uniti, Sud Africa, Svezia.

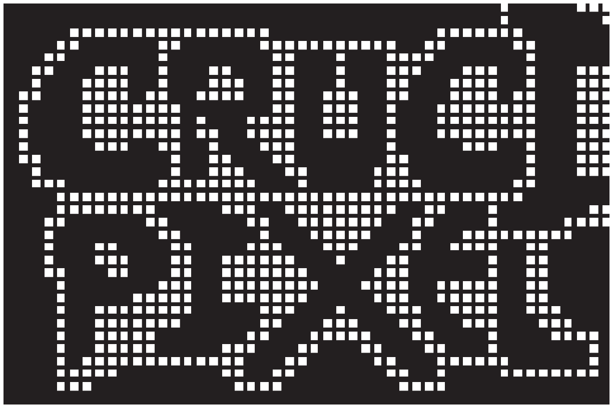
Il rompicapo assume in seguito tanti nomi diversi tra loro come *Pic-a-Pix, Picross, Picture Crossword, Paint by Sudoku o Mario's Picross*, ma nel 1995 il *Sunday Telegraph* dà la possibilità ai fan del gioco di trovare un nome universale adatto e viene scelto il nome *Griddler*.

Negli anni successivi, vengono inventate, sotto la spinta del Crucipixel, altre varianti.

I Nonograms conoscono il vero successo in tutto il mondo solo dopo il boom del Sudoku nel 2005: in Italia comincia per esempio a essere pubblicata la rivista *Logic Art.*[2], e in seguito anche la rivista Nonogramm in Svizzera[3] e la rivista Picto Logic in Spagna[4].

---

1. Questo articolo è un riassunto del mio lavoro di maturità (LAM) svolto al Liceo Lugano 2 durante l'anno scolastico 2013-2014 sotto la direzione dei professori Lucio Calcagno e Annamaria Silini che ringrazio sentitamente. Ringrazio pure i professori Ferdinando Lehmann e Gianfranco Arrigo per l'aiuto e i consigli che mi hanno dato.
2. Rivista mensile Logic Art, Picomax srl, Viale Sondrio 7, Milano
3. Rivista bimensile Nonogramm, Schweitzer Rätsel-Zeitschriften, Postfach 4, CH-8955 Oetwil
4. Rivista mensile Picto Logic, Zugarto ediciones, Arcipreste de Hita, Madrid



1.2. Descrizione del gioco

Il gioco consiste nel cercare l'immagine nascosta all'interno di una griglia quadrata o rettangolare (di svariate dimensioni); questo è possibile seguendo le indicazioni (ovvero i numeri) che figurano su una delle coppie di lati adiacenti del quadrilatero.

Esempio esplicativo: Crucipixel di dimensioni 5x5 da risolvere[5].

				1	
	3	5	3	3	3
1 2					
2 1					
5					
4					
3					

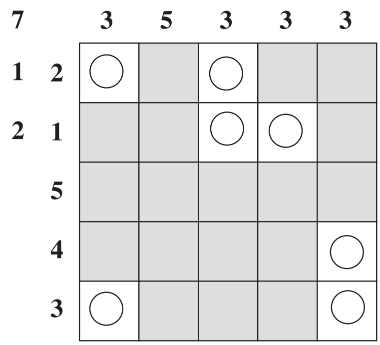
Questi numeri indicano quanti quadretti consecutivi (che chiamo *serie*) devono essere colorati in ogni riga (orizzontale) e colonna (verticale).

Ad esempio sulla sinistra della prima riga dall'alto figurano i numeri 1 e 2, ciò significa che nella prima riga devono figurare due serie colorate, la prima di lunghezza 1 quadretto e la seconda di lunghezza 2 quadretti.

Ad esempio sopra la prima colonna da destra figura il numero 3, ciò significa che nella prima colonna deve figurare una sola serie colorata di lunghezza 3 quadretti.

Lo scopo del gioco è di far combaciare tutte le indicazioni, in verticale e in orizzontale. Il disegno seguente mostra la soluzione del Crucipixel (di dimensioni 5x5), che in questo caso risulta essere l'unica possibile.

5. http://crucipixel.it



Osservazione importante

Nella trascrizione delle indicazioni non viene esplicitato il numero di spazi che deve esserci tra una serie colorata e un’altra, ed è proprio questo l’enigma del gioco: riuscire a scoprire come sono posizionate le serie e quanta distanza c’è tra di esse.

2. Metodologia / tattica di risoluzione

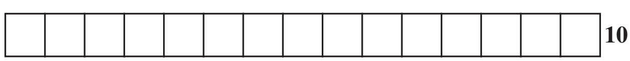
I tre principali metodi per la risoluzione di un Crucipixel sono il «metodo della sovrapposizione», il «metodo del completamento» e il «metodo della forzatura logica»; questi tre metodi, lungo la risoluzione del gioco, non fanno altro che susseguirsi, creando quella che io chiamo la «reazione a catena dei numeri».

Nel seguito vengono spiegate le tecniche in differenti situazioni: per comodità tutti i disegni sono degli esempi.

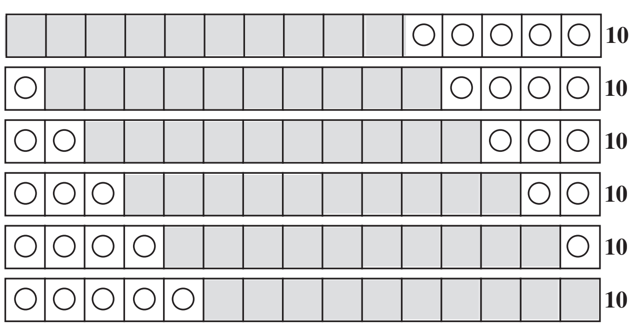
2.1. Metodo della sovrapposizione

Serie singola

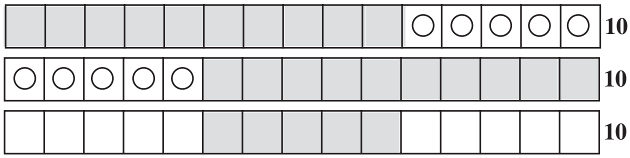
Esempio esplicativo: una serie (di lunghezza 10 quadretti) da colorare contenuta in una riga di lunghezza 15 quadretti.



I disegni seguenti mostrano tutte le possibili soluzioni che soddisfano l’indicazione (una serie di lunghezza 10 quadretti da colorare)



Questo metodo lo chiamo «metodo della sovrapposizione» per un motivo ben preciso: infatti sovrapponendo le varie possibilità si possono determinare i primi quadretti che sono sicuramente da colorare all'interno di un Crucipixel; questi si trovano, in modo semplice e rapido, spostando la serie in questione prima tutta a un estremo e poi tutta all'altro (della rispettiva riga o colonna), così da includere tutte le possibili soluzioni. I quadretti che risultano essere da colorare in entrambi i casi costituiscono una porzione di serie che all'interno di questo lavoro chiamo *frazione di serie.*

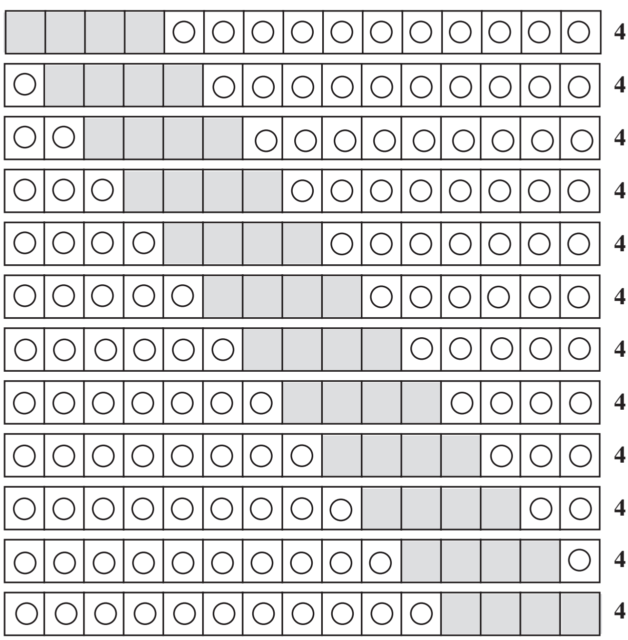


Disegniamo le due posizioni estreme, sinistra e destra (prima e seconda riga), dalle quali si deduce il risultato della sovrapposizione (terza riga).

In questo esempio la frazione di serie è costituita dai 5 quadretti centrali, ovvero è di lunghezza 5 (la serie non è ancora definita completamente, mancano gli estremi). Una strategia importante per risolvere un Crucipixel è di cercare le frazioni di serie più lunghe: per poter esistere, una frazione di serie deve comprendere almeno un quadretto colorato, ovvero essere almeno di lunghezza 1. La serie che la genera dev'essere di *lunghezza* +, ovvero di lunghezza maggiore rispetto alla metà di quadretti totali della rispettiva riga o colonna: $n > N/2$, dove n è la lunghezza della serie e N la lunghezza della riga o colonna presa in considerazione.

Rispettivamente, una serie di lunghezza inferiore o uguale rispetto alla metà di quadretti totali della rispettiva riga o colonna è una serie di *lunghezza* – .

Le relazioni matematiche tra queste lunghezze verranno presentate più avanti. Esempio esplicativo: una serie (di lunghezza 4 quadretti) da colorare contenuta in una riga di lunghezza 15 quadretti (serie di *lunghezza* –)



Quindi se in un Crucipixel ci sono poche serie di lunghezza +, è probabile che il Crucipixel in questione sia mediamente difficile.

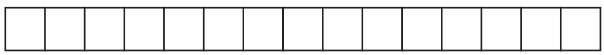
Si noti che in questo esempio abbiamo considerato la lunghezza, rispettivamente della riga o della colonna, dispari e la serie pari, ciò che ha comportato una frazione di serie dispari.

Si può facilmente verificare che la frazione di serie è dispari quando la lunghezza della riga (o colonna) è dispari, e pari quando la lunghezza della riga (o colonna) è pari; tutto questo indipendentemente dalla lunghezza della serie. Questa caratteristica è dovuta alla simmetria: la frazione di serie sta sempre in mezzo alla riga (o colonna).

Più serie

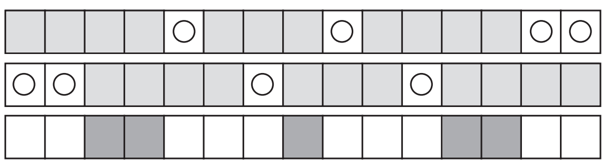
Il metodo della sovrapposizione si può usare anche nei casi in cui esistono più serie da colorare in una stessa riga o colonna.

Esempio esplicativo: tre serie (di lunghezze 4, 3, 4 quadretti) da colorare contenute in una riga di 15 quadretti.



4 3 4

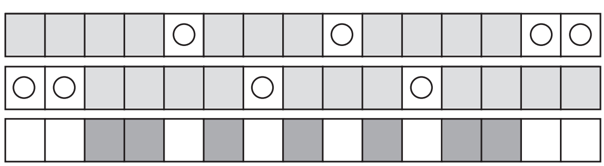
Perché il metodo della sovrapposizione si possa applicare in casi come questo, in cui c’è più di una serie da colorare, bisogna unicamente includere nel conteggio (prima a un estremo e poi tutto all’altro) un ipotetico spazio vuoto tra una serie e l’altra (quindi il minimo di spazi).



4 3 4
4 3 4
4 3 4

Come per il caso della serie singola, disegniamo le due posizioni estreme, sinistra e destra (prima e seconda riga), dalle quali si deduce il risultato della sovrapposizione (terza riga).

Con più serie c’è però una regola supplementare da rispettare: bisogna fare attenzione che non vengano annerite sovrapposizioni di proiezioni di serie diverse



4 3 4
4 3 4
4 3 4

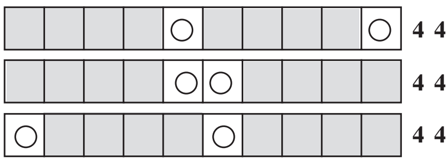
Il risultato del terzo disegno è un errore fatale poiché, anche se inizialmente piccolo e all’apparenza insignificante, porterebbe in seguito a una soluzione sbagliata. Bisogna dunque assicurarsi che la sovrapposizione appartenga alla proiezione di una stessa serie.

Il metodo della sovrapposizione può però rivelarsi superfluo nel caso in cui le serie da colorare e i rispettivi quadretti bianchi tra di esse completano interamente la riga o la colonna in questione (ovvero: se la somma tra le serie da colorare e lo spazio bianco tra ognuna di esse, è esattamente uguale al numero di quadretti totali di quella riga o colonna), quindi se non ci sono ulteriori possibilità (le serie si incastrano alla perfezione all'interno della riga o colonna in questione). Infatti in questo caso particolare la sovrapposizione è completa (le serie sono definite completamente e dunque non ci sono altre possibilità).

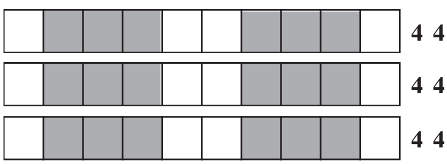
Esempio esplicativo: 5 serie (di lunghezze 1, 2, 2, 3, 3 quadretti) da colorare contenute in una riga di 15 quadretti.

Ecco un esempio in cui la configurazione della riga (o colonna) è completamente definita: il risultato della proiezione è identico alla configurazione iniziale: non si possono spostare quadretti.

La completezza del metodo della sovrapposizione è che vale sempre, in qualsiasi caso o situazione: infatti se le serie sono, nella soluzione del gioco, poste in posizioni differenti (mantenendo lo stesso ordine ma cambiando il numero di spazi tra di esse), le frazioni di serie date dal metodo della sovrapposizione saranno sempre le stesse.



Tre diverse situazioni



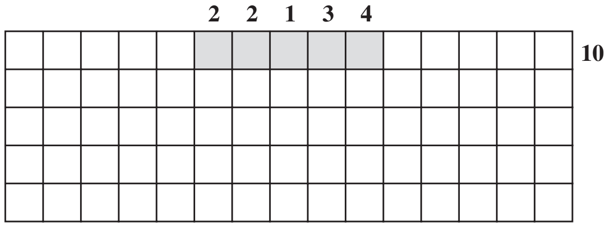
Le rispettive sovrapposizioni

Metodo del completamento

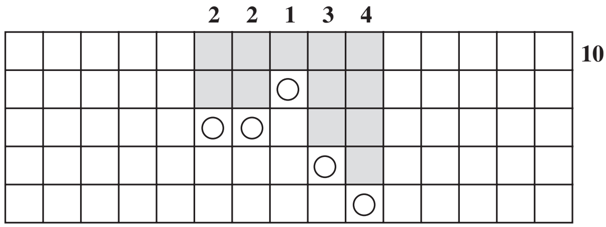
Il metodo delle sovrapposizioni permette di colorare quadretti di una riga o di una colonna indipendentemente dal contenuto delle altre righe e colonne (si concentra unicamente su una riga o su una colonna indipendente). Per trovare la soluzione di un Crucipixel bisogna però sfruttare anche l'interdipendenza tra righe e colonne. La prima strategia per sfruttare questa interdipendenza è usare il metodo del completamento: posteriormente alla sovrapposizione di due serie, si sarà dunque creata una frazione di serie, che può a sua volta dare il via ad altre serie o frazioni di serie perpendicolari ad essa. Si tratta quindi di un processo iterativo (che si ripete in continuazione), proprio come una reazione a catena.

Frazione di serie attaccata al margine

Esempio esplicativo: una serie (di lunghezza 10 quadretti) da colorare contenuta in una riga di 15 quadretti

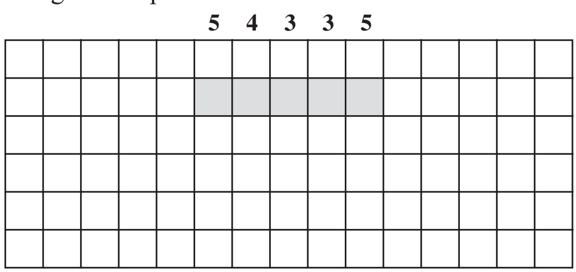


Se la frazione di serie trovata è attaccata a un margine, le prime (o le ultime) serie che partono perpendicolarmente sono serie determinate

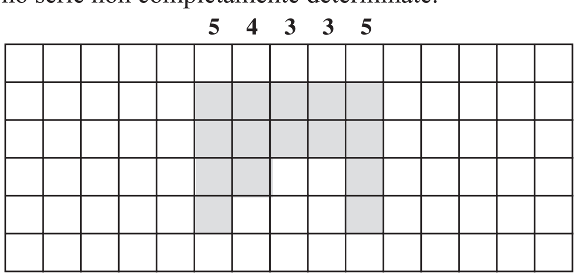


Frazione di serie non attaccata al margine

Esempio esplicativo: una serie (di lunghezza 10 quadretti) da colorare contenuta in una riga di 15 quadretti



Se la frazione di serie trovata non è attaccata a un margine, ogni casella sicura appartenente a essa appartiene a una serie perpendicolare, ed anche se non può definirla, può formare a sua volta una frazione di serie. Le serie che partono perpendicolarmente sono serie non completamente determinate.



Metodo della forzatura logica

Anche la forzatura, come il completamento, sfrutta l’interdipendenza tra righe e colonne, infatti questo metodo è possibile unicamente prendendo in considerazione frazioni di serie già trovate in precedenza (con il metodo della sovrapposizione e/o il metodo del completamento).

Il nome che ho dato a questo metodo contiene l'aggettivo «logico» poiché il risultato di essa è frutto dell'intelletto: infatti, utilizzando una «logica personale», si riescono a determinare caselle (colorate o bianche) che altrimenti, con le due tecniche viste in precedenza, non sarebbero possibili da determinare.

Esempio esplicativo: due serie (di lunghezze 2 e 6 quadretti) da colorare contenute in una riga di 15 quadretti

															2 6

(le tre caselle colorate appartengono a frazioni di serie perpendicolari già trovate in precedenza)

Esistono essenzialmente due tipi di forzature logiche: la *forzatura logica nera* e la *forzatura logica bianca.*

Forzatura logica nera

Attraverso il metodo della forzatura logica nera è possibile determinare uno o più quadretti colorati.

Partendo da una frazione di serie già trovata con i due metodi visti precedentemente (metodo della sovrapposizione e metodo del completamento), si riesce a determinare uno o più quadretti da colorare ulteriormente

				A	B	C	D	E							**2 6**

I due quadretti con il bordo grosso (quadretti C ed E) non possono appartenere alla serie di lunghezza 2 perché altrimenti non verrebbero rispettate le indicazioni, quindi i quadretti C ed E devono per forza appartenere alla serie di lunghezza 6

				A	B	C	D	E							**2 6**

Non si può dire con certezza se il quadretto A appartenga alla serie di lunghezza 2 o a quella di lunghezza 6 ma si può affermare con assoluta certezza che il quadretto tra C ed E (quadretto D) deve essere colorato e appartiene sicuramente alla serie di lunghezza 6.

Forzatura logica bianca

Attraverso il metodo della forzatura logica bianca è possibile determinare uno o più quadretti bianchi (spazi).

Come per la forzatura logica nera, anche per la forzatura logica bianca, partendo da una frazione di serie già trovata con una dei due metodi visti precedentemente (metodo della sovrapposizione e metodo del completamento), si riesce a determinare uno o più quadretti che in questo caso risultano però essere degli spazi. Riprendendo l'esempio visto in precedenza per il metodo della forzatura logica nera, si riesce a determinare uno o più quadretti bianchi (spazi)

				A	B	C	D	E							2 6

Visto che i quadretti C, D ed E fanno sicuramente parte della serie di lunghezza 6, anche ponendo la serie di lunghezza 6 il più a destra possibile, questa non arriverà mai a coprire le ultime tre caselle estreme a destra della riga.

Dimostrazione: ipotizziamo che la serie di lunghezza 6 venga spostata il più a destra possibile.

															2 6

Pur ponendola all'estremo destro, la serie di lunghezza 6 non potrà mai ricoprire le ultime tre caselle estreme a destra, quindi queste saranno sicuramente bianche.

												○	○	○	2 6

Non si può dire con certezza quali altri quadretti saranno colorati o vuoti ma si possono determinare tre spazi. Questa informazione potrebbe essere utile per una serie perpendicolare alla riga o colonna in questione.

2.2. Risoluzione di un Crucipixel

Utilizzando unicamente i tre metodi trattati sopra (sovrapposizione, completamento e forzatura) è possibile risolvere un Crucipixel.

Esempio esplicativo: Crucipixel di dimensioni 9x9 risolto in cui i numeri interni ai quadretti rappresentano la numerazione delle mosse; partendo dalla mossa numero 1 si arriva a risolvere il gioco con 29 mosse

11	11	9	1	10	10	10	11	11	4
27	18	2	1	2	2	2	22	28	7
27	3	3	1	3	19	20	3	29	5 2
17	7	8	1	13	13	13	13	13	4
6	7	8	1	12	19	21	23	24	4 1
17	7	8	1	14	14	14	14	14	4
26	4	4	1	4	19	20	4	26	5 2
25	18	5	1	5	5	5	22	25	7
16	16	9	1	15	15	15	16	16	4
5	7	7	9	3	2	2	2	1	
				3	2	1	2	1	
						2			

Come si può notare dall'esempio, durante la risoluzione di questo Crucipixel, i vari metodi non fanno che alternarsi, creando una reazione a catena.

3. Considerazioni matematiche sul metodo della sovrapposizione

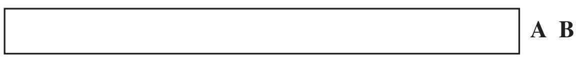
Nel capitolo precedente ho spiegato la tecnica per risolvere i Crucipixel. In questo capitolo cerco di dare delle giustificazioni matematiche al metodo più importante, ovvero quello della *sovrapposizione*, grazie al quale si può cominciare a risolvere il gioco. Una domanda che ci si potrebbe porre a proposito del metodo della sovrapposizione è la seguente:

Come variano le sovrapposizioni (frazioni di serie) in funzione del totale di caselle della riga o colonna (N), delle lunghezze delle serie e della quantità di serie da colorare?

Analisi generale

Due serie da colorare

Siano A e B le serie da colorare, a e b le rispettive frazioni di serie, $b.ex_d$ e $b.ex_s$ i bordi estremi, IC l'isola centrale e N il totale di caselle della riga o colonna



Osservazione. Si sa che $A + B + 1 \leq N$ (1 è lo spazio minimo tra una serie e l'altra).

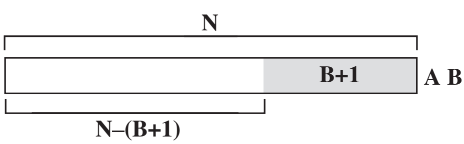
Analisi delle serie

Serie A

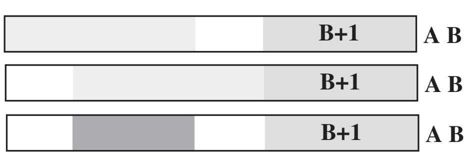
Osservazione. Le caselle a disposizione per la serie A si trovano facendo il calcolo

$N - (B+1) = N - B - 1$

dove (B+t) è il minimo di caselle occupate da B (compreso lo spazio tra A e B)



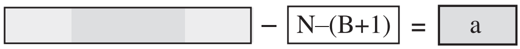
Osservazione. La frazione della serie A (ovvero a) si trova prendendo in considerazione i casi estremi della serie in questione (visti in precedenza con il metodo della sovrapposizione): spostando la serie A, prima tutta a un estremo e poi tutta all'altro, all'interno dello spazio a disposizione per A trovato in precedenza (N – (B+1)), si trova la frazione della serie A (a).



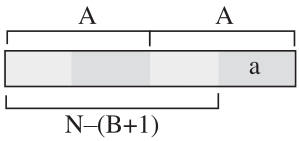
Osservazione. La lunghezza della frazione della serie A (a) è determinabile secondo il calcolo

$a = 2 \cdot A - (N - (B + 1)) = 2 \cdot A - N + B + 1$

dove $N-(B+1)$ è lo spazio a disposizione per la serie A



Infatti il totale di caselle a disposizione per A equivale al doppio della serie A con l'aggiunta della frazione della serie A



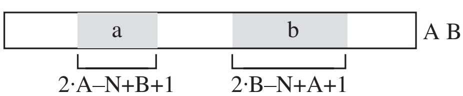
Serie B

In maniera analoga, per simmetria, si trova

$b = 2 \cdot B - (N - (A+1) = 2 \cdot B - N + A + 1$

Conclusione delle serie

Riassumendo abbiamo dunque le due frazioni di serie, a e b, e le rispettive formule per calcolarne le lunghezze in funzione del numero di caselle totali e, indirettamente, anche del numero di serie da colorare



Analisi dei bordi estremi

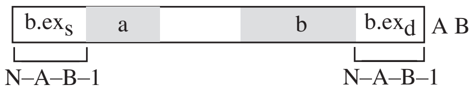
Dopo aver calcolato le lunghezze delle due frazioni di serie, è utile determinare le lunghezze dei bordi estremi, ovvero le caselle insicure agli estremi della riga o colonna in questione. Questo lavoro può essere utile per determinare la posizione rispettivamente di a e b.

Osservazione. Le lunghezze dei due bordi estremi di una stessa riga o colonna sono uguali. Ciò è dovuto al fatto che, per determinarli, si adotta una sorta di «sovrapposizione inversa» che non permette di determinare caselle sicure bensì di definire le posizioni delle frazioni di serie.

Questo tipo di sovrapposizione consiste nello spostare il «pacchetto A+B+t» (somma tra le serie e lo spazio tra di esse) prima tutto a un estremo e poi tutto all'altro della riga o colonna, e i quadretti che in entrambi i casi risultano essere bianchi (non colorati) sono «spazi insicuri» che determinano appunto la posizione delle frazioni di serie trovate in precedenza.

Quindi i bordi estremi sono determinabili così:
$b.ex_d = N - (A+B+1)$
$b.ex_s = N - (A+B+1)$
e quindi $b.ex_d = b.ex_s$
dove $(A + B + 1)$ è la somma tra le serie e lo spazio minimo tra di esse.

Osservazione. La formula spiega perché i due margini estremi hanno sempre la stessa lunghezza: usando il metodo della *sovrapposizione inversa* è infatti evidente che la differenza tra il numero totale di caselle (della riga o della colonna) e la somma delle serie (con lo spazio tra di esse), se contato da una parte o dall'altra, non cambia.

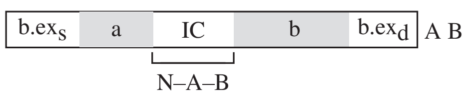


Analisi dell'isola centrale

Ora che abbiamo determinato le lunghezze dei bordi estremi e delle frazioni di serie, per determinare quella dell'isola centrale, ovvero le caselle insicure tra una serie e l'altra, basta sottrarre alla lunghezza totale della riga (N) tutte le lunghezze trovate.

La lunghezza dell'isola centrale è quindi determinabile secondo il calcolo

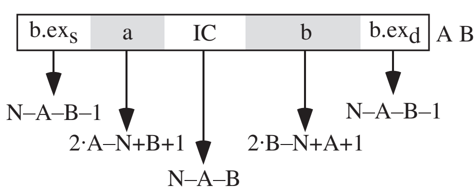
$$N - 2 \cdot (N - A - B - 1) - (2 \cdot A - N + B + 1) - (2 \cdot B - N + A + 1) = N - A - B$$



Conclusione dell'analisi

Si è visto che, da una prima e semplice formula iniziale, si possono ottenere tutte le altre.

Nel caso in cui ci sono due serie da colorare, valgono quindi le seguenti formule



Casi particolari

Esistono però casi in cui le formule incontrano degli errori; analizziamo quindi i criteri per cui questi casi risultano non rispettare le formule. L’unico errore possibile è ottenere dei numeri negativi, e questo può accadere solo per le frazioni di serie (a e b).

$a \geq 0$ e $b < 0$

Esempio esplicativo: due serie A e B da colorare (A=6 e B=1), contenute in un totale di N caselle (N=11)

Verifica della validità delle formule:

$IC = N - A - B = 11 - 6 - 1 = 4$ ✗
$b.ex_s = N - A - B - t = 11 - 6 - 1 - 1 = 3$ ✓
$b.\ ex_d = N - B - A - 1 = 11 - 1 - 6 - 1 = 3$ ✓
$a = 2\ \ A - N + B + 1 = 2\ \ 6 - 11 + 1 + 1 = 3$ ✓
$b = 2\ \ B - N + A + 1 = 2\ \ 1 - 11 + 6 + 1 = -2$ **?**

In questo caso abbiamo un valore-lunghezza negativo ($b = -2$) che sembra non avere alcun senso.

Inoltre nelle formule si incontra un errore: il valore-lunghezza dell’isola centrale (IC). Questo errore è susseguente al precedente poiché la formula per ottenere la lunghezza dell’isola centrale è stata trovata per completare la riga o colonna.

In effetti osservando il valore-lunghezza dell’isola centrale e quello della frazione della serie B (b) si può dire che:

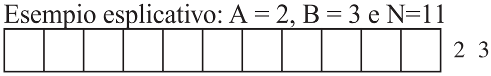
$IC_{\checkmark} = IC_{\times} + b = 4 + (-2) = 2$ ✓

Dove $IC_{\checkmark}$ è il giusto valore-lunghezza dell’isola centrale, mentre $IC_{\times}$ è quella sbagliata.

Quindi quando una delle frazioni di serie è negativa, la sua negatività va a sommarsi al valore-lunghezza sbagliato dell’isola centrale.

$a < 0$ e $b < 0$

Esempio esplicativo: A = 2, B = 3 e N=11



In questo altro caso non è possibile colorare la frazione di nessuna serie; è tuttavia interessante vedere cosa succede alle lunghezze delle frazioni di serie e a quelle dei bordi estremi e dell’isola centrale.

Verifica della validità delle formule:

IC = N – A – B = 11 – 2 – 3 = 6 ✗
ex_s = N – A – B – t = 11 – 2 – 3 – 1 = 5 ✓
ex_d = N – B – A – t = 11 – 3 – 2 – 1 = 5 ✓
a = 2   A – N + B + t = 2   2 – 11 + 3 + 1 = –3 ?
b = 2   B – N + A + t = 2   3 – 11 + 2 + 1 = –2 ?

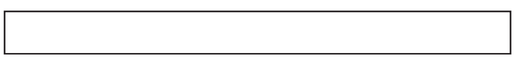
Anche in questo caso l'isola centrale non è corretta, conseguenza delle frazioni di serie negative (a=–3 e b=–2), e quindi all'isola centrale vanno sommate entrambe le lunghezze negative.

IC = 6 + (–3) + (–2) = 1 ✓


2 3

Tre serie da colorare

Siano A, B e C le serie da colorare, a, b e c le rispettive frazioni di serie, b ex_d e b.ex_s i bordi estremi, IC_1 e IC_2 le isole centrali e N il totale di caselle della riga o colonna


A B C

Osservazione. Si sa che A + B + C + 2 ≤ N (2 corrisponde ai due spazi tra le serie A–B e B–C)

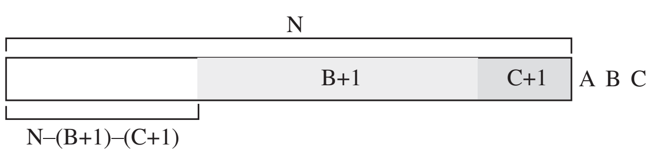
Analisi delle serie

Serie A

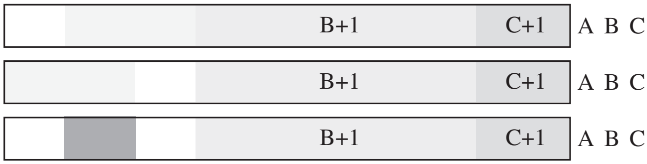
Osservazione. Le caselle a disposizione per la serie A si trovano facendo il calcolo

N – (B + 1) – (C + 1) = N – B – C – 2

dove (B + 1) e (C + 1) sono il minimo di caselle occupate da B e da C (compresi gli spazi tra le serie A–B e B–C)



Osservazione. La frazione della serie A (ovvero a) si trova prendendo in considerazione i casi estremi della serie in questione (visti in precedenza con il metodo della sovrapposizione): spostando la serie A prima tutta a un estremo e poi tutto all'altro, all'interno dello spazio a disposizione per A trovato in precedenza (N – (B + 1) – (C + 1)), si trova la frazione della serie A (a)

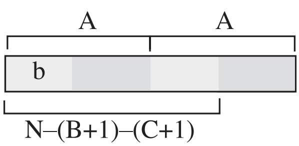


Osservazione. La lunghezza della frazione della serie A (a) è determinabile secondo il calcolo

$a = 2 \cdot A - (N - (B + 1) - (C + 1)) = 2 \cdot A - N + B + C + 2$

dove (N – (B + 1) – (C + 1)) è lo spazio a disposizione per la serie A

Infatti il totale di caselle a disposizione per A equivale al doppio della serie A con l'aggiunta della frazione della serie A



Serie B

In maniera analoga si trova:

$b = 2 \cdot B - (N - (A + 1) - (C + 1)) = 2 \cdot B - N + A + C + 2$

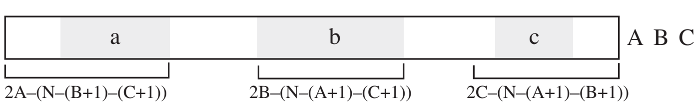
Serie C

In maniera analoga si trova:

$c = 2 \cdot C - (N - (A + 1) - (B + 1)) = 2 \cdot C - N + A + B + 2$

Conclusione delle serie

Riassumendo abbiamo dunque le tre frazioni di serie a, b e c e le rispettive formule per calcolarne le lunghezze in funzione del numero totale di caselle totali e, indirettamente, anche del numero di serie da calcolare



Analisi dei bordi estremi

Dopo aver calcolato le lunghezze delle tre frazioni di serie, è utile determinare le lunghezze dei bordi estremi, ovvero le caselle insicure agli estremi della riga o colonna in questione.

Questo lavoro può essere utile per determinare la posizione rispettivamente di a, b e c.

$b.ex_s$	a		b		c	$b.ex_d$	A B C

Osservazione. Anche nel caso in cui ci sono tre serie da colorare, le lunghezze dei due bordi estremi di una stessa riga o colonna, come abbiamo visto in precedenza per le due serie da colorare, sono uguali. Anche in questo caso, ciò è dovuto al fatto che per determinare i bordi estremi si adotta la «sovrapposizione inversa» che non permette di determinare caselle sicure bensì di definire le posizioni delle frazioni di serie (vedi pagine precedenti).

Quindi i bordi estremi sono determinabili secondo i calcoli

$b.ex_d = N - (A + B + C + 2)$

$b.ex_s = N - (A + B + C + 2)$

quindi $b.ex_d = b\ ex_s$

dove $(A + B + C + 2)$ è la somma tra le serie e gli spazi minimi tra di esse

$b.ex_s$	a		b		c	$b.ex_d$	A B C
N–A–B–C–2						N–A–B–C–2	

Analisi delle isole centrali

Ora che abbiamo determinato le lunghezze dei bordi estremi e delle frazioni di serie, possiamo determinare quelle delle isole centrali, ovvero le caselle insicure tra a e b e tra b e c; basta anche in questo caso sottrarre alla lunghezza totale della riga (N) tutte le lunghezze trovate.

Osservazione. Le lunghezze delle due isole centrali (IC) appartenenti alla riga presa in considerazione sono uguali, quindi si avrà sempre

$IC_1 = IC_2$

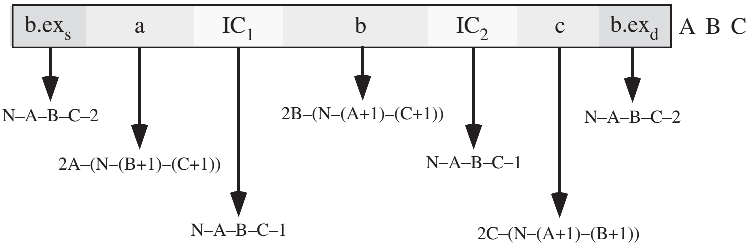
Le lunghezze delle singole isole centrali è perciò determinabile secondo il calcolo

$$\frac{N-(2\cdot A-N+B+C+2)-(2\cdot B-N+A+C+2)-(2\cdot C-N+A+B+2)-2\cdot(N-A-B-C-2)}{2}=N-A-B-C-1$$

$b.ex_s$	a	IC_1	b	IC_2	c	$b.ex_d$	A B C
		N–A–B–C–1		N–A–B–C–1			

Conclusione dell'analisi

Anche in questo caso si è visto che, da una prima e semplice formula iniziale, si possono ottenere tutte le altre. Nel caso in cui ci sono tre serie da colorare, valgono quindi le seguenti formule

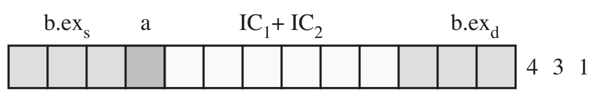


Casi particolari

Anche per quanto riguarda i casi in cui ci sono tre serie da colorare, esistono casi in cui le formule incontrano degli errori; analizziamo quindi i criteri per cui questi casi risultano non rispettare le formule.

a ≥ 0, b ≥ 0 e c < 0

Esempio esplicativo: serie A, B e C da colorare (A = 4, B = 3 e C = 1) contenute in un totale di N caselle (N = 13)



Verifica della validità delle formule

$IC_1 = N - A - B - C - 1 = 13 - 4 - 3 - 1 - 1 = 4$ ✗
$IC_2 = N - A - B - C - 1 = 13 - 4 - 3 - 1 - 1 = 4$ ✗
$b.ex_s = N - A - B - C - 2 = 13 - 4 - 3 - 1 - 2 = 3$ ✓
$b.ex_d = N - A - B - C - 2 = 13 - 4 - 3 - 1 - 2 = 3$ ✓
$a = 2 \quad A - N + B + C + 2 = 2 \quad 4 - 13 + 3 + 1 + 2 = 1$ ✓
$b = 2 \quad B - N + A + C + 2 = 2 \quad 3 - 13 + 4 + 1 + 2 = 0$ ✓
$c = 2 \quad C - N + A + B + 2 = 2 \quad 1 - 13 + 4 + 3 + 2 = -2$ **?**

In questo caso le formule incontrano due errori causati dalla lunghezza della frazione di serie c negativa: i valori-lunghezza delle isole centrali (IC_1 e IC_2). Cio è dovuto al fatto che queste lunghezze sono state trovate per differenza, e quindi, anche osservando le misure delle due lunghezze sbagliate si può dire che:

$IC_1 + IC_2 = IC_X + IC_X + c = 4 + 4 + (-2) = 6$ ✓

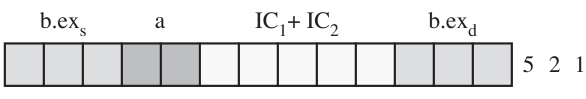
dove $IC_{\times}$ è il valore-lunghezza di ogni isola sbagliata (in questo caso sono due isole centrali)

Osservazione. Le due isole centrali si uniscono formando una grande isola ($IC_1 + IC_2$) poiché b (che dovrebbe separare le due isole) è nullo.

Quindi si può dire che, come nel caso in cui ci sono due serie da colorare, quando una delle frazioni di serie è negativa, la sua negatività va a sommarsi ai valori-lunghezza sbagliati delle isole centrali.

a > 0, b < 0 e c < 0

Esempio esplicativo: tre serie A, B e C da colorare (A = 5, B = 2, C = 1), contenute in un totale di N caselle (N = 13)



Verifica della validità delle formule

$IC_1 = N - A - B - C - 1 = 13 - 5 - 2 - 1 - 1 = 1$ ✗
$IC_2 = N - A - B - C - 1 = 13 - 5 - 2 - 1 - 1 = 1$ ✗
$b.\ ex_s = N - A - B - C - 2 = 13 - 5 - 2 - 1 - 2 = 3$ ✓
$b.\ ex_d = N - A - B - C - 2 = 13 - 5 - 2 - 1 - 2 = 3$ ✓
$a = 2 \quad A - N + B + C + 2 = 2 \quad 5 - 13 + 2 + 1 + 2 = 2$ ✓
$b = 2 \quad B - N + A + C + 2 = 2 \quad 2 - 13 + 5 + 1 + 2 = -1$ **?**
$c = 2 \quad C - N + A + B + 2 = 2 \quad 1 - 13 + 5 + 2 + 2 = -2$ **?**

Anche in questo le negatività delle frazioni di serie causano due errori: i valori-lunghezza delle isole centrali (IC_1 e IC_2).

Per la stessa ragione di prima, abbiamo:

$IC_1 + IC_2 = 1 + 1 - b - c = 1 + 1 - (-1) - (-2) = 5$ ✓

Quindi si può dire che quando due frazioni di serie sono negative, le loro negatività (i loro valori-lunghezza negativi) vanno a sommarsi ai valori-lunghezza delle isole centrali sbagliate.

4. Conclusione

La ricerca da me svolta mi porta ad affermare che, per infiniti numeri di serie da colorare, quando si adopera il metodo della sovrapposizione, varranno le stesse formule che affermano che:

– La lunghezza di ogni frazione di serie da colorare sarà determinabile sottraendo al doppio della lunghezza della serie in questione lo spazio a disposizione per essa, ovvero la differenza tra il numero totale di caselle (della riga o colonna) e la somma tra le lunghezze delle altre serie e i rispettivi spazi tra di esse. Qualora il risultato sia negativo non possiamo affermare nulla sulla frazione di serie, ma questo risultato ci può agevolare per le isole centrali.

– Le lunghezze dei bordi estremi (due uguali) saranno determinabili sottraendo al numero di caselle totali della riga o colonna il «pacchetto» che contiene la somma tra le serie e i rispettivi spazi tra di esse.
– Le lunghezze delle isole centrali (uguali ad eccezione dei casi particolari) saranno determinabili sottraendo al numero di caselle totali della riga o colonna le lunghezze delle frazioni di serie e quelle dei due bordi estremi; così facendo si otterrà la somma delle lunghezze delle varie isole. Per determinare la lunghezza di ogni singola isola centrale basta dividere il risultato per il numero di isole (per n serie si avranno n – 1 isole centrali).

Queste formule non bastano per completare un Crucipixel ma sicuramente possono rendere più facile, riflessiva e interessante la risoluzione.

1. Il dopo Matematicando A spasso con la matematica per le strade di Locarno

Redazionale

The article reports on the show organized by the DFA of SUPSI in Locarno, which was held last May. This two-day festival intended to show to primary school classes and the general public how it is possible to do mathematics in a fun and stimulating way, which at the same time is educational. In the streets of the old town of Locarno, people could visit workshops and attend performances, both focusing on mathematics.

1. Introduzione

La manifestazione è stata organizzata dal Dipartimento Formazione e Apprendimento (DFA) della SUPSI (Scuola Universitaria Professionale della Svizzera Italiana) di Locarno, venerdì 16 e sabato 17 maggio 2014. Venerdì hanno partecipato numerose sezioni di scuola dell'infanzia e classi di scuola elementare, sabato il grande pubblico. Ai visitatori sono stati offerti diversi laboratori e spettacoli nell'area cittadina che va dal DFA, continuando nella città vecchia, e raggiungendo la grande piazza. In ogni stand si veniva piacevolmente coinvolti in attività matematiche divertenti, stimolanti e formative. Nel seguito si cercherà di dare un'idea dei contenuti proposti.

Dire che è stato un successo è sicuramente poca cosa: basta sapere che il sabato i vari laboratori sono stati visitati da oltre 3500 persone facenti parte di un pubblico eterogeneo: dal turista di passaggio attratto da semplice curiosità, ai genitori accompagnati dai figli entusiasti dalla giornata precedente, ai cultori della matematica, ma anche a persone semplicemente interessate di conoscere come può essere una manifestazione di promovimento popolare della matematica. Pubblico eterogeneo anche geograficamente perché costituito in parte da non pochi insegnanti e ricercatori giunti dall'Italia.

Tutto ciò è stato possibile grazie all'iniziativa e all'impegno organizzativo di Silvia Sbaragli, ideatrice dell'iniziativa, e di un gruppo di formatori del DFA. Il grande valore aggiunto che può portare una simile manifestazione è indubbiamente la divulgazione di un modo diverso dal solito di affrontare temi matematici, ciò che può contribuire a ridefinire l'immagine che il singolo ha della matematica. Soprattutto quello di correggere l'immagini errata e negativa di una matematica noiosa, incomprensibile, male necessario per la riuscita scolastica.

2. I laboratori

Maria Avaltroni, Alberto Marchetti e **Miranda Tassi**
Istituto Comprensivo «G. Rossini», San Marcello, Ancona
«Un paese per giocare… Quando imparare è divertente»
Età: a partire da 4 anni

Quando pensiamo al verbo **«imparare»** in genere lo abbiniamo a uno sforzo da compiere, a un lavoro, a un atto che comunque richiede impegno e dispendio di energie. Non è facile pensare all'**«imparare»** come a qualcosa di piacevole, di giocoso, di accattivante. Invece i bambini che a Locarno hanno partecipato all'evento «*Matematicando»* hanno potuto sperimentare come può essere meraviglioso, affascinante e creativo il processo di apprendimento. I giochi di strada che abbiamo proposto hanno divertito bambini di tutte le età e genitori.

I primi hanno potuto mettere alla prova abilità che raramente vengono loro richieste: far roteare una trottola, tirare una biglia indirizzandola su un percorso stabilito, tirare un tappo calibrando la forza in modo tale da farlo arrivare nello spazio con il valore più alto, abbattere quanti più birilli possibile con un tiro di palla.

I genitori hanno sperimentato, dal canto loro, quanto sia piacevole giocare e divertirsi insieme ai propri figli.

Sono stati definiti giochi matematici perché mettono in gioco abilità che preludono alla matematica e, per essere così piacevoli e coinvolgenti, vanno ad annullare quell'alone di negatività di cui troppo spesso è avvolta tale materia.

Giochi semplici e anche antichi, che coinvolgono piccoli e grandi, giochi da ricostruire anche a casa, genitori e figli con le proprie mani, giochi per stare insieme, giochi che per la maggior parte dei casi si fanno anche all'aria aperta, giochi, insomma, per imparare e crescere in modo piacevole; tutto quello che dovrebbe bastare per farci venir voglia di giocare.

Studenti ed ex-studenti SUPSI-DFA
Locarno, con la collaborazione di **Rossana Falcade** e **Aline Pellandini**
«Se giochi, ti diverti... e magari impari!»
Età: da 4 a 6 anni

Cosa c'entrano una volpe golosa di ovetti, quattro porcellini, un panettiere pasticcione, un pittore pazzerello, una strega smemorata e dei topolini golosi di formaggio con la matematica?

Questo è quello che hanno scoperto i bambini (ed i genitori o nonni) che hanno affollato lo stand del laboratorio L2. Qui le studentesse del secondo anno della formazione Bachelor- DFA per la scuola dell'infanzia hanno proposto giochi da tavolo, interamente concepiti, progettati e realizzati da loro.

Le proposte, differenziate per livelli di complessità crescente, attraverso soprattutto giochi di natura collaborativa, hanno avvicinato i bambini in modo ludico e divertente alla matematica e hanno permesso di sviluppare sia competenze matematiche competenze relazionali, sociali e affettive. In particolare i bambini hanno potuto attivare e affinare la capacità di enumerazione, il conteggio, la scomposizione additiva del numero, l'addizione e la sottrazione, l'orientamento su un reticolo, la lettura e decodifica di simboli e numerali.

Giorgio Häusermann e **Pamela De Lorenzi**
Il Giardino della scienza SE Ascona e SUPSI DFA, Locarno
«Le avventure di Bee-bot»
Età: da 4 a 8 anni

Il Bee-bot è un'ape robot programmabile di solida costruzione, che percorre passi di 15 cm in avanti e indietro e rotazioni di 90°. Si possono programmare fino a 40 movimenti successivi e i bambini possono quindi premere in successione i diversi tasti per far compiere all'ape (o al suo gemello a forma di scavatrice) dei percorsi prestabiliti. Nel nostro caso avevamo disposto sui tavoli sequenze di quadrati di 15 cm su cui le api dovevano muoversi per raggiungere dei fiori. Il funzionamento dei Bee-bot è semplice ma vi sono tuttavia difficoltà che i bambini devono imparare a superare: il tasto «go» deve essere premuto per far partire l'ape, il tasto della freccia di rotazione ha come effetto quello di ruotare e non di procedere dopo la rotazione, infine se non si azzera la memoria con il tasto «clear», ogni programmazione è sommata a quella precedente. Infatti, molto spesso, l'attenzione posta per programmare correttamente fa dimenticare che prima di iniziare occorre vuotare la memoria. Un tasto utilizzato raramente è quello di «pause», che serve ad arrestare l'ape in modo di farne passare un'altra a un incrocio. Tra gli accessori dei Bee-bot vi sono dei tappeti su cui sono rappresentati numeri o lettere o la pianta di una città ai quali far capo, per esempio, durante attività didattiche.

Durante l'attività in piazza abbiamo notato, oltre al gradimento da parte dei piccoli, un grande interesse da parte dei genitori di capire il funzionamento delle api e di collaborare con i figli per programmare correttamente in modo da seguire i percorsi proposti.

Siti di riferimento: nel Regno Unito http://www.tts-group.co.uk/shops/tts/Products/PD1723538/Bee-Bot-Floor-Robot/
in Svizzera http://shop.educatec.ch/marken/beebot/bee-bot/index.php
in Italia http://www.campustore.it/bee-bot.

Società Matematica della Svizzera Italiana
SMASI, Lugano
«Giochi probabilistici»
Età: da 4 a 8 anni

Il bambino ha potuto partecipare a semplici giochi nei quali, per riuscire a vincere il premio, ha dovuto effettuare stime di probabilità, cioè, in pratica, rispondere a domande del tipo: quali scelte conviene operare per avere più probabilità di guadagnare il premio? Ecco di seguito alcuni esempi di attività fra le più avvincenti.

«Indovina il contenuto». Al bambino viene mostrato un sacchetto di tela. Gli si dice che dentro vi sono 7 (o più) caramelle, che sono state prese a caso da un vaso contenente caramelle al limone (gialle) e caramelle al mirtillo (rosse). Vince tutte le caramelle se riesce a indovinare esattamente quante caramelle al limone vi sono nel sacchetto. Per aiutarlo, lo si invita a estrarre una caramella, guardarla e rimetterla nel sacchetto. Si continua così fin quando il giocatore pensa di poter dire il numero di caramelle al limone che si trovano nel sacchetto. Nel dialogo si è sottolineato il fatto che nessuna risposta può essere considerata sicuramente esatta.

«La caccia al tesoro». Il bambino si trova davanti a un percorso di gioco ad albero dicotomico, a tre stadi. In due degli otto punti di arrivo si trova un tesoro, negli altri del carbone. A ogni bivio il bambino deve scegliere tra la strada gialla e quella rossa. Per farlo dovrà lanciare un dado. Ne ha a disposizione tre: uno con tre facce gialle e tre rosse, uno con quattro facce gialle e due rosse e uno con quattro facce rosse e due gialle. A seconda della situazione in cui si trova, una stima delle probabilità gli suggerirà qual è il dado più conveniente da usare. Cioè quello che ha maggiore probabilità di condurre al tesoro, anche se ciò non significa sicurezza di raggiungerlo.

«La corsa dei cavalli». Bianco, Grigio e Nero sono tre cavalli da corsa. Corrono su una pista composta di 10 caselle. Il Direttore della corsa ha in mano un sacchetto contenente 2 palline bianche e 2 palline nere indistinguibili al tatto. Opera due estrazioni successive di una pallina, con rimessa. Se estrae due palline bianche, il cavallo Bianco avanza di una casella, se ne estrae due di colore diverso, il Grigio avanza di una casella e se ne estrae due nere è il cavallo Nero che avanza di una casella. Ripete l'operazione fin quando uno dei cavalli giunge al traguardo.

Il giocatore scommette su uno dei tre cavalli. Chi ha più probabilità di vincere? Perché?

I visitatori si sono divertiti anche con altri giochi pensati per far capire bene la differenza fra eventi possibili, impossibili, certi.

ForMath
Bologna
«La mente in gioco. Giochi di strategia, una vera e propria
palestra per la mente»
Età: da 4 a 10 anni

I bambini si sono trovati davanti a una palestra per la mente con veri e propri spazi di gioco, 6 aree dedicate a giochi di strategia in formato gigante, dove potevano sfidarsi a gruppi o sfidare tutti insieme l'animatore. L'obiettivo è stato quello di sviluppare nei bambini, attraverso l'approfondimento di alcuni giochi, la capacità di analizzare una situazione, rispettare le regole del gioco, elaborare tattiche efficaci, pianificare strategie, esaminare razionalmente il comportamento proprio e altrui, e perché no? fare matematica. Infatti i giochi di strategia e di logica stimolano inconsapevolmente grandi e piccoli a sviluppare quelle facoltà mentali che vengono utilizzate in matematica per intuire soluzioni a situazioni problematiche. I bambini e gli adulti traggono piacere dal gioco che permette loro di esercitare il loro repertorio di abilità e li gratifica con il senso di efficacia che nasce in loro facendo qualcosa che riesce bene.

Da un grande «classico moderno» come Hex, al semplicissimo ma intrigante Germogli, dal Nim all'antico gioco africano Oware, dal particolarissimo Quarto al coinvolgente Pylos, i giochi proposti permettono partite veloci, divertenti e stimolanti per grandi e piccoli. Tutti i giochi sono pensati per essere accessibili con regole semplici anche a bambini più piccoli, inoltre il fattore fortuna è assente. Solo escogitando una strategia ragionata si può giungere a vittoria, e come spesso avviene, la matematica ci può essere d'aiuto. Il gioco diventa allora un pretesto per parlare di forme geometriche, numeri, ragionamenti deduttivi, previsioni della mossa.

Attraverso Hex i bambini hanno ragionato su come poter costruire un percorso più intelligente per unire le due sponde del proprio colore; grazie a Nim abbiamo potuto parlare con i più grandicelli di codice binario, con Pylos di impilaggi e sfere; i bambini si sono poi sfidati a ricercare la caratteristica comune dei pezzi allineati di Quarto lavorando sul concetto di classificazione e con Germogli hanno potuto toccare con mano le regole della topologia; infine piccoli e grandi si sono sfidati a Oware seguendo ragionamenti deduttivi per vincere la partita.

Il laboratorio voleva dunque essere una proposta alternativa per divertirsi in modo intelligente e imparare a ragionare a colpi di sfide.

Alejandro Arigoni e **Flavio Rossi**
SUPSI DFA, Locarno, con la collaborazione di **Claudio Ruggeri**,
docente di educazione fisica, scuola elementare di Losone
«Giochi motori e matematica»
Età: da 4 a 11 anni

I bambini hanno potuto sperimentare diversi giochi motori di collaborazione, opposizione o collaborazione e opposizione, in cui per riuscire hanno dovuto svolgere, sempre in movimento, operazioni di calcolo mentale, stime di distanze e traiettorie. Qui di seguito sono riportate alcune attività esemplificative.

«**Pari dispari**»: gli allievi si muovono liberamente per la piazza dove si trovano coni di due colori diversi. Al segnale del docente gli allievi devono darsi le mani in cerchio attorno ad un cono rispettando il seguente vincolo: per un colore (per esempio attorno al cono giallo) il gruppo deve essere costituito da un numero pari di allievi mentre per l'altro colore (per esempio attorno al cono arancione) da un numero dispari. Il docente dice quanti coni devono essere attorniati. Per ogni *manche* il tempo a disposizione è di 10-15 secondi. La riuscita del compito è riferita al gruppo/classe. Dopo ogni *manche* (4-5 in tutto) il docente e i bambini osservano la riuscita o meno del compito. In caso di mancato successo il docente chiede ai bambini di esemplificare quali spostamenti alcuni sottogruppi o singoli bambini avrebbero potuto fare per rispettare la consegna.

«Gnomi e lepri»: un gruppo di gnomi (= allievi nel ruolo di predatori) è opposto alle lepri (= allievi nel ruolo di prede) e ha il compito di catturarle (con un semplice tocco della mano). Le lepri che vengono fatte prigioniere si trasformano in alberi, devono rimanere immobili e far spuntare un certo numero di rametti (dita delle mani) dai rami principali (braccia e mani). Un albero può tornare a essere lepre se una lepre libera si mette al suo fianco e comunica il corretto numero «amico del 10» o «amico del 20» rispetto al numero di rametti mostrati. Per gli allievi di 3ª eventualmente 4ª elementare si può provare moltiplicando i due numeri mostrati (delle due mani) e comunicando il numero «amico del 30» o «amico del 100» rispetto al risultato. Il gioco è interrotto e poi rilanciato cambiando i predatori. Per il rilancio si cambia addendo, così che ogni situazione di liberazione sia nuova e necessiti un'operazione matematica. Dal momento che i gruppi sono spesso stati compost da classi di cicli diversi, i bambini più piccoli hanno potuto liberarsi tra di loro con addendi inferiori, mentre i grandi hanno avuto i maggiori e hanno potuto liberare grandi e piccoli, differenziando l'operazione matematica rispetto alla consegna data.

«Le distanze»: a gruppi di tre i bambini si lanciano delle sfide. Nello spazio sono sparpagliate diverse coppie di cinesini di colori diversi (almeno 10). Per ogni colore ci sono tre coppie, una con circa 70 cm di distanza tra i cinesini, una con circa 1.5 m e una con circa 3 m.

Un allievo chiede ai due compagni di percorrere in modo crescente o decrescente il tracciato dato dalle terne di cinesini (ad esempio: «Dovete attraversare gli spazi dettati dai cinesini rossi, partendo dalla coppia con minor distanza»). Gli allievi devono quindi in movimento individuare le tre coppie di cinesini nello spazio escludendo gli altri, stimare e percorrere il percorso secondo loro più breve per vincere la gara, stando attenti a tutti gli altri bambini che come loro si spostano nello spazio, dovendo così adattare e rielaborare di continuo le loro traiettorie.

Studenti del secondo anno del Bachelor SUPSI DFA
Locarno, con la collaborazione di **Miriam Salvisberg** e **Silvia Sbaragli**
«Diamo i numeri!»
Età: da 4 a 7 anni

Fin dalla scuola dell'infanzia i bambini sono affascinati dai numeri che incontrano e scoprono nel mondo che li circonda: nel calendario, nella sveglia, nelle targhe delle auto, nei soldi, … e che spesso rappresentano una forte componente delle esperienze che vivono. Partendo dalla considerazione che la realtà è piena di numeri, sono state proposte attività giocose per avvicinare i bambini, in modo curioso e accattivante, ai diversi aspetti dell'apprendimento numerico. Le postazioni sono state progettare e realizzate dagli studenti del II anno del DFA, futuri docenti di scuola elementare, che hanno animato con entusiasmo le due giornate interagendo attivamente con gli allievi, i loro docenti e le famiglie.

È stato veramente coinvolgente vedere correre per la piazza i bambini con i binocoli al collo a «caccia di numeri», per riflettere poi insieme sulle loro diverse funzioni nel contesto rintracciato e riprodurli in diversi modi.

Si sono poi organizzate varie postazioni per andare a caccia dei numeri «personali» per conoscersi meglio e compilare così la propria carta d'identità numerica individuando le lettere del nome, il numero di scarpa, l'altezza, il peso,… tramite diversi strumenti di misura.

Sono poi stati proposti giochi inventati dagli allievi, come il motivante *Twister* numerico dove si dovevano posizionare mani e piedi sulle stesse cifre o il divertente «Stendi i panni» che consisteva nello stendere su un filo, tramite mollette, dei vestitini contenenti numeri, rispettando l'ordinamento numerico, con il sottofondo musicale dato dalla canzone avente lo stesso titolo o il gioco di società legato alla storia dei numeri, dove si potevano fare intagli sui legni come avvenuto nella storia della matematica.

Queste arricchenti esperienze hanno rappresentato per tutte le figure coinvolte momenti di apprendimento informali, di profonda condivisione e di forte coinvolgimento.

Gruppo Cabri Elem Ticino
con la collaborazione di **Silvia Fumagalli**, classe I C di Stabio
e **Claudio Fenaroli**, classe III di Paradiso
«La matematica: attività reali e virtuali con Cabri Elem»
Età: a partire da 5 anni

«...con carta e penna, le rappresentazioni degli oggetti matematici sono inerti, nell'ambiente informatico essi si caricano di senso matematico e possono quindi comportarsi matematicamente. […] L'informatica è in grado di fornire un nuovo tipo di rappresentazioni manipolabili, dinamiche ed interattive. La creazione delle risorse deve partire da questo nuovo tipo di rappresentazioni per consentire il verificarsi di apprendimenti»[1].

Le opportunità offerte da questo strumento informatico consentono di proporre in classe situazioni matematiche laboratoriali che implicano la partecipazione attiva dei bambini, stimolati a risolverle, ipotizzando, verificando e acquisendo nuove conoscenze.

Cosa significa manipolare oggetti virtuali? Lavorare, per esempio, con solidi nel reale è sempre molto stimolante e arricchente per gli allievi; se parallelamente utilizzano il computer possono costruire, inventare e manipolare anche solidi più complessi, con maggiore precisione e senza dover investire troppe energie nella loro costruzione. Possono montare e smontare, creare e distruggere, provare più volte senza rovinare il modello. Il *software* Cabri Elem permette di lavorare in modo dinamico anche in ambito aritmetico; le attività che abbiamo presentato utilizzano questa caratteristica del programma per far riflettere su alcuni aspetti specifici della disciplina. Nel laboratorio gestito dagli allievi di una terza elementare (coordinati dal docente di classe e da un membro del gruppo) si proponevano ad esempio situazioni del tipo: in quanti modi si può ricoprire con piastrelle metà della superficie di un quadrato? Come si ordinano dei numeri su una linea graduata? Proviamo a contare a due a due, a tre a tre, …?

Chi ha partecipato al laboratorio di geometria, condotto dagli allievi di una prima elementare coadiuvati dalla loro insegnante e da un membro del gruppo Cabri Ticino, ha invece proposto la costruzione di figure partendo da un modello dato. La partecipazione a questo evento da parte degli allievi delle due classi «organizzatrici» è stata indubbiamente molto faticosa ma nel contempo gratificante ed emozionante: mettersi in gioco con altri coetanei (o anche con classi composte da allievi «più grandi» o addirittura con adulti) non è evidente. Alcuni degli allievi partecipanti hanno aumentato la propria autostima e la consapevolezza delle proprie conoscenze matematiche, mettendole in gioco mediante il confronto con gli altri.

Lorella Campolucci e **Danila Maori**
MIR, Corinaldo e RSDDM, Bologna
«Robotica Lego e Polydron. Esperienze didattiche in continuità dalla scuola dell'infanzia alla scuola elementare»
Età: da 5 a 12 anni

1. Testo di Colette Laborde, professoressa presso l'Istituto di Formazione dei docenti di Grenoble, ricercatrice in didattica della matematica e co-autrice di Cabri Elem.

Nei laboratori con le forme geometriche Polydron, che si presentano come un efficace veicolo per l'apprendimento della geometria solida e piana, i bambini si sono sfidati nella ricerca di tutti i possibili sviluppi del cubo; hanno scoperto i poliedri platonici; si sono impegnati nella ricostruzione di cubi colorati, un rompicapo che richiede di lavorare per immagini mentali: osservando un cubo disegnato in due diverse posizioni su un foglio, dovevano costruirlo utilizzando le forme piene e rispettando i colori delle facce.

Hanno osservato i vari ponti e le giostrine in mostra e si sono divertiti a realizzare liberamente nuove fantasiose costruzioni con i materiali messi a disposizione.

Nella sezione dedicata ai sistemi di robotica LEGO Education si è voluto promuovere un atteggiamento riflessivo nei confronti della tecnologia che stimolasse a ragionare, pianificare, organizzare e operare.

I bambini hanno osservato i personaggi costruiti con Lego We-do e sperimentato i movimenti e i suoni già programmati, poi si sono sbizzarriti a riprogrammare i personaggi, divertendosi a modificare i loro movimenti oppure a inserire l'emissione di rumori buffi o di suoni registrati al momento da loro stessi.

Il robot NXT di Lego Education, ha infine catturato l'attenzione sia dei più grandi sia dei più piccoli: i piccoli si sono divertiti nel far compiere il percorso per il quale era stato programmato, meravigliandosi di come riuscisse a rispettare le curve sulle strade, superare i ponti e salutarli ruotando il suo «braccetto». I più grandi hanno sperimentato la programmazione di alcune semplici sequenze di blocchi, subito trasmesse al robot per la verifica immediata. Nell'osservare il robot in movimento, hanno manifestato la loro soddisfazione e la loro gioia quando il comportamento corrispondeva a quello che avevano pensato, ma hanno anche espresso le loro riflessioni nel caso di comportamenti imprevisti, ipotizzando modifiche della programmazione.

Paolo Bascetta e **Francesco Decio**
Centro Diffusione Origami, Bologna e Bergamo
Età: a partire da 6 anni

Origami è piegare la carta. Con le sole mani, senza l'uso di forbici e colla, si può ottenere ogni sorta di figura. Non è la casualità che genera figure ma una sequenze ben definita di pieghe regolate da ferree leggi geometriche che il creatore del modello ha saputo trasferire sulla carta.

Tra la sterminata quantità di figure spiccano quelle geometriche. Le contraddistingue la precisione della piegatura, la regolarità degli eventuali incastri e la geometria che si nasconde dietro al modello finito.

Ai ragazzi sono stati proposti modelli a contenuto prevalentemente geometrico, ma non solo. Più o meno tutti hanno potuto realizzare un cubo. Alcuni hanno piegato anche il tetraedro. Ed a questo punto il gioco è diventato interessante perché i ragazzi venivano invitati a scoprire le relazioni tra i due solidi che non sono proprio così evidenti. Anzi, tutt'altro che evidenti.

Ma puntualmente c'è sempre qualcuno che indovina o intuisce, e allora, come in un effetto domino, tutti i partecipanti riescono ad inserire il tetraedro dentro al cubo e capire così che gli spigoli di quello sono in relazione precisa con le facce di questo. Lo stupore dei ragazzi ripaga le nostre fatiche.

Per i ragazzi è una scoperta eccitante, che portano ben dipinta sul viso e che tengono ben stretta tra le mani, quasi a temere di perdere l'idea.

Nel pomeriggio ci siamo rivolti ad un pubblico molto più eterogeneo, ma non per questo abbiamo rinunciato a proporre la geometria tra le pieghe.

Semplicemente ci siamo «sganciati» dalla geometria classica per proporne una diversa, più «accattivante» e apparentemente lontana dalle formule scolastiche, ma che a un occhio attento appare in tutta la sua eleganza e risulta comunque legata a filo doppio alle regole imparate sui banchi di scuola. Pitagora, Talete e molto altro si nasconde tra fiori, scatole, contenitori vari, figure in movimento che possono essere analizzati in modo tangibile e diretto oltreché rigoroso.

In conclusione possiamo dire che attraverso l'origami abbiamo incuriosito e fatto scoprire varie regole e figure della geometria classica in modo sicuramente inusuale e, speriamo, anche divertente.

ForMath, Bologna
«La geometria con le bolle di sapone»
Età: a partire da 6 anni

Che cos'è una bolla di sapone? Perché sono tutte rotonde? Siamo partiti dall'osservazione di questi fenomeni con occhio prevalentemente scientifico per approdare a piccoli passi nel mondo matematico delle bolle. Con una serie di esperimenti e semplici materiali abbiamo studiate le bolle di sapone e le incredibili proprietà delle superfici minime, cercando di capire quale matematica è nascosta nelle lamine saponate.

L'intento è stato quello di ritagliare degli spazi per parlare di matematica e fisica in maniera non convenzionale (ma corretta!). Dal punto di vista matematico le bolle di sapone costituiscono un'occasione per affrontare temi quali l'isoperimetria, le superfici minime, i percorsi minimi… Sul versante interdisciplinare si prestano ad agganci con la fisica (tensione superficiale, minimizzazione dell'energia), l'architettura (tensostrutture), la biologia (radiolari, api…) … Attraverso strumenti molto semplici i bambini hanno potuto sperimentare quanta scienza si trova intorno a noi. Partire poi da un gioco affascinante, come le bolle di sapone, per introdurre un argomento scientifico ha il notevole vantaggio di incuriosire e attrarre gli alunni in modo molto più immediato ed efficace di quanto si faccia normalmente a scuola. Dopo aver esplicitato quali caratteristiche vedessero nelle bolle di sapone, i bambini sono stati guidati verso una spiegazione fisico-matematica di ognuna di queste: la forma, il colore, il materiale.

Perché serve il sapone per fare le bolle? Quali effetti ha se lo aggiungo all'acqua? Esperimenti con barchette e filo di cotone hanno dimostrato il significato di tensione superficiale.

Perché le bolle di sapone sono sferiche? La sfera ha la sorprendente proprietà di avere la misura della superficie più piccola a parità di volume, proprio come il cerchio ha il perimetro minore tra tutte le figure piane con una data area. Armati di cordicelle, metro, palline colorate i bambini hanno potuto sperimentare le caratteristiche dell'isoperimetria fino a dedurre che la lamina saponata assume la configurazione sferica perché è quella che le permette di «sprecare meno acqua e sapone possibile». Insomma tutta una questione di minimo! La ricerca continua con alcuni esperimenti sui percorsi minimi e le superfici minime: i bambini, utilizzando telaietti appositamente costruiti, hanno verificato come questa capacità delle lamine saponate di minimizzare possa essere applicata anche a problemi geometrici pratici: come posso unire tre o più punti con il minor cammino su una sfera? Perché le api costruiscono celle esagonali? Come poter ottenere una tensostruttura esteticamente piacevole, ma allo stesso tempo economica? Le lamine di sapone possono aiutarci a rispondere a tutte queste domande…

Luca Crivelli, classe II-III di Lattecaldo
e **Silvia Fioravanti**, classe V A di Vezia
«Problemi grandi e piccoli»
Età: da 6 a 11 anni

L'esperienza che abbiamo potuto vivere con i nostri allievi, la partecipazione alla festa Matematicando in qualità di organizzatori e gestori di un laboratorio, è stata intensa ed emozionante.

Il tema del «viaggio storico nei problemi» e la responsabilità di presentarlo all'evento sono stati gli stimoli che hanno facilitato il coinvolgimento dei nostri allievi.

Il progetto ci ha impegnati per tutta la seconda metà dell'anno scolastico, e in sintesi possiamo suddividerlo in quattro momenti significativi:

– la fase di preparazione: le due classi hanno «incontrato» i problemi, li hanno risolti, li hanno analizzati, hanno riflettuto sul come presentarli al fine di adeguarli ai vari destinatari, e hanno preparato il materiale necessario per la realizzazione del laboratorio;
– la fase di condivisione: le due classi si sono incontrate per sperimentare le modalità di presentazione delle attività e l'idoneità del materiale preparato;
– la fase di realizzazione: le giornate di laboratorio durante la festa;
– la fase di riflessione a posteriori: un'ottima occasione per riflettere sulle reazioni del pubblico e dei genitori che hanno partecipato alla festa, sulle modalità di comunicazione e sull'organizzazione delle singole parti del laboratorio.

Il momento più intenso è stato certamente quello legato alla realizzazione, caratterizzato da emozioni forti e anche contrastanti (preoccupazione ed entusiasmo fra tutte).

La partecipazione all'evento ha permesso a noi maestri di offrire agli allievi l'occasione di poter vivere la matematica e i problemi in modo diverso dalle consuetudini scolastiche: uscire dall'aula, divertirsi e divertire, mettersi alla prova con persone che non si conoscono e che possono agire e reagire in maniere diverse e a volte inaspettate. Al contempo è stato molto interessante osservare gli allievi in azione; non sono mancati momenti di condivisione e di collaborazione affinché tutto si svolgesse senza difficoltà. Altrettanto interessante è stato poter constatare quanto i bambini generalmente più fragili e deboli siano stati capaci di assumersi responsabilità senza particolari timori. Insomma, con l'aiuto di Fibonacci ed Eulero siamo riusciti a vivere la matematica divertendoci ed emozionandoci, lasciando per una volta negli astucci matite, penne, cancellini e gomme.

Emanuele e **Beniamino Danese**
Reinventore, Verona
(www.reinventore.it)
«Idee, esperimenti e racconti dalla storia della scienza»
Età: a partire da 8 anni

Reinventore è un'impresa che raccoglie, integra e diffonde la tradizione di insegnamento scientifico a base di esperimenti con materiali semplici.

Per il Festival di Locarno ha preparato uno spettacolo-laboratorio con una carrellata di esperimenti che incorporavano in modo naturale figure e concetti matematici... da punti, rette, triangoli, proiezioni a parabole, ellissi, iperboli, sinusoidi... Come scriveva Galileo Galilei nel Saggiatore infatti, l'universo è come un grandissimo libro che ci sta aperto innanzi agli occhi, ed è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi e altre figure geometriche…

In questi laboratori, in modo amichevole e informale, sono stati quindi mostrati ed eseguiti gli esperimenti scientifici più vari, coinvolgendo gli stessi partecipanti, con un linguaggio adatto ad ogni età: i laboratori erano rivolti alle scuole (in particolare alla scuola primaria, al venerdì), e alle famiglie (al sabato, alla spicciolata).

Ad esempio, per i bimbi più piccoli e i gruppetti di ragazzi, si cominciava con una sfera gigante, un «maxi palloncino» legato a una corda, con cui giocare nella piazza e «rompere il ghiaccio»… e passare poi sotto il gazebo, dove, per le scuole e le famiglie, i bambini erano portati a seguire ed eseguire esperimenti di scienze con materiali semplici (sui sensi, sul suono, sull'elettricità…), inestricabilmente legati ai concetti matematici… raccontati in maniera quasi fiabesca, secondo lo stile *storytelling* di Reinventore.

Ad esempio, i raggi di sole come rette (fino a bruciare del cartoncino nero con una lente), le immagini come un insieme di punti (con un esperimento che spiega l'occhio umano chiedendo di mettere la testa dentro un grande scatolone)… gli esperimenti sulla natura del suono, oscillazioni e sinusoidi… simmetrie e ingrandimenti… per ricominciare un po' tutti a rileggere la lingua matematica con cui è scritto il gran libro dell'universo…

Società Matematica della Svizzera Italiana
SMASI, Lugano
«Situazioni probabilistiche intriganti. Scommettiamo? Prevediamo?»
Età: a partire da 9 anni

Prevedere esattamente il futuro o ciò che ci è nascosto è impresa impossibile. La matematica può però aiutare, permettendo di stabilire ciò che è più probabile che accada. Il partecipante è stato messo di fronte ad alcune situazioni semplici nelle quali era invitato a indicare la soluzione (l'ipotesi) più probabile. Lo poteva fare mediante una stima personale oppure con un semplice calcolo di probabilità. Ecco alcuni esempi.

«Variante della corsa dei cavalli». I cavalli sono quattro e portano i numeri 0, 1, 2, 3. La pista è sempre quella, composta di 10 caselle. Il Direttore di corsa lancia ogni volta due dadi, i concorrenti a turno calcolano il resto della divisione per 4 della somma dei punteggi ottenuti. A seconda del risultato, avanzerà il cavallo che porta quel numero. L'operazione si ripete fin quando un cavallo giunge per primo al traguardo. Chi vincerà? Chi ha più probabilità di vincere e perché? Si può essere sicuri della vincita di uno dei cavalli?

«Il gioco è onesto?». In un sacco vi sono due paia di scarpe identiche. Se ne estraggono due a caso. Se le scarpe estratte sono due destre o due sinistre, vince A; se si estrae una destra e una sinistra vince B. Un tale gioco è considerato onesto se i giocatori hanno la stessa probabilità di vincere. Questo gioco è onesto? A prima vista sembrerebbe di sì, ma…

«I play off». Molto spesso i campionati di hockey, di basket o di calcio terminano con gli incontri di play off, nei quali due squadre disputano tra di loro un certo numero dispari di partite (3, 5, 7,…). È dichiarata vincente la squadra che ha vinto il maggior numero di partite. Che senso ha tutto ciò? Supponiamo che una squadra abbia la probabilità 0,6 di vincere una partita singola nei confronti della sua rivale B. Giocando, ad esempio, una serie di al massimo 7 partite, la probabilità della squadra A di vincere sarà sempre 0,6? Aumenterà? Diminuirà?

3. Gli spettacoli

Federico Benuzzi
giocoliere professionista e insegnante di fisica e matematica, Bologna
«Fisica sognante. Riflessioni su matematica, fisica, giocoleria e didattica»
Età: a partire da 4 anni

Essendo un professore di liceo ed essendomi sempre occupato di divulgazione rivolta a teenager o adulti, confrontarmi con uno spettacolo scientifico pensato anche per bambini delle elementari e della materna è stata proprio una sfida emozionante: sia dal punto di vista teatrale che da quello dei contenuti, soprattutto dei contenuti. Di che cosa parlare e come farlo sono stati una preoccupazione fin dal primo momento in cui ho accettato questa sfida.

… E così salire sul palcoscenico di un teatro gremito, con un lavoro nuovo, un nuovo personaggio, ma soprattutto davanti a un pubblico a cui non ero abituato, è stato un momento molto intenso e contornato da mille dubbi: sarebbero passati i messaggi? Avrebbero capito? E che cosa? … Sarei riuscito a piantare qualche semino?

Beh, devo ammettere che i bambini sono stati un pubblico molto più attento di quanto non osassi sperare e devo ringraziarli per aver ripagato il mio lavoro sia con fortissimi applausi sia con belle e sane risate… ma soprattutto devo ringraziarli per la partecipazione! Le domande che mi hanno rivolto e le risposte che mi hanno dato durante lo spettacolo hanno dimostrato, non solo la loro attenzione, ma che sono dotati di una bellissima e vispa intelligenza e soprattutto che tutti i miei dubbi avevano avuto una risposta positiva.

Siamo abituati (soprattutto noi che lavoriamo principalmente con ragazzi di liceo) a pensare che i bambini non siano capaci di cogliere le sfumature o il senso, mentre invece, usando i giusti registri e tempi non dilatati, sono molto più pronti a cogliere altro a cui non sono abituati di tanti adulti. I contenuti: quelli sicuramente non sono passati o non hanno attecchito, ma il senso e le implicazioni più intime, quelle penso proprio che le abbiano quantomeno intuite!

Ho ancora vivissimo nella mente, tra gli altri, per esempio, il ricordo dei bambini che mi hanno risposto che «bianco vuol dire vuoto» (e cioè che i pallini bianchi proiettati sullo schermo su cui convergevano frecce che rapprentavano palline erano la rapprentazione delle mani vuote) attribuendo quindi un altro significato al significante «colore bianco» … esperendo cioè che cosa si intende per «rappresentare». Da pelle d'oca.

Giorgio Häusermann
Il Giardino della scienza, SUPSI DFA, Locarno
«Le magie della scienza»
Età: a partire da 6 anni

Venite a scoprire le magie della scienza! Esperimenti che lasciano a bocca aperta, «magici ma scientifici». E la matematica dove si trova? Ogni esperimento è stato studiato da grandi e famosi scienziati che hanno letto i fenomeni della natura con gli occhiali della matematica. Non ci credete? Venite a vedere!

Le magie dell'acqua: tutti sanno che l'acqua esiste allo stato liquido, solido e di vapore ma avete mai visto il ghiaccio diventare vapore buttandoci sopra un po' d'acqua?

E fare le bolle di sapone con il vapore? Tutto ciò, e altro ancora, è possibile con il ghiaccio secco, anidride carbonica CO_2 solida a –78 °C. Con il CO_2 si possono spegnere le candele senza soffiare e con una pastiglia effervescente e un po' d'acqua produrre CO_2 per far partire un razzo.

Le magie dell'aria: l'aria non si vede ma riesce a farsi sentire in faccia e nei capelli, a tenere sollevati palloni e palline, a srotolare in un attimo un rotolo di carta igienica e a lanciare pezzetti di patata. Se poi si aggiunge un po' di fumo all'aria, ecco che con i nostri strumenti possiamo produrre gli anelli di fumo. Gonfiare un lungo sacco con un solo soffio o tenere uniti assieme due cerchi di gomma in modo da non poterli più dividere, è un gioco da ragazzi se si conosce un po' di fisica.

Le magie dei suoni: (quasi) tutti sanno cosa accade pizzicando una molla lunga. L'onda va e viene in silenzio ma se si applica a un'estremità una scatola di cartone ecco che l'onda diventa un suono. Tuono, corno da stadio, tubo sonoro, tubo ad aria calda e palloncini sonori completano il nostro programma di onde sonore, quelle studiate da tanti matematici.

Giovanni Galfetti
SUPSI DFA, Locarno, e **Andrea Pedrazzini**
«Il gioco musicale dei dadi, di W. A. Mozart»
Età: a partire da 8 anni

Wolfgang Amadeus Mozart scrisse le battute musicali del «Musikalisches Würfelspiel» (KV 516f) e le istruzioni per giocare nel 1787 ma il tutto venne pubblicato postumo nel 1792, un anno dopo la morte del compositore, che lo definì «gioco per comporre musica con i dadi senza intendersi di musica o di composizione». In realtà altri compositori, tra i quali Carl Philipp Emmanuel Bach (figlio del grande J. S. Bach), si erano cimentati in tale esercizio, ma quello del genio di Salisburgo e di gran lunga il più completo, originale e interessante.

Sappiamo della mania di Mozart per i numeri e la cabalistica: un interesse che rasentava livelli patologici. A questo proposito basta ricordare gli enigmi matematici inseriti nell'inizio delle «Nozze di Figaro», nell'Aria del Don Giovanni «Madamina il Catalogo è questo» e nel «Zauberflöte», denso di simbolismi numerici legati alla Massoneria.

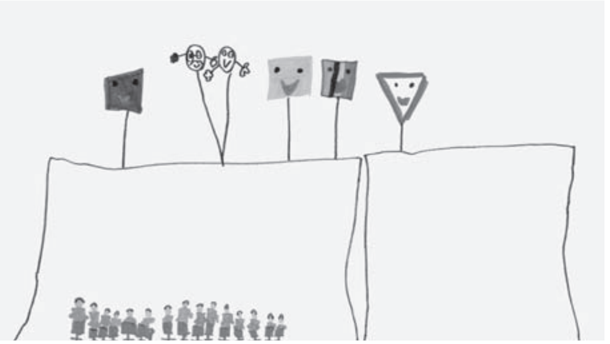
Giocare al «Würfelspiel» è estremamente semplice. A disposizione del giocatore vi sono 176 battute musicali, ripartite in due tabelle che ne contengono 88 ciascuna e che servono alla composizione di un Walzer di tempo ternario; altre 176 battute (pure ripartite in due tabelle) permettono la composizione di una Contraddanza (tempo binario). Una volta selezionate le battute, lanciando i dadi, non resta altro da fare che lasciare la parola alla musica.

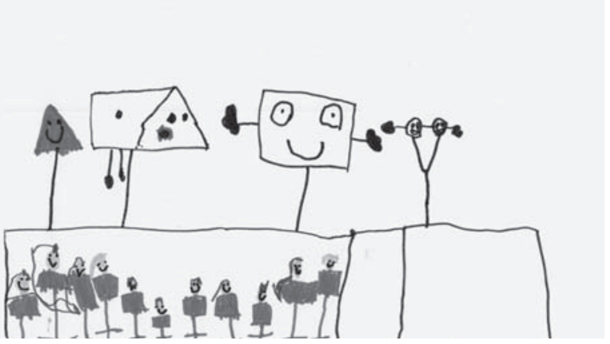
Ioana Butu
attrice, burattinaia e cantante, Bellinzona,
con la collaborazione di **Silvia Sbaragli**
«Storie matematiche. Figuriamoci! Figure geometriche in movimento»
Spettacolo di burattini.
Età: a partire da 4 anni

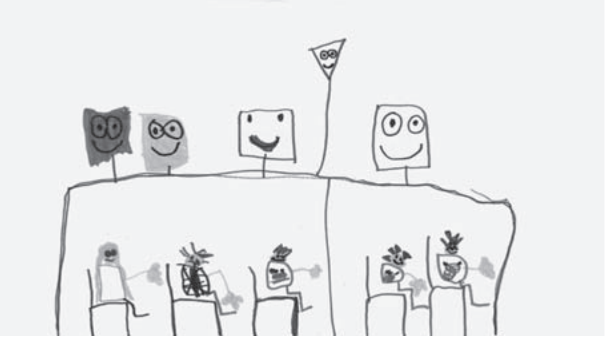
In questo spettacolo l'arte dei burattini si è incontrata con la geometria dando vita a diverse figure tramite le abili mani di Ioana Butu. Un modo diverso di familiarizzare con la geometria, una disciplina solo in apparenza distante dal vissuto dei bambini. È stato molto formativo e divertente scoprire alcuni elementi e proprietà delle figure, sentendole parlare, discutere, cantare e ballare con leggiadria e giocando con le loro analogie e differenze.

La storia è quella di un quadrato cresciuto in una famiglia di sfere che inizia un viaggio alla ricerca di «quelli come lui», la sua famiglia di quadrati di origine. Una sorta di brutto anatroccolo in versione geometrica. Sulla sua strada Ato, il quadrato, incontra diversi personaggi quali un calzolaio parallelepipedo di nome Edo, che gli fornirà le scarpe per intraprendere il viaggio, un triangolo di nome Olo, con il quale scoprirà finalmente il mondo del piano e diversi quadrati disposti in diverse posizioni. Ogni volta che Ato, il quadrato, incontra un nuovo personaggio va alla ricerca di analogie e differenze per potere effettivamente capire chi è e come è fatto. Finalmente Ato incontra i suoi genitori e i suoi cinque fratelli quadrati con i quali decide di giocare a «spigolo contro spigolo» per poter diventare un cubo, conoscendo così una nuova figura dello spazio.

L'esperienza di «Matematicando» è stata davvero positiva e vincente, grazie all'unione dell'arte dei burattini e del teatro con la matematica, e il pubblico si è lasciato coinvolgere, partecipando attivamente e interagendo con i burattini. Di questo sono una testimonianza i disegni dei bambini che sono stati inviati agli organizzatori diversi giorni dopo l'evento (vedi http://www.supsi.ch/dfa/eventi-comunicazioni/news/2014/2014-08-04.html) e dei quali ne riportiamo una piccola panoramica.







Anna Cerasoli
divulgatrice matematica, L'Aquila
«Storie per i più piccini»

«Le avventure del signor 1» Età: 4-5 anni

Il primo giorno di primavera il numero 1 decide di staccarsi dal calendario e andare a spasso per il mondo. Peccato che un fruttivendolo del mercato lo scambi per un insetto pericoloso e decida di inseguirlo. Dove può nascondersi il nostro 1? Nella divertente fuga abbiamo scoperto i tanti numeri della nostra realtà quotidiana.

«Gatti neri gatti bianchi» Età: 6-8 anni

Tra i tanti quartieri della città, uno soltanto può vantare questo primato: «avere gatti tutti neri». Ma all'improvviso compare un gattino bianco a negare questa verità. I gatti bianchi aumentano, aumentano sempre più finché nel quartiere ogni gatto è bianco e nessun gatto è nero. Cosa succede se poi arriva un'intera famiglia di gatti rossi e poi un'altra di gatti a strisce e maculati? Un racconto buffo per scoprire e familiarizzare con i quantificatori logici: tutti, nessuno, qualcuno e le loro negazioni.

«La grande invenzione di Bubal» Età: 8-10 anni

Bubal, una pastorella preistorica, escogita un modo per riassumere con pochi segni la quantità delle sue pecore. Un racconto sul percorso logico che ha portato all'invenzione dei numeri, senza dubbio una delle più grandi invenzioni dell'intelletto umano.

2. Conversioni e trattamenti semiotici nel *problem solving*

Gianfranco Arrigo

The main topic of this paper is *problem solving* and, above all, the role played by semiotic transformations in this field of study. The development of the ability to deal with «real problems» is a core objective in the learning of mathematics. Unfortunately, little time is devoted to this activity at school. To attract teachers' attention to this topic, first the theoretical reasons which underlie the practice of problem solving in class have to be pointed out; then, teachers have to be shown examples and reports of experiences that have been carried out, and this is what this article aims at doing.

Una grande scoperta risolve un grande problema, ma nella risoluzione di qualsiasi problema c'è un pizzico di scoperta. Il tuo problema può essere modesto, ma se stimola la tua curiosità, tira in ballo la tua inventiva e risolvilo con i tuoi mezzi; puoi sperimentare la tensione e gioire del trionfo della scoperta. (George Pólya)

1. Premessa

Il *gestaltista* Max Wertheimer[1] nel suo saggio *Il pensiero produttivo*[2] scritto nel 1943 ci illumina sul processo dinamico del pensiero, di fronte a una situazione problematica. Egli sostiene che, in questi casi, la mente può produrre un'improvvisa intuizione o illuminazione, che chiama *insight*[3]. Dunque, la soluzione di un «vero» problema non è frutto solo di un apprendimento già acquisito, ma soprattutto di una *variazione* globale, da parte del soggetto, della situazione.

Significativa, a tale proposito, la frase seguente (Kanizsa, 1973).

Un problema sorge quando un essere vivente, motivato a raggiungere una meta, non può farlo in forma automatica o meccanica, cioè mediante un'attività istintiva o attraverso un comportamento appreso.

L'aspetto dinamico è caratteristico del modo di affrontare un nuovo problema. Mi piace pensare che quando il soggetto non sa da che parte muoversi per trovare una via risolutiva, quando è ancora nella fase di procedere per tentativi, nella sua mente nascono diverse idee embrionali, grezze, che si muovono in modo del tutto ca-

1. Max Wertheimer (Praga, 15 aprile 1880 – New Rochelle, 12 ottobre 1943) è stato uno dei maggiori esponenti della psicologia gestaltistica assieme a Wolfgang Köhler e Kurt Koffka.
2. Opera pubblicata postuma nel 1945.
3. Termine intraducibile in questo contesto.

suale, come atomi in una reazione chimica, fin quando – se succede – si aggregano in una nuova molecola (un'idea) che dà il via a un processo risolutivo. Questo va poi sottoposto a verifiche e di conseguenza accettato o rifiutato. Continuando la metafora, per favorire la nascita di un'idea risolutiva occorre da un lato aumentare il numero delle idee embrionali e dall'altro aumentare la velocità del loro movimento. Due cose che non si possono insegnare come si usa fare con un algoritmo, ma che vanno sviluppate ponendo il soggetto di fronte a situazioni adeguate, più volte, lungo l'intero arco della sua formazione scolastica.

Per Polya[4] (1945), quando un problema si presenta ostico da affrontare, quando non si vede altra via risolutiva oltre a quelle già inutilmente tentate, si può procedere a una variazione del problema.

*Il successo nella risoluzione del problema dipende dalla scelta del modo di affrontarlo, cioè di attaccarlo dal lato più accessibile; per riuscirci, occorre tentare più volte, variando punti di vista e metodi. È questo che chiamo **variazione**[5] **del problema**.* (Polya, 1945)

E ancora:

La variazione del problema è essenziale. Questo, da un certo punto di vista, avviene come mobilitazione e riorganizzazione di conoscenze formalmente apprese. Occorre richiamare dalla mente certi elementi che si integrano poi nel procedimento risolutivo. Ogni contributo che ha qualche probabilità di mostrare un nuovo aspetto del problema è auspicabile; può riorientare l'interesse e l'attività e stimolare la riflessione.

Già, ma come agisce la mente nella creazione di un'idea? Ce lo ha detto bene Vygotskij (1978) nel passaggio seguente:

Il segno funge da strumento dell'attività psichica, in modo analogo all'utensile nel lavoro. Ma questa analogia, come ogni altra, non implica l'identità di questi concetti simili[6].

Secondo Vygotskij, nelle attività umane, gli utensili di lavoro e i segni hanno peculiarità simili, ma si applicano ad azioni diverse. Gli utensili – intesi come strumenti concreti, tecnici – e i segni – intesi come strumenti psicologici – *sono simili per il fatto che entrambi permettono agli individui di agire e interagire con il loro ambiente, non in forma diretta ma in forma mediata. Eppure sono differenti per il modo in cui essi orientano il comportamento umano. Da una parte, l'utensile è orientato verso l'oggetto dell'attività (per esempio, il controllo della natura). In tal caso l'utensile serve per orientare esternamente il comportamento umano. Dall'altra parte, il segno è un elemento cru-*

4. George Pólya (1887-1985), matematico ungherese. Citazione tratta dal più conosciuto dei suoi tre libri dedicati alla caratterizzazione dei metodi generali che si usano per risolvere i problemi in matematica, scritto poco prima del suo trasferimento negli USA (Pólya, 1945).
5. Termine originale: *variation*.
6. Tratto da D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I. e Iori M., 2013.

ciale per l'attuazione di un processo psichico che orienta internamente il comportamento umano.

Eccoci giunti a parlare del tema centrale di questo scritto: il ruolo della semiotica in matematica, più precisamente nel *problem solving*.

Così si esprimono D'Amore, Fandiño Pinilla e Iori (2013, pag. 111):
La gestione di algoritmi di qualsiasi tipo e la loro organizzazione in fatti logicamente concatenati in una catena finita, in modo meccanico, da eseguire passo a passo, necessita evidentemente di una significativa gestione semiotica; tutto quel che è algoritmico è rappresentato e dunque la semiotica è un apprendimento fondamentale e trasversale.

Raymond Duval distingue due componenti fondamentali dell'apprendimento semiotico[7]:
1. saper scegliere i tratti distintivi che di un tal oggetto matematico cognitivamente costruito o in via di costruzione si vogliono rappresentare; scegliere il o i registri semiotici che si reputano adatti a tale rappresentazione; dare una rappresentazione semiotica in quel registro; o dare varie rappresentazioni semiotiche in uno o più dei registri scelti;
*2. una volta ottenuta ciascuna rappresentazione semiotica, saperla trasformare in un'altra dello stesso registro (**trattamento**) o di un altro (**conversione**) in modo opportuno, senza perdere di vista il significato dell'oggetto di partenza.*

Come vedremo negli esempi che seguono, la variazione di un problema (secondo Polya) comporta quasi sempre una trasformazione semiotica. Queste attività si svolgono normalmente durante le lezioni di matematica, in ogni ordine scolastico, il più delle volte però in modo inconscio. Troppo spesso è l'insegnante stesso che opera le conversioni (per esempio tra i registri numerico e geometrico), e ciò, se diventa abitudine didattica, non è positivo. Perché è l'allievo stesso che piano piano deve acquisire la capacità, l'abito mentale, di operare simili trasformazioni, di cambiare coscientemente registro, di compiere opportuni trattamenti. È necessario che gli insegnanti lavorino con convinzione in questa direzione: ne trae grande beneficio l'apprendimento e migliora decisamente l'immagine che gli allievi hanno della matematica.

Qualcuno potrebbe pensare che l'apprendimento semiotico concerna forzatamente una matematica di un certo livello. Nulla di più falso: già i problemini che si assegnano nella scuola elementare, per essere risolti, implicano trasformazioni semiotiche affatto scontate.

Ma gli allievi delle elementari e delle medie saranno in grado di usare coscientemente e opportunamente le trasformazioni semiotiche? Certamente sì, anzi, se ben educati e messi nella situazione di poterlo fare, sono in grado di compiere conversioni e trattamenti che spesso lasciano l'insegnante senza parole. Le innumerevoli sperimentazioni fatte finora, delle quali si possono trovare nella letteratura le relazioni, lo

7. Ibidem.

dimostrano ampiamente. Si vedano anche i capitoli 2 e 3 in D'Amore, Fandiño Pinilla e Iori (2013) ai quali si aggiungono quelli che riporto nel paragrafo 3 di questo scritto.

All'inizio di questo paragrafo, ho parlato di «vero» problema. Anche se questo termine è sulla bocca degli insegnanti, ritengo opportuno chiarirne ancora una volta il particolare significato che gli si vuol dare. Mi rifaccio al testo di Fandiño Pinilla (2008, pagg. 66-71) che propone la distinzione, oramai «classica», tra *esercizio* e *problema*.

*Gli **esercizi** sono caratterizzati dal fatto che la loro risoluzione richiede solo l'uso di regole già apprese e, semmai, in via di consolidamento; e quindi rientrano nelle categorie: rafforzamento o verifica;*
*i **problemi** coinvolgono o l'uso contemporaneo di più regole (alcune anche in via di esplicitazione), o la successione di azioni la cui scelta è atto strategico, creativo, dell'allievo stesso.*

Una **situazione** (problematica) è tale se fa nascere uno o più problemi o esercizi a seconda del livello scolastico, del modo in cui viene presentata ecc.

Nel testo citato, Fandiño Pinilla si sofferma sull'importanza del contributo di Vygotskij relativo alla caratterizzazione del *problema*. Come si sa, lo psicologo russo suddivide l'apprendimento in tre zone di sviluppo, ordinate secondo la relazione di inclusione: la zona *effettiva*, la zona *prossimale* e la zona *potenziale*. La sua importante intuizione consiste nell'aver creato la zona cuscinetto, detta di sviluppo prossimale, situata tra quella effettiva – ciò che l'allievo sa fare da solo – e quella potenziale – ciò che l'allievo non sa ancora fare, ma che, opportunamente guidato, potrebbe realizzare. La parte più importante dell'apprendimento si gioca appunto in questa zona. È qui che si situano i problemi che contribuiscono allo sviluppo delle capacità strategiche. L'insegnante gioca un ruolo fondamentale e delicato: deve osservare attentamente ogni allievo, cogliere i momenti di sbandamento o di impasse e intervenire con cautela, quel tanto che basta per farlo ripartire, in modo che gradatamente il suo apprendimento si avvicini alla zona potenziale. Quando questa viene raggiunta, il nuovo apprendimento si inserisce nella zona di sviluppo effettivo, arricchendola.

2. Un esempio classico

Il calcolo della somma dei primi n numeri naturali non nulli[8] costituisce un bell'esempio (uno dei tanti, s'intende) per introdurre gli allievi nel meraviglioso mondo della risoluzione di «veri problemi».

Su questo problema esiste un noto aneddoto che ha come protagonista Gauss[9], «principe della matematica»[10]. Si racconta che, come allievo della scuola ele-

8. È pur vero che l'aggiunta dello zero non cambierebbe nulla al risultato, ma lo zero rende, per così dire, innaturale l'aspetto ordinale, per cui, se si parte da zero, l'n-esimo termine è (n–1). Questo fatto costituisce una (inutile) difficoltà, che può quindi essere aggirata iniziando da 1.
9. Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), grande matematico tedesco di Braunschweig.
10. Sono due i nominati «principi della matematica»; l'altro è il nostro Leonhard Euler (1707-1783).

mentare, il piccolo Gauss metteva in seria difficoltà il maestro, perché, quando c'era il compito di matematica, finiva molto prima degli altri e poi disturbava regolarmente. Una bella mattina però, dopo che, come sempre, il ragazzino consegnò il compito eseguito perfettamente, si vide assegnare dal maestro un dovere supplementare: calcolare la somma di tutti i numeri naturali da 1 a 100. L'insegnante era sicuro che, così, per un bel po' di tempo, in classe sarebbe regnata la quiete. Purtroppo per lui fu solo un'illusione, perché, dopo pochissimo, Gauss gli presentò il risultato corretto (5050). «Come avrà fatto?», si sarà chiesto l'esterrefatto insegnante.

Eccoci introdotti in questo primo problema. Sembrerebbe (ma non è sicuro) che Gauss abbia proceduto così (per comodità uso la nostra simbologia):

$$\begin{array}{rcccccccccc} S_n = & 1 & + & 2 & + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & + & 99 & + & 100 \\ S_n = & 100 & + & 99 & + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2 \cdot S_n = & 101 & + & 101 & + & \ldots\ldots\ldots & + & 101 & + & 101 \end{array}$$

$$2 \cdot S_n = 100 \cdot \quad = 10100$$

$$S_n = 10100 \ : \ 2 = 5050$$

3. La variazione di un problema

L'idea vincente che ebbe lo scolaro Gauss consiste nell'operare una *variazione* del problema, sempre secondo Pólya (1945). Essa consiste nel modificare o cambiare il problema in modo da crearne un nuovo (o una serie di problemi) la cui soluzione può aiutare a risolvere il problema originale.

Lo scolaro Gauss, invece di lavorare sulla sola somma S_{100}, ha considerato due somme S_{100}, scritte l'una con addendi crescenti e l'altra con addendi decrescenti. Il problema è diventato più facile da risolvere, perché la somma $S_{100}+S_{100}$ ha potuto calcolarla semplicemente osservando che, associando a due a due gli addendi in verticale, ottiene una nuova somma di 100 addendi tutti uguali a 101, che traduce nella moltiplicazione (101·100).

La variazione ha permesso di cambiare il problema in uno più facile. Occorre infine *interpretare* il risultato ottenuto. Non è quello che voleva l'insegnante (ottiene $2 \cdot S_{100}=10100$), ma la soluzione del problema primitivo la raggiunge semplicemente dividendo per 2 il risultato 10100. La somma S_{100} di tutti i numeri naturali da 1 a 100 è quindi 5050 (=10100/2).

Quando è giunto il momento di iniziare l'allievo al calcolo letterale, si può proporre la generalizzazione di questa situazione. Ciò implica un cambiamento, delicato ma importante (una conversione) di registro semiotico: dal numerico al letterale. Al posto di 100 si mette, per esempio, n e di conseguenza 101 va sostituito con (n+1). Si giunge direttamente alla nota formula:

$$S_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

E se si volesse calcolare la somma di un segmento non iniziale di numeri interi? Per esempio da 11 a 20, o da 33 a 58? Si può ricondurre il problema a quello basilare, appena risolto. Per riuscirci, occorre però di nuovo eseguire una variazione, per esempio operando un trattamento nel registro numerico:

$11 + 12 + 13 + \ldots + 19 + 20 = (10+1) + (10+2) + (10+3) + \ldots + (10+9) + (10+10) =$
$= 10 \cdot 10 + (1 + 2 + 3 + \ldots + 9 + 10) = 100 + 10 \cdot (10 + 1) : 2 = 155$

Volendo generalizzare, si può giungere alla somma di k numeri naturali consecutivi, a partire da un qualunque numero a:

$a + (a+1) + (a+2) + \ldots + [a+(k-1)] = k \cdot a + [1 + 2 + \ldots + (k-1)] = k \cdot a + [(k-1)\cdot k] / 2$

La difficoltà maggiore consiste nel saper esprimere S_{k-1} da S_k, ciò che implica un adattamento della situazione precedente, o, in altri termini, un trattamento che permette di passare dalla situazione «k» alla nuova «k–1».

Si potrebbe aggirare l'ostacolo, operando un diverso trattamento nel registro algebrico. La progressione aritmetica generalizzata potrebbe essere scritta ponendo a=b+1:

$b+1 , b+2 , \ldots , b+k$

di conseguenza la somma diventerebbe

$(b+1) + (b+2) + \ldots + (b+k) = k\,b + (1+2+\ldots+k) = k\,b + k\,(k+1)/2 = k\,(b + (k+1)/2)$

formula inusuale, che può essere ottenuta senza dover effettuare il passaggio dalla situazione «k» alla «k–1», ma che esige un diversa rappresentazione algebrica della somma. Le due formule ottenute devono per forza essere equivalenti, il che è facilmente verificabile sostituendo a nella prima con b+1, oppure b nella seconda con a–1. Banalità? Sicuramente sì, per chi ha dimestichezza con il calcolo letterale, ma diversa è la situazione dell'allievo principiante che, messo di fronte ai due iter risolutivi, può innanzi tutto vedere come una generalizzazione può essere effettuata in vari modi e inoltre è fortemente stimolato a controllare che le due formule ottenute «sono la stessa cosa», il che gli offre la possibilità di operare su un'espressione letterale seguendo un obiettivo preciso. Diciamo che le due generalizzazioni sono state ottenute con trattamenti diversi operati nel registro algebrico.

Operando per analogia, sempre nel registro algebrico, l'allievo stesso potrà anche raggiungere la somma dei primi n termini di una progressione aritmetica:

$$P_n = a + (a+d) + (a+2\,d) + \ldots + (a + (n-1)\,d) = n\,a + d\,(1 + 2 + \ldots + (n-1)) =$$
$$= n\,a + d\,\frac{(n-1)n}{2} = n\,\frac{2\,a + d\,(n-1)}{2} = n\,\frac{a + (a + d\,(n-1))}{2} = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

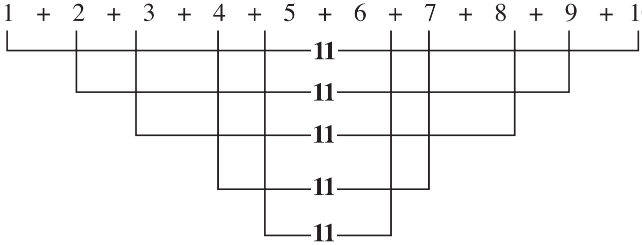
con a_1 primo termine (a_1=a) e a_n ultimo termine [= a + d (n–1)]; il che lo porta all'enunciazione della nota «regola» – primo termine più ultimo termine, diviso 2, per il numero di termini – che è del tutto inutile (anzi, pericoloso!) memorizzare. Certo, non è facile, non è immediato, ma la conversione dal registro numerico a quello algebrico e i diversi trattamenti algebrici sono il fondamento del calcolo generalizzato ed è proprio lavorando su casi concreti come questo che l'allievo può raggiungere i due obiettivi che ogni insegnante di scuola media si prefigge in questo ambito: sviluppare le abilità fondamentali del calcolo letterale e compiere un passo decisivo verso la generalizzazione di un problema numerico.

È, questa, l'unica variazione che può essere compiuta relativamente al calcolo della somma di tutti i numeri naturali da 1 a n? Certamente no, e per fortuna! La ricchezza della matematica sta anche nella sua peculiarità di offrire continuamente situazioni che possono essere elaborate in molti modi e a diversi livelli di difficoltà, ciò che stimola in modo importante le capacità creative del soggetto che apprende e permette a ognuno di percorrere la propria strada secondo le proprie forze.

3.1. Variazione mediante trattamento nel registro numerico

Per comodità, partiamo dal calcolo di S_{10} = 1 + 2 + … + 10. La peculiarità di questo iter risolutivo consiste nel considerare «liberamente» la somma S_{10}, nel senso del calcolo ragionato, cioè non addizionando ordinatamente i termini dal primo al decimo, ma associandoli a coppie, in modo opportuno. Per esempio, prendendo a due a due i termini estremi.

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 =



Si ottiene così: $S_{10} = 11 \cdot 5 = 55$

Concedendo al rigore una piccola e ragionevole porzione, con allievi alle prime armi con la generalizzazione del calcolo, si può, per esempio, continuare generalizzando. L'unica variabile in questo problema è il numero di addendi. Occorre quindi fare bene attenzione come questo numero interviene nel calcolo. La somma S_{10} può essere così espressa:

$$S_{10} = (10+1) \cdot (10:2) = [(10+1) \cdot 10] : 2$$

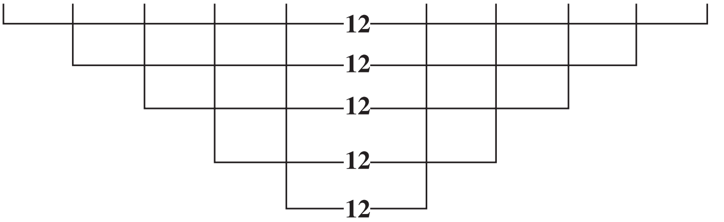
ciò che ci conduce a scrivere

$$S_n = (n+1) \cdot \frac{n}{2} = \frac{(n+1) \cdot n}{2}$$

e ottenere una nota formula, ma, ciò che più conta, a raggiungere una prima generalizzazione del problema, relativamente al caso che n sia un numero pari.

A questo punto ci si deve occupare del caso n dispari. Ovviamente seguirà l'iter risolutivo appena descritto. Per esempio, per calcolare S_{11} si può procedere così:

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \mathbf{6} + 7 + 8 + 9 + 10 + 11$



$S_{11} = 12 \cdot 5 + 6 = 66$ (l'aggiunta del 6, termine mediano, è ciò che fa la differenza con il caso precedente)

Di nuovo l'espressione ottenuta può essere riscritta facendo bene attenzione al ruolo giocato dal numero dei termini (11) e dal termine mediano, a sua volta dipendente dal numero dei termini ($6 = (11 + 1) : 2$).

$$S_{11} = (11+1) \cdot [(11-1) : 2] + (11 + 1) : 2$$

Tutto ciò viene tradotto sostituendo 11 con la variabile n; si ottiene:

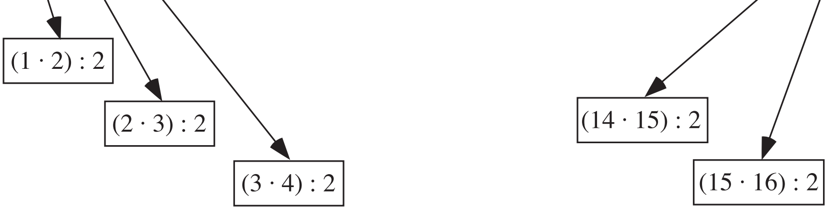
$$S_n = \frac{(n+1)\cdot(n-1)}{2} + \frac{n+1}{2} = \frac{(n+1)\cdot(n-1+1)}{2} = \frac{(n+1)\cdot n}{2}$$

si ritrova (non senza soddisfazione) la nota formula di prima, che quindi può essere considerata valida per qualunque numero n dei suoi termini.

3.2. Variazione basata su un trattamento dinamico nel registro numerico

Esempio: calcolo della somma $S_{15} = 1 + 2 + 3 + \ldots + 15$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
S_n	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120



$S_{15} = (15 \cdot 16) : 2 = 120$

Siamo di fronte a un trattamento più profondo del precedente. La caratteristica di questa operazione consiste nel porre l'attenzione sulle somme parziali successive:

$S_1 = 1 = (1 \cdot 2) / 2$, $S_2 = 3 = (2 \cdot 3) / 2$, $S_3 = 6 = (3 \cdot 4) / 2$ e così di seguito.

Il procedimento è di tipo dinamico e si inserisce nelle situazioni concernenti le successioni numeriche. Ecco un altro campo importante quanto affascinante del *problem solving*. Si tratta più precisamente di intuire una[11] possibile legge generale che permetta di trovare l'n-esimo termine di una successione numerica, conoscendo un segmento iniziale. A differenza delle variazioni precedenti (statiche), in questa l'aspetto dinamico è centrale. La struttura algebrica della successione delle somme parziali viene portata alla luce esaminando e confrontando i suoi termini successivi, quindi percorrendola, muovendosi dinamicamente. Nella fase di intuizione non si procede necessariamente in modo ordinato, come presentato sopra. È poco probabile che qualcuno inizi dalla prima somma parziale. Normalmente si procede per tentativi, fin che si nota l'elemento invariante, cioè la struttura algebrica k(k+1)/2. Può anche succedere che l'attenzione si concentri solo sulla struttura k(k+1) come doppio di ciò che si vorrebbe e che poi induce direttamente la divisione per 2.

La generalizzazione è ottenibile direttamente:

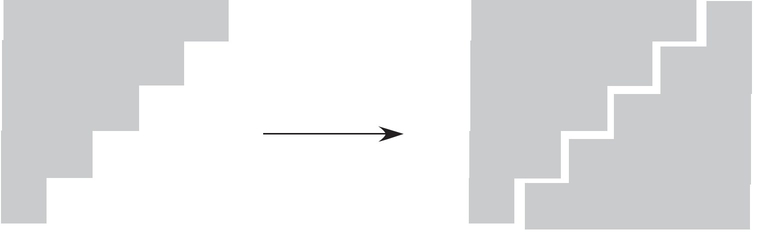
$S_{15} = (15 \cdot (15+1)) / 2$

$S_n = (n \cdot (n+1)) / 2$

3.3. Variazione basata su una conversione nel registro geometrico-figurale

A volte può risultare vincente operare una conversione in un registro diverso da quello nel quale abitualmente si opera: nel nostro caso, dal numerico al geometrico-figurale.

Esempio: calcolo della somma $S_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$



La somma può essere rappresentata da un poligono rettangolo formato di (5+4+3+2+1) quadratini isometrici, come mostrato dalla figura di sinistra. L'idea è di costruire due di questi poligoni e accostarli come si vede nella figura di destra. Si ottiene così un rettangolo composto di (5·6) quadratini.

Si ottiene così: $S_5 = (5 \cdot 6) : 2 = 15$

Generalizzazione: $S_n = (n \cdot (n+1)) : 2$

11. Uso l'aggettivo indeterminativo perché, in senso strettamente matematico, questi problemi non sono determinati.

Un vantaggio di questa variazione consiste nel fatto che, di solito, la figura (il rettangolo n·(n+1)), e di conseguenza la formula, si fissano più facilmente nella mente dell'allievo. Ma ve n'è un altro, più nascosto e non meno importante: quello di attirare l'attenzione sul fatto che, a volte, basta operare una conversione in un diverso registro semiotico per ottenere una situazione più chiaramente decifrabile, che suggerisce un iter risolutivo praticabile, non visibile nella situazione di partenza.

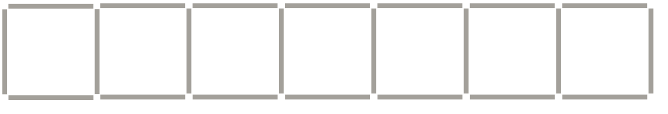
4. Un'esperienza in alcune classi di quinta primaria[12]

Tutto quanto riferito fin qui potrebbe apparire difficilmente realizzabile in classe. Di solito gli insegnanti si mostrano scettici quando si dice loro di mettere ogni tanto gli allievi di fronte a veri problemi. Chi però accetta di provare mettendoci un po' di coraggio, ma soprattutto sapendo che, a volte, cambiando la prassi, rompendo il contratto didattico, si ottengono risultati insperati, come messo bene in evidenza da D'Amore (2014). È proprio ciò che si è costatato anche nelle attività svolte in alcune classi di quinta, verbanesi e luganesi, che presento nel seguito.

4.1. «Quanti bastoncini?»

La figura rappresenta una composizione di 7 quadrati costruiti con alcuni bastoncini: quanti sono i bastoncini?

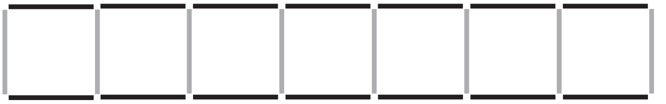
Quanti bastoncini occorrono per una composizione di 100 quadrati?



La prima domanda, banale, serve per chiarire il senso del problema. Non è necessario che la situazione sia presentata in modo testuale. Si potrebbe, per esempio, ricostruire la struttura su un tavolo, usando bastoncini di fortuna (matite, cannucce, …). Il problema diventa interessante con la seconda domanda. Non avrebbe senso infatti tentare di costruire l'intera figura. Per poter rispondere alla domanda, occorre scoprire la struttura matematica soggiacente. «Ci riusciranno i miei alunni?» è la domanda che si pone all'inizio l'insegnante. La risposta che abbiamo avuto sta negli elaborati raccolti, che riproduciamo fedelmente.

12. Ci si riferisce alla Giornata di animazione matematica effettuata nella primavera del 2013 negli Istituti di scuola primaria Peron e Tomassetti, Verbania, con la partecipazione delle insegnanti Marina Giacobbe, Lorella Maurizi e Tiziana Minazzi e a un susseguente pomeriggio matematico svoltosi nella scuola della Gerra, Lugano, nella classe della maestra Lorella Marcis. Organizzazione e animatori: Società Matematica della Svizzera Italiana (SMASI), Lugano.

Soluzione 1 (registro figurale; trattamento statico)

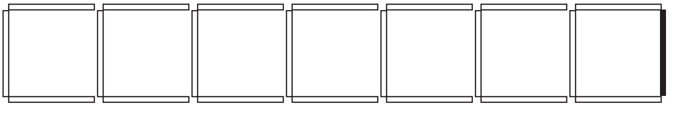


Per 7 quadrati:
Abbiamo contato 7+7+8 = 22 bastoncini
Per 100 quadrati:
Abbiamo sommato i cento bastoncini sopra e i cento bastoncini sotto e poi per chiudere la fila abbiamo aggiunto nei bastoncini verticali +1. In tutto 301 bastoncini.

Questi allievi hanno contato seguendo un criterio schematico di tipo statico: il numero di bastoncini delle due file orizzontali addizionato con quello dei bastoncini verticali.

Generalizzazione: n + n + (n+1) = 3 n + 1

Soluzione 2 (registro figurale; trattamento dinamico)

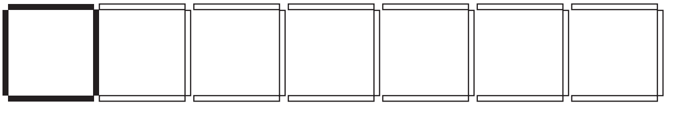


Per 100 quadrati:
Ho contato i primi tri (sic!) *e li ho moltiplicati per cento e poi ho aggiunto uno per completare l'ultimo quadrato, fanno 301 bastoncini.*

Questo iter risolutivo è basato sulla ripetizione del modulo base costituito di tre bastoncini assemblati a forma di «C» (indicati col termine «tri»). Il trattamento adottato è decisamente di tipo dinamico. Alla fine la catena viene chiusa con un bastoncino supplementare posto in verticale.

La generalizzazione è diretta: 3 · n + 1 = 3 n + 1

Soluzione 3 (registro figurale; trattamento dinamico)

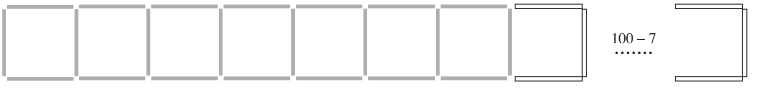


Abbiamo calcolato 4+3+3+3+3+3+3 che viene 22
Abbiamo fatto [(100–1)x3]+4 = [99 x 3]+4 = 297+4 = 301 perché il 4 è il primo quadrato, l'uno è la differenza tra i quadrati e il primo e il tre è perché ogni quadrato ha tre lati (sic!).*»*
E PER MILLE? Devo fare 3 x 999 + 4 = 2997 + 4 = 3001»

Il trattamento operato da questi allievi è molto simile a quello precedente. Vi sono però differenze che è bene sottolineare. Intanto qui si parte da un elemento base, il primo quadrato, separato dal resto della struttura, che è una successione composta dalla ripetizione di un modulo, una «C» simmetrica rispetto a quella usata nella soluzione precedente, (n–1) volte. L'espressione «ogni quadrato ha tre lati» è ovviamente da intendersi come «ogni quadrato è completato dall'aggiunta di tre lati».

Generalizzazione: $4 + 3 \cdot (n-1) = 4 + 3\,n - 3 = 3\,n + 1$

Soluzione 4 (registro figurale; trattamento dinamico, sfruttamento della risposta alla prima domanda)



Abbiamo contato 22 bastoncini.

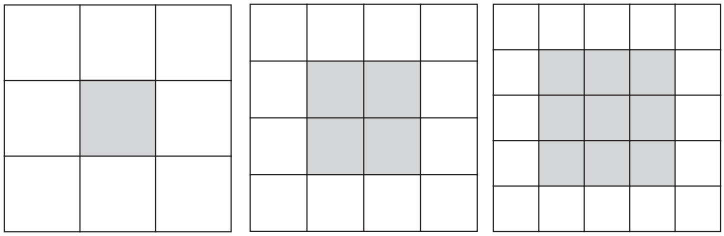
Abbiamo contato quanti bastoncini ci sono in un quadrato, poi abbiamo trovato la regola di aggiungere sempre 3 bastoncini. Poi abbiamo fatto (100 – 7) x 3 e poi abbiamo aggiunto 22 che sono i bastoncini per fare 7 quadratini.

$(100 - 7) \cdot 3 + 22 = 93 \cdot 33 + 22 = 279+22 = 301$

La peculiarità di questa soluzione, interessante quanto imprevista, sta nel fatto che per risolvere il caso n=100, questi alunni hanno sfruttato il risultato già ottenuto per n=7 e di lì hanno immaginato di completare dinamicamente la struttura con la ripetizione di (100–7) moduli uguali a quelli usati nella soluzione precedente. Un modo di agire tutt'altro che banale e contemplato anche dai teorici del *problem solving*, consistente, quando è possibile, nello sfruttare un risultato già trovato in precedenza. Anche se all'adulto ciò sembra ovvio, non sempre il risolutore principiante pensa a questa possibilità. Una volta acquisita sufficiente esperienza nella risoluzione di problemi, anche questo modo di procedere diventa una sorta di automatismo, al quale far capo quando serve.

Generalizzazione: $22 + (n - 7) \cdot 3 = 22 + 3 \cdot n - 21 = 3\,n + 1$

4.2. «Quante piastrelle bianche?»

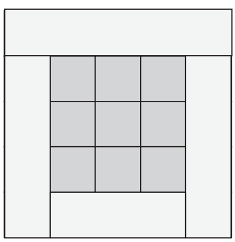


3x3 4x4 5x5

La figura rappresenta tre pavimentazioni di uno stesso quadrato, mediante moduli quadrati isometrici di due colori (grigio e bianco), aventi la stessa struttura che si può desumere dall'osservazione. Si chiede di completare la seguente tabella:

tipo di pavimento	3x3	4x4	5x5	6x6	10x10
numero di □ piastrelle bianche	8				

Soluzione 1 (registro figurale; trattamento statico)



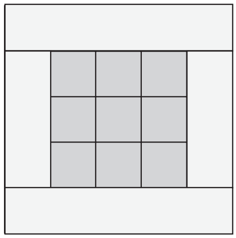
Per trovare un quadrato 5x5 abbiamo fatto: 5 + 4 · 2 + 3 = 16
(…)

Questi allievi si sono concentrati sulla cornice 5x5, forse più comoda per ragionarci, che hanno scomposto in tre tipi di elementi, rispettivamente da 5, 4 e 3 quadratini. La figura è stata interpretata in modo statico, con una certa sistematicità. In seguito hanno proceduto analogamente per completare l'intera tabella, il che implica il riconoscimento dei termini variabili n, (n–1) e (n–2). Anche se non hanno esplicitamente usato lettere, si intravede già una prima conversione nel registro algebrico, un primo passo verso la generalizzazione del problema.

Generalizzazione: per $n=10$: $10 + (10-1) \cdot 2 + (10-2)$

per n: $n + (n-1) \cdot 2 + (n-2) = n + 2n - 2 + n - 2 = 4n - 4 = 4(n-1)$

Soluzione 2 (registro figurale; trattamento statico)

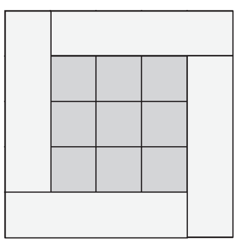


Quadrato 5x5
Abbiamo contato 2 lati poi per le due colonne sono 2 in meno rispetto al primo
5 + 5 +3 · 2 = 16

Questa soluzione è molto simile alla precedente. Anche qui il completamento della tabella è avvenuto per analogia. Si può apprezzare per il fatto che la suddivisione appare più sintetica. Si sono considerate solo due parti (ciascuna presa due volte); per esempio, per n=5, le due parti sono composte di 5 e di 3 (=5–2) quadratini. Siamo di nuovo di fronte a una prima conversione verso il registro algebrico.

Generalizzazione: $2 \cdot n + 2 \cdot (n-2) = 2\,n + 2\,n - 4 = 4\,n - 4 = 4\,(n-1)$

Soluzione 3 (registro figurale; trattamento parzialmente dinamico)

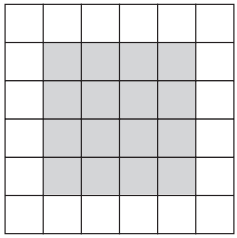


5x5: da ogni lato del pavimento togliamo 1 quadretto moltiplicando per 4, perché 4x5 fa 4 in più
Cioè (per n=5): 4 · (5–1) = 16

Nonostante la spiegazione un tantino contorta e l'iniziale intervento statico concernente nel togliere un quadretto in corrispondenza dei quattro vertici, si intravede un trattamento dinamico nel quale un unico modulo si ripete 4 volte, secondo rotazioni di 90˚.

La generalizzazione è diretta: per n=10: $(10-1) \cdot 4 = 36$
per n: $(n-1) \cdot 4$

Soluzione 4 (conversione nel registro geometrico)



Quadrato 6x6

Abbiamo sottratto 4x4 che era l'area della parte grigia a 6x6 che era l'area del quadrato bianco

$6 \cdot 6 - 4 \cdot 4 = 36 - 16 = 20$

Questa è la soluzione che quasi tutti gli adulti propongono di getto. Per contro, pochissimi allievi di quinta l'hanno adottata. Probabilmente è ancora una questione che riguarda i registri semiotici. Il problema assegnato concerne i numeri naturali e quindi l'allievo non pensa subito al calcolo di aree, nel quale di solito opera con numeri decimali. La sottrazione delle aree ci appare come fatto dinamico; gli allievi invitati a spiegare meglio il metodo adottato hanno usato i verbi «taglio», «tolgo», «tiro via», azioni, appunto, dinamiche. Questo modo di agire implica una conversione dal registro figurale a quello geometrico (additività delle aree).

Generalizzazione: $n^2 - (n-2)^2 = n^2 - n^2 + 4n - 4 = 4n - 4 = 4(n-1)$

Soluzione 5 (conversione nel registro numerico; trattamento dinamico)

3x3	4x4	5x5	6x6	7x7	8x8	9x9	10x10	50x50	100x100
8	**12**	**16**	20	24	28	32	36	196	396

+4 +4 +4 +4 +4 +4 +4

Ho visto 8 poi 12 poi 16 allora sono sempre andato avanti di 4. Aggiungi sempre 4 ma se non è il numero ma quello dopo ancora aggiungi 8.

Ecco una soluzione che non ti aspetti! Questo allievo si è concentrato sulla successione numerica della quale conosce il segmento iniziale, facilmente ottenibile dalle figure proposte: 8, 12, 16. Il registro figurale è presto abbandonato e l'allievo, intuito che per trovare un termine della successione basta aggiungere 4 al termine precedente, opera una conversione nel registro numerico e completa la tabella velocemente. È notevole l'espressione *«Aggiungi sempre 4 ma se non è il numero ma quello dopo ancora aggiungi 8»*, perché, anche se detto in modo poco elegante, testimonia la presenza dell'aspetto dinamico nel suo pensiero.

Generalizzazione: $8 + 4 \cdot (n-3) = 8 + 4 \cdot n - 12 = 4n - 4$

Soluzione 6 (registro numerico, trattamento errato)

x 10

tipo di pavimento	3x3	4x4	5x5	6x6	10x10	100x100
numero di □ piastrelle bianche	8	12	16	20	36	360

x 10

PER UNA COMPOSIZIONE DI 100x100?
Calcolo: 36 x 10 = 360 quadretti»

Questo allievo, dopo aver partecipato alla soluzione del problema nella forma assegnata, ha voluto strafare, nell'intento, forse, di farsi notare. Pensa di ottenere il numero di piastrelle bianche di un pavimento 100x100, moltiplicando per 10 il corrispondente numero di un pavimento 10x10. Opera un trattamento… azzardato, coraggioso, sì, ma sfortunato perché in questa situazione non vi è alcun rapporto di proporzionalità. L'allievo avrebbe anche potuto capirlo osservando per esempio che, dalla tabella, 20 ≠ 8x2 o che 36 ≠ 16x2.

La presenza di un errore importante come questo, può essere una buona occasione per apprendere cose nuove. Qui si tratta di prendere coscienza del fatto che non tutte le situazioni sono rette da funzioni lineari; in altre parole che non sempre, raddoppiando, triplicando ecc. la variabile, raddoppia, triplica ecc. anche il risultato.

In generale: $k \cdot (4\,n - 4) \neq 4 \cdot (k\,n) - 4$

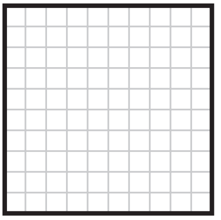
4.3. «Quante sbarrette?»

Le figure che seguono mostrano il segmento iniziale di una serie di strutture ottenute saldando insieme sbarrette metalliche unitarie.

Quante sbarrette occorrono per una struttura di lato 10? E per una di lato 100?

lato 1 lato 2 lato 3 lato 4

Soluzione 1 (registro figurale; trattamento statico)



lato 10

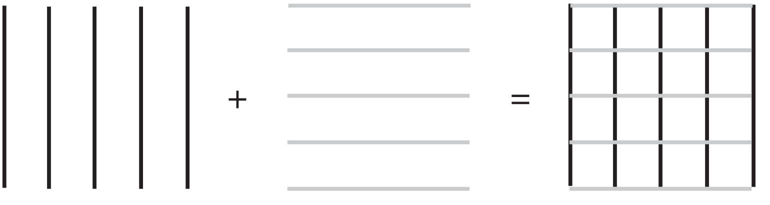
Per lato 10: abbiamo fatto 9 · 10 = 90, poi 90 · 2 = 180, poi abbiamo aggiunto il contorno 10 · 4 = 40 ; 180 + 40 = 220

Per lato 100: 99 · 100 = 9900 ; 9900 · 2 =19800 ; 19800 + 400 = 20'200

Questi allievi hanno suddiviso il lavoro in due tappe: l'una concernente l'interno della struttura e l'altra l'esterno (contorno). Per contare le sbarrette interne, hanno considerato separatamente le file orizzontali e quelle verticali. Il trattamento nel registro figurale è di tipo statico.

Generalizzazione: interno: $(n-1) \cdot n \cdot 2$
esterno: $4\,n$
totale: $(n-1) \cdot 2\,n + 4\,n = 2\,n^2 - 2\,n + 4\,n = 2\,n^2 + 2\,n = 2\,n\,(n+1)$

Soluzione 2 (registro figurale; trattamento statico)



Per n=4: ci sono 5 linee verticali di 4 sbarrette ciascuna e altrettante orizzontali pure di 4 sbarrette ciascuna. In tutto 20 + 20 = 40

Per n=10: 11 · 10 + 11 · 10 = 110 + 110 = 220

Per n=100: 101 · 100 + 101 · 100 = 10'100 + 10'100 = 20'200

Soluzione interessante, perché la suddivisione verticale-orizzontale è stata fatta sull'intera struttura. Si è così sfruttato pienamente il suo carattere bidimensionale. Così il calcolo si semplifica. Anche questo trattamento è di tipo statico.

Generalizzazione: $n \cdot (n+1) \cdot 2 = 2\,n\,(n+1)$

Soluzione 3 (registro numerico; trattamento dinamico)

lato 1	lato 2	lato 3	lato 4	lato 5	lato 6	lato 7	lato 8	lato 9	lato 10
4	12	24	40	60	84	112	144	180	220
4·**1**	4·**3**	4·**6**	4·**10**	4·**15**	4·**21**	4·**28**	4·**36**	4·**45**	4·**55**

Abbiamo fatto $4 \cdot 3 = 12$, $4 \cdot 6 = 24$, $4 \cdot 10 = 40$ e abbiamo trovato i numeri triangolari 3, 6, 10.

Abbiamo continuato $4 \cdot 15 = 60$, $4 \cdot 21 = 84$, $4 \cdot 28 = 112$, $4 \cdot 36 = 144$, $4 \cdot 45 = 180$, $4 \cdot 55 = 220$.

Per n=100, abbiamo fatto $(100 \cdot 101) : 2 = 5050$ e poi $5050 \cdot 4 = 20'200$

Di nuovo assistiamo a una decisa variazione del problema mediante conversione dal registro figurale a quello numerico, nel quale gli allievi hanno posto l'attenzione unicamente sulla successione. Sono stati facilitati dal fatto che avevano già lavorato sui numeri triangolari, quindi li hanno riconosciuti. Può darsi che abbiano ricevuto il suggerimento di scomporre i numeri delle sbarrette del segmento iniziale in un prodotto di due fattori, uno dei quali sia 4. Questi allievi hanno visto in prima persona come a volte può essere utile sfruttare risultati già incontrati. L'abilità nel *problem solving* si acquista anche arricchendo il proprio bagaglio di esperienze con la memorizzazione di risultati utili.

Generalizzazione: $4 \cdot \frac{(n+1) \cdot n}{2} = 2\,n\,(n+1)$

5. Qualche osservazione conclusiva

Tutti i problemi considerati in questo scritto sono stati presentati mediante una figura, concernono unicamente numeri naturali e sono retti da successioni numeriche. Per ogni problema affrontato, gli allievi hanno ricevuto una scheda, sulla quale erano invitati a scrivere la soluzione trovata, accompagnata da una spiegazione del metodo seguito. Ognuno era libero di lavorare in piccoli gruppi o singolarmente. Qualche insegnante ha accompagnato la figura con spiegazioni date oralmente, per fare in modo che le diverse consegne fossero state ben comprese. Qualcuno ha introdotto la problematica mediante manipolazione di materiali di fortuna. È stato detto che avremmo gradito di più le spiegazioni, del risultato. Questo modo di fare è importante nelle attività di *problem solving* e serve non solo al ricercatore, ma anche all'insegnante per regolare al meglio il lavoro in classe e, non da ultimo, all'allievo stesso che, dovendo riferire sul proprio operato, è costretto a ripensare ciò che ha fatto e a tradurlo in un testo comprensibile. Non da ultimo, sembrerebbe che le esperienze così fissate su carta si collochino meglio nella mente del soggetto.

La limitazione ai numeri naturali è dovuta più che altro al fatto che si tratta di problemi discreti. Nelle attività che abbiamo presentato, la presenza, anche se non sempre esplicita, della successione numerica è determinata dal fatto che in ogni problema vi è un solo elemento variabile f(n) con $n \in \mathbf{N}$. Essa induce anche iter risolutivi di tipo dinamico, cioè non metodi basati su un'unica figura e poi estesi per analogia alle altre, ma procedimenti che consistono nel porre l'attenzione sui passaggi da uno stadio k a quello successivo (k + 1). L'abitudine a intraprendere simili modi di ragionare costituisce un potenziale che arricchisce di molto l'abilità di risolvere problemi. Ovviamente si proporranno poi altre situazioni nelle quali si potranno far intervenire i numeri razionali, anche in forma frazionaria o percentuale, come anche situazioni non numeriche, problemi impossibili o indeterminati.

La risoluzione di problemi non deve assolutamente costituire un evento eccezionale nella pratica di classe, ma dev'essere accompagnata all'attività di messa a punto dei vari concetti e di affinamento dei procedimenti (non solo di calcolo) previsti dai programmi. Deve dare senso all'intero apprendimento della matematica sia come modo di risolvere problemi detti concreti (pratici) oppure astratti (perché no? A molti allievi piacciono!), sia come possibilità di sviluppare le capacità creative (trovare nuovi metodi risolutivi, inventare nuovi problemi).

La varietà dei procedimenti risolutivi proposti da questi allievi è notevole, secondo molti insegnanti assolutamente inattesa. La facilità con la quale operano conversioni da un registro semiotico a un altro e trattamenti all'interno di uno stesso registro, adottando metodi risolutivi sia statici che dinamici, dimostra senza mezzi termini che le attività di *problem solving* possono (anzi, devono) essere proposte il più presto possibile già a partire dalla scuola elementare e continuate negli ordini scolastici successivi. In generale, se ne fanno troppo poco, o non del tutto. Gli insegnanti devono convincersi che lo sviluppo delle capacità di affrontare problemi –veri problemi- è un obiettivo centrale nell'apprendimento della matematica. A queste attività si deve quindi dedicare uno spazio adeguato. Altrimenti si continuerà a formare giovani, capaci di ripetere, anche brillantemente, iter risolutivi lungamente esercitati, ma che, di fronte a situazioni mai incontrate, non sanno come agire.

La complessità del mondo attuale ha indotto un appesantimento esagerato dei programmi scolastici, anche di quelli di matematica, causando un eccessivo carico di nozioni e procedimenti algoritmici che gli allievi sono costretti, per così dire, a stipare nella loro mente. Parecchie cose che si insegnano oggi in lunghe lezioni ripetitive, potrebbero essere tagliate dai programmi per dare maggior spazio alla risoluzione di problemi, il che si traduce poi in un apprendimento sempre più consapevole e ragionato della matematica e di ogni altra disciplina. Ed è proprio questo che la società odierna, il mondo del lavoro, la vita sociale e politica chiedono alla scuola.

Bibliografia

D’Amore B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Prefazioni di Gérard Vergnaud e di Silvia Sbaragli. Modena: Digital Index. [Versione cartacea e versione e-book].

D’Amore B., Fandiño Pinilla M.I. e Iori M. (2013). *Primi elementi di semiotica*. Prefazioni di Raymond Duval e Luis Radford. Bologna: Pitagora editrice.

Fandiño Pinilla M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell’apprendimento della matematica. Valutare e intervenire in modo mirato e specifico*. Prefazione di Giorgio Bolondi. Trento: Erickson.

Kanizsa G. (1973). Il «problem solving» nella psicologia della Gestalt. In: Mosconi G., D’Urso V. (a cura di). *La soluzione dei problemi*. Firenze: Giunti-Barbera, p. 35.

Pólya G. (1945). *How to Solve It*. Princeton: University Press. Versione italiana (1967). *Come risolvere i problemi di matematica: logica ed euristica nel metodo matematico*. Milano: Feltrinelli.

Vygotskij L. (1978). *Mind in Society. The development of Higher Psychological Processes*. Cambridge (Massachussets): Harward University Press.

Wertheimer M. (1945). *Productive Thinking*. New York: Harper Collins. Versione italiana (1997). *Il pensiero produttivo*. Trento: Giunti.

3. Triangoli unitari Saggio su un percorso costruttivo dal basso all'alto in geometria

Stefan Meyer[1]

The essay deals with 'unit triangles' as elements of real world and existential problems of children: how to double the areas of carpets, tents, dollhouses, tables etc.? Working out real solutions of their own questions children as geometers discuss and combine geometric concepts and structures of areas. Later they connect triangles with areas as proofs of Pythagoras' theorem or Plato's geometric episode (Menon), they illustrate fractions or algebraic terms through realistic and continuous logic abstraction.

1. Introduzione

Molti percorsi didattici e materiali per l'educazione in geometria comprendono l'uso di elementi ludici. Ci si rifa a Fröbel (in Schradi, 2014), alla Montessori, dal mosaico di dadi al piccolo testo Formenbuch (Müller e Wittmann, 2006). In questo saggio si sostiene che il triangolo unitario rappresenta un elemento semplice e multiuso per una *reale* costruzione dell'apprendimento. Dovrebbe essere preso in considerazione per la formazione geometrica dalla scuola dell'infanzia in su. In questo modo i bambini avrebbero la possibilità di eseguire liberamente costruzioni formative, di conoscere proprietà di parallelogrammi e triangoli molto prima dell'apprendimento di concetti astratti e di formule. Di più, i bambini apprenderebbero in modo operativo e non superficiale. Analogamente al quadrato unitario di lato 1, si introduce il triangolo unitario, rettangolo isoscele con i cateti di lunghezza 1. (Schwarz & Köckler, 2007)

2. Presentazione del problema

Da un attento esame dei Mosaik-test nel test d'intelligenza «HAWIK-IV» (Petermann e Daseking, 2009) si può dedurre che l'esame del pensiero logico-percettivo in un lasso di tempo determinato è equivalente a un test della comprensione in un'attività di composizione di triangoli unitari di diversi colori. Questo test di base valuta concetti psicologici come l'analisi e la sintesi di stimolazioni visive, la formazione di concetti non verbali, la percezione visiva e l'organizzazione, la coordinazione visuale-motoria, come anche il riconoscimento figurale su stimolazioni visive. Questi concetti psicologici sono stati assunti in programmi di promozione (Schassmann & Moser Opitz, 2007).

1. Docente della *Interkantonale Hochschule für Heilpädagogik* di Zurigo. HfH di Zurigo 2010 / Università di Bologna 2011, stefan.meyer@hfh.ch

In una ricerca rappresentativa fatta su 272 giovani della 7ª classe nella Svizzera tedesca (Meyer & Wyder, 2014), gli allievi dovevano riconoscere in un item a scelta multipla i due raddoppiamenti corretti del quadrato. Il 14% di essi ha trovato le due soluzioni scartando i sette distrattori proposti, cioè quella con la scomposizione (figura 4) e quella pitagorica con disegnato il quadrato dell'ipotenusa. Il 7% ha riconosciuto solo la scomposizione, il 6% solo la pitagorica. Questo risultato è molto significativo delle limitate competenze degli allievi. Mostra pure che il concetto di triangolo unitario è poco presente.

Dalla pratica esclusiva di materiali da gioco nasce un paradosso, secondo il quale i bambini credono che la geometria consista in giochi di manipolazione con figure e in colorazione di schede di lavoro. Più tardi gli allievi si occupano di attività e di tematiche geometriche isolate. Tale pratica didattica impedisce di sperimentare il senso genuino della geometria come misurazione del terreno. La geometria dell'ambiente familiare dei bambini rimane inesplorata e il linguaggio geometrico si impoverisce (Wittgenstein, 2013). Queste tendenze psicologiche e didattiche si situano agli antipodi delle attuali concezioni dell'educazione geometrica (Revuz, 1971). Wittmann (1999) ha formulato idee fondamentali concernenti l'educazione geometrica, che dovrebbero valere in tutte le classi, dalla scuola dell'infanzia in su. Sono queste: conoscere e costruire forme geometriche; operare con forme; usare coordinate per descrivere la posizione di punti; usare misure; costruire e analizzare modelli; esaminare forme della realtà con l'aiuto di concetti e oggetti geometrici; relazionarsi nello spazio; creare problemi e geometrizzare relazioni fra numeri. In sintesi si tratta di scoprire la geometria facendo geometria. Le forme e la grammatica delle strutture geometriche vengono costruite operativamente (Piaget, Inhelder & Szeminska, 1975) e ricercate in uno scambio dialettico (Wittgestein, 2013).

3. Progettazioni

L'educazione geometrica nella scuola dovrebbe dare più importanza e significato al *Projektmethode* (Frey, 2010). In questo capitolo sono presentati alcuni esempi che possono essere praticati in più ordini scolastici.

3.1. Il tappeto di classe (pavimentazioni del piano)

Parallelamente ai materiali usuali, nella scuola dell'infanzia, può essere introdotta la *progettazione di un tappeto*. La classe dispone di 128 pezzi di tappeto, triangoli unitari, rettangoli e isosceli, isometrici (cateti di circa 30-50 cm). Se si accostano due di essi lungo le ipotenuse, si ottiene un quadrato, ecc.

Modello di tappeto

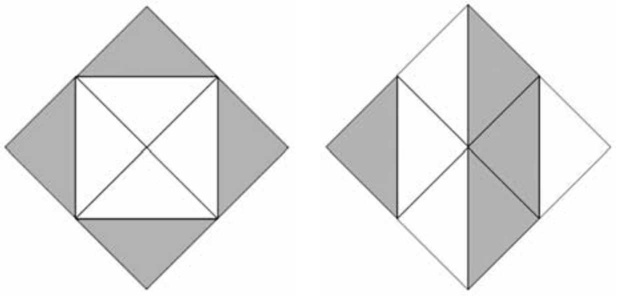


Figura 1. Due tappeti modello. In occasione di eventi particolari della vita di classe (per esempio, messa in comune o lettura di una storia) il tappeto può essere usato e completato con l'aggiunta di altri elementi. Alla fine deve risultare un tappeto rettangolare (eventualmente quadrato) sul quale possono trovare posto tutti i bambini. L'attività può essere ripartita su tutto l'anno, in modo che, alla fine, ognuno possa ideare il proprio tappeto. (Ovviamente il progetto può essere eseguito per esempio anche con piastrelle di ceramica, che si possono sistemare in una cassa della sabbia. Inoltre il progetto è una sorgente per l'integrazione di bambini con handicap o con grande talento).

3.2. Il gioco linguistico sul tappeto di classe

Ogni costruzione è un'originale e personale creazione. La classe l'ammira con la stessa attenzione che avrebbe un passante per una pittura murale. A poco a poco i bambini scoprono modelli, strutture e progetti con i quali possono imparare consapevolmente. Questi sono chiariti e sviluppati nell'ambito di discussioni in comune. Vi giocano un ruolo trainante il considerare, il porre, lo spiegare o anche il dimostrare. Forse qua o là si conta anche, per esempio se un bambino vuol sapere quanti triangoli si sono usati. Forse qualche bambino scopre che si può realizzare un piano del tappeto. Allo scopo si disegna un reticolo quadrato e si collocano i vari pezzi. Forse, col tempo, la classe realizza una raccolta di modelli. Sicuramente la classe scopre anche la reversibilità, prendendo come modello la relazione esistente tra il raddoppio e il dimezzamento. Il doppio ruolo dell'insegnante è quello di coordinatrice e di levatrice[2] come nel Menone di Platone (1994). In particolare, cura che i bambini applichino le proprie idee su forme e numeri e sviluppino chiari concetti. È di aiuto anche per documentare (fotografare, riprendere sequenze filmate). Nel corso delle attività avvicina a poco a poco i bambini a concetti come quadrato, diagonale, rombo, parallelo, perpendicolare, rettangolare, la metà, il quarto, l'ottavo ecc. La classe impara attraverso esperienze significative.

2. Si fa riferimento alla maieutica o arte dialettica, che letteralmente significa l'arte della levatrice, cioè il metodo socratico così come è esposto da Platone nel Teeteto.

Quadrato composto di 4 triangoli unitari (costruito con Geogebra)

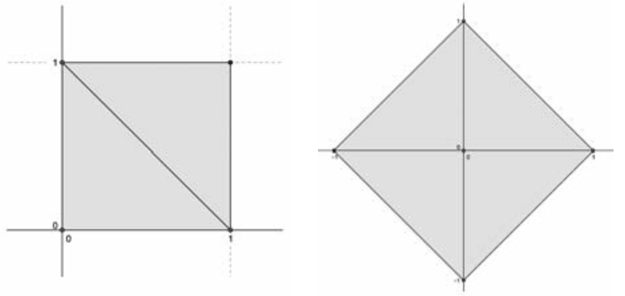


Figura 2. Col quadrato formato da 4 triangoli unitari, i bambini possono scoprire il raddoppio. Inoltre sviluppano prime idee su area, frazioni e numeri irrazionali.

3.3. Progetto «Menone»

Ammettiamo che i bambini, durante una costruzione o in una discussione di classe, abbiano scoperto che si può raddoppiare un quadrato formato da 2 o da 4 triangoli unitari. È il momento di proporre il progetto «Menone». Per informazione, l'insegnante potrebbe leggere la storia di Socrate, Menone e lo schiavo, che 2400 anni fa hanno trovato risposta a questa domanda. Potrebbe presentare Socrate come «il più potente educatore della storia dell'Occidente» (Jaeger, 1970, in Reble, 1975, p. 28). Potrebbe pure raccontare come Jean Piaget e le sue collaboratrici e collaboratori abbiano sviluppato i metodi di Socrate, la *maieutica* (arte della levatrice), che si può sperimentare in classe (Piaget, Inhelder & Szeminska, 1975).

Nel progetto Menone si potrebbe prendere come esempio il problema della duplicazione della superficie del quadrato per studiare il relativo problema riferito a una tenda di campeggio. Con allievi di scuola secondaria inferiore si potrebbe leggere il dialogo di Menone (Platone, 1994).

Struttura di una tenda in paletti di legno

Figura 3. Struttura di una tenda a base quadrata.

Come disporre i paletti affinché la superficie di base raddoppi?

Semplice dimostrazione per scomposizione

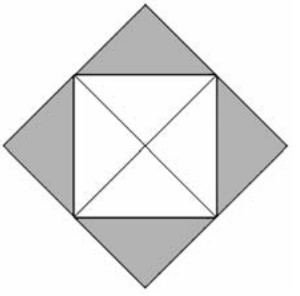


Figura 4. Illustrazione di uno schema sviluppato da bambini che avevano già compiuto esperienze con i triangoli unitari nella scuola dell'infanzia o nelle prime classi della scuola elementare. I triangoli bianchi vengono ribaltati o aggiunti. In questo modo la superficie cresce da 4 a 8 triangoli unitari (da 2 a 4 triangoli, nella figura 2).

Questo procedimento può essere usato per altre dimostrazioni per scomposizione (Fraedrich, 1994). I triangoli unitari sono concetti significativi diventati pure elementi di competenza geometrica (Kadunz e Strässer, 2008; Affolter, Amstad, Doebeli e Wieland, 2014).

Sono sufficienti queste esperienze con i soli triangoli unitari, per riuscire a raddoppiare un prato o un cortile di ricreazione quadrati? No, perché i bambini non hanno ancora sviluppato tecniche di costruzione. Per riuscirci, si consiglia di usare una corda o meglio rotoli di corda (figura 5).

Rotoli di corda

Figura 5. Questi rotoli di corda si prestano per diverse attività che possono svolgere i bambini.

A questo punto si dovrebbe mostrare ai bambini come si può costruire l'asse di un segmento con l'impiego di una corda e di bastoni. Dopo di che, lungo l'asse di un lato del quadrato di partenza (vedere figura 4) si riporta all'esterno la distanza dal centro del quadrato, a partire dal punto d'intersezione dell'asse con il lato. Si ottiene un vertice del quadrato circoscritto, che si può facilmente completare, ottenendo così il raddoppio della base della tenda. I bambini osservano anche che, così facendo, l'altezza della tenda diminuisce. Discutono le conseguenze sul volume della tenda e sono curiosi di studiare il concetto di volume.

Raddoppio della superficie di un quadrato secondo Pitagora (dimostrazione per scomposizione)

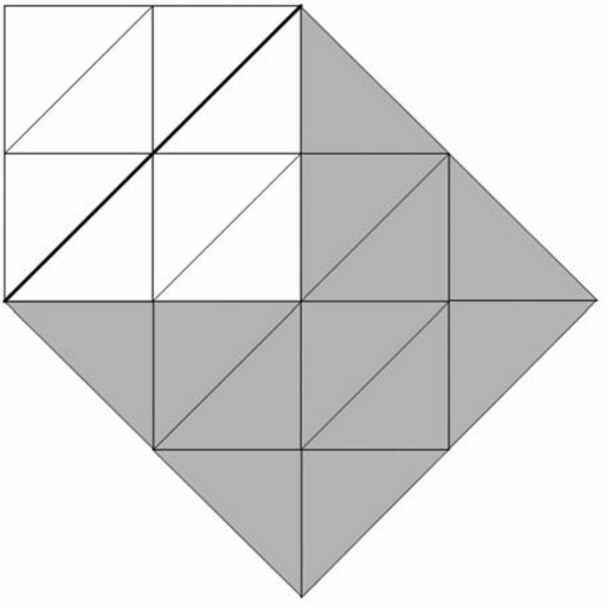


Figura 6. La figura dimostra che il quadrato di lato la diagonale del quadrato di partenza (bianco) ha area doppia (16 triangoli unitari rispetto agli 8 di partenza). Se si ripetesse la costruzione partendo dal secondo quadrato, si otterrebbe un quadrato dall'area 4 volte quella di partenza, cioè $32 = 8 \cdot 4$ triangoli unitari. Ripetendo ancora la costruzione, si otterrebbe un quadrato di 64 triangoli unitari, la cui area è 8 volte quella di partenza. Col metodo della scomposizione, i triangoli unitari illustrano il problema classico della progressione geometrica del successivo raddoppio delle aree di quadrati, proprio come fu scritto per la prima volta nel dialogo platonico *Menone*.

Il raddoppio può essere dimostrato in altro modo usando il teorema di Pitagora. Anche in questa dimostrazione, la scomposizione in triangoli unitari gioca un ruolo trainante. Il quadrato bianco di partenza è il quadrato dei cateti. La somma dei quadrati dei cateti è equivalente al quadrato dell'ipotenusa, come si può dedurre osservando i triangoli unitari. Il vantaggio della tecnica di scomposizione consiste nel fatto che i bambini possono capire la dimostrazione semplicemente contando i triangoli unitari, molto prima di quando dovranno imparare formule con moltiplicazioni relative al calcolo di aree.

3.4. Bilancio intermedio

Gli esempi presentati, il tappeto di classe e il progetto Menone, hanno mostrato che il triangolo unitario è un mezzo efficace per apprendere i procedimenti e la logica della tecnica di scomposizione. Semplici dimostrazioni per scomposizione possono essere realizzate anche nel linguaggio naturale della scuola dell'infanzia, se si limitano a considerare *rapporti* fra triangoli unitari.

Conservazione e dimostrazione per scomposizione

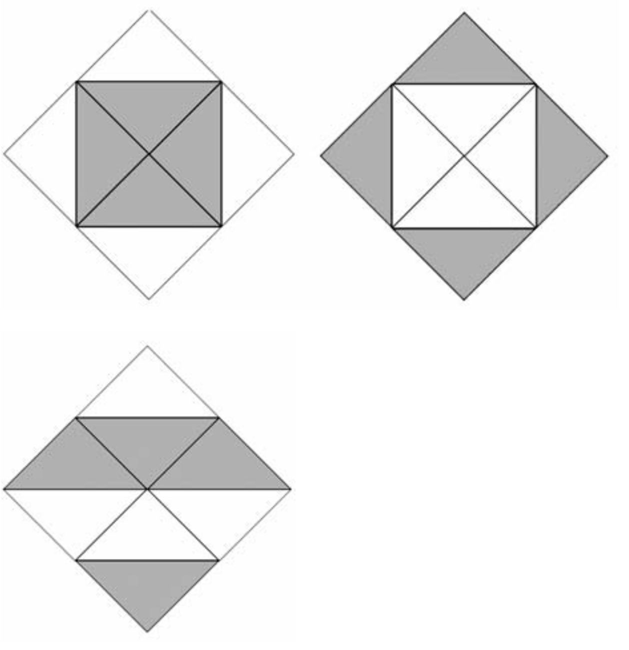


Figura 7. La figura illustra un problema inteso a confrontare i rapporti tra i triangoli bianchi e quelli rossi (grigi) in tre quadrati.

È probabile che i bambini più piccoli, all'inizio, esprimano il loro giudizio basandosi unicamente sulla loro percezione, senza scoprire l'*identità* dei rapporti (Piaget, Inhelder & Szeminska, 1975). Se però potessero parallelamente comporre tappeti con triangoli unitari, questi diventerebbero la base di esperienze e di conversazioni in uno schema che influirebbe fortemente sul pensiero e sul dialogo, come valido sostegno. Ovviamente la tecnica di composizione-scomposizione si fa sempre più elegante e gli allievi ne diventano sempre più competenti. Ciò vale anche per i concetti e per le operazioni dell'aritmetica. Il campo numerico si estende quando, per esempio, con 4 triangoli unitari bianchi e 4 rossi si costruisce un quadrato la cui area è doppia di quello di partenza ecc. È facilmente concepibile che il quadrato formato di 4 triangoli unitari bianchi e 4 rossi è una sintesi, i bianchi e i rossi sono tesi e antitesi, la superficie totale la sintesi.

I triangoli unitari o i quadrati unitari o i cubi unitari ecc. sono paragonabili ai morfemi della linguistica. Se concepiamo la geometria come linguaggio delle forme e dello spazio, questi morfemi sarebbero *le più piccole unità del linguaggio geometrico*, che danno senso e alle quali geometricamente si possono applicare funzioni. Un'educazione aperta in geometria dovrebbe quindi identificarsi nel senso di comunicazione e costruzione sulla base di morfemi. Il linguaggio delle forme dei triangoli unitari verrebbe collegato con quello dell'aritmetica (Piaget & Garcia, 1987). I bambini verrebbero stimolati a pensare e ad agire all'interno e fra i sistemi della geometria e dell'aritmetica e più tardi dell'algebra. Come geometri, gli scolari apprendono, con l'ausilio di corde e rotoli di corde, tecniche elementari di costruzione con le quali poter variare oggetti concreti come una tenda da campeggio o un tappeto o un appezzamento di terreno.

4. Sviluppi futuri

Presento di seguito alcuni sviluppi previsti riguardanti la formazione in geometria.

4.1. Calcolo di aree e formule

Sulle idee di fondo dell'educazione geometrica (Wittmann, 1999) ho potuto mostrare in questo scritto che i bambini già da piccoli possono acquisire concetti riguardanti il raddoppio e il dimezzamento di aree. Con la composizione di triangoli e quadrati unitari si può facilmente ottenere e capire la struttura di rettangoli e quadrati. I bimbi si appropriano della struttura di queste figure molto prima di quando saranno chiamati ad apprendere e ad applicare formule (Battista et al, 1998; Battista 1999).

4.2. Disegnare e costruire con Geogebra: modello della tenda

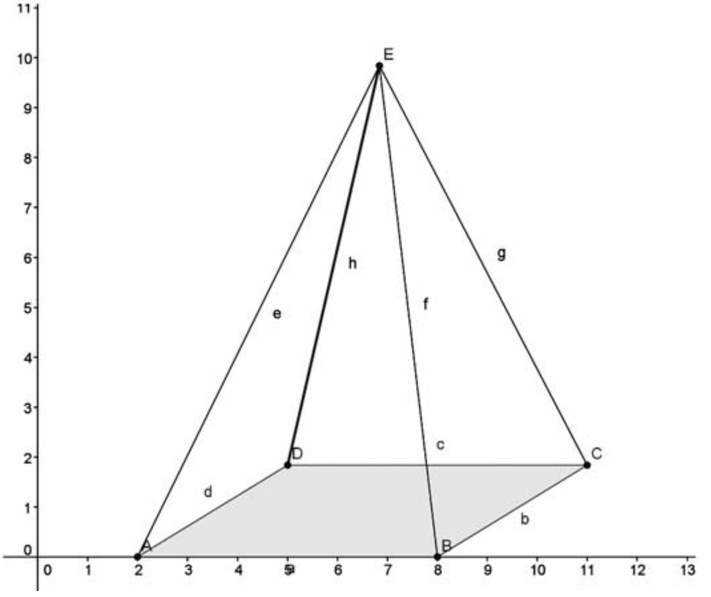


Figura 8. Modello di tenda. L'uso del software gratuito Geogebra permette di applicare competenze digitali all'educazione geometrica, all'algebra e perfino alla geometria sferica. Questo strumento dovrebbe essere messo a disposizione degli allievi nei progetti educativi.

4.3. Triangoli unitari e calcolo frazionario

Scaptura, Suh e Mahaffey (2007) hanno avanzato un'interessante proposta che può essere sperimentata in un contesto aritmetico di rapporti fra aree di quadrati unitari relative a composizioni decorative fatte con mattonelle.

Rapporti relativi a quadrati unitari
(Scaptura, Suh e Mahaffey, 2007, p. 26)

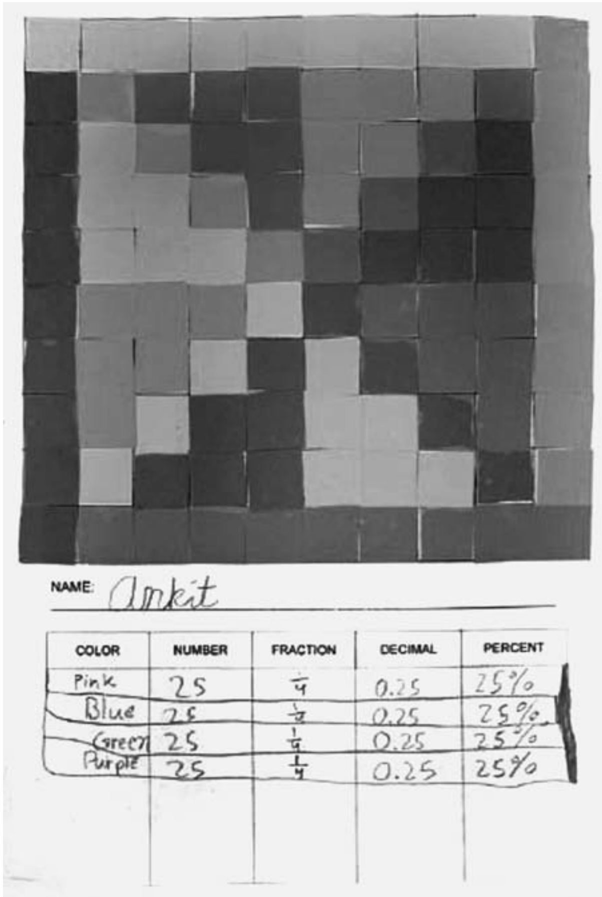


Figura 9. Esempio di attività compiuta autonomamente da allievi della scuola elementare.

Nella tabella gli allievi riportano il numero di quadrati di un dato colore e scrivono il rapporto rispetto al totale. Nella proposta di questi autori è interessante il legame tra estetica e aritmetica. Può nascere scetticismo, se si pensa che questa attività sia proposta su scheda. Per contro diventa significativa se si usano tappeti progettati e realizzati dagli allievi stessi o loro fotografie. Le due attività estetica e matematica risultano chiaramente differenziate.

La combinazione di triangoli e quadrati unitari rende meglio comprensibile agli allievi la semplificazione e l'amplificazione di frazioni.

5. Conclusione

I triangoli unitari permettono di svolgere un apprendimento euristico dalla scuola dell'infanzia in su. L'integrazione di oggetti concreti come il tappeto di classe, la tenda o altro permettono dall'inizio di sviluppare una formazione concettuale e competenze costruttive in geometria. Una tale formazione geometrica risponde all'appello di Freudenthal (1977, p. 76):

Ich möchte, dass der Schüler nicht angewandte Mathematik lernt, sondern lernt, wie man Mathematik anwendet[3].

L'asse di un segmento è usato per raddoppiare la base di una tenda o la superficie di un tappeto mediante una costruzione. La geometria nell'ambiente familiare del bambino è strettamente connessa alle corde con le quali costruisce e misura. L'*enracinement*[4] avviene su fenomeni significativi (Weil[5], 1950), sulla geometria del fare e sulla conversazione empatica. Inoltre, in questo modo, la geometria si inserisce molto meglio nella rete cognitiva. Freudenthal (1983, p. 450) afferma che gli allievi possono collegare operativamente e in modo autonomo geometria e algebra:

The most convincing argument is to show him [all'allievo] the operationality of algebra in geometry[6].

3. Vorrei che lo scolaro non imparasse matematica applicata, ma come si applica la matematica.
4. Weil (1950, p. 36) «L'enracinement est peut-être le besoin le plus important et le plus méconnu de l'âme humaine. C'est un des plus difficiles à définir. Un être humain a une racine par sa participation réelle, active et naturelle à l'existence d'une collectivité qui conserve vivants certains trésors du passé et certains pressentiments d'avenir. Participation naturelle, c'est-à-dire amenée automatiquement par le lieu, la naissance, la profession, l'entourage. Chaque être humain a besoin d'avoir de multiples racines. Il a besoin de recevoir la presque totalité de sa vie morale, intellectuelle, spirituelle, par l'intermédiaire des milieux dont il fait naturellement partie». Weil dà un esempio: il sole presentato in classe come «pappa fatta» non ha nulla a che vedere con le esperienze degli scolari con il sole reale (p. 38).
5. Simone Adolphine Weil (1909-1943) filosofa, mistica e scrittrice francese.
6. L'argomento più convincente è mostrargli [all'allievo] l'operazionalità dell'algebra nella geometria.

Bibliografia

Affolter W., Amstad H., Doebeli M. e Wieland G. (2014). *Schweizer Zahlenbuch 6*. Begleitband (2. Aufl.). Zug: Klett und Balmer.

Battista M. T., Clements D.H., Arnoff J., Battista K. e Van Auken Borrow C. (1998). Students' Spatial Structuring of 2D Arrays of Squares. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(5), 503-532.

Battista M. T. (1999). The Importance of Spatial Structuring in Geometric Reasoning. *Teaching Children Mathematics*, 6(3), 170-177.

Courant, R., Robbins, H. (1996). *What Is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods* (2nd.). New York: Oxford University Press.

Fraedrich A. M. (1994). *Die Satzgruppe des Pythagoras*. Mannheim: BI Wissenschaftsverlag.

Freudenthal H. (1977). *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (2., durchgesehene Auflage Bd. 1 und 2). Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Freudenthal H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Frey K. (2010). *Die Projektmethode. Der Weg zum bildenden Tun* (11., neu ausgestattete Aufl.). Weinheim: Beltz Verlag.

Kadunz, G. e Sträßer R. (2008). *Didaktik der Geometrie in der Sekundarstufe I*. Hildesheim: Verlag Franzbecker.

Meyer S. (2006). *Das flexible Interview*. Verfügbar unter: http://www.interview.hfh.ch/index.htm [15.03.2014]

Meyer S. e Wyder A. (2014). *Mathematik-Kurz-Test (MKT)* 1-9. [Lernplattform Ilias, geschlossen]. Verfügbar unter: http://www.ilias.hfh.ch/goto.php?target=fold_40021&client_id=ilias-hfh.ch [30.08.2014]

Müller G. N. e Wittmann E.C. (2006). *Das kleine Formenbuch* Teil 1. Seelze: Kallmeyer.

Petermann F. e Daseking M. (Hrsg.). (2009). *Fallbuch HAWIK-IV*. Göttingen: Hogrefe.

Piaget J., Inhelder B. e Szeminska A. (1975). *Die natürliche Geometrie des Kindes* (Bd. 7). Stuttgart: Klett Verlag.

Piaget J. e Garcia R. (1987). *Vers une logique des significations*. Genève: Murimonde.

Platon. (1994). *Menon. Griechisch / Deutsch* (M. Kranz, Trans.). Reinbek b. Hamburg: Reclam.

Reble A. (1975). *Geschichte der Pädagogik* (12. Aufl.). Frankfurt a.M.: Klett-Cotta.

Revuz A. (1971). The position of geometry in mathematical education. *Educational Studies in Mathematics*, 4(1), 48-52. (Traduzione di Stefan Meyer)

Scaptura C., Suh J. e Mahaffey G. (2007). Masterpieces to Mathematics: Using Art to Teach Fraction, Decimal, and Percent Equivalents. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(1), 24-28.

Schmassmann M., Moser Opitz E. (2007). *Heilpädagogischer Kommentar zum Zahlenbuch 1* (vollständig überarbeitete Neuausgabe). Zug: Klett und Balmer.

Schradi M. (o.J.). *Fröbel*. Verfügbar unter: http://www.friedrich-froebel-online.de/ [20.07.2014]

Weil S. (1950). *L'enracinement. Prélude à une déclaration des devoirs envers l'être humain.* Paris: Editions Gallimard.

Wittgenstein L. (2013). *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* (9. Auflage). Frankfurt a.M.: Suhrkamp Verlag.

Wittmann, E. C. (1999). *Konstruktion eines Geometriecurriculums ausgehend von Grundideen der Elementargeometrie*. In H. Besuden, Henning, H (Hrsg.) *Mathematik lernen durch Handeln und Erfahrung*. Festschrift zum 75. Geburtstag von Heinrich Besuden. (S. 205-223). Oldenburg: Bültmann & Gerriets.

1. Agorando[1] 2
Una curiosa operazione geometrica

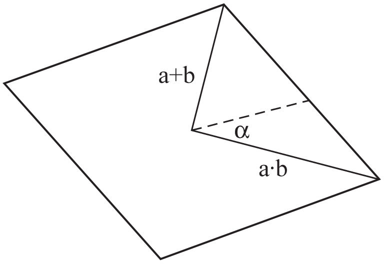
Paolo Hägler e Giorgio Mainini

Un pesce rombo.

Dati due numeri a, b (per cominciare interi, ma non è obbligatorio) possiamo costruire un'operazione nuova per la quale è utile usare la geometria per calcolarne il risultato.

Dapprima costruiamo il rombo con le semidiagonali che misurano a+b e a · b (come nel disegno qui sotto), poi definiamo l'operazione a ⟨α⟩ b (dove al posto di α possiamo mettere un numero qualunque tra 0 e 360).

Per trovare il risultato tracciamo un segmento che unisce il centro del rombo a un punto del suo contorno, e che formi con la semidiagonale di lunghezza a·b un angolo di α gradi, come nel disegno. Il risultato è la lunghezza del segmento, tratteggiato nel disegno che segue.



Per esempio,
puoi verificare che

se $\alpha = 15°$ $\quad 2 \langle 15 \rangle 5 \approx 7{,}5$
se $\alpha = 135°$ $\quad 3 \langle 135 \rangle 7 \approx 9{,}6$

Allora, più che di «un'operazione nuova», sarebbe meglio parlare di «tante operazioni nuove», una per ogni scelta di α. Nota che a ⟨0⟩ b = a · b, e che a ⟨90⟩ b = a + b, ma puoi osservare anche tante altre particolarità, se sostituisci i numeri 0 e 90 con altri. Ora tocca a te dire quali proprietà trovi che abbia la nuova operazione. In particolare, dovresti trovare se è possibile, e se sì a quali condizioni, che il rombo sia un quadrato.

Per il premio verranno considerate la correttezza, la completezza, l'originalità e la vastità delle osservazioni riportate nella risposta, che bisogna inviare per posta elettronica a agorando.bdm@gmail.com

1. Il verbo greco *agoràzein* è traducibile, più o meno, con *andare in piazza a curiosare*. Qui si troveranno spunti matematici presi qua e là sui quali curiosare.

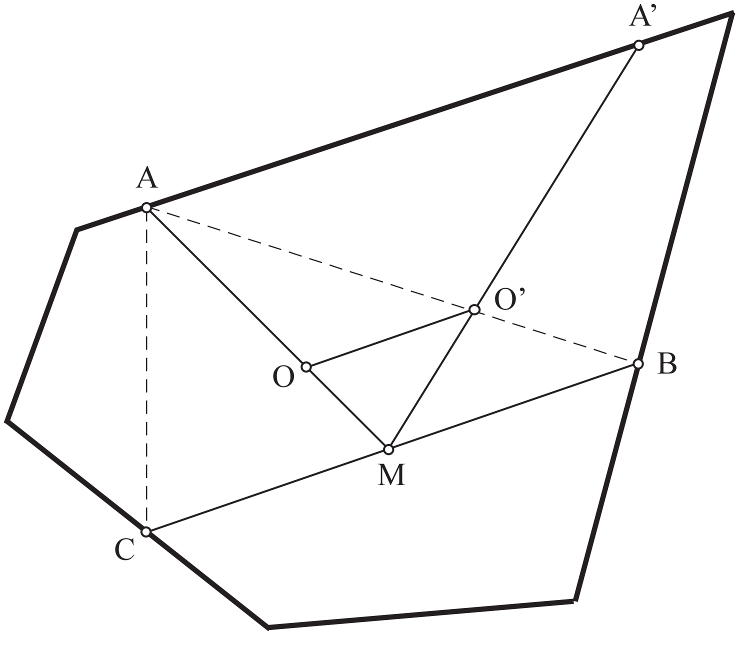
Soluzione Agorando 1

Tra le soluzioni pervenute abbiamo deciso di pubblicare la seguente, inviataci da un solutore che ha preferito restare anonimo, ma di cui la redazione conosce il nome e penserà a premiarlo.

Sia M il punto medio del segmento BC. Di conseguenza AM è la mediana passante per A del triangolo ABC.

Poiché O è il baricentro del triangolo, esso apparterrà sempre a questa mediana (così come apparterrà sempre anche alle altre due). Inoltre la lunghezza del segmento OM è un terzo della lunghezza della mediana AM.

Se ora prendiamo un punto A' che si trova sullo stesso lato di A del poligono e facciamo la stessa costruzione otteniamo M' = M e O'. Come conseguenza del teorema di Talete notiamo che il quadrilatero AA'O'O ottenuto è quindi un trapezio, i cui lati paralleli sono AA' e OO', e nel quale, per il rapporto di proporzionalità, abbiamo che la lunghezza del lato OO' è un terzo della lunghezza del lato AA'.



Di conseguenza, al variare di A su un lato del poligono, otteniamo un lato parallelo di lunghezza 1/3, e poiché il poligono è chiuso, al variare di A sul contorno del poligono, otteniamo un poligono simile con rapporto di similitudine uguale a 1/3.

Ciò vale per ogni poligono, concavo o convesso, ed anche per qualsiasi altra figura, chiusa oppure no.

V. Segnalazioni

1. Matematica: il grande spettacolo

Terza grande festa della matematica

NRD, operante presso il Dipartimento di Matematica
dell'Università di Bologna
Direzione di Silvia Sbaragli

Riccione (Italia), Oltremare
sabato 21 e domenica 22 marzo 2015

Mostre

Sabato 21 marzo
e domenica 22 marzo (dalle ore 9.30 alle ore 18.30)

Mostre: Arte e Matematica (Età: da 10 a 99 anni)

– L'arte di **Oscar Reutersvärd.**
– Opere di **Lucio Saffaro** e Visione del documentario ***Lucio Saffaro, le forme del pensiero***, realizzato da RAI 3, regia di Giosuè Boetto Cohen. Si ringraziano RAI 3 e Fondazione Lucio Saffaro per la gentile concessione.
– Opere di **Ferruccio Gard** e colloquio con l'Autore: *Geometria e arte cibernetica*.

Laboratori

– **Augeo Cooperativa** (Rubiera, Reggio Emilia):
Un, due, tre... gioca e sarai Re. Laboratorio creativo alla scoperta della matematica (Età: da 0 a 6 anni).
– **ForMATH**:
La mente in gioco. Giochi di strategia, una vera e propria palestra per la mente (fruizione libera e percorsi guidati della durata di 1 ora: 10.00; 11.30; 15.00; 16.30) (Età: da 6 a 99 anni).

– **Paolo Bascetta** e **Francesco Decio** (Bologna, Centro Diffusione Origami): *Forme e strutture della natura attraverso la geometria dell'origami* (Età: da 6 a 99 anni).
– **Leonardo Tortorelli** (Liceo Da Collo di Conegliano, Treviso): *Laboratorio di Geometriko. Gioco strategico per divertirsi con la geometria piana* e *Le Domandone di Zio Pippuzzo: una storia di matematica dal Salento Anni '30* (Età: da 8 a 99 anni).
– **ForMATH**: *Numeri di magia e magia dei numeri* (orari laboratori della durata di 1 ora: 9.30; 11.00; 14.00; 15.30; 17.00) (Età: da 8 a 99 anni).
– **Luca Crivelli** e **Silvia Fioravanti** (Canton Ticino, Svizzera): *Problemi grandi e piccoli* (Età: da 8 a 12 anni).
– **Silvia Niero e Alda Pangoni** (Istituto Comprensivo Mirano 2, Mirano, VE) e **Roberto Grossa** (Università IUAV di Venezia): *Il sole e le sue ombre. Scopriamo i percorsi solari, costruiamo meridiane e giochiamo con la luce* (Età: da 3 a 99 anni).
– **Dario Uri** (metagrobologista, Casalecchio di Reno): *Matemagica* (Età: da 14 a 99 anni).
– **Lorella Campolucci e Danila Maori** (Matematica in rete, Corinaldo): *Scienza e matematica in gioco* (Età: da 6 a 11 anni).
– **Nicola Magnani, Antonio Bianchi, Monia Biagi** (docenti, Enfap Emilia Romagna) e **allievi** che suonano la Matematica: *Doremat - La Musica della Matematica nella scuola secondaria di primo e secondo grado* (Età: da 10 a 99 anni).
– **SMASI (Società Matematica della Svizzera Italiana)**: *Situazioni probabilistiche intriganti. Scommettiamo? Prevediamo?* (Età: da 9 a 99 anni).

Gli Autori sono a disposizione del pubblico per spiegazioni, conduzione dei laboratori e guida alle mostre. Per ogni mostra è realizzato un foglio esplicativo redatto dagli stessi Autori, da distribuire al pubblico visitante.

Sabato 21 marzo
Dalle 09.30 alle 18.30: visita alle mostre

Conferenze e spettacoli

10.00-10.45 Imax — **Denise Lentini, Rachele Vagni** e **Silvia Santunione** (direttore e docenti, Enfap Emilia Romagna): *Doremat - La Musica della Matematica* (Età: da 10 a 99 anni).

10.45-11.30 Imax — **Martha Isabel Fandiño Pinilla** (docente, Università di Bologna): *Diversi modi di interpretare i legami tra arte e matematica* (Età: da 15 a 99 anni).

11.30-12.15 Imax — **Giorgio Bolondi** (docente, Università di Bologna): *Cinema e matematica* (Età: da 14 a 99 anni).

11.00-11.25 piano terra	Spettacolo di burattini per i più piccoli (Età: da 4 a 14 anni). **Ioana Butu** (burattinaia, Canton Ticino) con la collaborazione di **Silvia Sbaragli** (DFA-SUPSI, Locarno): *Figuriamoci! Figure geometriche in movimento*.
12.30-13.00	**Spettacolo dei rapaci**
13.00-14.00	Fruizione libera del parco e pranzo
14.00-15.00 Imax	Spettacolo di giocoleria (Età: da 10 a 99 anni). **Federico Benuzzi** (giocoliere, Bologna): *Fisica sognante. Riflessioni su matematica, fisica, giocoleria e didattica*.
15.15-16.00 Imax	**Massimo Polidoro** (Cicap, Milano): *Scienza e pseudoscienza: 10 regole per riconoscere una bufala* (Età: da 14 a 99 anni).
15.30-15.50 piano terra	**Burattini per i più piccoli** (Età: da 4 a 14 anni). **Ioana Butu** (burattinaia, Canton Ticino) con la collaborazione di **Silvia Sbaragli** (DFA-SUPSI, Locarno): *Figuriamoci! Figure geometriche in movimento*.
16.15-16.45	**Spettacolo dei delfini**
16.45-17.30 Imax	**Giovanni Nicosia** (docente, Bologna): *Fare i calcoli con il soroban* (Età: da 7 a 99 anni).
17.30-18.15 Imax	**Spettacolo: Big Bang Matematica** (Età: da 8 a 12 anni). **Federico Taddia** (giornalista, Bologna) e **Bruno D'Amore** (docente, Università Distrital Francisco José de Caldas di Bogotà): *Big Bang Matematica: 5 films di 6 minuti l'uno, a caccia di spettatori.*

Le stazioni di Oltremare saranno aperte e fruibili per i partecipanti.

Domenica 22 marzo

Dalle 09.30 alle 18.30: visita alle mostre

Conferenze e spettacoli

9.45-10.30 Imax	**Massimo Ferri** (docente, Università di Bologna): *E il seme cadde altrove* (Età: da 14 a 99 anni).
9.45-10.10 piano terra	Burattini per i più piccoli (Età: da 4 a 14 anni). **Ioana Butu** (burattinaia, Canton Ticino) con la collaborazione di **Silvia Sbaragli** (DFA-SUPSI, Locarno): *Figuriamoci! Figure geometriche in movimento*.
10.30-11.00	**Spettacolo delfini**
11.15-12.15 Imax	Spettacolo di giocoleria per i più piccoli (Età: da 5 a 15 anni). **Federico Benuzzi** (giocoliere, Bologna): *Il giocoliere della scienza.*
12.15-13.30	Fruizione libera del parco e pranzo

13.30-14.30 Imax	Spettacolo teatrale (Età: da 14 a 99 anni). **Terzadecade L'Aquila Signorina**: *«Probabilmente ... de Finetti!»*
14.45-15.30 Imax	**Carlo Toffalori** (docente, Scuola di Scienze e Tecnologie, Università di Camerino): *«Delitti matematici». Rassegna dei collegamenti tra matematica e polizieschi* (Età: da 15 a 99 anni).
14.30-15.15 Laguna delfini	Spettacolo extraterrestre (Età: da 6 a 12 anni) **Federico Taddia** (giornalista, Bologna) e **X$&45Ax□?πÑ45003** (extraterrestre in viaggio sulla Terra proveniente dal pianeta Xy3/Z2): *Matematica da altri mondi: ma com'è la matematica lì da te?*
15.45-16.15	**Spettacolo dei rapaci**
16.30– 17.15 Imax	**Alberto Bertoni** (docente, Università di Bologna) e **Bruno D'Amore** (docente, Università Distrital Francisco José de Caldas di Bogotà): *Poesia e matematica, un incontro possibile.* (Età: da 14 a 99 anni).
17.15-18.00 Imax	**Paolo Negrini** (docente, Università di Bologna): *Le olimpiadi di matematica* (Età: da 15 a 99 anni).

Le stazioni di Oltremare saranno aperte e fruibili per i partecipanti.

Informazioni

Per informazioni e iscrizioni: didattica@costaparchi.it e +39 0541 4271, il programma dettagliato e continuamente aggiornato è pubblicato sul sito: www.oltremare.org

2. Recensioni

Stefano Beccastrini e Maria Paola Nannicini. (2013). ***Sui crocevia tra matematica e letteratura.*** **Prefazione di Bruno D'Amore. Bologna: Pitagora.** **ISBN: 88-371-1110-X.**

Molto volentieri mi accingo a presentare questa nuova opera di Paola e Stefano, instancabili autori legati al RSDDM di Bologna. Al piacere di parlare di una nuova produzione di due cari amici, si aggiunge quello di attirare l'attenzione dei lettori, in particolare degli insegnanti, sul problema dell'unità (unitarietà?) della cultura. Bruno D'Amore, che ha scritto la prefazione, da anni si impegna con innumerevoli pubblicazioni, conferenze e manifestazioni varie per mostrare come la matematica sia ovunque, come il sapere scientifico, nella sua espressione più profonda, non possa essere distinto da quello umanistico, come, insomma, la cultura non può essere scissa in alcuna partizione (in senso matematico) nella quale le diverse parti siano rigorosamente separate. È un messaggio universale, questo, ma ci tengo che venga raccolto anche dagli insegnanti. Purtroppo la scuola, dopo il segmento primario, si articola sempre più in un mosaico di discipline che certamente non aiuta gli insegnanti a mettere in pratica questo messaggio. Occorre quindi, da parte di tutti, uno sforzo supplementare per impedire che gli allievi, già nella formazione di base, coltivino l'idea che la matematica serva solo… per fare matematica. Nella scuola è stata coniata l'espressione «discipline vicine». Per esempio, i classici binomi matematica-scienze e italiano-storia, oppure la nuova disciplina «ambiente», introdotta nella scuola primaria, che potrebbe essere interpretata come un buon tentativo di unire finalmente i vari saperi, ma che si trova sciaguratamente separata da altre discipline, fra le quali la matematica. Inoltre il fenomeno della complessità crescente delle discipline scolastiche tradizionali e il sorgere di nuove discipline (le varie «educazioni») rende ancor più difficile far passare l'idea dell'unitarietà della cultura.

Ecco allora diventare pressante la necessità che gli insegnanti operino, nel proprio ambito, allargando il più possibile il ventaglio della loro attività didattica. O, meglio ancora, che riescano a realizzare veri progetti interdisciplinari.

Ma, perché le cose evolvano decisamente in questa direzione, occorre che gli insegnanti possano disporre di fonti di informazione dalle quali poter attingere idee da portare in classe.

Questo nuovo volume che si aggiunge ad altri degli stessi autori, tutti scritti con l'intenzione dichiarata di accostare la matematica ad altri mondi della cultura (per esempio letteratura, cinema e geografia), rappresenta una nuova ghiotta occasione per scoprire il profumo della matematica di nuovo in un cotesto letterario, a prima vista molto lontano dal cosiddetto ambito scientifico. Cito il sottotitolo, alquanto significativo: *Storie e leggende di dei e di eroi, di donne e di uomini, di libri e di idee, di parole e di numeri*.

Inutile dire che leggendo queste pagine si incontrano moltissimi spunti per ravvivare l'insegnamento. Mi limito a segnalare in alcune biografie (e autobiografie) di matematici, da Luca Pacioli a Novalis a Cantor (per citarne alcuni), ma anche di matematiche, Ipazia di Alessandria, Sofia Kovalevskaya, le sorelle Julia e Constance Bowman fra le altre. Molto interessanti per ricavarne spunti didattici sono i romanzi biografici, nei quali la fantasia degli autori li fa allontanare, in certa misura, dalla realtà storica, ma permette loro di rendere ancor più avvincente il lato avventuroso. A tale proposito, così si esprime Bruno D'Amore nella prefazione: «e i romanzi biografici, spesso romanzati, dei matematici, con qualche beneficio d'inventario a nobile scopo: attrarre il lettore verso questo genere di storie, quelle di scienziati e non solo di santi, poeti, navigatori, politici, sportivi».

Il libro può essere letto e gustato da tutti, come ogni opera intelligente e documentata. Agli insegnanti giunga il sentito invito a volerlo inserire nella loro biblioteca personale.

(G. Arrigo)

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Marazzani I., Sbaragli S. (2008). *La didattica e le difficoltà in matematica*. Trento: Erickson. Pagg. 160. ISBN: 978-88-6137-238-2.

Dalla *Premessa* degli autori:

Sebbene gli studi e le ricerche teoriche ed empiriche sul complesso processo di insegnamento – apprendimento della matematica siano le più consolidate e le più sviluppate, rispetto alle analoghe di altre discipline, è sotto gli occhi di tutti il fatto che, a fronte del sempre maggior impegno di ricercatori ed insegnanti, prosegue un fallimento strutturale nell'apprendimento da parte degli studenti. Nonostante le spinte innovative e le sempre maggiori conoscenze che la ricerca produce, i convegni, le riviste, i testi che divulgano ed illustrano i risultati delle ricerche, la matematica continua ad occupare un posto di rincalzo nelle simpatie di adulti e giovani, a produrre risultati negativi, a costituire una delle discipline di minor interesse. I giovani che si iscrivono alle facoltà scientifiche sono in netto calo mondiale (anche se le iscrizioni ai corsi di laurea in matematica in Italia sono in leggera ripresa).

Nel processo di insegnamento – apprendimento della matematica c'è qualche cosa che non va; ci sono cioè troppe *difficoltà* nell'apprendimento della matematica.

Di che cosa si tratta?

A fronte di molti studi condotti soprattutto da psicologi su cause funzionali, organiche, sensoriali etc., cui si fa solo un rapido cenno in questo libro, analoghi lavori di analisi, studio, ricerca, sperimentazione sulle difficoltà nell'apprendimento della matematica, dal punto di vista della ricerca in didattica della matematica, non sono moltissime.

Certo, tra i più recenti, per limitarci al panorama italiano, spicca, per complessità e profondità, quello di Rosetta Zan (2007). Ma noi riteniamo che una pluralità di interventi e di studi, anche tra loro diversi, seppure ad intersezione non vuota, possano aiutare il lettore ad orientarsi in questa letteratura. Più sono gli stimoli, più è pensabile che vi sia un impulso ad analizzare le proprie situazioni d'aula, a scavare nei motivi, nelle cause di queste difficoltà, non solo a scopo analitico, bensì anche per poter intervenire con consapevolezza di causa e dunque con specificità.

Così, abbiamo deciso di raccogliere le nostre idee e le nostre proposte di riflessione su questo argomento e di proporre questa analisi dividendola in quattro momenti che sono poi i capitoli del libro: il primo, di carattere espositivo generale; il secondo, proponendo in dettaglio la teoria degli ostacoli; il terzo, analizzando l'idea di misconcezione; il quarto, verificando come il contratto didattico costituisca specifica difficoltà; una bibliografia finale piuttosto estesa potrebbe aiutare il lettore desideroso di approfondire l'argomento.

Si tratta di una piccola goccia nel mare delle difficoltà, ce ne rendiamo ben conto, ma un aiuto a coloro che, disarmati di fronte a molteplici ripetuti errori sempre uguali, non sanno più che fare. Forse uno stimolo critico, forse una raccolta di esempi, forse quel minimo di teoria che eleva l'esempio a idea più generale, potranno essere d'aiuto al lettore – insegnante.

La nostra ferma convinzione è che un insegnante deve essere messo in grado di riflettere sulle difficoltà, sugli errori (che ne sono le evidenziazioni esterne), sulla ricerca della cause, sullo studio degli interventi di rimedio; non si può formare un insegnante di matematica solo in matematica ed in didattica, bisogna anche già inserirlo nelle specifiche difficoltà delle situazioni d'aula più realistiche e meno demagogiche.

La nostra speranza è che questo libro aiuti quell'insegnante che avrà la volontà di leggerlo, meditarlo, riconoscervi situazioni già vissute, usarlo.

(B. D'Amore)

Piazzino S. (2014). L'uomo che credeva di essere Riemann. Roma: Edizioni e/o. Pagg. 144. ISBN: 978-88-6632-438-6.

Scriverò solo poche righe, per evitare di dire troppo e per obbligare tutti, non solo coloro che amano la matematica, ma proprio *tutti*, a leggere questo delizioso racconto.

Avanti, vediamo chi ha il coraggio di essere sincero; io credo che tutti noi matematici professionisti o anche studenti universitari di matematica che poi sono diventati professori di scuola o hanno fatto un altro mestiere, tutti, abbiamo provato a risolvere qualche mistero della matematica; e credo che i più gettonati siano:

a) la congettura di Goldbach;

b) l'ultimo teorema di Fermat con strumenti elementari: perbacco, è possibile che davvero si debba passare dalla dimostrazione della congettura di Taniyama-Shimura?;
c) la congettura dei quattro colori con una dimostrazione di poche pagine e qualche schema;
d) trovare una legge elementare di distribuzione dei numeri primi;
e) la congettura di Riemann (che ha forti legami con d).

Avendo terminato la mia carriera accademica, ho la spudoratezza di dichiarare che io li ho tentati tutti e 5, ma sono stato abbastanza fortunato da capire al volo che era meglio lasciar stare; mi è servita come lezione (ero tanto giovane!): ho per lo meno capito perché certi misteri perdurano tanto nel tempo …

Di fatto, la congettura di Riemann, per la sua portata, la sua eleganza, i suoi misteri che s'insinuano gli uni negli altri, è certo la più affascinante.

Come non capire allora che un celebre matematico, diciamo Ernest Love, dopo anni di ostinata concentrazione, ossessionante fatica, indefesso studio, prolungato lavoro, totale abnegazione, assidua ricerca, sottili ipotesi, continue privazioni, immensi sforzi per trovare la soluzione ad uno degli enigmi più belli del mondo, impazzisca letteralmente venendo a sapere che un altro matematico ha trovato, prima di lui, la soluzione? Tanto da perdere la ragione e autoconsiderarsi Bernard Riemann redivivo?

Questo è il punto essenziale del romanzo, che si può dire in poche righe; ma da qui comincia la storia, una storia formidabile, fatta di colpi di scena, una storia nella quale il protagonista è sì *un matematico*, ma lo è ancora di più *la matematica*; è anche la storia di uno psichiatra che, scrivendo in prima persona, dovrà fare i conti con un paziente pazzo geniale che, al di là della follia, è consapevole di tutto quel che accade, della sua stessa follia; ma è convinto davvero, e da tutti i punti di vista, di essere Riemann.

(B. D'Amore)

Acheson D. (2009). ***1089 e altri numeri magici. Un viaggio sorprendente nella matematica*****. Bologna: Zanichelli. Pagg. 176.** La prima edizione originale USA in lingua inglese di questo libro è del 2002.

Nella collana *Chiavi di lettura* che la Zanichelli dedica a «piccoli libri autorevoli» soprattutto di tema scientifico, è la volta di questo agile, simpatico, prezioso spaccato creativo e razionale nel mondo della matematica ricreativa. Vi si trovano formule eleganti e belle, una ministoria di π, il numero e, i grandi errori, la musica, le catastrofi, astronomia ed ellisse, e così via. Il tutto è scritto con disinvoltura, senza prosopopea, però con attenzione alle matematiche cose, cioè con sufficiente rigore e puntualità, ricco di notizie storiche su personaggi, fatti, dati e cronologie. La sua lettura richiede solo una conoscenza di matematica di base, diciamo da fine scuola secondaria superiore, non di più, perché i passi eventualmente successivi sono guidati dall'Autore, con cura meticolosa dedicata proprio alla spiegazione. Credo si tratti di una lettura doverosa da parte dell'insegnante alla caccia di idee per attrarre i propri studenti; di una lettura auspicabile da parte di quegli studenti che, amando la matematica, vogliono conoscerne aspetti che non sempre è possibile svolgere nelle ore scolastiche; di una lettura possibile da parte di quegli studenti per i quali la matematica non è di facile ed immediata digeribilità, ai quali potrebbe essere utile un punto di vista informale.

(B. D'Amore)

Stella Baruk. (2014). ***Nombres à compter et à raconter*****. Paris: Éditions du Seuil. ISBN: 978-2-02-112664-8**

Ecco un libretto carino, agile e intelligente. È il racconto, se vogliamo, di un lungo e approfondito dialogo tra una liceale e la mamma matematica, l'autrice, partito dalla famosa frase di Kronecker: «Dio ha creato i numeri interi; il resto è opera dell'uomo». Nella sua ingenuità razionale, la liceale non riesce ad ammettere che Dio abbia creato i numeri più semplici, lasciando agli uomini il compito di creare tutti gli altri che concorrono a generare le maggiori difficoltà e non pochi incubi agli studenti, particolarmente nelle notti precedenti le interrogazioni. Su questa ingegnosa struttura, l'autrice presenta una ricca sequenza di situazioni numeriche, centrate sui numeri naturali, attingendo copiosamente alla storia della matematica. La commedia, se così mi si permette di chiamarla, è suddivisa in undici quadri che portano il titolo da Zero a Dieci.

Protagonista è la matematica e sulla ribalta sfilano a turno parecchi personaggi, soprattutto matematici, che si sono visti legare il proprio nome alle innumerevoli curiosità che permeano le vie dei numeri naturali. Il dialogo tra i due personaggi rimane sempre affettuoso e stimolante. Il lettore non può non immedesimarsi nell'uno o nell'altro. La liceale appare come ragazza sveglia e curiosa; all'inizio sembra non avere grande considerazione per la matematica: un atteggiamento, questo, molto diffuso nelle scuole medie e superiori. La mamma però sa sfruttare astutamente le obiezioni che la figlia avanza continuamente, non tanto per demolire, ma perché, forse inconsciamente, capisce che ogni sua osservazione produce momenti di apprendimento che le procurano meraviglia, soddisfazione e nuove curiosità. L'insegnamento della mamma non è mai di stampo autoritario; la ragazza è ripetutamente messa di fronte a problemi che all'inizio può affrontare con una certa libertà, per poi capire come le difficoltà iniziali possono essere superate, come, in fondo, questi personaggi importanti (i vari matematici presi in considerazione) hanno operato contribuendo a far progredire il sapere matematico. Buona parte dei problemi passati in rassegna è materia conosciuta da chi si occupa di insegnamento della matematica. Ciò che costituisce la novità dell'opera è il modo con cui vengono affrontati. Dietro alla ragazza si nascondono molti lettori, ne sono sicuro. Persone di ogni età e dalle formazioni più disparate che avvertono di aver già incontrato questo o quel problema, ma che non lo ricordano in termini precisi. Tocca allora alla mamma matematica aiutare ragazza e lettori a ricordare il problema nella sua completezza e spiegarne le vie risolutive. Dalle parole della ragazza traspare allora la soddisfazione di avere pienamente capito, proprio perché in parte ha contribuito a costruire la soluzione. Sono sicuro che anche il lettore proverà soddisfazione. E se questi è un insegnante di matematica, molto probabilmente sarà attratto dalla voglia di far rivivere l'avventura anche ai propri allievi.

(G. Arrigo)

Progetto grafico
Bruno Monguzzi
Prestampa
Taiana
Stampa
Veladini

Redazione
Laboratorio di didattica della matematica
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera

Telefono
091 814 18 21/22/24
Fax
091 814 18 19
gianfranco.arrigo@span.ch

Amministrazione
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera
Fax
091 814 18 19

Esce due volte all'anno
a maggio e a dicembre

Abbonamento annuo
SFR 30
€ 16

Bollettino dei docenti di matematica
69

In questo numero: G. Arrigo e G. Mainini ricordano Claudio Beretta; un saggio sull'epistemologia del concetto di limite, di J. Dhombres; balli caraibici e matematica di A. Di Caprio; l'arte dei crucipixel, di J. Pelloni; dopo «Matematicando», redazionale; *problem solving* e semiotica, di G. Arrigo; didattica della geometria, di S. Meyer; Agorando 2, di P. Hägler e G. Mainini; segnalazioni e recensioni.

ISBN 978-88-86486-91-0
Fr. 18.–

Repubblica e Cantone Ticino
Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport