A cura
del Laboratorio di didattica della matematica

Bollettino dei docenti di matematica

70

Maggio
2015

Ufficio
dell'insegnamento medio
Centro
didattico cantonale

Bollettino
dei docenti di matematica
70

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell’educazione,
della cultura e dello sport

ISBN 978-88-86486-92-7

Bollettino dei docenti di matematica 70

Maggio
2015

Ufficio dell'insegnamento medio
Centro didattico cantonale

Indice

Prefazione

Il primo articolo è di Jean-Claude Pont: un importante saggio storico-epistemologico sui numeri negativi che contiene pure un'inedita proposta didattica. L'insegnante che almeno una volta ha dovuto introdurre questi numeri in classe conosce le difficoltà di questa operazione. Leggendo il testo di Pont potrà da un lato capire meglio il perché di tanta difficoltà e dall'altro ricavarne nuove idee da mettere in pratica. La sezione Varia continua con uno scritto di Stefano Buscherini che parla di scacchi e di progressioni geometriche in un lungo viaggio da Dante alla Mesopotamia passando per la Persia. Chiude un intervento di Adolfo Tomasini, uomo di lettere e di scuola, che ultimamente si è avvicinato, con evidente interesse, alla matematica e al suo apprendimento.

La sezione Matematica, questa volta, è ben fornita. Inizia con un nuovo articolo di Gianfranco Gambarelli sulla Teoria dei Giochi e le sue applicazioni, di carattere più tecnico rispetto al precedente (apparso sul numero 68). Segue uno scritto di Francesco Daddi, insegnante di Pisa, recentemente entrato nella cerchia degli estimatori della nostra rivista. Ci propone un metodo elementare per determinare l'evoluta di una curva $y=x^n$: sicuramente interessante in particolare per docenti delle superiori e oltre. Infine Paolo Hägler e Giorgio Mainini presentano un approfondimento della tematica proposta nel quiz Agorando 2.

Nella sezione Didattica troviamo un articolo di Gianfranco Arrigo sulla pratica del *problem solving*, corredato da parecchi esempi già pronti per essere usati nelle classi elementari e medie. L'ambiente matematico proposto è di natura combinatoria e ogni problema è accompagnato da un commento didattico e da possibili soluzioni. Seguono poi due puntate della rubrica di Alberto Piatti dal titolo «Gocce di didattica». La prima sarebbe dovuta apparire sul numero 69, ma, per uno spiacevole disguido, è rimasta… in memoria. Con piacere rimediamo con questa doppia pubblicazione.

Agorando continua con il numero 3 che vuole anche essere un omaggio alla memoria di Alan Turing.

Si termina con le Segnalazioni e le Recensioni, queste ultime di particolare interesse per chi è alla ricerca di nuovi spunti per programmare le lezioni.

1. Sull'introduzione dei numeri negativi nella scuola secondaria

Jean-Claude Pont[1]

For no known reason, an «animation» that would be a good metaphor for the introduction of the negative numbers to students came to my mind. This, in turn, reminded me of when I used to teach an introduction to these practicals and mysterious entities. To explain their nature I referred to their history, the context in which they were born. They are metaphysical questions. In my opinion, Hilbert has stopped this evolution. The result is empty beings, simulacra of ghosts. «And yet it moves!».

«Putois[2] etait. Je puis l'affirmer. Il etait. Regardez–y, messieurs, et vous vous assurerez qu'être n'implique nullement la substance et ne signifie que le lien de l'attribut au sujet, n'exprime qu'une relation. Sans doute, dit Jean Marteau, mais être sans attributs c'est être aussi peu que rien.»[3] (Anatole France, «Putois», in *Œuvres complètes*, t. III, Bibliothèque de La Pléiade, p. 751).

1. Introduzione

Quando insegnavo nella scuola vallesana, la durata del *collège*[4] era di otto anni. Avevo perciò allievi dai 12 ai 20 anni. Ho dovuto insegnare anche i numeri negativi ad allievi molto giovani. Questo insegnamento mi ha posto difficoltà che non immaginavo alla fine dei miei studi e che mi hanno sorpreso. Riflettendoci più tardi, ho realizzato che il problema era sia filosofico sia matematico: concerneva lo statuto ontologico degli enti matematici. Nelle considerazioni seguenti, la partenza non è sempre distinguibile fra quelle concernenti l'insegnante e quelle che hanno più attinenza all'allievo. Quando si insegna la matematica, non ci sono verità sicure (nella natura non esistono né punti né rette, gli assiomi non sono verità evidenti, ecc.)! Ma in ogni caso mi sembra auspicabile che l'insegnante ne sappia di più dei suoi allievi.

2. Sulla struttura dell'articolo

La struttura di questo articolo avrebbe potuto seguire l'ordine cronologico secondo il quale le riflessioni si sono sviluppate: blocco degli allievi di fronte all'ostacolo costituito dalla comparsa dei numeri negativi nel regno del numero, perplessità dell'insegnante, del quale è lecito attendersi che sappia di che cosa parla, un insegnante sensibile alla giustificazione intellettuale. Quindi problema pedagogico.

1. Professore emerito dell'Università di Ginevra.
2. Essere completamente immaginario, creato da Anatole France, ma che esiste. Come i numeri negativi.
3. «Era Putois. Posso affermarlo. Lo era. Guardate, signori, e vi assicurerete che essere non implica assolutamente la sostanza e non significa altro che il legame tra l'attributo e il soggetto, esprime solo una relazione. Senza dubbio, dice Jean Marteau, ma essere senza attributi è come essere nulla».
4. Il settore secondario medio e superiore.

Rivolgendoci alla filosofia e alla storia della matematica appare naturale quanto segue.

– La Filosofia, allo scopo di ottenere chiarimenti sullo statuto ontologico degli oggetti matematici, sulla loro natura, sul loro modo di esistere. Ci si pone allora nei problemi ordinari della metafisica, con i suoi interrogativi sull'essere. Si tratta di dire che cosa sono i nuovi arrivati, mettendoli in relazione a un insieme di oggetti già conosciuti e appartenenti a una matematica familiare.
– La Storia, perché rivela le aberrazioni di coloro che ebbero la missione di inserire questi oggetti, mediante l'uso che ne facevano, l'insegnamento ai quali consacravano, le metafore che immaginavano per dar loro parvenza di realtà.

Occorre però notare che il rigore cronologico si applica male alle sfumature del pensiero.

La struttura che ho seguito integra opportunamente gli elementi citati e li accomoda morbidamente, in modo da far risaltare le loro sfumature. Gli obiettivi che ho perseguito sono evoluti nel corso della redazione. All'inizio erano riflessioni attorno al primo insegnamento dei numeri negativi. Le esperienze vissute nel corso degli anni passati nell'insegnamento secondario dovevano formare lo zoccolo. I lavori in storia e filosofia della matematica, ai quali mi sono dedicato nel seguito, mi hanno stimolato a continuare queste riflessioni, immergendole nel contesto storico e filosofico sul quale si fondano, un contesto di movimenti complessi.

3. Osservazioni sul lavoro dello storico

Quando lo storico si riferisce alla scoperta di concetti e di idee, deve giustificare il loro carattere di novità. Attraverso la divulgazione o l'insegnamento sono diventati di pubblico dominio, a tal punto che sembra procedano da soli. Come far rivivere la meraviglia che producono, la carica di novità che portano con sé? L'inaudito di ieri diventa banalità, non se ne può più fare a meno. Se, per caso, ci si pongono domande relative a questo soggetto, non ci si prende alla sprovvista, perché questi concetti e queste idee ci sembrano fondati nella ragione stessa e appartenenti al bagaglio di conoscenze della specie. Brevemente, occorre una buona conoscenza dell'epoca in cui apparvero per rendersi conto quanto i nostri predecessori sono stati intelligenti e coraggiosi! Abbiamo l'abitudine – cattiva – di esaminare, descrivere e pensare un'opera, la produzione di un tempo, dal momento dell'avvallo, con lo spirito di oggi, carico di tutto il materiale depositato nel frattempo dal fiume della conoscenza. In questo scritto mi dedico a una presentazione che, al contrario, parte a monte; ciò che è senza dubbio più difficile, meno confortevole e più rischioso.

Prima di entrare nel vivo del soggetto, propongo un *flash* sulle rivoluzioni concettuali che hanno accompagnato il cammino della matematica nei secoli XVII e XVIII.

4. Rotture epistemologiche e altre rivoluzioni concettuali

Ricordo dapprima l'incapacità dei Greci di inventare qualcosa che assomigli al nostro calcolo letterale. Circa cinquant'anni fa, riflettendo sulla questione, avevo formulato una congettura semplice e plausibile (l'ho ritrovata più tardi in Abel Rey[5]): siccome i segni utilizzati dai Greci nella loro numerazione erano lettere dell'alfabeto, come avrebbero potuto immaginare un calcolo letterale? Van der Waerden, al quale avevo presentato la mia ipotesi, mi ha dato questa bella risposta: «I Greci erano troppo intelligenti per occuparsi di ciò!».

Oggi credo che il solo pensiero di un segno che non rappresenta niente di particolare, vuoto di *Bedeutung*, forma senza materia, avrebbe inorridito i Greci; mancava loro la garanzia fornita dall'oro in banca. Secondo questa ipotesi, sarebbe dunque l'esigenza di un essere come supporto del segno che ha loro impedito di realizzare questa scoperta capitale. È verosimilmente anche la ragione per la quale la loro aritmetica (nel senso di teoria dei numeri), quella che si trova nei libri dal VII al IX degli *Elementi* di Euclide, è totalmente immersa nella geometria.

Un'analoga situazione di blocco si è d'altronde prodotta negli anni 1830 in Gran Bretagna (vedi a p. 337 dell'opera indicata nella nota 12): per una simile ragione, i geometri britannici non hanno saputo sviluppare un'algebra simbolica, che comunque avevano inventato. Per riuscirci si doveva essere sprovvisti di scrupolo metafisico.

Sulla geometria greca, dalle tacite ma strette esigenze ontologiche, si innesta un pensiero più libero. È quello degli erranti del Rinascimento (che beneficiavano essi stessi, probabilmente, dei diversi movimenti intellettuali ereditati), che hanno audacia intellettuale e giocano liberamente con il materiale fornito dal pensiero greco, liberandosi dai presupposti metafisici.

Per parafrasare il Bachelard del *Rationalisme appliqué* (p. 81), ci troviamo in un momento storico nel quale il pensatore non è più influenzato da un destino proveniente dalle origini, quando «plus rien ne monte des profondeurs»[6].

A partire dagli anni 1550, si osserva il sorgere di una moltitudine di entità, di concetti e di notazioni, dalla quale nascerà la matematica classica[7]. L'inizio del XVII secolo, oltre che per lo sbocciare del calcolo letterale, è segnato dall'apparizione, senza rumore, di processi infiniti in situazioni nelle quali gli Antichi ricorrevano alla pericolosa esaustione (rettificazione, area, volume). Questa doppia serie di mutazioni sorge su un fondo filosofico in contravvenzione con le proibizioni citate. I vecchi divieti sono morti, la Geometria può diventare Matematica! È un caso che il centro di gravità temporaneo di queste rotture, 1610-1630, e il momento nel quale la Fisica si libera dal ciarpame del pensiero antico, coincidono?

5. Abel Rey (1873-1940), filosofo francese e storico della scienza.
6. Niente risale più dalle profondità.
7. Il «Triparty» in scienza dei numeri, che Nicolas Chuquet termina nel 1484, anticipa di un secolo i lavori della fine del secolo XVI, inizi del XVII nei quali si usa vedere la nascita dell'algebra, diciamo classica. Molto in avanti sul tempo – troppo? – l'opera notevole di Chuquet non ha però avuto il ruolo che ci si sarebbe potuto attendere. Nell'allegato 1, do alcuni estratti sintetici ripresi dall'opera che gli ha dedicato Maryvonne Spiesser.

Mi attardo sul calcolo letterale, inteso in senso lato: calcolo con lettere, nuove notazioni, nuove famiglie di numeri (negativi e complessi). Gli uni e gli altri appaiono circa nello stesso tempo e collaboreranno strettamente allo sviluppo di ciò che potremmo chiamare matematica classica. Mi attardo perché il calcolo letterale è l'agente nascosto, il *deus ex machina*, di tutta l'evoluzione futura della matematica. Ma la semplicità che noi vediamo oggi, grazie a una lunga negoziazione, ci impedisce di capire come questa *scrittura che pensa per noi* non era affatto naturale e, anzi, si opponeva ai canoni dell'epistemologia antica. L'avvento del calcolo letterale ha costituito una rivoluzione concettuale fra le più importanti di quelle vissute dalla scienza nei tempi moderni, una rivoluzione anonima e silenziosa.

Leggendo l'opera di Florian Cajori[8] – un ticinese – ci si spaventa davanti a ciò che l'immaginazione ha prodotto per giungere al risultato che conosciamo. Si pensa alla storia della vita, nella quale si vede la natura che agisce senza struttura né progetto, per tentativi, ora cancellando, ora riprendendo o abbandonando, senza legge né metodo, mantenendo solo la possibilità di sopravvivere e di procreare. La storia delle notazioni è piena di *specie perse*. Abbondante ed esotica, similmente a quella dell'essere vivente, è una storia edificante, che illumina di nuova luce gli aspetti della pedagogia della matematica.

Nella giungla delle notazioni, si osserva un lungo periodo che definirei «stenografico». Il segno non ha altra virtù se non quella stenografica, serve per semplificare il discorso sostituendo termini ripetitivi con segni (segni di operazione, segno di uguaglianza, ecc.) (vedere allegato 1). Poi appaiono momenti decisivi. L'idea di rappresentare le diverse potenze della grandezza incognita con una stessa lettera, con un numero aggiunto – poco importa se lo si colloca in alto a destra, si è tentato di tutto – che indica quante occorrenze ha l'incognita in un prodotto; solidale con questa invenzione, la regola di addizione degli esponenti, che è all'origine della natura dinamica del calcolo letterale. L'audace amalgama dell'essere e delle sue diverse potenze sotto un nome unico è di una forza che i fondatori (fra i quali Viète e Descartes) non sembra abbiano supposto. Certo, x, x^2, x^3 sono ancora associati, nel pensiero, a qualcosa di geometrico, come lo dimostra la loro terminologia: quadrato, cubo. Ma lo spirito si abitua a considerare il solo simbolo, come l'uccellino che gira attorno al nido prima di prendere il volo verso il cielo. Un'altra liberazione avviene quando, colpo di audacia, ci si azzarda – ciò che suggerisce naturalmente la nuovo scrittura – a trascendere il divieto geometrico lasciando briglia sciolta all'esponente. Infine, la lettera e il suo esponente si librano nel cielo e gli ormeggi sono rotti.

La rappresentazione di un'incognita con una lettera costituisce la prima trasgressione, ancora innocente, al vecchio principio degli Antichi, inespresso ma efficiente, cioè la presenza di un referente o di un essere, dietro il segno. Segue poi facilmente – è solo il primo passo che ha prezzo – la rappresentazione, mediante una lettera, di una grandezza pur conosciuta, ciò che appare a prima vista come un capriccio.

Il calcolo letterale non è dunque più semplicemente una tecnica, stereografica e passiva. Il suo impiego è sostenuto da una epistemologia implicita, rivoluzionaria nel secolo XVII: nessun garante realistico per sostenere il simbolo, nessun biso-

8. Florian Cajori. *A History of mathematical Notations*, 2 vol., Open Court Pub. Co., La Salle,1928-1929. Pubblicato in un volume da Dover Publications, Inc, New York, 1993.

gno di una consonanza geometrica che sottintenda il pensiero greco. La doppia rottura – calcolo letterale e processi infiniti – comporterà conseguenze più grandi: l'apparizione dell'equazione come entità autonoma e oggettivata e del polinomio, poi della serie, della funzione, tutti oggetti che non si sarebbero potuti pensare al di fuori dei nuovi segni che li producono; il segno, per la prima volta, ha creato l'essere!

Si riconosce che le rotture hanno una componente metafisica (è forse per questo che sono concettuali). Non sono fra loro indipendenti e si associano per far nascere un nuovo pensiero matematico, che è ancora nostro.

5. Lo statuto ontologico delle entità matematiche. Le *Grundlagen* di Hilbert

«Ihre neuen geometrischen Abhandlungen habe ich mit großem Interesse gelesen. Sie haben da ein unermeßliches Feld mathematischer Forschung erschlossen, welches als «Mathematik der Axiome» bezeichnet werden könnte und weit über das Gebiet der Geometrie hinauszeichnet.»[9] (Lettera di Adolf Hurwitz a Hilbert dell'8.06.1903, citata in M.-M Toepell. *Über die Entstehung von David Hilberts «Grundlagen der Geometrie»*, p. 257)

Lo statuto ontologico degli indefinibili della geometria (punto, retta, piano) è fortemente chiarito a partire dalle «Grundlagen der Geometrie» di David Hilbert (1900). Hilbert (1862-1943) risponde a questioni dibattute lungo tutta la storia della Geometria: che cos'è un punto, che cos'è una retta, qual è la natura degli assiomi, qual è il valore della verità, ecc.? (Vedere allegato 2)

Anche se centrate sulla geometria, le considerazioni delle Grundlagen, a media distanza tra la matematica e la filosofia, illuminano di nuova luce la natura e la struttura degli oggetti matematici, una luce che si propaga passo dopo passo all'intero insieme del mondo matematico, in particolare al campo dei numeri. Certamente, si tratta in parte di una risposta filosofica, la cui accettazione o rifiuto dipende a sua volta dal profilo filosofico del matematico. Il rifiuto può spingersi fino all'orrore, per un platonico di stretta obbedienza.

È utile precisare che i tentativi intrapresi dalle generazioni successive di definire gli oggetti basilari della geometria, a partire da Euclide, sono falliti. E come poteva essere diversamente? Un minimo di riflessione mostra che una definizione è costituita di parole e che queste devono a loro volta essere definite; e che non si scappa dalla regressione all'infinito, come lo ha così ben visto Blaise Pascal (1623-1662), ma senza dedurne tutte le conseguenze (vedere allegato 3).

Lo spirito della rivoluzione hilbertiana è contenuto interamente nella frase iniziale delle *Grundlagen*: «Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des ersten Systems nennen wir Punkte[10] (…)». Il cambiamento di prospettiva nei confronti della tradizione è radicale. Le entità messe in gioco (non si può par-

9. Ho letto con grande interesse i suoi nuovi trattati geometrici. Lei ha aperto un immenso campo di ricerca matematica, che si potrebbe chiamare «Matematica degli assiomi» ed estendere al di fuori della geometria.
10. Pensiamo a tre diversi sistemi di cose: le cose del primo sistema le chiamiamo punti.

lare di «definizione») sono sprovviste di ogni qualità, solo un soffio di voce. Si tratta perciò di dar loro un corpo. È questo il ruolo degli assiomi. Gli assiomi si incaricano di fornire senso: ma il termine «senso» è forse troppo forte. Diciamo piuttosto che gli assiomi animano le entità e ci permettono di manipolarle. Il punto e la retta sono definiti implicitamente dalle proposizioni che sono tenuti a soddisfare. Tutti i termini correnti della Geometria, come «situato su», «situato fra», «essere congruente a», ecc. sono così (ri)definiti, l'intuizione è del tutto bandita. È certo che con questa nuova visione della Geometria si supera il passato nel quale figure e altre intuizioni dirigevano e animavano l'attività.

La concezione hilbertiana, la cui necessità è apparsa con l'avvento della geometria non euclidea, permette di assicurare i fondamenti della Geometria, la quale, rassicurata, può riprendere il suo cammino normale. Il gioco assiomatico hilbertiano non aveva altri obiettivi. Ma l'abitudine acquisita in questo ambito si ripercosse a poco a poco sull'insieme del pensiero matematico. Come diceva in modo eccellente Gaston Bachelard[11]: «Ci si può già rendere conto che il *ruolo* delle entità supera la loro natura e che l'essenza è contemporanea della relazione.» Per precisare questa dichiarazione, che richiede una certa pratica di linguaggio filosofico, diciamo che ciò per il quale una cosa è quella che è non concerne un'esistenza che sarebbe indipendente dal soggetto conoscente, ma che la cosa di cui si tratta diventa effettiva attraverso le relazioni che deve verificare. Un modo nuovo di considerare gli assiomi della geometria, appare anche nel medesimo decennio 1890-1900, fra i geometri italiani, raggruppati simbolicamente attorno a Giuseppe Peano, loro leader naturale. I lavori degli italiani sono, nel loro insieme, più ricchi di quelli di Hilbert. Ma l'assenza di coordinazione e una grande dispersione non hanno procurato riconoscimento a un'opera più che meritevole. È anche vero che le Grunlagen sono inserite nell'angolo del genio. Del resto, non si presta che ai ricchi![12] Lo stesso Peano (1889-1932) darà gli assiomi all'aritmetica.

6. Il numero negativo secondo alcuni autori. Esempi storici

Euler (1707-1783)

Il modo più probante di misurare l'ampiezza degli sconvolgimenti causati dall'apparizione di entità nuove consiste nell'interrogare i matematici e gli insegnanti che vennero in contatto con esse nel periodo precedente alla chiarificazione definitiva. Per i numeri negativi, oggetto del nostro interesse, sono i secoli XVIII e XIX. In questo paragrafo ho riunito parecchi autori che si prestano a questo scopo. I matematici del XVIII secolo, Euler in testa, ereditano un insieme eterogeneo di oggetti e di strumenti, dei quali nessuno sa che cosa siano, regole che sembrano essere uscite da un cappello magico e che niente potrebbe giustificarle (Euler ha appreso la matematica da un'opera di Christoph Rudolff pubblicata nel 1525, un periodo nel quale l'algebra come la intendiamo noi era ancora da creare).

11. *Le nouvel esprit scientifique*, PUF, Paris, 1963, p. 22. Edition originale 1934.
12. Per saperne di più, vedere: Jean-Claude Pont, Les symboles mathématiques, signes du Ciel, in (dir.) Jean-Yves Béziau, *La pointure du symbole*, Éditions Petra, Paris, 2014, p. 328-350, più particolarmente p. 340-350.

Euler, per molte ragioni, ne è un esempio privilegiato. La sua gloria imperitura concerne la matematica superiore. Nel nostro caso si tratta di una parte meno riuscita, nella quale si vede operare un pensiero «per tentativi» che si scava un cammino in un terreno sconosciuto. La scelta è irriverente perché si utilizza un grande uomo per mostrare le incertezze di un pensiero in piena fase evolutiva. È la storia di una lenta digestione che avviene nella profondità del tempo. Si può paragonare questo fenomeno a quello della trasformazione del cibo nel corpo di un animale. Questo si presenta all'inizio in modo informe: vi sono sostanze diverse, non assimilabili, occorre separare il buon grano dalla zizzania. Il buon grano dev'essere a sua volta elaborato, condizionato, schiacciato, impastato, sciolto prima di passare nel sangue e nutrire l'individuo. Tutto ciò finisce per creare un'aderenza talmente intima col corpo che nessuno riesce più a sapere da quale cibo vengono le componenti del tessuto corporeo. Euler, dicevo, è un esempio privilegiato per il nostro scopo.

- Ha scritto manuali destinati alla formazione di un grande pubblico; quando si scrive un manuale, non ci si può accontentare delle sensazioni del proprio spirito e nemmeno delle intuizioni più o meno sommarie e affrettate, che assicurano solo la correttezza minima delle regole che reggono la vita degli oggetti fondamentali. Appena nati dal nulla, devono essere integrati nella comunità matematica e, per questo, devono assumere un abito rispettabile, che non si presti a critiche.
- Euler è un autore di grande onestà. Spiega in modo dettagliato la via che ha seguito, i tentativi abortiti, le sbandate, gli errori da evitare.
- Che uno dei più grandi matematici della storia inciampi su nozioni elementari, richiede ed esige di fermarci e rifletterci.

La *Vollständige Anleitung zur Algebra*, che Euler pubblica in tedesco nel 1765, costituisce uno dei trattati più antichi che si propongono di dare basi solide all'algebra; vi si trova una presentazione dettagliata dei numeri negativi. Le citazioni seguenti mostrano l'imbarazzo di Euler. Notiamo dapprima l'importanza che dà a questa chiarificazione[13]: (21, p. 21) «Questa nozione di grandezze negate o negative è da considerare con grande cura, perché è della maggiore importanza in tutta l'algebra». L'indigenza (dal nostro punto di vista attuale) delle due citazioni seguenti è rivelatrice dello stesso imbarazzo:

(18, p. 20) «Siccome i numeri negativi possono essere considerati come debiti, quando i numeri positivi indicano un reale possesso, possiamo dire che i negativi sono meno che niente.»

(18, p. 20) «Analogamente al fatto che i numeri positivi sono incontestabilmente più grandi di niente, i numeri negativi sono più piccoli di niente.»

L'imbarazzo di Euler è visibile anche nel passaggio concernente la regola dei segni. La sua giustificazione del caso «meno per meno uguale più» è sconcertante, ma edificante:

(33, p. 24) «Resta ancora da determinare il caso concernente la moltiplicazione, per esempio di –a per –b. Prima di tutto è chiaro che il prodotto, per ciò che

13. Traduco (il più possibile letteralmente) il testo di Euler a partire dall'edizione tedesca del 1942 (Verlag von Philipp Reclam jun. Leipzig).

concerne le lettere, è ab. È ancora in dubbio se mettere il segno + o il segno –. È comunque certo che dev'essere uno dei due. Dico allora che non può essere il segno –. In effetti, siccome –a moltiplicato per +b dà –ab, –a moltiplicato per –b non può dare lo stesso risultato di –a moltiplicato per +b; ma è il contrario che deve risultare, che è +ab».

La regola dei segni è stata la via crucis nell'insegnamento della matematica. I tentativi migliori sono stati fatti nei secoli XVIII e XIX, ma non è uscito niente di soddisfacente (vedere allegato 1).

Henry Beyele, detto Stendhal (1783-1842)

Henry Beyele, detto Stendhal, è stato allievo dell'*École centrale* di Grenoble (oggi *Lycée Stendhal).*

Nel tomo 2 della sua opera autobiografica *Vie de Henri Brulard* (scritta nel periodo 1835-1836 e pubblicata nel 1890), ci regala alcuni sogni della sua gioventù. Dopo aver confessato che amava la matematica quanto più odiava gli insegnanti Dupuy e Chabert, ci racconta alcuni ricordi relativi all'apprendimento di questa disciplina. I commenti mi sembrano superflui.

(p. 56-57) «Secondo me, l'ipocrisia era impossibile in matematica e, nella mia ingenuità giovanile, pensavo che fosse così anche nelle altre scienze alle quali avevo sentito che si poteva applicare. Come rimasi, quando mi accorsi che nessuno sapeva spiegarmi come mai: meno per meno dà più (– × – = +)? (È una delle basi fondamentali della scienza che si chiama *algebra*).»

«Si faceva ben di peggio che non spiegarmi questa difficoltà (che senza dubbio è spiegabile perché conduce alla verità), me lo si spiegava con ragioni evidentemente poco chiare, così come me le raccontavano. Il signor Chabert, interrogato da me, si imbarazzava, mi ripeteva la lezione nei confronti della quale muovevo serie obiezioni e finiva col dirmi: «Ma si usa così, tutti accettano questa spiegazione. Euler e Lagrange, che apparentemente valgono quanto voi, lo hanno ben ammesso.»

(p. 58) «Mi ricordo perfettamente che, quando parlavo della mia difficoltà del meno per meno a uno forte in matematica, mi rideva in faccia (…)».

«Dopo molto tempo mi convinsi che la mia obiezione su – × – = + non poteva assolutamente entrare nella testa del signor Chabert, che il signor Dupuy rispondeva solo con un sorriso altezzoso e che gli studenti forti in matematica ai quali ponevo la questione si prendevano sempre gioco di me. Rimasi nella stessa situazione di oggi: è buona cosa che «meno per meno uguale a più» sia vero, perché, evidentemente, applicando in ogni momento questa regola nel calcolo, si ottengono risultati veri e indubitabili».

Jean-Victor Poncelet (1788-1867)

Nel suo famoso *Traité des propriétés projectives des figures* del 1822, Jean-Victor Poncelet scrive (p. XX):

«L'Algebra usa segni astratti, rappresenta le grandezze assolute [il contesto permette dicapire il senso del termine «assoluto»: si tratta di ciò che era ritenuto reale, cioè ciò che noi chiameremo numeri positivi] con caratteri che non hanno alcun valore per se stessi e che lasciano alle grandezze ogni indeterminazione possibile; di conseguenza opera e ragiona forzatamente su esseri di non esistenza come su quantità sempre assolute, sempre reali: a e b, per esempio, rappresentano due quantità qualsiasi ed è impossibile, nel corso dei calcoli, ricordarsi e riconoscere qual è l'ordine delle loro grandezze numeriche; nostro malgrado, siamo spinti a ragionare su espressioni a–b, $\sqrt{a-b}$, ecc., come fossero quantità sempre assolute e reali. Il risultato deve dunque essere partecipe di questa generalità ed estendersi a tutti i casi possibili, a tutti i valori delle lettere presenti; così anche queste forme straordinarie, questi oggetti della ragione, che sembrano essere esclusivo appannaggio dell'Algebra».

Questo testo è ricco di insegnamenti. Attiro l'attenzione sul raddoppio – pleonastico nello spirito dell'autore, ma di un pleonasmo pedagogico – di «assoluto» e di «reale». Secondo me, tradisce l'insicurezza di Poncelet di fronte a queste entità. Quando, nel corso di una spiegazione, si tenta di convincere il proprio interlocutore, si procede naturalmente così: incerti sul termine che si usa e che proviene da un campo semantico mal circoscritto, lo si rinforza a colpi di quasi-sinonimi, il cui insieme viene in soccorso dell'incertezza ontologica (vedere nell'allegato 4, la terza citazione). Ma c'è di più. Nel passaggio citato si nota una sorta di gerarchia ontologica. Da una parte, un campo che, con i qualificativi di «assoluto» e di «reale» è fondato su «semi di verità» e altre «verità innate», per riprendere espressioni del grande razionalismo metafisico. Dall'altra, quello delle produzioni artificiali o virtuali, che condizioni estranee alla ragione ci costringono a considerare, anche se le stesse fossero contraddittorie. Una ragione che, in fin dei conti, vi si adatta e, con l'aiuto dell'abitudine, consente di accoglierle. Si può riprendere una bella immagine, utilizzata da Georges Glaeser a proposito dei numeri complessi: i risultati che forniscono «sono stati concepiti nel peccato». Come non pensare al famoso aforisma di Leopold Kronecker (1823-1891), riportato da Heinrich Weber?[14]

«C'è una proposizione, che emergerà particolarmente nella sua tarda età [di Kronecker], forse più nei suoi contatti personali che pubblicamente; ma anche pubblicamente non ha rinnegato le sue posizioni, per esempio molto francamente nel *Festschrift* in occasione del giubileo di Zeller.»

«Per ciò che concerne il rigore dei concetti, pose le maggiori esigenze e cercò la forma pura e cristallina della teoria dei numeri [cioè del numero intero], per ciò che aveva diritto di citazione in matematica. Molti di voi si ricordano della sua dichiarazione, fatta nel 1886 in occasione di una relazione presentata davanti alla *Berliner Naturforscher-Versammlung*: «Dio ha creato i numeri interi, tutto il resto è opera dell'uomo»[15].

14. Heinrich Weber, «Leopold Kronecker», *Jahresberichte der deutschen Mathematiker Vereinigung*, vol. 2, 1891-1892, p. 19-20.
15. «Es ist ein Standpunkt, der besonders in seinen späteren Jahren hervortrat, vielleicht mehr noch im persönlichen Verkehr als in der Oeffentlichkeit; aber auch öffentlich hat er seine Anschauungen nicht verleugnet und z.B. in der Festchrift zur Zeller's Jubiläum scharf hervorgekehrt. «In Bezug auf Strenge der Begriffe stellt er die höchsten Anforderungen und sucht alles, was Bürgerrecht in der Mathematik haben soll, in die krystallklare eckige Form der Zahlentheorie zu zwägen. Manche von Ihnen werden sich des Ausspruchs erinnern, den in einem Vortrag bei der Berliner Naturforscher-Versammlung im Jahre 1886 that: 'Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk'»

Colin Maclaurin (1698-1746)

Nel suo *Traité des fluxions* del 1749 (p. 154-155), Colin Maclaurin scrive: «L'uso del segno negativo, in Algebra, dà luogo ad alcune conseguenze che si sono accettate con fatica e che hanno spesso generato idee che parrebbero non aver alcun fondamento reale. Questo segno indica che il valore reale della quantità rappresentata dalla lettera che segue, dev'essere sottratto (…)».

7. Una tesi sulla storia dei numeri negativi

André-Jean Glière ha sostenuto nel 2007 una tesi[16] intitolata *Histoire et épistémologie des nombres négatifs, de d'Alembert à nos jours*. La tesi di Glière è impressionante. Impressiona già dal lato quantitativo:

– 17 pagine di indice, per un totale di 1342 pagine;
– 216 pagine di allegati che presentano (con traduzione nel caso dell'importante opera di Hermann Hankel) testi poco conosciuti, spesso difficili da trovare.

L'autore riconosce (p. 1) di essere stato sconcertato dall'idea, che gli era stata suggerita, di dedicarsi a uno studio storico sullo «statuto dei numeri negativi».

La storia che riporta Glière è un bel quadro per le mie intenzioni. Le citazioni abbondano e mostrano che la gestione filosofica e didattica dei numeri negativi ha costituito una questione spinosa. Sono stati considerati grandi nomi della storia della matematica: d'Alambert, Euler, Cauchy, Lacroix, ecc.

L'autore colloca d'Alambert al centro del suo studio. Sono gli articoli Equazione, Curva, soprattutto Numero negativo dell'*Encyclopédie* detta *de Diderot et d'Alambert* che catturano l'attenzione di Glière. Ha passato a tappeto questi scritti, testimoni privilegiati delle lotte che si sono svolte nel solco dei numeri negativi, degli errori (secondo il nostro attuale punto di vista), del pensiero attorno a una questione che ci sembra così familiare.

Alla fine di una lunga analisi, Glière mette giustamente in evidenza «la moltitudine di cose false» alla quale deve ricorrere d'Alambert, per mascherare la sua non comprensione dei numeri negativi (p. 65), ciò che Glière chiama la *théorie des faux-semblants*[17].

Negli *Opuscules mathématiques* del 1761, d'Alambert scriveva, idea che si ritrova nel suo articolo dell'*Encyclopédie*: «Che mi sia permesso di osservare, quanto è falsa l'idea che si dà a volte alle quantità negative, dicendo che queste quantità sono sotto lo zero». Così, due fari dell'epoca, Euler e d'Alambert, hanno punti di vista opposti e contraddittori sul numero negativo.

Ancora, nell'articolo *Négatif* dell'*Encyclopédie*, si legge «(…) quantità negative in Algebra, sono quelle che sono associate al segno – e che sono viste da molti matematici come minori di zero. Questa idea non è però corretta, come lo vedremo fra un momento».

16. Ero membro della giuria di questa tesi, diretta da Jean Dhombres.
17. Teoria delle false sembianze.

8. Sul problema dell'insegnamento dei numeri negativi

All'inizio di questo articolo, ho menzionato le difficoltà che l'insegnante e i suoi allievi incontrano al momento di affrontare i numeri negativi. Si tratta di nozioni poste in basso alla scala, il substrato è esiguo per chi guarda le scappatoie che l'insegnante potrebbe trovare. Tornerò sulle molteplici fantasie prodotte dalla tradizione della pedagogia matematica nel tentativo di dare uno statuto accettabile a queste entità, che lo spirito stenta a elevare alla dignità dell'essere.

Gli insegnanti dimenticano spesso, coscientemente o no, il travaglio che hanno avuto con i numeri negativi; l'abitudine è una seconda natura, come disse così bene Aristotele nell'*Etica a Nicomaco*. Fortunatamente c'erano gli allievi meno docili, che si aggrappavano alla loro incomprensione, a differenza dei migliori che credevano di aver capito, ma che sapevano solo manipolare queste entità, seguendo regole prefissate. Sono proprio gli allievi più deboli che, strappandoci dal nostro ridotto, ci hanno costretto a svegliarci dal letargo per mettere ordine alle idee. I tentativi di spiegazione mi hanno rivelato che nemmeno io avevo veramente capito. Come osservava Karl Weierstrass (1815-1897):

«Le principali difficoltà dell'analisi superiore vengono precisamente da una presentazione ingenua e non sufficientemente dettagliata delle nozioni basilari e delle operazioni aritmetiche»[18]. Gli esempi che presenterò mostrano che questa ignoranza mi collocava in una compagnia che mi onorava. Si sbaglierebbe pensando che la scomoda confessione concerna unicamente il lontano passato dei pionieri. Era ancora d'attualità negli anni 1950-1960, come lo si può notare nella citazione di Georges Glaeser (1918-2002), noto matematico, allora professore all'Università di Strasburgo[19]:

«Un anno fa, sarei stato pronto a giurare che non avrei mai incontrato la minima difficoltà con i numeri relativi. Oggi colloco all'età di 25 anni il mio primo contatto con una dimostrazione totalmente formale della regola dei segni; era l'epoca della comparsa dei primi volumi di Bourbaki. Scrivendo questo articolo, sono passato da sorpresa a sorpresa, prendendo coscienza del gran numero di finezze cognitive che mi era sfuggito su questo tema».

9. Finzioni e altre analogie semplicistiche

La tradizione ha trovato scampo nelle analogie semplicistiche o deboli, che mirano a introdurre i numeri negativi per mezzo di metafore fumose, che non erano altro che *couille de bouc*[20]. È con la moltiplicazione che l'asticella si alza, e per fortuna. Infatti, senza di essa, le giustificazioni «esterne» funzionerebbero e il problema della

18. Citato da Pierre Dugac, Éléments d'analyse de Karl Weierstrass, *Archive for History of Exact Sciences*, volume 10, 1973, p.41-176, p. 77.
19. Georges Glaeser, Epistémologie des nombres négatifs, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 22, 1981, p. 303-346, p. 305. (Vedere anche l'allegato 3)
20. Letteralmente: testicolo di becco. Apparentemente triviale, magnificamente evocatrice, questa espressione si usava negli anni della mia gioventù. È un esempio vivente della flessibilità e del dinamismo della lingua, che afferra le situazioni più comiche per dedurne immagini parlanti (vedere www.histoires-etranges.com/bouc.html).

natura dei numeri negativi apparirebbe meno acuto, anche se continuerebbe, almeno sul piano filosofico, a mantenere tutta la sua pertinenza.

Al primo posto fra questi modi di fare, la temperatura e la contabilità. Così si moltiplica una temperatura di –4 gradi per un'altra di –2 gradi e si ottiene 8 gradi; oppure un debito di 100 franchi per un debito di 20 franchi per ottenere un avere di 2000 franchi. Anche la retta numerica non è appropriata. Mi sembra che per essere ben utilizzata presupponga la nozione di numero negativo, che servirà da base alla distanza negativa. Parlare del punto «–1» sulla retta reale sa di *pot-pourri*. Il punto appartiene alla geometria e non si sa bene che cos'è –1; diventerebbe così un numero, mentre, semmai, sarebbe piuttosto una distanza negativa e ciò va spiegato…

Avendo criticato i tentativi che la tradizione ha immaginato per rendere concreti i numeri negativi, ho affrontato, a mia volta, l'esercizio. Non ho più potuto sperimentare il risultato, essendo fuori dall'insegnamento da parecchio tempo. La realizzazione di questa idea dovrebbe effettuarsi per mezzo di una costruzione dinamica, appoggiata da un'animazione video. Nella descrizione che segue do la sostanza, senza alcun elemento grafico che dovrebbe (o potrebbe) accompagnarla. La situazione di base è quella che si vede nei manuali romandi: si fanno agire le proprietà delle operazioni in N (commutatività, associatività, distributività, elementi neutri).

La finzione in questione concerne un bambino nato con un solo braccio, diciamo il destro, che è perciò il «naturale» («Gli interi sono opera di Dio, tutto il resto è dell'uomo»). Nel corso degli anni il bambino ha acquisito e sviluppato numerose attitudini. Grazie ai progressi della tecnologia, diventa possibile fornirgli una protesi, che giocherà il ruolo di braccio sinistro, un braccio, dunque, «artificiale» («artificiale» si rifà all'aforisma di Kronecker). Ovviamente ci si sforza di costruire il braccio sinistro in modo che porti a quello destro la complementarità necessaria. Si cerca in un certo modo di stabilire un «isomorfismo» tra i due. Trasponendo l'idea nel campo dei numeri, si inizia da 1 del braccio destro (1_d), al quale si farebbe corrispondere 1 del braccio sinistro (1_s) che si chiamerebbe «–1». Si continuerebbe questa costruzione «biiettiva». Il numero 1_d è naturale, il numero 1_s è artificiale, ecc. Il braccio sinistro è quindi costruito, ma è ancora sprovvisto di funzionalità, è senza forma e con esso non si può fare nulla. La seconda fase prevede l'introduzione di funzionalità (cioè di operazioni che fanno intervenire le due braccia) che, più avanti, devono permettere la collaborazione intima delle due braccia nei compiti sia individuali (per esempio, addizione di negativi) sia comuni.

Qui interviene una fase che, secondo me, giustifica da sola il ricorso a una finzione di questo genere. Il costruttore è completamente libero di strutturare a suo modo il braccio artificiale. («Das Wesen der Mathematik liegt gerade in ihrer Freiheit»[21], Cantor, 1883). Potrebbe per esempio decidere che quando il braccio destro si avvicina a quello sinistro, questo si allontani. È possibile, ma non interessante, persino dannoso per la collaborazione. No, il costruttore è attento a una coordinazione delle azioni. Una coordinazione che in un certo senso è arbitraria, ma saranno i bisogni pratici a dettare le scelte. Si potrebbe dire, per esempio, che movimenti in senso contrario siano necessari per far sì che l'apporto dei due si addizioni. Le mani si muovono l'una verso l'altra e allora sono capaci di collaborare[22].

21. L'essenza della matematica risiede precisamente nella sua libertà.
22. Il modello qui proposto permette di chiarire punti di matematica elementare, spesso mal capiti. Per esempio quando si pretende di «dimostrare la convenzione» $a^{-n} = 1/a^n$.

10. Su un buon modo di presentare i numeri negativi

Una parola sulla mia storia personale per chiarire il seguito. Ho effettuato i miei studi alla facoltà di Matematica dell’ETH di Zurigo[23]. In quel tempo, il primo corso di analisi era piuttosto un corso per ingegneri. Questa formazione iniziale è rimasta la stessa, nonostante le riforme introdotte nel dopo-guerra. Per fare un esempio, la topologia generale non era nemmeno prevista. Solo al terzo semestre, Albert Pfluger, matematico rinomato, dava un corso intitolato «Topologische Räume», ma la materia presentata, che avrebbe dovuto servire da base al primo corso di analisi, ne era del tutto indipendente. Per le stesse ragioni, Bourbaki non era citato nei primi due anni. Per contro, nel seguito, una pleiade di matematici di classe mondiale (fra gli altri Heinz Hopf, Eduard Stiefel e anche Beno Eckmann; senza contare i van der Waerden e Rolf Nevanlina, che insegnavano all’università, alla quale si accedeva attraversando la viuzza Karl-Schmid Strasse) assicurava insegnamenti di livello molto alto. Ma questi concernevano solo lontanamente gli elementi. Così, nei nostri primi anni nell’insegnamento secondario ci basavamo su ciò che avevamo appreso da soli. Come scriveva Anatole France in un altro ambito, questa fortunata ignoranza ci obbligò ed essere creativi!

Uno dei lati positivi di questa situazione fu che siamo stati costretti a ripensare la materia insegnata. Sano igiene mentale per un insegnante! Allo scopo di divulgare le nostre riflessioni, con Marc-André Pichard, pubblicammo un’opera in questo senso. Fu l’occasione per un chiarimento delle basi di certi capitoli dell’introduzione all’algebra. Il capitolo dedicato ai numeri negativi iniziava con la seguente definizione (p.115): «Dato un qualsiasi elemento a di N, si genera un nuovo essere matematico, notato –a, definito dall’uguaglianza: a + (–a) = (–a) + a = 0».

Il seguito scorreva molto bene, compresa la bella dimostrazione della regola dei segni. Ci eravamo ispirati a due manuali di algebra elementare, utilizzati nelle scuole secondarie del Vallese romando.

Avevo spedito una copia, con i complimenti del caso, ad Albert Pfluger, il già citato matematico rinomato. Ne è seguito il messaggio che riporto (6.12.1972) e che rinforza la citata osservazione di George Glaeser: «Gerade der erste Teil scheint mir mit grossem Sorgfalt gemacht zu sein. Ein Fragezeichen möchte ich zur Definition auf S. 115 machen. Ich glaube nicht, dass man sagen kann, das Element –a sei durch die Gleichung a + (–a) = 0 definiert, oder doch?»[24]

In un lungo studio consacrato ai corsi di Weierstrass a Berlino (qui il corso del semestre estivo del 1878, redazione di Adolf Hurwitz), Pierre Dugac[25] riporta (p. 82) il modo con cui Weierstrass proponeva di introdurre i numeri negativi: «Per poter sempre definire l’operazione di sottrazione, egli [Weierstrass] introduce gli elementi «opposti»: dato un aggregato, a ogni elemento a dell’aggregato si fa corrispondere un nuovo elemento a’, tale che a + a’ = 0. Questi nuovi elementi a’ possiedono la proprietà seguente: (a’)’=a».

23. Con grande piacere ricordo di aver studiato e lavorato con Gianfranco Arrigo.
24. La prima parte mi sembra sia stata fatta con grande cura. Vorrei porre un punto interrogativo sulla definizione di pagina 115. Non credo che si possa dire che l’elemento –a sia definito dall’uguaglianza a + (–a) = 0, o sì?
25. Pierre Dugac, Eléments d’analyse de Karl Weierstrass, *Archiv for History of Exact Sciences* », Volume 10, Number 1 / 2, 1973, p. 41-176.

Questa visione «laica» dei numeri negativi, in un certo senso, ci porta a riconoscere che tutto ciò che si deve sapere dell'elemento –1 è come calcolare con esso. Dimmi come calcolo con te e ti dirò chi sei![26]

Allegato 1

Cito alcuni passaggi del *Triparty en la science des nombres* di Nicolas Chuquet. I riferimenti di pagina concernono il bell'articolo che gli ha dedicato Maryvonne Spiesser[27].

1. (p. 138-139) Nel suo *Triparty*, Chuquet non si è limitato alle radici di indice 3, ma ha aperto «il soggetto con una definizione generale di una 'radice di numero'»:
   «E bisogna sapere che vi sono infinite specie di radici perché alcune sono radici seconde, alcune radici terze, alcune radici quarte, alcune quinte e così continuando senza fine. (…)
   Di radici prime non se ne trovano. E chi ne vorrebbe, per completare l'ordine, gli converrebbe dire che le radici prime sono semplicemente i numeri stessi (…)».
   Maryvonne Spiesser dà alcuni esempi che mostrano la grande abilità di Chuquet nel praticare espressioni irrazionali complesse. A tale proposito, il suo commento (p. 139): «Chuquet è il primo ad adottare vere notazioni valide che non appartengono più al dominio dell'abbreviazione».
2. La regola dei segni è presente nel *Triparty*: «Più e più, meno e meno, aggiungiamo. Più e meno, sottraiamo». (p. 140).
3. Come nelle radici, i cui indici sono in numero illimitato, il grado dell'incognita in un'equazione non è soggetto ad alcun limite. Il nostro «esponente» è detto «denominacion». Così, l'incognita, o la cosa, è detta «primo», il quadrato della cosa è detto «secondo», il cubo «terzo», la quarta potenza «quarto», ecc. (p. 142). Il numero («preso senza alcuna *denominacion*») può essere considerato contrassegnato con la *denominacion* 1. Si nota pure l'apparizione della denominacion 0. (p. 143). Abbondando, una *denominacion* può essere negativa (p. 147). Questa infinità di possibilità per l'esponente esclude *ipso facto* la presenza della geometria.

Maryvonne Spiesser, che ringrazio per aver letto attentamente questo articolo, mi ha fatto la seguente interessante osservazione, che trascrivo alla lettera: «Chuquet è molto abile nelle sue notazioni perché riesce a indicare le potenze dell'incognita fino all'infinito, potenze che usa anche con l'esponente negativo e con ciò può enunciare una regola perfetta per il prodotto di due potenze per mezzo dell'addizione degli esponenti. Per contro, ciò che mi colpisce, è che nel suo modo di notare non c'è

26. Qui penso a ciò che diceva Gaston Bachelard dell'elemento chimico. In quanto tale non esiste che virtualmente. La sua definizione è subordinata ai metodi di purificazione che ce lo fanno conoscere.
27. Maryvonne Spiesser, «L'algèbre de Nicolas Chuquet dans le contexte français de l'arithmétique commerciale», Numdam, 2006, tome 12, nº 1, p. 7-33.

nulla che indichi l'incognita, nessuna c, nessuna x o altro, ciò che significa che lui non concepisce un tale oggetto matematico; secondo me è simile al blocco greco del quale parli. Nello stesso periodo e nel secolo seguente, i cosiddetti 'cossisti'[28] usano una particolare notazione per ogni potenza, ciò che blocca ogni efficacia operativa».

Allegato 2

(Per i dettagli di questo allegato, vedere: Michael-Markus Toepell, *Über die Entstehung von David Hilberts «Grundlagen der Geometrie»,* Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht, 1986. L'indicazione delle pagine si riferisce a questa opera.)

Hilbert è arrivato solo lentamente a questa nuova visione dei fondamenti della geometria. Così, nel 1891, in un primo corso dedicato alla geometria proiettiva, scriveva (p. 21): «La geometria è la scienza delle proprietà dello spazio. Si distingue essenzialmente dai domini della matematica pura, come per esempio la teoria dei numeri, l'algebra, la teoria delle funzioni». E più in là, dopo aver caratterizzato la matematica pura, Hilbert afferma: «Succede tutt'altra cosa con la geometria. (…) Lo spazio non è un prodotto del mio pensiero, ma mi è dato attraverso i sensi. Ho bisogno dei miei sensi per approfondire [ergründen] le sue proprietà. Ho bisogno dell'intuizione e dell'esperienza come per approfondire le leggi della fisica, (…)».

Nel 1894, Hilbert dà un corso sui fondamenti della geometria. Il suo punto di vista non è evoluto. Si trovano infatti nell'introduzione di queste righe (Toepell, 1986, p. 58): «Fra i fenomeni o fatti sperimentali che ci sono offerti dalla considerazione della natura, c'è un gruppo particolarmente notevole, il gruppo dei fatti che determinano la forma esteriore. La geometria si occupa di questi fatti. (…)

Nel 1898 (p. 144), in un corso sui fondamenti della geometria euclidea, Hilbert afferma sempre che «la geometria è una scienza naturale».

Allegato 3

Blaise Pascal scrive[29]:

«Essendo queste cose ben intese, torno alla spiegazione del vero ordine, che consiste, come dicevo nel definire tutto e nel dimostrare tutto».

«Certamente questo metodo sarà bello, ma è assolutamente impossibile: perché è evidente che i primi termini che si vorrebbero definire, ne supporrebbero dei precedenti per servire alla loro spiegazione (…)».

«Inoltre, spingendo le ricerche sempre più, si arriva necessariamente a termini primitivi che non si possono più definire e a principi così chiari che non se ne trovano altri che servano alla loro dimostrazione.» (…)

«È ciò che la geometria insegna perfettamente. Non definisce nessuna di queste cose (…) perché questi termini designano così naturalmente le cose che signi-

28. Dal termine «cosa», in francese «la chose», in tedesco «die Coss», utilizzato per indicare l'incognita. Per esempio, l'opera di Cristoph Rudolff del 1525 «Behend und hübsch Rechnung durch die kunstreichen Regeln Algebre so gemeinicklich die Coss genent werden», che traduciamo «Calcolo abile ed elegante secondo le ingegnose regole dell'algebra che è coralmente detta la Coss».

29. «Opuscules», in Pascal, *Œuvres complètes*, nrf Gallimard, Bibliothèque La Pléiade, 1954, p. 578-579.

ficano, per chi capisce la lingua, che il chiarimento che si vorrebbe fare porterebbe più oscurità che istruzione».

Rimarchiamo fra l'altro che Pascal qui riconosce implicitamente che le definizioni iniziali di Euclide non sono definizioni!

Allegato 4

Ecco qualche estratto – nel loro spirito e non alla lettera – dal citato articolo di Glaeser.

(p. 304) L'introduzione concettuale dei numeri negativi è stata un processo di una lentezza sorprendente. È durata più di 1500 anni, dall'epoca di Diofanto ai nostri giorni!

(p. 313) Così la pratica «clandestina» del calcolo dei numeri relativi precede di 1600 anni la sua comprensione. Ecco una lezione che la didattica della matematica non dovrebbe dimenticare!

(p. 316) A partire dal XVII secolo, i numeri negativi appaiono naturalmente nei lavori scientifici. Sono accettati in virtù di una specie di metodo Coué[30]: l'efficacia del calcolo è sufficiente per confortare il matematico nella sua fede. È negli scritti a carattere pedagogico che si manifesta il disagio. Lo scienziato non riesce a dare una spiegazione che giudica soddisfacente. Ma siccome non può decentemente confessare la sua debolezza, fa abuso di circonlocuzioni ricche di forme grammaticali negative. È questo un *sintomo* che si trova in quasi tutti gli autori che citiamo (ad eccezione forse di Clairaut, che scrive sempre con autorità).

30. Emile Coué (1857-1926), farmacista francese che creò, o meglio introdusse, un metodo di guarigione e miglioramento personale basato sull'autosuggestione positiva.

2. Scacchi e progressioni geometriche: da Dante alla Mesopotamia passando per la Persia

Stefano Buscherini

L'incendio suo seguiva ogne scintilla;
ed eran tante, che 'l numero loro
più che 'l doppiar de li scacchi s'inmilla[1]

This work examines the geometric progressions in relation with the chessboard problem and the tale of the invention of chess. Dante used the large number of this problem in his famous tercet of Divine Comedy's Paradiso but previously Fibonacci, the Arab writers Ibn Ḫallikān, Uqlīdisī and the Hindu Mahāvīra, among others, explained the methods to calculate it. Finally in this article there some examples of geometric progressions in the Mesopotamic, Egyptian and Iranian traditions.

La terzina citata descrive il volo degli Angeli attorno al cerchio infuocato da cui escono ed esprime l'idea di un numero «spaventosamente grande, infinito» secondo le parole che D'Amore fa pronunciare al Sommo Poeta nel suo libro «*Dante e la matematica*»[2]. Non solo, sempre D'Amore riporta il numero preciso che si ottiene «inmillando» a partire da 1 e per 63 volte, cioè ponendo le potenze di mille nelle 64 caselle della scacchiera:

1 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001
001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001
001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001
001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001

Il libro propone infatti la vita romanzata del grande Poeta fiorentino e mette in collegamento i passi matematici presenti nella Divina Commedia con gli eventi accaduti nel corso degli anni. Nel caso della terzina in questione, lo spunto sarebbe venuto a Dante quando si trovava a Roma in attesa di una risposta del Cardinale Malaspina a una domanda della delegazione fiorentina e durante lo svolgersi del torneo di scacchi cittadino presso Campo dei Fiori.

All'interno di questa vicenda è inserito il racconto fatto a Dante da un «impiegato del Vaticano» sull'invenzione degli scacchi, in cui si narra che il mago Sissa Nasir[3] avrebbe ideato il bellissimo gioco per il re di Persia. Come ricompensa avrebbe chiesto un chicco di riso per la prima casella della scacchiera, due chicchi per la seconda, quattro chicchi per la terza, e così via fino a ricoprirle tutte (cioè raddoppiando ad ogni casella la quantità precedente). L'addetto a conteggiare la quantità dovuta, il gran ciambellano e abacista di corte, dovette però informare il sovrano che neppure ammassando tutto il riso di Persia, di Cina, di India e di ogni terra emersa, raccolto nel pre-

1. Dante, Paradiso XXVIII 91-93.
2. D'Amore 2011: 108.
3. Nome che si ricollega a Ṣaṣṣa (o Ṣiṣṣa) ibn Dāhir, mitico inventore degli scacchi.

sente e nel passato, si sarebbe potuta esaudire la richiesta del mago. La risposta del sovrano persiano perciò fu la decapitazione dell'inventore per alto tradimento e la condanna del ciambellano al calcolo della cifra esatta.

Questo è il racconto che Dante avrebbe ascoltato e che lo avrebbe tanto colpito da richiedere la settimana successiva a un abacista fiorentino il calcolo della quantità che, secondo la «maniera degli infedeli», arrivava a 18.446.774.073.709.551.615 chicchi di riso[4].

Per dimostrare ai suoi lettori la grandezza del numero, D'Amore[5] si è «divertito» a distribuire tutti i chicchi sulla superficie terrestre (estesa per $5{,}0995 \cdot 10^{18}$ cm^2) ottenendo 3,62 chicchi per cm^2. Ha poi svolto lo stesso calcolo con il valore ottenuto per gli angeli, ricavando una densità di $2{,}10^{170}$ per cm^2 di superficie terrestre.

La questione più interessante dal punto di vista della storia della matematica è se Dante fosse in grado di eseguire tali calcoli: se così fosse, è certo che non impiegò il sistema numerico latino, ma molto probabilmente il nuovo sistema numerico indo-arabo che si stava facendo strada nell'Europa Occidentale[6].

Tra i precursori del Rinascimento scientifico in Italia e in Europa fu Leonardo Pisano (circa 1180-1250 d.C.), detto Fibonacci, che, dopo aver appreso la matematica araba nei suoi viaggi nel Mediterraneo, scrisse il *Liber abbaci* in cui spiegò i procedimenti da applicare per svolgere le operazioni con le nuove cifre[7].

All'interno dell'opera si trova anche l'«*Incipit pars* 9^{a} *de duplicatione scacherii, et quorundam aliarum regularum*» in cui Fibonacci tratta dei due metodi da usare per calcolare la somma delle potenze di due, collegate alle caselle della scacchiera, senza però menzionare la leggenda: il primo consiste nella duplicazione continua dei valori e nella loro somma; il secondo invece si basa sull'elevamento a potenza dei valori collegati ad ogni casella.

4. Nel racconto di D'Amore converge un buon numero di temi della storia della matematica: – il problema della duplicazione collegata alle caselle degli scacchi; – l'abaco come strumento per fare i conti nell'Italia mercantile del Trecento (per l'abaco introdotto in Occidente da Gerberto d'Aurillac con l'ausilio delle cifre arabe, vedi Buscherini 2013a); – l'introduzione delle cifre arabe in Europa (per il sistema numerico arabo ed i suoi impieghi, in particolare in ambito astronomico, vedi Buscherini 2012a); – il problema dell'infinito. Relativamente all'ultimo punto è importante sottolineare le frasi che accompagnano l'analisi dell'operazione di somma del numero di chicchi di riso da parte dei due protagonisti del racconto: «infinito non può essere, perché i chicchi, ogni volta, sono una quantità finita e la somma prevede solo sessantaquattro addendi. Come può essere infinito? Sempre finito sarà, ma grande, Dio onnipotente, tanto grande che nessun essere umano può contarlo» (D'Amore 2011: 108).
5. D'Amore 2011: 184-185.
6. Il problema della scrittura di questo numero era già stato affrontato da al-Bīrūnī (973-1052 d.C.) nella sua opera *al-Āṯār-al-hāqīā 'an al-qurūn al-ẖālīa* (*Le vestigia del passato*) al momento di spiegare le cifre presenti nella tabella «Intervalli in giorni tra le epoche delle ere»: dopo aver presentato molto rapidamente il problema della duplicazione delle caselle degli scacchi, scrisse il risultato con le cifre indiane, 18.446.744.073.709.551.615, con il sistema sessagesimale, 30.30.27.9.5.3.50.40.31.0.15 ed infine lo riscrisse con il sistema arabo detto *ḥurūf al jummal*, ovvero «lettere dell'alfabeto secondo il loro valore numerico» (vedi Buscherini 2012a).
7. In sintesi il trattato presenta nei primi sette capitoli i fondamenti dell'aritmetica (con l'introduzione delle cifre indo-arabe), poi quattro capitoli di matematica mercantile, un capitolo dedicato a quella che viene definita come «la matematica divertente», uno che affronta il metodo della falsa posizione ed infine due capitoli che riguardano, ad esempio, l'estrazione di radici quadrate o cubiche.

Per quest'ultimo caso, Fibonacci, dopo aver raddoppiato il valore di partenza di uno ed avere ottenuto 2, eleva quest'ultimo al quadrato e nota che il risultato, 4, è di 1 più grande della somma dei numeri precedenti. Analogamente il quadrato di 4, ovvero 16, è la somma dei numeri precedenti aumentato di 1.

Posizione	Valore
1	1
2	2
3	$4 = 2^2$
4	8
5	$16 = 4^2$

Tabella 1. Calcoli di Fibonacci

I valori calcolati da Fibonacci sono poi: 256, 65.536, 4.294.967.296, 18.446.744.073.709.551.616 e 340.282.366.920.938.463.463.374.607.431.768.211.456 (la somma del contenuto di due scacchiere aumentato di 1). Prima di concludere tale parte Fibonacci presenta anche un insieme di grandezze crescenti per rendere più comprensibile la dimensione dei precedenti numeri: associa al contenuto delle prime 16 caselle una cassa di bisanti, una moneta d'oro del tempo; al contenuto della terza e quarta riga di caselle (che duplicano le casse di bisanti) associa una casa; analogamente per la quinta e sesta riga al termine dei calcoli viene considerata la città; infine le ultime due righe duplicano il valore delle case e quindi del loro contenuto in casse e bisanti.

Non è dato sapere se Dante conosceva le opere del Fibonacci, ma si sa che suo figlio Jacopo fu allievo di Paolo dell'Abaco, che insegnava nella scuola d'abaco posta di fronte alla chiesa di Santa Trinita. Inoltre Bagni nella sua «Storia della Matematica»[8] fa seguire ai paragrafi dedicati a Fibonacci e alla sua introduzione «effettiva e definitiva dei principi dell'aritmetica indo-araba» tutta la parte in cui l'autore tratta di Dante e della matematica presente nei passi della Divina Commedia, a dimostrazione dell'importanza dell'opera per la conoscenza dello stato di questa scienza nel XIII secolo. Possiamo quindi supporre che il Sommo Poeta avesse le cognizioni per affrontare gli aspetti matematici descritti.

Ritornando quindi alla nascita degli angeli, la teoria matematica su cui si basa il problema della scacchiera è la progressione geometrica, ovvero una successione (finita o infinita) di numeri, detti termini della progressione, tali che il quoziente tra due elementi consecutivi sia sempre uguale a un numero costante, detto *ragione* della successione (indicata solitamente con q). Ad esempio, nel caso del racconto dell'invenzione del gioco degli scacchi, la successione è:

1; 2; 4; 8; 16; 32; …
mentre la ragione è 2 (= 2/1 = 4/2 = 8/4)[9].

8. Bagni 1996, I: 159-172.
9. Un altro esempio della «grandezza» del numero che si può ottenere con una progressione geometrica è il problema che richiede di calcolare quanti antenati ha avuto un individuo che appartiene alla 20° generazione di una famiglia: la soluzione è 1.048.576. Infatti l'individuo in questione ha avuto due genitori, ciascuno dei quali ne ha avuti altrettanti e così via. In questo caso il risultato è dato dalla somma dei termini di una progressione geometrica di 19 termini, con ragione q=2 e il primo termine uguale a 2.

Interessante è ora risalire alle origini del nome del mago citato nel racconto di D'Amore[10]: lo scrittore arabo Ibn Ḫallikān (1211-1282 d.C.) nel suo *Kītab wafayāt al-a'yān*, ovvero l'*Obituario degli uomini illustri*, alla voce aṣ-Ṣūlī, scrisse che, sebbene egli avesse incontrato molte persone che credevano che egli fosse stato l'inventore del gioco degli scacchi, in verità l'ideatore fu Ṣiṣṣa ibn Dāhir l'Indiano per il divertimento del re Shihrām. La storia narrata da Ibn Ḫallikān racconta che il sovrano ammirò talmente il gioco e ne fu così contento che disse che era il miglior metodo per imparare l'arte della guerra ed ordinò che fosse posto nei templi del suo regno. Manifestò inoltre la sua soddisfazione e la sua riconoscenza sia verso il cielo, che aveva accordato questo regalo al suo regno, sia verso Ṣiṣṣa a cui disse di chiedere come ricompensa qualsiasi cosa desiderasse. L'inventore domandò allora di ricevere il grano necessario a porre un chicco nella prima casella della scacchiera, due chicchi nella seconda, fino a riempire, duplicando il numero dei chicchi, l'ultima casella. La richiesta terminava con la frase «qualunque sia la quantità, io chiedo che mi sia concessa».

Il sovrano, che a quanto pare non era molto «ferrato» in matematica e che intendeva gratificarlo con un dono notevole e probabilmente degno di un re, esclamò che una simile ricompensa era troppo piccola e che meritava una ricompensa adeguata al valore del gioco creato. Ṣiṣṣa invece, più pronto in matematica, noncurante delle proteste reali, continuò nella sua richiesta.

A questo punto il sovrano ordinò che la richiesta fosse esaudita e mise i suoi contabili a calcolare la quantità dovuta. Come ormai sappiamo essi fecero sapere al re, anche mostrandogli una serie di moltiplicazioni, che non c'era abbastanza grano al mondo per esaudire la richiesta[11]. Il racconto termina con la dimostrazione da parte di Ṣiṣṣa di quanto fosse grande il numero: associa alle quantità di grano posta nelle caselle della scacchiera prima delle unità di capacità, poi dei magazzini di grano che devono contenere le precedenti unità di misura ed infine delle città, necessarie per raccogliere questi edifici. Il passaggio ricorda in modo sorprendente quello usato da Fibonacci per dimostrare la grandezza dei numeri presi in considerazione.

Proprio questo ultimo aspetto aveva spinto Ibn Ḫallikān, almeno secondo le sue parole, ad una così ampia digressione sull'argomento: egli aveva voluto dimostrare come era possibile raggiungere un numero tanto grande duplicando il contenuto delle caselle della scacchiera.

Anche Høyrup per analizzare la progressione geometrica di ragione due, e in particolare quella collegata alla scacchiera, all'interno della tradizione sub-scien-

10. I testi arabi usano i nomi di Ṣiṣṣa o Ṣaṣṣa o Ṣuṣa ibn Dāhir per indicare l'inventore degli scacchi e Shihrām o Shahrām per il sovrano.
11. Per la precisione occorrerebbero 9.223.372.036.854 quintali di grano, corrispondenti alla produzione mondiale di circa 2.000 anni (vedi la voce «Progressioni geometriche» in Piccato 1987), oppure una Terra con superficie otto volte la nostra e completamente coltivata (D'Amore e Oliva 1993: 124). Questi dati dimostrano la grande differenza che intercorre tra la comunicazione dello stesso racconto nel passato e nell'epoca moderna. Mentre gli antichi si accontentavano di strabiliare il lettore con l'immensità del numero, nell'epoca moderna quel valore immenso viene ricondotto ad un aspetto più vicino all'individuo, cercando di calarlo nella realtà attraverso l'uso delle nuove tecnologie affiancate alle recenti informazioni. Quindi, se per l'uomo antico la richiesta di grano non poteva essere accolta, per noi moderni è possibile non solo stabilire il suo peso, ma anche calcolare la quantità di terra necessaria alla sua coltivazione e perfino il tempo necessario per la sua produzione.

tifica[12] dedicata ai calcoli commerciali, parte da una fonte araba: Uqlīdisī (920-980 d.C.) nel 32° capitolo del IV Libro del *Kitāb al-Fuṣūl fī al-Ḥisāb al Hindī* (*Libro dei capitoli sull'aritmetica indiana*) tratta il «Duplicare 64 volte», ovvero il problema del calcolo dell'ultimo valore ottenuto dalla sequenza delle duplicazioni e della somma di tutti i numeri della serie.

Per spiegare un metodo per la soluzione dei due problemi, Uqlīdisī sfrutta l'esempio in cui il primo termine è 1 e la ragione 2[13]: attribuisce al numero di partenza e a ogni duplicazione successiva una posizione e nota che, se si effettua il quadrato di un numero di una certa posizione, si ottiene il numero che si trova nella posizione precedente quella doppia della posizione di partenza. La somma di *n* termini invece è data dal valore, a cui va sottratto 1, della posizione n+1.

Posizione	Numero
1	1
2	2
3	4
4	8
$7 = (4 \cdot 2) - 1$	$64 = 8^2$
$13 = (7 \cdot 2) - 1$	$4096 = 64^2$

Tabella 2. Esempio da Uqlīdisī

Inoltre, visto che le posizioni svolgono la funzione di esponente della potenza, Uqlīdisī spiega anche come ottenere il valore di una cella qualsiasi moltiplicando il contenuto di due altre celle (ad esempio, moltiplicando i numeri nella posizione 10 e 11 per ottenere il valore in posizione 20).

Il capitolo si conclude con il suggerimento di Uqlīdisī di costruire una tabella in cui le righe riportino il valore collegato a quella cella e la somma parziale, affinché i valori siano subito disponibili quando necessari.

Oltre alla descrizione di questi metodi, il testo fornisce anche due importanti spunti per l'analisi storica del problema a cui il capitolo è dedicato. Il primo è collegato alla ricerca da parte di alcuni popoli di regole per la duplicazione fino a 30 volte, questione presente anche nel problema n° 13 della collezione del periodo carolingio *Propositiones ad acuendos juvenes* attribuita ad Alcuino (735-804 d.C.): in esso si afferma che un re ordinò al suo servo di radunare un armata da 30 città e che il numero degli uomini arruolati in ogni località seguisse una progressione geometrica con ragione uguale a due e primo valore posto a 1.

L'altra spunto degno di nota è l'affermazione di Uqlīdisī che i metodi per la soluzione del problema della duplicazione sono stati forniti sia dai «contabili indiani»

12. A questa tradizione Høyrup (1987) oppone una tradizione scientifica, presentandone le relative fonti greche ed indiane. Altre volte tale problema viene inserito nella categoria dei «*recreational problems*», definiti come problemi e indovinelli che usano il linguaggio di ogni giorno, ma non si curano delle circostanze della realtà. Di essi Høyrup evidenzia anche un'altra importante caratteristica, ovvero quella di essere divertenti e capaci di interessare con il loro tratto di assurdità. Per alcuni esempi di problemi medioevali di aritmetica ricreativa, vedi D'Amore e Oliva 1993: 119-124.
13. Uqlīdisī prende in considerazione anche il caso in cui il primo termine della successione sia 2.

sia dagli altri popoli. Questo dimostra che già a suo tempo era noto che la questione era stata affrontata da popoli diversi e non era di origine esclusivamente indiana.

Per quanto riguarda però quest'ultima tradizione, gli Indiani possedevano una formula equivalente a

$$S_n = a_1 \cdot [(q^{n-1} - 1)/(q - 1)]$$

Un altro metodo per calcolare la potenza ennesima viene descritto invece dal matematico Mahāvīra a partire dal seguente problema: calcolare la ricchezza di un mercante rappresentata da una serie geometrica il cui primo termine è 7, ragione 3 e numero dei termini uguale al quadrato di 3.

Il procedimento consisteva nel prendere il numero dei termini ($9 = 3^2$) e, dopo avergli sottratto 1 se dispari, dividerlo per due. Il metodo andava ripetuto fino a raggiungere con le divisioni successive l'1. Quindi, nell'ordine inverso dei risultati ottenuti dalle divisioni, bisognava moltiplicare per la ragione o elevare al quadrato a seconda che i precedenti risultati fossero dispari o pari[14].

9	8	4	2	1
$3 \cdot (81)^2$	$(81)^2$	9^2	3^2	$3 \cdot 1$

Tabella 3. Metodo di Mahāvīra

Ritornando al racconto di Ibn Ḫallikān sull'origine degli scacchi, va notato che viene preso in considerazione anche un altro gioco che necessitava di una tavola da gioco e che, sempre secondo lo scrittore arabo, fu inventato dal fondatore della dinastia persiana Ardhashīr ibn Bābek, da cui il nome *nerdashīr* (l'odierno *backgammon*). I due giochi sono messi in collegamento anche da Ferdowsī nel suo *Libro dei Re*, in cui viene raccontato che un'ambasceria indiana arrivò alla corte del principe persiano Kìsra portando gli scacchi[15] e sfidando i Persiani a scoprire le regole del gioco.

> «Comanda tu che pongansi dinanzi
> Questo scacchiere e d'ogni cosa sua
> Dican sentenza, chiaro interpretando
> Il nobil gioco e l'adoprando. Sappiano
> D'ogni suo scacco il vero nome, e in quale
> Guisa dènno esser mossi e qual d'ognuno
> Adeguata è casella»[16].

14. La stessa regola si trova nel *Līlāvatī*, ovvero lo *Splendido*, di Bhāskara (nato il 1114 d.C.). È importante ricordare questo testo, in quanto è considerato il trattato sanscrito "standard" relativo all'aritmetica. Anche gli altri due testi dello stesso autore, il *Siddhānta-śiromaṇi* e il *Bīja-gaṇita*, presentano la stessa caratteristica, ma rispettivamente riguardo alla matematica astronomica e all'algebra.
15. Anche Ferdowsī fornisce un racconto sull'origine indiana degli scacchi: il gioco sarebbe stato ideato dai saggi di questo popolo su mandato del principe Gaw, che voleva consolare la madre per la morte del fratellastro ucciso in battaglia. Nel racconto non è presente però alcun aspetto matematico.
16. Riporto la traduzione in versi del poema epico fatta da Pizzi, Firdusi 1886-1888, VII: 222-223.

Alla corte persiana solo il saggio Buzurc'mìhr riesce nell'impresa, scoprendo che il gioco rappresenta un campo di battaglia con le armate schierate[17] e a sua volta inventa un nuovo gioco, il «nardiludio» o trictrac, per lanciare la stessa sfida alla controparte indiana. Bisogna dire però che il racconto è la riproposizione di una novella del periodo sasanide, intitolata *Wizārīšn ī čatrang ud nīhišn ī nēw-ardaxšīr*, ovvero «*La spiegazione degli scacchi e la disposizione della tavola reale*», datata al VI o VII sec. d.C.

Il testo, che è stato descritto e analizzato recentemente da Antonio Panaino[18], è un racconto pahlavi che fornisce la spiegazione dell'introduzione degli scacchi in Persia e dell'invenzione del *nēw-ardaxšīr*[19], il gioco in cui due avversari si fronteggiavano usando due dadi a 6 facce e 15 pezzi bianchi o neri ciascuno, che venivano mossi su una tavola suddivisa in due sezioni di 12 case ciascuna.

Anche in questo caso i protagonisti sono un sovrano, Xusraw I (531-579 d.C.), il suo campione, Wuzurgmihr, e uno sfidante, il messo del sovrano indiano.

Secondo il racconto, un sovrano indiano avrebbe inviato alla corte persiana insieme a una carovana di regali anche il gioco degli scacchi e la scacchiera senza però fornirne la spiegazione. La sfida rivolta al popolo persiano è proprio quella di trovarne la soluzione. A differenza del passo di Ferdowsī, qui Wuzurgmihr, oltre a risolvere l'enigma, gioca contro il messo straniero battendolo per ben tre volte.

La seconda parte del racconto è dedicata al *nēw-ardaxšīr*, il gioco inventato da Wuzurgmihr, e al di lui viaggio in India per sfidare a sua volta gli Indiani a comprenderne le regole.

Non appare nel testo l'aspetto matematico collegato alle caselle della scacchiera, è presente invece la contesa «logico-intellettuale», tipica delle disfide matematiche dell'antichità[20]. È poi riscontrabile, come sottolineato da Panaino, un collegamento ai temi astrologici tramite il gioco del *nēw-ardaxšīr*: «il ruotare delle pedine sulla tavola del backgammon viene paragonato all'errare degli uomini nel mondo, legati da un vincolo al *mēnōg* e costretti a ruotare e declinare secondo l'influsso dei sette pianeti e delle dodici costellazioni»[21].

Un tratto simile è presente, secondo Mas'ūdī (897-957 d.C.), anche nel problema della duplicazione delle caselle degli scacchi: nella sua opera «*Praterie di oro*

17. «L'ampio scacchiere qual di pugna è un campo,
E fe' il loco del re nel medio punto,
Da sinistra a destra ivi ordinate
Le sue falangi, posti innanzi a tutti,
Avidi di battaglia, i fantaccini» (Firdusi 1886-1888, VII: 227).
18. Panaino 1998. Nel saggio viene anche confrontato il testo pahlavi con quello di Ferdowsī, evidenziando le differenze che intercorrono tra i due, fatto che ha portato l'autore a dedurre che il secondo dipende da una tradizione vicina a quella del primo, certamente anteriore tuttavia e completamente indipendente.
19. Il titolo del gioco, che ricorda il nome di un sovrano sasanide, può essere tradotto in «*Il valente, buono o gagliardo Ardaxšīr*» e diventerà in persiano e arabo *nard*.
20. Secondo le regole di questi duelli mentali un matematico gettava il suo guanto di sfida inviando a un collega, che a sua volta doveva rispondere in modo simile, un certo numero di problemi da risolvere in un tempo prestabilito. Questi scontri intellettuali potevano avvenire alla presenza di un pubblico, al cospetto dei sovrani o di altri dotti. Il premio finale consisteva nella fama acquisita dal vincitore, ma anche in denaro, nel conseguimento di cattedre presso le università o anche in nuovi studenti disposti a pagare per le lezioni frequentate.
21. Panaino 1998: 55. Il *mēnōg* nella tradizione iranica è la forma dell'esistenza spirituale.

e miniere di gemme» lo scrittore arabo, dopo aver ricordato che il gioco degli scacchi era stato inventato sotto il regno del sovrano indiano Balhït e che questi li avrebbe preferiti al backgammon, afferma che esso o il risultato della progressione (dal testo non risulta chiaro) aveva per gli Indiani un significato astrologico poiché permetteva di scoprire gli eventi futuri o il destino di un individuo.

Aggiunge inoltre che lo stesso sovrano avrebbe studiato il numero che si ottiene dalla somma della progressione geometrica collegata alle caselle della scacchiera, 18.446.774.073.709.551.615, mentre il metodo del suo calcolo sarebbe stato tenuto segreto dagli Indiani[22].

Probabilmente, sebbene la vicenda della novella persiana si svolga in un ambiente cortese e l'opera sia un «libello dilettevole e didascalico nei suoi semplici ammaestramenti di saggezza e buon senso, fruibile anche e, forse, soprattutto, da giovani e adolescenti di buona famiglia»[23], uno dei suoi scopi non era quello di divertire o di stupire il lettore attraverso un problema matematico, ma di ricordare l'origine indiana degli scacchi sasanidi[24], focalizzare l'attenzione sulla contesa intellettuale tra sapienza indiana e iranica, nonché sulla figura del saggio Wuzurgmihr (il vero eroe della vicenda, sempre secondo Panaino) e dimostrare infine che il mondo iranico è l'effettivo depositario della sapienza.

Benché nella novella non siano presenti tracce della progressione geometrica e della sua teoria o del suo collegamento al gioco degli scacchi, è possibile trovare nel secondo capitolo del *Vīdēvdād* una progressione aritmetica rappresentata dalla sequenza delle frazioni

1/3 2/3 3/3

Le tre frazioni sono usate per permettere a Yima[25] di triplicare la superficie terrestre in tre fasi e poter così ospitare il gran numero di persone e di animali che si era prodotto grazie alle migliori condizioni di vita createsi durante il regno di questo sovrano: la prima volta la superficie viene estesa di 1/3, la seconda di 2/3 e l'ultima di 3/3.

Per ottenere l'ampliamento in tre momenti, cioè impiegando il numero 3 così importante per la tradizione persiana, l'unico metodo possibile era quello di usare una progressione aritmetica contenente i precedenti valori.

Panaino ha preso in considerazione il capitolo sia per indagare le frazioni in ambito persiano, sia per approfondire la forma del *vara*-, una struttura probabilmente circolare[26].

22. Mas'ūdī non parla esplicitamente del tipo di progressione geometrica presa in considerazione, ma dal numero scritto risulta chiaro che era quella del 2^n. Ciò porta a dedurre che, se non era necessario descrivere la progressione, l'argomento doveva essere molto noto ai lettori. Per una descrizione dell'astrologia nell'antichità, soprattutto nel mondo iranico, arabo ed indiano, vedi Buscherini 2013b.
23. Panaino 1998: 87.
24. Panaino (1998: 156) ipotizza che il gioco fosse già conosciuto prima del regno di Xusraw I.
25. Eroe mitico indo-iranico.
26. Panaino 2012. Nell'appendice che ho scritto per l'articolo ho dimostrato che anticamente esistevano le conoscenze per la costruzione di cerchi con superficie doppia e tripla di un cerchio di partenza (vedi Buscherini 2012b).

Alla ricerca della progressione geometrica nella tradizione persiana, ho ripensato alla sequenza delle tre frazioni da un punto di vista diverso e mi sono accorto che esse formano una progressione aritmetica. Con questo nome si intende una successione (finita o infinita) di numeri, detti anche in questo caso termini della progressione, per cui resta costante la differenza (detta anche ragione ed indicata con d) fra ciascun numero e il suo precedente.

È probabile che i matematici persiani non si siano fermati al semplice studio dei primi tre termini di questa successione per ovviare alla necessità di triplicazione di una quantità di partenza, ma abbiano analizzato anche i termini successivi.

L'uso di frazioni nelle progressioni si può far risalire a epoche ancora più remote: si pensi al cosiddetto «Occhio di Horus», la serie formata dalle sei frazioni ½, ¼, ⅛, 1/16, 1/32, 1/64 (in questo caso la ragione è ½) usate nell'Antico Egitto per le frazioni dell'*heqat*[27].

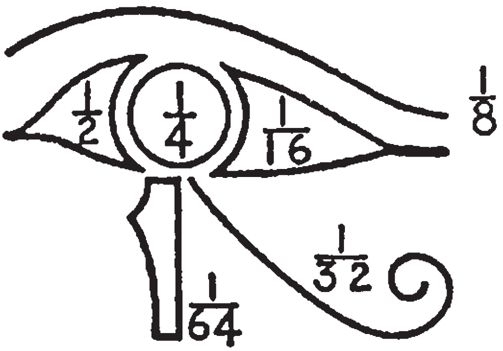


Figura 1. Occhio di Horus

L'importanza della progressione geometrica, soprattutto quella di ragione 2, all'interno della matematica egizia sarebbe dovuto al metodo impiegato dagli Egizi che svolgevano l'operazione di moltiplicazione come una continua duplicazione: ovvero il moltiplicando veniva raddoppiato più volte (o più semplicemente moltiplicato per 2, 4, 8 e così via) in modo tale che un ulteriore raddoppiamento non portasse a superare il secondo fattore dell'operazione. Il prodotto richiesto era dato dalla somma dei singoli risultati in modo tale che la somma dei corrispettivi raddoppiamenti fornisse il secondo fattore della moltiplicazione.

$6 \cdot 5 = 30$

1	**6**
2	12
4	**24**
5	**30**

Tabella 4. Esempio di moltiplicazione egizia

27. Unità di misura dei volumi per il grano.

Inoltre una progressione geometrica di ragione 7 è contenuta nell'ormai celebre Problema 79 del Papiro di Rhind. Il testo del problema, che è accompagnato da ben poche spiegazioni da parte dello scriba che lo ha redatto, probabilmente recitava: ci sono sette case, in ognuna sette gatti e ogni gatto uccide sette topi; ogni topo aveva mangiato sette grani e ogni grano produce sette *heqat*. Qual è il totale?[28]

Col. 1	Inventario di una casa	Col. 2	
1	2.801	Case	7
2	5.602	Gatti	49
4	11.204	Topi	343
		Spighe di grano	2.401
		Heqat	16.807
		Totale	19.607

Tabella 5. Schema del Problema 79 del Papiro di Rhind

Questo problema è molto simile a uno che è riportato in una tavoletta scoperta a Mari, in cui è presente una serie geometrica il cui primo termine è 99 e la cui ragione è 9. I termini della serie sono scritti su due colonne: una li riporta in notazione sessagesimale[29], l'altra in notazione decimale[30].

Base 60	Base 10	Notazione moderna
[1 3]9	99	99
[1]4 51	8 me 1 31	891
2 13 39	8 li-mi 19	8019
20 02 51	7 gal 2 li-mi 1 me 1 11	72171
3 0 25 39	1 šu-ši 4 gal 9 [li-mi 5 me 39]	649539

Numerazione centesimale		Notazione moderna
6[4] 9[5] [39]	(chicchi di grano?)	649539
7 21 71	spighe di grano	72171
8 0 19	formiche	8019
8 me 1 31	uccelli	891
[1] 39	(uomini?)	99
[1 šu-ši] 3 gal 7 me 19		730719

Tabella 6. Schema della Tavoletta di Mari M7857

28. Anche in Fibonacci si ritrova un problema molto simile: «Sette vecchie vanno a Roma; ognuna ha sette muli, ogni mulo ha sette sacchi, in ogni sacco ci sono sette pani, ogni pane ha sette coltelli, ogni coltello sette guaine. Si chiede la somma di tutti».
29. In base 60 i numeri, a seconda della posizione, vanno moltiplicati per le potenze di 60, ovvero $1, 39 = 1x60^1+39x60^0 = 99$. Nella scrittura dei numeri in questa base, inoltre, si usa separare la parte intera e la parte frazionaria con «;» mentre le cifre sessagesimali sono divise da «,».
30. me= 100, li-mi= 1.000 gal= 10.000.

Sul lato opposto la stessa serie è scritta in modo decrescente con un sistema centesimale (il fattore moltiplicativo da una colonna all'altra è di 100) e con l'aggiunta di un'ultima riga che riporta il totale (730.719) delle righe precedenti. La particolarità della tavoletta sarebbe la presenza della scrittura in notazione decimale e centesimale: il problema che forse maggiormente preoccupava lo scriba che scrisse la tavoletta era di far convivere il sistema sessagesimale sumero e quello decimale semitico e di adattare il sistema posizionale del primo a quello del secondo. Ciò sarebbe testimoniato dal *recto* in cui le due colonne sono un lavoro preparatorio alla stesura del *verso*.

Inoltre la sequenza testimonierebbe l'esistenza a Mari di una riflessione autenticamente matematica che si spingeva oltre l'uso delle tavolette per il calcolo commerciale, il che comporterebbe che il problema per gli scribi non riguardasse le progressioni geometriche, bensì il confronto con i sistemi numerici esterni al loro ambito culturale.

Un'altra tavoletta della stessa città che ha permesso di creare un legame che parte dalla tradizione di Mari e si sviluppa in quella indiana fino ad Alcuino[31], riporta sulla colonna di destra i giorni, sulla colonna di sinistra i chicchi di grano aumentati del doppio al passare dei giorni.

> «1 chicco incrementato di 1 chicco, così che
> 2 chicchi il primo giorno
> 4 chicchi, il secondo giorno
> 8 chicchi, il terzo giorno
> 16 chicchi, il quarto giorno»

In questo caso la tavoletta riporta lo stesso problema collegato alle caselle della scacchiera e prende in considerazione lo stesso alimento. Ma non è solo Mari ad aver tramandato la testimonianza dell'interesse per questa teoria matematica da parte delle genti mesopotamiche: a Nippur sono state individuate un certo numero di tavolette contenenti delle progressioni geometriche, mentre da Uruk provengono dei testi che presentano il metodo di calcolo della somma della serie geometrica.

Sebbene le progressioni geometriche egiziane e mesopotamiche trattino di argomenti differenti, si nota già in alcuni casi il loro collegamento con il grano ed in particolare con una progressione che nella tradizione indiana viene messa in relazione con le caselle della scacchiera. Anche la matematica indiana presentava problemi diversi collegati al calcolo delle progressioni, ma è interessante notare che da un certo periodo in poi nella tradizione orientale, quando si parla del gioco degli scacchi e del problema ad esso collegato, compaiono sempre le figure di un ideatore, di un sovrano e di contabili.

Sono gli stessi temi che D'Amore sfrutta nel suo racconto[32] per spiegare a noi moderni da quali fonti probabilmente Dante ha preso lo spunto per descrivere il

31. Vedi, ad esempio, Høyrup 1987: 288.
32. Il testo parla della presenza al torneo romano del campione del Papa, che aveva già battuto i Francesi 8 a 4 al gioco degli scacchi e della notte passata dall'abacista fiorentino con il suo maestro a svolgere i conti e a sincerarsi della loro correttezza («Un calcolo incredibile, colle figure degli Indi, sempre raddoppiando, da 1, per 63 volte. Mi sembrava di impazzire» D'Amore 2011: 110).

numero degli angeli. La narrazione però ci dice qualcosa di molto più importante e profondo: alcune conoscenze matematiche occidentali sono il frutto di una trasmissione effettuata dall'Oriente dei risultati a cui i matematici, in particolare quelli dell'antica Mesopotamia e dell'antico Egitto, erano giunti con uno studio iniziato sin dalle epoche più antiche. Si evidenzia inoltre ancora una volta l'importanza del mondo iranico non solo nella trasmissione delle conoscenze antiche, ma anche nello studio di alcuni particolari temi, come ad esempio, le frazioni e le progressioni ad esse collegate.

Il tutto dimostra che, nonostante il passare dei secoli e la diversità dei popoli e delle culture, gli uomini si sono sempre posti gli stessi problemi, ma, mentre nei tempi passati piaceva semplicemente colpire il lettore o l'ascoltatore con numeri immensi e strabilianti, oggi non basta più riproporre gli stessi argomenti, perciò si cerca di capirli e di renderli comprensibili sfruttando i nuovi mezzi di calcolo e le nuove conoscenze.

Bibliografia

Bagni G. T. (1996). *Storia della matematica*, vol. 2. Bologna: Pitagora.

Buscherini S. (2012a). Il sistema numerico arabo: il suo impiego nell'astronomia araba. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 35, febbraio, Sez. B, pp. 51-64.

Buscherini S. (2012b). The Triadic Symbolism of Yima's *vara*- and Related structures and Patterns by A. Panaino with A Geometrical and Mathematical Appendix by S. Buscherini. *Yama/Yima. Varations Indo-Iraniennes sur la geste mythique. Variations on the Indo-Iranian Myth of Yama/Yima*, ed. par S. Azarnouche et C. Redard, Paris, pp. 131-138.

Buscherini S. (2013a). Gerberto contro Otrico: una disfida matematica a Ravenna? *Studi Romagnoli,* LXIII, pp. 497-508.

Buscherini S. (2013b). *L'astrologia storica. La teoria delle congiunzioni di Giove e Saturno e la trasmissione dei loro parametri astronomici*. Milano: Mimesis Edizioni.

D'Amore B. (2011). *Dante e la matematica*. Firenze-Milano: Giunti.

D'Amore B. e Oliva P. (1993). *Numeri. Teoria, storia, curiosità, giochi e didattica nel mondo dei numeri*. Milano: Franco Angeli.

Firdusi I. (1886-1888). *Il libro dei re, poema epico recato dal persiano in versi italiani da I. Pizzi*, vol. VII. Torino: Tip. Vincenzo Bona.

Høyrup J. (1987). The Formation of «Islamic Mathematics»: Sources and Conditions. *Science in Context* 1, pp. 281-329.

Panaino A. (1998). *La novella degli scacchi e della tavola reale. Un'antica fonte orientale sui due giochi da tavoliere più diffusi nel mondo eurasiatico tra Tardoantico e Medioevo e sulla loro simbologia militare e astrale*. Testo pahlavi, traduzione e commento del *Wizārīšn ī čatrang ud nīhišn ī nēw-ardaxšīr* «La spiegazione degli scacchi e la disposizione della tavole reale». Simorγ, Collana di Studi Orientali, diretta da A. Panaino. Milano: Mimesi Edizioni.

Panaino A. (2012). The triadic symbolism of Yima's *vara*- and related structures and patterns A. Panaino with a geometrical and Mathematical Appendix by S. Buscherini. *Yama/Yima. Varations Indo-Iraniennes sur la geste mythique. Variations on the Indo-Iranian Myth of Yama/Yima*, ed. par S. Azarnouche et C. Redard, Paris, pp. 111-138.

Piccato A. (1987). *Dizionario dei termini matematici*. Milano: Biblioteca Universale Rizzoli.

3. L'insegnamento della matematica tra pregiudizi e valutazioni scolastiche[1]

Adolfo Tomasini[2]

Mathematics is increasingly popular. However, more time will pass until it is no longer considered a cold, dry, ideal, pure and unchangeable subject, impersonal in its conception and understanding, or a subject which does not offer the possibility of interpreting its results: in short, a teaching subject that only few lucky and outstandingly smart people can understand. A famous quote, attributed to Albert Einstein, says that «it is harder to crack prejudice than an atom»: and prejudice about maths is strong indeed. Many causes can be taken into account to explain this sort of haughtiness of mathematics, the most important of which are, according to the author of this paper, school assessment and the way curricula are devised and structured.

La matematica è di moda. Negli ultimi anni diversi titoli librari centrati sulla divulgazione matematica, in molteplici forme, hanno raggiunto quote di vendita a volte superiori a facili romanzetti da spiaggia. L'ultimo – mentre scrivo e tanto per citarne almeno uno – è certamente *«Capra e Calcoli. L'eterna lotta tra gli algoritmi e il caos»,* scritto a quattro mani dal chimico-romanziere Marco Malvaldi, l'autore della fortunata serie dei vecchietti del Bar Lume pubblicata da Sellerio, e dal fisico Dario Leporini, docente all'Università di Pisa. Ma qualche anno fa aveva incontrato grandi favori *«Il teorema del pappagallo»,* del romanziere e matematico francese Denis Guedj, o altri volumi finiti per ora tra i libri da leggere[3]. Oppure ancora il recente *«Particelle familiari. Le avventure della fisica e del bosone di Higgs, con Pulce al seguito»,* di Marco Delmastro. In quest'ottica anche il folgorante successo di *«Matematicando. A spasso con la matematica per le strade di Locarno»* s'iscrive in questo momento magico per la scienza delle scienze e delle conoscenze: che il venerdì 16 maggio dello scorso anno giungesse a Locarno un migliaio di allievi da più parti del Ticino poteva essere scontato; ma che il giorno dopo ben 2'500 persone – famiglie, insegnanti, semplici curiosi – affollassero i laboratori e gli spettacoli messi in cantiere dal Dipartimento formazione e apprendimento della SUPSI ha stupito anche il più inebriato degli ottimisti (figurarsi la faccia di quelli che, in fase di progettazione, invitavano alla cautela, e consigliavano di non muoversi oltre le tante mura dell'ex convento di Piazza San Francesco).

1. Ampi stralci di questo testo sono tratti dal mio articolo *«Di competenze, conoscenze, valutazioni e regole del gioco»,* pubblicato unicamente nel mio sito (Cose di scuola, www.adolfotomasini.ch).
2. Già direttore delle scuole comunali di Locarno
3. Bolondi G. e D'Amore B. (2010). *La matematica non serve a nulla. Provocazioni e risposte per capire di più*. Bologna: Editrice Compositori.
   D'Amore B. e Fandiño Pinilla, M. I. (2013). *La nonna di Pitagora. L'invenzione matematica spiegata agli increduli.* Bari: edizioni Dedalo.
   D'Amore B. (2001). *Più che 'l doppiar de li scacchi s'inmilla. Incontri di Dante con la matematica.* Bologna: editrice Pitagora.

Malgrado tutto 'sto gran fervore ed entusiasmo, temo che ci vorrà ancora un po' di tempo prima che nella scuola – e penso in particolare alla scuola dell'obbligo – la matematica riesca a scrollarsi di dosso l'idea di una disciplina *«fredda, arida, preconfezionata, ideale, lontana, pura, immutabile la cui comprensione e descrizione appaiono come impersonali, senza possibilità di interpretazione da parte del soggetto»,* una materia d'insegnamento, insomma, che *«Nel senso comune (...) viene ritenuta una disciplina che l'umanità può soltanto contemplare, al limite scoprire, ma non interpretare e tanto meno costruire»*[4]*:* per farla breve una roba fatta solo per gente predisposta, per chi ha avuto la fortuna di nascere con l'acido desossiribonucleico strutturato nella giusta maniera. Come recita il popolare adagio attribuito ad Albert Einstein *«È più facile spezzare un atomo che un pregiudizio»:* e i pregiudizi sulla matematica sono sterminati.

A determinare questa sorta di alterigia della matematica scolastica concorrono certamente tante cause, alcune delle quali sono tra loro correlate. La valutazione, quella di note *et similia,* per intenderci, è però ancor oggi un elemento sensibile che, come si vedrà, può influenzare anche altre scelte relative ai contenuti e alla didattica. Si tende a privilegiare problemi matematici scolastici standard, a livello di scuola dell'obbligo, dove tutti i dati sono utili per un'unica soluzione – salvo esplicite consegne specifiche – e che coinvolgono, preferibilmente, un'unica procedura per giungere al risultato finale. Per fare un esempio concreto, l'esercizio *Compero dal salumiere 3 etti di prosciutto che costa 57 franchi al chilo. Quanto spendo?* ha un'unica inequivocabile soluzione: *Spendo Fr 17.10,* e a soluzione giusta corrisponde una valutazione data, ad esempio un punteggio, una nota, un giudizio. Anni fa una delle prove degli esami alla fine del I ciclo della scuola elementare era costituita da sei problemi – toh, sei problemi, come le note – che richiedevano un'unica operazione per giungere alla soluzione. C'erano due problemi basati sull'addizione, due sulla sottrazione e due sulla moltiplicazione, come se tutti i problemi debbano per forza richiedere operazioni per giungere alla soluzione. Gli allievi dovevano risolvere ogni problema scrivendo il calcolo e il risultato.. Gli insegnanti avevano ricevuto chiare istruzioni per la valutazione della prova: si assegnava 1 punto per ogni calcolo indicato correttamente e 1 punto per ogni risultato esatto.

Si deve pretendere che una prova somministrata a 10 mila allievi, con il coinvolgimento di 5 o 6 cento insegnanti sia stata concepita in tutti i suoi molteplici aspetti con lo scopo di valutare e verificare la padronanza di un obiettivo del programma: *Risoluzione di problemi di addizione e sottrazione (...) enunciati con un testo scritto e richiedenti una sola operazione.* Il tutto sembra semplice al punto tale che non sono possibili malintesi o pressapochismi: 6 operazioni giuste valgono 6 punti; 6 risultati esatti valgono 6 punti; la prova, nel complesso, vale 12 punti, equivalenti alla nota 6.

Si intuisce subito che diverse cose non quadrano. Intanto la prova non si limita a verificare la padronanza dell'obiettivo indicato, ma aggiunge l'inderogabile capacità di eseguire i calcoli correttamente, non fosse che lo strumento per verificare la

4. Sbaragli S. Il ruolo dell'interpretazione personale in aula, in D'Amore B. e Sbaragli S. *Un quarto di secolo al servizio della didattica della matematica, Atti del convegno «Incontri con la matematica*, N° 25, pp. 47-52.

padronanza di quest'altro obiettivo non è certo quello più adeguato. A suo tempo avevo messo in luce altri svarioni; ad esempio:

- Cos'ha combinato l'allievo che ha totalizzato 6 punti? Tre problemi con i risultati completamente giusti, ma le operazioni indicate scorrette? Sei operazioni indicate correttamente, ma con i calcoli sbagliati?, …
- Poniamo che l'operazione da indicare fosse *9 + 7 = 16.* Se l'allievo indica un procedura risolutiva sbagliata *(9 – 7 = 2),* riceve ugualmente il punto per il calcolo corretto?
- L'enunciazione di ogni problema era del tutto stereotipata e, così, conteneva unicamente i dati per risolverlo, senza l'aggiunta di elementi che avrebbero potuto «distrarre» l'allievo *(Un ragazzino di 9 anni, che abita in Via Lunga 18 ed è alto 73 cm, compera in edicola 5 bustine di figurine…)*. Tenuto conto che i programmi in vigore (quelli del 1984) stabiliscono che in 2ª elementare ci si limita a problemi e situazioni che implicano i concetti di addizione, sottrazione e moltiplicazione, la probabilità di azzeccare l'operazione corretta è di 1/3.

Se lo scopo della prova era quello di verificare in che misura gli allievi erano in chiaro sugli algoritmi necessari per risolvere i problemi, messi in luce dall'operazione da svolgere, si può ben dire che la modalità di valutazione della prova non era in grado di dare risposte esaustive e scientificamente corrette. Tutt'al più i risultati complessivi avranno accontentato i fanatici della curva di Gauss. Per contro i 10 mila allievi avranno ottenuto una valutazione, tutt'altro che pedagogicamente corretta, che avrà certamente influito sulla loro pagella.

Sappiamo, purtroppo!, che in molte aule procedure di valutazione come questa sono all'ordine del giorno. Il dramma è che sono avvalorate e legittimate proprio da esami istituzionali come quello indicato: è fin troppo conosciuto il fenomeno di alone che gli esami «ufficiali» diffondono nel loro raggio d'azione, così che i contenuti di un esame di giugno diventano assi portanti dei programmi dell'anno dopo. Ma s'è visto anche altro.

Qualche anno dopo l'esame di fine ciclo testé illustrato, l'autorità scolastica cantonale emanò delle prove di matematica per gli allievi di 5ª elementare, i soliti 10 mila allievi e passa. Dal momento che i programmi parlano di obiettivi minimi o di padronanza – *Gli obiettivi di padronanza indicano ciò che ogni allievo dovrebbe essere in grado di fare con sicurezza al termine del primo e del secondo ciclo. La scuola elementare assume con ciò l'impegno di fornire a tutti gli allievi un minimo di conoscenze strumentali indispensabili per le necessità pratiche della vita sociale e per il proseguimento degli studi nelle diverse discipline* – e di obiettivi di sviluppo, c'erano una batteria di prove destinata a verificare i primi obiettivi e una seconda batteria consacrata alle competenze che superavano quel *minimo di conoscenze strumentali indispensabili per le necessità pratiche della vita eccetera…*

Si può dunque immaginare che il risultato atteso fosse di una massiccia riuscita nella prima batteria, e risultati più sfilacciati nella seconda. Invece andò esattamente al contrario. Se prendiamo per buona la perfetta taratura degli strumenti di misurazione, avremmo dovuto concludere che una significativa frazione di allievi non raggiungeva *con sicurezza* gli obiettivi minimi, **ma** era nel contempo in grado di affrontare situazioni matematiche più complesse, che è un po' come dire che non erano in grado di guidare un'utilitaria, ma sapevano arrivare indenni in fondo a un Gran Premio di Formula 1.

Ora, però, conviene interrogarsi sull'influenza, forse nefasta, che gli strumenti di valutazione possono avere sui contenuti dell'insegnamento, sull'organizzazione pedagogica della classe e sugli approcci didattici. Il principale punto controverso concerne il rapporto tra gli obiettivi fondamentali dell'insegnamento e gli strumenti normalmente usati per le verifiche. Sappiamo, e lo possiamo facilmente intuire, che vi sono obiettivi importanti che potrebbero far parte dei programmi, ma che, solitamente, finiscono nelle premesse e nelle introduzioni, a far la figura delle solite foglie di fico dietro le quali nascondere le proprie vergogne. È il caso, un po' dappertutto, dei grandi enunciati sulle finalità della scuola. Per restare in campo matematico – ma la riflessione concerne pressoché tutte le discipline –, si potrebbe facilmente affermare che saper leggere e interpretare i sondaggi o le previsioni meteorologiche sia un obiettivo importante, sia per le competenze che si devono mettere in atto, sia per le evidenti ricadute sulla vita pratica. Interpretare col cervello ben sveglio che il sondaggio che vede in testa alle preferenze per l'elezione del governo il partito A significa sapere come funziona una campionatura della popolazione, come si preparano le domande da porre agli intervistati, come si calcolano i margini di errore, come si fissano le soglie di attendibilità: si impara, insomma, a dubitare e a sfoggiare un utile atteggiamento critico. I sondaggi che precedono le votazioni – politiche o referendarie – sono armi potenti per orientare e influenzare l'opinione pubblica. Analogamente le previsioni del tempo influiscono suoi nostri progetti per la fine settimana. È la statistica, è il calcolo delle probabilità, che non combacia con la storia dei due polli[5], mentre si avvicina a quel che pensava Alfred Sauvy[6], secondo il quale le statistiche «sono come i bikini: si crede che mostrino tutto, ma nei fatti nascondono l'essenziale». Sarebbe oltremodo utile che ogni cittadino fosse in grado di leggere criticamente indagini statistiche, previsioni politiche e meteorologiche, gusti e propensioni della società in cui vive. Di converso, tuttavia, nessuno pretende che ognuno sia in grado di progettare e condurre sondaggi, di calcolare correlazioni o di ipotizzare esiti: insomma, di effettuare test statistici. Ecco un argomento di grande importanza, ma talmente difficile da verificare e valutare che, normalmente, non fa parte dei programmi, anche se sul piano del ragionamento e della pratica costante della speculazione intellettuale sarebbe un capitolo importante tanto quanto la padronanza del teorema di Pitagora – questo sì protagonista indiscusso di fior d'esami, anche se…

Philippe Perrenoud[7], citando lo psicologo Christian Guillevic[8], fa un esempio un poco provocatorio[9]: *«È sufficiente, per essere meglio preparati alla vita,*

5. *Sai ched'è la statistica? È 'na cosa / che serve pe fà un conto in generale / de la gente che nasce, che sta male, / che more, / che va in carcere e che spósa. / Ma pè me la statistica curiosa / è dove c'entra la percentuale, / pè via che, lì, la media è sempre eguale / puro co' la persona bisognosa. / Me spiego: da li conti che se fanno / seconno le statistiche d'adesso / risurta che te tocca un pollo all'anno: / e, se nun entra nelle spese tue, / t'entra ne la statistica lo stesso / perch'è c'è un antro che ne magna due.* [Trilussa, *La statistica]*.
6. Alfred Sauvy (1898-1990), economista e sociologo francese.
7. Professore emerito della Facoltà di psicologia e scienze dell'educazione dell'Università di Ginevra.
8. Professore della Facoltà di psicologia e scienze dell'educazione dell'Università di Ginevra.
9. Perrenoud P. (2011). *Quand l'école prétend préparer à la vie… - Développer des compétences ou enseigner d'autres savoirs?*. Paris: ESF Éditeur

che gli allievi imparino a mobilitare il teorema di Pitagora per risolvere dei problemi reali? Evidentemente si risponderebbe in modo affermativo se fosse necessario attivare di frequente il teorema di Pitagora nella nostra vita. Ma in realtà chi se ne serve, a parte quelli che esercitano una professione legata alla geometria? Taluni che se ne servono professionalmente, ad esempio i carpentieri, non conoscono quel teorema, ma applicano una regola che ne è solo una derivazione e che loro stessi sarebbero in difficoltà a spiegare». E continua: *«Per verificare che due travi di un tetto formino un angolo retto, il carpentiere fa un segno su una trave a 6 dm dal vertice e un segno a 8 dm sull'altra. Tende poi una cordicella tra i due segni e misura la distanza che li separa. Se questa è esattamente di un metro, conclude che l'angolo è retto. A giusto titolo, poiché in effetti nel triangolo rettangolo virtuale così creato, il quadrato dell'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati dei due lati dell'angolo retto ($10^2 = 6^2 + 8^2$, ovvero $100 = 36 + 64$). La procedura funziona perché è fondata sul teorema di Pitagora, ma non c'è nessuna necessità di conoscerlo per servirsene in modo efficace».*

L'esempio del teorema di Pitagora apre altresì un altro dibattito importante, che è peculiare alla matematica della scuola dell'obbligo, soprattutto laddove cerca, spesso in modo maldestro e al limite del ridicolo, di declinare la matematica in termini di *utilità pratica,* di opportunità per la vita di tutti i giorni. Ma siamo sicuri che sia così e, in particolare, che così debba restare? Non è solo per le applicazioni concrete che la matematica ha avuto un grande successo nella società, ma come molti matematici sostengono «Ciò è dovuto anche al sottile, sublime, inarrivabile fascino privo di applicazioni che essa è in grado di esercitare[10]».

Va da sé che non è certo nelle mie intenzioni – né, immagino, in quelle di Perrenoud – estendere concretamente tale ragionamento a tanti e tanti contenuti dei programmi scolastici, con un'azione un poco iconoclastica, ciò che, d'altra parte, rischierebbe di contribuire all'ampliamento ragguardevole della già estesa schiera dei *Fachidioten,* gli «idioti specializzati». Per coerenza, lo stralcio del teorema di Pitagora dai programmi della scuola dell'obbligo comporterebbe pure la cancellazione di tanti e tanti contenuti, forse di intere discipline: dalla letteratura alla poesia, dall'algebra alla musica, dalla biologia alla storia, è tutto un fiorire di conoscenze di cui, volendo, si può fare a meno. In realtà il problema non risiede nel teorema di Pitagora, né negli eucarioti o nella Svizzera dei tredici cantoni, e men che meno in Francesco Petrarca, Alessandro Manzoni, Johann Sebastian Bach o Michelangelo Buonarroti. Sul piano dell'arricchimento culturale e dello sviluppo della speculazione intellettuale e dello spirito critico servono ben altre conoscenze, che superano le competenze pratiche per *preparare alla vita.* Ma è palese – purtroppo – che se tali conoscenze diventano le armi improprie della selezione scolastica, allora la scuola dell'obbligo vien meno al suo mandato. Per farla breve: non si tratta di mettere alla berlina Pitagora o il suo teorema più famoso (per taluni, tristemente famoso). Esso è alla base della metrica euclidea, con tutto quel che ne consegue. Non insegnarlo a scuola sarebbe come ignorare Dante nei programmi di italiano o Mozart in quelli di musica. Resta però il pernicioso problema dell'uso che, troppo spesso, la scuola fa di Pitagora (e di Euclide, Dante e Mozart…), con la scusa, del tutto goffa e per certi versi velenosa, come la mela di Biancaneve, che «serve alla vita professionale». Lo stesso Perrenoud solleva un altro problema, legato

10. D'Amore B. (2012). *Matematica, come farla amare.* Firenze: Giunti.

ad alcune discipline ugualmente «utili» e importanti per la formazione dei futuri cittadini, che, tuttavia, non fanno parte, se non sporadicamente e di straforo, dei programmi della scuola dell'obbligo, come la psicologia e la psicanalisi, la sociologia, le scienze politiche e quelle economiche, il diritto, la criminologia, l'architettura e l'urbanistica[11].

La definizione chiara di un obiettivo, inoltre, non si traduce ancora in una valutazione scientificamente oggettiva. Tante altre variabili, in effetti, concorrono a far sì che le valutazioni ottenute da un allievo non garantiscano nella realtà il raggiungimento del tale o del tal altro obiettivo: dall'inadeguatezza dei sistemi di valutazione impiegati, a un insegnamento manchevole, a scelte didattiche sbagliate. Si aggiunga poi la ben nota «indifferenza alle differenze», di cui già parlava Pierre Bourdieu quasi cinquant'anni fa. Con l'imbroglio delle «pari opportunità», e con l'esistenza stessa del meccanismo della promozione da una classe all'altra, *«...la scuola trasforma differenze e disuguaglianze di diversa derivazione in insuccessi e riuscite scolastiche. Se a sei anni alcuni bambini sanno già leggere, mentre altri sono ancora molto distanti, si esige che tutti sappiano leggere circa un anno più tardi. Questa indifferenza alle differenze*[12], *propria della scuola, contrasta col trattamento differenziato delle persone nel campo della sanità, della giustizia, del lavoro sociale, tanto per citare qualche esempio.»*[13] Eppure il tema della *differenziazione dell'insegnamento* non è propriamente una trovata più o meno utopica ed estemporanea di quest'ultimi anni, ma vanta una lunga serie di esperienze e di importanti riflessioni. E, d'altra parte, vi sono docenti che organizzano il loro insegnamento proprio centrando la loro attenzione pedagogica su questo basilare principio: si pensi, ad esempio, alla correzione interattiva del testo di un alunno, in luogo della correzione differita dei testi dell'intera classe; alla somministrazione mirata e adeguata di esercizi e problemi, al posto di compiti uguali per tutti; al primato del lavoro attivo dell'allievo, invece dell'ascolto fors'anche passivo di lezioni ex cathedra.

D'altro canto conosciamo bene gli effetti perversi che possono scaturire dall'analisi molto approfondita degli obiettivi scolastici, che per forza di cose cominciano con l'escludere tutto ciò che è di complessa valutazione, soprattutto attraverso i soliti strumenti, quali il tradizionale test o l'interrogazione. È inoltre doveroso rammentare in ogni momento che la scuola è un luogo di educazione formale, che intende insegnare o far apprendere conoscenze, nozioni, attitudini o capacità in un ambiente fortemente artificiale. Sono abbastanza note talune esperienze condotte sin dagli anni '80 sulle competenze matematiche acquisite «on the job», sul lavoro, rispetto al classico apprendimento scolastico, per lo più di natura teorica[14]:

Numerose ricerche dimostrano la ricchezza dei saperi acquisiti fuori dalla scuola. Nel campo della matematica, ad esempio, gli analfabeti non sono necessariamente ignoranti. Essi possono risolvere problemi che richiedono dei calcoli, a volte abbastanza complessi, anche se gli algoritmi sono spesso limitati: si conta sulle

11. Perrenoud P., 2011, Ibidem.
12. Bourdieu P. (1966). L'école conservatrice. L'inégalité sociale devant l'école et devant la culture », in *Revue française de sociologie*, N° 3.
13. Perrenoud P. (1995). *La pédagogie à l'école des* différences. Paris: ESF Éditeur (la traduzione italiana è mia).
14. Dasen P. R. (2000). Développement humain et éducation informelle, in Dasen P. R. e Perregaux C. *Raisons éducatives N° 3/2000 – Pourquoi des approches interculturelles en sciences de l'éducation?*. Bruxelles: De Boek

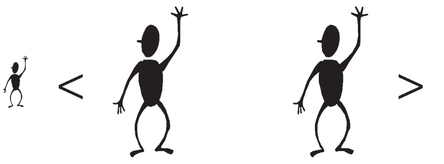
dita, per esempio, e la moltiplicazione è sostituita da addizioni in sequenza. In tal modo il calcolo (mentale o orale) è spesso più lungo, più complicato, limitato ai numeri più abituali. Invece che manipolare simboli, si manipolano quantità, vale a dire delle cifre con un significato effettivo, e il risultato è immediatamente valutato in rapporto alla realtà. A scuola, per contro, l'allievo manipola per lo più dei simboli, con degli algoritmi che ricordano a volte dei ritornelli, e il risultato è confrontato solo raramente con la realtà.

Tramite una ricerca svolta a Recife, in Brasile, Nunes, Schliemann e Carraher (1993) hanno osservato dei bambini che vendevano frutta al mercato. I ricercatori hanno posto, in situazione spontanea, una serie di problemi basati sul calcolo (del tipo: quanto costano 10 ananas da 35 cruzeiros l'uno?). In seguito hanno sottoposto a quegli stessi bambini i medesimi calcoli in versione più scolastica. Mentre il 98% dei calcoli era giusto al mercato, la riuscita scendeva al 73% se gli stessi calcoli erano posti sottoforma di problemi, e solo al 37% chiedendo le operazioni fuori contesto. In un altro studio degli stessi ricercatori, si è rilevato che alcuni bambini che utilizzavano a scuola delle strategie «orali» (della strada) per la moltiplicazione, riuscivano al 100%, contro il 39% con le strategie scritte.

Com'è il caso di ogni ricerca, nulla può essere trattato come se fosse oro colato. Siamo di fronte al fenomeno, ormai conosciuto da anni, del cosiddetto *apprendimento empirico,* che qualcuno considera selvatico o ruspante. Le *rappresentazioni spontanee* sono spesso il frutto di apprendimenti della strada, attraverso i racconti dei pari – c'è sempre chi cita qualche inesistente fonte scientifica –, le novelle metropolitane, le bufale vere e proprie. Così capita chi si rovina col gioco d'azzardo perché ha dato retta a qualche esperto prêt-à-porter della teoria dei grandi numeri o perché non è in grado di stimare convenientemente le conseguenze delle proprie azioni. In tal senso lo studio della matematica e del calcolo delle probabilità hanno un senso assoluto e fondatore: per non passare una vita da eterno abbindolato, per tener sveglie e attive le proprie sinapsi, per avere uno strumento in più che permetta di guardare il mondo e di interpretarlo. E, magari, per non prendersela col governo se il servizio meteorologico ha mandato a carte quarantotto la grigliata in riva al lago per la festa nazionale. Ma, mi ripeto, un conto è insegnare la matematica, un altro usarla come un Kalašnikov (o un più nostrano Fass).

Naturalmente si potrebbero ricamare tante considerazioni attorno a ricerche come questa. Ciò mette comunque in luce almeno due aspetti fondamentali dell'insegnamento/apprendimento scolastico: il primo, che vi è sovente un più o meno alto grado di confusione tra i dati reali e la loro simbolizzazione; il secondo, che in parte può scaturire dal primo, che la conoscenza astratta può prescindere dalla comprensione adeguata dell'algoritmo, semplicemente memorizzando le strategie simboliche richieste dalla scuola.

Nella scuola, e in particolare nei primissimi anni, di primaria importanza, un gran numero di insegnanti tende a sottovalutare la necessità che l'allievo deve riuscire a padroneggiare con competenza il senso dei numeri e il significato delle operazioni aritmetiche. Le attività di manipolazione, a quell'età, sono basilari, perché portano alla conoscenza di questi concetti basilari, in assenza dei quali anche l'equazione più semplice diventa un azzardo, da affrontare con il vuoto strumento dell'algoritmo appreso mnemonicamente. Il bambino che mette il segno «<» tra 5 e 3 («5 < 3») non ha capito la relazione che intercorre tra la quantità, il numero e il loro ordinamento. Oppure questi *operatori logici* gli sono stati spiegati alla carlona: maggiore o minore, più grande o più piccolo, e via discorrendo, magari senza nemmeno verificare se il ragazzino sappia cosa significano le espressioni *minore di* e *maggiore di.* Mi viene in mente uno di quei «trucchetti» che sembrano miracolosi e che, per contro, sono del tutto sbagliati:



Eppure in tante classi di 1ª elementare si passa troppo in fretta dalle palline di gomma ai cerchietti disegnati sul quaderno, ai numeri. Tale maniera di sviluppare l'itinerario didattico sembra proprio una perfida ricaduta delle procedure di valutazione: per un bimbo di 5-7 anni che sta muovendo i primi passi nel mondo della matematica il passaggio dalla manipolazione concreta alla rappresentazione simbolica è fondamentale. In assenza di ciò si corre l'enorme rischio di innescare una spirale infida, basata sulla memorizzazione di algoritmi e strategie aride e, in definitiva, incomprensibili nel loro significato più profondo. E la scuola perde un'occasione straordinaria per affascinare il futuro studente, mettendolo troppo in fretta di fronte alla sua inadeguatezza – quella manchevolezza che, prima o poi, farà pronunciare ai genitori la fatidica frase: «Non c'è tagliato…».

Bruno D'Amore sostiene che *«una delle maggiori difficoltà del rapporto insegnamento / apprendimento consiste in questo: l'insegnante dovrebbe convincere l'allievo e sé stesso che quel che si apprende, lo si apprende per la vita e non per il breve spazio di tempo legato ad una prova, ad una verifica, ad una qualche forma di valutazione.*

Certo, il problema è antico e per questo sentito da sempre, ed apre vecchie e mai sopite ferite. Né qui si vuol neppure tentare di dare possibili soluzioni strategiche nuove! D'altra parte, come convincere un adolescente ad implicarsi in un cognitivo del quale non vede, non può vedere, utilizzazioni future? E, d'altra parte, quali usi di trigonometria, logaritmi ed algebra si potrebbero, ragionevolmente proporre?

È ovvio che nessun insegnante propone apprendimenti destinati solo a prove di verifica; l'insegnante è in buona fede e sa bene che quel che sta dando è materiale cognitivo per la vita; il fatto però è che a volte lo studente, che non ha strumenti critici proiettati sul futuro, valuta come fine a sé stessa la proposta cognitiva dell'insegnante, svilendola…»[15]

Bisognerebbe intendersi sul significato di *apprendimento per la vita* – ma, nel contempo, non scarterei l'ipotesi che invece tante cose insegnate a scuola abbiano

15. D'Amore B. (1999). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 22A, 3, 247-276

come data di scadenza il giorno del test. D'altra parte un gran numero di problemi che si ritrovano usualmente negli esercizi e nelle prove di verifica (tra l'altro: verifica di **cosa?!**) sono una ridicola caricatura della vita, fosse solo quel breve segmento al banco del panettiere. In matematica, più che in altre discipline, la sudditanza delle strategie pedagogiche e didattiche dagli strumenti di verifica degli apprendimenti è forte. Ma, come abbiamo visto, gli strumenti possono facilmente risultare del tutto inadeguati. Non è naturalmente un problema che tocca solo la matematica e, per estensione, quelle discipline, come la fisica, in cui la matematica riveste un ruolo determinante. È possibile che la matematica, a questo livello, risenta ancor oggi di quella frattura, comunemente accettata, tra discipline scientifiche e umanistiche, con le prime esatte per definizione e le seconde esposte alle mode e alla soggettività sfrenata. Ma cosa c'è di più umanistico delle domande fondatrici che si posero e si pongono ancor oggi i fisici e i matematici? È ancora lecito, nel XXI secolo, sacrificare il fascino e l'enorme valenza educativa e formativa di queste *materie scientifiche* sull'altare del tecnicismo esagerato, finalizzato alla valutazione certificativa da rovesciare nelle pagelle scolastiche? Proprio quelle valutazioni numeriche che, fingendosi *scientifiche* e *indiscutibili,* si nutrono di medie, scarti e arrotondamenti e dànno responsi semplicistici espressi su scale ordinali?

Ivan Illich, il grande descolarizzatore, osservava che *«Quasi tutto ciò che sappiamo lo abbiamo imparato fuori della scuola. Gli allievi apprendono la maggior parte delle loro nozioni senza, e spesso malgrado, gli insegnanti. Ma il tragico è che i più assorbono la lezione della scuola anche se a scuola non mettono mai piede.*

È fuori della scuola che ognuno impara a vivere. Si impara a parlare, a pensare, ad amare, a sentire, a giocare, a bestemmiare, a far politica e a lavorare, senza l'intervento di un insegnante. Non fanno eccezione a questa regola neanche quei bambini che sono soggetti giorno e notte alla tutela di un maestro»[16].

16. Illich I. (1971). *Deschooling Society*. New York: Harper & Row. Trad. it. (1972). *Descolarizzare la società*. Milano: Mondadori.

1. La Teoria dei Giochi e le sue applicazioni; un buon biglietto da visita: in ventun anni undici «Nobel»

Gianfranco Gambarelli[1]

This paper provides an historical overview and an introduction to the game theory and to its economic, political, business, financial, military, sport and environmental applications. Being of an introductory nature, it excludes some important, but less easily understandable topics.

1. Che cos'è

I responsabili di due supermercati vicini cambiano i prezzi dei loro prodotti tenendo conto ciascuno delle variazioni operate dall'altro; alcuni Paesi studiano offerte energetiche da proporre a un altro Paese tecnologicamente avanzato; il sistema di controllo di un anti-missile deve guidarlo a intercettare un missile prima che raggiunga il suo obiettivo; due squadre devono calcolare l'offerta in busta chiusa per risolvere la comproprietà di un calciatore; un individuo si domanda se e quanto evadere una tassa, mentre un ente di controllo fiscale studia la frequenza delle ispezioni su varie categorie di contribuenti; un partito politico deve valutare se l'offerta avanzata da altri partiti, di formare una coalizione governativa a certe condizioni, è o no migliorabile…

Questi e altri tipi di problemi sono il campo di applicazione della *Teoria dei Giochi*, la scienza dei *modelli matematici di interazione strategica*. Le persone e gli enti coinvolti sono i *giocatori*, decisori razionali dotati ciascuno di varie possibili *mosse*. Nel corso di un gioco, ogni decisore riceve un certo *pagamento*, la cui entità dipende dalle mosse adottate da tutti.

La principale distinzione fra i giochi riguarda quelli *cooperativi*, in cui i giocatori possono coalizzarsi fra loro per aumentare i rispettivi pagamenti (ad esempio nel caso di Paesi produttori di energia) e quelli *competitivi*, in cui la regola del gioco lo impedisce (ad esempio nel caso evasore-controllore).

I giochi si dividono principalmente in tre *forme*: la *forma normale, o strategica*, in cui tutti i giocatori operano la loro scelta in un'unica fase (es. offerte in busta chiusa); la *forma estesa*, o *ad albero*, in cui i giocatori si alternano nelle loro decisioni (es. supermercati) e la *forma caratteristica,* o *coalizionale*, in cui si studia la

1. Professore ordinario di Matematica, Teoria dei Giochi e delle Decisioni nel Dipartimento di Scienze Aziendali, Economiche e Metodi Quantitativi, dell'Università degli Studi di Bergamo. gambarex@unibg.it, http://dinamico.unibg.it/dmsia/staff/gambar.html

ripartizione del guadagno da coalizione (es. partiti politici). Vi sono inoltre i *giochi differenziali*, descritti da equazioni differenziali (es. missili e anti-missili).

Per un'introduzione rapida e digeribile segnalo il mio volumetto (2003); per una trattazione più completa rinvio al testo di Guillermo Owen (2013).

Il prossimo paragrafo contiene una sintesi storica; seguono le tre forme dei giochi e un accenno a quelli differenziali.

2. La storia

Pur se l'interesse per le strategie razionali risale agli albori dell'umanità, la data di nascita ufficiale della Teoria dei Giochi è fissata nel 1928, con il «Teorema del Minimax» del matematico ungherese John von Neumann, di cui parlerò più avanti. Per ulteriori informazioni sulle origini della teoria rinvio a (Gambarelli e Owen, 2004).

2.1. Il computer e la guerra

Von Neumann è a capo del gruppo di ricerca statunitense sul primo computer, mentre il logico Alan Turing è alla testa del gruppo inglese. V'è anche un industriale tedesco, Konrad Zuse, che sta realizzando qualcosa di analogo, ma viene mandato al fronte; forse questa decisione darà una svolta alla storia. Per molti anni resta coperto da segreto militare un volo notturno di Turing negli Stati Uniti, in seguito al quale viene realizzato il precursore dell'ENIAC. Le prime applicazioni sono appunto militari per la decifrazione di messaggi tedeschi, nonché per la scelta di strategie tattiche, in cui von Neumann utilizza i suoi modelli di Teoria dei Giochi. Gli impieghi militari dei Giochi sono tuttora molto diffusi, a livello sia strategico (es. dislocazione e potenza delle basi) che tattico (ad es. missili e anti-missili).

2.2. Princeton e l'Economia

Princeton potrebbe essere il cimitero degli elefanti. Vi si radunano le vecchie glorie della scienza, da Albert Einstein a Hermann Weyl, a John von Neumann… ma molte di quelle menti entrano in risonanza e danno luogo a nuovi, straordinari sviluppi. É a Princeton che von Neumann incontra l'economista tedesco Oskar Morgenstern. Dal loro sodalizio nasce, nel 1944, il volume destinato a dare una svolta significativa agli studi economici. Nei modelli classici si considera un unico decisore di fronte al mondo. Con i giochi si può tener conto di vari soggetti interagenti: produttori, consumatori, commercianti eccetera; ne segue una maggiore aderenza alla realtà. I giochi richiedono inoltre un robusto intervento della matematica: se si sfogliano varie riviste economiche degli anni '40, percepiamo un linguaggio diverso, più simbolico. La stessa matematica necessita di nuovi termini e strumenti: il metodo del simplesso, il pivot, la dualità, la funzione caratteristica… e arrivano i risultati fondamentali di George Dantzig, cui seguono quelli di Harold Kuhn e Albert W. Tucker.

Princeton non è solo culla, ma anche punto di riferimento fisso per la Teoria dei Giochi: Nash, Kuhn e molti altri vi risiedono stabilmente; Gillies, Owen e quasi tutti i Nobel passano di lì.

2.3. I favolosi anni ’50

Al di là delle innegabili innovazioni, il testo di von Neumann e Morgenstern lascia molti problemi aperti; fra i più importanti la soluzione dei giochi a somma variabile e la ricerca di ripartizioni stabili della vincita fra tutti i giocatori, nei giochi cooperativi in forma caratteristica. Queste lacune offrono buon gioco agli economisti della vecchia scuola, che non amano troppo la matematica e vedono malvolentieri i giovani trascurare i loro risultati.

All’inizio degli anni ’50 arriva la riscossa dei giochi. Siamo ancora a Princeton. Due sono le date fondamentali. La prima è proprio il 1950, in cui John Nash pubblica la sua tesi di laurea sui Nash Equilibri, che gli porterà il Nobel (1950b) e la soluzione dei giochi a due persone a somma variabile (1950a). La seconda è il 1953, in cui vengono alla luce le strategie cooperative a due persone con minaccia, di Nash, il *core* (nato con la tesi di laurea di David Gillies per caratterizzare soluzioni stabili nei giochi cooperativi a *n* persone) e il «valore» di Lloyd Shapley, che garantisce esistenza e unicità della soluzione anche nei giochi a core vuoto. All’inizio degli anni ’50 hanno luogo i primi studi di Rufus Isaacs sui giochi differenziali (pubblicati nel 1965); compaiono poi altri testi, come il volume di Robert Duncan Luce e Howard Raiffa (1957) che riporta per la prima volta i giochi a somma variabile.

2.4. I successivi sviluppi

Gli equilibri di Nash vengono in seguito approfonditi da Reinhald Selten con l’introduzione dei relativi «raffinamenti». All’inizio degli anni ’60 Thomas Schelling avvia importanti studi su problemi di conflitto in ambito energetico, ambientale, di armamenti e di disarmo. Robert Aumann, Michael Maschler e John Harsanyi sviluppano i «giochi a informazione incompleta». Aumann realizza utilissimi modelli su giochi di mercato continui, o infiniti, o ripetuti e crea una scuola diffusa in tutto il mondo.

Harold Kuhn dà uno sviluppo fondamentale ai Giochi in forma estesa La società da lui diretta, *Mathematica*, consente ai due futuri «Nobel» Selten e Harsanyi di applicare la Teoria dei Giochi al problema del disarmo. Ancora in ambito cooperativo, più recentemente Alvin Roth dà importanti contributi alla teoria del *Matching*, cioè all’assegnazione di risorse, per applicazioni di vario tipo (dalle scuole, ai posti di lavoro, agli ospedali); Jean Tirole fornisce fondamentali applicazioni dei Giochi alla spiegazione di funzionamento e regole dei mercati; Roger Myerson, Leonid Hurwicz ed Eric Maskin danno vita a importanti lavori sul *mechanism design*, che studia condizioni di equilibrio dell’allocazione delle risorse in mercati a informazione asimmetrica.

2.5. La fase Gutenberg

Quella che è attualmente conosciuta come la «fase Gutenberg» della Teoria dei Giochi ha inizio a cavallo fra gli anni ’60 e ’70 con le molteplici traduzioni in lingue europee e orientali della prima edizione del libro *Game Theory* di Guillermo Owen (1968). Molti studenti di scienze non solo economiche, in tutto il mondo, trovano i Giochi facilmente consultabili sui banchi delle Università. Le applicazioni in vari campi, che già erano iniziate con i risultati di Nash, proliferano in settori sociali, biologici, ambientali e così via. Owen stesso ottiene importanti risultati sia in ambito teorico che applicativo (ad esempio collaborando nel 1989 con Shapley a modelli politici), tant'è che più avanti riceverà una *nomination* per il Nobel.

La Teoria dei Giochi inizia ad essere insegnata all'interno di corsi di Economia, Ricerca Operativa, Fisica, Scienze Politiche e Sociali; nascono anche corsi specifici e scuole estive. Fra le più importanti quella organizzata ad Anacapri nell'estate del 1987 da Giorgio Szegö e Harold Kuhn: conta fra i docenti i più noti «giochisti» dell'epoca (da Robert Aumann a Ken Binmore a Guillermo Owen a Sylvain Sorin) e fra i discenti molti di coloro che lo diventeranno; io do una mano nelle operazioni di contorno. Proliferano altre scuole estive in tutto il mondo; in Italia a cura di Andrea Battinelli e in seguito di Vito Fragnelli.

2.6. I Nobel

Un'altra data storica per i giochi è il 1994. In occasione del cinquantenario del «*Von Neumann-Morgenstern»*, l'Accademia svedese decide di dedicare il Nobel per l'Economia alla Teoria dei Giochi. Il premio viene assegnato congiuntamente a Nash, Harsanyi e Selten. Dal 1994 a oggi altri cultori della Teoria vengono insigniti del premio: Aumann e Schelling nel 2005; Myerson, Hurwicz e Maskin nel 2007; Roth e Shapley nel 2012; Jean Tirole nel 2014. Undici Nobel in ventun anni.

2.7. I convegni

Nascono inoltre convegni periodici espressamente dedicati ai Giochi, al di là delle sezioni tematiche ospitate nei meeting di Scienze Economiche, Sociali e di Ricerca Operativa.

In Italia il primo convegno viene organizzato a Bergamo il 12 ottobre 1983 da me e Michele Grillo. Seguono appuntamenti pressoché annuali in varie città italiane, talvolta ancora a Bergamo (ad esempio nel 1996, ove compare per la prima volta Nash).

Nel 1994 Federico Valenciano organizza a Bilbao il primo convegno spagnolo, cui ne seguono altri annuali, finché, nel 2000, si decide di alternare gli incontri italiani e spagnoli, a partire dall'anno successivo. In seguito anche l'Olanda chiede di entrare in gioco; nasce così il *SING* (*Spanish Italian Netherland Games*), il cui primo meeting è organizzato a Maastricht da Hans Peters nel 2005. Il successo del SING spinge altri Paesi ad aggregarsi: Polonia (Jacek Mercic a Wroclaw e Izabella Stach a Cracovia), Francia (Michael Grabish a Parigi), Ungheria (Laszlo Koczy a Budapest) e nel luglio di quest'anno Russia (Leon Petrosijan a San Pietroburgo). Per gli anni successivi sono già prenotate la Danimarca nel 2016 (Peter Sudholter a Odense) e la Francia nel 2017 (Stefano Moretti a Parigi). In omaggio al passato, la sigla SING è mantenuta invariata, con l'aggiunta di «*European Meeting on Game Theory*».

Su ispirazione del SING, nell'agosto di quest'anno Yukihiko Funaki organizzerà a Tokio il primo convegno *EAG*, (*East Asia Games*).

V'è inoltre l'appuntamento quadriennale della *GTS* (*Game Theory Society*) che inizia nel 2000 a Bilbao con Federico Valenciano e prosegue a Marsiglia, Chicago e Istanbul; l'edizione 2016 verrà organizzata a Maastricht da Hans Peters.

2.8. Bergamo

Oltre che punto di partenza dei convegni che hanno dato vita all'attuale SING europeo, Bergamo è un buon riferimento in Italia per cultori di giochi. Il mio primo incontro, da studente, con Shapley (dal quale sarebbe nato il mio algoritmo usato tuttora per il calcolo veloce del suo «valore») ha luogo nell'aria un po' bergamasca del Lario grazie a Giorgio Szegö. Presso l'Università di Bergamo sono da molti anni ospiti assidui John Nash, Guillermo Owen (con cui ho avuto la fortuna di pubblicare diversi lavori) e Harold Kuhn, prima della sua scomparsa il 2 luglio scorso. Sono venuti a Bergamo e talora tornati Robert Aumann e gli editors delle due più importanti riviste: Ehud Kalai e William Lucas. Molti altri «giochisti», meno noti ma a me non meno cari, sono sovente nostri ospiti. V'è infine da segnalare l'impegno dell'amico Riccardo Venchiarutti, il quale si appoggia spesso sulla nostra Università per le attività dell'Istituto Iseo, che coinvolge molti Nobel per l'Economia: lo scorso anno ne abbiamo avuti quattro.

Passiamo a esaminare le tre forme dei giochi statici.

3. La forma strategica

Nei giochi in forma normale, o strategica, i giocatori operano le loro scelte in un'unica fase. Vi sono i giochi a somma costante (in particolare, a somma zero) e quelli a somma variabile.

3.1. I giochi a somma zero

I responsabili del marketing di due ditte concorrenti devono pianificare i loro investimenti in campagne pubblicitarie. L'obiettivo di ciascuno è conquistare una o entrambe le piazze disponibili, *A* e *B*. La regola del gioco assegna, per ogni piazza, un punto (adeguatamente monetizzabile) alla ditta che vi investe più dell'altra e toglie un punto all'altra. A parità di investimento, zero punti a testa. Il modello è ovviamente rudimentale, in quanto non tiene conto di tanti particolari, ma può servire come primo approccio didattico per la costruzione di una tabella di pagamenti (in realtà una versione più perfezionata è attualmente in uso presso una ditta di mercato postale). Supponiamo che la prima azienda disponga di quattro unità di capitale da investire in pubblicità, la seconda di due, e che tali unità vadano impiegate in blocchi. La Tabella 1 riporta i pagamenti della prima ditta, ponendo in orizzontale le sue possibili mosse e in verticale le mosse della seconda.

I \ II	2 0	1 1	0 2
4 0	1	0	0
3 1	2	1	0
2 2	1	2	1
1 3	0	1	2
0 4	0	0	1

Tabella 1. I pagamenti della prima ditta.

Se, ad esempio, la prima ditta investe 4 su *A* e 0 su *B* (riga «4 0») mentre la seconda investe 2 su *A* e 0 su *B* (colonna «2 0»), la piazza A è vinta dalla prima ditta (=1 punto), la piazza *B* è pareggiata (=0 punti); 1 punto in totale. Se invece la prima ditta investe tutto su *B* (riga 0 4) e la seconda tutto su *A* (colonna «2 0»), allora la prima ditta vince un punto su *B* e perde un punto su *A*; totale 0.

Osserviamo che, in base alla regola del gioco, le vincite della seconda ditta sono gli opposti delle vincite della prima. Possiamo quindi evitare di scrivere un'altra tabella per *B*: basta inserire un «–» davanti a tutti gli elementi della tabella 1. Questa proprietà si esprime dicendo che il gioco è *a somma zero*: cioè, per qualsiasi coppia di mosse dei due giocatori, la somma dei pagamenti è nulla.

Esaminiamo ora l'aspetto strategico. Per la prima ditta è preferibile la mossa «4 0» o la mossa «3 1»? Certamente la «3 1», che le assicura una vincita maggiore o uguale a quella della «4 0», comunque giochi l'avversaria. Tecnicamente, si dice che *una mossa ne domina un'altra* se il vettore dei pagamenti corrispondenti alla prima è non inferiore a quello della seconda. Osserviamo che anche la mossa «0 4» è dominata dalla «1 3». In Tabella 1 non vi sono altre mosse dominate per la prima ditta (vettori in orizzontale) né per la seconda (vettori in verticale). Riportiamo in Tabella 2 la Tabella 1 priva delle mosse dominate. Alla destra aggiungiamo una colonna, che ora spieghiamo.

Consideriamo nuovamente il punto di vista della prima ditta. Se sceglie «3 1», il peggio che le può capitare è vincere 0. Scriviamo allora 0 nella colonna di destra, dei minimi di riga. Completiamo con lo stesso metodo tale colonna

I \ II	2 0	1 1	0 2	min	
3 1	2	1	0	0	
2 2	1	2	1	1	←
1 3	0	1	2	0	

Tabella 2. La Tabella 1 senza mosse dominate e con evidenza della mossa di maxmin per la prima ditta.

Osserviamo ora il valore 1, puntato dalla freccia. Si tratta del massimo fra tali minimi. In sostanza, la prima ditta è sicura che, scegliendo la mossa «2 2», potrà assicurarsi almeno la vincita 1, comunque giochi l'altra. Si tratta della *mossa di maxmin*, che massimizza la sua minima possibile vincita.

Passiamo ora al punto di vista della seconda ditta (con mosse in verticale e pagamenti cambiati di segno). La scelta «2 0» (prima colonna) porta a un mimino di –2; analogamente per la seconda e per la terza colonna. Non vi è quindi un'unica mossa di maxmin per la seconda ditta, che da quel punto di vista è indifferente a tutte e tre. D'altra parte, la seconda ditta può prevedere che la prima userà la sua mossa di maxmin «2 2». Quindi, non userà certo la «1 1», che la porterebbe a –2. Userà la «2 0» o la «0 2».

Ma allora la prima ditta può rivalutare la propria mossa, scatenando così un ciclo di «io so che tu sai che io so…» che non converge a una soluzione stabile.

Consideriamo ora il gioco rappresentato in Tabella 3, ove sono aggiunte a destra la colonna dei minimi di riga per il primo giocatore, e in basso la riga dei minimi di colonna per il secondo giocatore (con i pagamenti cambiati di segno). Notiamo che la mossa m^{I}_{2}, di maxmin per il primo giocatore (puntata dalla freccia orizzontale) porta al valore di maxmin 4. Allo stesso valore (cambiato ovviamente di segno) porta la mossa m^{II}_{3} di maxmin per il secondo giocatore, puntata dalla freccia verticale. Pertanto le mosse di maxmin di entrambi i giocatori puntano alla stessa casella. Ciò significa che ciascuno dei due, pur conoscendo la mossa ottimale dell'altro, non è incentivato a cambiare la sua. Viene così evitato il ciclo

I \ II	m^{II}_{1}	m^{II}_{2}	m^{II}_{3}	min	
m^{I}_{1}	2	6	3	2	
m^{I}_{2}	7	5	4	4	←
m^{I}_{3}	8	0	1	0	
min	–8	–6	–4		
			↑		

Tabella 3. Un gioco a somma zero con soluzione nelle strategie pure.

«io so che tu sai…». Tecnicamente, la coppia (m^{I}_{2}, m^{II}_{3}) si chiama *soluzione nelle strategie pure*. Infatti una *strategia* di un giocatore è una distribuzione di probabilità sulle sue mosse ed è *pura* se assegna probabilità 1 a una mossa e 0 alle altre (altrimenti è *mista*). La posizione individuata si chiama anche *punto di sella* (v. Figura 1) in quanto è di massimo nella direzione verticale (3, 4,1) e di minimo nella direzione orizzontale (7, 5, 4).

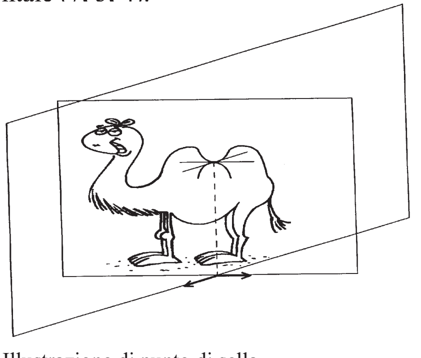


Figura 1. Illustrazione di punto di sella.

Ciò non avviene nel gioco delle due ditte, in quanto la mossa di maxmin della prima punta alla vincita 1, mentre tutte quelle di maxmin della seconda puntano a –2. La soluzione di quel gioco potrà aversi solo con le strategie miste, utilizzando il teorema del minimax di von Neumann (1928) che garantisce l'esistenza di un punto di sella per tutti i giochi a somma zero fra due persone. Osserviamo infine, nel gioco in Tabella 3, che se entrambi i giocatori usano la rispettiva strategia di maxmin, ottengono rispettivamente 4 e –4, ma se uno dei due ne usa un'altra, la sua vincita non migliora; ciò implica che questa coppia di strategie costituisce un *Nash-equilibrio*, concetto che illustreremo più avanti.

3.2. I giochi a somma costante

Consideriamo il gioco in Tabella 4. Non è a somma zero; dobbiamo quindi scrivere entrambe le vincite dei due giocatori; ad esempio la coppia di mosse (m^I_1, m^I_2) porta al pagamento 2 per il primo giocatore e 8 per il secondo.

Se osserviamo con maggiore attenzione, notiamo che in questo gioco la somma dei pagamenti associati a ogni coppia di mosse vale 10. Si tratta quindi di un gioco *a somma costante*. Il Teorema del Minimax può essere applicato anche a questi giochi, trasformandoli nei giochi a somma zero strategicamente equivalenti. L'operazione è semplicissima: se la somma costante è k, si sottrae k/2 a tutti i pagamenti. Nel nostro caso il gioco trasformato, descritto in Tabella 5, è evidentemente a somma zero.

I \ II	m^I_2	m^{II}_2
m^I_1	2 , 8	6 , 4
m^I_2	7 , 3	5 , 5

Tabella 4. Gioco a somma costante.

I \ II	C	m^{II}_2
m^I_1	–3 , 3	1 , –1
m^I_2	2 , –2	0 , 0

Tabella 5. Il gioco trasformato di quello in Tabella 4.

Usando la riga e la colonna dei maxmin osserviamo che questo gioco non ha soluzione nelle strategie pure; occorrerà allora scomodare von Neumann, che ci fornirà (non vi dico come) le distribuzioni di probabilità

x_1= 1/3 e x_2=2/3, sulle mosse del primo giocatore, e

y_1= 1/3 e y_2=2/3 sulle mosse del secondo.

Le vincite corrispondenti sono, nel gioco a somma zero 1/3 e –1/3; nel gioco originario 16/3 e 14/3.

3.3. I giochi a somma variabile

Due terroristi sono chiusi in celle separate, senza la possibilità di comunicare fra loro. Insieme hanno commesso un reato; ora devono decidere se confessarlo o meno. Per via della collaborazione con la giustizia, la confessione di ognuno diminuirebbe (da 10 a 5) il numero di anni di prigione; tale diminuzione sarebbe ancora maggiore (da 10 a 1) se fosse un solo giocatore a confessare. Se nessuno dei due confessa, il reato non è dimostrabile ed entrambi vengono subito liberati. Rappresentiamo il gioco in Tabella 6, precisando che in letteratura è noto un gioco, detto «Dilemma del prigioniero», simile a questo, ma diverso. Il dilemma del terrorista è anche noto come gioco della «caccia al cervo».

I \ II	Confessa	Non Confessa
Confessa	–5 , –5	–1 , –10
Non Confessa	–10 , –1	0 , 0

Tabella 6. Il dilemma del terrorista.

Come si vede, si tratta di un gioco a somma variabile, in quanto, ad esempio, la coppia di mosse «confessa, confessa» porta a un totale di –10, mentre «non confessa, non confessa» porta a un totale di 0.

Per risolverlo, iniziamo a considerare il punto di vista del primo giocatore. Se ci concentriamo solo sulle sue vincite (cioè sui numeri a sinistra) vediamo che la confessione gli porta un minimo di –5, la non confessione un minimo di –10. La sua mossa di sicurezza è quindi «confessa». Consideriamo ora il secondo giocatore (numeri a destra, mosse in verticale). Anche in questo caso la mossa di sicurezza è «confessa». Questo gioco ha un'ovvia soluzione cooperativa: la «non confessa, non confessa». Si tratta della «soluzione cooperativa di Nash». La sua attuabilità sta nelle condizioni del gioco: se i giocatori possono fidarsi uno dell'altro, o comunque controbilanciare comportamenti scorretti, può essere adottata; altrimenti la competitiva è più sicura.

V'è poi un problema che in questo esempio non viene messo in luce: la distribuzione della vincita fra i due giocatori. Qui, infatti, entrambi ottengono 0 anni ed escono liberi, ma in generale la ripartizione del guadagno da cooperazione non è così semplice.

Consideriamo ad esempio un gioco fra A e B ove, nella soluzione competitiva, A vince 6 e B vince 3. Se, cooperando, essi vincono un totale di 10 e se vi è trasferibilità dell'utilità, quanto andrà a ciascuno? Il signor B può proporre la ripartizione paritetica (5, 5), ma il signor A ribatte che, giocando in modo competitivo, riuscirebbe ad avere 6 da solo. Poiché anche B, per lo stesso motivo, non può ricevere meno di 3, si tratta di ripartire l'unità che resta. A questo punto parrebbe ovvio e giusto dividerla a metà fra i due, ma possono esserci altre considerazioni.

Nash risolse il problema nei giochi a due persone in (1950a), con una soluzione in grado di rispettare un ragionevole sistema di assiomi. Senza entrare nel merito di tali assiomi, mi limito ad accennare all'aspetto geometrico. Nella Figura 2 sono rappresentate le coordinate dei punti corrispondenti ai quattro possibili pagamenti nelle strategie pure e (zona tratteggiata) a tutte le strategie miste dei due giocatori. Sono in particolare evidenziati i pagamenti relativi alla soluzione competitiva (–5 , –5) e a quella cooperativa (0 , 0). In questo caso è ovvio che non vi sono problemi nel fissare quest'ultimo punto.

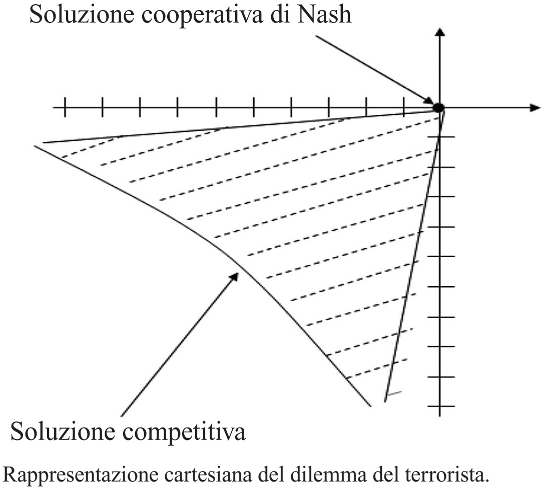


Figura 2. Rappresentazione cartesiana del dilemma del terrorista.

Consideriamo invece il gioco rappresentato in Figura 3. I vertici del poligono corrispondono ai pagamenti raggiungibili con le strategie pure. In questo caso è tratteggiata la sola regione in cui è rispettata la *razionalità individuale*, cioè ove i pagamenti non sono inferiori a quelli che ciascuno

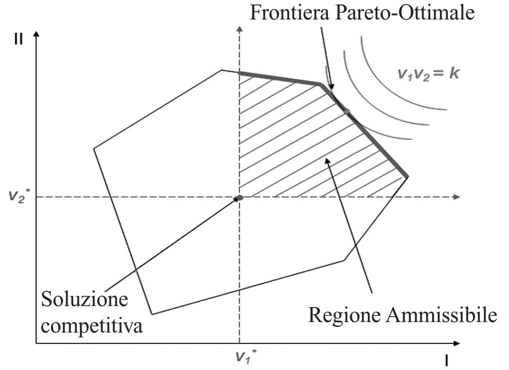


Figura 3. Rappresentazione cartesiana della soluzione cooperativa di Nash per giochi a due persone

otterrebbe con la soluzione competitiva (nell'esempio «6, 3, 10» si tratta di quelli per cui la vincita di A è ≥ 6 e quella di B è ≥ 3).

Un qualsiasi punto interno al poligono è da scartare, perché ne esiste certamente un altro a Nord Est che è migliore per entrambi i giocatori. Per rendere visiva questa situazione, basta posizionare il palmo della mano sinistra con il pollice parallelo al primo asse, l'indice parallelo al secondo e l'origine di questi «assi manuali» sul punto. La zona del poligono che rimane scoperta è congiuntamente migliorabile per entrambi i giocatori. Notiamo che anche la parte di lato non ingrossata, in basso a destra, è congiuntamente migliorabile: sovrapponendo la mano possiamo infatti vedere che restano punti scoperti. Gli unici punti della frontiera del poligono che sopravvivono a questa selezione sono quelli ingrossati. Essi costituiscono la cosiddetta *frontiera Pareto-ottimale*, tale che, in ciascuno dei suoi punti, un miglioramento del pagamento per un giocatore implica necessariamente un peggioramento per l'altro. Nash in (1950a) dimostrò che esiste al più un punto di arrivo della contrattazione, in grado di rispettare un ragionevole sistema di assiomi… ma manca qui lo spazio per illustrarlo.

Nash pubblicò inoltre nel 1953 una seconda soluzione cooperativa, detta *con minaccia*, che corrisponde alla ricerca di una cooperazione forzata; anche qui non posso andare oltre.

3.4. I Nash equilibri

Il teorema del Minimax di von Neumann del 1928, utilizzato anche nel libro del 1944, vale solo per giochi a somma costante fra due giocatori. Per giochi a somma variabile e per giochi con più di due giocatori è necessario attendere i risultati di Nash. Nel paragrafo precedente abbiamo accennato a quelli relativi ai giochi a due persone; ora ci occupiamo di giochi a n persone, con $n \geq 2$. Per ambientarci, osserviamo la Figura 4 relativa a un gioco a tre persone. Se il primo giocatore usa la sua 5^a mossa, il secondo la sua 4^a e il terzo la sua 5^a, i pagamenti (riportati nel cubetto) sono 3, 12 e -9 rispettivamente.

Immaginiamo che dentro ogni cubetto corrispondente a una terna di mosse siano scritti i tre pagamenti dei giocatori, in una sorta di dado di Rubik.

– Prima domanda: il gioco è a somma zero? Risposta: «NO», perché la somma dei pagamenti nel cubetto non è zero.
– Seconda domanda: è a somma costante? La risposta esatta è «BOH», perché non conosciamo le somme delle terne di tutti gli altri cubetti.

Come dicevo, per questo gioco non vale il teorema del minimax di von Neumann; i giocatori possono comunque adottare mosse di maxmin nelle strategie pure, in modo da garantirsi di non perdere oltre un certo limite.

Un concetto peraltro importantissimo in questo contesto è l'equilibrio di Nash, introdotto in (1950b). Per illustrarlo, supponiamo che, nell'esempio della Figura 4, il primo giocatore, invece di usare

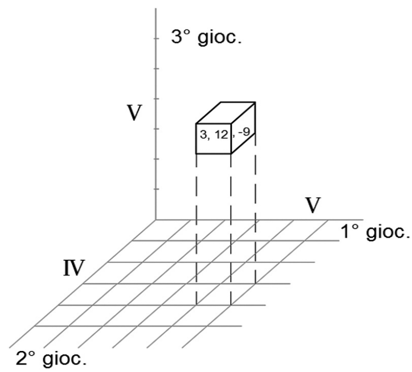


Figura 4. Un gioco a tre persone.

la sua 5ª mossa, ne usi un'altra, ad esempio la sua *2ª*, mentre gli altri due mantengono fisse le loro. Ipotizziamo che in tal caso il primo giocatore, invece di vincere 3, vinca 1 e che gli arrivi una diminuzione per qualsiasi cambiamento di mossa, ferme restando le mosse degli altri due.

Supponiamo ora che, fermo restando il primo giocatore sulla sua mossa iniziale, lo stesso effetto di calata al cambio della scelta, accada anche al secondo e al terzo giocatore. In tal caso, la terna di strategie corrispondenti alle mosse (5ª, 4ª, 5ª) è un Nash equilibrio. In generale, un *Nash equilibrio* di un gioco a *n* persone è un vettore di *n* strategie tali che, se tutti i giocatori le adottano, nessuno è incentivato a cambiare la sua.

Ad esempio, nel gioco in Tabella 3, la coppia di strategie corrispondenti alle mosse (m^{I}_{2}, m^{II}_{3}) è un Nash equilibrio e in generale sono Nash equilibri tutti i punti di sella dei giochi a due persone a somma costante. Il Nash equilibrio è quindi una generalizzazione della soluzione di von Neumann.

3.5. Realtà e fiction in «A Beautiful Mind»

Per alleggerire la trattazione, che nelle ultime pagine è stata un po' dura da digerire, occupiamoci un momento del film «A Beautiful Mind». Fra fiction e realtà vi sono molteplici differenze; qui mi limito ad accennare alla parte scientifica. Quasi nessuna delle formule scritte sulle lavagne e sui vetri riguarda la Teoria dei Giochi e nessuna riporta risultati di Nash. L'unica soluzione illustrata con una certa enfasi riguarda l'episodio della «bionda» nel bar, ma...

Il giovane Nash si trova in un bar con due amici. Entrano quattro ragazze: una bionda strepitosa e tre brunette meno appetibili. Gli sguardi dei tre si concentrano ovviamente sull'obiettivo biondo, ma Nash osserva: se tutti e tre ci buttiamo a caccia della migliore, le altre se ne vanno offese e noi restiamo a spennarci a vicenda, finché anche la bionda se ne va. Soluzione: lasciamo la bionda al suo destino, indirizziamoci ognuno su una mora e dovremmo riuscire a realizzare qualcosa di buono.

A prescindere dal maschilismo dell'episodio (pure le fanciulle dovrebbero aver voce in capitolo) v'è qualcosa che non funziona. Domandiamoci: quella proposta

- È una soluzione cooperativa di Nash per giochi a due persone? NO, perché i giocatori coinvolti sono tre.
- È una soluzione cooperativa con minaccia per giochi a due persone? NO, perché i giocatori coinvolti sono tre.
- È un Nash equilibrio? Se due giovanotti si rivolgono a due brunette, al terzo conviene restare sull'ultima brunetta? NO.

Quindi l'unico esempio di strategia esibito nel film non ha nulla a che fare con Nash.

4. La forma estesa

I giochi in *forma estesa*, o *ad albero*, sono quelli in cui i giocatori si alternano nelle loro decisioni. Riguardano per lo più due soli giocatori.

4.1. Informazione perfetta e completa

Nell'esempio in Figura 5 il primo giocatore (pallina in alto) deve scegliere se prendere la strada T o la B. Se sceglie T, al secondo toccherà scegliere fra la strada L (che comporta un pagamento di 4 al primo e 3 al secondo) o la R (che comporta un pagamento di 6 al primo e 1 al secondo). Se invece il primo giocatore sceglie la strada B, la scelta L del secondo porta un pagamento di 2 al primo e 2 al secondo; mentre la scelta R a 5 al primo e 2 al secondo. Che fare?

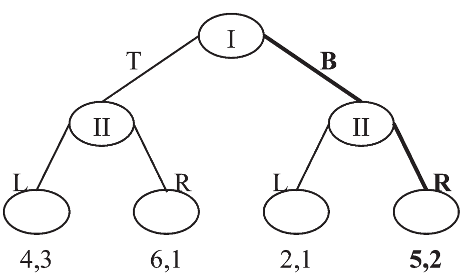


Figura 5. Gioco a informazione perfetta e completa

La soluzione è semplice, considerando la strada a ritroso: se il secondo si troverà a destra, sceglierà sicuramente R, che gli porterà 2 invece di 1. Quindi, scegliendo B, il primo giocatore sa che vincerà 5.

Se invece il primo sceglie T, il secondo sceglierà L (essendo 3>1), per cui il primo vincerà 4. In conclusione, al primo conviene la scelta B, cui segue la scelta R del secondo.

Per capire come può costruirsi il grafo di un gioco in forma estesa, usiamo la dama semplificata in Figura 6 e il grafo corrispondente in Figura 7. Per brevità, stabiliamo che la vittoria sia assicurata dalla conquista di un damone.

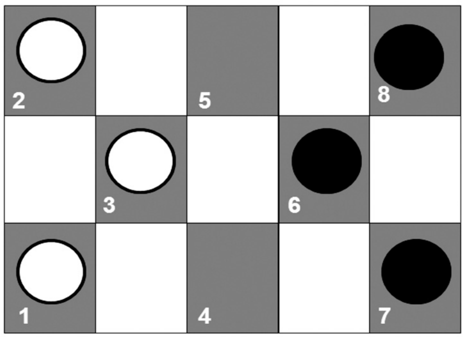


Figura 6. Il modello di dama ridotta

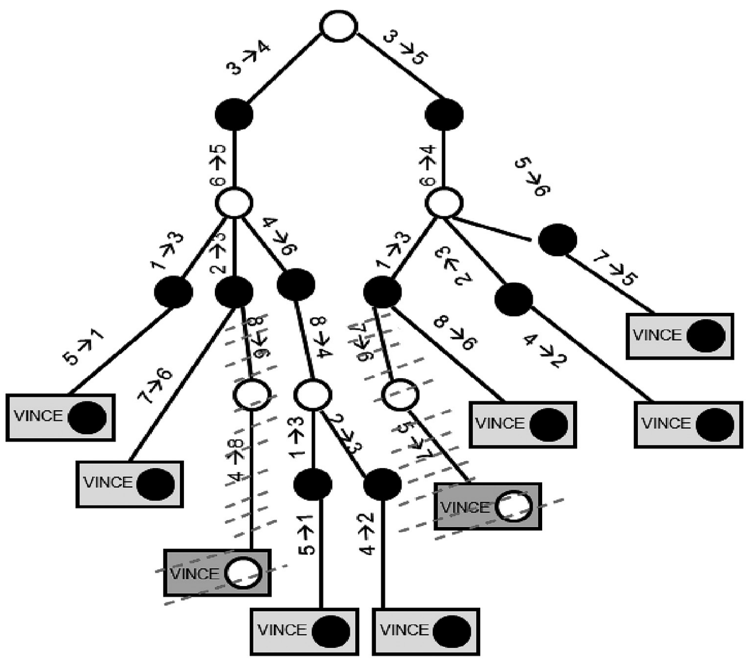


Figura 7. La rappresentazione del gioco della dama ridotta.

Come prima mossa, il bianco può scegliere fra 3>4 e 3>5. Dopo tale scelta, il nero ha una mossa obbligata; poi tocca al bianco e così via. Per la soluzione si procede come nell'esempio precedente, partendo dal fondo. Al nero interessa che non si arrivi a «vince bianco». Pertanto, nel caso del «vince bianco» a destra, risalendo alla precedente mossa che l'ha portato lì (7>6), il nero decide a favore della 8>6, ottenendo la vittoria. Analogamente, nel caso «vince bianco» di sinistra, nella scelta a monte il nero scarta la 8>6 a favore della 7>6, ottenendo la vittoria.

Per quanto riguarda il bianco, non vi sono mosse a monte dei «vince nero» che gli consentono di mutare l'esito della partita, che è quindi destinata alla vittoria del nero. In (Gambarelli, 2003) è riportata un'analoga partita con quattro pedine per ogni giocatore. Anche in quel caso vince il nero. Non so se la cosa funzioni anche per le usuali dodici pedine a giocatore; sta di fatto che i metodi con cui viene insegnato al computer come giocare a dama e a scacchi si basano proprio su questi schemi. Per la complessità computazionale, non è possibile realizzare schemi completi in tali casi; si ricorre allora all'aiuto di ulteriori strumenti: memorizzazioni di finali di partita (come quelli dei giornali enigmistici), regole strategiche come la ricerca della centralità, eccetera.

Con i primi modelli rudimentali, i grandi campioni riuscivano a battere il computer, ma ora si stanno affinando le tecniche con l'inserimento di informazioni sul comportamento dell'avversario da incontrare: preferenze in certe situazioni, finali di partita giocati eccetera) e pare che il computer stia prendendo il sopravvento. Si tratta di operazioni analoghe a quelle dell'allenatore che visiona i filmati di incontri della prossima squadra avversaria, per coglierne pregi e debolezze.

4.2. Informazione imperfetta

Nei giochi a *informazione imperfetta*, in una certa fase, un giocatore non sa quale sia stata la precedente scelta dell'altro, o addirittura ciò può accadere a entrambi. Questo ha luogo ad esempio in molte decisioni aziendali, quando non si dispone di sufficienti informazioni sulla concorrenza. Supponiamo che ciò accada al secondo giocatore nel gioco della Figura 5. Questa situazione viene rappresentata in Figura 8, tramite l'aggiunta di un ovale che racchiude le possibili posizioni in cui si trova. Come procedere?

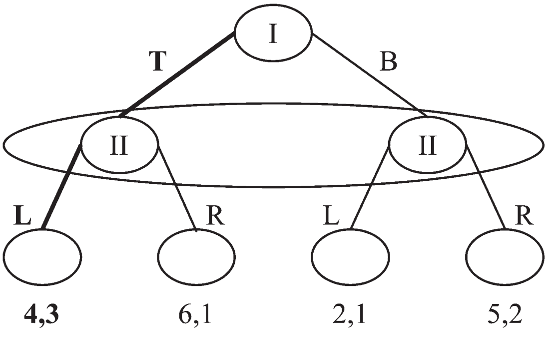


Figura 8. Gioco a informazione imperfetta.

Una strada consiste nella trasformazione del gioco dalla forma estesa alla forma normale, come in Tabella 7. Si trovano le soluzioni competitive e/o cooperative e si trasferiscono al gioco originario.

Occorre tenere presente che diversi giochi in forma estesa possono portare allo stesso gioco in forma normale.

I \ II	L	R
T	4, 3	6, 1
B	2, 1	5, 2

Tabella 7. La trasformazione del gioco della Figura 8.

4.3. Informazione incompleta

In certe situazioni può anche accadere che uno, o entrambi i giocatori, non conoscano «a che gioco stanno giocando». Ad esempio un assicuratore può avere scarse informazioni su un cliente reticente, al quale sta compilando una polizza: fa abitualmente del free-climbing, o gioca a briscola chiamata? Che farmaci assume? e così via. Il decisore può, se mai, assegnare delle probabilità ai diversi tipi di gioco in cui è coinvolto.

Consideriamo ad esempio la Figura 9 e supponiamo che vi sia probabilità 1/3 che il gioco sia quello del ramo A e 2/3 che sia quello del ramo B. In tal caso, la traduzione in forma normale porta alla Tabella 8, che riteniamo di facile interpretazione.

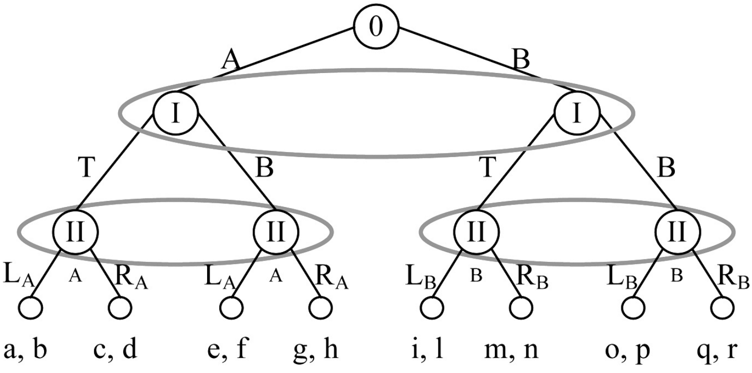


Figura 9. Gioco a informazione incompleta.

I \ II	L	R
T	(1/3) a + (2/3) i, (1/3) b + (2/3) l	(1/3) c + (2/3)m, (1/3) d + (2/3) n
B	(1/3) e + (2/3) o, (1/3) f + (2/3) p	(1/3) g + (2/3) q, (1/3) h + (2/3) r

Tabella 8. La trasformazione del gioco della Figura 9.

5. La forma caratteristica

Tre aziende stanno concordando un accorpamento per migliorare la loro efficienza attraverso sinergie. Il problema è come ripartire i vantaggi ottenuti. Per una contrattazione consapevole, ogni azienda deve aver chiara la massima richiesta che può fare per evitare di essere esclusa e sapere come può controbattere a proposte insoddisfacenti.

5.1. La funzione caratteristica

Indicando 1, 2 e 3 le aziende, (1,2) (1,3) ecc. le coalizioni e v le relative vincite,

possiamo supporre di avere le seguenti informazioni:
v(Ø) = 0, cioè la coalizione vuota non vince nulla.

Per quanto riguarda le aziende auto-coalizzate,
v(1) = 1, v(2) = 0, v(3) = 5.

Per le altre coalizioni
v(1,2) = 1, v(1,3) = 7, v(2,3) = 5, v(1,2,3) = 18.

Si tratta di un gioco *superadditivo* in quanto, per ogni coppia di coalizioni disgiunte (es. la (1) e la (2,3)) la somma delle vincite è minore o uguale alla vincita della loro unione ($v(1)+v(2,3) \leq v(1,2,3)$).

Possiamo dire che «l'unione fa la forza», in quanto almeno in un caso la disuguaglianza è stretta (tecnicamente, si tratta di un gioco *essenziale*). È anche un gioco a somma variabile, in quanto la somma delle vincite di ogni coppia di coalizioni complementari non è costante (es. ($v(1)+v(2,3) < v(2)+ v(1,3)$)).

5.2. Le imputazioni e il nucleo

Trattandosi di un gioco superadditivo, se non vi sono motivi di preclusione fra le parti, è ragionevole aspettarsi una coalizione fra tutte e tre le aziende; si tratta di capire entro quali limiti potrà essere ripartita la vincita globale v(1,2,3)=18.

Chiamiamo imputazione di v ogni vettore (x_1, x_2, x_3) dotato dei minimi requisiti per essere una possibile ripartizione, cioè la razionalità globale $x_1+ x_2+ x_3 = v(1,2,3)$ e la razionalità individuale $x_1 \geq v(1)$, $x_2 \geq v(2)$, $x_3 \geq v(3)$.

Eliminati tutti i vettori che non siano imputazioni (che mal si prestano a costituire una ragionevole soluzione) si tratta di procedere, con ulteriori colpi di spugna, a toglierne altri, con criteri analoghi. Consideriamo, ad esempio, la proposta fatta dalla seconda azienda, di scegliere l'imputazione (1, 12, 5). La prima e la terza possono rifiutarla, in quanto insieme riescono a ottenere più di quanto verrebbe loro dato da quella imputazione:

$v(1,3)\ (= 7) > x_1+ x_3\ (= 1+5)$.

Ecco un'altra ragionevole condizione che restringe l'insieme delle imputazioni: per ogni coalizione S la somma delle componenti x_i relative ai giocatori di S dev'essere maggiore o uguale a v(S). L'insieme delle imputazioni che soddisfano tale condizione si chiama *core* «*nucleo*») di v.

Il core, introdotto da David Gillies nel 1953 con la sua tesi di laurea, ha varie proprietà, ma…

Consideriamo il gioco
v(Ø) = v(1) = v(2) = v(3) = 0; v(1,2) = v(1,3) = v(2,3) = 0,7; v(1,2,3) = 1.
Cerchiamo un elemento del core, cioè un vettore (x_1, x_2, x_3) tale che

$x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$
$x_3 \geq 0$
$x_1 + x_2 \geq 0{,}7$
$x_1 + x_3 \geq 0{,}7$
$x_2 + x_3 \geq 0{,}7$
$x_1 + x_2 + x_3 = 1$

Lavorando sulle ultime tre disuguaglianze e sull'uguaglianza finale, possiamo facilmente verificare che il sistema non ha soluzione. Quindi può capitare che il nucleo sia vuoto. Può anche capitare (come nell'esempio delle aziende) che sia composto di più di una imputazione. Che fare?

5.3. I valori

Nel 1953 Lloyd Shapley pubblica un altro caposaldo della Teoria dei Giochi: *A value for n-person games*. Vi presenta una soluzione per tutti i giochi a n persone in forma caratteristica, a utilità trasferibile, che è in grado di rispettare un sistema di assiomi molto ragionevoli. Di tale soluzione dimostra esistenza e unicità.

Più tardi verrà costruito un «valore» alternativo (che rispetta tutti tali assiomi, meno uno) come generalizzazione e unificazione di risultati relativi a una particolare classe di giochi, i «giochi di voto» di cui parleremo più avanti. Questi risultati sono dovuti a Lionel S. Penrose (1946), James S. Coleman (1964) e John F. Banzhaf (1965). Per semplicità, tale soluzione viene usualmente chiamata *valore di Banzhaf*; così faremo in queste pagine. Per altri «valori» meno noti rinvio alla voce «Values» che ho redatto per l'Encyclopedia of Power della SAGE.

Nel paragrafo successivo ci occuperemo di assiomi, proprietà e applicazioni dei due principali valori; ora esaminiamo la loro struttura.

Entrambi si basano sul *contributo marginale* $c_i(S)$ dato dall'i-esimo giocatore alla coalizione S. Si tratta della differenza fra la vincita v(S) e la vincita di S privata dell'i-esimo giocatore:

$$c_i(S) = v(S) - v(S \setminus \{i\})$$

Un quadro dei contributi marginali in un gioco a tre persone è riportato in Tabella 9.

Il valore di Banzhaf β_i assegna all'i-esimo giocatore una vincita proporzionale alla somma dei contributi marginali da lui dati a tutte le coalizioni di cui fa parte:

$$\beta_i = k \cdot \sum c_i(S)$$

ove la somma è appunto estesa a tutte le coalizioni S cui appartiene l'i-esimo giocatore e k è un coefficiente che serve a far quadrare i conti.

Calcoliamo, ad esempio, il valore di Banzhaf nel gioco delle tre ditte:

v(Ø) = 0, v(1) = 1, v(2) = 0, v(3) = 5, v(1,2) = 1, v(1,3) = 7, v(2,3) = 5, v(1,2,3) = 18. In Tabella 10 sono riportati i calcoli. In ciascuna riga il valore di Banzhaf del relativo giocatore si ottiene moltiplicando il totale dei suoi contributi marginali per 18/61, in modo da ottenere valori la cui somma è v(1,2,3) = 18.

GIO CA TORE	somme contributi marginali alle coalizioni di		
	1 giocatore	2 giocatori	3 giocatori
1	v(1)-v(∅)	v(1,2)−v(2) ; v(1,3)−v(3)	v(1,2,3) −v(2,3)
2	v(2)-v(∅)	v(1,2)−v(1) ; v(2,3)−v(3)	v(1,2,3) −v(1,3)
3	v(3)-v(∅)	v(1,3)−v(1) ; v(2,3)−v(2)	v(1,2,3) −v(1,2)

Tabella 9. I contributi marginali in un gioco a tre persone.

GIO CA TORE	somm e contr. mar.alle coal. di			TOTALI	valori di Banzhaf (arrotondati)
	1 gioc.	2 gioc.	3 gioc.		
1	1	1+2	13	17	5,01
2	0	0+0	11	11	3,25
3	5	6+5	17	33	9,74
		TOTALI		61	18

Tabella 10. Il calcolo del valore di Banzhaf nel gioco delle tre ditte.

Passiamo al valore di Shapley Φ. La differenza con quello di Banzhaf sta nel coefficiente di normalizzazione, che per Banzhaf è unico, all'esterno della sommatoria, mentre per Shapley assume valori diversi a seconda della dimensione della coalizione. Più precisamente, ognuno di tali coefficienti k_S vale

$$k_S = (s-1)!(n-s)!/n!$$

ove n è il numero totale dei giocatori e s è la cardinalità della coalizione S considerata (ricordiamo che il fattoriale di un numero naturale n, indicato con «n!», è il prodotto 1×2 ×…×n, con la convenzione 0!=1).

Riportiamo in Tabella 11 i coefficienti del valore di Shapley nel caso di un gioco a tre persone.

	coefficienti per le coalizioni di		
	1 giocatore	2 giocatori	3 giocatori
k_S	(1-1)!(3 -1)!/3!	(2-1)!(3 -2)!/3 !	(3-1)!(3 -3)!/3!
=	1/3	1/6	1/3

Tabella 11. I coefficienti del valore di Shapley nel caso di un gioco con tre giocatori.

Il valore di Shapley Φ assegna all'i-esimo giocatore una vincita che somma i contributi marginali, moltiplicati ciascuno per il coefficiente k_S:

$$\Phi = \sum k_S \, c_i(S)$$

Come per Banzhaf, la somma è estesa a tutte le coalizioni *S* cui appartiene l'*i*-esimo giocatore.

Riportiamo in Tabella 12 il calcolo del valore di Shapley nel gioco delle tre ditte.

5.4. Gli assiomi

Tre sono gli assiomi che caratterizzano il valore di Shapley:

– *l'uomo di paglia*: se un giocatore non dà alcun contributo a nessuna coalizione tranne che a se stesso, gli deve essere assegnata semplicemente la sua vincita singola;

GIO CA TORE	somm e contr . ma r.alle coal. di			calcoli	val.di Shapley (arrotondati)
	1 gioc.	2 gioc.	3 gioc.		
1	1	3	13	1·1/3 + 3·1/6 + 13·1/3	5,17
2	0	0	11	0·1/3 + 0·1/6 + 11·1/3	3,67
3	5	11	17	5·1/3 + 11 ·1/6 + 17·1/3	9,17
coeff	1/3	1/6	1/3	TOTALE	18

Tabella 12. Il calcolo del valore di Shapley nel gioco delle tre ditte.

– la *simmetria*: l'assegnazione del valore non deve dipendere dal modo con cui sono stati numerati i giocatori;

– l'*additività*: se due giochi separati vengono fusi in un unico gioco, il valore assegnato a ciascun giocatore nel gioco unificato deve essere la somma dei valori assegnati a quel giocatore nei giochi componenti.

Di questi assiomi i primi due sono quelli adottati anche da quasi tutti gli altri valori (Banzhaf compreso), mentre il terzo cambia. Omettiamo la spiegazione dell'assioma corrispondente nel caso del valore di Banzhaf, un po' complicata.

5.5. Proprietà e applicazioni

Consideriamo innanzitutto il modo con cui questi due valori sono costruiti. È come se la coalizione globale venisse formata, in tutti i modi possibili, con aggregazioni successive di giocatori a una coalizione in formazione e a ciascun giocatore venisse dato il suo contributo marginale, corretto opportunamente per far quadrare i conti. Nel caso di Shapley, tale correzione tiene conto dell'ordine con cui i giocatori si sono aggiunti; nel caso di Banzhaf, no. Si tratta cioè di permutazioni nel primo caso, di combinazioni nel secondo.

La principale proprietà del valore di Shapley sta nell'appartenenza al nucleo in tutti i giochi convessi (mancando lo spazio, mi limito a dire che sono la gran parte dei modelli di situazioni reali). Ciò conferisce a quel valore una stabilità che manca a quello di Banzhaf. Vi sono inoltre altre proprietà (monotonia eccetera su cui non posso dilungarmi) che fanno considerare quello di Shapley il valore più adatto a rappresentare l'esito di contrattazioni, da usarsi quindi a fini previsivi. Il valore di Banzhaf, invece, trova più consone applicazioni in ambito normativo, per via della diretta proporzionalità con i contributi marginali dati dai giocatori.

Per fare un esempio, consideriamo il seguente problema di ripartizione dei costi illustrato in Figura 10. Tre terreni necessitano di irrigazione per poter fornire prodotti agricoli. Sono collocati, rispetto a una fonte d'acqua (indicata dal pallino nero) in posizioni tali per cui è necessaria la canalizzazione schematizzata in figura. In particolare, i canali per i terreni 2 e 3 devono passare per il terreno 1. Si tratta di concordare l'intervento e la ripartizione della spesa, nell'ipotesi che vi sia diritto di utilizzo del terreno 1 da parte degli altri due.

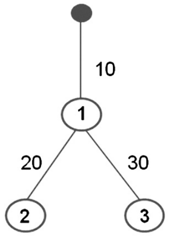


Figura 10. La ripartizione dei costi di canalizzazione

Supponiamo che il vantaggio di utilizzare l'acqua sia quantificabile in 100 per ciascun terreno e che i costi dei canali siano quelli indicati in figura. Per semplicità, identifichiamo i proprietari con i numeri dei terreni. Ovviamente, la coalizione del solo giocatore (2) non guadagna nulla; lo stesso vale per la coalizione del solo (3) e di (2,3), che senza il giocatore 1 non possono raggiungere l'acqua. Negli altri casi la funzione caratteristica vale:

$$v(1) = 100 - 10 = 90$$
$$v(1,2) = 100 + 100 - 10 - 20 = 170$$
$$v(1,3) = 100 + 100 - 10 - 30 = 160$$
$$v(1,2,3) = 100 + 100 + 100 - 10 - 20 - 30 = 240.$$

Ora cerchiamo di capire che valore utilizzare.

Come si è detto, se si tratta di una pura contrattazione fra i tre, il valore più adatto a prevedere il risultato è quello di Shapley. Supponiamo, invece, che le opere siano soggette ad aiuti finanziari di un ente che ha per obiettivo il benessere di tutte le aree (ad esempio, se la Banca Mondiale fornisce un prestito super-agevolato per aiutare ad irrigare Paesi vicini al Nilo). In tal caso, una ripartizione della spesa può essere stabilita per via normativa dalla Banca; il valore di Banzhaf ha quindi più senso..

Nell'esempio considerato, il valore di Banzhaf coincide con quello di Shapley:

$$\beta_1 = \Phi_1 = 165 \quad ; \quad \beta_2 = \Phi_2 = 40 \quad ; \quad \beta_3 = \Phi_3 = 35$$

Pertanto:

- il giocatore 2 versa (100 – 40=) 60
- il giocatore 3 versa (100 – 35=) 65
- del totale versato (=125) vengono impiegati 60 per le tubazioni e 65 per compensare il giocatore 1.

Con metodi analoghi possono essere ripartiti i costi in vari campi applicativi: tasse di utilizzo di piste aeroportuali di diverse dimensioni, impegni ambientali eccetera. Analogamente per la ripartizione degli utili.

Concludo con una osservazione di carattere applicativo: non tutte le coalizioni teoricamente realizzabili lo sono in realtà, per via di affinità o antipatie, ideologie eccetera. Guillermo Owen ha allora dato il via a studi in quell'ottica, generalizzando il valore di Shapley in (1977) e quello di Banzhaf in (1981).

5.6. I giochi di voto

Consideriamo un Paese ove vi siano tre soli partiti politici, A, B e C, con la seguente ripartizione di seggi: 30% ad A e B e 40% a C. Se non vi sono particolari propensioni o avversioni per certe alleanze, è facile constatare che tutti e tre sono sullo stesso piano agli effetti delle possibili coalizioni di maggioranza semplice: possiamo assegnare loro un «potere coalizionale» paritetico, cioè di 1/3 a ciascuno. La stessa situazione si presenterebbe se A e B avessero il 49% dei seggi ognuno e C il 2%: quest'ultimo partito avrebbe infatti, pur con un potere nominale molto basso, un potere reale uguale a quello degli altri. Se invece A avesse da solo il 51% dei seggi, il suo potere sarebbe del 100% (cioè 1). Che dire se la ripartizione dei seggi fosse 50% per A, 30% per B e 20% per C ? In questo caso A non possiede da solo la maggioranza; d'altra parte ognuno degli altri due ha bisogno di unirsi ad A, in quanto la coalizione fra B e C è minoritaria. È intanto facile intuire che questi ultimi, pur avendo diverse quantità di seggi, sono in ugual posizione di potere; è anche presumibile che A abbia un potere maggiore, data la sua posizione-chiave; ma che ripartizione possiamo attribuire?

Quello che abbiamo visto è un esempio di *gioco di maggioranza ponderata*. Per analizzarlo partiamo dai cosiddetti *giochi semplici*, cioè i giochi la cui funzione caratteristica può valere solo 0 o 1. I giochi di maggioranza ponderata sono particolari giochi semplici, caratterizzati dai *pesi* $w_1, \ldots, w_n$ dei giocatori (che rappresentano seggi, azioni societarie, millesimi condominiali ecc.) e da una *quota di maggioranza q* (maggiore della metà del totale dei pesi) che va superata perché una coalizione sia vincente. La trasformazione dal gioco di maggioranza ponderata al corrispondente gioco in forma caratteristica segue la seguente regola:

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{se } \sum_{i \in S} w_i \geq q \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Nel primo caso si dice che la coalizione S *è maggioritaria,* o *vincente.*
- Nel secondo caso si dice che la coalizione S è *minoritaria,* o *perdente*.

Per tornare all'ultimo esempio, $w_A = 50$, $w_B = 30$, $w_C = 20$, $q = 51$;
- le coalizioni vincenti sono (A, B), (A, C) e (A, B, C);
- tutte le altre sono perdenti.

È facile verificare che in quel gioco il valore di Banzhaf è 3/5 per A e 1/5 per B e C; il valore di Shapley è 2/3 per A e 1/6 per B e C.

Tecnicamente, nel caso dei giochi semplici, i valori vengono chiamati *indici di potere*. In realtà gli indici di potere nascono prima dei valori: con Lionel Penrose nel 1946 (già citato in quanto componente del «trio dei Banzhaf») e prima ancora, in una traccia meno «matematica», con Luther Martin nel 1787 (v. Riker, 1986). Nel 1954 Lloyd Shapley scrive con Martin Shubik una particolarizzazione del suo valore al caso dei giochi di maggioranza ponderata. Da lì nasce il collegamento fra valori e indici di potere, per cui indici preesistenti vengono generalizzati a valori e altri valori, successivamente creati, sono particolarizzati a indici di potere. Le principali applicazioni dei giochi di maggioranza ponderata riguardano le votazioni assembleari in politica (sistemi elettorali, ripartizione delle risorse controllate dal governo) e in finanza (scalate azionarie e normative di controllo). Approfondimenti possono trovarsi alla voce «Weighted Majority Games» che ho composta per l'Encyclopedia of Power della SAGE.

5.7. Dalla forma caratteristica alla forma strategica

Nei paragrafi 4.2. e 4.3. abbiamo visto come un gioco in forma estesa possa essere trasformato in forma normale (o strategica). La metodologia è indicata direttamente da von Neumann e Morgenstern nel loro testo del 1944. Per questo motivo gli sviluppi della Teoria dei Giochi in forma estesa sono spesso collegati con quelli dei Giochi in forma normale. I due autori suggerirono un'analoga trasformazione dalla forma caratteristica alla normale, ma solo per giochi a somma costante (un po' come per la soluzione del Minimax che non si estendeva ai giochi a somma variabile). Forse per questo motivo i giochi in forma caratteristica trovano soluzioni «coalition oriented» che tolgono le strategie dalle mani dei giocatori. In (Gambarelli, 2007) è stato proposto un metodo di trasformazione valido per tutti i giochi in forma caratteristica. Le strategie dei giocatori escono dall'interrogativo: «Quanto devo chiedere per partecipare a una coalizione? Se chiedo troppo poco, non ottimizzo la mia vincita; se chiedo troppo, nessuna coalizione mi accetterà e resterò da solo». La soluzione associata consiste nei Nash equilibri che portano a pagamenti Pareto-ottimali; è quindi dotata di una forte stabilità. Non è garantita l'unicità, mentre l'esistenza è stata dimostrata in quasi tutti i tipi di gioco (subadditivi, inessenziali, a due persone, a *n* persone con l'interno del nucleo non vuoto). A tutt'oggi manca un teorema generale che indichi la classe di giochi che ne è priva. Un tale teorema aprirebbe la strada a un recupero della letteratura sui giochi in forma normale, per quelli in forma caratteristica. Il problema è aperto…

6. I giochi differenziali

Come si è detto, i *giochi differenziali* sono descritti da equazioni differenziali. Un classico esempio risale al loro inventore Rufus Isaacs (1965). Riguarda un «automobilista omicida» che cerca di investire un pedone. L'automezzo ha una velocità massima maggiore di quella del pedone, ma anche maggiori inerzia e raggio di sterzata. Usando equazioni differenziali, si studiano possibili traiettorie del pedone che fugge e del guidatore che lo insegue e si determinano le condizioni per il successo dell'uno o dell'altro. Questi studi vengono applicati in ambito militare per la ricerca delle rotte ottimali di missili e anti-missili, ma anche in certe situazioni economiche, nel marketing, nella finanza, in biologia e in campo automobilistico…

Per approfondimenti segnalo i classici Tamer Basar e Geert Jan Olsder (1999) e Leon Petrosyan (1993), nonché il recente testo di Alain Haurie, Jacek B. Krawczyk e Georges Zaccour. (2012) e quello in italiano di Alessandra Buratto, Luca Grosset e Bruno Viscolani (2014).

7. Conclusione

Non c’è un modo più rapido di perdere un sacco di amici in un colpo solo, che scrivere un articolo di storia contemporanea. Nel rileggere queste pagine mi rendo conto di quanti autori e argomenti importanti ho trascurato. D’altra parte, trattandosi di un lavoro introduttivo, ho dovuto ignorare gli argomenti di più difficile spiegazione. Spero che i colleghi «giochisti», se mai leggeranno queste note, vorranno perdonarmi.

8. Ringraziamenti

Questo articolo fa seguito a una mia testimonianza su Nash, pubblicata lo scorso anno in questo Bollettino e uscito in parte sul Periodico di Matematiche. Ringrazio gli amici Gianfranco Arrigo per avermi stimolato a intraprendere questo lavoro, Alessandra Buratto, Giacomo Costa, Vito Fragnelli, Gaudenzio Rovaris, Valeria Ruggeri e Giorgio Szegö per preziosi suggerimenti in corso d’opera (Giorgio Szegö in particolare, per essermi stato maestro e guida). Ringrazio infine i lettori – in particolare quelli più determinati che ce l’hanno fatta ad arrivare fin qui – e resto a disposizione di chi desiderasse chiarimenti, ulteriori informazioni e indicazioni di problemi aperti.

Bibliografia

Banzhaf J.F. (1965). Weighted Voting doesn't Work: a Mathematical Analysis. *Rutgers Law Review,* 19, 317-343.

Basar, T. e Olsder G. J. (1999). *Dynamic Noncooperative Game Theory*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol. 23.

Buratto, A., Grosset L. e Viscolani B. (2014). *Ottimizzazione Dinamica-Modelli economici e gestionali*. Padova: Libreria Progetto.

Coleman, J. S. (1964). *Introduction to Mathematical Sociology.* New York: Free Press of Glencoe,

Gambarelli G. (2003). *Giochi competitivi e cooperativi* II. Torino: ed. Giappichelli,.

(2007). Transforming Games from Characteristic into Normal Form. *International Game Theory Review*, Special Issue devoted to Logic, Game Theory and Social Choice (S. Vannucci e A. Ursini, eds.) Vol. 9, 1, 87-104.

Gambarelli G. e Owen G. (2004). «The coming of Game Theory» *Essays on Cooperative Games - in honor of Guillermo Owen* (G. Gambarelli, ed.), Special Issue of *Theory and Decision,* 36, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1-18.

Gillies, D. (1953). *Some Theorems on n-person games*. Ph. D. Thesis, Dept. of Mathematics. Princeton University.

Haurie A., Krawczyk J. B. e Zaccour G. (2012). *Games and Dynamic Games*. Singapore: World Scientific.

Isaacs, R. (1965) *Differential Games*, John Wiley and Sons.

Luce R. D. e Raiffa H. (1957) *Games and Decisions: Introduction and Critical Survey.* Dover books on Advanced Mathematics, Dover Publications.

Nash J. F. (1950a). The Bargaining Problem. *Econometrica*, 18, 155-162.

(1950b). Equilibrium Points in n-Person Games. *Proc. of the National Academy of Sciences*,

U.S.A., 36, 1, 48-49.

(1953). Two-Person Cooperative Games, *Econometrica*, 21, 1, 128-140.

Owen G. (1968). *Game Theory.* Academic Press (1st ed., New York) (II ed. 1982, New York) (III ed. 1995, San Diego) (IV ed. 2013. Emerald - United Kingdom).

(1977). Values of Games with a Priori Unions. *Lecture Notes in Economic and Mathematical Systems,* 141, 76-88.

(1981). Modification of the Banzhaf-Coleman Index for Games with a Priori Unions. *Power, Voting and Voting Power* (M. J. Holler ed.), Physica, Würzburg, Germany, 232-238.

Owen, G. e Shapley L. S. (1989). Optimal Location of Candidates in IdeologicalSpace. *International Journal of Game Theory,* 18, 3, 339-356.

Penrose L. S. (1946) The elementary statistics of majority voting, *Journal of the Royal Statistical Society.* 109, 53–57.

Petrosyan L. (1993). *Differential Games of Pursuit* (Series on Optimization, Vol 2), World Scientific Publishers.

Riker W.H. (1986), «The First Power Index» *Social Choice and Welfare,* 3: 293–295.

Shapley L. S. (1953) «A Value for *n*-Person Games», in *Contributions to the theory of games* (H. W. Kuhn A. W. Tucker, eds.) II, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 307-317.

Shapley L. S. e Shubik M. (1954). A Method for Evaluating the Distributions of Power in a Committee System. *American Political Science Review,* 48, 787-792.

von Neumann J. (1928). Zur theorie der Gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen*. 100, 295-320.

von Neumann, J. e Morgenstern O. (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

2. Un metodo elementare per determinare l'evoluta della curva $y=x^n$

Francesco Daddi[1]

L'*evoluta di una curva* è il luogo dei centri di curvatura, ossia il luogo dei centri dei cerchi osculatori. Nel presente articolo si propone un metodo elementare per determinare le equazioni parametriche dell'evoluta della curva $y=x^n$. All'inizio si affronta il caso della parabola $y=x^2$ per poi estendere l'analisi alla curva $y=x^n$.

1. Caso della parabola $y=x^2$

I centri dei cerchi tangenti alla parabola nel punto $P(t\,,\,t^2)$, per $t\neq0$, appartengono alla retta normale in P di equazione esplicita

$$y=-\frac{1}{2\,t}(x-t)+t^2 \quad\rightarrow\quad y=-\frac{1}{2\,t}\,x+t^2+\frac{1}{2}$$

le coordinate del generico centro C pertanto sono

$$C\left(k\,,-\frac{1}{2\,t}\,k+t^2+\frac{1}{2}\right)$$

La generica circonferenza tangente ha raggio pari a $\overline{CP}$ ed ha quindi equazione

$$(x-k)^2+\left(y+\frac{1}{2\,t}\,k-t^2-\frac{1}{2}\right)^2=(k-t)^2+\left(-\frac{1}{2\,t}\,k+\frac{1}{2}\right)^2$$

e se intersechiamo le due curve si ottiene il sistema

$$\begin{cases}(x-k)^2+\left(y+\frac{1}{2\,t}\,k-t^2-\frac{1}{2}\right)^2=(k-t)^2+\left(-\frac{1}{2\,t}\,k+\frac{1}{2}\right)^2\\ y=x^2\end{cases}$$

dove la prima equazione, con la sostituzione $y=x^2$, diventa

$$x^4+\left(\frac{k}{t}-2\,t^2\right)x^2-2\,k\,x+t^4+k\,t=0$$

1. Contatto: francesco.daddi@libero.it, www.webalice.it/francesco.daddi

Poiché stiamo cercando il cerchio osculatore, il polinomio deve avere la radice x=t con molteplicità algebrica almeno uguale a 3; effettuando la divisione polinomiale

$$\left[x^4+\left(\frac{k}{t}-2\,t^2\right)x^2-2\,k\,x+t^4+k\,t\right]:(x-t)^3$$

si ottiene x + 3t come quoziente mentre come resto si ricava

$$\left(\frac{k}{t}+4\,t^2\right)x^2+\left(-2\,k-8\,t^3\right)x+k\,t+4\,t^4$$

imponendo che il resto sia nullo, si ricava $k=-4t^3$; sostituendo nell'ordinata del centro si ha

$$y_C=-\frac{1}{2\,t}k+t^2+\frac{1}{2}\quad\rightarrow\quad y_C=3\,t^2+\frac{1}{2}$$

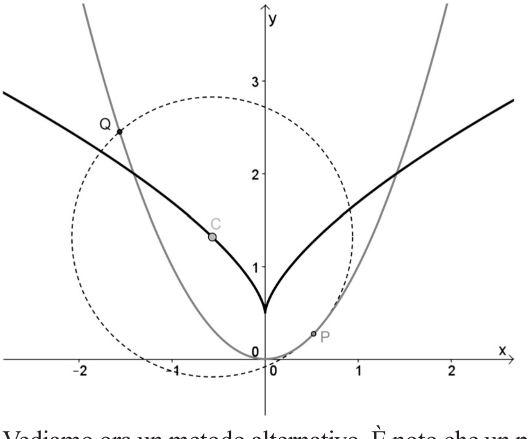
Se t=0 (cioè quando P coincide con l'origine) il cerchio osculatore ha centro in (0 ; ½), quindi la formula trovata si estende ad ogni t reale.

In definitiva abbiamo trovato le **equazioni parametriche dell'evoluta di $y=x^2$:**

$$\begin{cases} x=-4\,t^3 \\ y=3\,t^2+\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Si osservi che l'ulteriore intersezione del cerchio osculatore con la parabola $y=x^2$ si trova annullando il quoziente x+3 t = 0, cioè x = –3 t da cui il punto $Q(-3\,t\,;\,9\,t^2)$.

Nella figura seguente viene rappresentata l'evoluta nel piano cartesiano.



Vediamo ora un metodo alternativo. È noto che un polinomio p(x) di grado n ha una radice α di molteplicità *k* se e solo se tutte le sue derivate fino alla (k–1)-esima si annullano per x=α. Nel nostro caso, dal momento che il polinomio

$$p(x)=x^4+\left(\frac{k}{t}-2\,t^2\right)x^2-2\,k\,x+t^4+k\,t$$

deve avere x=t come radice di molteplicità ≥ 3, la derivata prima e la derivata seconda si devono annullare per x=t. La derivata prima in tale punto è nulla in quanto la circonferenza è tangente alla parabola, mentre affinché vi si annulli anche la derivata seconda $p''(x)=0 \quad \rightarrow \quad 12\,t^2-4\,t^2+\frac{2\,k}{t}$ deve risultare

$$p''(x)=0 \quad \rightarrow \quad 12\,t^2-4\,t^2+\frac{2\,k}{t}=0 \quad \rightarrow \quad k=-4\,t^3$$

abbiamo così ritrovato il risultato precedente.
Questa ultima tecnica verrà applicata al caso generale per la curva $y=x^n$.

2. Caso della curva $y=x^n$

A questo punto è interessante generalizzare, cercando l'equazione dell'evoluta della curva $y=x^n$. La retta normale nel punto $P(t\,;\,t^n)$ per $t\neq 0$ ha equazione cartesiana

$$y=-\frac{1}{n\,t^{n-1}}(x-t)+t^n \quad \rightarrow \quad y=-\frac{1}{n\,t^{n-1}}\,x+t^n+\frac{1}{n\,t^{n-2}}$$

il generico centro ha coordinate

$$C\left(k\,,-\frac{1}{n\,t^{n-1}}\,k+t^n+\frac{1}{n\,t^{n-2}}\right)$$

mentre la generica circonferenza tangente, avendo raggio uguale a CP, ha equazione

$$(x-k)^2+\left(y+\frac{1}{n\,t^{n-1}}\,k-t^n-\frac{1}{n\,t^{n-2}}\right)^2=(k-t)^2+\left(-\frac{1}{n\,t^{n-1}}\,k+\frac{1}{n\,t^{n-2}}\right)^2$$

Intersecando le due curve si ha

$$\begin{cases} (x-k)^2+\left(y+\frac{1}{n\,t^{n-1}}\,k-t^n-\frac{1}{n\,t^{n-2}}\right)^2=(k-t)^2+\left(-\frac{1}{n\,t^{n-1}}\,k+\frac{1}{n\,t^{n-2}}\right)^2 \\ y=x^n \end{cases}$$

e la prima equazione, con la sostituzione $y=x^n$, diventa

$$(x-k)^2+\left(x^n+\frac{k}{n\,t^{n-1}}-t^n-\frac{1}{n\,t^{n-2}}\right)^2-(k-t)^2-\left(-\frac{k}{n\,t^{n-1}}+\frac{1}{n\,t^{n-2}}\right)^2=0$$

In analogia con quanto visto nel caso n=2, la derivata seconda del polinomio

$$p(x)=(x-k)^2+\left(x^n+\frac{k}{n\,t^{n-1}}-t^n-\frac{1}{n\,t^{n-2}}\right)^2-(k-t)^2-\left(-\frac{k}{n\,t^{n-1}}+\frac{1}{n\,t^{n-2}}\right)^2$$

deve annullarsi per x=t; poiché

$$p''(x)=2+2\cdot\left[n^2\,x^{2n-2}+\left(x^n+\frac{k}{n\,t^{n-1}}-t^n-\frac{1}{n\,t^{n-2}}\right)\cdot n\,(n-1)\,x^{n-2}\right]$$

risulta

$$p''(t)=0 \quad \rightarrow \quad k=\frac{t\left(n-2-n^2\ t^{2n-2}\right)}{n-1}$$

sostituendo l'espressione di k nell'ordinata di C si ha

$$y_C=\frac{1+\left(2\ n^2-n\right)t^{2n-2}}{n\left(n-1\right)t^{n-2}}$$

In definitiva il centro del cerchio osculatore è

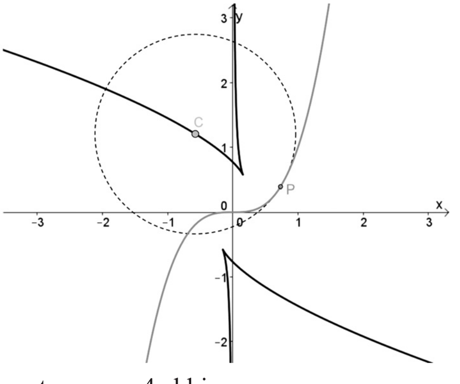
$$C\left(\frac{t\left(n-2-n^2\ t^{2n-2}\right)}{n-1};\frac{1+\left(2\ n^2-n\right)t^{2n-2}}{n\left(n-1\right)t^{n-2}}\right)$$

pertanto le equazioni parametriche dell'evoluta sono

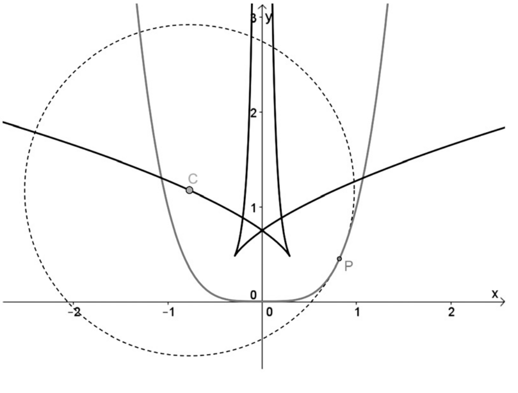
$$\begin{cases} x=\dfrac{t\left(n-2-n^2\ t^{2n-2}\right)}{n-1} \\ y=\dfrac{1+\left(2\ n^2-n\right)t^{2n-2}}{n\left(n-1\right)\ t^{n-2}} \end{cases}$$

Si noti che, se $n\geq3$, per $t=0$ non si ha il cerchio osculatore.

Per n=3 abbiamo



mentre per n=4 abbiamo



3. Tra somma e prodotto Una coda al quiz Agorando 2

Paolo Hägler e Giorgio Mainini

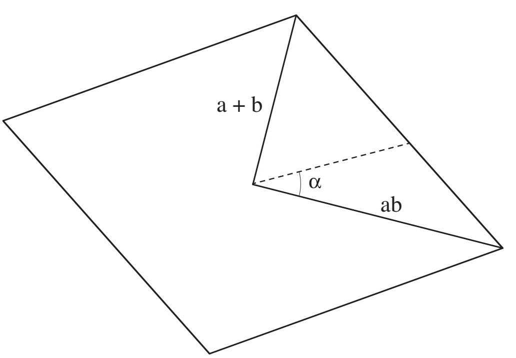
In the quiz Agorando 2, presented in issue 69 of this journal, some questions about a geometric situation were asked. That sort of situation is analysed and developed in several ways in this article.

Testo del quiz Agorando 2

«Dati due numeri a, b (per cominciare interi, ma non è obbligatorio) possiamo costruire un'operazione nuova per la quale è utile usare la geometria per calcolarne il risultato.

Dapprima costruiamo il rombo con le semidiagonali che misurano a+b e a · b (come nel disegno qui sotto), poi definiamo l'operazione a $\langle\alpha\rangle$ b (dove al posto di α possiamo mettere un numero qualunque tra 0 e 360).

Per trovare il risultato tracciamo un segmento che unisce il centro del rombo a un punto del suo contorno, e che formi con la semidiagonale di lunghezza a·b un angolo di α gradi, come nel disegno. Il risultato è la lunghezza del segmento, tratteggiato nella figura che segue.»



Approfondimento

Come prima osservazione possiamo notare che ci sono ben 4 segmenti come quello indicato, uno per ogni quarto di rombo, e questo ci porta alla prima proprietà, ossia

$$a \langle\alpha\rangle b = a \langle 180° - \alpha\rangle b = a \langle 180° + \alpha\rangle b = a \langle 360° - \alpha\rangle b$$

Questa proprietà ricorda le funzioni trigonometriche, ma prima di arrivare lì facciamo ancora qualche osservazione alla portata di allievi di scuola media.

Come indicato nel quiz, avevamo chiesto se è possibile, e se sì a quali condizioni, che il rombo sia un quadrato. Ciò equivale a risolvere l'equazione

$a\,b = a + b$

che diventa

$a\,b - b = a$

e poi

$b\,(a - 1) = a$

e quindi, poiché $a \neq 1$ (l'equazione $b.1 = b + 1$ è impossibile), abbiamo

$b = \dfrac{a}{a-1}$

Per qualsiasi valore strettamente positivo di a (ad eccezione di 1), abbiamo quindi un valore di b che risolve l'equazione; tuttavia, per avere b positivo (e quindi anche il lato del quadrato positivo), dobbiamo avere $a > 1$. Qualora avessimo un quadrato, anche senza trigonometria, possiamo calcolare in maniera esatta il risultato dell'operazione per α=45°. In effetti, in questo modo, il segmento tratteggiato è metà della diagonale del quadrato, e grazie al teorema di Pitagora possiamo scrivere

$$a \left\langle 45 \right\rangle \frac{a}{a-1} = \frac{a\,b\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2\left(a-1\right)}$$

Passiamo ora a una trattazione analitica, che, in alcuni casi, permette di risolvere il problema anche senza trigonometria. Innanzitutto posizioniamo il rombo su un piano cartesiano ortonormato positivo in modo che la semidiagonale di lunghezza ab sia sovrapposta all'asse delle ascisse, e che l'altra semidiagonale sia quindi sovrapposta all'asse delle ordinate.

Scriviamo dapprima l'equazione della retta che si sovrappone al lato che unisce i vertici (0; a+b) e (a b; 0). La sua pendenza è

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\left(a+b\right)}{a\,b}$$

e siccome l'ordinata all'origine è a+b, questa retta ha equazione

$$y = \frac{-\left(a+b\right)}{a\,b}\,x + \left(a+b\right)$$

D'altra parte, possiamo cercare anche l'equazione della retta che si sovrappone al segmento tratteggiato. L'ordinata all'origine è chiaramente 0, e la pendenza, per ora, la chiamiamo p, e quindi otteniamo

$y = p\,x$

Ora siamo pronti a trovare le coordinate del punto di intersezione delle due rette. Dobbiamo risolvere l'equazione

$$p\,x = \frac{-\left(a+b\right)}{a\,b}\,x + \left(a+b\right)$$

Otteniamo

$$x\left(p+\frac{a+b}{a\,b}\right)=a+b$$

e infine

$$x=\frac{a+b}{p+\dfrac{a+b}{a\,b}}=\frac{a\,b(a+b)}{p\,a\,b+a+b}$$

e quindi il punto d'intersezione delle due rette è

$$\left(\frac{a\,b(a+b)}{p\,a\,b+a+b};\,p\,\frac{a\,b(a+b)}{p\,a\,b+a+b}\right)$$

Ora possiamo calcolare la lunghezza del segmento tratteggiato, che è la distanza tra questo punto e l'origine. Abbiamo

$$l=\sqrt{\left(\frac{a\,b(a+b)}{p\,a\,b+a+b}\right)^2+\left(p\,\frac{a\,b(a+b)}{p\,a\,b+a+b}\right)^2}=\frac{a\,b(a+b)}{p\,a\,b+a+b}\sqrt{1+p^2}$$

Non ci resta che trovare il valore p della pendenza della seconda retta. Nel caso generale sappiamo che è uguale a tan α, ma per alcuni valori specifici di α la si può trovare anche senza trigonometria, usando i triangoli rettangoli che sono metà di un quadrato e di un triangolo equilatero. Otteniamo quindi i seguenti valori (l è la lunghezza del lato del triangolo equilatero, o del quadrato per il caso di α=45°):

α	Δy	Δx	p
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1/2}{1/2\,\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	1	$\frac{1}{1}=1$	$\frac{1}{1}=1$
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1/2\,\sqrt{3}}{1/2}=\sqrt{3}$

Prima di passare alla trigonometria, vi presentiamo un intermezzo didattico che può essere utilizzato per introdurre la semplice formuletta che lega la pendenza di una retta all'angolo che essa forma con l'asse delle ascisse.

Anche sulle calcolatrici di uso corrente appare il tasto «tan» (o «tg») e quindi può capitare che un allievo chieda che cosa calcoli. Si può (naturalmente…) rispondere «Lo vedrai al liceo» ma si può anche dare una spiegazione elementare, almeno con allievi dei corsi di approfondimento. Noi proponiamo di procedere così.

La pendenza, p, di una retta passante per l'origine è data dal rapporto tra l'ordinata e l'ascissa di un suo qualunque punto: quel rapporto viene chiamato «tangente» dell'angolo α che la retta forma con l'asse delle ascisse e viene indicato con tan α (o tg α). Un esempio semplice è dato dalla bisettrice del primo quadrante, dove α= 45° e p = 1. Si può quindi scrivere tan 45° = 1.

Un passo avanti può essere il seguente.

Si traccia una retta perpendicolare all'asse delle ascisse passante per il punto, ad esempio, (10; 0) e su di essa si considerano i punti (10; 1), (10; 2), (10; 3), … La retta passante per l'origine e per (10; 1) avrà dunque la pendenza $p_1 = 0{,}1$, quella per (10; 2) avrà $p_2 = 0{,}2$. E così via. In particolare quando si arriva alla retta passante per (10; 10) si ritroverà $p_{10} = 1$, cioè proprio $\tan 45^o = 1$ e si scoprirà che quando α si avvicina a 90^o il rapporto cresce … a dismisura.

Ora, se si costruisce la retta «verticale» a partire dal punto (ab; 0), si potrà cercare un punto su di lei vicino a quello dove la retta passante per l'origine, e che forma un dato angolo α con l'asse delle ascisse, la interseca. Con il metodo descritto in precedenza si potrà trovare la sua pendenza e applicare la formula scritta prima della tabella precedente. Addirittura, facendo capo a un foglio di calcolo, si potrà preparare una tabella dei valori di tan, risolvendo così, in modo approssimato, il problema per ogni α.

Certo che, con un po' di coraggio, dato α, si potrà anche premere il tasto «tan». Se di coraggio se ne avrà una buona dose, si potranno anche premere due tasti e, data la pendenza, trovare α.

Veniamo ora alla trigonometria. Innanzitutto, grazie alla prima proprietà citata, riduciamo tutto al primo quadrante, ossia ad angoli compresi nell'intervallo [0°; 90°]. Notiamo che ogni quarto di rombo è un triangolo rettangolo, e siccome conosciamo le lunghezze dei due cateti, possiamo trovare tutto. In particolare, cerchiamo uno degli altri angoli, di modo che poi possiamo trovare la lunghezza del segmento tratteggiato. Indichiamo con β l'angolo tra i lati del rombo e la semidiagonale di lunghezza ab. Abbiamo quindi

$$\tan\beta = \frac{a+b}{a\,b}$$

Concentriamoci ora sul triangolo delimitato dal segmento tratteggiato, dalla semidiagonale di lunghezza ab e da una parte del lato del rombo. I suoi angoli misurano α, β e $180°-\alpha-\beta$.

Grazie al teorema del seno possiamo quindi calcolare la lunghezza del segmento tratteggiato, che indichiamo con x. In effetti

$$\frac{x}{\sin\beta} = \frac{a\,b}{\sin(180°-\alpha-\beta)}$$

da cui segue

$$x = \frac{a\,b\sin\beta}{\sin(180°-\alpha-\beta)} = \frac{a\,b\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{a\,b\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$$

D'altra parte, il lato del rombo misura

$$l = \sqrt{(a+b)^2+(a\,b)^2} = \sqrt{a^2+b^2+2\,a\,b+a^2\,b^2}$$

e quindi

$$\sin\beta = \frac{a+b}{l} \quad \text{e} \quad \cos\beta = \frac{a\,b}{l}$$

Inserendo nella formula precedente e semplificando otteniamo

$$x=\frac{a\,b\,\frac{a+b}{1}}{\sin\alpha\frac{a\,b}{1}+\cos\frac{a+b}{1}}=\frac{a\,b\left(a+b\right)}{a\,b\sin\alpha+\left(a+b\right)\cos\alpha}$$

Prendendo i due esempi proposti nel quiz abbiamo

$$2\left\langle 15\right\rangle 5=\frac{2\cdot 5\left(2+5\right)}{2\cdot 5\sin 15^\circ+\left(2+5\right)\cos 15^\circ}\approx 7{,}48689\left(\text{era indicato } 7{,}5\right)$$

e

$$3\left\langle 135\right\rangle 7=\frac{3\cdot 7\left(2+5\right)}{3\cdot 7\sin 45^\circ+\left(3+7\right)\cos 45^\circ}\approx 9{,}58015\left(\text{era indicato } 9{,}6\right)$$

Da ultimo, possiamo verificare l'uguaglianza tra la formula trovata con questo metodo e quella trovata con l'altro modo.

$$\frac{a\,b\left(a+b\right)}{a\,b\sin\alpha+\left(a+b\right)\cos\alpha}=\frac{a\,b\left(a+b\right)}{p\,a\,b+a+b}\sqrt{1+p^2}$$

$$\frac{1}{a\,b\sin\alpha+\left(a+b\right)\cos\alpha}=\frac{\sqrt{1+\left(\tan\alpha\right)^2}}{a\,b\tan\alpha+a+b}$$

$$\frac{1/\cos\alpha}{a\,b\tan\alpha+a+b}=\frac{\sqrt{1+\left(\tan\alpha\right)^2}}{a\,b\tan\alpha+a+b}$$

$$\frac{1}{\left(\cos\alpha\right)^2}=1+\left(\tan\alpha\right)^2$$

$$\frac{\left(\cos\alpha\right)^2+\left(\sin\alpha\right)^2}{\left(\cos\alpha\right)^2}=1+\left(\tan\alpha\right)^2$$

Possiamo notare che, nel caso del rombo, esiste un angolo per il quale il risultato dell'operazione è il più piccolo possibile. Si tratta, piuttosto evidentemente, dell'angolo per cui il segmento tratteggiato è perpendicolare al lato del rombo. In questo modo il triangolo (quarto di rombo) è suddiviso tramite il segmento tratteggiato in due triangoli simili al quarto di rombo. Si può quindi facilmente dedurre che il risultato minimo si ottiene per

$$\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{a\,b}{a+b}\right)$$

Questo risultato è raggiungibile con l'intermezzo didattico precedente, ma possiamo giungerci anche con l'utilizzo delle derivate. In effetti abbiamo

$$x'=-\frac{a\,b\left(a+b\right)\left(a\,b\cos\alpha-\left(a+b\right)\sin\alpha\right)}{\left(a\,b\sin\alpha+\left(a+b\right)\cos\alpha\right)^2}$$

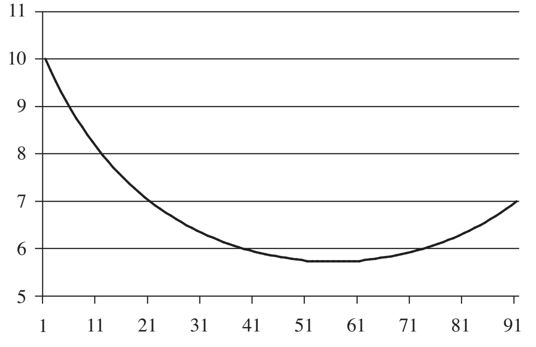
e, uguagliando la derivata a 0, otteniamo

$$-\frac{a\,b\left(a+b\right)\left(a\,b\cos\alpha-\left(a+b\right)\sin\alpha\right)}{\left(a\,b\sin\alpha+\left(a+b\right)\cos\alpha\right)^2}=0$$

$$a\,b\cos\alpha=\left(a+b\right)\sin\alpha$$

$$\frac{a\,b}{a+b}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\quad\rightarrow\quad\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{a\,b}{a+b}\right)$$

Per esempio, nel caso a = 2 e b = 5, al variare di α si ottiene il grafico:



Si vede bene che il minimo (di circa 5,73462 per α che vale circa 55°), è inferiore sia ad a + b (7), sia ad a b (10).

Ha quindi senso apportare una variante al problema: invece del rombo consideriamo una figura diversa, per la quale il risultato dell'operazione per un angolo qualsiasi compreso nell'intervallo]0°; 90°[è sempre compreso tra la somma e il prodotto. La figura più semplice con questa proprietà è l'ellisse.

Oltretutto, con questa figura, al variare di α otteniamo non solo una funzione continua, ma addirittura di classe C^∞. Per comodità, posizioniamo l'ellisse su un piano cartesiano ortonormato positivo in modo che il segmento (che è diventato un semiasse) di lunghezza ab sia sovrapposto all'asse delle ascisse, e che l'altro semiasse sia sovrapposto all'asse delle ordinate. In questo modo, il segmento tratteggiato inizia nell'origine (0;0) e termina in (a b cos a ; (a+b) sin α) e quindi otteniamo

$$x=\sqrt{\left(a\,b\cos\alpha\right)^2+\left(\left(a+b\right)\sin\alpha\right)^2}$$

Possiamo in effetti notare che la funzione x(α) oscilla sempre tra (a+b) e ab (valori raggiunti nei multipli di angoli retti), e pertanto, se fissiamo un angolo α non multiplo di un angolo retto e lasciamo variare a e b, otteniamo una nuova operazione intermedia tra la somma e il prodotto.

Lasciamo alla fantasia degli interessati vedere che cosa capita con altre figure, per esempio un rettangolo di semiassi O P(0; a+b) e O Q(a b ; 0) o una circonferenza con il centro da qualche parte sull'asse del segmento PQ.

1. Problemi per tutti

Gianfranco Arrigo

The purpose of this article is to help teachers to enrich their collection of problems which are suitable for education in problem solving. The ideas can be gathered from the published material, from the Internet, or they can be conceived keeping a close eye on everyday reality. The ideas should then be translated into guidelines for students; these may then be expressed in written form, orally, graphically, or even by staging short dramatic situations. Combinatorics problems and problems about natural numbers are presented.

1. Introduzione

L'importanza di preparare gli allievi di ogni ordine scolastico ad affrontare «veri» problemi è sottolineata continuamente nella letteratura specialistica. L'abbiamo ribadito più volte anche sulla nostra rivista[1]. Come mai se ne parla così tanto? È forse l'ennesima moda didattica e come tale destinata a scomparire in un futuro prossimo? In fondo, si dirà, di problemi se ne sono sempre assegnati, a partire dalla scuola elementare, su su fino alle università e ai politecnici. La matematica stessa è fatta di problemi. Ma anche la nostra vita, privata e professionale, ludica e no, è costellata di problemi. Occorre però richiamare la differenza fondamentale esistente tra due grandi categorie di problemi.

Come già scritto, distinguiamo tra «esercizi», cioè problemi che richiedono al solutore solo l'uso di regole già apprese o in via di consolidamento (utili per l'assestamento o per la verifica dell'apprendimento) e «(veri) problemi»[2] che esigono l'uso contemporaneo di più conoscenze o capacità, anche in via di sviluppo, o comportamenti di tipo strategico, improntati alla creatività e all'intuizione. È sotto l'occhio di tutti che la scuola in generale ha finora lavorato molto sugli esercizi e poco sui problemi e non sempre con le dovute convinzione e consapevolezza da parte degli insegnanti[3].

Per contro, come già affermato, la società odierna, così tecnicizzata, burocratizzata e immersa nella comunicazione globale, richiede a ogni individuo – cittadino, lavoratore, professionista ecc. – anche e soprattutto l'abitudine e la capacità di affrontare situazioni nuove, di operare scelte strategiche, di essere pronti non solo ad applicare le conoscenze apprese a scuola, ma anche a modificarle e adattarle a situazioni mutevoli. Attività, queste ultime, che non si possono far apprendere mediante serie di

1. Vedere per esempio: Arrigo G. (2014). *Conversioni e trattamenti semiotici nel problem solving*. Bollettino dei docenti di matematica, nr. 69. Bellinzona: UIM-CDC, p. 85-104.
2. Da qui in avanti useremo il solo termine «problemi».
3. Fra le cause del parziale insuccesso dei nostri allievi nelle prove internazionali PISA, c'è sicuramente anche l'insufficiente abitudine degli stessi ad affrontare problemi.

esercizi, ma che occorre sviluppare mettendo frequentemente gli allievi di fronte a problemi, nell'accezione del termine appena descritta[4].

Detto questo, agli insegnanti rimane il compito di accentuare l'attività di risoluzione di problemi; meglio ancora, di coniugare l'usuale prassi didattica con gli atteggiamenti tipici della risoluzione di problemi. In sintesi, occorre passare dalla figura di insegnante che dà sempre sicurezze insistendo fin che tutti (o quasi?) imparino a quella di «animatore»[5] che problematizza la conquista del sapere, che propone interrogativi, che abitua i propri allievi a formulare congetture e a verificarne la validità, insomma a costruire il proprio sapere.

Per raggiungere questo importante obiettivo, l'insegnante deve poter disporre di una banca di problemi, continuamente aggiornabile. Ci si può ispirare consultando le ricche raccolte scaricabili dalla rete[6], proposte che occorre poi reinterpretare, modificare e adattare alle esigenze della classe. Oppure se ne può creare di completamente nuove, acquisendo a poco a poco l'abitudine a osservare in modo attento e critico tutto ciò che ci passa sotto gli occhi, una moltitudine caotica di stimoli, che ogni tanto – e quando meno ci si aspetta – fornisce interessanti spunti problematici che possono generare valide proposte per il lavoro in classe.

Di seguito faccio seguire una prima sequenza di problemi, già adattati. Ovviamente ogni insegnante potrà apportarvi altre modifiche. Inoltre va detto che non sempre le proposte devono essere formulate testualmente: a seconda delle situazioni si può ricorrere a presentazioni orali, drammatizzate, figurali ecc.

Infine, le domande dei problemi possono anche essere formulate in collaborazione con gli allievi, per esempio mediante una discussione della situazione problematica. A volte possono nascere interrogativi non previsti, che l'insegnante deve poi selezionare, perfezionare e mettere in forma tale da essere compresa da tutti gli allievi. Di questo passo può sorgere l'idea di modificare la situazione iniziale sia allargando sia limitando il campo d'azione, fino addirittura a creare nuove situazioni, anche seguendo le stimolazioni che vengono dalla classe.

Le situazioni che presento di seguito sono ordinate secondo un filo logico rispondente a esigenze didattiche, e sono adatte per un'introduzione nel mondo della risoluzione di problemi[7]. La prima situazione, concernente gli anagrammi, è in seguito sfruttata per risolvere problemi apparentemente diversi, ma sottesi dalla stessa struttura matematica. Un tale modo di procedere può anche essere seguito nelle scuole superiori per avvicinare gli allievi in modo costruttivo al calcolo combinatorio elementare, senza incorrere nella solita prassi del tutto inefficace di presentare separatamente i concetti di permutazione, combinazione e distribuzione (con o senza ripetizioni…), che si presta bene per la memorizzazione di formule, ma che, però, se non è preceduta da una fase di apprendimento euristico, lascia lo studente del tutto inerme di fronte a situazioni applicative.

4. Vedere per esempio: D'Amore B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Prefazioni di Gérard Vergnaud e di Silvia Sbaragli. Modena: Digital Index. [Versione cartacea e versione e-book].
5. Termine provvisorio.
6. Si vedano, per esempio, http://www.kangourou.it, http://www.matematicamente.it, http://www.math.unipr.it/~rivista/RALLY/Edizioni.htm
7. Gran parte di queste attività sono state svolte in classe soprattutto nei pomeriggi matematici organizzati dalla Società Matematica della Svizzera Italiana nelle scuole elementari e medie.

Seguendo il percorso di apprendimento descritto sopra, l'allievo, eventualmente avvalendosi del discreto intervento dell'insegnante, scopre un'altra caratteristica importante del fare matematica: vi sono problemi apparentemente diversi che sono basati sulla stessa struttura matematica. La situazione degli anagrammi di una parola, come si vedrà nel seguito, fornisce anche la struttura per risolvere problemi di passeggiate su griglie, di scelta di sottoinsiemi, e può essere molto utile per capire, più tardi, in un contesto algebrico, lo sviluppo della potenza di un binomio e, nel calcolo delle probabilità, la distribuzione binomiale.

2. Anagrammi

2.1. Anagrammi di parole senza lettere ripetute

Se di una parola se ne fa un'altra scambiando di posto alcune lettere, si ottiene un anagramma[8]*. Per esempio, da PARCO si può ottenere CAPRO.*

Domande possibili[9]

- *Quali e quanti anagrammi si possono ottenere partendo dalla parola APE? (Attento: anche APE è anagramma della parola APE).*
- *Quali e quanti anagrammi ha la parola CANE?*
- *Quanti anagrammi ha la parola POETA?*
- *Quanti anagrammi ha la parola SCARTO?*
- *Scrivi il calcolo che permette di trovare il numero di anagrammi della parola PROBLEMA e decidi come procedere per trovare il risultato.*
- *Trova quanti anagrammi ha la parola INCOMPRESA. Usa pure la calcolatrice, ma prima stima questo numero: sarà più grande di 10'000? Di 100'000? di 1 milione?*

Commento[10]

La parola APE, come qualsiasi altra composta di sole tre lettere diverse, si presta per far compiere il primo passo. All'inizio gli allievi procedono per tentativi: APE, PEA, EPA, per esempio. A un certo punto non riescono a trovarne altre e concludono che non ce ne sono più.

Se però i tentativi sono avvenuti casualmente, non si ha la sicurezza di averli trovati tutti. Occorre applicare un criterio, costruire un ragionamento. Si potrebbe far capo all'ordine alfabetico:

AEP, APE, EAP, EPA, PAE, PEA

oppure si potrebbe procedere con le parole che iniziano per A, poi continuare con quelle che iniziano per P e infine terminare con quelle che iniziano per E:

8. Attenzione: non è necessario che un anagramma sia una parola di senso compiuto nella lingua di riferimento.
9. I testi in corsivo e le immagini relative sono esempi di consegne scritte. Come già affermato, le diverse situazioni possono anche essere presentate in altre forme e le domande costruite anche con l'intervento degli allievi.
10. I commenti sono essenzialmente di natura didattica. Come aiuto per gli insegnanti non matematici sono indicati anche i risultati.

APE	PAE	EPA
AEP	PEA	EAP

Si ritrovano i 6 anagrammi di prima e in più lo schema ci suggerisce:
$6 = 3 \cdot 2$

Passando poi a CANE, POETA e SCARTO l'allievo può osservare che:
una parola di 4 lettere diverse ha $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ anagrammi; numero che si indica con 4! e che si legge «quattro fattoriale», una parola di 5 lettere diverse ha $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ anagrammi, cioè 5!, una parola di 6 lettere diverse ha $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$ anagrammi, cioè 6! e così via.

Per calcolare quanti anagrammi ha la parola PROBLEMA, l'uso della calcolatrice appare il più adatto. Si può calcolare, con un po' di pazienza e molta attenzione, il prodotto dei sette fattori diversi da 1:

$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 8! = 40'320$ anagrammi

ma si può anche usare il tasto «x!». Per esempio, se si preme «3» seguito da «x!» sul display appare 6, cioè il numero di anagrammi di una parola di tre lettere diverse ($3 \cdot 2$). Il risultato è tutt'altro che intuitivo. I fattoriali dei numeri naturali crescono enormemente.

La parola INCOMPRESA è un bell'esempio per stupire l'allievo. Prima di calcolare il numero di anagrammi è interessante far stimare il risultato. Di solito, solo circa metà della classe pensa che il numero sia maggiore di 100'000, ma nessuno si azzarda a dire che sia maggiore di 1 milione.

Si ottiene: $10! = 3'628'800$, cioè molto di più delle stime che solitamente propongono gli allievi. È un bel momento didattico: l'allievo vede come la matematica possa sopperire quando il «buon senso» inganna.

2.2. Anagrammi di parole con lettere ripetute

Domanda a bruciapelo:

– *Quanti anagrammi ha la parola ALA?*

Se hai risposto 3! = 3 · 2 hai sbagliato. La presenza di due lettere uguali (AA) diminuisce il numero di anagrammi, come puoi vedere dal seguente elenco:

LAA	*LA**A***
ALA	***A**LA*
***A**AL*	*A**A**L*

Se si scambiano tra di loro le due lettere A, si ottiene lo stesso anagramma. Quindi la parola ALA ha solo 3 = 3! : 2! anagrammi.

Domande possibili

– *Quanti anagrammi hanno le seguenti parole?*
ATTO – TUTTO – MAMMA – ABRACADABRA – TRALLALLA
– *Se hai risposto bene alla domanda precedente, puoi divertirti a calcolare il numero di anagrammi del tuo nome, di quello dei tuoi familiari e amici, di qualsiasi parola tu desideri.*

Commento

Con questa attività l’allievo può compiere un nuovo importante passo in avanti, che lo porta a essere capace di calcolare il numero di anagrammi di qualsiasi parola.

Il testo propone un semplice esempio per entrare nella nuova situazione.

Se si applica lo stesso ragionamento usato per ALA, la parola ATTO ha 4! : 2! = 24 : 2 = 12 anagrammi.

Una parola come TUTTO costituisce un banco di prova decisivo per valutare il grado di comprensione degli allievi. Essa possiede 5! : 3! = 120 : 6 = 20 anagrammi. Un errore comune conduce a calcolare 120 : 3. In questi casi si può prendere uno dei 20 anagrammi e scrivere le tre T con colori diversi (o variando la grafica), per esempio: **T**UT**T**O e far scrivere le 6 parole ottenibili scambiando di posto le lettere «ti»:

TUT**T**O, **T**U**T**TO, **T**U**T**TO, **T**UT**T**O, TU**TT**O, TU**TT**O

La parola MAMMA aiuta a compiere l’ultimo passo. Il numero di anagrammi può essere calcolato in due tappe:

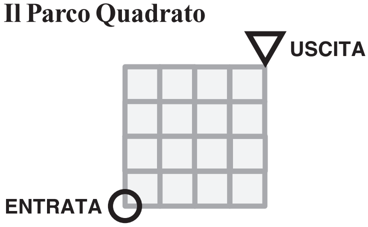
5! : 3! = 120 : 6 = 20 perché vi sono 3 M,
20 : 2! = 10 perché vi sono 2 A
oppure in una sola espressione numerica
(5! : 3!) : 2! = (120 : 6) : 2 = 20 : 2 = 10
Analogamente, gli anagrammi di ABRACADABRA sono
[(11! : 5!) : 2!]: 2! = 83’160
e gli anagrammi di TRALLALLA sono
(9! : 3!) : 4! = 2520

A questo punto la soddisfazione degli allievi è molta e ben visibile sui loro volti e la terza domanda giunge a proposito.

3. Percorsi su griglie rettangolari

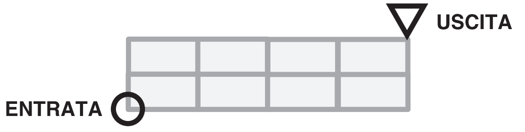
Qui sotto trovi le mappe di tre giardini pubblici. Li devi attraversare, compiendo percorsi di lunghezza minima, partendo dall’ENTRATA, camminando lungo i vialetti scuri, fino all’USCITA.

3.1. Il Parco Quadrato



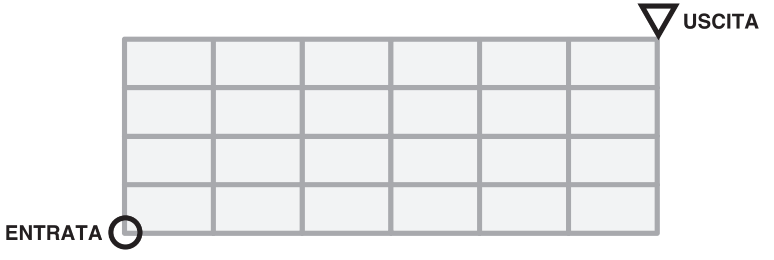
Il lato di ogni aiola ha lunghezza 15 m.

3.2. Il Parco Rettangolo



Le dimensioni di ogni aiola sono 30 m e 15 m.

3.3. Il Grande Parco Rettangolo



Le dimensioni di ogni aiola sono 40 m e 20 m.
Anche qui devi attraversare il parco senza calpestare le aiole.

Domande possibili

Per ciascun parco:

- *Disegna qualche percorso minimo.*
- *Qual è la lunghezza di un percorso minimo?*
- *Quanti percorsi minimi esistono?*
  [Suggerimento: a ogni biforcazione si hanno solo due scelte possibili: andare a destra (D) o verso l'alto del foglio (A), quindi ogni percorso è codificabile con una parola le cui lettere sono A e D, ripetute seguendo un certo ordine.]

Commento

Le prime due domande proposte hanno lo scopo di familiarizzare l'allievo con la nuova situazione.

Come suggerito tra parentesi, uno dei modi per calcolare il numero di percorsi minimi consiste nel far corrispondere a ciascuno una parola; con ciò si codifica il percorso e si cambia registro semiotico, da quello geometrico a quello combinatorio già conosciuto. Il numero di percorsi minimi è quindi uguale a quello degli anagrammi di questa parola: ecco un chiaro esempio di due situazioni diverse (anagrammi e percorsi minimi su griglie) che hanno la stessa struttura matematica.

Se, nel Parco Quadrato, come suggerito, codifichiamo ogni percorso con una parola composta delle sole lettere D («vai a destra») e A («vai verso l'alto»), i percorsi minimi corrispondono agli anagrammi della parola DDDDAAAA: sono quindi (8! : 4!) : 4! = 70. La lunghezza di ogni percorso minimo è 15 m · 8 = 120 m

Per il Parco Rettangolo occorre calcolare il numero di anagrammi della parola DDDDAA che sono (6! : 4!) : 2! = 15. La lunghezza di ogni percorso minimo è
30 m · 4 + 15 m · 2 = 150 m

Nel Grande Parco Rettangolo, i diversi percorsi minimi sono (10! : 6!) : 4! = 210. Anche questo risultato può essere trovato senza fare ricorso alla calcolatrice, operando con frazioni equivalenti ed esercitando il calcolo mentale:

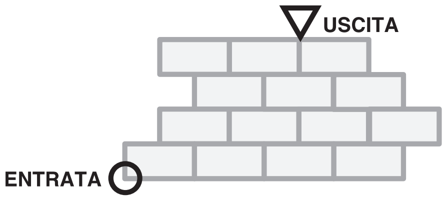
$$\frac{10!}{6! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210$$

La lunghezza di ogni percorso minimo è

40 m · 6 + 20 m · 4 = 320 m

4. Percorsi piani più impegnativi

4.1 Il Parco Muratori

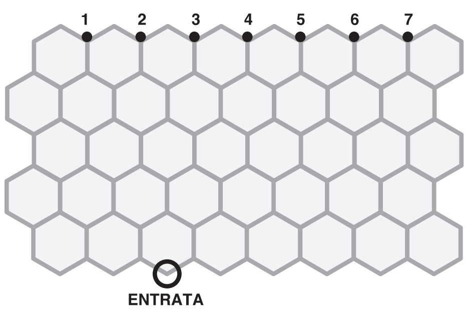


Le dimensioni di ogni aiola sono 30 m e 15 m.

Domande possibili

- *Disegna almeno un percorso minimo.*
- *Trova la lunghezza di un percorso minimo.*
- *Determina il numero di percorsi minimi esistenti.*

4.2. Il Parco Esagono



Il lato di ogni aiuola esagonale è lungo 10 m. Vi è una sola entrata. I cerchietti numerati indicano i cancelli di uscita.

Domande possibili

- *Disegna alcuni percorsi minimi che portano all'uscita 3 e altri che portano all'uscita 5.*
- *In quali cancelli di uscita terminano i percorsi più brevi e qual è la loro lunghezza?*
- *Vi sono cancelli di uscita raggiungibili con un solo percorso minimo? Se sì, quali?*

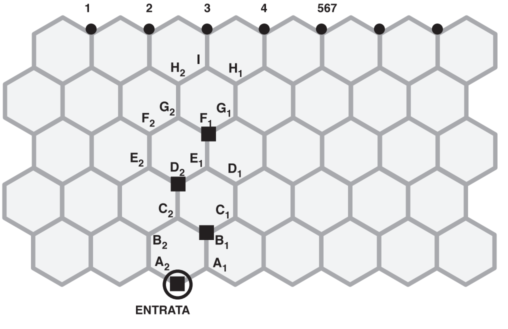
– *Determina il numero di percorsi minimi che portano all'uscita 5 e all'uscita 3.*

Commento

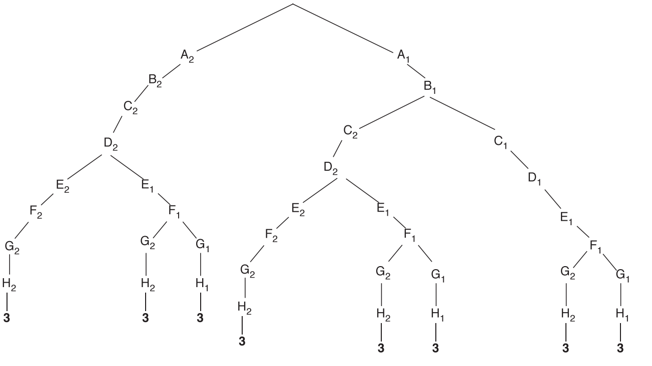
Se si cerca di disegnare percorsi minimi del Parco Muratori, ci si accorge presto che occorre evitare di percorrere segmenti orizzontali (o verticali) nei due sensi. Il solo percorso minimo ha lunghezza

30 m + 7 · 15 m = 135 m

Più complessa è la situazione del Parco Esagono, soprattutto per la determinazione del numero di percorsi minimi che portano all'uscita 3. Essi hanno lunghezza 100 m e in tutto sono 8. Il loro conteggio può essere fatto, per esempio, disegnando uno schema ad albero. Nella figura seguente, con lettere indicizzate si sono segnati i punti toccati dai vari percorsi.



Ed ecco l'albero che illustra gli 8 percorsi minimi che portano all'uscita 3.



Ovviamente questo modo di risolvere il problema del conteggio è destinato all'insegnante. Gli allievi possono operare con matite colorate, meglio se riproducendo percorsi diversi su fogli diversi.

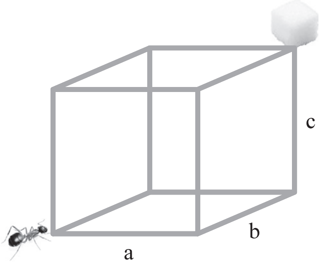
Per l'uscita 5 vi è un solo percorso minimo, lungo 100 m. I percorsi di 100 m sono quelli più brevi e portano alle uscite 1, 2, 3, 4 e 5.

L'uscita 5 è l'unica ad avere un solo percorso minimo.

5. Percorsi tridimensionali

5.1. Un percorso semplice

Una formichina furba vuole raggiungere la zolletta di zucchero che si trova nel vertice opposto di un parallelepipedo scheletrato. Quindi sceglierà uno dei percorsi più corti (minimi).



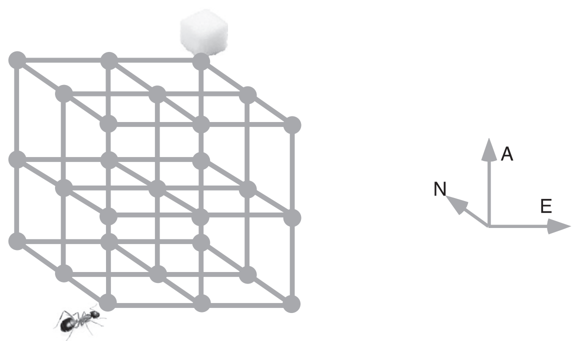
Domande possibili

– *Disegna qualche percorso minimo.*
– *Quanti percorsi minimi esistono?*
[Ogni percorso minimo può essere codificato con una parola di tre lettere.]

5.2. Un percorso più complesso

La figura rappresenta una costruzione composta di 8 cubetti, costituita di barrette tenute insieme da sferette.

La formica vuole raggiungere la zolla di zucchero seguendo il percorso più breve. Può camminare solo lungo le barrette.



Domande possibili

– *Disegna qualche percorso minimo.*
– *Calcola quanti percorsi minimi esistono.*
[In ogni nodo si hanno tre scelte sensate possibili: verso est (E), verso nord (N) o verso l'alto (A), quindi ogni percorso è codificabile con una parola le cui lettere sono E, N, A.]
– *Quante sferette e quante barrette si sono impiegate nella costruzione?*

Commento e generalizzazione

In tutti e due i problemi, la prima domanda ha lo scopo di portare l'allievo a capire che cos'è un percorso minimo lungo gli spigoli di una struttura cubica.

Nel problema 5.1 ogni percorso minimo si compone di tre spigoli. Le lettere a, b, c indicano le tre direzioni degli spigoli. A ogni percorso minimo si può far corrispondere un anagramma della parola abc e inversamente. Vi sono quindi $6 = 3 \cdot 2$ percorsi minimi diversi.

Nel problema 5.2, ogni percorso minimo si compone di 2 barrette in direzione E, 2 in direzione N e 2 in direzione A. Ogni percorso minimo si può codificare con un anagramma della parola EENNAA. In tutto abbiamo

$$\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 2\cdot 2} = 6\cdot 5\cdot 3 = 90$$

percorsi minimi diversi.

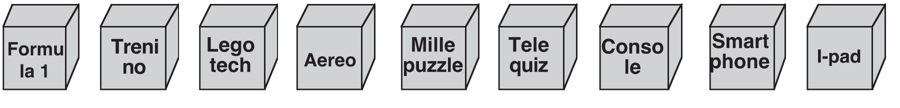
Le sferette necessarie sono 27. Si possono contare in vari modi. Per esempio considerando i tre piani orizzontali, ciascuno dei quali contiene 9 sferette.

Le barrette sono 54, cioè, per esempio, 18 per ciascuna delle 3 direzioni.

In generale per costruire una struttura cubica nxnxn ci vogliono $(n+1)^3$ sferette: seguendo il ragionamento di prima, si possono considerare (n+1) sezioni orizzontali, ciascuna delle quali con $(n+1)^2$ sferette.

Il numero di barrette possiamo calcolarlo suddividendole secondo le tre direzioni. In totale sono $3 \cdot n \cdot (n+1)^2$.

6. Una scelta impegnativa



Il vincitore di una gara riceve 4 premi che può scegliere fra i 9 disposti sul tavolo. In seguito, il secondo classificato può scegliere 3 premi fra quelli rimasti. Infine il terzo può scegliere 2 premi fra quelli rimasti.

Domande

- *In quanti modi il vincitore può scegliere i 4 premi?*
- *In quanti modi il secondo può scegliere i 3 premi?*
- *In quanti modi il terzo può scegliere i 2 premi?*

Commento

Un modo di risolvere questo problema, senza dover scomodare formule né produrre ragionamenti non del tutto alla portata degli allievi più giovani, consiste nell'immaginare che il vincitore percorra l'intera fila di premi e alla fine decida di selezionarne 4 ben determinati. Segna ciascuno dei premi scelti con la lettera S («Sì, lo prendo»). Gli altri automaticamente sono contrassegnati dalla lettera N («No, non lo prendo»). Ogni scelta del vincitore può quindi essere codificata con una parola di 9 lettere (tanti sono i premi a disposizione) composta di 4 lettere S (i premi scelti) e 5 lettere N (i premi non scelti). In tutto il vincitore può operare

$$\frac{9!}{4!\cdot 5!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2} = 9\cdot 2\cdot 7 = 126$$

scelte diverse.

Il secondo classificato ha a disposizione 5 premi, dei quali ne può scegliere 3. Analogamente a quanto appena visto, potrà operare

$$\frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$$

scelte diverse.

E il terzo? Può scegliere 2 premi fra i 2 rimasti, quindi… non può scegliere. In altre parole può solo ritirare i due premi rimasti.

7. Quiz vero-falso

Gli allievi di una scuola sono invitati a rispondere alle domande di un questionario che si compone di 8 domande del tipo vero-falso, numerate da 1 a 8.

Domande

– *Quante diverse risposte possono capitare?*
– *Se un allievo risponde «vero» ad almeno 6 domande, è considerato bambino (o bambina) felice. Quante diverse risposte corrispondono all'esito «bambino (o bambina) felice»?*

Commento

Riguardo alla prima richiesta, si può ragionare così: alla prima domanda del questionario si può rispondere con V (vero) o F (falso); per ciascuna di queste due risposte possibili alla seconda domanda si può di nuovo rispondere con V o F, quindi a un questionario di due domande si può rispondere in $2 \cdot 2 = 4$ modi; se il questionario si compone di 3 domande, le risposte possibili sono $4 \cdot 2 = 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$; con 4 domande si hanno $8 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ risposte possibili; e così via.

Il questionario che ci riguarda si compone di 8 domande, quindi vi sono $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 256$ risposte diverse.

La seconda domanda ci riporta alla stessa situazione delle precedenti. Infatti ogni risposta con esattamente 6 V può essere codificata con una parola di 8 lettere delle quali 6 sono V e 2 sono F; di queste ne esistono $(8! : 6!) : 2! = (8 \cdot 7) : 2 = 28$. L'esito «bambino (o bambina) felice» si verifica anche con 7 risposte V e una F; questa F può essere la risposta alla prima, alla seconda, alla terza e così via fino all'ottava; dunque abbiamo 8 risposte con 7 V e una F. Infine anche il questionario con 8 V ha lo stesso esito. In tutto abbiamo $28+8+1 = 37$ modi diversi che danno il risultato «bambino (o bambina) felice».

8. I sette nani della Disney

Un negozio di giocattoli dispone di una partita di statuine raffiguranti ciascuna uno dei sette nani di Biancaneve: Dotto, Brontolo, Pisolo, Mammolo, Gongolo, Eolo e Cucciolo. In tutto sono 700, 100 per ogni nano. Daniela ha i soldi contati per comperare tre statuine e intende scegliere tre nani diversi.

Domanda

– *Quante scelte può operare?*

Commento

Il problema consiste nello stabilire in quanti modi si possono scegliere 3 oggetti da un insieme di 7 oggetti. Come sempre, quando ci si trova di fronte a una situazione combinatoria, è utile immedesimarci in essa. Siamo Daniela. Abbiamo di fronte 7 nani allineati in un ordine qualsiasi. Passiamo in rassegna la fila di nani fin che decidiamo di prenderne 3 ben determinati che contrassegniamo con la lettera S (nano scelto). Gli esclusi possiamo immaginare di segnarli con la lettera N (nano non scelto). In questo modo ogni scelta viene codificata con una parola di 7 lettere, 3 S e 4 N. In totale abbiamo quindi

$(7! : 3!) : 4! = 35$

scelte possibili.

Faccio notare che nell'enunciato vi è un dato superfluo: «*In tutto sono 700, 100 per ogni nano*». L'introduzione saltuaria di dati superflui, così come l'omissione dati necessari è una prassi che consiglio vivamente. Oltre che educare gli allievi ad analizzare criticamente ogni consegna scritta, si abituano ad affrontare situazioni non necessariamente determinate, come molto spesso accade nei contesti extra-scolastici.

Abbiamo così risolto un caso particolare del problema inteso a stabilire quanti sottoinsiemi di k elementi ha un insieme di n elementi ($n \geq k$). Ora, come spesso capita, nascono nuovi interrogativi:

come possiamo calcolare il numero di sottoinsiemi di k elementi ha un insieme di n elementi?

quanti sottoinsiemi possiede un insieme di n elementi?

9. Generalizzazione del problema 8

Domande

– *Daniela può scegliere 1, 2, 3, 4, 5, 6 o tutti e 7 i nani a disposizione. In quanti modi?*
– *Quanti sottoinsiemi di k elementi possiede un insieme di n elementi?*
– *Quanti sottoinsiemi possiede un insieme di n elementi?*

Commento

Ovviamente queste domande vanno poste ad allievi che hanno già lavorato sulla situazione proposta dal problema 8. Alla prima domanda si può rispondere, per esempio, redigendo una tabella come la seguente:

k	n	numero sottoinsiemi
1	7	7
2	7	(7! : 2!) : 5! = 21
3	7	(7! : 3!) : 4! = 35
4	7	(7! : 4!) : 3! = 35
5	7	(7! : 5!) : 2! = 21
6	7	(7! : 6!) : 1! = 7
7	7	1

La seconda domanda richiede un conseguente sforzo di generalizzazione. Osservando la terza colonna della tabella si intravede la forma generale che dà il numero di sottoinsiemi di k elementi di un insieme di n elementi:

(n! : k!) : (n–k)! in forma frazionaria $\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

La terza domanda ci permette di fare un importante passo in avanti nello studio di questa situazione.

Per calcolare il numero di sottoinsiemi di un insieme I di n elementi si può procedere così. Immaginiamo di allineare gli elementi di I secondo un ordine qualsiasi. Un qualunque sottoinsieme possiamo generarlo così:

prendiamo il primo elemento di I e decidiamo se metterlo o no nel sottoinsieme: abbiamo 2 possibilità (lo mettiamo / non lo mettiamo)

prendiamo il secondo elemento di I e decidiamo se metterlo o no nel sottoinsieme: abbiamo di nuovo 2 possibilità per ciascuna delle precedenti, in totale 2 · 2 diversi sottoinsiemi

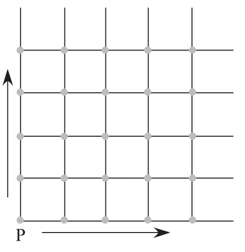
prendiamo il terzo elemento di I e decidiamo se metterlo o no nel sottoinsieme: abbiamo di nuovo 2 possibilità per ciascuna delle precedenti, in totale 2 · 2 · 2 diversi sottoinsiemi

e così fino all'ennesimo elemento di I

In totale, i sottoinsiemi dell'insieme I di n elementi sono

$$\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{\text{n fattori}} = 2^n$$

10. Dai percorsi sulla griglia al triangolo di Pascal-Tartaglia



Ogni percorso parte da P e si snoda lungo la griglia seguendo le direzioni indicate.

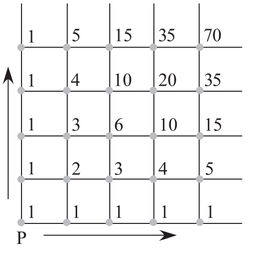
Domande

– *Accanto a ogni nodo, inserisci il numero di percorsi minimi che conducono a esso.*
– *Ciascuno di questi numeri si può anche ottenere con un'addizione: quale?*
– *Verifica in generale la legge additiva che hai trovato.*

Commento

Per il calcolo dei percorsi minimi, ci si può riferire al problema 3.3 «Il Grande Parco Rettangolo».

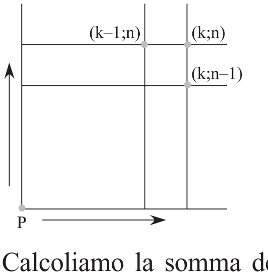
Si ottiene la figura seguente:



Gli allievi (anche di scuola media e persino di quarta-quinta elementare) non tardano molto ad accorgersi che ogni numero di percorsi minimi può essere ottenuto addizionando i numeri di due nodi adiacenti (quello a sinistra e quello in basso). Per esempio, 6 = 3 + 3, 35 = 20 + 15 ecc.

Per gli studenti liceali, dimostrare questa legge additiva è un ottimo esercizio di manipolazione dei fattoriali.

Possiamo per esempio procedere così: consideriamo la figura seguente che ci permette di dedurre la somma che dà il numero corrispondente al nodo generico di coordinate (k;n)



Calcoliamo la somma dei numeri corrispondenti ai nodi adiacenti di coordinate (k;n–1) e (k–1;n)

$$\frac{(n-1)!}{k!\cdot(n-1-k)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-1-(k-1))!}=\frac{(n-1)!}{k!\cdot(n-1-k)!}\cdot\frac{(n-k)}{(n-k)}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-1-(k-1))!}\cdot\frac{k}{k}=$$

$$\frac{(n-k)\cdot(n-1)!+(n-1)!\cdot k}{k!\cdot(n-k)!}=\frac{(n-1)!\cdot(n-k+k)}{k!\cdot(n-k)!}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

Abbiamo ottenuto esattamente il numero di percorsi minimi corrispondenti al nodo di coordinate (k;n). La legge additiva è così dimostrata.

Infine ricordiamo che il triangolo di Pascal-Tartaglia altri non è che lo schema ottenuto per rispondere alla prima domanda, ruotato di 135°

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & & & \dots & & & & \end{array}$$

11. Sviluppo della potenza di un binomio

Già nella scuola media hai imparato a usare e riconoscere uno dei cosiddetti prodotti notevoli, più precisamente, il quadrato di un binomio. Al liceo si va oltre e si considerano le potenze successive del binomio.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4\,a^3\,b + 6\,a^2\,b^2 + 4\,a\,b^3 + b^4$$

Si possono evidenziare due caratteristiche di questi sviluppi:

- *le formule sono costituite da monomi di uguale grado rispetto alle lettere a, b*
- *i coefficienti numerici possono essere trovati in modo sbrigativo usando il triangolo di Pascal-Tartaglia.*

Domande

- *Come mai i coefficienti dei termini dello sviluppo di $(a + b)^n$ coincidono con i numeri dei percorsi minimi corrispondenti ai nodi della griglia quadrata?*
- *Scrivi lo sviluppo di $(a + b)^n$*

Commento

Può essere utile scrivere per esteso il prodotto di n fattori uguali ad (a+b)

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{\text{n fattori}}$$

Osserviamo che i termini dello sviluppo si ottengono applicando n volte la proprietà distributiva; ciò porta ad affermare che la parte letterale di ogni termine è del tipo

$a^k \cdot b^{n-k}$, con $k = 0,1,2,\ldots,n$

Per ottenere uno qualsiasi di questi termini, occorre scegliere a da k parentesi e, ovviamente, b dalle (n–k) rimanenti. Sappiamo però che per scegliere k oggetti da un insieme di n oggetti vi sono

$$\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

possibilità, tanti sono gli addendi con la parte letterale $a^k \cdot b^{n-k}$

Si può anche osservare che la successione di questi coefficienti è simmetrica, cioè, il k-esimo coefficiente è uguale al (n–k)-esimo. Infatti:

$$\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot(n-(n-k))!}$$

Il termine generico dello sviluppo è quindi

$$\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot a^k\cdot b^{n-k}$$

Lo studente può controllare la correttezza di questa espressione, confrontandola con i termini di sviluppi che conosce. Per esempio, per n = 4, abbiamo:

per k = 0: $1 \cdot a^0 \cdot b^{4-0} = b^4$
per k = 1: $4 \cdot a^1 \cdot b^{4-1} = 4 \cdot a \cdot b^3$
per k = 2: $6 \cdot a^2 \cdot b^{4-2} = 6 \cdot a^2 \cdot b^2$
per k = 3: $4 \cdot a^3 \cdot b^{4-3} = 4 \cdot a^3 \cdot b$
per k = 4: $1 \cdot a^4 \cdot b^{4-4} = a^4$

Per completezza, scriviamo in due modi lo sviluppo di $(a + b)^n$

$$(a+b)^n = a^n + n\cdot a^{n-1}\cdot b + \frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2 + \ldots + \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot a^k\cdot b^{n-k} + \ldots + b^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot a^k\cdot b^{n-k}$$

Risultati noti, quindi nessuna novità strettamente matematica, ma, forse, un modo efficiente per portare gli allievi alla consapevolezza che dietro alle formule stanno concetti e procedimenti di natura combinatoria retti dalla stessa struttura matematica, ciò che, fra l'altro, libera lo studente dalla necessità di memorizzare formule per lui assai complicate.

12. Insiemi e sottoinsiemi

Domanda riproposta

– *Quanti sottoinsiemi possiede un insieme di n elementi?*

Commento

Come abbiamo già visto (vedere la «Generalizzazione del problema 8») un insieme di n elementi possiede

$$\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{\text{n fattori}} = 2^n \quad \text{con } n = 0,1,2\ldots,n$$

diversi sottoinsiemi.

È forse utile esaminare i primi due valori: per n = 0, $2^0 = 1$, questo valore indica che l'insieme vuoto (che ha 0 elementi) ha un solo sottoinsieme: se stesso. Per n = 1, $2^1 = 2$, l'insieme singolo (che ha un solo elemento) possiede 2 sottoinsiemi: il vuoto e se stesso.

Ora si può osservare che se si sommano tutti i numeri dei sottoinsiemi di k elementi, per k = 0, 1, 2, … , n si dovrebbe ottenere 2^n.

Proviamo a eseguire il calcolo, tenendo conto che 0! = 1 e 1! = 1, che l'insieme I ha n elementi, che k (numero di elementi del generico sottoinsieme) varia da 0 a n e che infine esistono

$$\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

sottoinsiemi di k elementi.

$$\frac{n!}{0!\cdot(n-0)!}+\frac{n!}{1!\cdot(n-1)!}+\frac{n!}{2!\cdot(n-2)!}+\ldots+\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}+\ldots+\frac{n!}{n!\cdot(n-n)!}=$$

$$=1+n+\frac{n\cdot(n-1)}{2}+\ldots+\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}+\ldots+1=$$

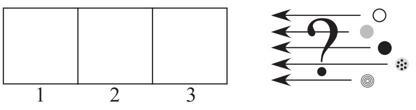
$$=1^n+n\cdot 1^{n-1}\cdot 1+\frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot 1^{n-2}\cdot 1^2+\ldots+\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot 1^k\cdot 1^{n-k}+\ldots+1^n=(1+1)^n=2^n$$

L'inserimento delle potenze di 1 nei prodotti non cambia evidentemente la sostanza, ma permette di interpretare l'intera somma come sviluppo di $(1+1)^n$

Mi ripeto, niente di stratosferico rispetto alla matematica, ma con forte valenza didattica. La costruzione della somma e la successiva interpretazione come sviluppo della potenza di (1+1), anche se compiuta con l'aiuto dell'insegnante, si rivela essere un'importante attività che l'allievo compie nella zona di sviluppo prossimale, per dirla con Vygotskij.

In altre parole, un momento di apprendimento formativo in gran parte di tipo strategico e concettuale.

13. Distribuire oggetti distinti in cassetti



Domanda

– *In quanti modi si possono distribuire 5 oggetti distinti in 3 cassetti?*

Commento e generalizzazione

Immaginiamo di eseguire l'operazione. Per collocare il primo oggetto (pallina bianca) abbiamo 3 possibilità. Per collocare il secondo oggetto (pallina grigia) abbiamo di nuovo 3 possibilità per ciascuna delle precedenti, quindi 3 · 3. Per collocare il terzo oggetto (pallina nera) abbiamo di nuovo 3 possibilità per ciascuna delle precedenti, quindi 3 · 3 · 3. E così per collocare le rimanenti.

In totale si hanno
$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$
modi possibili di distribuire 5 oggetti in 3 cassetti.
La generalizzazione è immediata. Per distribuire n oggetti distinti in k cassetti vi sono k^n possibilità.

14. Le schedine dello Sport-toto

Nel concorso dello Sport-toto, ogni giocatore scommette sull'esito di 13 partite di calcio, componendo una colonna di tredici segni, scelti dall'insieme {1, 2, X}, nel quale «1» significa vittoria della squadra di casa, «2» vittoria della squadra in trasferta e «X» pareggio. In teoria, per essere sicuri di azzeccare un tredici (cioè indovinare l'esito di tutte e 13 le partite), occorre giocare tutte le colonne possibili.

Domande

- *Quante diverse colonne esistono?*
- *Se un giocatore fosse convinto che 3 partite avranno un determinato esito, su quante colonne dovrebbe scommettere per essere sicuro di azzeccare un tredici? E se fosse convinto dell'esito di 6 partite?*
- *Che cosa potresti dedurre osservando le risposte alla domanda precedente?*

Commento

Come già detto, è buona abitudine immaginare di comporre una colonna, senza tenere conto di quali squadre giocano. Nella prima casella della colonna possiamo scegliere fra 3 possibilità. Nella seconda, pure; in totale, se la colonna si limitasse a due caselle (o partite) si avrebbero $3 \cdot 3$ colonne diverse.

Con tre caselle si avrebbero $3 \cdot 3 \cdot 3$ colonne diverse, e così via. Le caselle diverse di una colonna completa sono 13, quindi si hanno 3^{13} = 1'594'323 colonne possibili. È pure consigliabile suggerire agli allievi che questo problema può essere ricondotto a quello precedente. In che modo?

Basta immaginare di avere tre cassetti contrassegnati ordinatamente con i simboli «1», «2» e «X», mentre le 13 partite si possono considerare oggetti distinti da distribuire casualmente nei tre cassetti. In totale si hanno quindi 3^{13} colonne possibili.

La seconda domanda ci introduce in un contesto interessante. Se le partite dall'esito incerto fossero 10 (13–3), le colonne possibili sarebbero 3^{10} = 59'049. Se le partite dall'esito incerto fossero 7 (13–6), le colonne possibili sarebbero 3^7 = 2'187.

Dal punto di vista strettamente matematico si può notare come diminuendo il numero di partite incerte, il numero di colonne possibili diminuisce fortemente. Gli specialisti, detti sistemisti, propongono anche situazioni in cui per determinate partite si restringe l'esito a due soli valori, per esempio «1» o «X», scartando a priori la vittoria in trasferta. Insomma, ci si può divertire studiando sistemi che riducono al massimo il numero di colonne possibili, correndo ovviamente il rischio crescente di sbagliare i risultati considerati «sicuri».

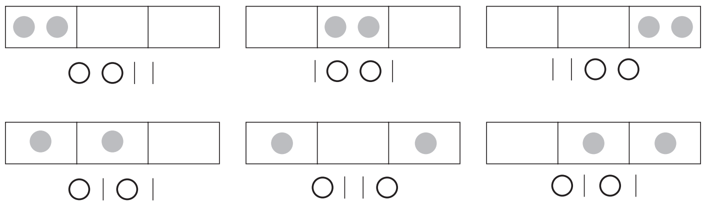
La terza domanda è aperta. Si possono fare molte considerazioni sulla convenienza o no di giocare allo Sport-toto e, se proprio lo si volesse, come converrebbe procedere.

15. Distribuire oggetti indistinguibili in cassetti

Domanda

– *In quanti modi si possono distribuire 2 oggetti identici in 3 cassetti?*

Commento e generalizzazione



Visto che i numeri di cassetti e di oggetti sono esigui, possiamo abbastanza facilmente disegnare tutti i casi possibili, per esempio considerando dapprima i casi in cui i due oggetti sono insieme e poi quelli in cui sono separati, come mostrato nella figura. In seguito cerchiamo un modo per codificare ogni distribuzione. Ogni oggetto può essere rappresentato da un cerchietto e per i 3 cassetti bastano 2 (= 3–1) tratti verticali (a prima vista si direbbe che ce ne vogliano 4, ma i due che delimiterebbero l'inizio del primo cassetto e la fine del terzo sono superflui). Ogni possibile distribuzione può quindi essere codificata con una parola (in senso lato) composta di 4 lettere, uguali a due a due. Sappiamo quindi che vi sono in tutto (4! : 2!) : 2! = 6 distribuzioni possibili.

Vogliamo ora esprimere in generale il numero delle diverse distribuzioni di n oggetti identici in k cassetti. Osserviamo che la parola che codifica una generica distribuzione si compone di (n+k–1) lettere (o segni) delle quali n sono uguali (i cerchietti che simboleggiano gli oggetti) e k–1 sono uguali fra loro ma diversi dalle precedenti.

Possiamo quindi scrivere:

$$\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!\cdot(n+k-1-(k-1))!}=\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!\cdot n!}$$

formula assolutamente da non memorizzare, mentre ciò che è importante da apprendere è la strategia della codificazione.

16. Reti segnate

In 9 partite una squadra di calcio ha segnato 18 reti.
«Due per partita?» potrebbe essere, ma non è detto.
«Tutte e 18 in una sola partita?» poco probabile, ma potrebbe essere.

Domanda

– *In quanti modi possono essere distribuite le 18 reti (senza fare alcuna distinzione) nelle 9 partite disputate?*

Commento

Come sempre, quando si tratta di problemi combinatori, un buon metodo di risoluzione consiste nel mettersi in situazione. Le 18 reti sono pensabili come altrettanti oggetti identici da distribuire in 9 cassetti (le 9 partite). Così il calcolo è presto fatto:

$$\frac{(18+9-1)!}{(9-1)!\cdot 18!}=\frac{26!}{8!\cdot 18!}=1'562'275$$

Difficilmente uno studente avrebbe stimato un risultato sopra il milione: il calcolo combinatorio porta spesso a risultati che il cosiddetto «buon senso» o, meglio, il senso dei numeri al quale ogni individuo pensa di aggrapparsi, non permette assolutamente di prevedere.

E se si volessero distinguere le reti? Per esempio, quella ottenuta dal tale giocatore su calcio di rigore al 94° minuto ecc.? Avremmo allora 18 oggetti distinti da distribuire in 9 cassetti, cioè

$9^{18} \cong 1{,}5 \cdot 10^{17}$

Senza commento.

17. Sacchetti di caramelle

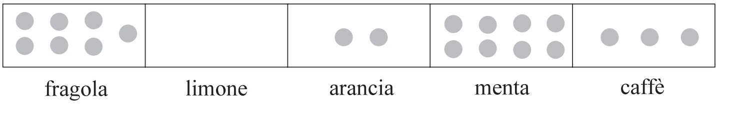
In una fabbrica di dolci, una macchina produce sacchetti di caramelle miste. Nell'apposito serbatoio vi sono in gran quantità caramelle dei seguenti gusti: fragola, limone, arancia, menta e caffè. La macchina confeziona sacchetti di 20 caramelle ciascuno, distribuendole casualmente.

Domanda

– *Quanti differenti sacchetti può produrre la macchina?*

Commento

Anche questo problema rientra nella situazione generale della distribuzione di oggetti identici in cassetti. Immaginiamo di avere tanti cassetti quanti sono i gusti a disposizione, quindi 5. Ogni distribuzione può essere assimilata a una distribuzione di 20 oggetti identici in 5 cassetti. La figura seguente mostra una di queste distribuzioni e più precisamente quella di un sacchetto con 7 caramelle alla fragola, nessuna al limone, 2 all'arancia, 8 alla menta e 3 al caffè.



I sacchetti dal contenuto diverso sono perciò in tutto

$$\frac{(20+5-1)!}{(5-1)!\cdot 20!}=\frac{24!}{4!\cdot 20!}=23\cdot 22\cdot 21=10'626$$

18. Ancora i sette nani della Disney

Un negozio di giocattoli ha comperato una partita di statuine raffiguranti ciascuna uno dei sette nani di Biancaneve: Dotto, Brontolo, Pisolo, Mammolo, Gongolo, Eolo e Cucciolo. In tutto sono 700, 100 per ogni nano. A sua volta ogni nano è dipinto con un unico colore: bianco, rosso, blu, verde o giallo (20 statuine per ogni colore). Le statuine vengono messe in vendita in confezioni da 12, riempite casualmente.

Domanda

– *Quante diverse confezioni si potrebbero mettere in vendita?*

Commento

La situazione ricorda quella del problema 8, ma la struttura matematica è del tutto diversa.

Immaginiamo di disporre 7 scatole (una per nome) e di suddividere ogni scatola in 5 compartimenti (uno per colore). Otteniamo così 35 compartimenti (corrispondenti a ciascuna statuina per tipo e per colore) nei quali, analogamente al caso di prima, distribuire 12 oggetti a caso. Possiamo quindi scrivere

$$\text{N(confezioni)} = \frac{46!}{34!\cdot 12!} = 38'910'617'655$$

Chi l'avrebbe detto? Nessuno, ma lo dice la matematica!

2. Gocce di didattica Spunti e riflessioni dalla ricerca in didattica della matematica[1]

Alberto Piatti[2]

In this short review, starting from a quotation taken from a paper about semiotics in mathematics education by L. Radford et al. published in 2012, we recall the principles of *meaning* and *sense* of a mathematical concept and we formulate some practical recommendations for the development of sense and meaning in mathematics in the lower secondary school.

Il senso e il significato dei concetti in matematica

Il tema di questo intervento è la costruzione del senso dei concetti matematici in classe e la distinzione tra senso e significato. La riflessione parte da una citazione tratta da un articolo introduttivo di Luis Radford, Gert Schubring e Falk Seeger (2011) in un numero speciale della rivista Educational Studies in Mathematics completamente dedicato all'utilizzo della semiotica[3] come chiave di lettura delle situazioni d'aula, con particolare attenzione alla costruzione del senso dei concetti in matematica. Consiglio vivamente la lettura dell'articolo citato, ed eventualmente di altri articoli del numero speciale, a tutti i docenti che desiderano aumentare la propria consapevolezza in merito agli strumenti, alle rappresentazioni e in generale ai registri semiotici[4] che utilizzano e fanno utilizzare ai propri allievi per accedere al significato dei concetti matematici e per costruirne un senso.

1. Gli spunti forniti e le opinioni espresse, pur essendo suggerite dall'articolo considerato, sono da considerarsi un punto di vista soggettivo dell'autore della presente rubrica, che se ne assume la completa responsabilità, e non un risultato di ricerca.
2. Responsabile della formazione dei docenti di scuola media presso la SUPSI-DFA a Locarno e docente di didattica della matematica. alberto.piatti@supsi.ch
3. In parole molto semplici, la semiotica è la scienza che studia come gesti, simboli, oggetti, linguaggi e rappresentazioni (segni) siano utilizzati o utilizzabili per rendere accessibili e/o manipolabili concetti astratti o realtà concrete non direttamente accessibili. Ad esempio, per rappresentare il numero due, posso utilizzare una parola: *due*, un simbolo: 2, una rappresentazione iconica: **, mostrare due dita, ecc.
4. Con registro semiotico s'intende in senso ampio un linguaggio che può utilizzato per rendere accessibile una serie di concetti. Esempi di registri semiotici in matematica sono il linguaggio naturale (la lingua che parliamo tutti i giorni), il linguaggio simbolico, le rappresentazioni grafiche, ecc. Per un approfondimento si veda ad esempio (Duval, 1995) e (D'Amore, Fandiño Pinilla e Iori , 2013).

Senso e significato dei concetti matematici

«The relationship between meaning as a historical–cultural construct and its mode of existence in the consciousness of concrete people led Leont'ev to distinguish between meaning and sense. While the former, as previously noted, is a historical and ideal entity, the latter is personal, subjective. Their relationship cannot be cast in terms of logical versus psychological but must be considered in dialectical terms: as a relationship between the general and the individual. Naturally, in developmental terms, sense, like meaning, evolves. Sense evolves as individuals engage in goal-oriented activities. But sense cannot be taught. It can only be nurtured. For sense is not a thing but a relationship: the relationship between the actions that realize the individual's activity and the motives of this activity.

Thus, that which I actually recognize, how I recognize it, what kind of sense what I recognize has for me is determined by the motive of activity in which my specific action is included. For this reason the question of sense is always a question of motive.

(Leont'ev, 1978, p. 173*)*

Sense refracts historical and political meanings through the prism of the individual's own biography, projects of life, and aspirations.

(Leont'ev, 1978, p. 153*)*

La relazione tra il significato, inteso come costrutto storico-culturale, e la sua esistenza all'interno della coscienza individuale, ha spinto Leont'ev a distinguere tra *significato* e *senso*. Mentre il primo, come già indicato in precedenza, è un'entità storica ideale, il secondo è personale e soggettivo. La loro relazione non può essere ridotta in termini di logico versus psicologico, ma deve essere considerata in termini dialettici come relazione tra il generale e l'individuale. Naturalmente, sia il significato sia il senso evolvono nel tempo. Il senso evolve man mano che gli individui sono confrontati con attività che contemplano il concetto di riferimento. Ma il senso non può essere insegnato, può solo essere nutrito, poiché il senso non è una cosa, ma piuttosto una relazione tra un'azione e il movente della stessa.

Così, ciò che riconosco, il modo in cui lo riconosco, il senso che ha per me ciò che riconosco, è determinato dal movente dell'attività in cui la mia azione è inclusa. Per questo motivo, il problema del senso è sempre un problema di movente.

(Leont'ev, 1978, p. 173).

Il senso è la rifrazione del significato, storicamente e politicamente condiviso, attraverso il prisma delle esperienze di vita dell'individuo, dei suoi progetti di vita, delle sue aspirazioni.

Molti tendono a pensare che i concetti matematici siano una sorta di oggetto, esistente a livello astratto, a cui una persona può avere accesso attraverso lo studio della matematica e delle sue rappresentazioni. Questa concezione, che potremmo definire platonica, è rifiutata dagli autori dell'articolo (e anche dal sottoscritto) che fanno propria una citazione di Leont'ev (1978, p. 169), *Meanings do not have existence except as in the consciousness of concrete people. There is no independent kingdom of meanings, there is no Platonic world of ideas.*

Ovvero: «**i significati non esistono se non nelle coscienze delle persone**, non esiste nessun regno indipendente dei significati, non esiste alcun mondo platonico delle idee».

Secondo questa posizione teorica, il **significato di un concetto è un costrutto storico, culturale e politico**, condiviso all'interno di una comunità, e appartenente a una coscienza collettiva. La definizione di un concetto matematico, condiviso all'interno della comunità scientifica, può essere un esempio di significato di un concetto. Il significato di un concetto, pur essendo oggettivo, non è però, come si potrebbe facilmente pensare, una realtà statica e stabile, ma piuttosto il risultato di una serie di tensioni e visioni contrapposte all'interno della comunità di riferimento e come tale è **in continua evoluzione**. In questo senso, è fondamentale che sia il docente, sia gli allievi, abbiano un **atteggiamento critico nei confronti del significato di un concetto matematico** e non di acritica accettazione.

Mi è capitato più volte di chiedere ai miei studenti[5] di pensare intensamente a una piramide e di chiedergli, dopo un attimo di silenzio, di che colore e di che materiale fosse la piramide da loro pensata. Sorprendentemente, molti di loro descrivevano rappresentazioni di piramidi che loro, o molto spesso il/la loro docente, avevano utilizzato per studiare il concetto di piramide durante la scuola media. Ad esempio i contenitori in plastica gialla trasparente a forma di piramide presenti in tutte le scuole medie del Canton Ticino e utilizzati per argomentare empiricamente la formula del volume della piramide attraverso il travaso di liquidi. In generale, quando si chiede a una persona di evocare un concetto matematico, spesso ciò che sorge spontaneo alla mente è legato a una o più esperienze o attività, più o meno concrete, che la persona ha vissuto e in cui quel concetto era coinvolto. **L'insieme di tutte le esperienze che una persona ha vissuto con un dato concetto; le immagini, le parole, i ricordi, i gesti legati a quelle esperienze formano quello che gli autori definiscono il senso del concetto matematico.** In altre parole, il senso sta alla coscienza individuale, come il significato sta alla coscienza collettiva, ma le coscienze individuali non sono e non potranno mai essere riproduzioni in scala della coscienza collettiva: «le forme oggettive e soggettive del significato non coincideranno mai».

Il docente non può rendere accessibile il significato di un concetto a un allievo, se non **permettendogli di vivere esperienze legate al concetto** e quindi di far evolvere il suo senso del concetto in modo che sia il più possibile compatibile con il significato dello stesso. Dovrà però essere pronto ad accettare che ogni allievo sviluppi il suo personale senso del concetto, diverso dagli altri, e che gli allievi assumano una postura critica verso il significato convogliato dal docente. Per facilitare questo compito, può essere opportuno adottare uno o più dei seguenti consigli pratici.

Consigli concreti per la trasmissione del significato e lo sviluppo del senso dei concetti matematici negli allievi:

1. Permettete agli allievi di vivere esperienze legate al concetto, utilizzando diversi modi per rappresentare il concetto, e chiedendo agli allievi di affrontare situazioni problema dove il concetto svolge un ruolo chiave. Un concetto deve esistere per qualcosa (il movente), e deve servire adesso. Una rappresentazione deve mostrarsi migliore di un'altra alla prova dei fatti, e non perché il docente l'ha imposta.

5. Docenti di matematica di scuola media e/o media superiore in formazione presso il Dipartimento Formazione e Apprendimento della SUPSI a Locarno.

2. Lasciate che gli allievi scelgano le proprie strategie di risoluzione di un problema e che utilizzino le rappresentazioni per loro più appropriate. Fate in modo che possano utilizzare diversi registri semiotici, sia per ragionare e lavorare sul problema, sia per esplicitare la soluzione ai propri compagni e al docente. Troppo spesso, infatti, chiediamo agli allievi di esplicitare le loro soluzioni a voce o con registri che non sono quelli che l'allievo ha utilizzato per risolvere il problema, ma ricordiamoci che il passaggio da un registro a un altro è tutt'altro che scontato.
3. Favorite forme didattiche che prevedano uno scambio critico tra gli allievi, in modo che le strategie e i registri più adeguati data una certa situazione possano emergere attraverso la ricerca di un consenso e la costruzione di una coscienza collettiva della classe.
4. Mostrate agli allievi lo sviluppo che i concetti matematici hanno avuto nella storia e nelle diverse culture, la storia della matematica è un potente strumento per togliere alla matematica la sua aura platonica e per mostrarla come prodotto dell'intelletto e delle relazioni umane. Incoraggiateli e legittimateli ad assumere una postura critica nei confronti del significato di un concetto matematico.
5. Quando trattate un dato concetto in classe, utilizzate molti registri, anche contemporaneamente, in modo che ogni allievo possa ritrovare quelli più vicini al suo senso del concetto e che allo stesso tempo possa far evolvere il proprio senso verso altre rappresentazioni (un po' come la stele di Rosetta…).
6. Infine, non illudetevi che l'apprendimento di un concetto possa svolgersi in modo lineare. Il senso (e dunque anche il significato) di un concetto, evolve nel tempo e richiede che l'allievo viva diverse esperienze legate al concetto, in diversi momenti, e con i dovuti tempi di riflessione e scambio. È dunque fondamentale staccarsi da una progettazione lineare, per favorire un processo di insegnamento-apprendimento a spirale.

Bibliografia

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. e Iori M. (2013). *Primi elementi di semiotica*. Prefazioni di Raymond Duval e Luis Radford. Bologna: Pitagora editrice.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages*. Berna: Peter Lang.

Leont'ev, A. N. (1978). Activity, consciousness, and personality. Englewood Cliffs. NJ: Prentice-Hall.

Radford, L., Schubring, G. e Seeger, F. (2011) Signifying and meaning-making in mathematical thinking, teaching and learning. *Educ Stud Math* (2011) 77:149–156.

3. Gocce di didattica Spunti e riflessioni dalla ricerca in didattica della matematica[1]

Alberto Piatti[2]

Docenti di matematica in formazione al I anno presso la SUPSI-DFA[3]

I tre mondi della matematica secondo David Tall.

Il tema di questo intervento è lo **sviluppo del pensiero matematico lungo tutto l'arco della vita**. La riflessione parte da un articolo[4] del 2006 di David Tall, professore emerito di pensiero matematico presso l'università di Warwick. La teoria di Tall permette di **modellare e analizzare il processo pluriennale che porta all'apprendimento dei concetti matematici, partendo dalle prime esperienze percettive nella prima infanzia fino alla simbolizzazione nell'età dell'adolescenza** ed eventualmente all'assiomatizzazione in età adulta. Questa teoria è ben riassunta in un libro[5] di recente pubblicazione che consiglio a tutti coloro che desiderassero approfondire il tema. L'articolo alla base di questo contributo è stato oggetto di discussione e approfondimento in una serie di lezioni di didattica della matematica destinate a docenti di matematica in formazione presso la SUPSI-DFA a Locarno nel mese di marzo 2015. Nell'ambito di queste lezioni gli studenti sono stati chiamati a scegliere e commentare

1. Gli spunti forniti e le opinioni espresse, pur essendo suggerite dall'articolo considerato, sono da considerarsi un punto di vista soggettivo dell'autore della presente rubrica, che se ne assume la completa responsabilità, e non un risultato di ricerca. L'autore si assume pure la responsabilità per i contributi degli studenti che sono intervenuti nel presente articolo.
2. Responsabile della formazione dei docenti di scuola media presso la SUPSI-DFA a Locarno e docente di didattica della matematica. alberto.piatti@supsi.ch
3. Jennifer Andreotti, Gabriele Caffi, Romina Casamassa, Lara Caverzasio, Mattia Chiesa, Leandro Ghisletta, Shady Goro, Massimo Immersi, Pietro Lurati, Fabian Oehen, Debora Poretti, Giulia Ranocchia, Nastasia Reale, Angelo Antonio Ricci, Silvia Righetti, Antonino Sergio Rigogliuso, Letizia Sciolli, Igor Tamagni.
4. L'articolo, intitolato *A Theory of Mathematical Growth through Embodiment, Symbolism and Proof,* è comparso negli *Annales de didactique et de sciences cognitives*, volume 11, pag. 195-215 ed è disponibile gratuitamente in rete. Altri contributi dell'autore sono disponibili sul suo sito personale: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/
5. David Tall (2013) How Humans Learn to Think Mathematically. Cambridge university press.

una citazione dell'articolo e a formulare delle raccomandazioni all'indirizzo dei loro colleghi. In questo contributo, oltre alle citazioni e alle raccomandazioni elaborate dal sottoscritto, riporto pure le raccomandazioni più significative prodotte dagli studenti, affinché le riflessioni prodotte possano effettivamente raggiungere i loro colleghi di tutto il Canton Ticino.

Compressione, connessione e procetti

Per poter analizzare il pensiero di D. Tall è necessario innanzitutto introdurre alcuni concetti fondamentali della sua teoria. Iniziamo con i concetti di **compressione**, **connessione** e **procetto** (*procept*). L'incipit dell'articolo introduce questi tre aspetti, che permettono di collegare il funzionamento del cervello umano con le modalità di apprendimento e insegnamento della matematica.

«In studying mathematical learning from early childhood to adulthood we are involved with two very different frameworks. One is the coherence and structure of mathematics, the other is the biological development of the human mind. The brain has a number of essential aspects that enable us to build a highly sophisticated mathematical mind. First it has a complex parallel-processing structure that carries on many routine operations subconsciously but needs to focus on a small number of conscious items to be able to make coherent decisions. This in turn requires the complementary aspects of mental compression and connection:

- ***compression** of important ideas into thinkable concepts that can be held in the focus of attention;*
- ***connections** between such thinkable concepts can be built into dynamic action-schemas that connect successive actions in time, and more general knowledge schemas that connect ideas together in webs of relationships.»* (David Tall, articolo citato, pag. 195-196).

«*Studiando l'apprendimento in matematica dalla prima infanzia fino all'età adulta, ci si confronta con due contesti molto differenti. Uno è la coerenza e la struttura della matematica, l'altro è lo sviluppo del biologico del cervello umano. Il cervello ha una serie di caratteristiche essenziali che permettono agli esseri umani di sviluppare un pensiero matematico molto sofisticato. Il cervello ha, infatti, una struttura che permette di svolgere in parallelo molte procedure a livello subconscio, ma che allo stesso tempo permette e necessita di manipolare a livello conscio solo un piccolo numero di aspetti al fine di produrre decisioni coerenti. Queste considerazioni ci portano a considerare due aspetti complementari a livello mentale: la compressione e la connessione.*

- *La **compressione** d'idee importanti in concetti pensabili (thinkable concepts) che possano essere considerate a livello conscio.*
- *La **connessione** tra questi concetti pensabili tramite lo sviluppo di schemi d'azione che connettano diverse azioni nel tempo e più in generale di schemi di conoscenza che connettano diverse idee in reti di relazioni.*» (David Tall, articolo citato, pag. 196)

L’obiettivo principale (l’unico?) dell’insegnamento della matematica nella scuola dell’obbligo è sviluppare negli allievi la capacità di pensiero matematico, ovvero la capacità di riflettere, interpretare e decidere in maniera razionale in situazioni complesse che possono presentarsi nella vita di tutti i giorni. Questo richiede all’allievo di appropriarsi di una serie di concetti, schemi d’azione, strategie di pensiero e d’azione e atteggiamenti che possano essere richiamati velocemente in mente nel momento del bisogno. Per raggiungere questo obiettivo, il/la docente è chiamato/a/a a far vivere all’allievo situazioni problematiche di complessità variabile e a far elaborare a livello cognitivo e/o metacognitivo quanto vissuto in modo da rendere pensabili i concetti, le procedure e le strategie messe in atto.

«Compression may occur in a variety of ways:
- *action-schemas may be practised so that they can be performed automatically with little conscious effort, and imagined as a whole as thinkable processes;*
- *processes may be further compressed into thinkable concepts, often by using a symbol to refer both to the process (eg 2+3 as addition) and to the concept (2+3 as sum). A symbol that can be used to switch between a doable process and a thinkable concept is called a procept;*
- *concepts may be categorised and named so that the names can be held in the focus of attention to refer to the categories as thinkable concepts. This occurs in geometry where different figures are categorized to give hierarchies such as square, rectangle, parallelogram, quadrilateral, polygon, each with its own array of related properties. It also happens in arithmetic and algebra with concepts such as prime number, square number, irreducible polynomial, and so on;*

...» (David Tall, articolo citato, pag. 196).

«*La compressione può avvenire in diversi modi:*
- *schemi d’azione possono essere automatizzati tramite esercizi in modo che possano essere svolti con poco sforzo a livello conscio e immaginati nella loro interezza come processi pensabili;*
- *i processi possono essere ulteriormente compressi in concetti pensabili, di solito utilizzando un simbolo per riferirsi sia al processo (ad esempio 2+3 come addizione), sia al concetto (2+3 come somma). Un simbolo che può essere utilizzato sia in riferimento a un processo eseguibile, sia a un concetto pensabile è denominato* ***procetto****.*
- *i concetti possono essere categorizzati e denominati, in modo che i nomi possano fungere da centro di attenzione per richiamare intere categorie di elementi pensabili. È ad esempio quello che succede in geometria quando si classificano le figure piane: quadrati, rettangoli, parallelo grammi, quadrilateri, poligoni, ecc. dove ciascuna categoria è caratterizzata da una serie di proprietà. Succede pure in aritmetica e algebra, con concetti quali i numeri primi, i numeri al quadrato, i polinomi irriducibili, ecc..*

...» (David Tall, articolo citato, pag. 195-196).

Il primo tipo di compressione, lo sviluppo di automatismi appresi, viene spesso applicato a livello di scuola dell'obbligo. Interessante ad esempio il caso degli automatismi applicati nelle strategie di calcolo mentale. Supponiamo ad esempio di voler calcolare a mente 14 x 37. Chiaramente sono possibili diverse strategie per risolvere il calcolo in questione, una possibilità è la seguente:

$$14 \times 37 = (10+4) \times 37 = 10 \times 37 + 4 \times (30+7) = 10 \times 37 + 4 \times 30 + 4 \times 7 = 370 + 120 + 28 = 518$$

Sfruttando la proprietà distributiva della moltiplicazione si scompone l'espressione in una somma di prodotti facili da risolvere a mente. Nella risoluzione di questa espressione sfruttiamo diversi automatismi appresi: l'utilizzo della proprietà distributiva, la moltiplicazione per 10, la moltiplicazione di piccoli numeri interi (4×3, 4×7). Questi automatismi sono stati sviluppati durante la scuola elementare e costituiscono un elemento irrinunciabile per sviluppare strategie di calcolo mentale.

Il secondo tipo di compressione, il passaggio ai procetti, è caratteristico della scuola media e si produce al termine di un cammino che ha portato l'allievo dall'incapacità di risolvere una data situazione problema fino al procetto relativo alla situazione data, ovvero alla capacità di pensare simbolicamente alla procedura adottata per risolvere il problema. Tall (articolo citato, pag. 200) identifica cinque stadi di sviluppo (compressione) rispetto a una data situazione problema: (i) l'allievo non è in grado o è in grado solo parzialmente di risolvere la situazione data, (ii) l'allievo è in grado di risolvere la situazione problema attraverso un'unica procedura passo per passo, (iii) l'allievo padroneggia diverse procedure ed è in grado di scegliere in modo da migliorare l'efficienza, (iv) l'allievo possiede alternative concettuali che permettono di sviluppare una strategia di risoluzione flessibile, (v) l'allievo è in grado di concepire a livello simbolico l'approccio alla risoluzione della situazione data, il cammino è stato interiorizzato sotto forma di procetto.

Pensando ad esempio al concetto di somma, lo stesso viene di regola sviluppato a partire dalla fine della scuola dell'infanzia o dall'inizio della scuola elementare, dove i bambini sono in grado di effettuare somme di piccoli numeri, spesso facendo riferimento ad oggetti concreti, fino all'età adulta, dove il simbolo + identifica tutta una serie di operazioni e/o procedure che possono essere svolte in diversi insiemi. Spesso il passaggio ad una dimensione simbolica avviene a scuola media, dove le capacità a livello cognitivo e metacognitivo permettono all'allievo di astrarre a livello simbolico dei concetti e delle procedure vissuti concretamente in precedenza.

Anche per quanto riguarda il terzo tipo di compressione, ossia la categorizzazione e la denominazione, la scuola media è una tappa di passaggio fondamentale, dove esperienze numerose e variegate con concetti fondamentali della matematica (numeri, geometria, misure, ecc.) sviluppate nel corso della scuola dell'infanzia e della scuola elementare possono essere categorizzate e sintetizzate grazie alle accresciute capacità di astrazione degli allievi.

I tre mondi della matematica

Sul concetto di astrazione sono basati i **tre mondi della matematica** introdotti da Tall per descrivere il processo di interiorizzazione e astrazione dei concetti matematici.

«The long-term construction of mathematical knowledge uses the power of the biological brain, with input through perception, output through action and the internal power of reflection to re-assemble ideas into useable mental structures. I hypothesise that mathematical thinking evolves through three linked mental worlds of mathematics, each with its own particular way of developing greater sophistication:

- *an* ***object-based conceptual-embodied world*** *reflecting on the senses to observe, describe, define and deduce properties developing from thought experiment to Euclidean proof;*
- *an* ***action-based proceptual-symbolic world*** *that compresses action-schemas into thinkable concepts operating dually as process and concept (procept);*
- *a* ***property-based formal-axiomatic world*** *focused to build axiomatic systems based on formal definitions and set-theoretic proof.»* (David Tall, articolo citato, pag. 197).

«La costruzione a lungo termine della conoscenza matematica sfrutta il potere del cervello, con ***input tramite la percezione, output tramite l'azione*** *e il potere interno della* ***riflessione per riordinare la idee in modo da renderle pensabili e quindi utilizzabili*** *a livello mentale. Ipotizzo che il pensiero matematico evolva attraverso tre stadi, tre mondi della matematica, connessi tra loro, ciascuno con il proprio particolare modo di sviluppare e/o affrontare una crescente complessità (Tall 2004):*

- *un* ***mondo concettuale – incorporato****, basato sugli oggetti, che fa riferimento ai sensi per osservare, descrivere, definire e dedurre proprietà, partendo da esperimenti di pensiero fino a dimostrazioni di tipo euclideo;*
- *un* ***mondo procettuale - simbolico****, basato sull'azione, dove schemi d'azione sono compressi in concetti pensabili con la doppia funzione di processo e concetto (procetto);*
- *un* ***mondo formale – assiomatico****, basato sulle proprietà, consistente in sistemi di assiomi, definizioni formali e dimostrazioni basate sulla teoria degli insiemi.»* (David Tall, articolo citato, pag. 197).

L'apprendimento di qualsiasi concetto matematico ha inizio con esperienze concrete, basate sui sensi e vissute con il proprio corpo (*embodied*). Ad esempio, l'apprendimento del concetto di numero ha inizio nella manipolazione e nel conteggio di oggetti nella scuola dell'infanzia, oppure l'apprendimento della geometria piana e nello spazio ha inizio con la manipolazione o la costruzione di oggetti e/o figure geometriche. **Queste esperienze, prevalenti ma non esclusive a livello di apprendimento della matematica nella scuola dell'infanzia e della scuola elementare, perdono gradualmente d'importanza nella scuola media e nelle scuole secondarie dove la dimensione simbolica prende il sopravvento**. Infine, per coloro che proseguono con una carriera di studi scientifici, la dimensione simbolica viene ulteriormente astratta per giungere a definizioni formali e a sistemi di assiomi. A livello di scuola dell'obbligo la terza dimensione è relativamente irrilevante per gli allievi, ma va tenuta in considerazione dal/la docente affinché non si creino involontariamente ostacoli agli allievi che in seguito intraprenderanno questa via.

Tall riassume bene i tre mondi quando indica (articolo citato, pag. 203) quali sono le rispettive modalità di argomentazione:

– nel mondo concettuale-incorporato una proprietà vale perché **la si vede**, la si percepisce;
– nel mondo procettuale-simbolico vale perché **la si calcola**;
– nel mondo formale assiomatico vale perché **la si può derivare tramite procedure logiche** a partire da assiomi dati.

Nonostante, con l'avanzare dell'età, la dimensione simbolica tenda ad assumere la prevalenza, l'esperienza fisica e percettiva non può essere mai tralasciata. Ad esempio chiunque, di fronte a un problema geometrico di una certa complessità, di regola inizia tracciando uno schizzo della situazione. Il disegno di una situazione geometrica è un tipico esempio di rappresentazione a livello percettivo. Poi in seguito può darsi che il problema venga risolto anche esclusivamente con il calcolo, dunque a livello simbolico, ma **le esperienze percettive fungeranno sempre e in qualsiasi caso da fondamenta per il livello simbolico, un terreno solido su cui appoggiarsi in caso di necessità**. Forse proprio per questo motivo, quando si pone un allievo di fronte a situazioni problema complesse, spesso si assiste a un'apparente regressione dal mondo simbolico a quello percettivo.

In generale, a un certo momento dello sviluppo, gli allievi (in particolare i più dotati) tenderanno di fronte a determinate situazioni problema a privilegiare la dimensione simbolica, mentre di fronte ad altre situazioni tenderanno a rifugiarsi o a privilegiare la dimensione percettiva (in particolare gli allievi più in difficoltà). Il continuo passaggio dalla dimensione percettiva a quella simbolica e viceversa è un processo virtuoso che dovrebbe avvenire sempre, in particolare a scuola media, facendo bene attenzione di non forzare la dimensione simbolica (creando difficoltà ulteriori agli allievi già in difficoltà o privando altri allievi delle necessarie fondamenta), rispettivamente evitando di soffermarsi eccessivamente nella dimensione percettiva (limitando artificialmente gli allievi più dotati e motivati rispetto al problema dato).

Quando si progetta e/o si realizza un'attività didattica in matematica è fondamentale decidere a quale dimensione di vuole dare la prevalenza, tenendo ben in conto che nessun apprendimento di tipo simbolico può avvenire senza che sia prima avvenuta un'esperienza a livello concreto e che nessun apprendimento in matematica parte da zero. In questo senso, sono interessanti i concetti di *set-before* (impostato-prima) e *met-before* (incontrato-prima) introdotti da Tall nell'articolo. Con *impostato-prima*, Tall intende un concetto matematico presente nella testa dell'allievo da prima o poco dopo la nascita, come ad esempio la numerosità di piccoli insiemi. Con *incontrato-prima*, invece, s'intende un concetto, una procedura, una strategia, ecc. già sviluppata in precedenza dall'allievo, che viene riattivata in un nuovo contesto (articolo citato, pag. 198-199). Dal punto di vista didattico la differenza tra *impostato-prima* e *incontrato-prima* è irrilevante, di conseguenza Tall usa il secondo termine per indicare entrambi.

In alcuni casi, gli *incontrati-prima* hanno un ruolo positivo e utile nell'affrontare una nuova situazione problema; in altri casi invece si rivelano inadeguati alla nuova situazione e quindi da eliminare e/o ristrutturare. La costruzione a lungo termine del pensiero matematico non si prefigura dunque come una costruzione lineare, quanto piuttosto come un continuo processo di evocazione, ristrutturazione e ampliamento, se non addirittura di eliminazione per quanto possibile, di *incontrati-prima*.

Visto quanto discusso in precedenza, parte degli *incontrati-prima* che si riscontrano lavorando a livello procettuale-simbolico si situano inesorabilmente nel mondo concettuale-incorporato. Allo stesso modo, lavorando a livello formale-assiomatico, si riscontrano incontrati-prima afferenti ai due mondi precedenti. In sintesi, è inevitabile che lavorando in un mondo si sia confrontati anche con aspetti dei mondi precedenti. Per poter essere realmente efficace ed incisivo, il/la docente non può dunque fare astrazione di questi aspetti nel progettare e realizzare attività didattiche per e con i suoi allievi.

Un ulteriore elemento di complessità è dato dal fatto che gli *impostati-prima* e gli *incontrati-prima* sono altamente soggettivi, essendo strettamente legati alle caratteristiche e alle esperienze di ciascun individuo. Di conseguenza, il/la docente dovrebbe fare in modo di considerare, nel limite del possibile, le caratteristiche individuali di ciascun allievo rispetto a un dato concetto matematico o a una data situazione problema per poter fornire un reale contributo allo sviluppo del suo pensiero matematico.

Sulla base di queste brevi considerazioni teoriche, abbiamo elaborato una serie di raccomandazioni pratiche rivolte ai docenti di matematica di scuola media (ma non solo..). In seguito elenchiamo le raccomandazioni più significative, separate per autore/autrice. Abbiamo deciso di riportare le raccomandazioni nella loro forma originale sviluppata in classe, senza eliminare eventuali ridondanze di cui ci scusiamo con i lettori.

Consigli concreti per favorire lo sviluppo del pensiero matematico a lungo termine degli allievi a scuola media alla luce della teoria dei tre mondi della matematica di D. Tall

Angelo Ricci

1. I met-before sono molto importanti per tutte le persone, docenti, allievi e uomo comune. Sono parte del nostro essere, della nostra persona e rappresentano in un certo senso gli occhi attraverso cui viene filtrato e interpretato tutto quello che ci circonda. Quindi il primo passo da affrontare per un docente è senz'altro quello di cercare di conoscere il più possibile i met-before dei suoi allievi. A tal fine possiamo usare tutti i metodi che riteniamo opportuni: brainstorming, esercizi mirati ecc.
2. Il passo successivo è quello di mettere in crisi tutti quei met-before che rappresentano un limite all'apprendimento di nuovi concetti o alla riformulazione di argomenti già noti e tramite questa messa in crisi preparare il terreno per costruire qualcosa di nuovo o di diverso rispetto a quanto già appreso. Questo processo ha l'indub-

bio vantaggio collaterale di minare le certezze dell'allievo, insinua il dubbio in quelle che fino ad allora vedeva come certezze, come verità assolute.

3. Da ciò scaturisce anche il terzo consiglio: minare le certezze dell'allievo al di là della matematica, in altri campi. Nei discorsi che spesso vengono affrontati in classe e che esulano dalla materia insegnata bisogna cercare di minare tutto quello che i ragazzi considerano come verità assolute, con le dovute accortezze del caso e andandoci sempre con i piedi di piombo ovviamente. Solo chi dubita è naturalmente aperto alle novità. Chi ha certezze di solito non accetta il nuovo.

Mattia Chiesa

1. Caro collega, nelle tue classi, sicuramente avrai avuto modo di osservare che alcuni ragazzi sentono la necessità di spostare i concetti appresi nel mondo concreto in quello simbolico. Ti prego quindi di dare valore a questa necessità, prevedendo per loro delle attività che stimolino e accrescano questo bisogno (Mattia Chiesa).

2. Cerca comunque di non far perdere di vista, a questi ragazzi, anche il legame che la matematica ha con il mondo sensoriale, lascia loro la possibilità di viaggiare continuamente (andata e ritorno) tra lo spazio sensoriale e quello simbolico (Mattia Chiesa).

3. Bisogna ricordarsi però che spesso nel corso della scuola media il legame con il mondo sensoriale risulta essere molto fragile (per esempio quando trattiamo la moltiplicazione tra numeri negativi). Per consolidare e far comprendere tali argomenti bisogna perciò rafforzare le basi simboliche che portano alla loro comprensione e partire da queste ultime senza per forza cercare un legame, per altro molto debole, con l'aspetto sensoriale (Mattia Chiesa).

Antonino Rigogliuso

1. Bisogna costruire, rafforzare e soprattutto utilizzare quanto già appreso. Gli studenti non devono essere considerati della tabula rase, delle lavagne bianche su cui «scrivere» – a ogni lezione – un argomento, un'idea o un procedimento. Ogni studente ha le proprie caratteristiche e capacità che sono innate, ossia scritte nel proprio codice genetico. Alcuni concetti matematici rudimentali risultano essere già presenti, in ogni individuo, fin dalla nascita e rappresentano il punto di partenza (set-before) del nostro sviluppo e apprendimento cognitivo.

2. Bisogna tener conto di questi set-before che, sebbene contraddistinguano il singolo individuo alla nascita, rappresentano la base del successivo sviluppo cognitivo nei cosiddetti met-before. I met-before, ossia le strutture mentali presenti in ognuno di noi e già metabolizzate nel corso degli anni, sono fondamentali nell'apprendimento e soprattutto nella crescita cognitiva di ognuno e, quindi, del singolo allievo.

3. Poiché i met-before possono o facilitare o ostacolare l'apprendimento di concetti matematici (e non) nel singolo studente; si consiglia pertanto, un accurato lavoro di ricerca che li faccia emergere durante la continua fase d'apprendimento degli studenti. In questo modo sarà possibile costruire percorsi didattici più idonei ed efficienti. Attività di brainstorming, di raccolta dei prerequisiti e di laboratorio devono, pertanto, «giocare» un ruolo fondamentale.

Fabian Oehen

1. L'insegnante deve cercare, mediante una ricerca continua, di comprendere quali sono i met-before (set-e met-before) degli alunni. Quest'analisi permettera al docente di rispondere alle seguenti domande:

– Posso insegnare il nuovo argomento basandomi sui procetti (processi e concetti) già presenti in classe?
– Quali procetti devo mettere in crisi prima d'introdurre il nuovo argomento?
– Quale strategia e la piu efficace da usare con questi alunni?
– Quanto posso spingere nell'efficienza questi alunni?

Cercare d'insegnare un nuovo argomento senza porsi queste domande e inefficace ed insensato. Il docente deve comprendere i met-before degli alunni e sfruttarli come strumento per migliorare l'insegnamento e l'apprendimento.

2. Di regola un problema matematico puo essere risolto utilizzando diverse strategie. Il docente deve mostrare più strategie e indicarne le differenze di efficacia ed efficienza. Questo permettera all'alunno di consolidare le nozioni e formare nuovi procetti.

3. Il docente deve cercare di portare l'alunno alla necessita di passare al mondo simbolico. Ma questo passaggio dal mondo dei sensi al mondo simbolico e sentito come utile e/o necessario solo se l'alunno e confrontato con esercizi con una determinata complessita.

Giulia Ranocchia

1. Molto spesso partire da un esempio concreto per poi trovare la regola universale può essere utile all'allievo per comprendere il problema proposto. Seguire un processo graduale, dal particolare al generale, può aiutare a semplificare il problema agli occhi dell'allievo e renderlo più comprensibile.

2. Essere sempre capaci di proporre i nuovi concetti utilizzando molteplici esempi e fornendo sempre più di un punto di vista sull'argomento. Non focalizzarsi su un'unica versione o spiegazione, che può risultare chiara ai nostri occhi ma non a quella degli allievi.

3. Il linguaggio algebrico può talvolta essere introdotto in un secondo momento, dopo che lo studente ha compreso qual è il problema che si sta affrontando. Questo infatti può essere fonte di una difficoltà supplementare e può anche essere introdotto in un secondo momento.

Igor Tamagni

1. Considerare il fatto che ogni allievo ha delle capacità innate differenti e che non si potrà mai portare tutti allo stesso livello. Il «ciò che siamo» rende per alcuni ragazzi la matematica di facile comprensione, per altri invece essa risulta essere difficile.

2. Considerare il fatto che ogni allievo ha vissuto delle esperienze diverse che hanno segnato il loro sviluppo nella conoscenza della matematica. In classe si hanno

differenti «contenitori» di esperienze ed è utile poterle conoscere per poi agganciarsi ad esse quando il docente spiega le varie tematiche agli allievi. Sfruttando le varie esperienze vissute dagli allievi, essi possono basare su qualcosa di concreto che hanno vissuto.

3. Considerare che le esperienze vissute dagli allievi di oggi, sono diverse dalle esperienze che vivranno gli allievi che frequenteranno le medie fra 10 anni, che saranno a loro volta diverse dal vissuto dei ragazzi che andranno a scuola fra 20 anni. È importante che un docente si «aggiorni» sul vissuto degli allievi, così da poter agganciarsi a situazioni che esse hanno vissuto nella loro infanzia. Evitare di proporre sempre gli stessi esempi di vita reale, i quali potrebbero non essere stati vissuti dai propri ragazzi.

Jennifer Andreotti

1. Se possibile, presentare situazioni diversificate del mondo concreto (conceptual-embodied) in modo che l'allievo non identifichi il concetto matematico con un'unica situazione concreta. Credo che questo possa aiutare a rendere meno forti queste connessioni e quindi a facilitare il passaggio al livello simbolico.

2. Scoprire e imparare quanto più possibile dei «met-before» degli allievi sia attraverso delle attività introduttive sia attraverso la conoscenza dei piani di studio delle scuole elementari.

3. Esplicitare i «met-before» o le concezioni che potrebbero creare problemi e metterle in discussione apertamente.

Lara Caverzasio

1. Non rinnegare quanto gia appreso dagli allievi bensi utilizzare il sapere che ognuno possiede per costruirne di nuovi. Per fare questo prevedere sempre una fase iniziale di ricerca e conoscenza.

2. Prevedere compiti o stimoli differenziati in base alle conoscenze del singolo, per quelli più preparati riservare ad esempio esercizi o richieste più articolate.

3. Non dimenticarsi mai che l'apprendimento e si influenzato dal passato ma a sua volta influenza il futuro: quanto si insegna oggi sara un met-before domani.

Letizia Sciolli

1. Passare spesso tra i primi due livelli (concettuale-incorporato e procettuale-simbolico) con vari esercizi.

2. Proporre e analizzare situazioni che prediligano soluzioni solo in un livello.

3. Con le classi dei corsi base utilizzare molto il primo livello (geometria e artefatti), senza però trascurare il secondo.

Massimo Immersi

1. In primo luogo bisogna riuscire a fare emergere i set-before ed i met-before della classe, questo per conoscere la classe col quale si ha a che fare. Potrebbe essere utile conoscerli anche per avere un'idea del vissuto dei ragazzi. La cosa più im-

portante è sapere come agire per far manifestare queste capacità ed essere in grado di coglierle e sfruttarle.

2. Sfruttare i set-before ed i met-before della classe per, assieme, costruire un percorso didattico ideale fatto di momenti in cui loro sono chiamati a sfruttare queste conoscenze per arrivare ad altre conoscenze, naturalmente con il docente che, attento, cerca di mantenere la direzione della lezione sui binari voluti con ben in chiaro l'obiettivo da raggiungere. L'ideale sarebbe riuscire a costruire un percorso didattico efficace che possa fare leva su delle preconoscenze o dei concetti già assimilati dalla classe per appoggiarvisi e sviluppare poi il resto del cammino.

3. Non possiamo illuderci che fare una lezione di ricapitolazione su un determinato argomento appena trattato porti tutti allo stesso livello perché, ogni allievo ha un livello di comprensione diverso dall'altro e ogni allievo assimilerà un concetto in un modo e tempo diverso.

Nastasia Reale

1. Prepararsi bene su ciò che si vuole spiegare agli allievi: una non padronanza da parte del docente implica insicurezza per gli allievi.

2. Prevedere degli itinerari con schede differenziate, per favorire l'apprendimento di tutti gli allievi.

3. Prevedere degli itinerari, ed in particolare delle attivita, piu o meno concrete in base alla classe che si ha di fronte.

Silvia Righetti

1. La matematica (come tutte le altre discipline) è sempre in movimento e noi nel ruolo di docenti dobbiamo essere in continuo aggiornamento e aperti alle nuove realtà.

Shady Goro

1. Ogni individuo ha un suo modo di pensare e di conseguenza una sua logica, per questo motivo il docente deve essere particolarmente propenso ad ascoltare e comprendere i propri allievi.

2. Bisogna risvegliare negli allievi il desiderio della ricerca di nuove strategie risolutive che permettano loro di allargare i propri orizzonti. Spesso questo desiderio è indotto mettendo in crisi le certezze degli allievi attraverso opportune situazioni problema.

Pietro Lurati

1. Si deve tenere sempre in considerazione il bagaglio di conoscenze già acquisito da l'allievo, in modo da facilitargli l'apprendimento di concetti superiori, favorendo il passaggio da un approccio sensoriale ad uno più astratto.

2. È importante creare e/o proporre delle situazioni d'apprendimento in modalità laboratoriale, dove l'allievo sia chiamato a lavorare, con l'aiuto di altri compagni,

su una situazione problema per il quale sia necessario trovare una nuova strategia risolutiva.

3. La riorganizzazione della conoscenza pregressa è una parte basilare della costruzione del nostro sapere.

Gabriele Caffi

1. Dovremmo insegnare agli allievi come memorizzare e ricordare. Lo studio mnemonico di nozioni o formule, sebbene ricopra una «piccola» parte della matematica insegnata nella scuola media, potrebbe essere più semplice per gli allievi se ragionassero sul loro significato. Ad esempio, la formula dell'area del trapezio:

$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$$

può essere vista come un groviglio di lettere da studiare a memoria, oppure ricostruita in modo opportuno riconducendosi all'area di un rettangolo.

Alberto Piatti

1. Il ritorno a una dimensione percettiva è rassicurante per studenti di qualsiasi età. Si può sfruttare questo aspetto per aiutare allievi in difficoltà a rinfrancarsi in una data situazione, ad esempio fornendo come aiuto un disegno, un oggetto, ecc.

2. La scelta del mondo su cui focalizzare una data attività è una scelta fondamentale, che implica forzatamente un livello di complessità diverso per l'allievo. La stessa situazione problema spesso si presta ad essere affrontata in diversi mondi. Da questo punto di vista, proporre a tutti gli allievi la stessa situazione problema permettendo loro di scegliere liberamente le strategie risolutive e il mondo in cui muoversi può essere uno strumento interessante di differenziazione didattica.

3. Il passaggio da un mondo al successivo non implica necessariamente un aumento di complessità delle situazioni affrontate. A scuola media è possibile proporre problemi molto semplici a livello simbolico, così come situazioni molto complesse a livello percettivo. Se pensi ad esempio che tutti gli Elementi di Euclide sono basati esclusivamente su un approccio di tipo percettivo basato sulle costruzioni geometriche. In questo senso è interessante esplorare i limiti di ciascun mondo, proponendo ad esempio situazioni molto complesse a livello percettivo, come potrebbero essere alcune costruzioni geometriche molto complesse da realizzare con riga e compasso.

4. Nello sviluppo dei procetti è fondamentale riuscire a possedere ed essere in gradi di confrontare strategie risolutive diverse per un problema dato. Quando fate risolvere una situazione problema ai vostri allievi fate in modo di evidenziare le diverse strategie emerse (giuste o sbagliate che siano) in modo che posano essere discusse, confrontate ed eventualmente corrette. Concretamente, al termine di un momento di risoluzione a gruppi o individuale, chiedete a più allievi contemporaneamente (che abbiano sviluppato strategie differenti) di scrivere contemporaneamente le loro soluzioni alla lavagna. Lasciate che ciascuno descriva quanto fatto, quindi fate tornare tutti al posto (in modo che le soluzioni vengano spersonalizzate) e aprite una discussione su quali siano le strategie più o meno corrette, rispettivamente efficaci e/o efficienti.

1. Agorando[1] 3 Alan Mathison Turing

Paolo Hägler e Giorgio Mainini

La macchina Enigma.

Nel 2014 è uscito il film «The Imitation game» (Il gioco dell'imitazione) che, bene secondo alcuni critici, piuttosto male secondo altri, narra la vita di Alan Mathison Turing (Londra, 23 giugno 1912 – Wilmslow, 7 giugno 1954). Qui cogliamo l'occasione per ricordare solo una delle molteplici attività di Turing: quella relativa ai suoi lavori di decifrazione dei messaggi generati dalla macchina Enigma, in dotazione all'esercito tedesco negli anni della II guerra mondiale.

Problema: decifrare il messaggio riprodotto qui di seguito sapendo che
– il testo è in italiano, scritto con l'alfabeto italiano di 21 lettere;
– i caratteri non alfabetici non sono cifrati;
– se una lettera X è sostituita dalla lettera Y, allora la Y è sostituita dalla X;
– la N sostituisce se stessa.

SM AMQQUVNM RV FHDVNZ MZVLQP LBEDM HN NMLFDB QUP LV EDPLPNFM QBAP
HNM LPCHPNGM RV QMLPSSP NPSSP CHMSV EBLLBNB PLLPDP DPZVLFDMFV
LVAOBSV RV HN OPN RPFPDAVNMFB MSTMOPFB TVNVFB; PLLM UM HNM FPLFVNM
RV SPFFHDM P LQDVFFHDM QBN QHV PTTPFFHM BEPDMGVBNV RV SPFFHDM P
LQDVFFHDM LH HNM QMLPSSM RPS NMLFDB. UM MNQUP HN DPEPDFBDVB TVNVFB
RV VLFDHGVBNV QUP RPFPDAVNMNB SM LHM PIBSHGVBNP VN QBNLPZHPNGM
RPV RMFV VNVGVMSV. SP QMDMFFPDVLFVQUP EDPQPRPNFV LBNB QBAHNV M AB-
SFP AMQQUVNP TBDAMSV, AM SP ARF UMNNB VNBSFDP SM QMDMFFPDVLFVQM
RV RVLEBDDP RV HN NMLFDB EBFPNGVMSAPNFP VNTVNVFB, BLLVM PLFPNRVOVSP
CHMNFB LV IHBSP CHMSBDM CHPLFB LV DPNRM NPQPLLMDVB. BZNV EMLLB RPS-
S'PIBSHGVBNP IVPNP RPFPDAVNMFB RMSSB LFMFB MFFHMSP *L* NPS CHMSP SM
AMQQUVNM LV FDBIM P RMS QMDMFFPDP *Q* QUP SM FPLFVNM SPZZP LHSSM
QMLPSSM RPS NMLFDB LH QHV LV FDBIM P LV QBNQDPFVGGM NPSS'PIPNFHMSP
ABRVTVQM RPS QBNFPNHFB RPSSM QMLPSSM, NPSS'PIPNFHMSP LEBLFMAPNFB
RPSSM FPLFVNM RV HNM EBLVGVBNP IPDLB RPLFDM B IPDLB LVNVLFDM P NPS-
S'PIPNFHMSP QMAOVMAPNFB RPSSB LFMFB.

Facilitazione

Il solutore timoroso di copiare male il testo proposto potrà richiederlo in formato Microsoft Word o Adobe Reader inviando un messaggio di posta elettronica all'indirizzo agorando.bdm@gmail.com, al quale vanno inviate anche le soluzioni.

Fra le soluzioni esatte sarà premiata quella più completa e meglio descritta.

1. Il verbo greco *agoràzein* è traducibile, più o meno, con *andare in piazza a curiosare*. Qui si troveranno spunti matematici presi qua e là sui quali curiosare.

Soluzione Agorando 2

Nessun lettore ha inviato soluzioni corrette al Quiz Agorando 2 nonostante la situazione proposta fosse piuttosto ricca di spunti, tanto da originare l'articolo «Tra somma e prodotto. Una coda al quiz Agorando 2» pubblicato su questo numero.

La situazione del rombo, per la suddivisione in 4 zone isomorfiche con un angolo retto, ricorda molto la trigonometria, e in effetti la prima proprietà osservabile deriva proprio da questo ambito:

$$a \langle\alpha\rangle b = a \langle 180° - \alpha\rangle b = a \langle 180° + \alpha\rangle b = a \langle 360° - \alpha\rangle b$$

Possiamo poi notare che il rombo è anche un quadrato se le due sue semidiagonali (di lunghezza $a \cdot b$ e $a + b$) hanno la stessa lunghezza. La risoluzione di quest'equazione porta alla soluzione

$$b = \frac{a}{a-1}$$

che esiste per ogni valore di a positivo (ad eccezione di 1). In questa situazione speciale possiamo notare che la lunghezza del segmento tratteggiato, la richiesta principe del quiz, è

$$a \left\langle 45 \right\rangle \frac{a}{a-1} = \frac{a\, b \sqrt{2}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{2}}{2\left(a-1\right)}$$

Per gli altri casi (quando il rombo non è un quadrato), con due metodi diversi, si ottengono le due seguenti formule equivalenti:

$$l = \frac{a\, b\left(a+b\right)}{p\, a\, b + a + b}\sqrt{1+p^2}$$

(dove p è la pendenza della retta sovrapposta al segmento tratteggiato) e

$$l = \frac{a\, b\left(a+b\right)}{a\, b \sin\alpha + \left(a+b\right)\cos\alpha}$$

Da notare che la prima formula è applicabile per alcuni angoli particolari senza necessariamente utilizzare la relazione $p = \tan\alpha$

Al variare di α la lunghezza massima del segmento tratteggiato è sempre $a + b$ o $a \cdot b$ (per $\alpha = 0°$ o per $\alpha = 90°$), mentre la lunghezza minima (che è inferiore al valore minimo tra $a + b$ e $a \cdot b$) è un po' più complessa da determinare.

Può essere ottenuta per

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{a\, b}{a+b}\right)$$

Per una figura alternativa al rombo – l'ellisse –, per la quale la lunghezza minima è il minimo tra $a+b$ e $a \cdot b$, si ottiene

$$\sqrt{\left(a\, b \cos\alpha\right)^2 + \left(\left(a+b\right)\sin\alpha\right)^2}$$

V. Segnalazioni

1. Convegno Nazionale n. 29 Incontri con la Matematica La didattica della matematica, disciplina per l’apprendimento

Castel San Pietro Terme (Bologna)
6 - 7 - 8 novembre 2015

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

NRD, Bologna

Conferenze

Venerdì 6 novembre, Centro Congressi Artemide
Tutti gli ordini scolastici

14.30-15.00 **Inaugurazione** alla presenza delle Autorità del mondo politico e accademico.
15.15-16.00 **Roberto Tortora** (Università di Napoli): Si fa presto a dire errore.
16.00-16.45 **Rosetta Zan** (Università di Pisa): Dalle regole ai perché.
16.45-17.15 Intervallo
17.15-18.00 **Maria Alessandra Mariotti** (Università di Siena, Presidente dell’IRDM): Spiegare, argomentare e dimostrare: un nodo dell’educazione matematica.
18.00-18.45 **Ennio Peres** (giocologo): da definire.

Sabato 7 novembre, Centro Congressi Artemide
Scuola Primaria e Secondaria

15.00-15.45 **Luigi Tomasi** (Università di Ferrara): FLATlandia: un’attività sulla geometria per motivare, ragionare, discutere.
15.45-16.30 **Giorgio Bolondi**, **Federica Ferretti**, **Stefania Lovece** e **Ira Vannini** (Università di Bologna), **Elena Franchini**, **Miriam Salvisberg** e **Silvia Sbaragli** (DFA-SUPSI di Locarno): La valutazione formativa nella didattica della matematica. Primi risultati di un progetto internazionale.
16.30-17.00 Intervallo
17.00-17.45 **Anna Maria Facenda**, **Daniela Rivelli**, **Paola Fulgenzi**, **Janna Nardi**, **Floriana Paternoster** e **Daniela Zambon** (Sezione Mathesis di Pesaro): Area e Perimetro: che confusione!
17.45-18.30 **Maria Flavia Mammana** (Università di Catania): Il percorso più lungo... e non mi annoio mai! Giochi, tecnologia, applicazioni nel mondo dei grafi.

Sabato 7 novembre, Salone delle Terme, Albergo delle Terme
Scuola dell'Infanzia

15.00-15.45 **Elisa Passerini** (Bologna): Mani che contano, conti in mano, a che punto siamo? Dalle teorie neuropsicologiche alle neuroscienze, quale il ruolo delle dita nell'elaborazione del numero?
15.45-16.30 **Silvia Demartini** e **Silvia Sbaragli** (DFA-SUPSI, Locarno, Svizzera): Geometria e narrazione alla scuola dell'infanzia: un «binomio fantastico».
16.30-17.00 Intervallo
17.00-17.45 **Anna Angeli** (RSDDM di Bologna): Arte e geometria delle forme. Percorso didattico multidisciplinare dalla linea alla forma, dal colore all'immagine.
17.45-18.30 **Maurizia Butturini** (Fism di Verona): Sassi e bastoncini per contare. Come incontrano i numeri i bambini del Ciad. Le domande dei loro maestri e le mie.

Seminari
Sabato 7 novembre, Sala Giardino, Albergo delle Terme
Seminari per la Scuola dell'Infanzia

08.30-09.15 **Mary Biggi** e **Morena Girolomi** (SI «Cesare Giorgini», Forte dei Marmi, LU): La matematica di Mary Poppins.
09.15-10.00 **Carla Podetti** e **Maria Maddalena Springhetti** (SI di Cavareno, TR): Quando la matematica è un gioco. Possiamo cominciare presto?
10.00-10.15 Discussione sui due seminari precedenti.
10.15-10.30 Intervallo
10.30-11.15 **Anna Cerasoli** (divulgatrice, L'Aquila): È Logico! Una fiaba che, sotto traccia, presenta i primi termini del ragionamento.
11.15-12.00 **Benedetto Di Paola** (Università di Palermo): E questo dove lo metto? Esperienze geometriche in continuità tra la scuola dell'infanzia e la scuola primaria.
12.00-12.15 Discussione sui due seminari precedenti.

Sabato 7 novembre, Centro Congressi Artemide
Seminari per la Scuola Primaria e Secondaria di I Grado

08.30-09.15 **Silvia Niero** e **Monica Canessa** (IC Mirano 2, Mirano, VE): Facciamo arte e geometria.
09.15-10.00 **Gianfranco Bresich**: da definire
10.00-10.15 Discussione sui due seminari precedenti.
10.15-10.30 Intervallo
10.30-11.15 **Lorella Campolucci** e **Danila Maori** (MIR di Corinaldo – Lego): Matematica e Lego: problemi in gioco.
11.15-12.00 **Pietro Di Martino** (Università di Pisa) e **Maria Pezzia** (I.C. di Cava Manara, PV): Valutazione (RAV) e curricolo.
12.00-12.15 Discussione sui tre seminari precedenti.

Sabato 7 novembre, Salone delle Terme, Albergo delle Terme
Seminari per la Scuola Secondaria di I e II grado

08.30-09.15 **Leonardo Sasso**: da definire
09.15-10.00 **Daniele Gouthier** (Sissa, Trieste e Isia, Pordenone – autore Pearson): I tempi della matematica. Meglio meno ma meglio.
10.00-10.15 Discussione sui due seminari precedenti.
10.15-10.30 Intervallo
10.30-11.15 **Beniamino Danese** e **Emanuele Danese** (Reinventore, VR): Senza matematica niente esperimenti.
11.15-12.00 **Giulia Signorini** (Università di Pisa): Invalsi: ora dico la mia! Una ricerca sull'opinione degli insegnanti di matematica sulle prove invalsi.
12.00-12.45 **Stefano Giacovelli** (IIS di Bologna) con intermezzo teatrale tratto da «La Lezione» di Eugène Ionesco con gli attori **Alessandro Tampieri** e **Simona Sagone**: Recupero emotivo in matematica per insegnanti di area scientifica.
12.45-13.00 Discussione sui tre seminari precedenti.

Domenica 8 novembre, Sala Giardino, Albergo delle Terme
Seminari per la Scuola dell'Infanzia

08.30-09.15 **Cristiana Redolfi** e **Saida Rossetto** (SI di Rallo di Tassullo, TR): Solide idee e geometrici pensieri.
09.15-10.00 **Bruno D'Amore** (Università Distrital di Bogotà): L'importanza dell'apprendimento «ingenuo» della matematica nella scuola dell'infanzia.
10.00-10.15 Discussione sui due seminari precedenti.
10.15-10.30 Intervallo
10.30-11.15 **Pamela Martinetti** (SI di Avegno, Bassa Vallemaggia, Canton Ticino): Un percorso artistico con la geometria.
11.15-12.00 **Ilaria Giancamilli**, **Alessandra Renieri** e **Silvia Benvenuti** (Università di Camerino) **Monia Mattioli** (Scuola di Danza «Mi La Dance», Serra de' Conti): Matematica in tuta.
12.00-12.15 Discussione sui due seminari precedenti.

Domenica 8 novembre, Centro Congressi Artemide
Seminari per la Scuola Primaria e Secondaria di I grado

08.30-09.15 **Alice Lemmo** (NRD, Bologna) e **Andrea Maffia** (INVALSI): «0,98×0,84 sarà un numero grande»: difficoltà nella stima.
09.15-10.00 **Anna Cerasoli** (divulgatrice, L'Aquila): Tutti in festa con pi greco.
10.00-10.15 Discussione sui due seminari precedenti.
10.15-10.30 Intervallo
10.30-11.15 **Miglena Asenova** (NRD di Bologna): Aspetti semiotici e semantici dell'uso delle costruzioni geometriche alla scuola primaria.
11.15-12.00 **Gianluca Gabrielli** (Università di Macerata) e **Maria Guerrini** (IC 20, Bologna): 150 anni di problemi. Insegnare sul crinale tra la matematica e la storia usando i problemi del passato.

12.00-12.15 Discussione sui due seminari precedenti.

Domenica 8 novembre, Salone delle Terme, Albergo delle Terme
Seminari per la Scuola Secondaria di I e II grado

08.30-09.15 **Linda Giampieretti** (Università di Bologna): L'affascinante mondo delle forme: la penna 3D per imparare costruendo e manipolando.
09.15-10.00 **Alice Pavarani** (IISS di Fidenza, Parma) e **Maria Ragagni** (Liceo di Casalecchio di Reno, Bologna): Esperienze di Flipped Classroom in alcune classi di scuola secondaria di secondo grado.
10.00-10.15 Discussione sui due seminari precedenti.
10.15-10.30 Intervallo
10.30-11.15 **Alessandro Sarritzu** (Lucianum di Reggio Calabria): La Musica per la comprensione dei numeri razionali ed irrazionali.
11.15-12.00 **Stefano Barbieri** e **Francesca Scorcioni** (IC «Marconi» di Castelfranco Emilia, MO) e **Michela Maschietto** (Università di Modena e Reggio Emilia): Costruzioni con riga e compasso: approccio alla geometria piana.
12.00-12.15 Discussione sui due seminari precedenti.

Informazioni

Ufficio Cultura - Comune di Castel San Pietro Terme (BO)
P.zza XX Settembre, 4 - Castel San Pietro Terme (BO) - 40024
Dal lunedì al venerdì: ore 9.00 - 13.00 (giovedì anche 15.00 - 17.45)
Tel. 051.6954127 /.150 - FAX 051.6954179 - cultura@cspietro.it

Siti:
http://www.cspietro.it
http://www.dm.unibo.it/rsddm
http://www.incontriconlamatematica.org
http://www.incontriconlamatematica.net

Il Convegno è aperto a tutti, non essendo a numero chiuso, quale che sia il giorno d'arrivo.

L'iscrizione avviene direttamente durante il Convegno. Non si accettano pre-iscrizioni di singoli a meno che il pagamento non sia effettuato dalla scuola. A ciascun partecipante si richiede un contributo di 65 euro (studenti con libretto 40 euro).

2. Recensioni

Bruno D'Amore. (2015). ***Arte e matematica. Metafore, analogie, rappresentazioni, identità tra due mondi possibili.*** **Prefazione di Claudio Cerritelli. Bari: Edizioni Dedalo, pp. 520, illustrato a colori. ISBN 9788822041760.**

Perché un matematico si occupa di arte, in particolare di arte figurativa? D'Amore risponde senza esitare. La creazione matematica, come quella artistica, è un atto di fantasia. Il matematico, però, non può inventarsi quello che vuole e procedere irrazionalmente. La sua creazione è un prodotto del pensiero logicamente coerente, ma del tutto libero, contrariamente a ciò che succede nelle altre scienze, che sono limitate dalla natura, dalla materia specifica. Così come succede con una grande opera d'arte (figurativa, musicale, letteraria ecc.), i risultati più belli della matematica suscitano meraviglia e sono pure eleganti, una particolare eleganza di pensiero. L'opera di un artista può essere semplicemente osservata – e in questo caso se ne ricava un giudizio soggettivo – oppure può essere interpretata, cogliendone, se esiste, l'atto di fantasia coerente che la regge. L'autore sostiene che un grande artista è anche un matematico, perché, consapevolmente o no, la sua creazione è in stretta relazione con il linguaggio matematico. In altre parole, l'automatismo gestuale dell'artista ha una sua logica matematica. D'altra parte, oggi, la semiotica del gesto è molto studiata nel contesto della didattica della matematica, nella quale si dimostra come questo aspetto sia importante anche nei processi di apprendimento.

La mia breve introduzione dovrebbe stimolare il lettore ad avvicinarsi con nuovo spirito all'arte figurativa e a compiere, con l'aiuto di questa nuova opera di D'Amore, un rinnovato viaggio attraverso i secoli, osservando le produzioni artistiche con occhi nuovi. Il lettore non specialista, colui che ha sempre visitato le mostre d'arte ricavando essenzialmente impressioni epidermiche, scopre un nuovo mondo: le opere d'arte gli si dichiarano in una diversa dimensione, retta da una struttura matematica soggiacente che rende più significative le loro componenti, fin nei particolari mai (o non sufficientemente) considerati prima d'ora. La meraviglia e lo stupore crescono di pagina in pagina: se ne vorrebbe sapere sempre di più. Si giunge anche a riconsiderare l'arte contemporanea, così astratta e informale, al punto da non essere generalmente capita. Nella nuova ottica indicata dall'autore, anche certe opere che solitamente mettono in imbarazzo i visitatori (pensiamo ad esempio a quelle dei grandi come Pablo Picasso, Salvador Dalì, Joan Miró, René Magritte, Vassily Kandinsky, Max Bill, Paul Klee…, tanto per intenderci) d'un tratto si rivelano comprensibili nella loro meravigliosa coerenza interna. Ci stupiscono nel mostrarci la loro faccia finora ai più sconosciuta.

Le oltre 500 pagine ricche di illustrazioni a colori – un vero miracolo nel difficile panorama dell'editoria italiana – riescono a dare, pur nei limiti di un unico volume, un quadro abbastanza completo dell'intera produzione artistica. Il testo scritto è notevole e se ne apprezzano il rigore, la ricchezza della documentazione, i diversi aspetti culturali così sapientemente amalgamati. Ogni tanto, dove è il caso, l'autore introduce inserti matematici, sempre molto chiari e rigorosi, preziosi spunti, ad esempio, per costruire situazioni didattiche originali dall'indubbio valore culturale.

Per diverse ragioni, non avrebbe senso presentare qui l'elenco dei contenuti presi in considerazione. Intanto perché le pagine, oltre che a essere numerose, sono anche fitte di informazioni testuali e figurali; poi perché, volendo sintetizzare, si finirebbe per togliere l'originalità dell'approccio, allo stesso tempo storico, artistico e matematico. Ogni lettore troverà cose che già conosceva, ma molte – veramente molte – informazioni del tutto nuove. Per questo, la lettura è arricchente e il piacere intellettuale indotto è di rara intensità.

Non è un libro per soli appassionati d'arte: è per tutti, insegnanti compresi, che da queste pagine possono estrarre una moltitudine di spunti adatti a variare le lezioni e ad accrescerne il tasso culturale, inteso nel senso più profondo. (G. Arrigo)

Stefano Beccastrini e Maria Paola Nannicini. (2014). ***Una grande avventura intellettuale. Piccola storia della matematica per insegnanti curiosi.*** **Prefazione di Silvia Sbaragli. Modena: Digital Index Editore. Formato digitale su: www.digitaldocet.it/storia-della-matematica-per-insegnanti-curiosi**

Continua incessante la produzione dei due autori di Laterina (Valdarno), questa volta con un saggio di storia della matematica, molto personale e simpaticamente libero da preconcetti e da luoghi comuni. Ecco il perché del sottotitolo: non i soliti contenuti raccontati nel solito modo, ma una serie di *flash*, liberamente scelti e visti con occhi aperti sulla cultura in senso lato e con l'intento dichiarato di divertire il lettore: «giocare e pensare con la propria testa» e «lo scopo di questo libro è di aiutarli [gli insegnanti] a evadere da tale prigione» sono slogan significativi, fra i molti, del modo col quale gli autori conducono il loro racconto. La prigione dalla quale gli insegnanti sono stimolati a evadere possiede spesse e alte mura che sono: il sapere strettamente disciplinare, il programma ministeriale, la necessità di dare valutazioni, ecc. Situazione conosciuta, apparentemente senza possibilità di uscita. Bisognerebbe cambiare la scuola, bisognerebbe cambiare la società… Ma chi lo può fare? La soluzione potrebbe forse sorgere dal basso, a condizione che gli insegnanti, pur non contravvenendo al loro contratto di lavoro, cambiassero a poco a poco il modo di interpretare i documenti programmatici. Gli autori non si occupano esplicitamente di questa grande problematica, ma, con il loro modo di affrontare temi scelti di storia della matematica, indicano un modo diverso di fare cultura, stimolano a essere critici nei confronti di una prassi didattica che, nonostante i grandi risultati che si sono raggiunti nella ricerca sull'apprendimento – in tutti i suoi aspetti –, continua a procedere con eccessiva ripetitività, seguendo schemi ormai, almeno in parte, obsoleti.

I contenuti sono organizzati in cinque capitoli:

1. Questioni di metodo (nel quale si presenta la filosofia dell'opera)
2. La matematica antica (che spazia sulle più significative civiltà pre-romane, dall'Asia, all'Africa, all'Europa, alle Americhe)
3. Dalla matematica romana alla matematica moderna (dal tramonto di Alessandria, alla matematica di Roma antica, a quella del medioevo europeo e degli arabi, alla conquista della prospettiva nell'arte figurativa, per poi soffermarsi su personaggi – fra gli altri – come Cardano e Tartaglia, Descartes, Viète, Pascal, Fermat e Galois, sugli astronomi Copernico e Kepler, sul grande umanista Galileo Galilei)
4. Domande antiche e nuove (questioni riguardanti – fra le altre cose – filosofia, fisica, tecnica, scienza dei computer).
5. Una grande avventura intellettuale (che riassume il messaggio lanciato dagli autori).

Un libro non solo per «insegnanti curiosi» (come indicato nel sottotitolo), perché tutti gli insegnanti devono essere curiosi – e lo sono –, in misura diversa. Un libro quindi per ogni lettore curioso e per ogni insegnante che desidera appagare nuove curiosità. (G. Arrigo)

Progetto grafico
Bruno Monguzzi
Prestampa
Taiana
Stampa
Veladini

Redazione
Laboratorio di didattica della matematica
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera

Telefono
091 814 18 21/22/24
Fax
091 814 18 19
gianfranco.arrigo@span.ch

Amministrazione
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera
Fax
091 814 18 19

Esce due volte all'anno
a maggio e a dicembre

Abbonamento annuo
SFR 30
€ 16

Bollettino dei docenti di matematica
70

In questo numero: epistemologia dei numeri negativi di J.-C. Pont; progressioni geometriche di S. Buscherini; valutazione e pregiudizi nell'insegnamento di A. Tomasini; Teoria dei giochi di G. Gambarelli; l'evoluta di una curva di F. Daddi; coda al quiz Agorando 2 di P. Hägler e G. Mainini; problemi per tutti di G. Arrigo; due puntate di Gocce di didattica di A. Piatti; Agorando 3 di P. Hägler e G. Mainini; segnalazioni e recensioni.

ISBN 978-88-86486-92-7
Fr. 18.–

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport