A cura
del Laboratorio di didattica della matematica

Bollettino dei docenti di matematica

71

Dicembre
2015

Ufficio
dell'insegnamento medio
Centro di risorse
didattiche e digitali

Bollettino
dei docenti di matematica
71

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport

ISBN 978-88-99453-00-8

Bollettino dei docenti di matematica 71

Dicembre
2015

Ufficio dell'insegnamento medio
Centro di risorse didattiche e digitali

Indice

Prefazione

Il numero presenta subito un articolo di Fernando Hernández Rojo, amico della nostra pubblicazione e appassionato studioso, fra l'altro, di quel magnifico complesso palaziale andaluso, noto col nome di Alhambra, che si trova a Granada. Dello stesso autore abbiamo già pubblicato uno scritto sul numero 36 (maggio 1998) e il presente contributo può essere considerato un approfondimento. Da queste pagine gli insegnanti possono ricavare nuove idee e nuovi motivi geometrici per variare le attività in classe.

La sezione Varia continua con il secondo contributo di Stefano Buscherini (dopo quello apparso sul numero scorso), di carattere storico, pure ricco di spunti per la didattica. Infine proponiamo un gustoso contributo di Silvio Maracchia sul ruolo che la matematica assume nel grande mondo della cultura.

Con grande piacere presentiamo una nuova sezione, denominata «Amarcord», che si propone di ripresentare articoli apparsi sul Bollettino parecchi anni fa e ancora utili agli insegnanti alla ricerca di nuovi spunti da sfruttare in classe. L'articolo di apertura è di Edoardo Montella, la cui pubblicazione sulla nostra rivista risale al numero 3 dell'ottobre 1981. A modo suo, l'autore presenta uno squarcio storico sull'algoritmo della moltiplicazione.

La sezione Didattica inizia con un impegnativo contributo teorico di Maura Iori che va ad esplorare la consapevolezza dell'insegnante della dimensione semio-cognitiva dell'apprendimento della matematica. Segue l'articolo di Ernesto Colizzi, sintesi del suo ottimo lavoro presentato per il conseguimento del master al DFA di Locarno, che ci introduce in un originale percorso didattico liceale sul calcolo combinatorio, con largo impiego delle nuove tecnologie.

Chiude un contributo di Lorella Maurizi, insegnante verbanese di scuola primaria, che di tanto in tanto ci arricchisce con le sue riflessioni didattiche colte nella pratica di classe.

Paolo Hägler e Giorgio Mainini ci stimolano con la quarta proposta di Agorando: un gioco, sì, ma di stampo matematico!

Segnaliamo, per concludere, alcune interessanti recensioni inviateci da B. D'Amore.

I. Varia

1. La simmetria nell'ornamentazione geometrica nazarita dell'Alhambra

Fernando Hernández Rojo[1]

Traduzione dallo spagnolo di Livia Taddei.

Symmetry is considered one of the most logical and safest procedures in the order and composition of a visual space. To study the Alhambra's geometric ornamentation, I used a generative system of composition (a conceptual tool developed specifically for this purpose), based on plane symmetry (plane crystallographic) groups.

Introduzione

L'arte è parte integrante di tutte le culture e la sua analisi critica dipende dalle condizioni ideologiche, sociali, religiose, storiche e geografiche da cui si sviluppano le tradizioni artistiche delle molteplici civilizzazioni.

Il Regno dei Nasridi (1238-1492), che seguì al periodo *almohade*, fu l'ultimo stato islamico della Penisola iberica, unico sopravvissuto alla *Reconquista* cristiana. Il suo fondatore, Ibn Nasr, dette vita a un regno situato all'estremo sud di Al-Andalus, che includeva una stretta frangia costiera, da Tarifa (a ovest) fin oltre Almería (a est) e dal Mediterraneo (a sud) fino a poco al di là di Granada a nord. Sotto il suo governo il Regno di Granada si convertì in una grande metropoli dotata di nuove moschee, edifici e bagni pubblici. A partire dalla metà del XIII secolo, Granada divenne una città principesca e assunse una grande importanza sia dal punto di vista amministrativo che culturale, distinguendosi in particolare per la sua architettura (il Cuarto Real de Santo Domingo, la Almunia del Generalife, il Palacio de los Abencerrajes, il Generalife, il Palacio de Comares, il Nuevo Mexuar, le Salas de la Barca, Sala de los Abencerrajes, Sala de Dos Hermanas, il Patio de los Arrayanes e il Patio de los Leones, il Salón del Trono della Sala de Ambajadores e la Torre de las Infantas), con contributi innovativi nel disegno e nella decorazione sia degli spazi interni sia delle facciate dei suoi edifici.

La Alhambra è uno dei complessi monumentali musulmani più importanti e di maggior bellezza ancora esistenti e visitabili, frutto dell'influenza culturale esercitata dalla civilizzazione araba nella Spagna medievale.

La cultura nasride dell'Alhambra era socialmente e scientificamente molto evoluta. A partire dal X sec., sia la teoria estetica sia lo studio e l'applicazione

1. Università di Granada, Spagna. «Desde el estudio de los elementos de simetría de los mosaicos de la Alhambra hasta la creación de nuevos diseños», en *Arte y geometría*: Editorial Universidad de Granada, Spain, 2010.

della geometria conobbero un significativo sviluppo, rivelandosi determinanti per le manifestazioni artistiche di quegli ambiti in cui pensiero e arte islamica entrano in contatto. La posteriore influenza sulle arti decorative si manifesta attraverso la complessa ornamentazione geometrica applicata all'architettura.

Non disponiamo quasi di nessuna documentazione inerente al legato culturale tramandatoci dei granadini di quell'epoca, anche se sappiamo che nell'ambito matematico studiarono Euclide (la geometria fu pertanto analizzata da un punto di vista teorico e si vide arricchita da diverse generalizzazioni e studi critici) e Tolomeo, con il fine di migliorare le proprie conoscenze di astronomia, e che la loro aritmetica, basata su un principio posizionale, era importata dall'India.

L'arte della Spagna musulmana è caratterizzata dalla sua capacità di assimilazione delle tradizioni artistiche dei territori conquistati e dall'abilità nell'esprimere in modo peculiare lo spirito dell'Islam, che considerava la manifestazione artistica come una sintesi di elementi di svariata provenienza e che ha lasciato la sua caratteristica impronta in tutta l'Asia occidentale, il Nordafrica e l'Europa meridionale.

Ci occupiamo qui dello studio dei mosaici che formano parte della decorazione geometrica dell'Alhambra e in particolare dell'utilizzazione dei poligoni regolari, più facili da costruire (quadrati, esagoni regolari, ecc.), ma anche meno frequentemente utilizzati nella decorazione dell'Alhambra. Per la realizzazione di spazi armoniosi e per la loro decorazione, oltre ai poligoni (per i quali veniva tagliato un tassello specifico per ogni singolo alicatado[2]), l'Alhambra presenta complicate trame geometriche, fra cui ad esempio quelle rappresentate mediante i lazos[3] e l'applicazione dei canoni della sezione aurea.

Con il termine mosaico ci riferiamo alla composizione geometrica decorativa fatta con tasselli di ceramica. In seguito vedremo come il concetto di mosaico si estenda anche alla decorazione geometrica di una superficie mediante un modulo che si ripete in diverse direzioni. Definiamo piastrella un elemento di ceramica decorata, usato per realizzare mosaici (Figura 1).

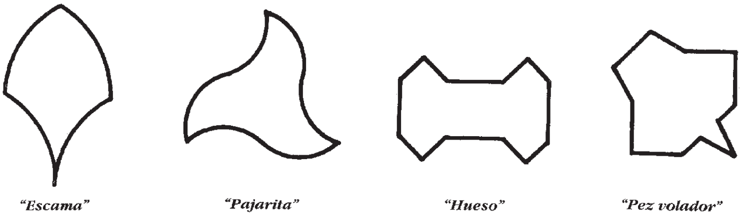


Figura 1. Poligoni nazariti. Alicatados, serie Vivo la Alhambra, 1990, pag.17.

2. «A partire dal secolo XIII, nel levante spagnolo, in particolare a Valenza, così come nel sud, a Siviglia e Granada, i vasai, sotto l'influenza musulmana, producevano lastre di argilla liscia, smaltata e colorata, ritagliate con pinze (alicates). Questo spiega il termine alicatado, dallo stile delle composizioni (...). http://it.wikipedia.org/wiki/Azulejo
3. Lazo: termine usato per indicare un tipo di decorazione geometrica artificiale formata da «nastri» che s'intrecciano metodicamente e la cui base o centro generatore è una stella di un certo numero di punte, ad esempio 8, 9, 10, 12, 14, 16 o 20, che determinano un tipo di lazo semplice. A volte ne vengono combinati due, che danno origine a lazos composti, con combinazioni di 9 e 12, 8 e 16, 10 e 20 punte. Sono invece più rare le combinazioni di 7-14 e 8-12 punte.

I rivestimenti policromi in pietra, marmo e simili, per fregi, pavimenti e mosaici, furono molto popolari sia nella cultura greca che in quella romana. Gli omayyadi e i nasridi, o i loro predecessori, gli abbasidi, adottarono rivestimenti quadrati, rettangolari, poligonali e circolari di piastrelle posati sopra nuclei di mattoni, con risultati formali apparentemente più complessi, ma ciò nonostante sempre accompagnati da un senso di sobrietà.

Nel 1980 Oleg Grabar scrive a proposito delle forme e dei valori dell’architettura e della decorazione dell’Alhambra:

[…] *la decorazione delle superfici è la caratteristica più evidente e menzionata con maggior frequenza, ma non è mai stata analizzata in modo sistematico.* […] *Dei tre motivi di base che intervengono nella decorazione, quello geometrico appare da solo e con la funzione di guida della maggior parte dei disegni con elementi vegetali* […]. *I principi geometrici chiave che intervengono sembrano essere i seguenti: la simmetria, che facilita la ripetizione di una composizione; una sola unità di composizione (in generale un quadrato o un poligono), sufficientemente piccola da risultare discreta e abbastanza semplice da potersi prestare a qualsiasi tipo di modificazione; la progressione lineare, con cui una qualsivoglia unità geometrica chiusa, come un quadrato o un circolo, può trasformarsi o venir sostituita da linee rette o spezzate di crescita infinita; la rotazione rispetto a due o più assi, proporzionando così le direzioni più importanti dell’ornamentazione.* [Grab].

Nonostante la scarsità di trattati sulla decorazione geometrica dell’arte islamica elaborati direttamente dagli artisti stessi, le opere d’arte di questo genere abbondano. Disponiamo di studi parziali sui motivi decorativi, come quelli di Marçais, Girault de Prangey e Goury-Jones, così come di varie considerazioni di più ampio respiro sulla geometria nell’ornamentazione, includendo una tesi dottorale in matematica e alcune osservazioni di ordine generale sull’ornamentazione. Studiosi quali Enrique Nuere, Gómez Moreno, Pavón Maldonado, Prieto Vives, Oleg Grabar, Creswell, Bourgoin, André Paccard, Keith Critchlow, Eva Wilson, Muller, etc. hanno riunito tutte queste considerazioni sparse, valutandole, sistematizzandole e studiandole nel loro insieme. Basilio Pavón Maldonado, nel corso delle sue molteplici ricerche storiche chiarisce alcuni aspetti della decorazione geometrica. Bourgoin analizza schemi e composizioni geometriche tratti in maggioranza da edifici islamici orientali. In Spagna il precursore di questo genere di studi è Manuel Gómez Moreno, che concepisce insieme a Prieto Vives un progetto sullo studio della geometria decorativa in cui questi sviluppa un metodo matematico e Gómez Moreno svolge ricerche sull’abilità manuale degli artisti islamici che si sommano ai lavori di Pavón Maldonado.

La decorazione caratteristica dei nasridi è costituita da tre motivi principali: epigrafico, vegetale e geometrico. Questo articolo si occupa dei motivi geometrici.

Ci poniamo le seguenti domande: che aspetto avrebbe l’Alhambra con una decorazione geometrica realizzata mediante procedimenti elettronici di applicazione del colore? Come verrebbe ricreata la decorazione geometrica piana dell’Alhambra, se per disegnarla impiegassimo le tecnologie attuali? Che tipo di risultati differenti si otterrebbero collegando fra loro elementi geometrici e nuove possibilità che utilizzino gli stessi sistemi generatori. Le opzioni offerte dall’attuale tecnologia aprono una nuova prospettiva, partendo dalla quale si può svolgere una riflessione sulla natura della ricerca artistica e scientifica.

L'articolo «Un siglo para resolver 23 problemas», di Ignacio F. Bayón (cuotidiano El País, 28 novembre 1999), si occupa dell'Alhambra e prende in considerazione le 17 possibilità di riempire un piano come uno dei problemi classici della matematica trattati da Hilbert. Fra i problemi proposti dal matematico, il diciottesimo viene dedicato a questo aspetto, includendo pure la possibilità di riempire uno spazio con poliedri congruenti o con figure tridimensionali identiche fra loro. Nel 1910 Ludwig Bieberbach dimostrò che il numero di possibilità era finito e posteriormente si giunse alla conclusione che esistono solo 17 forme semplici la cui combinazione può dar luogo a ulteriori figure complesse in grado di coprire un piano.

Simmetrie

La simmetria costituisce uno dei principi geometrici basilari che facilitano le composizioni cromatiche della decorazione geometrica dell'Alhambra. La teoria dei gruppi di trasformazioni geometriche, definisce il concetto di gruppo cristallografico e dimostra l'esistenza di 17 gruppi, per ciascuno dei quali l'Alhambra possiede almeno una rappresentazione geometrica.

Si apre così un ampio campo di ricerca in cui il binomio arte-scienza è presente in modo specifico nell'arte nazarita[4] e nello studio delle composizioni cromatiche della sua ornamentazione. La scienza e l'arte sono due modi complementari di sperimentare il mondo della natura: il primo è analitico e il secondo intuitivo. I matematici, e in particolare i fisici, pensano tramite l'immagine e utilizzano criteri estetici per determinare la coerenza delle loro ricerche.

Hermann Weyl, uno dei matematici tedeschi più importanti del XX secolo, fa riferimento alla verità e alla bellezza, collegando direttamente quest'ultima alla simmetria. Da questo genere di affermazioni nasce la profonda esigenza di una fusione tra Arte e Scienza.

Nella sua opera *Simmetria*, Weyl si avvale di metodi matematici per analizzare e descrivere; per lui la simmetria equivale all'armonia, all'equilibrio, alla giusta proporzione. Inoltre, in termini di connotazione geometrica la teoria della simmetria è intesa come una parte della geometria che, operando sullo spazio euclideo, ingloba come trasformazioni tutte le isometrie e il cui interesse specifico è lo studio dei gruppi di isometrie che lasciano invarianti le figure.

In questa teoria s'includono i gruppi di simmetria puntuale o di Leonardo da Vinci, i gruppi dei fregi, i gruppi di simmetria del piano, la teoria dei mosaici e la simmetria spaziale[Wey].

Karl Gerstner, Richard Paúl Lohse e Shizuko Yoshikawa usano elementi dalle spiccate carratteristiche matematiche per i loro dipinti. Altri artisti, come Rune Mields e Antón Stankowski, per le loro composizioni fanno uso della teoria dei numeri o anche, come Gerd Von Graevenitz, Hermann de Vries e altri, della teoria aleatoria.

4. NdT. In questo articolo viene usato l'aggettivo spagnolo *nazarita*, indicante la dinastia che governò il Regno di Granada dal 1240 al 1490.

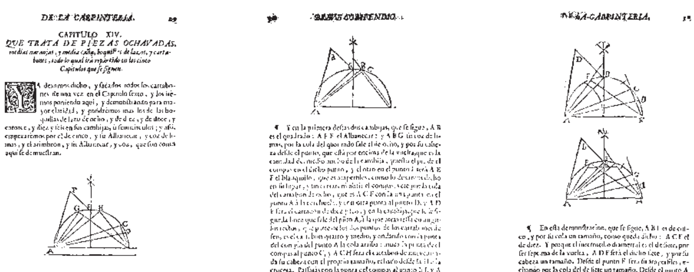
Ci sono però anche molti altri artisti che si sono opposti a queste considerazioni teoriche. L'artista e scienziato tedesco Herbert W. Franke [Fran], afferma che creare opere di valore estetico appoggiandosi sulle suddette teorie non risulta affatto semplice.

In tale contesto l'interrogativo che si pone è in che misura la generazione matematica delle forme apra nuove possibilità all'espressione e alla rappresentazione artistica. L'uso di strumenti e altri supporti conduce a nuove tecniche e ciò spinge a nuove forme di pensiero.

Lo strumentario medievale

Per conoscere il «come» del processo creativo, ovvero la parte strumentale che partecipa alla creazione dei disegni formanti la decorazione geometrica nazarita, dobbiamo risalire a manoscritti e riproduzioni di miniature delle tecniche di costruzione del XIV secolo o allo studio realizzato da Enrique Nuere [Nue] del primo manoscritto di Diego López de Arenas (1619), sulla facilità di realizzazione delle armature dette *de lazos*[5] a prescindere dalla complessità del risultato. Il processo di composizione dei lazos è molto simile a quello delle piastrelle dai disegni geometrici, con la particolarità che, oltre al carattere decorativo, il loro percorso serve da elemento strutturale e da rinforzo per gli angoli delle strutture interne dei tetti.

La decorazione a *lacería*, in complesse combinazioni geometriche di stelle ad incastro, è la caratteristica specifica della lavorazione in legno dell'epoca corrispondente al Regno dei Nasridi. Sorprende la perizia di costruzione dei tracciati geometrici, progettati esclusivamente con giochi di squadra, data l'assenza degli odierni compassi articolati (Figura 2).


DE LA CARPINTERIA.

CAPITULO XIV.

QUE TRATA DE PIEZAS OCHAVADAS,

Figura 2. Pagine 29, 30 e 31 del Breve Compendio de la Carpintería de lo Blanco, di Diego López de Arenas.

Prieto Vives [PV] e Gómez Moreno [GM], esperti e difensori dell'esattezza delle leggi matematiche che regolano i lazos, ne spiegano il funzionamento con grande chiarezza.

5. Lazo indica un tipo di ornamentazione creata a partire da segmenti rettilinei che s'intrecciato fra loro creando geometrie basate sui poligoni regolari.

Nel XVII sec., López de Arenas raccoglie nei suoi manoscritti le norme conosciute, anteriori alla sua epoca o in uso in quel periodo, e spiega come costruire le strutture interne dei soffitti (di lima bordón, par hilera, par y nudillo, llana, de lazo, …) mediante l'uso di piani come elemento ausiliare e l'uso delle squadre (tre tipi di squadra dotate di angoli specifici per il tracciato delle ruote di lazos). Gli artigiani dell'epoca, abilissimi nell'uso delle squadre, rendevano possibile il tracciato dei biselli nelle parti di legno da unire in modo da formare determinati angoli. Usando semplicemente una riga e un compasso si può disegnare una qualsiasi delle stelle che compongono i lazos.

All'interno della varietà di tracciati sviluppati dall'Arte musulmana, le caratteristiche di questi disegni fatti a squadra sono distintive e facilmente riconoscibili.

Il falegname parte da un reticolo, le cui basi sono costituite dalle travi, che impone significative limitazioni già a priori. Una volta scelto un tracciato concreto, quest'ultimo va costruito mediante tavole, che oltre a essere sempre diritte (salvo rare eccezioni), appartengono a un insieme di elementi paralleli che strutturano il soffitto (Figura 3). Solo in rare occasioni questi elementi coincidono senza difficoltà con le componenti del tracciato.

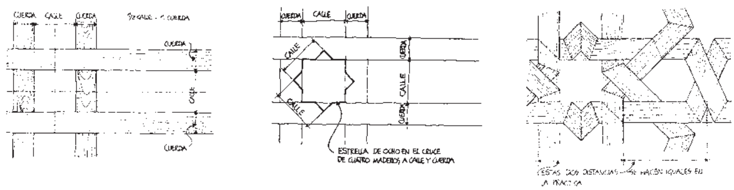


Figura 3. Disegni di Enrique Nuere.

Il punto di partenza dei tracciati è un serie caratteristica di poligoni stellati. La stella che dà inizio a ognuno di questi motivi è circondata da una serie di elementi che costituiscono le cosiddette «ruote di lazos». Il gioco basico lo costituiscono le stelle a otto, nove o dieci punte. Partendo da queste stelle possono venir create nuove serie che dipendono dal gioco di base: dalla stella a otto punte si forma quella a sedici, da quella di sei si forma quella a dodici e da quella di dieci punte si forma quella a venti. (Figura 4).

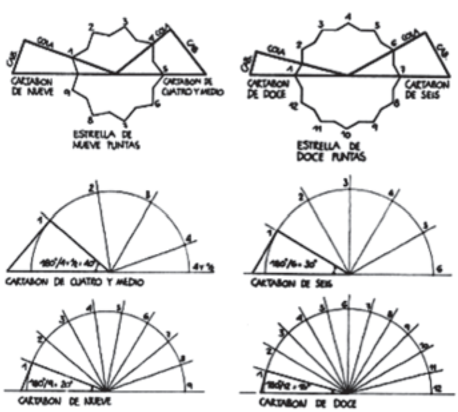


Figura 4. Particolare della pagina 106 della Carpintería de lo Blanco.
Lettura disegnata del primo manoscritto di D. López de Arenas, in Enrique Nuere.

Lo strumentario attuale

Oggigiorno la riga e il compasso sono stati sostituiti dai computer e dalle nuove tecnologie per la produzione d'immagini. Un tempo, a seconda di come venivano usati, erano i propri utensili a marcare i risultati dei lavori, mentre attualmente le nuove tecnologie permettono di potenziare l'aspetto concettuale modificando e reinterpretando la realtà dell'idea. L'uso dei computer e di altri supporti di carattere concettuale matematico (teoria dei gruppi), ha permesso di sviluppare procedure e tecniche che consentono al designer-artista nuove forme di pensiero (Figura 5).

Figura 5. Disegno di alcuni elementi grafici dei gruppi cromatici.

Teoria dei gruppi

Sin dagli albori delle civilizzazioni la geometria viene utilizzata per la decorazione con disegni regolari. La simmetria è considerata da sempre il processo più logico e appropriato per organizzare lo spazio visivo. Dal paragone fra due forme o ragioni scaturisce la proporzione, che non si manifesta solo nelle dimensioni semplici o lineali, ma anche in tutto ciò che ci circonda. Se prendiamo in considerazione un piano geometrico, con le corrispondenti trasformazioni geometriche, e lo applichiamo al campo delle arti, costatiamo l'efficacia della fusione tra queste due discipline. Perché sono così numerose le culture che si sono servite di disegni basati su strutture geometriche? Differenti studi realizzati da antropologi mostrano come gli aspetti strutturali di un disegno vengono utilizzati in una cultura per determinare ciò che è corretto o culturalmente appropriato. La simmetria è un tipo di ordine disposto su una superficie piana, che genera tre categorie: finita, unidimensionale e bidimensionale [Washb]. Partendo dal presupposto che in una determinata cultura vengono considerate appropriate solo un numero limitato di simmetrie, per capirle e usarle è necessario analizzarne e studiarne previamente le strutture basiche.

Se la struttura di un disegno illustra il suo uso, l'analisi della simmetria dimostra che è uno strumento di classificazione piuttosto soddisfacente.

La classificazione dei disegni in base alle loro simmetrie così come quella degli oggetti per il loro colore, si concentra su di un solo attributo, lo studio della cui persistenza o trasformazione permette di determinare in maniera più sistematica il comportamento abituale di correlazione di questi modelli. Le classificazioni geometriche descrivono l'organizzazione di un modello senza tener conto degli aspetti culturali. Gli studiosi di geometria non classificano i tipi di simmetria in base alla loro complessità, bensì utilizzando strumenti matematici come la teoria dei gruppi.

Gruppi cristallografici piani

Lo studio delle forme geometriche basiche, delle equipartizioni del piano, dei raggruppamenti di circonferenze tangenti, delle reti e dei punti, ecc. costituisce l'impianto della teoria dei sistemi di simmetria sui cui poggia la cristallografia. Nello specifico, si considera la simmetria come un insieme di trasformazioni isometriche che mantengono invariato un oggetto geometrico. L'uso dei principi geometrici di simmetria per descrivere e capire le forme dell'ornamentazione (nel senso di decorazione geometrica), rappresenta l'integrazione delle due discipline anteriormente citate, la matematica e il disegno. La limitazione della tipologia di disegni descrivibili mediante questi principi è dettata dall'esigenza di una ripetizione regolare di moduli, schemi o motivi. I disegni devono quindi venir collocati su di una superficie in funzione di movimenti geometrici rigidi ma con il vantaggio di essere facilmente manipolabili grazie all'elaborazione digitale.

Così come alcuni test chimici specifici permettono l'analisi obbiettiva e il confronto della materia di ricerca, la descrizione dei disegni secondo le loro simmetrie geometriche consente lo studio sistematico della funzione e del significato che ricoprono all'interno di un determinato contesto culturale. Le simmetrie geometriche sono presenti in tutti i disegni ripetuti di forme regolari. Ai mosaici piani periodici vengono associati 17 gruppi di simmetrie: i «gruppi cristallografici piani».

Di norma questi esempi di simmetria finita comprendono solo una piccola parte dell'ambito simmetrico conosciuto e definito da studiosi di geometria e cristallografi. La simmetria studia uno degli aspetti più affascinanti e interessanti della geometria: le trasformazioni (genesi dei processi creativi dinamici). Lo studio dei casi di simmetria ci consente di meglio comprendere il processo creativo dell'ornamentazione, così come gli spazi e le trasformazioni che generano le composizioni.

La varietà delle combinazioni di simmetria è stata classificata in modo sistematico e oggettivo. Attraverso i movimenti che lasciano invariata una figura, possiamo classificare tipi e modelli. I movimenti geometrici ci indicano la genesi delle figure, partendo dall'osservazione di traslazioni, riflessioni, rotazioni o espansioni, da cui emergono concetti basici quali assi, vettori, centri, angoli, ecc. Elementi questi che si manifestano nei tetti, nelle pareti, nei pavimenti, ecc., ossia nell'attrattiva estetica dell'Alhambra, spingendo alla sua contemplazione in uno sforzo per carpire l'origine formale della sua bellezza. Questa analisi specifica permette la classificazione della struttura soggiacente alle decorazioni. Il tipo di decorazioni descrive il modo in cui le parti (elementi, motivi, unità di disegno), sono organizzate globalmente mediante le simmetrie geometriche ripetitive. La classificazione rivela come si strutturano gli elementi del disegno; i tipi di simmetria che questo metodo illustra possono venir usati per descrivere altri disegni le cui parti si ripetono con regolarità. Nella maggior parte delle decorazioni il disegno ripetuto (modulo), è piano e adattabile a forme curve, così che i disegni ripetuti di dimensione infinita possano venir denominati «bande o strisce ripetute» (fregi) o mosaici (Figura 6).

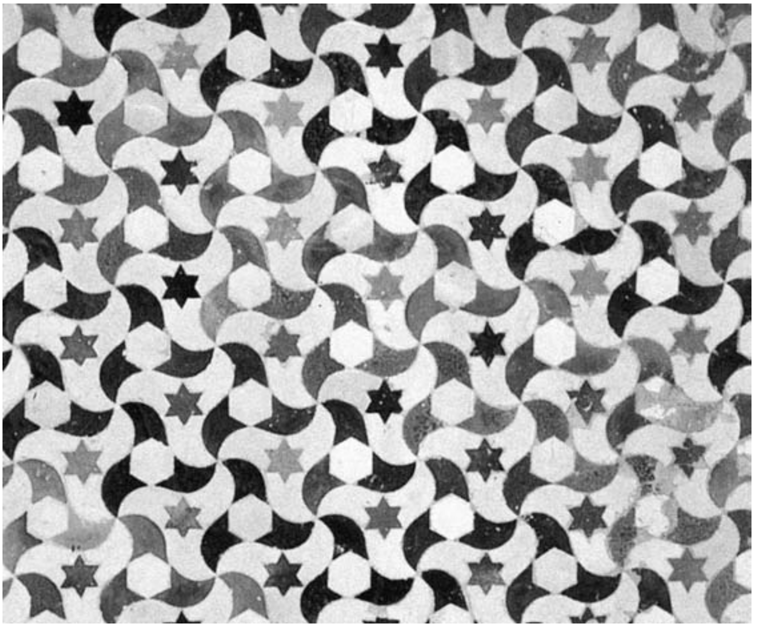


Figura 6. Fregio e mosaico di *alicatado* (tassellato). Arte nazarita, XIV secolo. Patio de los Arrayanes. Palacio de Comares. La Alhambra, Granada.

Per conoscere a fondo la genesi di questo tipo di decorazioni, i disegni finiti unidimensionali e bidimensionali vanno classificati in base a diagrammi di flusso e a altre descrizioni dei movimenti di simmetrie e colori. L'analisi strutturale del disegno, secondo le simmetrie che generano i modelli, permette la descrizione oggettiva della loro collocazione. Così come i biologi usano il concetto di evoluzione per spiegare i cambiamenti successivi della forma di vita nel tempo e i fisici si avvalgono del concetto di gravità per spiegare i movimenti di massa, gli antropologi e gli storici dell'arte si sono avvalsi del concetto di stile per spiegare gli aspetti formali delle composizioni artistiche.

Lo stile è uno dei possibili criteri validi per analizzare e classificare tipologie. Già in passato, ricercatori come gli antropologi Kroeber [Kro] e Schapiro [Schap] basarono le loro descrizioni stilistiche sulla differenza tra forma e funzione.

Attualmente in quest'ambito di studio sono in molti a cercare uno modo più sistematico di classificare i concetti di struttura per definire lo stile (Wobst [WOB] Salvador [Sa], Hodder [Hod]). La scienza utilizza la classificazione di unità studiate in modo definito ed esplicito, per osservare in maniera sistematica i fenomeni e le descrizioni di regolarità degli oggetti di studio.

Nel 1525 Albrecht Durer scrisse un trattato di geometria descrittiva intitolato *Der Unterweysung Messung, und mit der Zirckel Richtsheit in Ebenen Linien und ganzen Korpen* (Istruzioni per la misurazione con riga e compasso di linee, piani e di tutti i tipi di corpi), in cui sviluppa il tema dei poligoni regolari utilizzati dagli artisti del suo tempo in Germania.

Un secolo più tardi Johannes von Kepler approfondisce ulteriormente gli studi sui poliedri regolari e nel 1611 scrive una monografia sul fiocco di neve, che l'astronomo e matematico considerava come lo studio della combinazione di cerchi su un piano e di sfere nello spazio.

La ricerca di Kepler può venir considerata come la fase che precede l'analisi tramite la cristallografia, una sorta di studi preliminari alle osservazioni del XIX secolo, quando venne raccolta tutta l'informazione matematica sui disegni ripetuti. All'inizio del XIX secolo Hessel descrisse i 32 tipi più importanti di cristalli (disegni ripetuti tridimensionali), ancora usati attualmente.

Bravais, Jordan, Sohncke, Barlow e Schoenflies ampliano la lista a 230 disegni ripetuti tridimensionali, posteriormente pubblicati da Evgraf S. Fedorov nel 1891. Questi gruppi spaziali si riducono a 17 se si fa riferimento al piano.

L'enumerazione dei 17 gruppi cristallografici piani pubblicata da Fedorov appare solo in Russia e, curiosamente, viene considerata di scarso interesse per la cristallografia. Nel 1920 G. Polya e P. Niggli riaffermano l'esistenza dei 17 gruppi cristallografici piani. A partire da questo momento inizia la ricerca sulle decorazioni periodiche del piano nelle opere d'arte di culture che si distinguono per questo tipo di realizzazioni e che costituiscono l'inizio della Teoria dei Gruppi. La seconda edizione della teoria dei gruppi di Speiser (1927), ne fa menzione per la prima volta e pone l'accento sull'aspetto matematico dei risultati ottenuti. La loro pubblicazione genera una controversia tra i gruppi di studiosi.

D. S. Dye [Dy] pubblica *Chinese Lattice Designs*, che contiene uno studio di 14 modelli riuniti dalla cultura cinese. Una volta scoperte [PG] nell'Alhambra le 17 rappresentazioni geometriche dei corrispondenti gruppi, l'*Asociación de Profesores deMatemáticas de Andalucía* pubblica (1986) una monografia sulla geometria dell'Alhambra in cui vengono studiati per la prima volta i 17 modelli presenti [MoA].

Questa tappa, denominata Preistoria della Teoria dei Gruppi, nasce a partire da quest'ultima monografia, nella quale viene coniato il concetto di «Teoria ingenua dei gruppi» che utilizza le 17 strutture basiche per la creazione di alcuni disegni simmetrici piani, oggi definiti mosaici periodici.

Visione matematica attuale della decorazione islamica

L'uso dei principi geometrici di simmetria per la descrizione e la comprensione delle forme nell'ornamentazione rappresenta l'integrazione delle discipline della matematica e del disegno citate in precedenza. L'unica limitazione dei tipi di disegno descrivibili mediante questi princìpi è che devono attenersi alla ripetizione regolare di moduli, modelli o motivi. Corrispondono a disegni che vanno situati su una superficie in funzione di movimenti geometrici rigidi, con il vantaggio di essere manipolabili con il computer.

Così come gli esperimenti chimici specifici permettono l'analisi obbiettiva e il confronto di oggetti, la descrizione dei disegni in funzione delle loro simmetrie geometriche rende possibile lo studio sistematico delle sue funzioni e del significato all'interno del suo contesto culturale. Le simmetrie geometriche, essendo presenti in tutte le ripetizioni dei disegni di una forma regolare, si possono considerare universali.

Che tipo di ordini differenti posso esistere in uno stesso sistema di disegno? La simmetria è un tipo di ordine, ma non è l'unico sistema ordinato che contribuisce alla struttura completa di un determinato sistema di disegno: può caratterizzarsi per una struttura simmetrica, ritmica, ripetitiva, ecc. Ognuno di essi è un tipo differente di ordine che codifica i diversi tipi d'informazione.

Quando la struttura è organizzata in suddivisioni specifiche che si ripetono nella forma e nella dimensione (però non nelle tonalità né nel colore), la struttura generata viene definita struttura di ripetizione multipla. Questi presupposti ci permettono di stabilire la seguente classificazione: Rosoni (2 tipi), Fregi (7 tipi) e Mosaici (periodici: 17 tipi):

– Se la rete è formata di poligoni regolari identici che si muovono in due direzioni, si tratterà di un mosaico regolare.
– Nei casi in cui la rete forma due o più poligoni regolari con dimensioni che permettono loro di adattarsi bene l'uno all'altro, si tratta di mosaici semiregolari.
– Se la rete è formata di poligoni congruenti, può trattarsi di mosaici periodici o non periodici.

Nel disegno dei mosaici, una volta studiato un disegno modulare, si può procedere tramite sviluppi combinati di simmetrie, di traslazioni e/o di rotazioni, alla formazione di un numero notevole di variazioni che hanno lo stesso motivo.

Da un punto di vista filosofico i mosaici possono essere considerati come combinazioni elementari di un certo numero di modelli archetipici. Ogni poligono ha il proprio archetipo e una sua specificità; pertanto, ciascuna delle possibili combinazioni di questi elementi che riempiono uno spazio rappresenta rapporti di leggi di occupazione tra questi archetipi. Ognuno di essi diviene una lezione-archetipo a seconda della sua collocazione e del modo in cui è disposto (Figura 7).

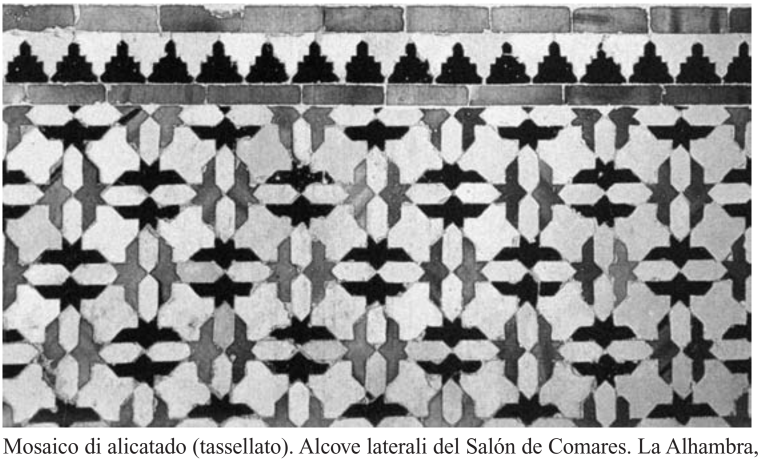


Figura 7. Mosaico di alicatado (tassellato). Alcove laterali del Salón de Comares. La Alhambra, Granada.

Progettazione dei tasselli

Le forme che occupano una superficie del piano vengono denominate in diverse maniere: tasselli, piastrelle, strutture, griglie, mosaici, etc. Nel caso dell'Alhambra, trattandosi di figure geometriche (astratte), i vertici, i rapporti tra i punti, le linee e i lati della superficie costituiscono le corrispondenze. Nel caso di applicazioni all'arte figurativa, come ad esempio in alcune opere di Escher, le articolazioni dei poligoni regolari occupano una superficie di dimensioni esatte. Se provassimo a costruire un pavimento completamente rivestito di piastrelle, questo non presenterebbe né spazi vuoti né sovrapposizioni. La questione si pone anche quando vogliamo rivestire uno zoccolo con delle piastrelle e, in generale, quando desideriamo ricoprire una superficie con tessere di qualsiasi tipo. Si può provare a creare mosaici con svariate combinazioni di poligoni regolari che abbiano i lati di uguale lunghezza, nel qual caso le soluzioni sono molto numerose.

I risultati che seguono, ben noti nel campo matematico (vedansi le ricerce [Cox] e [AC-PG-RG]), permettono di unificare i criteri in una classificazione internazionalmente riconosciuta.

I mosaici regolari

I triangoli equilateri, i quadrati e gli esagoni regolari sono gli unici poligoni regolari che permettono una tassellatura completa del piano euclideo. Nel caso in cui i tasselli posseggano un centro di simmetria, chiameremo poligoni nei centri quelli ottenuti unendo mediante segmenti rettilinei i centri dei tasselli che circondano consecutivamente un vertice.

Analogamente, unendo i punti medi dei lati dei poligoni che circondano un vertice e che fungono da tasselli, si ottengono i poligoni nei punti medi. Quando la tassellatura del piano euclideo viene effettuata ripetendo un solo poligono regolare, questi circondando i vertici in modo tale che la distribuzione dei tasselli di ogni vertice sia sempre la stessa e che i poligoni nei centri e nei punti medi siano regolari, allora diremo che abbiamo costruito un mosaico regolare (Figura 8).

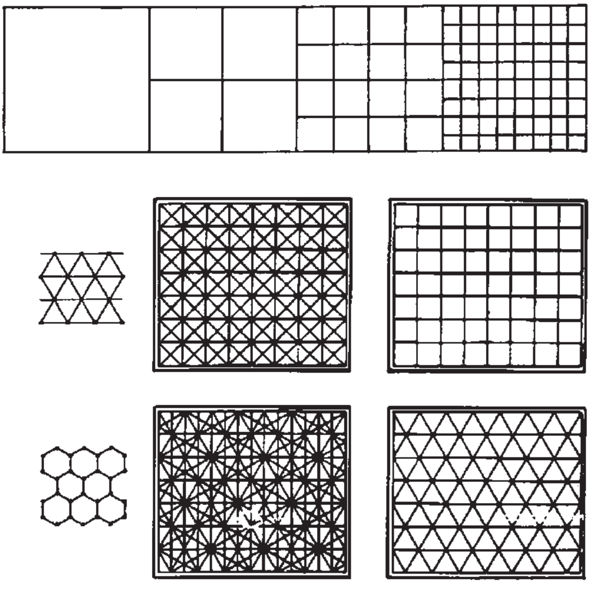


Figura 8. Mosaici regolari.

Mosaici semiregolari

Definiamo mosaici semiregolari le tassellature eseguite con due o più tipi di poligoni regolari e in cui esista un solo tipo di poligono nei punti medi. Il numero minimo di poligoni regolari necessari per circondare un vertice è 3 e il massimo è 6. I mosaici semiregolari sono solo 8 (Figura 9).

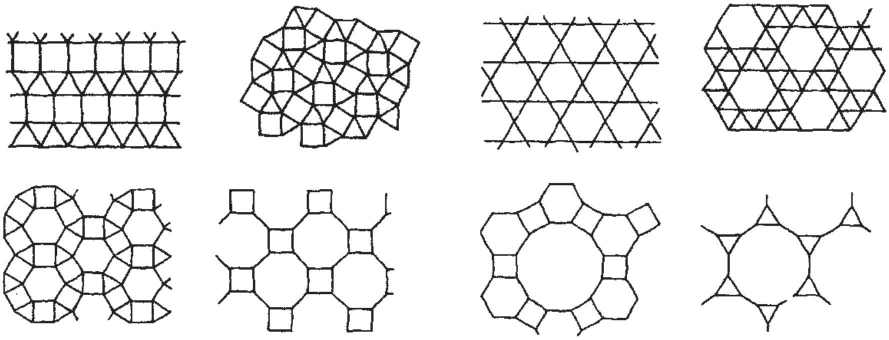


Figura 9. Mosaici semiregolari.

La condizione che vi sia un solo tipo di poligoni nei punti medi equivale a dire che la distribuzione dei poligoni regolari intorno a qualsiasi vertice è sempre la stessa, dato che in un qualsiasi altro caso varierebbe il tipo di poligono nei punti medi.

In [GRU-Sh2: 474] viene dimostrato che non si possono formare mosaici utilizzando un solo tipo di poligono convesso con più di sei lati; tutti i quadrilateri e i triangoli riempiono il piano. La creazione di disegni a mosaico mediante poligoni concavi è relativamente facile. Se provassimo a costruirli con forme a stella costateremmo che non è possibile formare un mosaico utilizzando solamente poligoni regolari stellati.

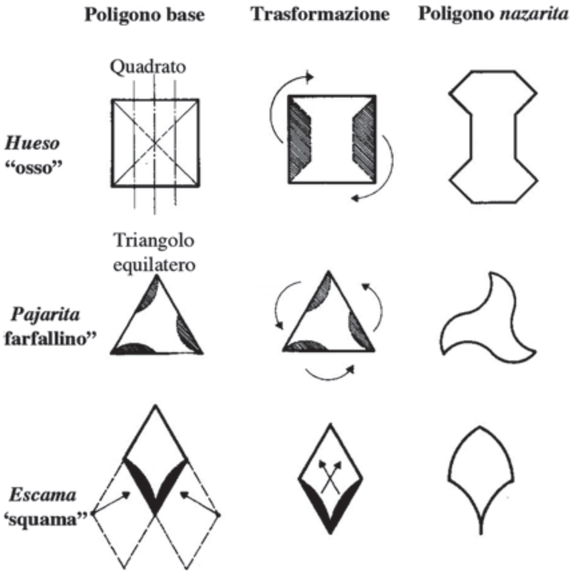


Figura 10. Poligoni nazariti. Rivista monografica Epsilon, 1987, pag. 54.

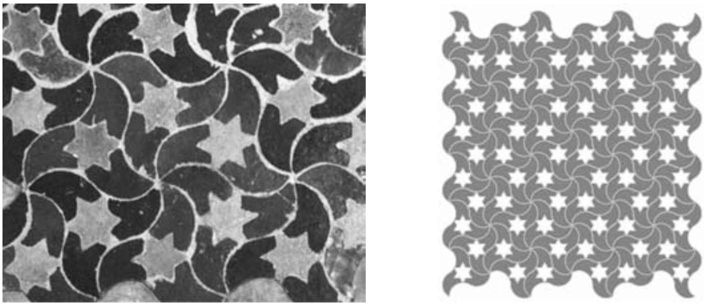


Figura 11. Alicatado, Arte Nazarita, XIV-XV secolo. La Alhambra, Granada, Museo Nacional de Arte Hispano-Musulmán, nº 4610.

Analisi di alcuni mosaici dell'Alhambra

Nei mosaici dell'Alhambra i tasselli sono formati da «poligoni nasridi» (fig. 10-11). Per poterli analizzare vanno indicati, caso per caso, il «tasselo di base» e una regione generatrice, ovvero le porzioni minime a cui si applica il gruppo di trasformazioni corrispondenti e per le quali utilizziamo la notazione cristallografica internazionale. Il risultato è la formazione di un mosaico completo (Figure 12 e 13).

Montesinos Amilibia	Internacional (abreviada)	Bossard	Polya	Niggli	Speiser	Fejes Toth	Shubnikov-Koptsik	Wells Bell&Fletcher
T	p1	p1	C_1	C_1^I	C_1,Abb.17	W_1	(b/a)1	1
S2222	p211(p2)	p2	C_2	C_2^I	C_2,Abb.18	W_2	(b/a):2	2
S333	p3	p3	C_3	C_3^I	C_3,Abb.29	W_3	(a/a):3	13
S442	p4	p4	C_4	C_4^I	C_4,Abb.26	W_4	(a:a):4	10
S632	p6	p6	C_6	C_6^I	C_6,Abb.32	W_6	(a/a):6	16
M	cm	pm1	D_1Kg	C_s^{III}	C_s^{III},Abb.21	W_1^1	(a/a)/m	8
A	p1m1(pm)	p1m	D_1KK	C_s^I	C_s^I,Abb.19	W_1^2	(b:a):m	3
K	pg	p1g	D_1gg	C_s^{II}	C_s^{II},Abb.20	W_1^3	(b:a):$\tilde{b}$	4
D2$\overline{22}$	cmm	pm2	D_2KgKg	C_{2v}^{IV}	C_{2v}^{IV},Abb.25	W_2^1	(a/a): 2.m	9
D$\overline{2222}$	pmm	p2m	D_2KKKK	C_{2v}^I	C_{2v}^I,Abb.22	W_2^2	(b:a):2.m	5
D22	pmg	p2g	D_2KKgg	C_{2v}^{III}	C_{2v}^{III},Abb.24	W_2^3	(b:a):m:$\tilde{a}$	6
P22	pgg	pg2	D_2gggg	C_{2v}^{II}	C_{2v}^{II},Abb.23	W_2^4	(b:a):$\tilde{b}$:$\tilde{a}$	7
D$\overline{333}$	p3m1	p3m	$\dot{D}_3$	C_{3v}^I	C_{3v}^I,Abb.31	W_3^1	(a/a):m.3	15
D3$\overline{3}$	p31m	pm3	D_3'	C_{3v}^{II}	C_{3v}^{II},Abb.30	W_3^2	(a/a).m.3	14
D$\overline{442}$	p4mm(p4m)	p4m	$\dot{D}_4$	C_{4v}^I	C_{4v}^I,Abb.27	W_4^1	(a:a):4.m	11
D4$\overline{2}$	p4gm(p4g)	pm4	D_4'	C_{4v}^{II}	C_{4v}^{II},Abb.28	W_4^2	(a:a):4$\cdot\tilde{a}$	12
D632	p6mm(p6m)	p6m	D_6	C_{6v}^I	C_{6v}^I,Abb.33	W_6^1	(a/a):m.6	17

Figura 12. Tabella di equivalenze delle notazioni cristallografiche. Rivista monografica Epsilon, 1987, pag. 67.

Per creare ulteriori disegni è necessario disporre di un tassello di base per la progettazione «senza colore» (sopprimendo colore, iscrizioni, decorazioni floreali, ecc.). Infatti, partendo dal tassello di base e utilizzando un metodo determinato di colorazione, si possono generare nuove composizioni anch'esse interamente classificate rispetto al loro numero.

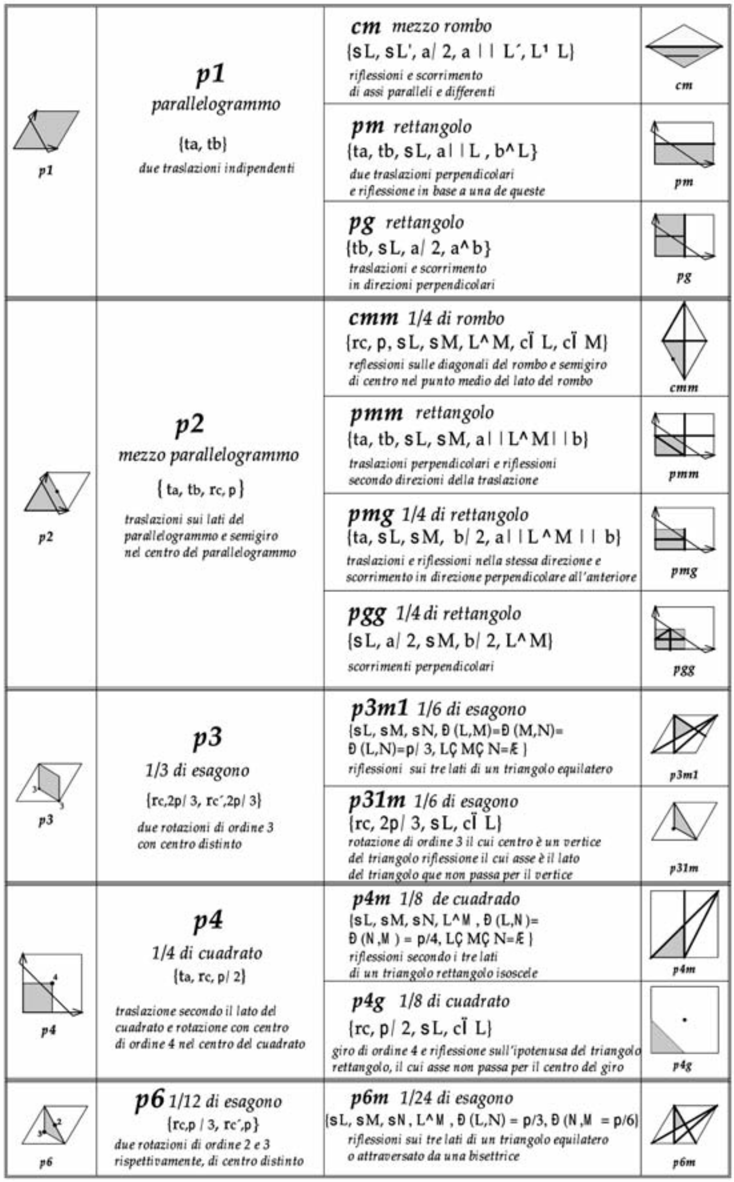


Figura 13. Tavola dei Generatori della regione unità dei 17 gruppi cristallografici piani.

I passi da seguire in ogni singolo caso consistono nell'analisi della forma dei tasselli, nello studio della simmetria del mosaico e nella classificazione secondo il gruppo cristallografico piano a cui appartiene, nell'esposizione dell'insieme generatore, e infine nel disegno di due tasselli di base e di una regione generatrice. In seguito, per mezzo del computer, si possono ottenere i disegni, tracciati in bianco e nero a partire dalle forme basiche dei 17 gruppi anteriormente indicati. Il tassello di base non è unico e pertanto, se ne modificassimo la forma, partendo dallo stesso disegno basico otterremmo nuovi modelli isomorfici per un'altra forma di tassello basico (Figure 14-15-16).

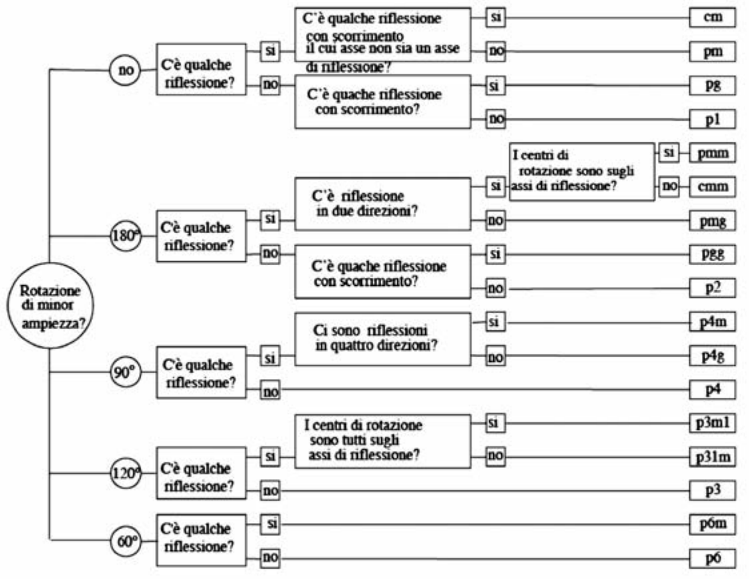
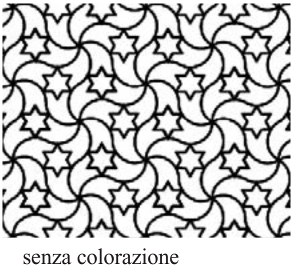
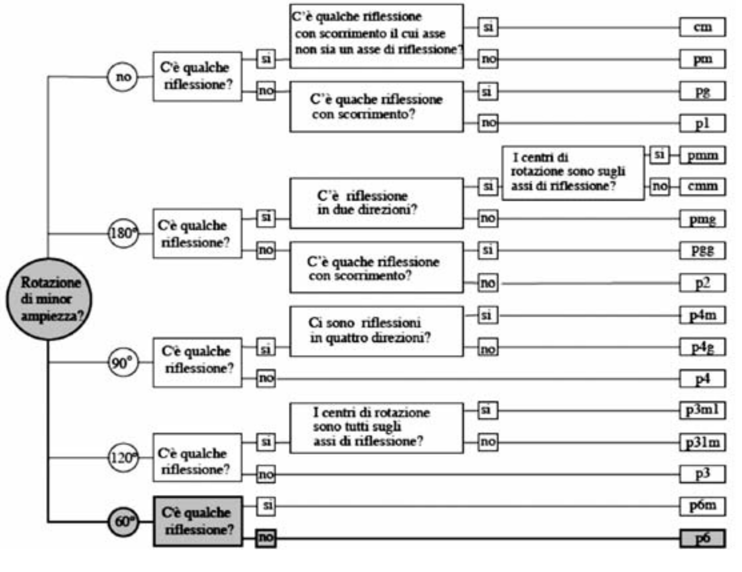


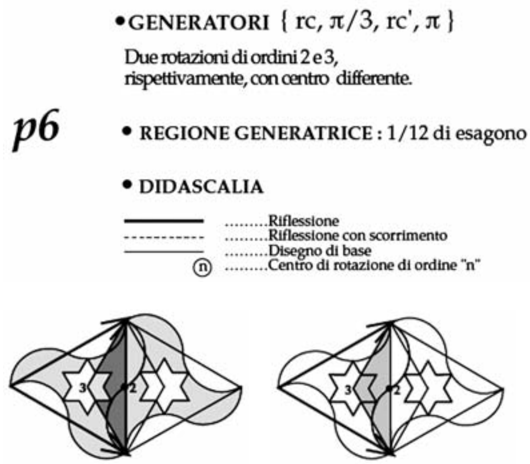
Figura 14. Algoritmo di classificazione dei 17 gruppi.

cromatico



senza colorazione





cromatico senza colorazione

Figura 15. Gruppo p6.

Per ogni singolo caso, l’analisi delle simmetrie porta alla scelta di uno degli infiniti tasselli di base. Alcuni degli esempi anteriori mostrano come variano i disegni semplicemente scegliendo un altro tassello di base, nonostante dal punto di vista matematico si tratti di disegni isomorfi poiché vanno associati al medesimo gruppo bicolore (Figura 17).

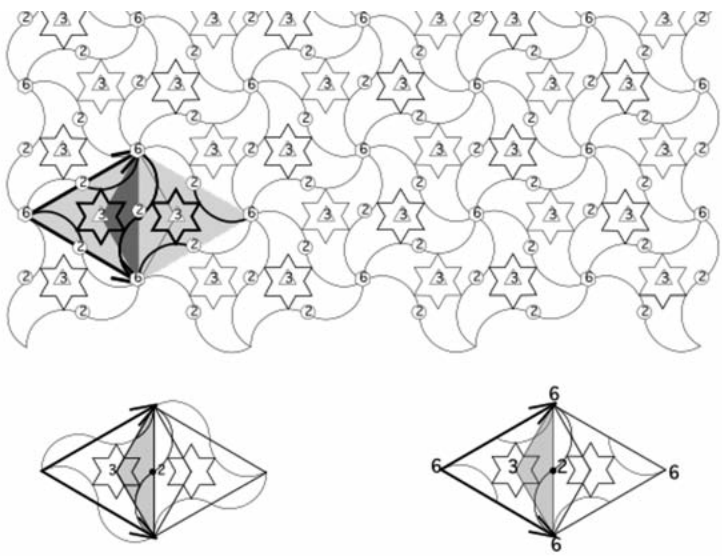
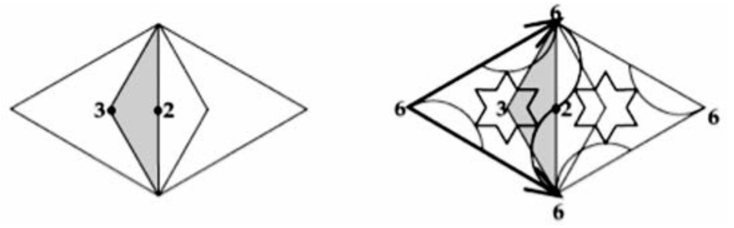
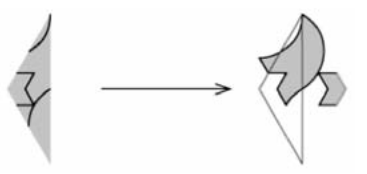


Figura 16. Schema delle simmetrie.

I passi da seguire nel nostro caso specifico sono lo studio sistematico dei sottogruppi dell’indice 2 del gruppo associato a mosaico senza colori. Gli elementi di simmetria del sottogruppo mantengono invariati i colori del mosaico, mentre quelli che non appartengono al sottogruppo subiscono una permutazione. La fase seguente consiste nella colorazione in bianco e nero e in ugual misura del tassello di base (il colore viene steso mediante l'applicazione dell'algoritmo anteriormente descritto; Figura 17).



Regione generatrice unità



Due tasselli di base per «G».

Tassello di base «G1»
partendo dalla seconda Forma per «G»

REGIONE GENERATRICE UNITÀ: parallelogrammo
RETE DI PUNTI: esagonale
DOMINIO FUNDAMENTAL: parallelogrammo

Figura 17. Regione unità e tasselli basici risultanti.

Si analizzano le simmetrie del mosaico risultante e per ultimo si classificano nuovamente indicando il gruppo quoziente che lo ha generato, oltre agli elementi di simmetria del gruppo associato al nuovo disegno (Figura 18).

Figura 18. Gruppi bicolore associati al p6. Le rotazioni di ordine 3 mantengono i colori, quelle di ordine 2 invertono i colori.

Osserviamo il mosaico da analizzare e il primo problema che ci si pone è la sua classificazione tramite un algoritmo che ci aiuti in modo sistematico. È necessario e conveniente conoscere un sistema di generatori per ogni gruppo che ci aiuti nella loro classificazione (Figure 19 e 20).

Figura 19. Mosaici bicolore risultanti p6/p3, nella colorazione precedente.

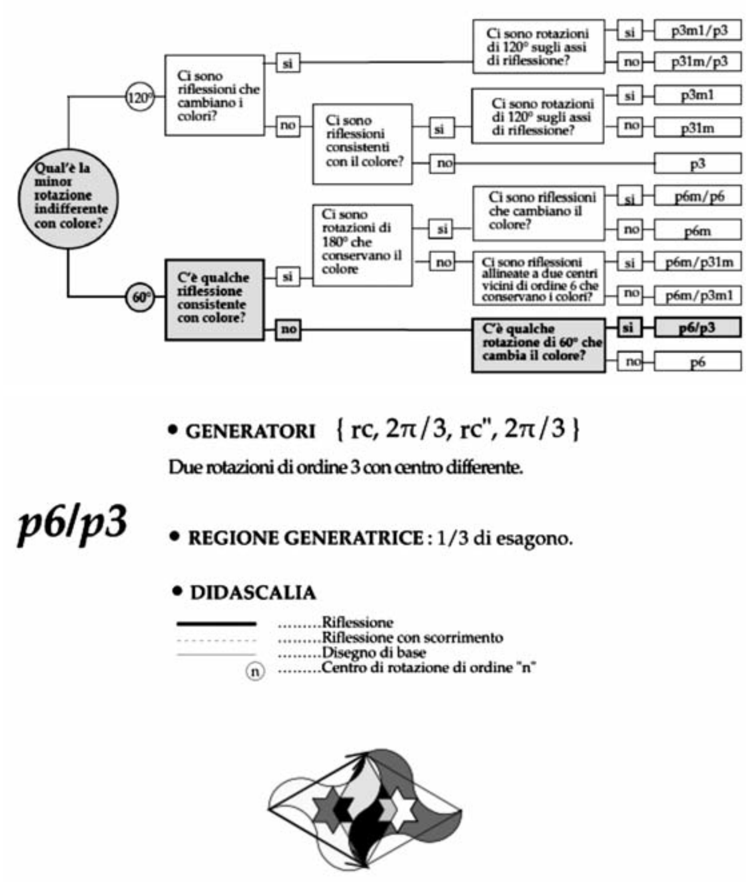


Figura 20. Algoritmo di classificazione del gruppo p6/p3.

Mediante la tecnica utilizzata, il numero di creazioni artistiche è infinito e ciò può essere d'aiuto nel campo della plastica così come nell'applicazione e nello sviluppo nell'ambito del disegno grafico, industriale (piastrelle, stoffe, ecc.).

Bibliografia

[AC-PG-RG] Alsina Catalá C., Perez Gomez R. e Ruiz Garrido C. (1989). Simetría Dinámica. *Síntesis*, Madrid.

[Dy] Dye D. S. (1974). *Chinese Lattice Designs*. Nuova York: Dover.

[Fran] Franke H. W. (1989). Mathematics As an Artistic-Generative Principle. *Leonardo*, 25-26.

[Fe-To] Fejes-Toth L. (1964). *Regular Figures*. Nuova York: Pergamon Press.

[Grab] Grabar O. (1980). *La Alhambra: iconografía, formas y valores*. Madrid: Alianza Editorial, 187-194.

[GM] Gomez Moreno M. (1966). *Primera y Segunda Parte de la Regla de la Carpintería hecho por D. López de Arenas*. Edizione facsimile con introduzione e glossario di Manuel Gómez Moreno, Instituto. Madrid: Valencia de Don Juan, 11.

[Gru-Sh1] Grümbaum B. - Shepard G. C. (1977). Ten Eigthy- one Types of Isohedral Tilings in the Plane. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 82*, 177-196.

[Hod] Hodder, I. (1982). *Symbols in Action: Ethnoarchaeological Studies of Material Culture*. Cambridge: Cambridge University Press.

[Kro] Kroeber A. L. (1975). *Style and Civilization*. Ithaca: Cornell University Press.

[MoA] Montesinos Amilibia J. M. (1987). Caleidoscopios y Grupos Cristalográficos en la Alhambra. *Rivista Epsilon 9*, 9-30.

[Nue] Nuere E. (1985). *La carpintería de lo Blanco*. (Lettura disegnata del primo manoscritto di Diego López de Arenas). Madrid: Instituto de la Juventud. Promoción Comunitaria, 35.

[PG-1] Pérez Gomez R. (1990). *Alicatados, Colección «Vivo la Alhambra».* Granada: Proyecto Sur de Ediciones, 15.

[PV] Prieto Vives A. (1977). El Arte de la Lacería. *Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos*, Madrid, 45.

[PV-GM] Prieto Vives e Gomez Moreno. (1921). *El lazo, Decoración Geométrica Musulmana*. Madrid.

[Sa] Salvador M. L. (1978). *Yerra Dailege. Kuna Women's Art*. Albuquerque: Maxwell Museum of Anthropology.

[Schap] Schapiro, M. B. (1970). The Rotation of Drawings. *Illiterate Africans Journal of Social Psycology*, 52, 17-30.

[Spe] Speiser A. (1927). *Theorie der Gruppen von Endlicher Ordnung*. Berlino: Springer.

[Truc] Truchet S. (1987). The Tilings Pattern of Sebastiaen Truchet and the Topology of Structural Hierarchy por C.S. Smith y P.Boucher. *Leonardo*, vol. 20, 373-385.

[Washb] Washburn, D. K. (1984). The Usefulness of Typological Analysis for Understanding Aspects of Southwestern Prehistoric: Some Conflicting Returns from Design Analysis. In «Regional Analysis of Prehistoric Ceramic Variation: Contemporary Studies of the Cibola Whitewares». *Anthropological Research Papers, nº 31*. Tempe (Arizona): State University A. Sullivan and J. Hantman, 120-134.

[Washb-Croo] Washburn D. K. e Crowe D. W. (1988). *Symmetries of Culture (Theory and Practice of Plane Pattern Analysis)*. Seattle and London: University of Washington Press.

[Wey-1] Weyl H. (1952). La Simetría. Princeton University Press. (1974) Barcelona: Ediciones de Promoción Cultural.

[Wob] Wobst M. (1977). Stylistic Behavior and Information Exchange. In «For the Director: Research Essays in Honor of James B. Griffin» pubblicato da C. Cleland, *Antropological papers,*

nº 61. Ann Arbor: University of Michigan, 317-342.

2. I gettoni d'argilla mesopotamici: i primi numeri della storia

Stefano Buscherini

This article aims at describing the evolution of reckoning technologies in the Ancient Middle East, in particular clay tokens, the small clay artifacts that the ancient people used as first «numbers» to keep count of the amount of goods stored in the warehouse of the villages. The change in the token system occured with the emergence of urban communites: more tokens shapes were needed to represent the great variety of products; the bullae, a clay envelope, was developed and clay tokens were placed in the cavity. The last steps in these recording systems were the clay tables and the invention of writing. These archeological finds confirm the hypothesis that there were three main steps in the evolution of counting: one to one correspondence, concrete counting and abstract counting.

I miei due figli, Pietro ed Eleonora, frequentando la prima classe elementare, hanno impiegato durante le ore di matematica i numeri in colore, o regoli, per imparare a contare[1]. Vederli maneggiare le 10 piccole sbarrette di plastica dai diversi colori mi ha riportato alla mente le mie nozioni sull'uso nell'antico Vicino Oriente di strumenti dalla funzione molto simile, che possedevano forme diverse a seconda del materiale che doveva essere conteggiato: ad esempio, una giara di olio, una misura di grano, della birra o della lana.

Infatti nel corso dei miei studi alla facoltà di Storia Orientale più di una volta ho affrontato il problema dell'introduzione, da parte delle popolazioni mediorientali, di «gettoni o contrassegni di argilla»[2] denominati dalla letteratura scientifica *clay tokens* e del loro impiego per il calcolo e la registrazione dei beni posseduti o scambiati da gruppi di individui.

Solitamente, quando si pensa ai primi metodi usati per la scrittura dei numeri, si considera il sistema di numerazione egizio e quello sumero[3], mentre si tende a tralasciare il lungo periodo nel quale gli uomini dell'antichità più remota hanno usato strumenti diversi.

Approfondendo perciò nuovamente l'argomento, questa volta da un punto di vista più matematico[4], mi sono accorto che il confronto che stavo facendo tra il modo di operare dei ragazzi della prime classi elementari[5] e quello delle popolazioni che si sono susseguite nei primi millenni precedenti la nascita di Cristo era già stato affrontato da De-

1. Per questo strumento didattico, vedi D'Amore 2002 e la bibliografia lì offerta.
2. Anche il termine *calculus* viene usato per indicare questo strumento.
3. Per il concetto e la definizione di sistema numerico, vedi il relativo capitolo in Capello, Ferrari e Padovan 1990.
4. Scrive Boyer (1990: 1) nella prima pagina del suo libro dedicato alla storia della matematica: «gran parte di ciò che oggi va sotto il nome di matematica è il risultato di uno sviluppo di pensiero che originariamente era accentrato attorno ai concetti di numero, grandezza e forma».
5. In relazione ai gettoni di argilla, vedi le considerazioni fatte da Damerow (1988) sul concetto di numero e sulla sua rappresentazione, partendo dai lavori di Piaget.

nise Schmandt-Besserat nel corso del suo progetto di ricerca, iniziato nel 1969 e discusso con la pubblicazione di vari articoli a partire dalla fine degli anni '70[6], sull'uso dei gettoni di argilla nel periodo che va dal IX fino alla fine del IV millennio a.C.

I suoi studi l'hanno portata ad affermare che le scoperte archeologiche suffragano l'ipotesi di un'evoluzione del conteggio attraverso tre fasi: la corrispondenza uno a uno, il *concrete counting* e l'*abstract counting*[7].

La prima di queste consiste nel far corrispondere ad ogni gruppo di oggetti una pari quantità di «contrassegni», ma evidenzia un'assenza del concetto di numero. Nello stadio successivo la rappresentazione della quantità varia a seconda di ciò che si vuole contare e il concetto di numero viene legato all'oggetto stesso. È solo nell'*abstract counting* che il concetto di numero viene separato dall'elemento particolare, permettendo così di applicare la sua rappresentazione «universalmente», ovvero a qualsiasi entità concreta o astratta.

Per ognuna di queste tre fasi gli scavi archeologici hanno restituito delle testimonianze, che nel primo caso consistono in ossa di animali o corna di cervi con tacche sulla superficie risalenti circa al 30.000 a.C.[8]

Alla seconda fase si devono invece associare i gettoni di argilla che sono stati ritrovati nella fascia che si estende dalla Siria all'Iran e il cui scopo era di contare specifici beni o merci, ad ognuno dei quali era associata una particolare forma del gettone, come il cilindro, il cono, la sfera, il disco, il tetraedro, per un totale di circa 20 tipi.

La loro produzione era molto semplice: erano creati prendendo un piccolo pezzo di argilla (la grandezza dell'oggetto finale poteva arrivare fino a 5 cm) che veniva fatto rotolare tra i palmi delle mani o tra le punta delle dita. Quindi, dopo averne a volte inciso la superficie, erano cotti per dar loro una maggiore durevolezza[9], in modo che mantenessero l'informazione anche per lunghi periodi di tempo.

Schmandt-Besserat[10] ha compilato anche una cronologia relativa alla loro origine e alle modifiche che subirono, fissando la loro comparsa attorno al 8.500-8.000 a.C. contemporaneamente ai primi tentativi di addomesticamento degli animali

6. Confronta, ad esempio, Schmandt-Besserat 1987. I suoi studi sull'argomento hanno preso come punto di partenza i lavori di Oppenheim (1959) e Amiet (1966) che avevano dimostrato, rispettivamente, l'esistenza nelle città di Nuzi e di Susa di un sistema di registrazione per mezzo di gettoni di argilla. Secondo quanto scritto dalla stessa Schmandt-Besserat, la prima fase del suo progetto di ricerca si è incentrata sull'osservazione delle collezioni di piccoli artefatti di argilla (simili per forma a quelli descritti precedentemente da Oppenheim e Amiet) presenti nei musei degli Stati Uniti, dell'Europa e del Vicino Oriente, per la stesura di un loro catalogo.
7. Per un approfondimento del concetto di «contare» ed «enumerare», vedi Capello, Ferrari e Padovan 1990: 16-20.
8. Confronta Boyer 1990: 2-5; Bagni 1996, I: 2-3.
9. Alcuni test compiuti su dei campioni hanno provato che i gettoni di argilla erano cotti ad una temperatura compresa tra i 500° C e gli 800° C (Schmandt-Besserat 1982: 873).
10. Schmandt-Besserat 1987: 46. Precedentemente la stessa Schmandt-Besserat (1978: 42-44) aveva creato una tabella, un grafico e una cartina che dimostrano in quanti e quali siti furono trovati i gettoni. L'arco cronologico del loro impiego e i luoghi del loro ritrovamento dimostrerebbero che il sistema era usato a partire dal IX millennio a.C. in una zona i cui estremi andavano dalle rive meridionali del Mar Caspio a Khartun e dall'Asia Minore fino al fiume Indo.

e di coltivazione delle piante[11]. Ciò fa supporre che il motivo della loro introduzione fosse collegato ad un aspetto economico, ovvero al salvataggio delle informazioni relative al mantenimento, all'organizzazione e la redistribuzione dei beni che gli uomini riuscivano a produrre. La loro presenza in un sito archeologico indicherebbe quindi il momento in cui in una comunità la quantità delle informazioni era talmente aumentata che non era più possibile ricordarla in modo mnemonico, ma era necessario fissarla su un qualche supporto durevole.

Le testimonianze archeologiche suggeriscono una maggiore diffusione dell'uso di questo strumento verso il 6.000 a.C.[12], mentre è verso la fine del IV millennio (3.500-3.100 a.C.) che si ebbe sia un'evoluzione della sua forma sia la modificazione della tecnica di registrazione.

Aumentarono forme e sottotipi[13], mentre alcuni vennero forati per far passare al loro interno una cordicella che li legasse alla merce a cui si riferivano. Inoltre ci fu l'introduzione di decorazioni per mezzo di palline o spirali e una proliferazione dei segni incisi sui gettoni, forse per poter registrare un maggior numero di beni[14].

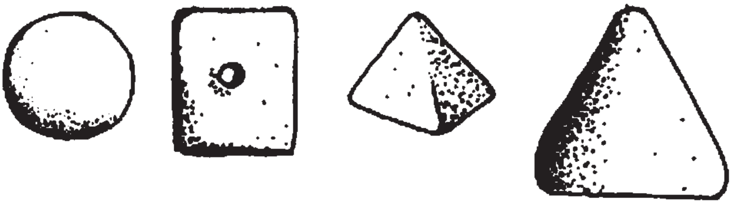


Figura 1. Gettoni d'argilla

Questa nuova fase sarebbe contemporanea ad un incremento della complessità delle strutture sociali e del movimento dei beni o anche alla nascita di una economia urbana[15].

Vari furono i fattori che interagirono tra loro e che contribuirono a questi cambiamenti, come, ad esempio, uno sviluppo tecnologico importante che per la Mesopotamia meridionale si basò soprattutto sul miglioramento della canalizzazione delle acque della regione e sull'uso dell'aratro-seminatore che consentì di ridurre i tempi di

11. Vedi anche Schmandt-Besserat 1978: 44-45 e 1982 in cui viene presentato il Neolitico, con un'analisi approfondita del contesto dell'uso dei gettoni, dei metodi per la conservazione del *surplus* e per la soluzione dei problemi che incontrarono le comunità nel passaggio dal metodo di sussistenza, basato sulla caccia e la semplice raccolta, alla coltivazione: tra tutti questi il più cruciale fu forse l'immagazzinamento del cibo. Per un maggior approfondimento dell'intero periodo, vedi anche Liverani 1995: 62-82.
12. Per un esempio delle fasi del ritrovamento dei gettoni e le ipotesi sul loro impiego in questo periodo, vedi Robson (2008: 34-35).
13. Schmandt-Besserat (1983: 117) stabilisce 15 tipi (sfera, disco, cono, tetraedro, doppio cono, ovoide, cilindro, spirale, triangolo, parabola, rettangolo, romboide, recipiente, animali e forme miste) che possono poi essere suddivisi in sottocategorie a seconda delle incisioni e delle aggiunte apportate sulle superfici dei gettoni.
14. Per una loro descrizione particolareggiata, Schmandt-Besserat 1978: 46; 1979; 1980: 358. Sempre in questo periodo il loro colore poteva andare dal biancastro al marrone chiaro e dal rosa al rosso, con tracce di grigio e nero dovute molto probabilmente alla cottura dell'argilla.
15. Si parla solitamente a tal riguardo dello sviluppo delle specializzazioni e della «produzione di massa».

lavorazione[16]. Il risultato fu l'aumento della produzione agricola che permise quindi l'immagazzinamento delle eccedenze alimentari e un incremento demografico grazie alla maggiore quantità di cibo. Dai piccoli insediamenti della dimensione di un villaggio si passò perciò ad una urbanizzazione il cui primo effetto fu il bisogno di una nuova organizzazione per la sua amministrazione. Si creò quindi una diversificazione all'interno della popolazione, con una parte che mantenne la sua funzione di produttrice di cibo, che si distribuì in piccoli centri, ed un'altra, quella degli specialisti che dovevano fornire servizi e prodotti specializzati ed erano mantenuti dall'eccedenza alimentare, che si concentrò nella città principale[17].

Nelle nuove città furono edificati il tempio, la sede del dio e delle attività cultuali che facevano a lui riferimento, e il palazzo, sede del governatore o del sovrano e di tutta la sua stretta cerchia di famigliari e collaboratori. In questi edifici furono collocate tutte le attività cittadine, come le botteghe degli artigiani, i magazzini e gli archivi[18].

In un quadro così complesso di relazioni interne ed esterne alla città (dovute allo scambio di merci tra diverse comunità o anche tra paesi differenti) è ormai stato accertato e accettato che fu sentito il bisogno di registrare in modo permanente e accurato le transazioni commerciali che avvenivano e quanto era immagazzinato.

L'esempio più chiarificatore di quel periodo è la città sumera di Uruk[19], cresciuta a partire da due insediamenti originariamente autonomi, dove i gettoni d'argilla furono trovati all'interno del tempio chiamato Eanna, dedicato alla divinità Inanna[20]. L'edificio era collegato al governo della città, alla tassazione dei suoi cittadini, alla ridistribuzione dei beni presenti in città e al loro scambio.

Per amministrare queste strutture centralizzate era perciò indispensabile non solo lo sviluppo di un metodo di conteggio e di calcolo permanente, ma anche un sistema di misure e di pesi per registrare e quantificare, ad esempio, anche il tempo e la terra. Di conseguenza furono scelte delle unità di misura tra i beni che venivano gestiti e che in molti casi furono collegate all'orzo, cibo indispensabile per la sopravvivenza, che per questo costituiva la merce di scambio più comune nel Vicino Oriente[21]. Ad esempio, i gettoni di argilla a forma di cono e di sfera erano messi in relazione con le misure del grano (dette in sumero *ban* e *bariga*)[22].

16. Liverani 1995: 116.
17. Tra questi anche i gettoni di argilla, la cui notevole somiglianza, assieme alla cura della superficie e all'uso dei colori, ha portato a ipotizzare che fossero fatti da artigiani specializzati nella produzione di ceramica (Schmandt-Besserat 1979: 21).
18. Scrive Liverani (1995: 119) che la tecnologia, la demografia e la politica crebbero «così l'una sulla base dell'altra e l'una in rapporto all'altra».
19. Altre città dello stesso periodo ci hanno lasciato testimonianze riguardo ai gettoni d'argilla: ad esempio, Tello e Fara in Iraq, Susa e Chogha Mish in Iran. In particolare per una descrizione dei metodi di immagazzinamento dei beni e la loro contabilizzazione da parte degli scribi elamici, vedi Amiet 1966.
20. Verso la fine del IV millennio a.C. la città di Uruk raggiungeva un'estensione di 250 ettari ed era circondata da un'entroterra di 280 ettari.
21. I simboli impiegati per misurare il grano erano anche usati per misurare le superfici, visto che le misure di terre erano solitamente stabilite come la quantità di semi necessari per la semina (Schmandt-Besserat 1980: 373).
22. Gli studi recenti hanno permesso di attribuire ad ogni forma dei gettoni un'unità di misura o un particolare bene. Sarà invece impossibile stabilire perché gli antichi scelsero certe forme per rappresentare una certa merce: Schmandt-Besserat (1983: 117) propone una «legge del minimo sforzo», ovvero i prodotti maggiormente scambiati, come il grano, furono rappresentati dalle forme più facili da produrre.

A questa organizzazione centralizzata si aggiungeva quella dei mercanti che avevano bisogno dello stesso sistema di contabilizzazione per tener conto dei loro commerci: tutto ciò sarebbe testimoniato dal ritrovamento di alcuni gettoni nelle rovine di edifici privati, dove la presenza dei sigilli e le chiusure, sempre con i sigilli in argilla, usate per le giare indicano un qualche tipo di attività mercantile[23].

Sebbene i gettoni siano da ascrivere al periodo del *concrete counting*, alcune loro caratteristiche indicano un primo grado di astrazione:

- ogni singolo bene è rappresentato da un particolare gettone d'argilla;
- i gettoni permettono una prima astrazione dell'informazione.

Tuttavia non è possibile riconoscerli come primi numeri astratti in quanto univano in sé il concetto di qualità e di quantità e non permettevano l'astrazione del numero, in quanto ogni gettone doveva indicare la singola unità dell'oggetto[24].

Livello	Datazione	Gettoni di argilla
Uruk VI	3.350 a.C.	Introduzione di incisioni sulla loro superficie
Uruk V-IVb	3.250 a.C.	Raccolta dei gettoni in archivi e introduzione delle *bullae*.
Uruk IVa	3.200 a.C	I metodi di contabilizzazione coesistono con la scrittura
Uruk III	3.000-2.900 a.C.	Il sistema cade in disuso, poche forme, soprattutto sfere e dischi

Tabella 1. Cronologia dei gettoni a Uruk[25]

Al metodo fino ad ora descritto venne affiancato in questo periodo anche quello dell'inserimento dei gettoni in involucri di argilla, definiti dalla letteratura scientifica *bullae*, che potevano avere un diametro tra i 3 e i 9 cm[26].

Questi contenitori venivano prodotti in maniera molto semplice, ovvero facendo pressione con le dita su una palla di argilla e creando una cavità adatta ad ospitare i gettoni. In seguito l'apertura era chiusa con un «tappo», sempre di argilla, mentre sulla superficie della *bulla* potevano essere impressi dei sigilli (due, ma a volte anche tre), dalla forma cilindrica che li faceva scorrere più facilmente sulla superficie, che identificavano le persone o gli enti governativi responsabili della transazione economica[27].

Il nuovo strumento fu introdotto sicuramente per meglio garantire il passaggio dei beni da persona a persona, grazie alla presenza del sigillo che certificava gli attori della transazione. Il ritrovamento dei sigilli sulla superficie ha portato a ritenere

23. Schmandt-Besserat 1978: 38.
24. Schmandt-Besserat 1980: 371-375.
25. Schmandt-Besserat 1983: 118.
26. È opportuno notare che esistono altre teorie riguardo all'impiego dei gettoni: per esempio, Jasim e Oates (1986: 351) scrivono che sebbene gli studi recenti abbiano spiegato la funzione delle *bullae* e delle tavolette numeriche nel tardo periodo Uruk, altrettanto non è stato possibile per i sistemi da loro definiti «antecedenti». Per un approfondimento della discussione scientifica che è sorta sin dai primi anni '80 del secolo scorso sulla funzione dei gettoni, vedi Englund 1988: 46 n. 91.
27. Per una completa descrizione, vedi Schmandt-Besserat 1980: 366-367. Il metodo impiegato è meglio comprensibile se si aggiunge che nell'antichità e nella regione presa in considerazione era normale che alcuni individui o enti amministrativi e governativi avessero dei sigilli incisi con particolari disegni usati per identificare il possessore.

che le *bullae* fossero state introdotte proprio per mettere a disposizione delle parti interessate un documento che autenticasse la transazione, ma che rendesse impossibile a chi trasportava la merce e doveva consegnarla di alterarne la quantità per mezzo della distruzione dei gettoni stessi.

Ben presto però gli addetti alla registrazione si accorsero che, una volta chiusa la *bulla*, non era più possibile conoscerne il contenuto e decisero di indicare sulla superficie il numero e la forma dei gettoni d'argilla presenti all'interno, per evitare di dover rompere il contenitore e i sigilli ogni volta che fosse stato necessario fare un accertamento.

Era di questo tipo la *bulla* analizzata da Oppenheim[28] e proveniente dagli scavi degli anni '20 del livello hurrita (metà del II millennio) della città di Nuzi: di forma ovoidale, riportava sulla sua superficie un'iscrizione di otto righe e l'impronta del sigillo di *Ziqarru* (il pastore). Il testo affermava che la *bulla* (detta in accadico *abnu*, ovvero pietra) riguardava pecore e capre per un totale di 48 animali. Tra questi 21 erano pecore, 6 agnelli femmina, 8 montoni, 4 agnelli maschi, 6 capre femmine, 1 capra maschio e 2 capretti. Il numero di animali concordava con quello dei gettoni di argilla ritrovati al suo interno[29], aspetto che portò infatti Oppenheim a parlare di un *operational device* il cui scopo era amministrativo e in particolare di salvaguardia da tentativi di frode o da possibili errori nelle transazioni commerciali[30].

Il metodo proposto da Oppenheim si basava sulla ricostruzione di particolari «uffici» all'interno del palazzo in cui, per mezzo di sassolini posti in contenitori (vasi o ceste di canne), venivano registrate le greggi del sovrano, ovvero la nascita, la crescita e la morte dei singoli capi. La *bulla* era invece il sistema per indicare una transazione dell'intero gregge e assicurare che ciò avvenisse correttamente grazie al sigillo ufficiale.

L'evoluzione del sistema di registrazione per mezzo delle *bullae* subì però un ulteriore sviluppo, quando ci si rese conto dell'inutilità e della ridondanza del loro contenuto, in quanto l'informazione era già indicata sulla superficie del contenitore. Così la *bulla* fu sostituita dalla tavoletta e la «rappresentazione tridimensionale» dei numeri da una bidimensionale disegnata con uno stilo, fatto di legno, osso o avorio con una estremità smussata e l'altra appuntita: così, per esempio, la sfera diventò un cerchio, il cono un cuneo[31].

28. Oppenheim 1959.
29. Altri scavi ci hanno consegnato anche delle *bullae* integre che conservano al loro interno i gettoni originali, come mostrato dai raggi X con cui sono state analizzate. Alcune di queste *bullae*, se agitate, producono un suono, indizio della presenza al loro interno di oggetti.
30. Nel suo articolo Oppenheim (1959) racconta anche di un fatto occorso durante la campagna archeologica del 1928-29 e che dimostra un metodo simile di conteggio degli animali era ancora impiegato agli inizi del secolo XX: un addetto alla missione dimostrò di usare dei sassolini per contare il numero di galline che aveva acquistato al mercato.
31. Robson (2008: 37-38) individua tre fasi nello sviluppo della tavoletta come strumento di registrazione contabile presso la città di Uruk: la prima, in cui la tavoletta riporta sulla sua superficie la rappresentazione dei gettoni e del sigillo; la seconda, attestata solamente nella città, in cui la tavoletta riporta le parole e le cifre di cinque sistemi numerici sviluppati per contare differenti beni; la fase della «piena maturità» del sistema. Confronta anche Englund (1998: 50-56) dove viene proposta una classificazione delle tavolette in due classi, ovvero quella delle tavolette numeriche e quella delle tavolette numerico-ideografiche.

Questo momento segnerebbe il passaggio all'*abstract counting* e quindi all'astrazione, perché, mentre i gettoni di argilla erano degli oggetti concreti, la loro rappresentazione in segni venne ad essere sempre di più scollegata dal particolare bene che doveva essere quantificato. In un primo tempo infatti sulla tavoletta si fece precedere alla rappresentazione dei numeri quella del bene considerato, mentre successivamente per esprimerli tutti ne furono identificati alcuni che rappresentavano numeri particolari, ad esempio, il piccolo cono per l'unità, la piccola sfera per il 60[32]. In definitiva la funzione semantica della rappresentazione della qualità e della quantità fu separata e attribuita a differenti gruppi di segni, rispettivamente i pittogrammi e i segni numerici.

Quanto descritto è in relazione anche con la nascita della scrittura: essa è presente per la prima volta sulle tavolette datate verso la fine del periodo Uruk IVa (3.200-3.000 a.C.) e mostra un certo grado di uniformità e di omogenità, aspetto che porta a credere all'esistenza di una precedente fase di «perfezionamento», di cui però non sono state trovate testimonianze.

Secondo Nissen, Damerow ed Englund[33] lo sviluppo delle tecniche di registrazione sopra descritte avrebbe favorito la sua nascita. Infatti, sebbene questi metodi non possano essere considerati degli scritti a tutti gli effetti, spinsero i loro utilizzatori a cercare sistemi più efficienti e completi che sfociarono nell'idea dell'uso di sequenze di segni e quindi della scrittura.

Il lasso di tempo che passò tra la ricerca della soluzione e la sua introduzione fu poi così breve che gli scavi archeologici e i recenti metodi di studio non permettono di distinguere i vari stadi di un periodo che può essere definito «preletterario».

È possibile suddividere i primissimi testi scritti in tre gruppi principali:

– le piccole tavolette forate trasversalmente che venivano probabilmente legate ad un contenitore e che portano incise sopra solo degli ideogrammi indicanti il nome del proprietario e non numeri;
– le tavolette poco più grandi delle precedenti che contengono, senza una suddivisione in righe e colonne, sia numeri sia ideogrammi la cui funzione era di natura amministrativa;
– le tavolette in cui la superficie è divisa, tramite righe orizzontali e verticali, in celle in cui vengono poste le singole informazioni, in forma molto concisa. Se il contenuto delle celle è tra loro in relazione, nel lato posteriore è presente la somma delle loro quantità.

In breve, sulla tavoletta vennero concentrati un certo numero di segni, non più solamente indicanti dei numeri ma anche delle cose, e per scriverle fu impiegato il contrassegno fino ad allora usato, oppure fu impiegato un nuovo segno pittografico[34]. Il passo successivo fu l'uso di questi segni per rappresentare non l'oggetto

32. Nei periodi precedenti erano queste le forme collegate a quantità fondamentali del grano, che a tal ragione divennero il punto di partenza per lo sviluppo del sistema numerico.
33. Nissen, Damerow ed Englund 1993: 19-20.
34. Schmandt-Besserat (1979) ha sottolineato che molti di questi segni pittografici della più antica scrittura sumera riportano la forma o l'immagine dei gettoni di argilla con una schematizzazione tipica di un passaggio dalle tre alle due dimensioni. Sulla nascita della scrittura è in corso da tempo un ampio dibattito scientifico: vedi, ad esempio, Glassner 2000. Negli ultimi anni si sta affermando una visione pluricentrica della nascita della scrittura, in cui la Mesopotamia rimane centrale, ma viene affiancata da altre aree in cui i primi sistemi di scrittura ebbero diffusione locale. A tal riguardo e per l'area iranica, vedi Basello 2012.

raffigurato ma una parola dal suono simile, permettendo perciò di scrivere anche concetti astratti[35].

La scrittura e i metodi fino ad ora descritti per la registrazione e la trasmissione delle informazioni non potevano però essere usati da persone prive della necessaria istruzione, ma erano affidati al personale amministrativo che svolgeva «il lavoro più specializzato tra tutti quelli che fanno capo alle grandi organizzazioni»[36] per mezzo di documenti che dovevano avere necessariamente uno schema *standard*.

Questa classe di funzionari, ovvero gli scribi, doveva essere preparata da «corsi» che possiamo definire «scolastici» all'interno di un'istituzione e di un luogo che i Sumeri, ad esempio, chiamavano «casa delle tavolette» (sumerico *É.DUB.BA*)[37]: lo confermerebbe sia l'esistenza di tavolette contenenti esercizi sia una loro struttura logica comune ad esemplari provenienti anche da differenti aree della Mesopotamia.

Nel primo caso gli scavi hanno rinvenuto delle tavolette in cui erano presenti lungo una riga segni tutti uguali che ricordano in modo stupefacente gli esercizi che i moderni alunni delle classi prime elementari svolgono quando devono imparare a scrivere le lettere dell'alfabeto ed i numeri. È molto probabile che questi documenti siano il risultato dei primi esercizi che i futuri scribi dovevano svolgere per imparare a scrivere sulle tavolette per mezzo dello stilo.

Il passo successivo della loro formazione professionale è ancora una volta testimoniato da tavolette al cui interno è stata riscontrata la scrittura di segni differenti.

L'altro esercizio che molto probabilmente uno scriba doveva svolgere era quello di preparare una tavoletta: in questo caso, diversamente dagli scolari moderni che si riforniscono del materiale necessario alla scrittura nei negozi, una competenza richiesta agli studenti antichi era quella di saper produrre il supporto per la propria scrittura.

Infine esistevano delle liste di parole, suddivise in gruppi, che svolgevano la stessa funzione degli odierni dizionari: ad esempio, per categorie differenti erano elencati tutti i tipi di alberi, di pesci, di uccelli.

Altre informazioni sul sistema di educazione ci sono state tramandate dalla letteratura sumera. In un testo vecchio di 4.000 anni[38] viene descritta la vita quotidiana di uno studente[39]: il sogno durante la notte di arrivare tardi a scuola, il risveglio con la madre che gli prepara la merenda da consumare a scuola (per la precisione due panini), l'arrivo a scuola dove il sorvegliante lo rimprovera per il ritardo, la giornata a scuola passata tra le domande da parte dell'insegnante e le punizioni che nelle classi sumere consistevano in «castighi corporali» con l'uso anche della frusta. Il testo riporta poi una domanda del maestro all'alunno su come ha impiegato il suo tempo a scuola e

35. Liverani 1995: 132-133.
36. Liverani 1995: 134. La frequenza alle scuole per divenire scriba ed il compimento degli studi permetteva di tentare una «scalata sociale»: l'aumento delle responsabilità portava ad una aumento della retribuzione, infatti l'educazione a questa professione era una condizione necessaria per l'assunzione in posizioni di rilievo e di notevole importanza. Proprio per questo l'accesso all'istruzione rimaneva molto legato alla classe di provenienza: un grande vantaggio per la frequenza dei corsi era il fatto di essere nati in una famiglia di scribi.
37. Nissen, Damerow e Englund 1993: 108.
38. Vedi Kramer 1988: 27-30.
39. Lo studente nella cultura sumera era chiamato «figlio della casa della tavolette», termine contrapposto a «padre/fratello maggiore della casa delle tavolette» che indicava l'insegnante.

la risposta: lo scolaro afferma di aver ripetuto il testo di una tavoletta, di aver preparato un'altra tavoletta, di averci scritto sopra fino a riempire tutta la superficie e infine di aver ricevuto l'esercizio di scrittura[40].

Oltre a saper leggere e scrivere lo scriba doveva però conoscere l'aritmetica del suo tempo[41], che in definitiva consisteva nel conoscere le regole per fare i conti. A questo traguardo si era giunti partendo da tecniche elementari, facenti parte di quella che è stata definita proto-aritmetica, di cui una delle caratteristiche più importanti era l'esistenza di metodi da applicare a problemi specifici collegati spesso a situazioni o problemi della vita quotidiana[42].

Le testimonianze archeologiche di questa proto-aritmetica sarebbero proprio quelle prese in considerazione precedentemente:

– i gettoni di argilla usati come contatori;
– le tavolette numeriche che riportavano il numero dei prodotti registrati;
– le *bullae*, intese come elemento di collegamento tra i primi due tipi.

Da quanto detto precedentemente il primo di questi elementi fu sicuramente il metodo più antico adottato per contare i beni. Che questo fosse il suo scopo principale è testimoniato dalla sua presenza all'interno delle *bullae*, o almeno questo è sicuro per i gettoni e le forme che sono stati trovati al loro interno. Il fatto poi che alcune di queste *bullae* riportassero sulla superficie gli stessi segni presenti sulle tavolette ha suggerito una sequenza logico-temporale nello sviluppo delle tecniche di registrazione.

Inoltre l'uso di differenti forme dei gettoni ha suggerito che venisse mantenuto un aspetto mnemonico nella trasmissione delle informazioni.

Sulle tavolette di argilla invece fece la sua comparsa anche la prima operazione di calcolo, la somma per ripetizione, che ripropone l'idea che era alla base della creazione dei gettoni di argilla: su un lato della tavoletta veniva posto l'elenco della merce diviso per righe, ognuna con all'interno anche la quantità; sul lato opposto il totale era riportato rappresentando tutti i precedenti segni numerici uno dopo l'altro. Questo dimostra che in origine l'addizione non era una operazione aritmetica nel senso stretto del termine. La complessità aumentò poi quando un dato numero di segni venne sostituito con un altro segno.

In conclusione si può affermare che delle notazioni numeriche erano già state sviluppate per mezzo dei gettoni di argilla antecedentemente ai primi sistemi di numerazione. Le loro diverse forme, trovate anche in differenti siti archeologici, testimoniano probabilmente la mancanza di un comportamento o di regole stabili.

40. Scrive Kramer (1988: 29) che «la scuola sumerica mancava di attrattive: programmi difficili, metodi pedagogici ripugnanti, disciplina inflessibile. Come stupirsi se certi scolari disertassero, all'occasione, i corsi e abbandonassero la dritta via?». Questo permette allo scrittore stesso di introdurre il capitolo seguente del suo saggio sulla civiltà sumera dedicato alla «delinquenza giovanile» del periodo.

41. Per una descrizione dei testi matematici del periodo Uruk IV e Uruk III, Robson 2008: 28-44.

42. Damerow (1988: 133-136) identifica altre quattro caratteristiche fondamentali delle tecniche proto-aritmetiche: l'esistenza di parole per indicare i numeri che possono essere messe in sequenza; la mancanza di una regola che permetta la costruzione di nuove parole e quindi di sequenze illimitate; un insieme di strumenti come contatori, corde di nodi o anche le parti del corpo di ausilio nel conteggio e quindi nella soluzione di problemi aritmetici; la dipendenza dell'esecuzione delle operazioni dal contesto.

Da un punto di vista matematico questi strumenti non possono essere considerati come i numeri che le epoche successive svilupparono: la loro rappresentazione era certamente impiegata per contare i beni e le merci, ma non contenevano in sé l'idea astratta del numero, al contrario il loro uso era, almeno ai nostri occhi, abbastanza ambiguo e sembra acquisisse un senso solo nel contesto in cui veniva applicato.

Nonostante ciò le tecniche che si basavano su di essi risultarono incredibilmente sofisticate e potenti, tanto da portare a un continuo perfezionamento sotto la spinta dei bisogni delle antiche amministrazioni che erano alla continua ricerca di un corretto e duraturo metodo di registrazione: permettevano di mantenere le informazioni, trasformandole in elementi di conto concreto; facilitavano il lavoro degli scribi che potevano maneggiare, suddividere, raccogliere, confrontare i gettoni secondo i propri criteri, oppure stimarli anche solo con una semplice occhiata; sostituivano la memoria umana che non poteva più bastare in una società che aveva aumentato notevolmente le transazioni ed i beni da conservare.

L'introduzione di testi più complessi come le tavolette, tecnica che molto probabilmente crebbe in modo parallelo al sistema precedente, segnò una nuova fase sotto due punti di vista, in quanto dimostra lo sviluppo dell'economia e del concetto di numero. Il sistema dei gettoni aveva avuto certamente origine all'interno dei villaggi più antichi, ma, allorché si svilupparono i grandi centri urbani, si sentì il bisogno di strumenti che permettessero la registrazione di maggiori quantità.

Le tavolette portarono alla creazione di segni che in seguito permisero di introdurre i sistemi numerici più complessi e un'idea di numero più moderna.

Questa fase è stata considerata un periodo successivo alla proto-aritmetica, chiamato da Nissen, Damerow e Englund[43] aritmetica arcaica in quanto caratterizzata da un complesso sistema che spazia dall'uso di strumenti per il conteggio di piccole quantità di beni a quello di unità di misura che permettono la registrazione di grandi quantità.

I gettoni e le successive tavolette d'argilla segnano perciò un punto fondamentale della storia della matematica, non solo perché punto di partenza dei numeri futuri, ma anche perché impulso per l'introduzione delle prime operazioni aritmetiche e, aspetto non trascurabile, per lo sviluppo di istituzioni dal carattere scolastico per insegnarne l'uso alle future classi di funzionari governativi. Proprio per questo lo studio di questo periodo e delle sue tecniche di registrazione dei beni permetterà di chiarire sempre meglio i collegamenti esistiti tra le tecniche della proto-aritmetica e l'evoluzione del concetto di numero.

43. Nissen, Damerow e Englund 1993: 125-151.

Bibliografia

Amiet, P. (1966) Il y a 5000 ans les Elamites inventaient l'écritures. *Archeologia*, 12, pp. 20-22.

Bagni, G. T. (1996) *Storia della Matematica. Volume I. Dall'Antichità al Rinascimento*. Bologna: Pitagora.

Basello, G. P. (2012) Writings from Konar Sandal (Jiroft). Studies in Elamite and Old Persian Writings and Texts, *Iranica et Elamica* 2, pp. 47-57.

Boyer, C. B. (1990) *Storia della matematica*. Introduzione di L. L. Radice. Traduzione di A. Carugo, Milano: Arnoldo Mondadori Editore.

Capelo, A. C., Ferrari, M., Padovan, G. (1990) *Numeri, aspetti storici linguistici e teorici dei sistemi di numerazione*. Padova: Decibel - Zanichelli.

D'Amore, B., Oliva, P. (1994) *Numeri. Teoria, storia, curiosità, giochi e didattica nel mondo dei numeri*. Milano: F. Angeli.

D'Amore, B. (2002) Basta con i numeri da 1 a 9, basta con i numeri in colore, basta con i blocchi logici, basta con gli abaci multibase. *Vita scolastica*, 8, pp. 14-18.

Damerow, P. (1988) Individual development and cultural evolution of arithmetical thinking. *Ontogeny, Phylogeny and historical development*, ed. by S. Strauss, Norwwod, NJ: Ablex, pp. 125-152.

Englund, R. K. (1988) Texts from the Late Uruk Period. *Mesopotamien: Späturuk-Zeit und Frühdynastische Zeit*, (J. Bauer, R. K.Englund and M. Krebernik), ed by P. Attinger and M. Wäfler, Orbis Biblicus et Orientalis, 160/1, Freiburg: Universitätsverlag, pp. 15-233.

Glassner, J.-J. (2000) *Écrire à Sumer. L'invention du cunéiforme*. Paris: Edition du Seuil.

Jasim, S. A., Oates, J. (1986) Tokens and tablets in Mesopotamia: new information from Tell Abada and Tell Brak. *World Archaelogy*, 17, 3, pp. 348-362.

Kramer, S. N. (1988) *I Sumeri alle radici della storia. Il popolo più antico e i fondamenti della civiltà umana*. Seconda edizione. Roma: Newton Compton Editori.

Liverani, M. (1995) *Antico Oriente. Storia, società, economia*. Seconda edizione. Roma-Bari: Laterza.

Nissen, H. J., Damerow, P., Englund, R. K. (1993) *Archaic bookkeeping. Early writing and tecniques of economic administrationin the Ancient Near East*. Translated by P. Larsen, Chicago: Chicago University Press.

Oppenheim A. L. (1959) On an operational device in Mesopotamian bureaucracy. *Journal of Near Eastern Studies*, 18, pp. 121-128

Robson, E. (2008) *Mathematics in Ancient Iraq. A social history*. Princeton: Princeton University Press.

Schmandt-Besserat, D. (1978) The earliest precursor of writing. *Scientific American*, 238, pp. 38-47.

Schmandt-Besserat, D. (1979) An Archaic recording system in the Uruk-Jemdet Nasr Period, *American Journal of Archaelogy*, 83, 1, pp. 19-48.

Schmandt-Besserat, D. (1980) The envelopes that bear the first writing. *Technology and Culture*, 21, 3, pp. 357-385.

Schmandt-Besserat, D. (1982) The emergence of recording. *American Anthropologist*, New series, 84, 4, pp. 871-878.

Schmandt-Besserat, D. (1983) Tokens and counting. *Biblical Archaeologist*, 46, pp. 117-120.

Schmandt-Besserat, D. (1987) Oneness, twoness, threeness. *The Sciences*, 24, pp. 44-49.

3. Chopin, Darwin e Gauss

Silvio Maracchia

The article is intended to support the thesis that both the natural sciences, of every kind, and both abstract sciences (mathematics in particular) are derived, the first, from the study of nature and the second from the premises, also variable, and from classical logic . For this reason, unlike the artistic constructions related to the individual and unique author, the same results have been achieved independently by scientists in places and different eras demonstrating that however would be.

Premessa

I tre personaggi del titolo sono solo i rappresentanti della loro categoria: un grande musicista, un insigne naturalista e un sommo matematico. In verità avrei potuto scegliere un'altra terna, anzi parecchie terne, ugualmente significative e adatte allo scopo di questo mio lavoro.

Tale scopo è volto all'esame della creatività, della fantasia dell'uomo, se non addirittura della verità che è sempre stata la ricerca dell'uomo, una verità non quella semplice di tipo aristotelico consistente nell'affermare che «verità è dire che è una cosa che è», ma quella legata all'essere dell'uomo nell'universo e alla sua stessa essenza. Come si vede, un proposito ambizioso assai superiore alle mie forze e, penso, alle forze di chiunque, visto che è stato affrontato da tutte le civiltà senza che si sia giunti a una risposta soddisfacente che potesse essere accolta da tutti.

Ebbene, all'ovvia considerazione di chi potrebbe obiettarmi che in tal caso sarebbe meglio non affrontare un argomento così spinoso considerandomi già in partenza inadeguato, rispondo che se anche potessi mostrare il problema da un'angolazione diversa dalle solite, varrebbe la pena di farlo conoscere con la convinzione che, seguendo il famoso paradosso del sorite, anche un semplice granello di sabbia potrebbe contribuire a costruire un grande mucchio[1].

1. Il paradosso megarico del sorite (o «mucchio») consiste nella difficoltà di stabilire quando, partendo da un granello di sabbia, aggiungendone un secondo, un terzo e così via si raggiunga un mucchio. Io ho inteso in questo caso che, comunque si risolva il paradosso, anche il singolo granello contribuisce al grande mucchio.

Frédéric Chopin (1810- 1849)

Chopin è un musicista, anzi uno dei più grandi musicisti di ogni tempo; la sua musica è in grado di suscitare numerosi sentimenti: la nostalgia, la tenerezza, la tristezza, l'amor patrio. Una musica che sembra strettamente connessa allo strumento con il quale veniva espressa dal musicista polacco: il pianoforte; una musica che sembra talvolta scavare nell'animo dell'ascoltatore[2].

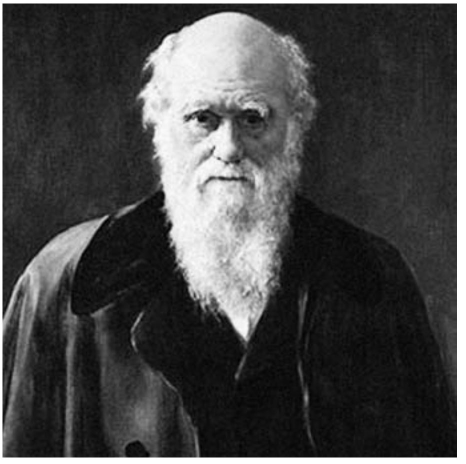
Non è però nell'analisi dei grandi Notturni, delle Polacche, o del Krakowiak o di altro della sua vasta produzione compiuta nei trentanove anni della sua vita che intendo soffermarmi; vorrei invece solo porre questa domanda: sarebbe mai possibile che un altro musicista, non conoscendo le musiche di Chopin, una o più, potesse riprodurle perfettamente uguali?

Si è molto favoleggiato sul fatto che avendo a disposizione un tempo infinito, la probabilità che una scimmia battendo su i tasti di una macchina da scrivere potesse riscrivere, ad esempio, la Divina Commedia, non fosse uguale a zero; ma così come respingo questa eventualità basata sull'inquietante concetto di infinito, respingo anche che un musicista possa ripercorrere sul pianoforte o su un altro strumento, una musica di Chopin, casualmente o per un suo esplicito atto creativo. Questa musica è un'espressione unica della personalità unica di Chopin alla stregua dell'unicità delle impronte digitali o, seguendo lo sviluppo bio-tecnologico di oggi, alla stregua dell'irripetibile DNA di un individuo.

Ebbene, questa presupposta irripetibilità di una costruzione musicale, costituisce il primo tassello della mia analisi.

2. A testimonianza del sentimento di Chopin, riporto una frase che scrisse alla sorella Ludwika nella lettera del 10 febbraio 1848 parlando della sua ex compagna George Sand. Questa, secondo Chopin, cercava di stordirsi creando e recitando commedie per non pensare ai suoi rapporti familiari «*si risveglierà solo quando il cuore, oggi sopraffatto dalla testa, le farà troppo male*». Frase che si avvicina, a mio parere, a quella famosa di Pascal (*Pensieri* 146) secondo la quale «*il cuore ha le sue ragioni che la ragione non conosce*».

Charles Darwin (1809-1882)



A tutti è noto il significato della scoperta di Darwin, naturalista serio e coscienzioso, che, alla stregua di Copernico nell'astronomia, aveva mutato radicalmente la visione delle specie viventi.

In verità, come Copernico aveva avuto dei predecessori negli astronomi pitagorici e specialmente in Aristarco di Samo che aveva decisamente affermata la rotazione della terra attorno al sole, anche Darwin aveva avuto precursori in Anassimandro e in Empedocle (oltre ai moderni Buffon, Lamarck ecc.[3]) ma una cosa è enunciare semplicemente un'idea, altro è suffragarla con osservazioni, prove sperimentali, riscontri.

La grande avventura di Darwin fu il viaggio con la Beagle attrezzata a compiere una serie di rilevazioni di carattere prevalentemente topografico ma anche naturalistico. Fu in questo viaggio che si svolse dal 1831 al 1836 che lo scienziato inglese elaborò la sua teoria evoluzionistica (*Origine della specie*) che doveva mutare radicalmente tutti gli studi naturalistici precedenti e che pubblicherà soltanto nel 1859.

Senza entrare nel merito della teoria, delle opposizioni che ne seguirono e dei suoi vari aggiustamenti, rivolgo al lettore la stessa domanda già formulata a proposito di Chopin: sarebbe stato possibile che un altro naturalista ricreasse, ignorando del tutto gli scritti di Darwin, la sua stessa teoria? Se Darwin non avesse accettato di partecipare al viaggio del Beagle (in un primo tempo rifiutato!) questa teoria, ripeto, sarebbe stata comunque proposta? Ebbene, questa volta la risposta è si! Anzitutto ricordo i precursori che già avevano abbozzato e intuito un certo percorso ma poi esiste un episodio significativo che giustifica più di ogni altro la mia categorica risposta. Abbiamo visto che Darwin scrisse la sua opera solo ventitré anni dopo il termine del suo viaggio e probabilmente avrebbe indugiato ancora se non fosse accaduto un fatto sconcertante nell'estate del 1858: un giovane naturalista, Alfred Russell Wallace, inviò a Darwin un suo scritto (*Sulle tendenze delle varietà a staccarsi indefinitamente dal tipo originale*) nel quale veniva descritta in pratica la stessa teoria che Darwin stava lentamente elaborando!

3. Basta per questo leggere il Sunto storico premesso dallo stesso Darwin alla sua *Origine della specie*.

Bisogna dire che Darwin si comportò correttamente: fece pubblicare lo scritto di Wallace con l'aggiunta però di un riassunto del suo manoscritto che lui stesso giudicherà maldestro e subito dopo si affrettò a pubblicare i suoi studi. In seguito, dietro il grande successo editoriale che ebbe la sua Origine della specie, tenne a dichiarare che tale successo era forse dovuto alle precedenti sue pubblicazioni che avevano riassunto la sua teoria (probabilmente 1842; 1844). E questo, si pensa, per stabilire una sua priorità[4]. A me non interessano queste questioni di priorità, ma soltanto la circostanza che una stessa grande concezione scientifica era stata raggiunta da scienziati indipendenti uno dall'altro, per cui mi sento di concludere che, avendo a disposizione la natura come campo di osservazione, prima o poi la teoria evoluzionistica e i vari aggiustamenti che ne seguirono, sarebbe comunque stata raggiunta.

Anche in questo caso il risultato scientifico era stato ottenuto da una elaborazione creativa di Darwin, ma questa creazione era stata stimolata da qualcosa al di fuori di se stesso, la natura, che avrebbe potuto, come effettivamente accadde, stimolare un'altra intelligenza capace di osservare la natura senza preconcetti.

Ebbene, questa conclusione costituisce il secondo tassello dell'analisi.

Karl Friedrich Gauss (1777-1855)

Con Gauss passiamo a un altro tipo di creazione, la matematica, di cui egli fu uno dei massimi esponenti. Ogni persona che ne è venuta a conoscenza, rimane stupita della precocità del matematico tedesco manifestatasi, alla stregua del piccolo Mozart, a soli tre anni![5]

In genere la capacità creativa si esaurisce con la gioventù o poco dopo e in particolare la creatività di un matematico. Vi sono naturalmente varie eccezioni e

4. Leggiamo nel Sunto Storico già citato: «Il terzo volume del *Journal of the Linneam Society* contiene delle memorie lette il 1° luglio 1858 del Signor Wallace e da me, nelle quali, come si vedrà nell'Introduzione al presente libro, la teoria della elezione naturale fu esposta da M. Wallace con molta forza e chiarezza».
5. Si racconta che il piccolo Gauss a tre anni correggesse una somma sbagliata dal padre.

Gauss è una di queste, dato che continuò a produrre matematica di prim'ordine sino alla sua morte che avvenne nel 1855 a 78 anni. In tal modo anche se volle pubblicare solo ciò che era ormai esauriente (*pauca sed matura* era il suo motto), la sua opera omnia risulta di dodici volumi, tra cui molte indicazioni fornite nella sua corrispondenza che, per quanto riguarda il tema del presente articolo, sono del massimo interesse.

Fu proprio nelle lettere, infatti, che Gauss dichiarava ai suoi amici la soddisfazione di vedere alcune sue ricerche, ancora da sviluppare, trattate da altri matematici il che gli risparmiava di doverle completare. Questo accadde, ad esempio, con il famoso problema delle parallele e quindi con la nascita delle geometrie non-euclidee (il nome era stato dato proprio da Gauss e adottato successivamente) studiato in alcune parti essenziali poi reinventate, per dir così, da Janos Bolyai e da Nicolaj Lobacevskij a loro volta in maniera indipendente uno dall'altro. Questo accadde anche in relazione alle cosiddette «funzioni ellittiche» che vide trattate come lui aveva già fatto in precedenza, ma senza darne notizia ufficiale, da Abel e da Jacobi anche loro indipendentemente l'uno dall'altro[6].

Si potrebbero fare anche altri esempi, specialmente uscendo dalle anticipazioni di Gauss, ma mi sembra di aver già dimostrato che in matematica in relazione di un dato argomento i tempi diventano a un certo tempo maturi per cui, come disse il padre di Janos Bolyai al figlio, conviene affrettarsi a pubblicare i propri risultati prima che altri li potessero raggiungere ugualmente «come le violette» scrive «che vengono in ogni parte alla luce in primavera».

Lo storico della matematica avverte che, nonostante la coerenza dello sviluppo della matematica attraverso i secoli, allorché si affaccia all'orizzonte un matematico creatore, si assiste a un picco discontinuo nello sviluppo stesso. Ma, questa discontinuità è probabilmente più apparente che reale per cui alla domanda se alcuni risultati di Gauss, innovativi e importanti, sarebbero comunque ritrovati da altri, anche in questo caso la risposta che mi sento di dare è: sì!

Eppure la matematica, la matematica razionale e non i semplici calcoli aritmetici dovuti al vivere corrente, è una creazione dello spirito del singolo che non si appoggia al mondo fenomenico ma soltanto alla universalità della logica deduttiva. Sta in questo dunque la spiegazione di risultati ottenuti da personalità diverse e, talvolta, in epoche diverse.

Sarebbe facile pertanto obiettare che, avendo accolto alcuni punti di partenza comuni a tutto il mondo matematico e avendo scelto una particolare logica della dimostrazione, le conseguenze non possono non essere le stesse, anche se un determinato risultato, poniamo, ad esempio, un problema rimasto aperto, lo si può anche ottenere seguendo vie diverse.

6. Si potrebbe dire che lo stesso Gauss trovò da sé (aveva dieci anni!) alcuni procedimenti di calcolo già ben noti ma a lui sconosciuti (somma di n elementi in progressione aritmetica) e ritroviamo probabilmente questa sua capacità di creare da sé matematica più o meno già nota allorché nella Prefazione della sua opera Disquisitiones Arithmeticae scrive: «Affinché non ci si meravigli di vedere qui le Scienze prese quasi dal suo inizio e che io sia ritornato su ricerche già fatte da molti altri, credo che non sia inutile avvertire che, quando nel 1795 ho cominciato ad applicarmi a questo genere di considerazioni, io non avevo assolutamente alcuna idea di tutto quello che era stato fatto su questo soggetto, anche dai moderni, e che ero privo di tutti i soccorsi che avrei potuto trarre da loro». Come dire che la matematica si forma da sé anche se attraverso i suoi sacerdoti.

Ma non è questo il punto; il fatto è che, ovunque si osservi la matematica nelle varie civiltà assai differenti tra loro, si può osservare che i passaggi matematici che vengono applicati, pur nella loro approssimazione, con lacune dovute a intuizioni considerate sufficienti ma talvolta pericolose sono sostanzialmente gli stessi. La logica alla base è, infatti, a guardar bene, sempre la stessa: un'applicazione più o meno esplicita del principio di non contraddizione, il più forte di tutti i principi come ebbe a scrivere Aristotele: «non si può affermare e nello stesso tempo negare una medesima circostanza» con buona pace dell'ossimoro che è figura letteraria volta a colpire e sorprendere ma del tutto lontana dalla matematica e dalla logica.

A mio parere è già nelle reazioni chimiche, milioni di anni prima della comparsa dell'uomo, che si presentava questa verità assieme a un altro principio di logica-matematica: da cause uguali seguono uguali conseguenze (se ad A segue B, ogni volta che si presenta A segue allora B) [in natura è arduo stabilire quando le cause siano effettivamente uguali per cui possono presentarsi conseguenze differenti, ma nella matematica razionale non esistono queste incertezze]. Questi meccanismi chimici si sono inseriti in maniera congenita nell'uomo e divennero espliciti non appena nacque il linguaggio da cui il possibile controllo delle verità enunciate. Con queste conclusioni si è ottenuto il terzo e ultimo tassello della mia analisi.

Conclusione

In sintesi, io vedo pertanto nella costruzione dell'uomo le immanenti leggi logiche già presenti nella chimica del suo organismo, ben presto diventate esplicite basi matematiche che assieme alla creazione di enti composti hanno via via portato a una matematica che, con le imprecisioni iniziali dette a secondo delle varie civiltà, è diventata la costruzione di oggi. Una costruzione che, a prescindere da ritardi dovuti anche a mode da perseguire a seconda dei tempi e dai problemi all'ordine del giorno, non può non essere che quella che è sotto gli occhi di tutti. Per dirla tutta, se Gauss fosse morto di scarlattina appena nato, noi già avremmo comunque buona parte della sua matematica e, col passare dei secoli, l'avremmo a un certo punto, tutta quanta, anche se talvolta uno stesso risultato può essere raggiunto in modo diverso[7].

La musica appare, ed è, una lingua strettamente personale, le scienze naturali sono altresì legate all'universo che ci circonda ma la matematica le racchiude entrambe ed è la lingua universale dell'uomo, che ognuno di noi ha dentro di sé, una lingua che, sola, potrà avvicinarci alla verità e al mistero della nostra esistenza[8].

7. Si noti che si sta parlando del corpo effettivo della matematica e del suo sviluppo, ciò non esclude però che alcuni risultati di nessun sviluppo (proprio di nessuno) nascano senza che possano necessariamente essere ritrovati in seguito; ad esempio (un esempio che sto creando ora che scrivo) se si studiasse un'equazione i cui coefficienti sono radice di due, pi greco, phi, la costante gravitazionale g e 77!
8. Sulla matematica, il suo valore e il suo messaggio la letteratura è sterminata, riporto solo il giudizio, penso poco noto, che Giordano Bruno scrisse nel suo *Sigillus Sigillorum* (1583): «Tutti i sapienti concordano nel sostenere che anche la matematica contribuisce alle operazioni dell'animo. (…) La matematica, insegnando ad astrarci dalla materia, dal moto e dal tempo, ci rende capaci di intendere e contemplare le specie intelligibili. Perciò Pitagora, Platone e tutti quelli che cercarono d'insegnarci cose difficili e profonde non usarono altri strumenti se non la matematica».

1. Appunti di storia della matematica: la moltiplicazione

Edoardo Montella, BDM nr.3, ottobre 1981[1]

This article was first published on «Scuola ticinese» in 1974, and represented a contribution to the construction of the future school; they have been applied then a repeat in 1981 for the newborn *Bollettino dei docenti di matematica*. Is now re-released on the now mature Bollettino, as it is believed that its content is still relevant in view of a modern teaching of mathematics. The article is a roundup (deliberately not exhaustive) in key historical teaching of evolution of the concept of multiplication of numbers through the centuries.

1. Introduzione

«Ci si immagina spesso che la matematica costituisca un mondo pietrificato, dato una volta per tutte e nel quale non ci sia niente da cambiare. Questa impressione è, in realtà, completamente falsa: *la matematica rappresenta, al contrario, un mondo sottomesso ad un'evoluzione estremamente rapida* (come, del resto, qualunque settore della scienza al giorno d'oggi). Per dare un'idea delle dimensioni di questo fenomeno, basti pensare che ai tempi del famoso matematico Blaise Pascal non esistevano (in tutto il mondo) più di qualche decina di matematici; oggi sono migliaia le persone che consacrano la loro attività a ricerche nel campo matematico, ed ogni mese i periodici specializzati recensiscono centinaia di articoli che rappresentano altrettante nuove scoperte matematiche». (Boucher, 1965)

Le considerazioni riportate sopra danno un primo, timido, approccio al problema che, a nostro parere, dovrebbe costituire l'aspetto storico come componente essenziale del dialogo didattico sulla matematica.

Chi scrive ritiene indispensabile, infatti, perché gli allievi afferrino in pieno la portata di alcuni concetti, tracciarne un breve profilo storico con tutte le tappe della sua evoluzione attraverso i secoli.

Questo non vuol dire aumentare il carico che deve essere sopportato dagli allievi con date, nomi, enunciati, ma essenzialmente cercare di portare l'allievo (ovviamente tenendo sempre ben presenti i limiti imposti dall'età) ad un'analisi critica della suddetta evoluzione; quindi non si tratta di isolare determinati procedimenti, o teoremi, o concetti dal naturale ambito storico in cui sono immersi per una stupida, quanto inutile, memorizzazione, bensì di confrontare detti procedimenti, teoremi, concetti, tenendo presenti i singoli ambiti storici.

1. L'articolo è stato pubblicato la prima volta su *Scuola Ticinese* nel 1974, come contributo alla costruzione della (allora) futura scuola media ticinese, e riproposto nel 1981 sul neonato *BDM*.

Questo articolo rappresenta un tentativo di dimostrare come un argomento possa essere impostato in un'ottica storica; è ovviamente stato scritto per i docenti, quindi il linguaggio e l'impostazione generale sono adeguati ai destinatari; non dovrebbe riuscire, però, difficile al docente di reimpostare la trattazione adattandola al livello ed alle esigenze della sua classe.

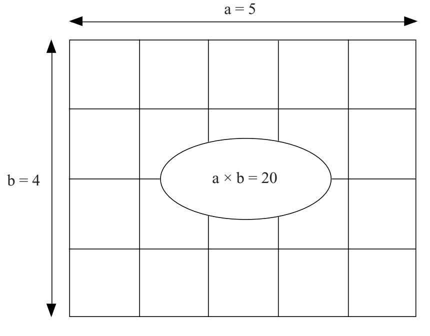
È stato scelto come esempio (a ragion veduta, perché è un qualcosa di estremamente adatto ad essere recepito da allievi del settore medio) una tecnica per noi familiare, di uso quotidiano, quella della *moltiplicazione*.

Essa ci sembra adesso qualcosa di estremamente semplice ed accessibile, tanto che la si insegna nelle scuole elementari, ma quante fatiche e tentativi di secoli per arrivare alla tecnica attuale!

Guardiamo quindi insieme solo alcune delle tappe più salienti della sua evoluzione.

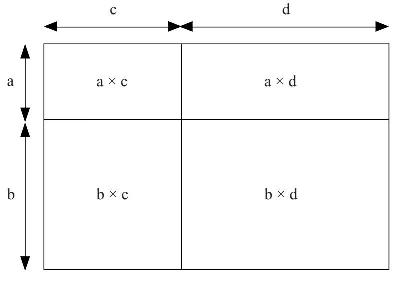
2. La moltiplicazione nell'antico Egitto e in Mesopotamia

L'impostazione utilitaristica della matematica egiziana faceva sì (si dice) che già allora (prima dell'epoca greca, dove la componente geometrica risulta essenziale anche nel campo numerico) il prodotto di due numeri **a** e **b** fosse associato visivamente all'area **a** × **b** del rettangolo di dimensioni **a** e **b**.



Questa impostazione permetteva già allora di scoprire alcune tra le fondamentali leggi dell'algebra elementare, per esempio la proprietà distributiva, che permette di ridurre il prodotto tra due numeri grandi alla somma di prodotti più semplici tra numeri più piccoli:

$$(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

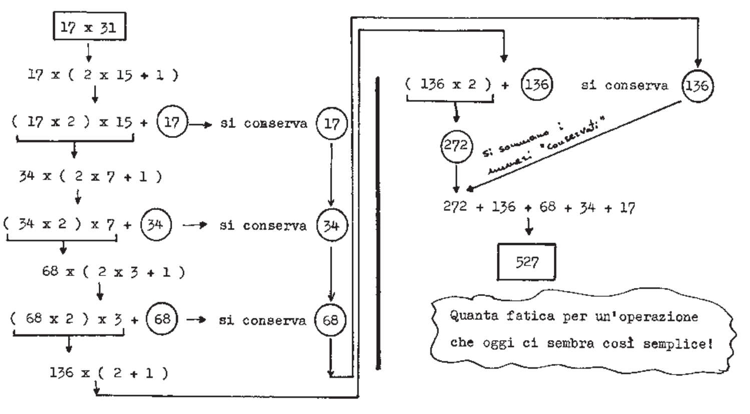


Per esempio:

$354 \times 23 \quad = (300 + 50 + 4) \times (20 + 3) =$
$= 300 \times 20 + 50 \times 20 + 4\ 20 + 300 \times 3 + 50 \times 3 + 4 \times 3 =$
$= 6000 + 1000 + 80 + 900 + 150 + 12 = \mathbf{8142}$

Il metodo più usato, presso gli Egiziani, per eseguire la moltiplicazione era quello detto «di *duplicazione*». In altre parole, ogni prodotto di un numero **n** per un numero **m** era ricondotto a successive moltiplicazioni di **n** per **2** (cioè, appunto, *duplicazioni*).

Spieghiamoci con un esempio (ovviamente, per farci capire, adopereremo il nostro sistema di numerazione, ben più evoluto di quello egiziano) :



Questo metodo (che è probabilmente il risultato di un residuo di antichissime numerazioni binarie) poggia sul fatto che ogni numero intero **m** può scriversi sotto forma di somma di potenze di 2:

$\mathbf{m} = 2^a + 2^b + 2^c + \ldots$ (con $a > b > c$ ……. interi positivi)

Per esempio:

$19 = 16 + 2 + 1 = 2^4 + 2^1 + 2^0$

$253 = 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 1 = 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0$

Un'altra maniera di eseguire la moltiplicazione con il metodo di duplicazione (riportata da molti testi di storia della matematica e che, si dice, è ancora usata in alcuni paesi della costa etiope, è quello di preparare una tabella in cui su una colonna sono riportate le successive potenze di due e su una seconda colonna le corrispondenti duplicazioni del numero **n**. Si scelgono poi (segnandole con un *) le potenze di 2 della prima colonna che, sommate, danno il numero **m**; la somma dei corrispondenti numeri della seconda colonna dà il prodotto cercato.

Mantenendo lo stesso esempio precedente:

17 × 31	*	1	17
	*	2	34
	*	4	68
	*	8	136
	*	16	272
		32	544
		64	1088

$\boxed{31 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1}$ $\boxed{527}$ = 17 + 3 + 68 + 136 + 272 =

= $\boxed{17 \times 31}$

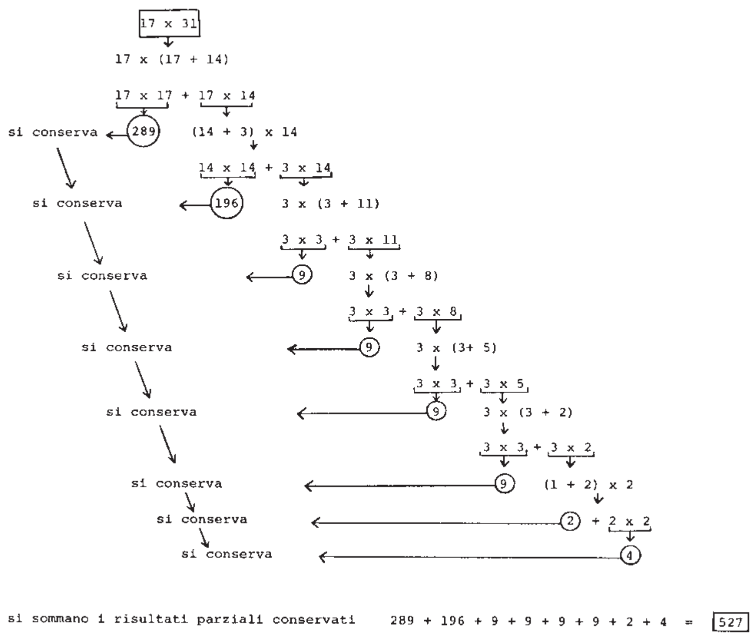
In questa seconda maniera è anche facile impostare l'operazione inversa, cioè la divisione. Si cercano, cioè, nella seconda colonna i numeri la cui somma è uguale al dividendo o al numero intero che meglio lo approssima per difetto, e vi si pone un segno *; la somma dei numeri corrispondenti della prima colonna dà (in maniera esatta o approssimata, a seconda che il resto della divisione sia uguale a zero o diverso da zero) il quoziente richiesto.

572 : 27	1	27	*
	2	54	
	4	108	*
	8	216	
	16	432	*
	32	864	
	21	567	

21 è il quoziente della divisione 575 : 27 (resto 575 – 567 = 8)

Un altro sistema in voga a quei tempi potrebbe essere chiamato «*per scomposizione in quadrati*».

Ecco un esempio di questo metodo:



Per comprendere il senso di questo metodo, bisogna pensare che a Nippur sono state ritrovate delle tavolette (simili a quelle che oggi ritrovano alla fine di ogni testo scolastico) risalenti a 10 secoli prima di Cristo, su cui erano riportati i quadrati dei numeri.

Quindi, per eseguire le moltiplicazioni, bastava scomporre **m** × **n** successivamente in somme di prodotti con fattori uguali (al più , nell'ultimo prodotto uno dei fattori è l'unità), cioè

$$m \times n = a \times a + b \times b + c \times c + \ldots = a^2 + b^2 + c^2 + \ldots$$

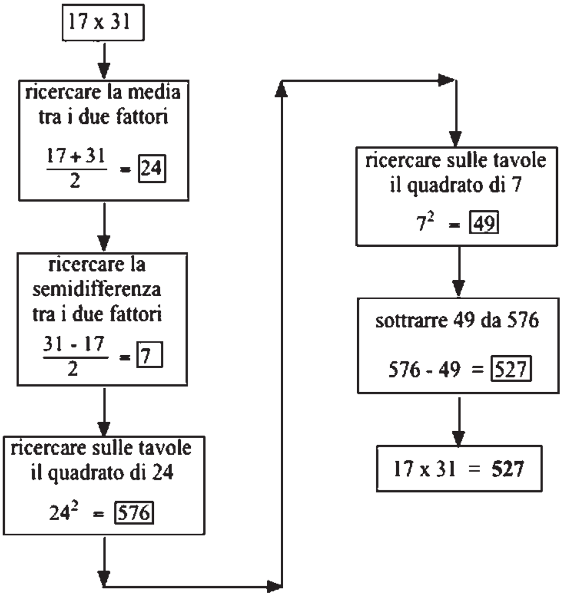
A questo punto, adoperando le suddette tavole dei quadrati, la moltiplicazione era mutata in addizione.

Oltre a questo metodo ne esisteva un altro (verosimilmente adoperato dai sacerdoti mesopotamici, secondo i reperti) che faceva uso delle tavole dei quadrati per la moltiplicazione di due numeri.

Sembra accertato che i babilonesi fossero molto più avanzati degli egiziani nelle conoscenze algebriche. Infatti il metodo in questione è fondato su una regola (per noi «moderni» semplicissima) di carattere algebrico: *il prodotto di due numeri è sempre uguale al quadrato della loro media meno il quadrato della semidifferenza tra essi*.

In simbologia moderna: $a \times b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

Ne spieghiamo, come al solito, il meccanismo con schemi e linguaggio attuali:



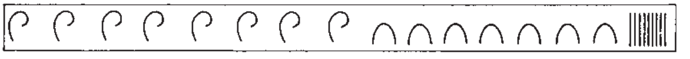
A questo punto (soprattutto ad una persona non molto addentro alle problematiche storiche della matematica) verrebbe spontanea una considerazione sulla sconcertante assurdità di questi metodi, sproporzionati alle difficoltà della semplicissima operazione di moltiplicazione.

Ma questa apparentemente logica considerazione è priva di qualunque senso storico.

Bisogna infatti tener presente:

a) Il sistema di numerazione degli antichi egiziani non era posizionale, ma additivo (e privo dello zero)

In parole molto povere: mentre nel nostro sistema di numerazione (basato sul valore di posizione delle cifre), per esempio, il numero 879 (che significa $8 \times 100 + 7 \times 10 + 9 \times 1$, cioè 8 centinaia, 7 decine e 9 unità) è scritto adoperando solo tre simboli (cifre), in virtù proprio del suddetto valore di posizione, presso gli antichi egiziani lo stesso numero si sarebbe scritto:



cioè:

100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 +
+ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1

Quindi il valore del numero è dato dalla somma dei valori di tutti i simboli adoperati per scriverlo (questo valore è sempre lo stesso, indipendentemente dalla posizione del simbolo nella scrittura), e da qui il fatto che un sistema di numerazione come quello egiziano (o come quello greco o romano, come vedremo) è detto *additivo*.

Così, per esempio, per indicare una pur semplice moltiplicazione come 4345×632 gli egiziani l'avrebbero scritta (le parentesi sono state aggiunte per facilitare la lettura):

e per eseguirla avrebbero dovuto moltiplicare ogni simbolo del primo fattore per ogni simbolo del secondo fattore e poi sommare tutti i prodotti così ottenuti (ovviamente dopo aver effettuato gli opportuni «scambi» in ogni prodotto); senza contare gli scambi, così, si sarebbero dovuti fare $16 \times 11 = 176$ moltiplicazioni e una somma con 176 addendi (!!!).

b) Nessuno, a quei tempi (a quanto risulta dai reperti finora pervenutici[2]), aveva mai pensato a compilare quegli utili strumenti di calcolo (croce di tutti noi nelle scuole elementari…) che sono le tabelline).

2. La maggior parte delle informazioni sulle conoscenze matematiche degli egiziani ci sono pervenute attraverso il famoso *Papiro Rhind* (scoperto nel XIX secolo), manoscritto compilato da uno scriba chiamato Ahmès, vissuto nel XVI secolo a.C. Sembra che questo papiro non sia originale, ma si tratti di una copia di un manoscritto ancora anteriore.

Diamo adesso, per maggiore chiarezza, una tabella comparativa di vari sistemi di numerazione:

NOSTRO	EGIZIANO	GRECO (Attico)	GRECO (ionico)	Romano
1	𓏺	I	α	I
4	IIII	IIII	δ	IV
5	IIIII	Γ	ε	V
6	IIIIII	ΓI	ϛ	VI
10	𓎆	Δ	ι	X
50	𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆	𐅄	ν	L
100	𓍢	H	ρ	C
500	𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢	𐅅	φ	D
1.000	𓆼	X	͵ρ	M
10.000	𓂭	M	M	X̄
100.000	𓆐	𐅅	Mι	C̄
1.000.000	𓁨	𐅇	Mρ	M̄

Figura 1. Tabella di confronto dei sistemi di numerazione

2.1. Osservazioni

– Tutti e quattro i sistemi sono addittivi non posizionali e si basano sulla base dieci, ma dei quattro il meno primitivo è il greco ionico.
– Il sistema greco ionico era fondato sulle 24 lettere dell'alfabeto greco più tre simboli particolari: F (digamma), Ϙ (koppa), ϡ (sampi), e obbligava quindi ad un grande sforzo di memoria, dovendo ricordare 27 simboli il cui valore poteva rappresentare unità, decine o centinaia. Il vantaggio di questo sistema sui tre rimanenti era che il numero di simboli occorrenti per descrivere un numero era minore.
– Tranne che per la forma dei simboli, il sistema attico era molto simile a quello romano, ma aveva un vantaggio rispetto a quest'ultimo: mentre i romani usavano simboli distinti per indicare 50 e 500, i greci scrivevano questi numeri mediante la combinazione delle lettere che indicavano 5, 10, 100 usando

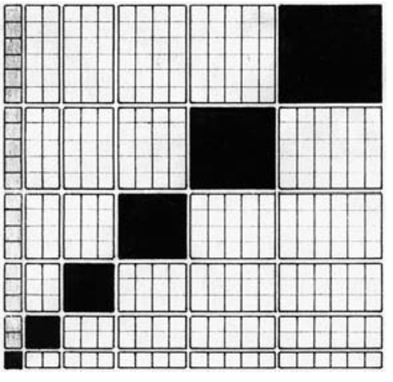
  𐅄 (ossia 5 volte 10) per 50 e 𐅅 (ossia 5 volte 100) per 500.

  In maniera analoga 𐅆 per 5000 e 𐅇 per 50000
– Archimede ha descritto nell'Arenaria (il «*trattato dei grani di sabbia*») il metodo ingegnoso con cui, adoperando il sistema greco attico, potevano essere scritti numeri il cui valore andava fino a $\mathbf{10^{8\times10^8}}$ (cioè 1 seguito da 800 milioni di zeri!)

A questo punto dovrebbe risultare chiaro come i procedimenti visti sopra non siano poi così assurdi…; essi rispecchiano anzi una volontà di superamento (attraverso artifici molto ingegnosi, anche se un po’ farraginosi (escluso l’ultimo metodo, che farraginoso non lo è affatto), dai limiti imposti all’operatività dalla scarsità delle conoscenze. Ed è stata proprio questa ferrea volontà di miglioramento a permettere a noi «moderni» di sorridere con sufficienza ai maldestri tentativi dei poveri scribi egiziani.

3. La moltiplicazione in Grecia e nell’antica Roma

Come detto finora, gli Egiziani non conoscevano (almeno sotto la forma in cui le conosciamo oggi) le caselline; esse furono «inventate» solo secoli più tardi, dai Greci. Due esempi di «caselline» sono quella *geometrica* di Pitagora, di cui riportiamo una parte (fino al 6 × 6):



e quella *numerica* di Teone, che era organizzata esattamente come le tabelline che tutti abbiamo imparato nelle scuole elementari, con la differenza che i numeri erano indicati con i simboli greci del sistema jonico di numerazione. L’impiego di queste «tabelline», probabilmente, consentì ai greci una tecnica di moltiplicazione un po’ più evoluta, che precorre, in un certo senso, la nostra tecnica moderna[3].

Eccone un esempio:

$$\boxed{123 \times 123 = 15.129}$$

In simboli greci (sistema attico)

H	ΔΔ	III	x
H	ΔΔ	III	=
M	XX	HHH	
XX	HHHHH	𐅄Δ	
HHH	𐅄Δ	ΓIIII	
M 𐅅	H	ΔΔ	ΓIIII

Con tecnica greca e simboli attuali

100	20	3		x
100	20	3		=
10.000	2000	300		
2.000	400	60		
300	60	9		
10.000	5000	100	20	9

cioè

10.000 + 5000 +100 +20 + 9 = <u>15.129</u>

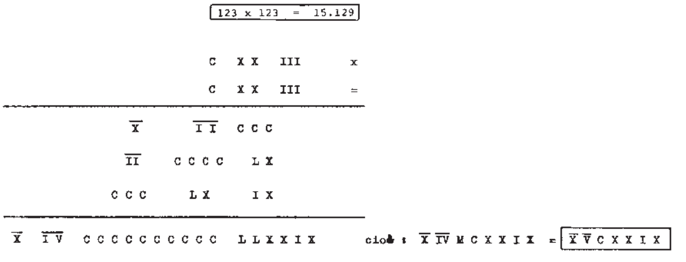
3. L’attribuzione delle tabelline a Pitagora o ai Pitagorici è contestata da alcuni studiosi, che sostengono questa attribuzione dev’essere dovuta a un errore di trascrizione di antichi testi, e fissano l’invenzione della tavola di moltiplicazione ad epoca posteriore.

(La moltiplicazione è eseguita da sinistra verso destra, e non viceversa come facciamo noi; quest'ordine è adoperato ancora oggi in Inghilterra).

Per quanto riguarda, poi, gli antichi romani, essi modellarono il loro sistema numerico (come abbiamo visto) su quello attico dei greci, inserendo dei piccoli cambiamenti (che non sono, però, sostanziali). Nonostante tutto quello che si possa pensare sulla civilizzazione del mondo ad opera dei Romani, il loro apporto nel dominio scientifico si riduce a quasi niente: il loro spirito preciso e meticoloso ci ha tramandato il diritto, ma non ha dato niente (di nuovo) alla matematica.

Più in particolare, essi non riuscirono mai a conquistare l'arte di calcolare: persino le più semplici moltiplicazioni costituivano un'operazione molto lenta e per la quale era necessario molto spazio, esattamente come per i Greci.

Ecco, infatti, un esempio di moltiplicazione in simboli romani:

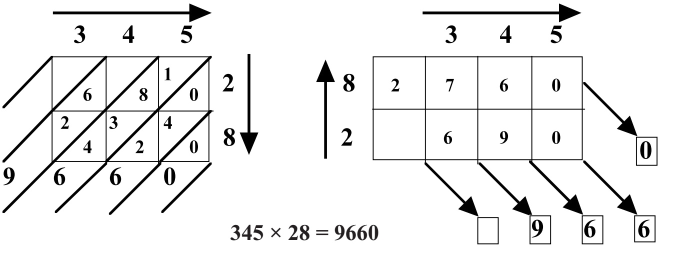


C'è da notare, però, che la tecnica di sopralineare le cifre per indicare le migliaia, come per es. $\overline{\text{X}}$ = 10000, è sopraggiunta solo nella tarda romanità; infatti tra i primi romani il numero 10000 si sarebbe scritto MMMMMMMMMM, con conseguenze facilmente immaginabili quanto allo spazio occorrente anche per la semplice moltiplicazione vista sopra.

4. La moltiplicazione nel Medioevo

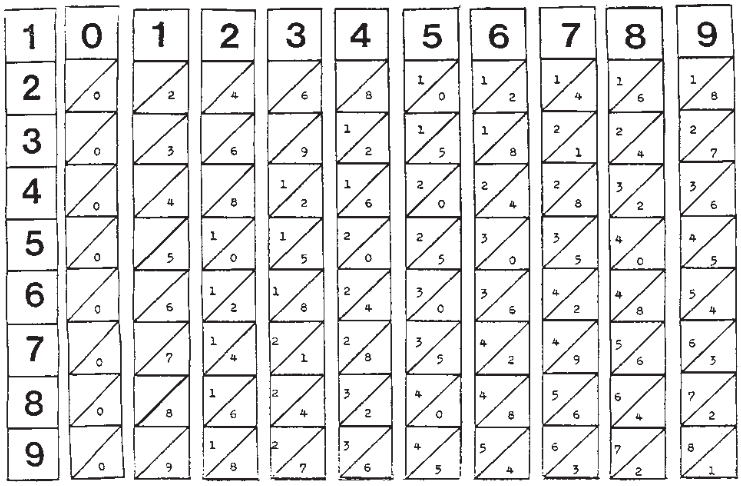
Bisogna aspettare molti secoli, e precisamente il Medioevo, per avere degli esempi di tecniche di moltiplicazione più vicine alla nostra (dopo l'avvento generalizzato del sistema di numerazione posizionale ad opera degli arabi, cosa troppo nota per approfondirla in questa sede).

Ecco due di queste tecniche (se ne trovano diverse altre), tra le più usate:



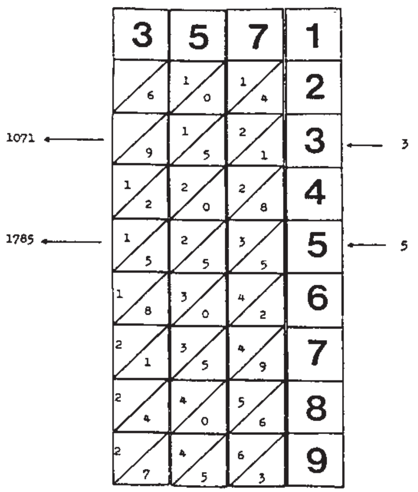
schema «a reticolo» o «a gelosia» schema «a quadrilatero»

Un esempio lampante di come l'uomo si sia sempre industriato per trovare dei sistemi per accelerare l'esecuzione dei calcoli lo abbiamo poi con l'invenzione, da parte del matematico Nepero (nel 1617) dei bastoncini detti, appunto, «di Nepero»:



Questi bastoncini[4] permettevano (sono un primo esempio di macchina calcolatrice!) di eseguire moltiplicazioni con grande rapidità. Eccone un esempio:

Eccone un esempio: **357 × 35 = 12495**



Quindi:

357 × 3 = 1071 ⟶ × 10 = 10710 +
357 × 5 = 1785 ⟶ 1785 =

12495

4. In pratica, i bastoncini di Nepero altro non sono che caselline un po' più pratiche (forse) delle nostre; in definitiva, la loro utilità sta nel fatto che qualunque moltiplicazione viene ridotta a un'addizione.

5. Conclusione

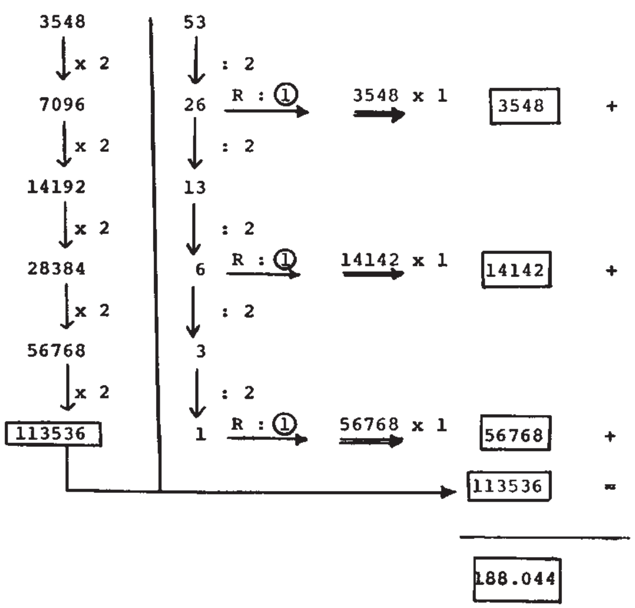
Terminiamo la nostra carrellata mostrando una tecnica antica (simile a quella della duplicazione degli egiziani) ma ancora usata tra i contadini russi.

Si basa su un principio semplicissimo:

«moltiplicando per due uno dei fattori di un prodotto, e contemporaneamente dividendo per due l'altro, il risultato non cambia (se teniamo conto, beninteso, dei resti delle divisioni)»

Ecco un esempio di questa tecnica:

$\boxed{3548 \times 53 = 188.044}$



Per chiarezza, riportiamo di seguito una spiegazione (più lunga, ma molto più dettagliata) del metodo seguito nell'esempio:

$$3548 \times 53 = 3548 \times (2 \times 26 + 1) =$$
$$= (3548 \times 2) \times 26 + \boxed{3548} =$$
$$= 7096 \times 26 + \boxed{3548} = 7096 \times (2 \times 13) + \boxed{3548} =$$
$$= (7096 \times 2) \times 13 + \boxed{3548} = 14192 \times (2 \times 6 + 1) + \boxed{3548} =$$
$$= (14.192 \times 2) \times 6 + \boxed{14.192} + \boxed{3548} = 28.384 \times (2 \times 3) + \boxed{14.192} + \boxed{3548} =$$
$$= (28.384 \times 2) \times 3 + \boxed{14.192} + \boxed{3548} = 56.768 \times (2 \times 1 + 1) + \boxed{14.192} + \boxed{3548} =$$
$$= (56.768 \times 2) \times 1 + \boxed{56.768} + \boxed{14.192} + \boxed{3548} =$$
$$= \boxed{113.536} + \boxed{56.768} + \boxed{14.192} + \boxed{3548} =$$
$$= \boxed{188.044}$$

A questo punto riteniamo di aver dato spunti sufficienti per organizzare una ricerca, o comunque un'attività di tipo didattico. C'è da tener presente che, per non appesantire il testo dell'articolo, abbiamo evitato di parlare sia di altre epoche storiche e di altri popoli (Maya, Cinesi, Indiani, ecc.) che di tutta la miriade di artifici scoperti attraverso i tempi per rendere più rapida e facile l'esecuzione delle operazioni (e in particolare della moltiplicazione) con l'ausilio di strumenti (abaci, tavole, ecc.): tutto ciò potrebbe costituire l'oggetto di un possibile approfondimento.

Bibliografia

Boucher. C. (1965). *Les nombres, leur histoire*. Montreal: Librairie des écoles.

Taton R. (1946). *Histoire du calcul*. Paris: Presses Universitaires de France.

Pavan M. (1970). *La numerazione ieri e oggi*. Busto Arsizio: Società Editoriale Varesina.

Picutti E. (1970). *Sul numero e la sua storia*. Milano: Feltrinelli.

Boyer C. (1976). *Storia della matematica*. Milano: Mondadori.

Kline M. (1976). *La matematica nella cultura occidentale*. Milano: Feltrinelli.

Bell E. T. (1950). *I grandi matematici*. Firenze: Sansoni.

Enciclopedia Treccani. Voci: «*Cifra*», «*Numerazione*», «*Numero*», «*Operazioni*».

Deledicq-Lassave. 1977, *«Faire» des mathematiques (6^{e})*. Paris: Cedic.

1. La consapevolezza dell'insegnante della dimensione semio-cognitiva dell'apprendimento della matematica

Maura Iori[1]

This paper addresses the issue of the mathematics teacher's awareness of the semiotic and cognitive aspects of learning, especially by highlighting the degree of awareness that the teacher shows about: (1) the level at which what the institution proposes as a mathematical object is placed and the level at which what the institution proposes as a semiotic representation of that mathematical object is placed; (2) the different aspects of a semiotic representation that the student able to handle the representation and the student who handles the representation with difficulty may focus on; (3) the semiotic conflicts generated by the contents of semiotic representations that are similar to each other in some respects. The issue is addressed within a broad theoretical framework based mainly on the semio-cognitive approach introduced by Raymond Duval, the semiotic-interpretive approach of the Peircean tradition, and the anthropological theory of the didactics by Yves Chevallard.

1. Premessa

Il problema della consapevolezza dell'insegnante della dimensione *semio-cognitiva* (cioè semiotica e cognitiva allo stesso tempo) dell'apprendimento della matematica costituisce un aspetto poco esplorato dalla ricerca, almeno in maniera diretta, e difficile da indagare in tutta la sua complessità, soprattutto perché, nella maggior parte dei casi, manca una formazione specifica al riguardo. Si tratta tuttavia di un aspetto di grande interesse e di estrema importanza, a livello sia teorico sia pratico, per intervenire in modo professionale sulle difficoltà di natura semiotica e cognitiva che lo studente e l'insegnante devono in qualche modo affrontare, gestire e controllare insieme. La nostra ricerca, condotta tra il 2012 e il 2013 nell'ambito di una tesi dottorale, si è focalizzata proprio su tale aspetto, ben consapevoli della sua inscindibilità da altri aspetti, come quelli di natura pedagogica, sociale, affettiva, e dalle concezioni epistemologiche manifestate dall'insegnante (anche in forma non del tutto consapevole) sulla matematica e sulla sua didattica.

2. Quadro teorico

Le ricerche sulla dimensione semio-cognitiva dell'apprendimento della matematica sono relativamente recenti, risalgono agli anni '90, in particolare agli studi pioneristici di Duval (1988a, 1988b, 1988c, 1993). Si sono focalizzate per lo più sullo studente, assumendo spesso implicitamente che le difficoltà di natura semiotica e cognitiva che emergono dalle produzioni matematiche dello studente siano anche quelle evidenziate dall'insegnante nell'analisi di tali produzioni, oppure nell'adattamento di determinati contenuti matematici al contesto dell'aula. Tali ricerche hanno mostrato sempre più chiaramente che le difficoltà che lo studente incontra nelle attività matematiche

1. PhD, membro del NRD, Università di Bologna.

derivano in gran parte (se non direttamente da fattori psicologici, affettivi, emozionali, sociali etc.) dal tipo di funzionamento cognitivo che l'attività matematica richiede in maniera specifica, ovvero dalla inscindibilità di tale funzionamento da una gestione esclusivamente semiotica degli oggetti matematici (D'Amore, 2001, 2006a, 2006b; Duval, 1993, 2011). Da qui la necessità da parte dell'insegnante di una presa di coscienza della peculiarità e complessità della gestione delle rappresentazioni semiotiche e dei segni utilizzati nelle attività matematiche, della inscindibilità di tale gestione dalla costruzione cognitiva di oggetti o concetti matematici e dunque dai processi di apprendimento in matematica. Ma fino a che punto l'insegnante è consapevole di tale dimensione?

L'obiettivo generale della nostra ricerca è stato proprio quello di evidenziare il grado di consapevolezza che l'insegnante manifesta:

1. del livello a cui si colloca ciò che l'istituzione (scuola, università, società etc.) propone come oggetto matematico (non in sé ma come) tema di apprendimento e del livello a cui si colloca ciò che l'istituzione propone come rappresentazione semiotica di quell'oggetto matematico nell'insegnamento-apprendimento della matematica;
2. dei diversi aspetti di una rappresentazione semiotica sui quali lo studente in grado di gestirla punta l'attenzione o basa le proprie produzioni matematiche;
3. dei diversi aspetti di una rappresentazione semiotica sui quali lo studente che la gestisce con difficoltà punta l'attenzione o basa le proprie produzioni matematiche;
4. dei conflitti semiotici generati dal contenuto (*representamen* in senso peirceano, veicolo o parte «materiale») di rappresentazioni semiotiche simili per qualche aspetto.[2]

Ma come concepire un oggetto matematico? Che cosa intendere per rappresentazione semiotica di un oggetto matematico?

2.1. Oggetti, segni, rappresentazioni e registri di rappresentazione

Iniziamo dalla parola «oggetto». Essa deriva dal sostantivo neutro *obiectum* (del latino medievale), dal verbo *obicere* «gettare o collocare davanti», «essere opposto», «contrapporre». Ma il concetto di «oggetto» emerge quando nel sostantivo neutro *obiectum* confluiscono due significati: quello di «ostacolo per la visione» adottato da Agostino d'Ippona (354–430), e quello associato da Aristotele al termine greco αντικείμενα (*antikeímena*, che etimologicamente significa «ciò che è posto di fronte») per designare gli opposti, i contrari, o più in generale una relazione reciproca tra due entità o fenomeni, come quella tra il conoscibile e la conoscenza, tra la capacità di conoscere e ciò che tale capacità permette di far conoscere. La parola «oggetto», da un punto di vista etimologico, designa dunque non solo ciò che sta di fronte, l'ostacolo interposto, ma anche ciò che è riconosciuto come risultato dell'atto del conoscere, ovvero della

2. Per *conflitto semiotico* (Godino, Batanero, & Font, 2007) intendiamo l'emergere di una discordanza tra le interpretazioni del contenuto di una rappresentazione semiotica da parte di due soggetti (persone o istituzioni).

relazione tra il soggetto e ciò su cui il soggetto focalizza la sua attenzione (per approfondire si veda: Cassin, Apter, Lezra, & Wood, 2014).

Questo spiega, almeno in parte, come mai oggi nell'uso della parola «oggetto» si tende spesso a confondere, anche nel contesto didattico, realtà differenti, in particolare le quattro realtà seguenti (Duval, 2009):

- l'oggetto come *cosa* (in greco: πρᾶγμα [*pragma*], in latino: *res*),[3] cioè l'oggetto concreto, fisico, accessibile attraverso i sensi (nel senso espresso nella *Metafisica* di Aristotele), direttamente o strumentalmente;
- l'oggetto *intenzional*e, vale a dire ciò su cui si focalizza l'attenzione, ciò a cui si punta, ciò che si percepisce, ciò che è immediatamente e direttamente notato (forma, colore, suono etc.) ogni volta che si dirige l'attenzione verso qualcosa, cioè l'oggetto di un atto (intenzionale) di significazione;
- l'oggetto *fenomenologico*, vale a dire l'oggetto così come appare nella coscienza e che permette al soggetto di riconoscerlo nelle sue occorrenze; oggetto complesso per il suo carattere predefinito da una parte e per la sua apertura e incompletezza dall'altra parte (Lanfredini, 2006);
- l'oggetto *di conoscenza*, vale a dire l'invariante, indipendentemente dal suo eventuale modo di «esistere» (qualunque cosa ciò voglia dire), di molteplici rappresentazioni possibili, in particolare:
  - l'oggetto *sperimentale*, cioè l'invariante causale di una molteplicità di fenomeni osservati (rappresentazioni non-semiotiche);
  - l'oggetto *matematico*, cioè l'invariante operatorio o logico-discorsivo di una molteplicità di rappresentazioni semiotiche.

Nell'insegnamento-apprendimento della matematica si fa riferimento sia a oggetti di conoscenza (oggetti matematici) sia a oggetti intesi come *cose*, sia a oggetti fenomenologici e intenzionali; spesso tra loro confusi. La posizione (implicitamente o esplicitamente) assunta da insegnanti e studenti sugli oggetti matematici ha dunque un ruolo non trascurabile, anzi cruciale, nell'insegnamento-apprendimento.

Nell'approccio semio-cognitivo di Duval, un oggetto matematico è l'invariante (operatorio oppure logico-discorsivo) di una molteplicità di rappresentazioni semiotiche. L'oggetto di conoscenza emerge dunque dal riconoscimento che due o più rappresentazioni sono rappresentazioni di un «medesimo oggetto» indipendentemente dai loro contenuti. La fede nella sua pre-esistenza non è necessaria, non serve. In altre parole, per Duval nessuna interpretazione filosofica (di tipo realista o idealista, costruttivista o platonica…) può essere indotta dalla sua caratterizzazione cognitiva degli oggetti matematici e dell'attività semiotica (R. Duval, comunicazione personale, 20 aprile, 2012). La pratica umana rimane la caratteristica distintiva esistenziale di un oggetto matematico.

3. Come riportato in Cassin et al. (2014), la parola greca *pragma* (tradotta in latino con *res*, spesso unita a *causa*) aveva inizialmente un significato legale e retorico (Aristotele, *Topici* 1.18, 108a21; *Retorica* 3.14, 1415b4). Essa designa non solo la realtà concreta e individuale data o immediatamente presente (esterna alla mente), ma anche il fatto o lo stato di cose in questione, il problema dibattuto o l'argomento di un discorso, il motivo o il risultato di un'attività (πρᾶξις [*praxis*], da πράσσω [*prassó*], «agire», «fare»), ovvero la cosa in relazione a un'azione.

Le rappresentazioni semiotiche, che possono focalizzare l'attenzione di un individuo su aspetti completamente opposti (dati visivi, oggetti concreti o invarianti), sono oggetti fenomenologici transitori (Duval, 2006b). Per esempio, un'equazione lineare in due variabili e la rappresentazione grafica di una retta sono due rappresentazioni semiotiche che rinviano ad aspetti completamente opposti. In esse si riconosce un medesimo oggetto matematico solo a condizione che l'attenzione si focalizzi su qualche loro invariante (le relazioni rappresentate), dunque non solo sui loro dati visivi e sulla loro organizzazione percettiva (Duval, 2006b). L'oggetto a cui rinvia una particolare organizzazione percettiva o sintattica, di una figura o di una frase, è invece un oggetto intenzionale. Per esempio ciascuno degli oggetti (forme o figure) che un individuo «vede» in una configurazione di unità figurali sovrapposte o giustapposte o in una «figura ambigua» costituisce un oggetto intenzionale. Il disegno in Figura 1 può per esempio rinviare a una particolare configurazione di sei triangoli, a un esagono, alla rappresentazione di un cubo «scheletrato» (visto dall'alto o dal basso) o alla rappresentazione di una piramide «scheletrata» a base esagonale (vista dall'alto o dal basso). Analogamente, una particolare interpretazione semantica di una frase che descrive un problema costituisce un oggetto intenzionale.

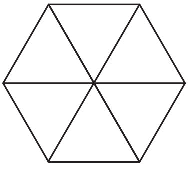


Figura 1. Che cosa rappresenta?

D'altra parte, segni e rappresentazioni semiotiche sono in un primo momento, per chi se li trova di fronte, macchie d'inchiostro su un foglio di carta, tracce di gesso sulla lavagna..., *cose* nel vero senso della parola. Dopo averli riconosciuti come *cose*, la prima domanda che ci si pone non è «Che *cosa* rappresentano?» ma, per l'appunto, «Che *cosa* sono?». In altre parole, per la persona che se li trova di fronte la prima volta non rappresentano nulla, così come non rappresenterebbero nulla in assenza dell'essere umano. Appaiono soltanto come cose concrete, oggetti nel senso del realismo *ingenuo*, dove quell' «ingenuo» non vuol dire «ingenuo in senso comune», ma si riferisce al *Naiven Realismus* così definito da Wilhelm Schuppe (1836 – 1913) (*Grundriss der Erkenntnistheorie und Logik*, 1894), cioè quello per cui si riconosce l'indipendenza concettuale dell'oggetto conosciuto dall'atto (psichico) con il quale viene conosciuto (D'Amore, 2005).

La loro *cosità* gioca dunque un ruolo del tutto rilevante per l'individuo che cerca in qualche modo di utilizzarli quando ancora, per lui, non rappresentano nulla. La mancanza di un accesso multisensoriale, diretto o strumentale (attraverso microscopi, telescopi, sensori etc.) agli oggetti matematici porta allora quasi inevitabilmente a confondere una certa rappresentazione di un certo oggetto matematico con l'oggetto stesso (Duval, 1993), generando ostacoli alla comprensione per un gran numero di studenti, e non solo.

Ma segni e rappresentazioni semiotiche possono essere tra loro confusi?

Due sono i modi completamente differenti di concepire i segni e dunque le produzioni matematiche.

Il primo modo, quello classico, è principalmente epistemologico: i segni sono considerati isolati (in assenza di sistemi semiotici) e rapportati all'oggetto a cui rinviano sulla base di tre relazioni: (a) somiglianza o no (relazione iconica/simbolica); (b) causalità (relazione indicale); (c) riferimento (irriducibile alla relazione di somiglianza o a quella di causalità), ottenuta mediante un'operazione intenzionale di designazione.

Per esempio, le prime due relazioni sono alla base della classificazione (icona, indice e simbolo) introdotta da Charles Sanders Peirce (1839–1914) per caratterizzare la relazione che un segno/*representamen* può avere con l'oggetto a cui si riferisce. Precisamente, l'*icona* mette in evidenza una relazione di somiglianza, l'*indice* una relazione di causalità (di tipo: effetto → causa), il *simbolo* una relazione che non è né di somiglianza né di causalità, ovvero una relazione posta in modo puramente convenzionale.

La terza relazione, quella di riferimento, è alla base della distinzione tra senso (*Sinn*) e significato (*Bedeutung*) di un segno (*Zeichen*) introdotta da Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848 – 1925) per spiegare i meccanismi di sostituzione o trasformazione dei segni utilizzati in matematica, ovvero il modo in cui un segno possa essere sostituito da o trasformato in un altro referenzialmente equivalente (cioè con lo stesso significato, *Bedeutung*), ma non semanticamente congruente (cioè con un senso, *Sinn*, o contenuto completamente differente).

In René Descartes (1596 – 1650), invece, la relazione tra segno (rappresentazione o idea) e oggetto rappresentato è di tipo puramente causale: «ciò che costituisce [*être objectif*] un'idea deve avere una causa reale» (Descartes, 1852, p. 606).[4]

In ogni caso i segni non sono completamente distinti dalle rappresentazioni, in quanto la loro principale funzione è ridotta a quella delle rappresentazioni: stare al posto di altri oggetti o evocare oggetti assenti.

Il secondo modo di concepire i segni risale a Ferdinand de Saussure (1857–1913) ed è eminentemente strutturalista: ad avere un ruolo prioritario non sono i singoli segni considerati come segni isolati in sé, ma i *sistemi di segni* (o *sistemi semiotici*), ovvero gli insiemi di segni muniti di una *struttura*. Quest'ultima è definita dalla rete di opposizioni, differenze, valori e dall'insieme di regole organizzatrici che permettono di operare sui segni. In base a tale struttura: «*I segni presentano la possibilità di* POTER ESSERE SOSTITUITI AD ALTRI SEGNI, *indipendentemente dagli oggetti che possono evocare*» (Duval, 2011, p. 27, corsivo e maiuscoletto dell'autore). Un segno è dunque concepibile solo all'interno di un sistema di segni, vale a dire solo in opposizione ad altri segni.

Per esempio: «1», di per sé, non è un segno; non è un segno se non si specifica il sistema in cui lo si considera. È un segno nel sistema binario (per la sua opposizione alla cifra «0» del sistema binario), oppure nel sistema decimale (per la sua opposizione alle altre nove cifre del sistema decimale) etc.; al di fuori del sistema da cui riceve il valore di segno è soltanto una macchia, priva di senso, non rappresenta alcun numero, nulla.

4. Tutte le citazioni in italiano di autori non italiani sono traduzioni nostre.

Un altro esempio interessante: nella lingua Shuar, il numero sette si scrive 7 e si legge «tsenken», cioè «bastone con un gancio per raccogliere la frutta», con la forma, appunto, della cifra 7. Dunque «7» di per sé non è un segno, bisogna dargli un contesto; nel contesto contadino (sistema della lingua naturale) è un «tsenken», nel contesto aritmetico (sistema decimale) è un sette (per approfondire si veda: D'Amore, 2002).

D'altra parte, il segno «1» del sistema binario o di quello decimale costituisce anche una rappresentazione semiotica del numero «uno» e si oppone ad altri tipi di rappresentazioni del medesimo numero prodotte da sistemi differenti, come quelle ottenute mediante abaci, *reglettes*, gesti, fiammiferi o sassolini, che funzionano non come segni, ma come *pseudo-oggetti* manipolabili concretamente, ovvero come marchi-unità. Tali rappresentazioni di tipo «concreto» o iconico svolgono principalmente una funzione di supporto visivo o materiale per alcune particolari operazioni. Esse richiedono in ogni caso l'articolazione con la lingua naturale o una scrittura simbolica (cioè con un registro semiotico) per esplicitare o effettuare le operazioni. (Per approfondire si veda: D'Amore, Fandiño Pinilla, & Iori, 2013; Duval, 2006c).

In modo analogo, le rappresentazioni del numero «nove» in un sistema di numerazione posizionale, per esempio nel sistema decimale, così come si oppongono alle rappresentazioni iconiche del numero «nove» ottenute mediante *reglettes*, indipendentemente dalla disposizione spaziale delle *reglettes*, si oppongono anche alle rappresentazioni del medesimo numero nel sistema di numerazione latino, che non è né posizionale, né additivo, ma qualcosa di intermedio. In tale sistema di numerazione, infatti, il principio di addizione, utilizzato per esempio in III, VI, XII, è spesso accompagnato dal principio di sottrazione, nel caso in cui un segno sia posto alla sinistra di un altro di valore maggiore, come in IX, XC, CM. In qualche caso però si utilizza anche il principio di moltiplicazione, in base al quale VM non starebbe per 1000–5, ma per 5000 (Cajori, 2007). In altre parole, il valore dei segni non varia allo stesso modo a seconda delle loro posizioni. In ogni caso, i segni del sistema di numerazione latino si caratterizzano sia per i loro valori oppositivi agli altri segni del sistema sia per le regole organizzatrici che determinano il loro uso e le loro combinazioni per la designazione di numeri. A differenza dei sistemi di numerazione posizionali, le rappresentazioni nel sistema di numerazione latino, come le rappresentazioni iconiche ottenute mediante abaci, *reglettes*, fiammiferi o sassolini, non richiedono l'uso di un segno specifico per designare un posto vuoto, il numero «zero», rendendo le operazioni piuttosto difficoltose o complesse. (Per approfondire si veda: D'Amore & Matteuzzi, 1976).

Come emerge dagli esempi sopra riportati, l'uso dei segni non è subordinato agli oggetti che i segni possono designare ma è vincolato al sistema che li produce, ovvero alla struttura di opposizioni interne che si considera, o che si ritiene più adeguata o efficace in determinati contesti, anche da un punto di vista meramente segnico (per esempio, nel caso delle operazioni, la struttura del sistema decimale è più efficace di quella del sistema di numerazione latino, per la presenza dello «zero»). Tale struttura determina le possibilità di trasformazione dei segni all'interno del sistema stesso cioè, in termini duvaliani, la funzione cognitiva di *trattamento* per la produzione di nuove conoscenze.

In matematica, il riferimento di un segno a un oggetto risulta soltanto da un'operazione esplicita di designazione, non da una relazione di causalità. In altre parole, le rappresentazioni semiotiche di un oggetto matematico O non sono causate dall'oggetto O, così come non sono l'effetto o l'evocazione di O. Si tratta di un punto importante ma spesso trascurato: la relazione tra le rappresentazioni semiotiche e l'oggetto matematico rappresentato non è definita in termini di causalità, ma di riferimento attraverso l'uso intenzionale di espressioni o frasi, ovvero attraverso *operazioni discorsive intenzionali di designazione*. Per esempio, nella descrizione della costruzione di una particolare figura geometrica del piano, le frasi: «Sia *r* la retta perpendicolare al segmento AB nel suo punto medio», «Sia *r* l'asse del segmento AB», «Sia *r* il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da A e B»… permettono di designare intenzionalmente con la lettera «*r*» (e non con la lettera «*a*» o altro) un particolare oggetto matematico che interviene nel processo di costruzione della figura. Si tratta di un'operazione discorsiva intenzionale di designazione che, come si è mostrato, può essere effettuata attraverso l'uso di frasi differenti, cioè con sensi completamente differenti, seppur referenzialmente equivalenti. In ogni caso: «La relazione di riferimento di un segno o di una combinazione di segni a un oggetto risulta da un'operazione discorsiva di designazione» (Duval, 2006c, p. 52), non da una relazione di causalità.

Sulla base della concezione di sistema di segni di de Saussure e della distinzione tra senso (*Sinn*) e significato (*Bedeutung*) di Frege, Duval (2006a) definisce un *sistema semiotico* come un insieme di elementi (segni) che assumono valore di senso solo in opposizione di scelta ad altri elementi e di regole organizzatrici che permettono di effettuare operazioni intenzionali di designazione e di combinare o raggruppare gli elementi in unità significanti (espressioni o unità figurali). Un *segno* è dunque concepito come una entità (parola, disegno, gesto etc.) intenzionalmente prodotta all'interno di un dato sistema semiotico per soddisfare una funzione di comunicazione. Non si identifica con una rappresentazione, in quanto il suo uso non è subordinato alla sola designazione di oggetti. Ci sono infatti situazioni in cui i segni non evocano di per sé alcun oggetto, ma sostituiscono semplicemente altri segni, come in algebra quando si utilizzano lettere per sostituire un dato insieme di possibili valori numerici, oppure nei codici che correlano termine a termine due liste di elementi (Eco, 1975, Capitolo 2). La possibilità di sostituire segni con altri segni non dipende necessariamente dalla conoscenza degli eventuali oggetti rappresentati, ma dal sistema produttore.

Per esempio: la frazione 3/6, che i bambini di V primaria forniscono senza difficoltà come rappresentazione della probabilità di ottenere un numero pari nel lancio di un dado a sei facce (D'Amore, 2006a, 2006b; 2007a, 2007b), può essere sostituita dalla frazione 4/8, ad essa equivalente, senza dover necessariamente tener conto dell'eventuale oggetto rappresentato. Anzi, come i lavori di ricerca sopra citati dimostrano, la conoscenza dell'oggetto rappresentato («la probabilità di avere una uscita pari nel lancio di un dado a sei facce») ostacola fortemente tale sostituzione, seppur perfettamente legittima nel sistema della scrittura frazionaria.

Analogamente, la sostituzione dell'equazione $-2x + y + 4 = 0$ con l'equazione $y = 2x - 4$ è strettamente legata al sistema della scrittura algebrica, ovvero ai trattamenti che tale sistema permette di effettuare, non dipende dalla conoscenza dell'oggetto rappresentato.

L'approccio di Duval ai segni, in linea con quello di de Saussure, si allontana dunque notevolmente dall'approccio peirceano nel quale, come si è detto, i segni sono concepiti sempre in relazione a un oggetto e dunque confusi con le rappresentazioni. La classificazione dei segni di Peirce, d'altra parte, non risulta sufficientemente discriminante nell'analisi delle produzioni matematiche: non permette per esempio di distinguere, fra le icone che evidenziano una struttura di tipo «diagramma» (in senso peirceano), le frasi, le equazioni, le figure geometriche e i grafici. Come mai?

L'uso del termine «diagramma» [dal greco διάγραμμα (*diagramma*), «ciò che è tracciato per mezzo di linee», «disegno»], da parte di Peirce, non è in alcun modo ristretto alle rappresentazioni grafiche che l'etimologia del termine suggerisce. Esso differisce dunque dall'uso comune che contrappone il diagramma inteso come rappresentazione grafica o pittorica alle rappresentazioni prodotte nella lingua naturale. Tale distinzione non esiste per Peirce (Hoffmann, 2010). Un diagramma ha soltanto due caratteristiche fondamentali: rappresenta relazioni ed è «effettuato su un sistema di rappresentazione perfettamente coerente» (CP 4.418, ca. 1903).[5] La sua somiglianza all'oggetto rappresentato è di tipo strutturale o relazionale. Da qui la sua iconicità. Un diagramma costituisce infatti un tipo speciale di icona che rappresenta la struttura del suo oggetto in termini delle relazioni che sussistono tra le sue parti. Queste ultime possono essere soggette a manipolazioni o esperimenti anche puramente mentali per rendere esplicite o dedurre nuove relazioni (EP 1:227, 1885).[6] Per esempio, quando:

- si deduce la tesi di un teorema a partire dalle ipotesi;
- in un disegno si vedono figure che in realtà non sono presenti;
- in un dipinto si stima la distanza tra gli oggetti rappresentati;
- si riconosce l'impossibilità della costruzione tridimensionale di particolari oggetti dipinti, oppure l'impossibilità di determinate prospettive;
- osservando un dipinto da diverse posizioni, si individua la posizione dalla quale è possibile riconoscere un'immagine che risulta invece deformata o incomprensibile se osservata da altre posizioni.[7]

In tutti questi casi si tratta di manipolare diagrammi (anche solo mentalmente) in base alle regole di «un sistema di rappresentazione perfettamente coerente» (CP 4.418, ca. 1903).

Per Peirce, la manipolazione di un dipinto non è differente dalla manipolazione di una figura geometrica, di un'equazione, di un'asserzione algebrica o di una frase che permette di rivelare ulteriori relazioni rispetto a quelle immediatamente osservabili.

La disposizione delle parole in una frase e, più in generale, la sintassi di un linguaggio non è arbitraria ma riflette, per Peirce, una certa iconicità rispetto alla struttura degli oggetti (o dei fatti) rappresentati: «Nella sintassi di ogni linguaggio ci sono icone logiche che sono aiutate ad essere tali da regole convenzionali» (PW 106).[8] L'iconicità tra la sintassi di un linguaggio e quella degli oggetti (o dei fatti) rappresentati è dunque parziale, a causa dell'interazione di elementi iconici (di tipo strutturale) e simbolici («regole convenzionali») nell'uso del linguaggio, ma è ciò che ne permette la comprensione: «Ciò che noi chiamiamo 'fatto' è qualcosa che ha la struttura di una propo-

5. CP x.xxx (volume.paragrafo) = *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*.
6. EP x:xxx (volume:pagina) = *The Essential Peirce*.
7. Una ricca e interessante raccolta di esempi di prospettive impossibili e di anamorfosi, al confine tra arte e matematica, si trova in D'Amore (2015).
8. PW xxx (pagina) = *Philosophical Writings of Peirce*.

sizione, ma è supposto essere un elemento dell'universo stesso» (NEM 4:239).[9]

Nell'approccio di Duval, invece, i segni funzionano solo in opposizione ad altri segni, ovvero all'interno di un sistema semiotico, indipendentemente da qualsiasi riferimento a un oggetto. Il criterio di classificazione si basa non sulla relazione tra il contenuto di un segno (rappresentazione) e l'oggetto a cui rinvia, ma sulle funzioni cognitive soddisfatte dai tipi di trasformazione (*trattamenti*) che si possono effettuare all'interno di un dato, fissato, stabilito sistema semiotico. Duval distingue in tal modo, come vedremo, quattro tipologie di sistemi semiotici, o meglio *registri di rappresentazione*. Vediamo nello specifico in che modo.

Un *registro di rappresentazione*, così come lo caratterizza Duval (1996), è un sistema semiotico che soddisfa funzioni di:
– *comunicazione*;
– *oggettivazione* (per sé stessi, non per la comunicazione);
– *trattamento* (trasformazione di una rappresentazione in un'altra rappresentazione all'interno dello stesso sistema semiotico, in funzione delle possibilità specifiche di trasformazione che il sistema semiotico permette di effettuare, per ottenere nuove informazioni).

Comune a tutte le rappresentazioni semiotiche, la funzione di *oggettivazione* (dal latino *obiectum*, «ciò che è posto davanti», e *facere*, «fare», dunque con il significato etimologico complessivo di «porre qualcosa davanti a qualcuno per renderlo apparente, ovvero presente ai sensi») consiste in una presa di coscienza di ciò, di un oggetto, di cui non si era coscienti prima di produrre (per sé stessi) una rappresentazione (Duval, 1995). L'oggettivazione è come un lampo di intuizione, è per sé stessi, non è la comunicazione ad altri né serve per crearla, è un fatto intrinseco personale; è necessaria ma non sufficiente per la costruzione cognitiva personale dell'oggetto matematico. Può riguardare non solo il modo di riconoscere l'oggetto, ma anche il modo di riconoscere il tipo di trattamento da effettuare nel registro più opportuno.

Per esempio, nella risoluzione di un problema, lo studente che non è in grado di riconoscere il procedimento o l'operazione più efficace in quella data situazione tende spesso a utilizzare tutto quello che gli viene in mente al riguardo (teoremi, formule, metodi utilizzati in altre situazioni etc.). Nelle parole di una partecipante alla nostra ricerca, lo studente in difficoltà cerca di «riportare contemporaneamente tutte le proprietà che sa essere relative all'oggetto senza saper scegliere quelle necessarie al caso specifico». Per esempio, se deve determinare la lunghezza della corda individuata da due circonferenze secanti, «lo studente cerca di applicare teoremi relativi al confronto tra la lunghezza delle corde, alla loro distanza dal centro, al fatto che la corda nel punto medio è perpendicolare al raggio, senza pensare, più semplicemente, a risolvere il sistema formato dalle due equazioni». In altre parole, lo studente in difficoltà non sa riconoscere il registro più opportuno e il trattamento più efficace da effettuare in quella data situazione. Segno, questo, di una mancata presa di coscienza degli oggetti coinvolti nella risoluzione del problema, ovvero di una mancata oggettivazione.

Il *trattamento* (trasformazione di una rappresentazione semiotica in un'altra dello stesso registro, del medesimo oggetto) e la *conversione* (trasformazione

9. NEM x:xxx (volume:pagina) = *The New Elements of Mathematics*.

di una rappresentazione semiotica di un determinato oggetto in un'altra, di un altro registro) sono strettamente legati alla funzione di oggettivazione: rendono possibile o evidenziano una presa di coscienza delle diverse relazioni tra le rappresentazioni semiotiche di un medesimo oggetto nel medesimo registro o in registri differenti, rispettivamente.

Tuttavia, come afferma Duval (1995), l'oggettivazione si accompagna spesso a una produzione di rappresentazioni semiotiche che può apparire insufficiente, inaccettabile o incomprensibile dal punto di vista della funzione di comunicazione. Per esempio, è ben nota agli insegnanti la tendenza dello studente ad abbreviare, comprimere, sottintendere, oppure omettere calcoli, notazioni, procedure, ragionamenti; a disegnare figure e grafici in modo approssimativo e affrettato; a interpretare erroneamente il senso di certi segni, per esempio quello del segno «=» usato spesso in senso procedurale anziché relazionale (Camici et al., 2002); e così via.

D'altra parte, la produzione di rappresentazioni semiotiche può essere soddisfacente dal punto di vista della comunicazione, ma non corrispondere ad alcuna oggettivazione da parte del soggetto che la produce. Per esempio, uno studente che fornisce una definizione precisa di un oggetto matematico dimostra di conoscere le parole e la sintassi della definizione dell'oggetto; se non è in grado di utilizzarla in situazioni significative, non dimostra di aver preso coscienza dell'oggetto, e tantomeno di averlo costruito cognitivamente. Analogamente, uno studente in grado di trasformare l'equazione implicita di una retta nell'equazione esplicita non dimostra di aver preso coscienza della geometria della retta; dimostra solo di essere in grado di effettuare un trattamento algebrico dell'equazione implicita. Allo stesso modo, il calcolo del limite di una funzione, svolto correttamente, non dimostra una presa di coscienza del concetto di limite della funzione; dimostra solo la conoscenza di un suo specifico trattamento algebrico. E così via.

Per essere in grado di comprendere o cominciare a comprendere un oggetto matematico, cioè per la sua oggettivazione, un solo registro non basta, non è sufficiente. L'oggettivazione è inscindibile dal riconoscimento di almeno due registri di rappresentazione dell'oggetto e della loro articolazione sinergica; cioè è inscindibile dal riconoscimento di un medesimo oggetto matematico in almeno due registri differenti. Ma tale presa di coscienza è indipendente dalla capacità di comunicarla. In altre parole, la funzione di oggettivazione è indipendente da quella di comunicazione.

Duval (2006a, 2006b, 2011) distingue quattro tipi di registri di rappresentazione:

Registri discorsivi

- *multifunzionali*
  [lingue naturali (scritte o parlate): per la designazione di oggetti, il ragionamento o l'enunciazione];
- *monofunzionali*
  (scritture simboliche: sistemi di numerazione, scrittura algebrica, linguaggi formali);

Registri non discorsivi

– *multifunzionali*

[di tipo *iconico*: disegni che conservano le «relazioni di vicinanza» tra le parti dell'oggetto;[10] di tipo *non-iconico*: configurazioni geometriche (costruzione, divisione e riconfigurazione, decostruzione dimensionale di forme)];

– *monofunzionali*

(configurazioni 2D di forme 1D o 0D secondo regole, grafici cartesiani).

I registri discorsivi, a differenza di quelli non discorsivi, hanno una struttura simile a quella delle lingue naturali; rendono in particolare possibili le operazioni di *enunciazione* (dire qualcosa per qualche scopo), *designazione* (indicare qualcosa con un termine opportuno) ed *espansione discorsiva* (articolare frasi in una unità coerente, come il ragionamento, la descrizione o spiegazione).

I registri monofunzionali sono propri della matematica: in essi i trattamenti possono assumere la forma di algoritmo come spesso capita nell'algebra di scuola. I registri multifunzionali, invece, sono utilizzati anche al di fuori della matematica per soddisfare funzioni di comunicazione o di oggettivazione, e non principalmente, o raramente, funzioni di trattamento; in essi i trattamenti non possono essere posti sotto forma di algoritmo, in quanto la grande varietà di operazioni discorsive (enunciati, designazioni, ragionamenti, descrizioni, spiegazioni etc.) e non discorsive (illustrazioni, manipolazioni, costruzioni o decostruzioni di figure) che essi permettono di effettuare è irriducibile a un insieme di istruzioni o di regole. Per esempio, per giustificare la formula dell'area del trapezio si possono effettuare differenti trattamenti nel registro multifunzionale della lingua naturale e, allo stesso tempo, nel registro multifunzionale delle configurazioni geometriche; lasciamo al lettore il compito di individuarne alcuni.

2.2. Aspetti di una rappresentazione semiotica

In matematica il processo di comprensione comincia con il riconoscimento della corrispondenza tra rappresentazioni differenti di un medesimo oggetto in registri differenti (Duval, 1995) o nel medesimo registro (D'Amore, 2006a, 2006b, 2007a, 2007b; Rojas Garzón, 2014; Santi, 2010). Come evidenzia Duval (2011): «*comprendere non è decodificare una sequenza di parole o di frasi, ma discriminare le unità di senso* [unità di contenuto] *in funzione dei differenti livelli di organizzazione dei discorsi ed eventualmente riformularli*» (p. 75, corsivo dell'autore). In altre parole, «*in matematica, non pensiamo mai in un unico registro, ma in vari allo stesso tempo*, anche se le produzioni privilegiano un unico registro» (Duval, 2011, p. 116, corsivo dell'autore).

La gestione delle rappresentazioni semiotiche di oggetti matematici dipende dunque fortemente dalla comprensione del ruolo giocato dalle loro diverse unità

10. Per esempio, in un volto umano disegnato (rappresentazione di tipo iconico), gli occhi, il naso e la bocca tendono a conservare la relazione di vicinanza tra gli occhi, il naso e la bocca del volto umano reale (*oggetto* della rappresentazione), anche se le suddette parti della rappresentazione possono avere forme completamente differenti da quelle dell'oggetto della rappresentazione, forme stilizzate o fantasiose.

di contenuto. Tali unità di contenuto determinano le varie componenti o i differenti aspetti di una rappresentazione semiotica sui quali ci si può focalizzare nella gestione della rappresentazione. Tra quelli più significativi per l'apprendimento abbiamo individuato (attingendo in parte alla classificazione dei segni di Peirce) i seguenti aspetti:

- *iconico-qualitativi* (aspetti concreti o di somiglianza della rappresentazione con qualcos'altro di concreto);
- *iconico-strutturali* (aspetti della rappresentazione legati alla sua costruzione, a proprietà o a teoremi);
- *di analogia* (aspetti della rappresentazione posti in rapporto, non necessariamente di somiglianza iconica, con il linguaggio quotidiano o l'esperienza sensibile);
- *indicali* (aspetti di rinvio a qualcos'altro, come a un'operazione da svolgere, a un'altra rappresentazione, a un altro oggetto matematico o a proprietà);
- *simbolici* (aspetti convenzionali della rappresentazione, come quelli legati a notazioni, definizioni, regole o vincoli d'uso).

La comprensione del loro ruolo è tutt'altro che spontanea e banale, come emerge anche dalla nostra ricerca. D'altra parte, su di essa si fonda il riconoscimento della corrispondenza tra le unità di contenuto di rappresentazioni differenti di un medesimo oggetto in registri differenti o nel medesimo registro, nelle trasformazioni di conversione e di trattamento, rispettivamente.

3. Domande di ricerca

L'obiettivo generale della nostra ricerca (§2) è stato tradotto nelle seguenti domande di ricerca:

D1. L'insegnante è consapevole della distinzione tra oggetto matematico (pre-definito, pre-costituito dalla istituzione) e una sua rappresentazione semiotica? In altre parole, per riferirsi a un oggetto matematico l'insegnante fornisce *intenzionalmente* diverse sue rappresentazioni possibili? Se sì, che tipo di registro utilizza più di frequente?

D2. L'insegnante riconosce i diversi aspetti di una rappresentazione semiotica sui quali lo studente in grado di gestirla può focalizzarsi? Se sì, a quali di essi attribuisce l'apprendimento dello studente?

D3. L'insegnante riconosce i diversi aspetti di una rappresentazione semiotica sui quali lo studente che la gestisce con difficoltà può focalizzarsi? Se sì, a quali di essi attribuisce le difficoltà di apprendimento dello studente?

D4. L'insegnante avverte i conflitti semiotici generati dai contenuti (*representamen*) di rappresentazioni semiotiche simili per qualche aspetto? Se sì, come li giustifica o a quali cause li riconduce?

Per rispondere a tali domande, l'approccio semio-cognitivo di Duval è stato integrato localmente (Prediger, Bikner-Ahsbahs, & Arzarello, 2008; Radford, 2008) con l'approccio semiotico-interpretativo di tradizione peirceana per la caratterizzazione di alcuni aspetti delle rappresentazioni semiotiche presi in esame nella ricerca

(§2.2), e con la teoria antropologica della didattica (Chevallard, 1992) per quanto concerne la *trasposizione didattica* (Chevallard, 1985) degli oggetti matematici, ovvero l'adattamento del Sapere (quello accademico, accettato dalla comunità dei matematici) al sapere da insegnare, e quindi la *dimensione istituzionale* della conoscenza matematica, ovvero le pratiche che una data istituzione (università, scuola, società…) considera appropriate per l'insegnamento-apprendimento della matematica.

4. Processo di ricerca

Poiché la ricerca aveva finalità prettamente esplorative, descrittive e interpretative, l'approccio di ricerca è stato principalmente qualitativo.

In accordo con il *paradigma di ricerca pragmatista* (Tashakkori & Teddlie, 2003),[11] la metodologia si è basata sulle domande di ricerca all'interno di un *disegno di ricerca a metodi misti* (Tashakkori & Teddlie, 1998). In altre parole, gli approcci di ricerca qualitativi e quantitativi sono stati combinati in un unico studio assegnando priorità all'approccio qualitativo, in modo da ottenere le migliori possibilità di risposta alle domande di ricerca, tenendo conto dei fattori contingenti (vincoli economici e di tempo) e contestuali (vincoli situazionali) alla ricerca. In particolare, lo studio si è basato su un disegno a metodi misti sequenziale a due fasi, nel quale la prima fase era principalmente qualitativa mentre la seconda solo qualitativa, cioè un disegno a metodi misti del tipo: QUAL + quan → QUAL.[12]

Per la raccolta dei dati sono stati utilizzati tre metodi di rilevazione: un questionario semi-strutturato o, in alternativa, un'intervista semi-strutturata nella prima fase (QUAL + quan), e interviste non strutturate nella seconda fase (QUAL).

La ricerca, durata oltre due anni, si è focalizzata sull'insegnante di scuola primaria e di scuola secondaria di primo e di secondo grado, in Italia.

Il questionario era costituito da dieci domande articolate in più quesiti, in gran parte a risposta aperta. Alcune erano formulate in modo da permettere al partecipante di aggiungere alternative o commenti. Il questionario è stato adattato al tipo di scuola (primaria, secondaria di primo e di secondo grado) di appartenenza dell'insegnante, ed è stato inviato per posta elettronica. In un primo momento è stato testato su un piccolo campione di quattro insegnanti, scelto sulla base della competenza professionale in matematica e in didattica della matematica, oltre che della disponibilità a partecipare alla ricerca. Successivamente, il questionario è stato inviato al campione più ampio di insegnanti, scelto soprattutto sulla base della disponibilità a partecipare alla ricerca. I partecipanti effettivi alla ricerca sono stati i seguenti: 11 insegnanti di scuola primaria, 11 insegnanti di scuola secondaria di primo grado e 5 insegnanti di scuola secondaria di secondo grado.

11. Sulla divergenza tra le teorie realiste e pragmatiste in didattica della matematica si veda: D'Amore e Godino (2006).
12. «qual» sta per qualitativo, «quan» sta per quantitativo, «+» sta per simultaneo, «→» sta per sequenziale; le lettere maiuscole denotano una priorità elevata, le lettere minuscole denotano una priorità bassa delle componenti qualitativa e quantitativa dello studio in una ricerca di tipo misto (Morse, 1991; Tashakkori & Teddlie, 1998).

È bene precisare che la nostra ricerca, interessata soprattutto a cogliere i significati o i sensi che gli insegnanti attribuiscono ai processi di apprendimento della matematica sulla base della loro formazione professionale e delle loro esperienze personali, ha richiesto un'analisi molto fine, profonda, particolareggiata, dettagliata, anche incrociata, delle risposte alle domande del questionario e delle interviste, che un campione molto ampio non avrebbe permesso di effettuare. D'altra parte, come risulta da varie ricerche sulle dimensioni dei campioni negli studi che utilizzano approcci di tipo qualitativo (per esempio: Mason, 2010), i campioni molto ampi, che superano le 30 unità, nella maggior parte dei casi non forniscono nuove informazioni rispetto ai campioni più piccoli, di 20-30 unità.

Lo scopo principale del questionario e delle interviste è stato quello di stimolare nell'insegnante una riflessione su alcune importanti questioni strettamente legate alle domande di ricerca; una riflessione sulla propria pratica che potesse in qualche modo evidenziare la sua consapevolezza della dimensione semiotica e cognitiva implicata nel processo di apprendimento della matematica. Il contenuto del questionario somministrato agli insegnanti è descritto sinteticamente qui di seguito.

Nella prima parte, si chiedeva all'insegnante di (1) scegliere un campo di studio della matematica (per esempio, nel caso della scuola primaria: geometria piana, geometria solida, aritmetica, linguaggio degli insiemi, trasformazioni geometriche nel piano, calcolo combinatorio, calcolo delle probabilità, statistica, algebra, geometria analitica o un altro campo di studio prescelto dall'insegnante). Nel campo di studio scelto, l'insegnante doveva (2) individuare una particolare rappresentazione R, in un dato registro, di un oggetto matematico O che un determinato studente X (da lui stesso identificato) riconosce o gestisce con molta difficoltà. Per evitare interpretazioni errate o fuorvianti delle domande, nella parte introduttiva del questionario era stato specificato in forma sintetica il senso attribuito all'espressione «oggetto matematico», ben consapevoli del fatto che potesse non essere quello attribuito spontaneamente o fatto proprio da tutti gli insegnanti. L'insegnante doveva poi (3) indicare gli aspetti della rappresentazione R sui quali lo stesso studente X focalizza maggiormente la sua attenzione, scegliendoli tra quelli elencati nel questionario oppure suggerendone altri. Successivamente, doveva (4) indicare quali, tra gli aspetti indicati al punto precedente, riteneva fossero da ricondurre, in massima parte, le difficoltà che incontra lo studente X nell'uso della rappresentazione R.

Si chiedeva poi all'insegnante di pensare a un altro studente Y, della stessa classe di X, che non incontra alcuna difficolta, o che incontra soltanto alcune difficoltà che l'insegnante ritiene poco significative, nell'uso della rappresentazione R. Come nel caso dello studente X, l'insegnante doveva (5) indicare gli aspetti della rappresentazione R sui quali lo studente Y focalizza maggiormente la sua attenzione, scegliendoli tra quelli elencati nel questionario oppure suggerendone altri; (6) indicare quali, tra gli aspetti indicati al punto precedente, riteneva fosse da ricondurre, in massima parte, la capacità dello studente Y di utilizzare la rappresentazione.

Gli aspetti della rappresentazione R elencati nel questionario erano i seguenti:

a) aspetti concreti, legati alla sua forma, dimensione, colore, posizione etc.;
b) somiglianza di R con qualcos'altro di concreto;
c) aspetti strutturali, come quelli legati:
   c1) alla costruzione di R (per esempio: Come disegnare o costruire una figura? Come tracciare un grafico? Come scrivere o ricavare una formula, un'espressione, un'equazione, una funzione etc.?)
   c2) a proprietà
   c3) a teoremi;
d) aspetti legati al linguaggio quotidiano o all'esperienza sensibile;
e) aspetti di rinvio a qualcos'altro (a un'operazione da svolgere, a un'altra rappresentazione, a un altro oggetto matematico, a proprietà etc.);
f) aspetti convenzionali, legati a:
   f1) notazioni
   f1) definizioni
   f1) regole o vincoli d'uso.

Si chiedeva in ogni caso di fornire anche qualche esempio specifico.

Nelle domande relative ai punti (3), (4), (5) e (6) sopra indicati, le alternative «a» e «b» sono state poste in relazione con gli aspetti iconico-qualitativi della rappresentazione R; l'alternativa «c» è stata posta in relazione con gli aspetti iconico-strutturali; le alternative «b» e «d» sono state poste in relazione con gli aspetti di analogia; l'alternativa «e» è stata posta in relazione con gli aspetti indicali; l'alternativa «f» è stata posta in relazione con gli aspetti simbolici di R.

Nella seconda parte del questionario si chiedeva all'insegnante di scegliere, tra le rappresentazioni semiotiche elencate nel questionario, quella (RX) che riteneva più problematica per lo studente X. In corrispondenza di RX doveva individuare, sempre dal punto di vista dello studente X:

I. le eventuali rappresentazioni semiotiche che per lo studente X mostrano una certa somiglianza (sotto qualche aspetto) con RX;
II. le eventuali rappresentazioni con le quali RX può essere confusa;
III. le eventuali convenzioni (regole, vincoli, limiti d'uso…) per l'uso di RX, delle quali lo studente X è ben consapevole;
IV. i principali contesti nei quali lo studente X utilizza la rappresentazione RX;
V. la complessità d'interpretazione e d'uso (in relazione ai contesti considerati) di RX, per lo studente X, scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

L'argomento relativamente nuovo e le domande molto articolate hanno reso il questionario particolarmente lungo e impegnativo per l'insegnante. In ogni caso, lo hanno costretto a riflettere da un punto di vista nuovo, per lui insolito e inusuale, su una dimensione specifica dell'apprendimento, una dimensione in grado di svelare la complessità dei processi di comprensione sottostanti le attività matematiche che il punto di vista matematico (focalizzato principalmente sui contenuti matematici da veicolare), da solo, spesso nasconde.

5. Risposte alle domande di ricerca

Le risposte alle domande di ricerca sono state ricavate dall'analisi qualitativa e quantitativa dei dati ottenuti dal questionario e dalle interviste effettuate nel corso della ricerca. I dettagli dell'analisi, che qui tralasciamo per brevità, sono riportati in Iori (2015).

Le notazioni utilizzate nel seguito sono le seguenti:
Tn = insegnante n, essendo n l'n-esimo insegnante (in ordine di tempo) che ha completato il questionario;
SP = scuola primaria;
SS I = scuola secondaria di primo grado;
SS II = scuola secondaria di secondo grado;
Ric = ricercatore/intervistatore.

Altri segni grafici utilizzati nella trascrizione delle interviste:
… = esitazioni, pause brevi;
[…] = omissione di una parte del discorso;
italico = indica qualche forma di enfasi, attraverso il tono della voce;
[NC] = note comprendenti / piccole spiegazioni del ricercatore.

Le risposte alle domande di ricerca D1, D2, D3 e D4 (§3) sono riportate nei paragrafi 5.1., 5.2., 5.3. e 5.4., rispettivamente.

5.1. Oggetti, rappresentazioni e registri di rappresentazione

La consapevolezza della distinzione tra oggetto matematico (pre-definito, pre-costituito dalla istituzione) e una sua rappresentazione semiotica è stata rilevata sulla base delle risposte dell'insegnante alle domande n. 1a («A quale oggetto matematico O hai pensato?») e n. 2 («Quale rappresentazione R dell'oggetto matematico O lo studente X riconosce o gestisce con molta difficoltà, pur impegnandosi molto nelle attività matematiche?») e alle altre domande del questionario ad esse strettamente legate, contenenti almeno due rappresentazioni semiotiche differenti di un medesimo oggetto matematico.

Dall'analisi delle risposte è emerso che l'insegnante, soprattutto di scuola secondaria, manifesta di essere consapevole della distinzione tra il livello a cui si colloca l'oggetto matematico O e il livello a cui si colloca una sua rappresentazione R(O) ma, nella maggior parte dei casi, interpreta in modo personale o per semplice assonanza il significato di alcune espressioni chiave, come «oggetto matematico», «rappresentazione semiotica» e «registro di rappresentazione». Inevitabilmente, in mancanza di una preparazione specifica su argomenti di semiotica, le risposte dell'insegnante denotano un uso non specialistico di tali espressioni. Per esempio, da esse risulta che l'idea di oggetto matematico, se non è esplicitamente confusa con quella di rappresentazione semiotica, rimane vincolata alla situazione in esame, a rappresentazioni specifiche o loro trasformazioni (trattamenti o conversioni), a definizioni o teoremi; in tutti i casi rimane distante dall'idea di invariante di rappresentazioni. Rappresentazioni semiotiche (del medesimo oggetto) tra loro *non congruenti* (cioè non «simili» per qualche aspetto) ovvero *cognitivamente distanti* (cioè relativamente distanti da un punto di vista cognitivo) sono spesso associate a oggetti matematici differenti.

Di conseguenza, la consapevolezza della distinzione tra il livello a cui si colloca l'oggetto matematico e il livello a cui si colloca una sua rappresentazione semiotica, nel quadro teorico di questa ricerca, non è potuta emergere in tutta la sua specificità e profondità. In ogni caso non può dirsi pienamente raggiunta. Ma proprio ciò fornisce materiale di studio per future più specifiche ricerche.

Alcuni esempi

T1 (SP) ha fornito la stessa risposta («frazioni») alle domande n. 1a e 2, identificando l'oggetto O denominato «frazioni» con la rappresentazione «frazioni» nel registro della lingua naturale. Durante l'intervista, T1 ha confermato la sua risposta:

Ric: Per te c'è una qualche differenza tra queste due risposte?

T1: Se ti devo dare la risposta istintiva… No. No perché, è come se il titolo stesso avesse procurato in questo studente un blocco. Non so spiegarmi… Ora, mi diventa molto difficile dirti… [Rilegge le domande] A quale oggetto matematico hai pensato, la frazione. Quale rappresentazione R, non te la so poi dire. Cioè non riesco ad approfondire, capisci? Perché ti potrei, e sarebbe assurdo, dirti qualunque rappresentazione. Quindi quella numerica, quella del ragionamento astratto, quella concettuale, quella semiotica addirittura molte volte, forse è l'unica… […] Ah, ecco! L'oggetto e la rappresentazione, per questo bambino, secondo me, coincidevano, oppure si fondevano l'una nell'altra.

In T1 è presente l'idea che ci siano diverse rappresentazioni di un medesimo oggetto, anche se l'idea di «rappresentazione» è un po' confusa. In ogni caso, secondo T1, «l'oggetto e la rappresentazione», per lo studente in questione, coincidono o si fondono l'una nell'altra.

T2 (SP), in un primo momento, ha identificato l'oggetto matematico O della domanda n. 1a con una rappresentazione nel piano di un oggetto 3D (Figura 2), ovvero con una sua rappresentazione nel registro delle configurazioni geometriche.

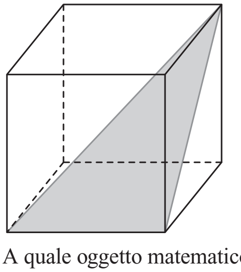


Figura 2. A quale oggetto matematico O hai pensato?

Successivamente, stimolata a dire qualcosa di più al riguardo, ha affiancato al disegno un'altra rappresentazione nel registro della lingua naturale: «Oggetto: rappresentazione 2D di un triangolo in un cubo». Come rappresentazione semiotica R di O (domanda n. 2), T2 ha fornito una proprietà dell'oggetto: «La perpendicolarità tra uno spigolo e la diagonale, di una faccia, che ha un estremo in comune con esso». Dall'intervista è poi emerso che T2 voleva identificare la rappresentazione R con la lettura di una particolare unità di contenuto del disegno in Figura 2. Una unità di contenuto (il triangolo in Figura 2) nella quale si confondono aspetti iconico-qualitativi (aspetti concreti legati alla sua forma 2D), aspetti iconico-strutturali (legati soprattutto a proprietà), aspetti indicali (di rinvio a un'altra rappresentazione in 3D e alle sue proprietà). D'altra parte, la lettura di una tale unità di contenuto richiede trattamenti e conversioni (anche se solo mentali) della rappresentazione da parte del soggetto (lo studente) che cerca di metterla in corrispondenza con qualche altra rappresentazione a lui nota. Da qui l'identificazione della rappresentazione R con una trasformazione di rappresentazioni.

T26 (SP) ha scelto come oggetto O (domanda n. 1a) «la rappresentazione di una frazione inserita in un contesto problematico» fornendo al riguardo tre esempi di produzioni dei suoi studenti; uno di questi è riportato in Figura 3.

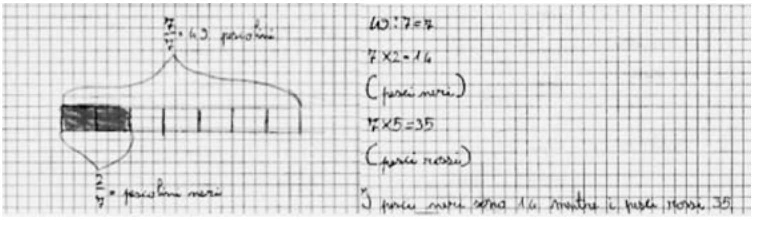


Figura 3. In un acquario ci sono 49 pesci. I 2/7 di questi sono neri mentre gli altri sono rossi. Quanti sono i pesci neri? Quanti sono i pesci rossi?

La rappresentazione R dell'oggetto O (domanda n. 2) è stata descritta nei termini seguenti:

T26: Lo studente X rappresenta senza difficoltà frazioni di figure, ma ha difficoltà ad associare la rappresentazione geometrica della frazione alla situazione problema alla quale la frazione è legata.

Per T26, dunque, oltre all'oggetto «frazione» esiste un altro oggetto che si chiama ancora «frazione» ma «in un contesto problematico». L'oggetto dipende dal contesto, dalla situazione, cioè esistono vari oggetti «frazioni» a seconda della situazione. Questa apparente dipendenza, secondo il punto di vista dell'insegnante, dell'oggetto dalla situazione deriva dal fatto che lo studente non incontra difficoltà nel fornire una rappresentazione iconica della frazione utilizzata nella risoluzione di un problema, ma incontra difficoltà ad associare tale rappresentazione al contesto problematico al quale la frazione è legata. Per esempio, lo studente è in grado di rappresentare 4/7 della lunghezza di un segmento o della superficie di una figura, ma non è in grado di attribuire a tale rappresentazione un significato diverso, legato al contenuto dell'enunciato del problema che ha suggerito l'uso di quella frazione. Da un punto di vista semio-cognitivo, questa difficoltà dello studente, evidenziata dall'insegnante, si riconduce alla non congruenza o distanza cognitiva tra il contenuto della rappresentazione iconica dell'oggetto «frazione» e il contenuto dell'enunciato del problema. È proprio questa non congruenza, o distanza cognitiva, a rendere difficile il riconoscimento di un medesimo oggetto, fino al punto da far apparire l'oggetto «frazione» nel «contesto problematico» come un oggetto differente dall'oggetto «frazione» in un contesto («non problematico») nel quale la congruenza semantica tra le unità di contenuto delle rappresentazioni facilita il riconoscimento di un medesimo oggetto (come per esempio nel contesto di un esercizio in cui sono richieste soltanto delle operazioni sulle frazioni). In altre parole, per T26 la difficoltà di riconoscere un medesimo oggetto nel «contesto problematico» diventa una caratteristica intrinseca dell'oggetto, incorporata nell'oggetto, che trasforma l'oggetto in un oggetto differente (con un nome differente).

Si noti che la rappresentazione R, scelta da T26 nella risposta alla domanda n. 2, si riferisce a un'azione, in particolare a una trasformazione di rappresentazioni dal registro delle rappresentazioni di tipo iconico (disegni) al registro della lingua naturale nel quale è formulato il problema, dunque una conversione.

T9 (SS I) ha scelto come oggetto O (domanda n. 1a) «relazione di proporzionalità inversa» e come rappresentazione R dell'oggetto O (domanda n. 2) «grafico (arco di iperbole equilatera)» ovvero una rappresentazione nel registro grafico, espressa per semplicità nel registro della lingua naturale. Emerge in questo caso una certa consapevolezza della distinzione tra i due livelli sopra menzionati, quello dell'oggetto e quello della rappresentazione, confermata anche dalle risposte che ha fornito alle domande successive.

T4 (SS II) ha scelto come oggetto O (domanda n. 1a) «equazione della circonferenza nelle due forme che si studiano a scuola». La rappresentazione R dell'oggetto O (domanda n. 2) è stata descritta nei termini seguenti:

T4: **La rappresentazione sul piano cartesiano della circonferenza a partire dalle equazioni che la identificano.**

Ric: Perché «equazioni» al plurale e «circonferenza» al singolare? A che tipo di equazioni (diverse) fai riferimento?

T4: Equazione della circonferenza di centro e raggio assegnati, ed equazione della circonferenza in forma estesa. Per alcuni ragazzi, come ben sai, sono proprio due oggetti diversi.

Da quest'ultima frase, molto sottile, emerge che T4 tratta le due equazioni come oggetti diversi, in quanto associate a due situazioni diverse. Ricorda il caso di T26: l'oggetto dipende dalla situazione, per cui, in due situazioni differenti, l'oggetto «equazione della circonferenza» (inteso come «oggetto circonferenza individualizzato algebricamente nel piano cartesiano») assume «due forme» diverse. La loro diversità, distanza cognitiva o non congruenza prima di un loro opportuno trattamento nel registro della scrittura algebrica, ostacola il riconoscimento immediato di un medesimo oggetto, fino al punto da trasformare l'oggetto in questione in due oggetti differenti in relazione alle situazioni sopra descritte.

Per quanto riguarda i registri utilizzati dall'insegnante, il loro numero, e dunque il numero delle rappresentazioni, aumenta considerevolmente, in relazione ai contenuti sviluppati nei diversi ordini di scuola. Da un minimo di due a un massimo di quattro registri utilizzati dall'insegnante di scuola primaria e dall'insegnante di scuola secondaria di primo grado, si passa a un minimo ancora di due fino a un massimo di sei registri utilizzati dall'insegnante di scuola secondaria di secondo grado.

L'insegnante di scuola primaria (soprattutto delle ultime classi) ricorre in primo luogo alla coppia di registri (lingua naturale, scrittura frazionaria) spesso accompagnata da un terzo registro, quello delle rappresentazioni di tipo iconico (disegni), e poi alla coppia di registri (lingua naturale, registro multifunzionale delle configurazioni geometriche). L'insegnante di scuola secondaria di primo grado e l'insegnante di scuola secondaria di secondo grado (delle prime tre classi) ricorrono invece entrambi, in primo luogo, alla coppia di registri (lingua naturale, registro multifunzionale delle configurazioni geometriche) e poi alla coppia di registri (lingua naturale, scrittura algebrica) spesso accompagnata dal registro grafico.

La maggior parte degli insegnanti di scuola primaria utilizza o menziona anche abaci, *reglettes*, modellini, perline etc. Si tratta di rappresentazioni «concrete» o iconiche che, come si è detto (§2.1), richiedono in ogni caso l'articolazione con un registro semiotico (come la lingua naturale o una scrittura simbolica) per evidenziare relazioni, esplicitare o effettuare operazioni. D'altra parte, l'uso acritico, non sempre giustificato e analizzato nei dettagli, di rappresentazioni concrete può suscitare nello studente più debole fraintendimenti o incomprensioni che ostacolano o impediscono la gestione delle rappresentazioni proprie della matematica alle quali le rappresentazioni concrete vengono associate. Si tratta di rappresentazioni semiotiche (non di pseudo-oggetti), rappresentazioni semiotiche che l'istituzione (scuola, università, società etc.) considera necessarie per l'apprendimento di un dato contenuto matematico, ovvero per la costruzione cognitiva di determinati oggetti matematici. Molti esempi e riflessioni di carattere didattico e concreto sulla gestione di tali rappresentazioni e le insidie che possono nascondersi dietro al loro uso si trovano in: D'Amore, Fandiño Pinilla, & Iori (2013).

5.2. Aspetti di una rappresentazione che ne favoriscono la comprensione

Il riconoscimento dei diversi aspetti (iconico-qualitativi, iconico-strutturali, di analogia, indicali, simbolici) di una rappresentazione semiotica sui quali lo studente in grado di gestirla punta l'attenzione o basa le proprie produzioni matematiche è stato rilevato sulla base della capacità dell'insegnante di riconoscere l'alternativa di risposta fornita dal questionario che meglio descrive la sua risposta personale, ovvero sulla base della capacità dell'insegnante di classificare la sua risposta.

Dall'analisi delle risposte è emerso che l'insegnante riconosce e sa classificare alcuni aspetti di una rappresentazione semiotica R sui quali lo studente, in grado di gestire la rappresentazione R, si focalizza (Tabella 1). Si tratta soprattutto di aspetti iconici di tipo strutturale (legati alla costruzione di R, a proprietà o a teoremi).

	(a, b) Aspetti iconici di tipo qualitativo	(c) Aspetti iconici di tipo strutturale	(b, d) Aspetti di analogia	(e) Aspetti indicali	(f) Aspetti simbolici
SP	4	8	5	3	3
SS I	3	8	1		7
SS II	2	4		4	3
Tot (su 55)	9 (16%)	20 (36%)	6 (11%)	7 (13%)	13 (24%)

Nota Le percentuali fanno riferimento al numero complessivo (55) degli aspetti evidenziati dagli insegnanti.

Tabella 1. Aspetti della rappresentazione R sui quali lo studente Y, in grado di gestirla, si focalizza

Inoltre, l'insegnante riconosce e sa classificare gli aspetti di una rappresentazione semiotica R ai quali attribuisce la capacità dello studente di gestirla (Tabella 2). Tali aspetti coincidono in gran parte con quelli sui quali lo studente si focalizza (Tabella 1).

	(a, b) Aspetti iconici di tipo qualitativo	(c) Aspetti iconici di tipo strutturale	(b, d) Aspetti di analogia	(e) Aspetti indicali	(f) Aspetti simbolici
	3	8	5	4	3
SS I	1	8			4
SS II		4		3	3
Tot (su 46)	4 (9%)	20 (43%)	5 (11%)	7 (15%)	10 (22%)

Nota Le percentuali fanno riferimento al numero complessivo (46) degli aspetti evidenziati dagli insegnanti.

Tabella 2. Aspetti della rappresentazione R ai quali l'insegnante attribuisce la capacità di Y di gestire R

L'insegnante di scuola primaria attribuisce la capacità dello studente di gestire la rappresentazione R al fatto di focalizzarsi soprattutto sugli aspetti legati alla costruzione e alle proprietà di R, ovvero sugli aspetti iconico-strutturali di R, e sugli aspetti di analogia (aspetti posti in rapporto, non necessariamente di somiglianza, con il linguaggio quotidiano o l'esperienza sensibile).

L'insegnante di scuola secondaria attribuisce la capacità dello studente di gestire R al fatto di focalizzarsi in primo luogo sugli aspetti legati alla costruzione di R, a proprietà o a teoremi (aspetti iconico-strutturali di R), e in secondo luogo sugli aspetti convenzionali, come quelli legati a notazioni, definizioni, regole o vincoli d'uso (aspetti simbolici di R) (Tabella 2).

Alcuni esempi

T6 (SP), in relazione all'oggetto «numeri razionali» e alla rappresentazione nella scrittura frazionaria, ha risposto alla domanda relativa al punto (6) evidenziando in particolare le alternative «c1», «c2» e «d», descritte nella risposta relativa al punto (5) nei termini seguenti: (c1) «costruzione di R»; (c2) «proprietà»; (d) «aspetti legati al linguaggio quotidiano, in particolare: la propria esperienza nella quotidianità in punteggi, probabilità, percentuali, statistica». Si tratta di aspetti legati alla costruzione di R, ovvero iconico-strutturali, e di aspetti di analogia.

T18 (SS I), in relazione all'oggetto «angolo» e alla rappresentazione R «il concetto di angolo come superficie infinita», ha ricondotto la capacità dello studente Y di utilizzare la rappresentazione R [punto (6)] al fatto di focalizzarsi soprattutto su «definizioni» e «regole o vincoli d'uso»:

T18: Le definizioni e le regole non sono state semplicemente memorizzate meccanicamente ma comprese e interiorizzate.

In questo caso l'insegnante fa riferimento ad aspetti convenzionali della rappresentazione, legati a definizioni, regole o vincoli d'uso, ovvero ad aspetti simbolici. Si noti, d'altra parte, l'identificazione della rappresentazione R dell'oggetto «angolo» con l'oggetto stesso.

T4 (SS II), in relazione all'oggetto «equazione della circonferenza nelle due forme che si studiano a scuola» e alla rappresentazione nel piano cartesiano della circonferenza, alla domanda relativa al punto (6) ha fornito la seguente risposta:

T4: Individua come prima cosa il centro della circonferenza, quindi disegna il resto. Applica correttamente i principi di equivalenza delle equazioni, ed è in grado di passare da una forma all'altra senza difficoltà.

In altre parole, lo studente si focalizza su aspetti legati alla costruzione e alle proprietà della rappresentazione R.

5.3. Aspetti di una rappresentazione che ne ostacolano la comprensione

Il riconoscimento dei diversi aspetti (iconico-qualitativi, iconico-strutturali, di analogia, indicali, simbolici) di una rappresentazione semiotica sui quali lo studente che la gestisce con difficoltà punta l'attenzione o basa le proprie produzioni matematiche è stato rilevato, anche in questo caso, sulla base della capacità dell'insegnante di riconoscere l'alternativa di risposta fornita dal questionario che meglio descrive la sua risposta personale, ovvero sulla base della capacità dell'insegnante di classificare la sua risposta. Dall'analisi delle risposte è emerso che l'insegnante riconosce e sa classificare alcuni aspetti di una rappresentazione semiotica R sui quali lo studente che la gestisce con difficoltà si focalizza (Tabella 3). Si tratta soprattutto di aspetti iconici di tipo qualitativo (aspetti concreti di R, come quelli legati alla sua forma, dimensione, colore o posizione) o di aspetti indicali (aspetti di rinvio a qualcos'altro, come a un'operazione da svolgere, a un'altra rappresentazione, a un altro oggetto matematico o a proprietà) nel caso dell'insegnante di scuola primaria; di aspetti iconici di tipo strutturale (legati alla costruzione di R, a proprietà o a teoremi) nel caso dell'insegnante di scuola secondaria di primo e di secondo grado.

	(a, b) Aspetti iconici di tipo qualitativo	(c) Aspetti iconici di tipo strutturale	(b, d) Aspetti di analogia	(e) Aspetti indicali	(f) Aspetti simbolici
SP	8	2	5	7	1
SS I	6	8	5	4	5
SS II	3	5		3	1
Tot (su 63)	17 (27%)	15 (24%)	10 (16%)	14 (22%)	7 (11%)

Nota Le percentuali fanno riferimento al numero complessivo (63) degli aspetti evidenziati dagli insegnanti.

Tabella 3. Aspetti della rappresentazione R sui quali lo studente X, che la gestisce con difficoltà, si focalizza

Inoltre, l'insegnante riconosce e sa classificare gli aspetti della rappresentazione semiotica R ai quali riconduce le difficoltà che incontra lo studente nella sua gestione (Tabella 4). Questi ultimi non sempre coincidono con quelli sui quali si focalizza lo studente (Tabella 3). Secondo l'insegnante, infatti, lo studente in difficoltà si focalizza per lo più sugli aspetti concreti della rappresentazione R, mentre le difficoltà di gestione di R, secondo lo stesso insegnante, sono da ricondurre per lo più ad aspetti legati alla costruzione di R o a proprietà dell'oggetto rappresentato (aspetti iconico-strutturali).

	(a, b) Aspetti iconici di tipo qualitativo	(c) Aspetti iconici di tipo strutturale	(b, d) Aspetti di analogia	(e) Aspetti indicali	(f) Aspetti simbolici
SP	9	4	3	5	3
SS I	2	7	3	2	6
SS II	2	4		2	3
Tot (su 55)	13 (24%)	15 (27%)	6 (11%)	9 (16%)	12 (22%)

Nota Le percentuali fanno riferimento al numero complessivo (55) degli aspetti evidenziati dagli insegnanti.

Tabella 4. Aspetti della rappresentazione R ai quali l'insegnante riconduce la difficoltà di X di gestire R

L'insegnante di scuola primaria, in particolare, riconduce la difficoltà dello studente nella gestione di R al fatto di focalizzarsi in primo luogo sugli aspetti concreti di R, come quelli legati alla sua forma, dimensione, colore, posizione o alla somiglianza di R con qualcos'altro di concreto (aspetti iconici di tipo qualitativo), e in secondo luogo sugli aspetti di rinvio a qualcos'altro, come a un'operazione da svolgere, a un'altra rappresentazione, a un altro oggetto matematico o a proprietà (aspetti indicali).

L'insegnante di scuola secondaria di primo e di secondo grado, a differenza dell'insegnante di scuola primaria, riconduce la difficoltà dello studente nella gestione di R al fatto di focalizzarsi in primo luogo sugli aspetti legati alla costruzione di R, a proprietà o a teoremi (aspetti iconico-strutturali di R), e in secondo luogo sugli aspetti convenzionali, come quelli legati a notazioni, definizioni, regole o vincoli d'uso (aspetti simbolici) (Tabella 4). Dunque, l'insegnante di scuola secondaria di primo e di secondo grado riconduce la difficoltà di gestione di R da parte dello studente agli stessi aspetti (iconico-strutturali e simbolici) ai quali attribuisce la capacità di un altro studente di gestire R (§5.2).

Alcuni esempi

T6 (SP), in relazione all'oggetto «numeri razionali» e alla rappresentazione «frazioni», ha risposto alla domanda relativa al punto (4) evidenziando l'alternativa «a» descritta nella risposta relativa al punto (3) nei termini seguenti: «Rappresentazioni e riconoscimenti concreti di parti frazionarie (tagliare, disegnare, colorare…)». Si tratta di aspetti iconici di tipo qualitativo.

T13 (SP), in relazione all'oggetto «frazioni» e al confronto tra frazioni, ha risposto alla domanda relativa al punto (4) evidenziando l'alternativa «e» descritta nella risposta relativa al punto (3) nei termini seguenti: «[Aspetti di rinvio a qualcos'altro (…) in particolare:] ai numeri naturali, per cui 1/4 è maggiore di 1/3 così come 4 > 3». Entrano in questo caso in gioco aspetti indicali.

T14 (SS I), in relazione all'oggetto «cerchio» e alla rappresentazione grafica di sue proprietà, ha risposto alla domanda relativa al punto (4) evidenziando le alternative «c2» (aspetti strutturali legati a proprietà), «f2» (aspetti convenzionali legati a definizioni) e «f3» (aspetti convenzionali legati a regole o vincoli d'uso). Si tratta di aspetti iconico-strutturali e di aspetti simbolici.

5.4. Conflitti semiotici generati da contenuti di rappresentazioni

La consapevolezza dei conflitti semiotici generati dai contenuti di rappresentazioni semiotiche simili per qualche aspetto è stata rilevata sulla base della capacità dell'insegnante di riconoscere un numero significativo di casi di rappresentazioni semiotiche il cui contenuto presenta componenti o aspetti differenti che possono essere tra loro confusi, oppure di rappresentazioni semiotiche con contenuti simili per certi aspetti, del medesimo oggetto, che possono rinviare a oggetti differenti, oppure di rappresentazioni semiotiche con contenuti simili per certi aspetti, di oggetti differenti, che possono rinviare al medesimo oggetto, ostacolandone la gestione da parte dello studente.

Dall'analisi delle risposte è emerso che l'insegnante, soprattutto di scuola secondaria, avverte i conflitti semiotici generati dai contenuti di rappresentazioni semiotiche simili per qualche aspetto. In particolare, l'insegnante è in grado di ricondurre i conflitti semiotici alla confusione o identificazione da parte dello studente di una componente di un contenuto di una rappresentazione con un'altra componente di un altro contenuto, simile al primo sotto qualche aspetto, in particolare (e soprattutto) per l'aspetto iconico-qualitativo (immediatamente o facilmente riconoscibile). D'altra parte, solo in qualche caso l'insegnante è in grado di ricondurre i conflitti semiotici alla confusione o identificazione da parte dello studente di aspetti completamente differenti di uno stesso contenuto (per esempio, l'aspetto concreto di una rappresentazione o di rinvio a qualcos'altro con il suo aspetto simbolico, come nel caso di uno studente che identifichi la rappresentazione di un triangolo acutangolo scaleno con quella di un triangolo generico, escludendo altri tipi di rappresentazione, per esempio quella di un triangolo ottusangolo).

Alcuni esempi

T1 (SP), in relazione all'oggetto e alla rappresentazione «frazioni», alla domanda n. 7 («La forma della rappresentazione R può, secondo te, indurre lo studente X a confondere la rappresentazione R con un'altra rappresentazione S dello stesso oggetto O oppure di un altro oggetto O'?») ha risposto:

T1: **Con i numeri naturali.**
Ric: Ti stai riferendo a S, a O oppure a O'?
T1: L'allievo X confonde la rappresentazione R [«frazioni»] con S (numeri naturali) con O (frazioni).
Ric: Puoi dirmi qualcosa di più?
T1: Qui [indicando la risposta scritta sul questionario] non sapevo bene come spiegarmi… Cioè, per lui, probabilmente a un certo punto esistevano solo i numeri naturali, ma [questo fatto] era legato alla spiegazione di prima… [alla risposta alla domanda n. 6, punto «c1»:] l'allievo X considera 3/4 come due numeri separati fra loro [3 e 4] e non riesce a stabilire una relazione che lo porti a considerare 3/4 come numero.

Emerge in questo caso un conflitto semiotico tra rappresentazioni con contenuti simili di oggetti differenti (frazioni e numeri naturali). La complessità della rappresentazione di una frazione è attribuita alla forma del suo contenuto, ovvero alla sua componente iconico-qualitativa, non immediatamente riconducibile alla forma del contenuto della rappresentazione di un numero nel registro della scrittura decimale. T1, dunque, avverte i conflitti semiotici generati dai contenuti di rappresentazioni semiotiche simili per qualche aspetto, in particolare per l'aspetto iconico-qualitativo.

In relazione alla richiesta di individuare un'altra rappresentazione T (dello stesso oggetto O oppure di un altro oggetto O') che sia meno problematica, rispetto a R, per lo studente X (domanda n. 8), T1 ha risposto: «I numeri decimali».

Si fa in questo caso riferimento a contenuti di rappresentazioni semiotiche differenti (nel registro della scrittura frazionaria e in quello della scrittura decimale) che rinviano al medesimo oggetto.

Alla domanda n. 9 («Quali sono le caratteristiche della rappresentazione T che, secondo te, rendono T meno problematica della rappresentazione R?») ha fornito la seguente risposta:

T1: Il fatto che l'allievo può ottenere il numero decimale eseguendo una divisione quindi opera con i numeri naturali e questo lo rassicura.

Fatto che evidenzia ancora una volta i conflitti semiotici sopra menzionati.

T7 (SS I), in relazione all'oggetto «angolo» e alla rappresentazione R riportata in Figura 4, alla domanda n. 7 («La forma della rappresentazione R può, secondo te, indurre lo studente X a confondere la rappresentazione R con un'altra rappresentazione S dello stesso oggetto O oppure di un altro oggetto O'?») ha fornito la seguente risposta:

T7: Sì, porta a confondere l'ampiezza della parte colorata [di R] con la misura dell'angolo.

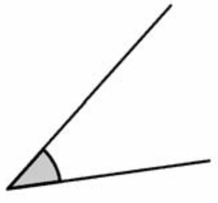


Figura 4. Rappresentazione R dell'oggetto «angolo» scelta da T7.

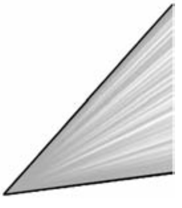


Figura 5. Rappresentazione T dell'oggetto «angolo» scelta da T7.

Ric: Pensa ora a un'altra rappresentazione T che sia meno problematica, rispetto a R, per lo studente X… [domanda n. 8].

T7: Il registro è sempre lo stesso, la rappresentazione è questa qui [disegna (Figura 5) e aggiunge:] Semmai ci posso scrivere «senza gli archetti»…

Ric: Quali sono le caratteristiche della rappresentazione T che, secondo te, rendono T meno problematica della rappresentazione R? [domanda n. 9].

T7: Perché evita di identificare l'ampiezza dell'angolo con l'archetto [Figura 6] o con la parte colorata [Figura 4].

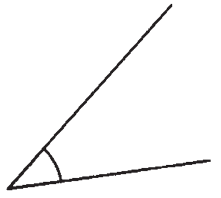


Figura 6. Rappresentazione dell'angolo con l'«archetto».

In questo caso, nella tipica rappresentazione dell'angolo con l'archetto (Figura 6), si manifesta un conflitto semiotico tra la lunghezza dell'archetto, l'ampiezza della parte di piano limitata dall'archetto e dai lati dell'angolo (eventualmente colorata come in Figura 4) e l'ampiezza dell'angolo. L'archetto costituisce un aspetto indicale della rappresentazione dell'angolo, l'ampiezza dell'angolo costituisce un aspetto simbolico della rappresentazione, mentre la lunghezza dell'archetto e l'ampiezza della parte limitata dall'archetto e dai lati dell'angolo costituiscono due aspetti iconico-qualitativi della rappresentazione (§2.2). Emerge dunque una confusione tra aspetti completamente differenti di uno stesso contenuto della rappresentazione in questione. Confusione che è stata evidenziata anche da altre ricerche, in particolare da Sbaragli e Santi (2012).

T9 (SS I), in relazione all'oggetto O «relazione di proporzionalità inversa» e alla rappresentazione R «grafico (arco di iperbole equilatera)», alla domanda n. 7 («La forma della rappresentazione R può, secondo te, indurre lo studente X a confondere la rappresentazione R con un'altra rappresentazione S dello stesso oggetto O oppure di un altro oggetto O'?») ha risposto:

T9: **Sì, con la diretta proporzionalità (oggetto O').**

Ric: Con quale rappresentazione S di O' lo studente X tende a confondere la rappresentazione R?

T9: Con la rappresentazione S della legge (confonde le due scritture: $yx=k$ e $y=kx$).

Ric: Se non ho capito male, la rappresentazione R era il grafico (arco di iperbole equilatera). Mi pare però che qui consideri come R la legge $yx=k$. Mi puoi chiarire questa cosa?

T9: Sì, in effetti non è chiaro: riferisce all'arco di iperbole la legge della diretta proporzionalità (poi, in realtà fa confusione anche con le due scritture…).

L'insegnante avverte i conflitti semiotici generati dai contenuti di rappresentazioni semiotiche simili per qualche aspetto. La risposta evidenzia una confusione tra il contenuto di una rappresentazione e il contenuto di un'altra rappresentazione, simile al primo per l'aspetto iconico-qualitativo.

In relazione alla rappresentazione T meno problematica rispetto a R (domanda n. 8), T9 ha risposto:

T9: Definizione di relazione di proporzionalità inversa (lingua naturale).

Ma una definizione non costituisce di per sé una rappresentazione semiotica di un oggetto matematico. Si tratta di una espressione di una relazione tra due o più entità in uno o più registri discorsivi (lingua naturale, linguaggio della scrittura simbolica o linguaggio formale), nella quale si utilizzano anche rappresentazioni semiotiche di oggetti matematici (R. Duval, comunicazione personale, 26 giugno, 2013).

Alla domanda n. 9 («Quali sono le caratteristiche della rappresentazione T che, secondo te, rendono T meno problematica della rappresentazione R?») ha fornito la seguente risposta:

T9: La verbalizzazione di una definizione rispetto alla formulazione in legge e alla rappresentazione grafica: «prodotto costante» è sicuramente qualcosa di più «gestibile».

Rimane aperto il problema del riconoscimento della corrispondenza tra le unità di contenuto matematicamente pertinenti della definizione di relazione di proporzionalità inversa e le unità di contenuto matematicamente pertinenti delle rappresentazioni di tale relazione nel registro della scrittura algebrica e nel registro grafico, riconoscimento non sempre immediato o spontaneo.

T4 (SS II), in relazione all'oggetto «equazione della circonferenza nelle due forme che si studiano a scuola» e alla rappresentazione nel piano cartesiano della circonferenza, alla domanda n. 7 («La forma della rappresentazione R può, secondo te, indurre lo studente X a confondere la rappresentazione R con un'altra rappresentazione S dello stesso oggetto O oppure di un altro oggetto O'?») ha risposto:

T4: Non ritengo confonda rappresentazioni diverse, ma credo cerchi di riportare contemporaneamente tutte le proprietà che sa essere relative all'oggetto senza saper scegliere quelle necessarie al caso specifico.

Ric: Quali proprietà non necessarie lo studente X «riporta contemporaneamente»? Puoi chiarire questo aspetto? Oppure, mi puoi fornire un esempio?

T4: Esempio: devo determinare la [lunghezza della] corda individuata da due circonferenze secanti: lo studente cerca di applicare teoremi relativi al confronto tra la lunghezza delle corde, alla loro distanza dal centro, al fatto che la corda nel punto medio è perpendicolare al raggio, senza pensare, più semplicemente, a risolvere il sistema formato dalle due equazioni.

Si tratta di una evidenziazione del mancato riconoscimento, da parte dello studente, di una corrispondenza tra le unità di contenuto matematicamente pertinenti dell'enunciato del problema (o esercizio) da risolvere e le unità di contenuto delle rappresentazioni necessarie, richieste o attese, per la sua risoluzione. In altre parole, è una evidenziazione di una mancata coordinazione del registro geometrico e del registro della scrittura algebrica, insieme al registro della lingua naturale.

In relazione alla rappresentazione T meno problematica rispetto a R (domanda n. 8), T4 ha risposto:

T4: Stesso registro, rappresentazione della retta.

Ric: Puoi fornirmi un esempio di rappresentazione T?

T4: Rappresentazione grafica sul piano cartesiano (geometria analitica), equazione esplicita o implicita (geometria analitica), rappresentazione in geometria piana (geometria piana). La prima e l'ultima sono spesso confuse tra loro, come le due intermedie [equazione esplicita ed equazione implicita].

Emerge in questo caso una confusione tra rappresentazioni simili di un medesimo oggetto (l'oggetto «retta»). T4, dunque, avverte i conflitti semiotici generati dai contenuti di rappresentazioni semiotiche simili per qualche aspetto, in particolare per l'aspetto iconico-qualitativo, che rinviano al medesimo oggetto.

Alla domanda n. 9 («Quali sono le caratteristiche della rappresentazione T che, secondo te, rendono T meno problematica della rappresentazione R?») ha risposto:

T4: Un numero minore di termini specifici e una rappresentazione algebrica più semplice.

Ric: Che cosa intendi per «termini specifici»?

T4: Coefficiente angolare, intercetta…

La difficoltà di gestione della rappresentazione di una circonferenza nel registro della scrittura algebrica è attribuita alla forma del suo contenuto, ovvero alla sua componente iconico-qualitativa, in particolare al numero delle sue unità di contenuto geometricamente pertinenti.

T12 (SS I), alla domanda n. 10, in corrispondenza della rappresentazione: $0x=5$ (del questionario per insegnanti di scuola secondaria di primo grado), ha risposto:

T12: I. [Somiglianze con]: $a \times x = b$
II. [Confusione con]: «impossibile» e «indeterminata».

L'insegnante avverte i conflitti semiotici generati dai contenuti di rappresentazioni simili per l'aspetto iconico-qualitativo nel registro della scrittura algebrica ($0x=5$, $0x=0$) e dai contenuti delle rappresentazioni ad essi corrispondenti nel registro della lingua naturale («equazione impossibile» ed «equazione indeterminata»).

6. Implicazioni e riflessioni didattiche

Questo studio ha evidenziato l'importanza di una dimensione dell'apprendimento della matematica relativamente nuova per l'insegnante. Anche se da diverse decine di anni gran parte della ricerca in didattica della matematica si focalizza su tale dimensione, gran parte del mondo della scuola dunque degli insegnanti, non la conosce, o almeno non ne è pienamente consapevole. Prova ne è il fatto che, tuttora, il senso di alcune espressioni alla base di tale dimensione, quali «registro di rappresentazione», «rappresentazione semiotica» e «oggetto matematico», non è colto pienamente da alcuni insegnanti. I risultati della ricerca lo hanno mostrato chiaramente.

Ben consapevoli dell'uso specialistico in didattica della matematica delle espressioni sopra riportate, la loro introduzione si è rivelata tuttavia importante e cruciale per la raccolta dei dati necessari. Non sarebbe stato possibile, o sarebbe stato troppo complesso, sostituirle o evitarle senza snaturare la ricerca. In altre parole, l'espressione «oggetto matematico» è stata utilizzata accanto a quella di «rappresentazione semiotica» e a quella di «registro di rappresentazione», pur sapendo che l'insegnante, nella maggior parte dei casi, non ha molta familiarità con questi termini.

Questa ricerca non si è comunque focalizzata sulla natura degli oggetti matematici o delle rappresentazioni, non era questo il suo scopo. Quello su cui la ricerca ha cercato di focalizzare l'attenzione dell'insegnante non è l'oggetto matematico in sé e per sé, ma l'oggetto istituzionale (Chevallard, 1985; Godino & Batanero, 1994), ovvero il sapere o il sistema di pratiche (D'Amore & Godino, 2006) riconosciuto come legittimo, pertinente o adeguato, entro una data istituzione, insieme ai mezzi semiotici condivisi per la sua trasposizione didattica.

D'altra parte, le questioni affrontate nel questionario sono apparse insolite, inusuali, agli occhi dell'insegnante. Nelle parole di R. Duval: «L'insegnante non è stato abituato, anche durante la sua formazione, a rispondere a domande di questo tipo. È insolito, per lui, sentirsi chiedere cose come queste» (comunicazione personale, 26 giugno, 2013). I questionari somministrati agli insegnanti si focalizzano in generale, o per lo più, su altri argomenti, in particolare sui seguenti, anche tra loro intrecciati:

1. i contenuti matematici da insegnare o la conoscenza matematica dell'insegnante (punto di vista matematico);
2. la gestione della classe (punto di vista pedagogico, psicologico, sociale);
3. il tipo di situazione, di problema o di attività da proporre in aula o in laboratorio per introdurre o trattare un dato contenuto matematico (punto di vista della teoria delle situazioni didattiche, dell'ingegneria didattica, della teoria antropologica della didattica, degli studi socioculturali, degli studi basati sul curricolo etc.);
4. l'affettività e le convinzioni dell'insegnante sulla matematica e sul suo insegnamento-apprendimento (punto di vista filosofico, epistemologico, affettivo, cognitivo o metacognitivo).

Questi quattro punti rientrano tra gli obiettivi principali della formazione degli insegnanti[13]. Costituiscono inoltre le principali preoccupazioni dell'insegnante, per due ragioni fondamentali:

a. molti insegnanti chiedono che cosa devono fare, in aula o in laboratorio, domani e nei prossimi giorni, per insegnare ciò che si chiede loro di insegnare, e gli strumenti più efficaci per farlo (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2014);
b. molti insegnanti si trovano in difficoltà nella trasposizione didattica (Chevallard, 1985) di diversi contenuti matematici, ovvero nell'adattamento del Sapere (riconosciuto e accettato come tale entro una data istituzione) al contesto della propria aula.

Se si fossero poste domande su, per esempio, come insegnare un dato contenuto matematico, oppure sulle difficoltà incontrate nell'insegnamento di quel dato contenuto, sarebbe stato tutto diverso, un'altra cosa. Ma questa ricerca è totalmente differente. Riguarda le ragioni semiotiche e cognitive delle difficoltà sistematiche e ricorrenti che, secondo l'insegnante, uno studente incontra nel processo di apprendimento della matematica. Questa è la ragione per la quale il questionario «è molto interessante e allo stesso tempo molto difficile» (R. Duval, comunicazione personale, 26 giugno, 2013).

13. Sulle conoscenze, convinzioni, pratiche e sull'affettività dell'insegnante si veda per esempio: Davis & Simmt, 2006; Lester, 2007; Ponte & Chapman, 2006. Per quanto riguarda la problematica della formazione culturale degli insegnanti si veda per esempio: D'Amore & Fandiño Pinilla, 2009.

È interessante per due ragioni:

- permette di evidenziare come l'insegnante tiene conto di tutta la dimensione non-matematica, soprattutto di quella cognitiva, implicata nell'insegnamento-apprendimento della matematica;
- permette di far emergere le difficoltà d'uso da parte dell'insegnante di espressioni o termini tecnici, come quelli sopra menzionati, e più in generale le difficoltà d'uso, da parte dell'insegnante, del linguaggio specifico della didattica della matematica, difficoltà che le attività di formazione degli insegnanti dovrebbero in qualche modo limitare, se non eliminare.

L'argomento relativamente nuovo, la complessità del questionario e il numero relativamente basso di insegnanti di scuola secondaria di secondo grado partecipanti alla ricerca, indicano senza dubbio la necessità di ulteriori ricerche, da realizzare anche con gli stessi metodi e con un questionario meno articolato e impegnativo.

In ogni caso, le risposte degli insegnanti mostrano chiaramente che per interpretare quel che succede in aula, per organizzare e gestire in modo professionale le attività matematiche, occorre una preparazione specifica non solo in matematica, storia, epistemologia, pedagogia, sociologia e/o psicologia (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2009), ma anche in semiotica (D'Amore, Fandiño Pinilla, & Iori, 2013). Dalla nostra ricerca emerge questa lacuna importante, non trascurabile, nella preparazione professionale degli insegnanti.

7. Conclusione

Questa ricerca si è focalizzata sulla consapevolezza dell'insegnante sulle ragioni semiotiche e cognitive delle difficoltà che uno studente incontra nel processo di apprendimento della matematica. Si tratta di una questione cruciale dell'insegnamento-apprendimento della matematica, poco esplorata. La ricerca ne ha evidenziato tutta la rilevanza sia teorica sia concreta, per una riflessione professionale su una dimensione specifica dell'apprendimento della matematica e per una riflessione critica sulla formazione degli insegnanti.

I risultati di questa ricerca hanno mostrato chiaramente come sia assolutamente necessario ripensare alla formazione iniziale e in servizio degli insegnanti di matematica, includendo in essa argomenti di semiotica declinati in chiave didattica, in particolare una riflessione professionale sul ruolo che la gestione semiotica gioca nella costruzione cognitiva degli oggetti matematici, nella valutazione dei processi di apprendimento degli studenti e, più in generale, delle situazioni d'aula.

Questa ricerca apre dunque uno spiraglio interessante anche nel mondo della formazione degli insegnanti di matematica.

Ringraziamenti

Un sentito e sincero ringraziamento va a tutti gli insegnanti che hanno accettato di partecipare a questa ricerca. Un ringraziamento particolare va al Prof. Raymond Duval, per i preziosi contributi scientifici e chiarimenti, i generosi consigli e suggerimenti forniti nel corso della ricerca. Un ringraziamento del tutto speciale va al prof. Bruno D'Amore, per la competenza, gentilezza ed estrema disponibilità con cui ha diretto tutte le fasi della ricerca; per il contributo scientifico e critico fondamentale, determinante e di assoluta rilevanza in questa ricerca come in tutta la mia formazione.

Bibliografia

Cajori, F. (2007). *A History of Mathematical Notations: Volume I*. New York: Cosimo Classics.

Camici, C., Cini, A., Cottino, L., Dal Corso, E., D'Amore, B., Ferrini, A., Francini, M., Maraldi, A. M., Michelini, C., Nobis, G., Ponti, A., Ricci, M., & Stella, C. (2002). Uguale è un segno di relazione o un indicatore di procedura? *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *25*(3), 255-270.

Cassin, B., Apter, E., Lezra, J., & Wood, M. (Eds.). (2014). *Dictionary of Untranslatables: A Philosophical Lexicon*. Princeton and Oxford: Princeton University Press.

Chevallard, Y. (1985). *Transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *12*(1), 73-112.

D'Amore, B. (2001). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*, *15*(2), 150-173.

D'Amore, B. (2002). Matematica in alcune culture sudamericane. Un contributo all'Etnomatematica. *Bollettino dei docenti di matematica*, 44, 9-19.

D'Amore, B. (2005). Pipe, cavalli, triangoli e significati. Contributo ad una teoria problematica del significato concettuale, da Frege e Magritte, ai giorni nostri. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *28B*(5), 415-433.

D'Amore, B. (2006a). Oggetti matematici e senso. Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici. *La matematica e la sua didattica*, *20*(4), 557-583.

D'Amore, B. (2006b). *Concepts, objects, semiotic and meaning. Investigacions of the concept's construction in mathematical learning* (Doctoral thesis, Constantine the Philosopher University, Nitra, Slovakia). Retrieved from http://math.unipa.it/%7Egrim/Tesi_it.htm

D'Amore, B. (2007a). How the treatment or conversion changes the sense of mathematical objects [Invited speaker article]. In E. P. Avgerinos & A. Gagatsis (Eds.), *Current trends in Mathematics Education*. Proceedings of 5th MEDCONF2007 (Mediterranean Conference on Mathematics Education), 13-15 April 2007, Rhodes, Greece (pp. 77-82). Athens: New Technologies Publications.

D'Amore, B. (2007b). Mathematical objects and sense: How semiotic transformations change the sense of mathematical objects. *Acta Didactica Universitatis Comenianae*, 7, 23-45.

D'Amore, B. (2015). *Arte e matematica: Metafore, analogie, rappresentazioni, identità tra due mondi possibili*. Bari: Edizioni Dedalo.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2009). La formazione degli insegnanti di matematica, problema pedagogico, didattico e culturale. In F. Frabboni & M. L. Giovannini (Eds.), *Professione insegnante* (pp. 145-154). Milano: Franco Angeli.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2014). Illusioni, panacee, miti nell'insegnamento-apprendimento della matematica. *Difficoltà in Matematica*, *11*(1), 89-109.

D'Amore, B., & Godino, J. D. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*, *20*(1), 9-38.

D'Amore, B., & Matteuzzi, M. (1976). *Gli interessi matematici*. Venezia: Marsilio.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *Primi elementi di semiotica: La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica*. Prefazioni di Raymond Duval e Luis Radford. Bologna: Pitagora.

Davis, B., & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(3), 293–319. doi: 10.1007/s10649-006-2372-4

Descartes, R. (1852). *Oeuvres philosophiques de Descartes.* Paris: Panthéon littéraire.

Duval, R. (1988a). Ecarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, *1*(1), 7-25.

Duval, R. (1988b). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, *1*(1), 57-74.

Duval, R. (1988c). Graphiques et équations. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, *1*(1), 235-253.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. ULP, IREM Strasbourg, *5*(1), 37-65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherche en Didactique des Mathématiques*, *16*(3), 349-382.

Duval, R. (2006a). Trasformazioni di rappresentazioni semiotiche e prassi di pensiero in matematica. *La matematica e la sua didattica*, *20*(4), 585-619.

Duval, R. (2006b). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 103-131. doi:10.1007/s10649-006-0400-z

Duval, R. (2006c). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques? In L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking* [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(1), 45-81.

Duval, R. (2009). «Objet»: un mot pour quatre ordres de réalité irréductibles? In J. Baillé (Ed.), *Du mot au concept: Objet* (pp. 79-108). Grenoble: PUG.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas.* Organização de Tânia M. M. Campos. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM.

Eco, U. (1975). *Trattato di semiotica generale*. Milano: Bompiani.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM–The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.

Hoffmann, M. H. G. (2010). Diagrams as scaffolds for abductive insights. *AAAI Publications, Workshops at the Twenty-Fourth AAAI Conference on Artificial Intelligence* (pp. 42-49). Retrieved from http://aaai.org/ocs/index.php/WS/AAAIW10/paper/view/2027

Iori, M. (2015). *La consapevolezza dell'insegnante della dimensione semio-cognitiva dell'apprendimento della matematica* (Doctoral thesis, University of Palermo, Italy). Retrieved from http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/Phd/Iori/Iori.htm

Lanfredini, R. (Ed.). (2006). *A priori materiale. Uno studio fenomenologico*. Milano: Guerini e Associati.

Lester, F. K. (Ed.). (2007). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Mason, M. (2010). Sample size and saturation in PhD studies using qualitative interviews. *Forum: Qualitative Social Research*, *11*(3). Retrieved from http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:0114-fqs100387

Morse, J. M. (1991). Approaches to qualitative–quantitative methodological triangulation. *Nursing Research*, *40*(2), 120-123.

Peirce, C. S. (1933). *The Collected Papers of Charles Sanders Peirce, Vol. IV: The Simplest Mathematics*. CP 4. Edited by C. Hartshorne & P. Weiss. Cambridge: Harvard University Press.

Peirce, C. S. (1955). *Philosophical Writings of Peirce*. PW. Edited by J. Buchler. New York: Dover Publications.

Peirce, C. S. (1976). *The New Elements of Mathematics, Vol. IV: Mathematical Philosophy*. NEM 4. Edited by C. Eisele. The Hague: Mouton Publishers.

Peirce, C. S. (1992). *The Essential Peirce: Selected Philosophical Writings, Volume 1 (1867-1893)*. EP 1. Edited by N. Houser & C. Kloesel. Bloomington: Indiana University Press.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Rotterdam-Taipei: Sense Publishers.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM Mathematics Education, 40*(2), 165-178.

Radford, L. (2008). Connecting theories in mathematics education: Challenges and possibilities. *ZDM Mathematics Education*, *40*(2), 317–327.

Rojas Garzón, P. J. (2014). *Articulación de saberes matemáticos: Representaciones semióticas y sentidos*. Prologue by Bruno D'Amore. Bogotá: Editorial of the Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Santi, G. (2010). *Changes in meaning of mathematical objects due to semiotic transformations: A comparison between semiotic perspectives* (Doctoral thesis, University of Palermo, Italy). Retrieved from http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/santi/santi.htm

Sbaragli, S., & Santi, G. (2012). Le scelte dell'insegnante relative al concetto di angolo. *Bollettino dei docenti di matematica*, 65, 35-55.

Tashakkori, A., & Teddlie, C. (1998). *Mixed methodology: Combining qualitative and quantitative approaches*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Tashakkori, A., & Teddlie, C. (Eds.). (2003). *Handbook of mixed methods in social and behavioral research*. Thousand Oaks, CA: Sage.

2. Nuove tecnologie applicate alla didattica del calcolo combinatorio[1]

Ernesto Colizzi[2]

The article summarizes the results of a didactical experimental activity performed on April 2014 at the Liceo Lugano 2. Preliminarily, an analysis of the technical literature was performed, aiming at identifying the state-of-the-art about the knowledge on the learning difficulties of combinatorics in students of different ages. Before the experiment started, the author evaluated, by means of a test, the pre-existing knowledge about combinatorics in the population of students used for the study.

The experimental activity dealt with both the teaching of a classification framework for combinatorics problems and with the analysis of the efficacy of a web-based tool (Moodle) applied to this specific domain.

1. Introduzione

Dal punto di vista storico, il calcolo combinatorio ha una vita notevolmente lunga (Tucker, 2002).

La formula per calcolare le permutazioni era nota già 2500 anni fa (David, 1998). Varie opere Cinesi, Hindu e Arabe, scritte 800 anni fa, menzionavano problemi che richiedevano la conoscenza dei coefficienti binomiali. Una rappresentazione equivalente a quella del triangolo di Pascal apparve nel quattordicesimo secolo in un'opera Cinese scritta da Shin-Chieh, 200 anni prima della pubblicazione nel mondo occidentale.

L'analisi dei problemi legati al gioco e alle scommesse, svolta a cura di Pascal e Fermat attorno al 1650, è convenzionalmente considerata come l'inizio dell'analisi combinatoria moderna. La formula per risolvere i problemi di selezione con ripetizione fu scoperta appena dopo, nel contesto dello studio dei possibili esiti del lancio di una moneta. La formula risolutiva per i problemi di ordinamento con ripetizioni fu infine scoperta attorno al 1700 da Leibnitz.

Dal punto di vista dei testi didattici, la «Ars conjectandi» di Jacques Bernoulli (1713) si può considerare la prima opera che presenta sistematicamente i metodi combinatori fondamentali. Il primo testo completo sui problemi di permutazione e combinazione fu invece scritto da Wirthworth (1901).

Il calcolo combinatorio è un elemento essenziale della matematica discreta (Batanero, Navarro-Pelayo & Godino, 1997). Fra i motivi per cui il suo insegnamento è ritenuto irrinunciabile nel curriculum scolastico, c'è sicuramente il suo ruolo importante nella risoluzione di problemi, perché richiede una continua attività di for-

1. Sintesi del master per l'insegnamento nella scuola media superiore, DFA Locarno, anno 2013/2014; relatore: prof. Michele Impedovo.
2. Insegnante di matematica in formazione presso il Liceo Lugano 2 nell'anno 2013/2014. Attualmente direttore della ricerca e sviluppo di un'azienda di telecomunicazioni a Chengdu (Cina).

mulazione d'ipotesi e di sistematizzazione e generalizzazione di risultati. Inoltre, la sua indipendenza da altri settori della matematica ne consente un semplice inserimento in diversi livelli scolastici, ovviamente modulandone la complessità in funzione della maturità degli allievi.

Nei programmi scolastici attuali del Canton Ticino (2002), il calcolo combinatorio è previsto come conoscenza propedeutica al calcolo delle probabilità (nel terzo e quarto anno del liceo). Il calcolo combinatorio, nella sua accezione più completa, ha tuttavia applicazioni molto più vaste di quelle relative agli studi probabilistici[3].

2. Classificazione dei problemi combinatori

Secondo una classificazione proposta in Gal e Garfield (1997), i problemi combinatori possono essere suddivisi in:
- problemi di esistenza, in cui va verificata l'esistenza di almeno una configurazione risolutiva;
- problemi di enumerazione, in cui la soluzione è la procedura che consente di enumerare tutte le configurazioni risolutive;
- problemi di classificazione, in cui bisogna determinare un'opportuna ripartizione delle configurazioni date;
- problemi di conteggio, in cui si vuole determinare quante siano le configurazioni risolutive[4].

Più in dettaglio, secondo una classificazione proposta da Dubois (1984) e successivamente ripresa da altri autori, si possono identificare dal punto di vista didattico quattro «configurazioni combinatorie semplici», definibili anche come «modelli combinatori di base» (Batanero, 1997):
- i campionamenti (o selezioni);
- le distribuzioni semplici;
- le separazioni in sottoinsiemi;
- le scomposizioni di numeri interi;

Nei problemi di campionamento si considera un insieme di m elementi, normalmente distinti, dai quali si estrae un campione di n elementi. Secondo il tipo di problema, è possibile o meno reinserire il campione estratto nell'insieme originario, rendendone quindi possibile nuovamente la sua selezione. Un'altra variante considera la possibilità che l'ordine di estrazione sia, o no, rilevante ai fini del conteggio delle soluzioni.

Nei problemi di distribuzione si studia in quanti modi si possano distribuire n elementi in m caselle (eventualmente capaci di contenere più di un elemento). Le varianti del problema dipendono dalla distinguibilità o meno degli elementi dell'insieme e delle caselle, nonché dalla presenza di una relazione d'ordine fra gli ele-

3. Per esempio nelle tecnologie informatiche e delle telecomunicazioni.
4. In questo documento l'analisi si limiterà a quest'ultima categoria, che corrisponde anche al programma previsto nei licei Ticinesi.

menti di una stessa casella. In generale non è possibile tradurre un problema di distribuzione in un problema di selezione. La classe dei problemi di distribuzione è, infatti, più ampia e comporta in molti casi l'adozione di tecniche di calcolo che superano quelle affrontabili in un liceo.

Una terza classe di problemi è quella che si occupa della partizione di un insieme di n elementi in m sottoinsiemi. In questo caso esiste una corrispondenza biunivoca con i problemi di distribuzione, se si immagina la distribuzione di oggetti in caselle come la partizione di un insieme di elementi in sottoinsiemi.

Infine, nei problemi di scomposizione di numeri interi si cercano i modi in cui un numero intero n, strettamente positivo, possa essere scomposto come somma di m numeri interi. Anche questa classe di problemi può essere messa in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme dei problemi di distribuzione.

Dal punto di vista computazionale, le formule impiegate per risolvere i problemi ora descritti usano composizioni di operazioni combinatorie elementari, come le combinazioni, le permutazioni (con e senza ripetizioni) e le disposizioni (con e senza ripetizioni). I modelli combinatori e le operazioni combinatorie sono due caratteristiche fra loro ortogonali dei problemi di calcolo combinatorio.

A partire dalle configurazioni semplici sopra descritte è possibile costruire esempi e problemi più complessi. introducendo, ad esempio, insiemi di oggetti parzialmente distinguibili (ossia appartenenti a insiemi distinti in cui gli elementi di ciascun insieme risultano indistinguibili fra loro) oppure vincoli alle soluzioni accettabili.

3. Il calcolo combinatorio nella ricerca didattica

Un punto di partenza comune alla maggioranza degli articoli in ricerca didattica che si occupano di calcolo combinatorio è la constatazione di quanto tale disciplina risulti agli studenti particolarmente ostica (Lockwood, 2011).

Chi si è dedicato a raccogliere esperienze dirette, ha generalmente ottenuto dagli studenti intervistati risposte che lamentavano principalmente la mancanza, nell'insegnamento del calcolo combinatorio, di un inquadramento teorico capace di fornire gli strumenti necessari per affrontare tutti gli esercizi proposti dal docente e dai testi. Come conseguenza, ogni esercizio appariva indipendente dal precedente senza che alcun metodo appreso sembrasse in grado di guidare verso la soluzione. Da qui il senso di frustrazione e la conclusione, rassegnata, che il calcolo combinatorio fosse destinato solo alle persone dotate di particolari capacità d'intuizione non trasmissibili didatticamente. Tale frustrazione risultava inoltre amplificata dall'apparente semplicità della formulazione dei problemi proposti, in contrasto con la loro difficoltà di risoluzione.

Alcuni autori (ad esempio Fishbein e Grossman, 1997) sono partiti esattamente dal concetto di «intuizione» per verificare se effettivamente i processi mentali messi in atto dagli studenti più capaci rispondessero a un modello di «competenze innate» o fossero piuttosto il frutto di un addestramento più efficace.

Per spiegare il processo di apprendimento, tali autori adottano il concetto psicologico di «schema mentale», da intendersi come una sequenza di passi predeterminati che la mente segue nell'affrontare un problema. Essi ritengono che le capacità degli studenti riflettano la maturità della struttura, all'interno della loro mente, degli schemi specifici che sono necessari alla risoluzione dei problemi combinatori. Questi sono composti gerarchicamente da una collezione di schemi che partono dal particolare (ad esempio le operazioni aritmetiche) per arrivare al generale (ad esempio la capacità di dimostrare per induzione). Gli schemi mentali hanno una loro evoluzione continua, determinata dall'apprendimento progressivo della disciplina e dal riconoscimento degli errori svolti.

Nel caso del calcolo combinatorio non vengono dunque attivate «intuizioni» innate, ma semplicemente elaborate le informazioni disponibili mediante l'impiego degli schemi mentali di cui lo studente dispone in quel momento. È dunque assolutamente possibile, mediante un'opportuna azione didattica, trasferire allo studente le conoscenze necessarie a questa disciplina.

Su come debba avvenire questo «trasferimento» è opportuno riportare le opinioni di alcuni ricercatori (ad esempio Lockwood, 2011), secondo i quali esso risulta efficace solo se è *actor oriented*. Con questa accezione, gli autori intendono identificare il processo didattico in cui, anziché trasferire tout-court le conoscenze allo studente, quest'ultimo viene messo invece nelle condizioni di crearsi autonomamente il proprio schema mentale mediante un'opportuna guida da parte del docente. Detto in altri termini, lo studente non sembra in grado di partecipare alla categorizzazione proposta dal docente, a meno che non riesca a ricostruirsela autonomamente nella propria mente.

Altri studi sul calcolo combinatorio si sono occupati di determinare quale fosse il livello scolastico più adatto per introdurre questa disciplina. Particolarmente notevoli sono a questo proposito i lavori di English (1991, 1993, 2005), che ha sperimentato l'insegnamento del calcolo combinatorio fin dalle scuole elementari[5].

Altri autori (Fischbein et Gazit, 1988), mediante un test, hanno svolto un'analisi su di un ampio campione di studenti di età molto diverse, partendo dalla scuola primaria fino all'età adulta. Le conclusioni, riferite al campione considerato, portavano a concludere che un sottoinsieme del calcolo combinatorio potesse essere insegnato già nella scuola dell'obbligo e che molti schemi mentali elementari fossero già disponibili perché basati semplicemente sull'aritmetica. Per alcuni concetti risultava invece necessaria una maggiore maturità.

In particolare (Piaget et Inhelder, 1975) avevano già osservato come il concetto di «permutazione» richiedesse una capacità di astrazione e formalizzazione propria degli studenti in età adolescenziale. La giustificazione risiedeva nel fatto che, mentre il concetto di «combinazione» coinvolge la coordinazione delle funzioni mentali di «seriazione» e di «corrispondenza», le «permutazioni» implicano invece un'operazione di riordinamento secondo un sistema di riferimento mobile e reversibile; si tratta cioè di un'operazione applicata a un'altra operazione, caratteristica del ragionamento formale evoluto.

L'analisi puntuale degli errori comunemente commessi dagli studenti alle prese con problemi di calcolo combinatorio è stata oggetto di notevole attenzione da parte dei ricercatori in didattica della matematica.

5. Si veda anche l'articolo di Gianfranco Arrigo, pubblicato sul numero 70, 2015 di questa rivista, pp. 81-102.

Una delle indagini più complete è stata svolta da Batanero (1997) mediante un questionario disponibile in bibliografia.

Fra le conclusioni risaltava una generale difficoltà da parte degli studenti nel trasferire le conoscenze relative alle operazioni combinatorie da un modello combinatorio a un altro. Secondo alcune interpretazioni ciò era legato alla maggior enfasi che viene normalmente assegnata al modello combinatorio «selezione» rispetto agli altri. Secondo altri ciò è invece l'evidenza della mancanza di un addestramento specifico nella capacità di osservare un problema da punti di vista differenti e nel tradurre un problema in un altro equivalente.

A questo proposito il calcolo combinatorio sembra essere una delle opportunità migliori per sviluppare questa capacità, la cui applicazione ha una portata molto più generale, anche al di fuori dell'insegnamento della matematica. I recenti studi sull'impiego delle trasformazioni semiotiche in didattica della matematica, segnatamente «conversioni» da un registro a un altro e «trattamenti» all'interno di uno stesso registro, hanno messo in risalto ancor meglio questa importante problematica (Radford L., 2005; D'Amore B. e Fandiño Pinilla M. I., 2013; Arrigo G., 2014).

Batanero (1997) ha esaminato un'altra variabile che consente di classificare i problemi sottoposti agli studenti e che trascende dal modello e dall'operazione combinatoria impiegata: la scelta degli oggetti (lo scenario) usati nel testo del problema. In particolare Batanero analizza la correlazione fra il tasso di successo nella risoluzione dei problemi e l'impiego di oggetti astratti, numeri, lettere dell'alfabeto o persone.

Considerazioni simili, sia pur non altrettanto strutturate e comunque indirizzate ad allievi delle scuole elementari, sono presenti anche in English (1991). In quel contesto l'autrice osservava quanto fosse importante la scelta di uno scenario idoneo all'età dello studente e proponeva di rinunciare a rappresentazioni astratte per favorire invece situazioni riconducibili all'esperienza pratica.

È interessante a questo proposito notare come le conclusioni di Batanero siano diametralmente opposte, dato che l'esito della sua indagine indicava invece una preferenza da parte degli studenti liceali per i modelli basati su numeri e lettere alfabetiche.

4. Indagine di ricerca

4.1. Strumenti

A conferma di alcuni dei risultati esposti nel capitolo precedente, è stata progettata ed eseguita un'indagine di ricerca che ha interessato tre classi del Liceo Lugano 2.

Nello specifico, l'indagine si poneva l'obiettivo di ricavare elementi utili per il progetto di una successiva attività didattica, rispondendo alle due domande seguenti:

A. Esiste un percorso logico ottimale per presentare nella sua completezza il calcolo combinatorio (ovviamente limitato alle configurazioni semplici, previste nei programmi scolastici)?

B. Quali sono le caratteristiche con cui formulare gli esercizi per gli studenti, che possano rendere più semplice l'apprendimento e la memorizzazione?

Lo strumento d'indagine prescelto è stato ricavato dall'esperienza descritta in (Batanero, 1997). Nel loro articolo gli autori presentavano un questionario composto di tredici esercizi opportunamente strutturati, il cui scopo era l'evidenziazione dei seguenti fattori:

- la capacità degli studenti non ancora addestrati di risolvere esercizi di calcolo combinatorio;
- la difficoltà esperita dagli studenti già addestrati nel risolvere gli esercizi a seconda:
  - del modello combinatorio implicito (selezione, partizione o distribuzione);
  - dell'operazione combinatoria associata (combinazioni, disposizioni o permutazioni, semplici o con ripetizioni);
  - dello scenario impiegato (numeri, lettere, oggetti o persone);
  - della cardinalità della risposta, ossia del valore numerico della soluzione.

Il questionario originale era stato sottoposto dagli autori a un campione composto di 710 studenti, suddivisi fra chi aveva già partecipato a lezioni di calcolo combinatorio (352) e no (358). La popolazione interessata era costituita da studenti liceali spagnoli di entrambi i sessi e con età compresa fra quattordici e quindici anni.

Nel caso descritto in questo documento il campione, sicuramente più esiguo, è composto invece di 57 studenti, 42 dei quali dichiarano di aver già partecipato ad almeno una lezione sul calcolo combinatorio, di seconda e terza liceo (quindi di età compresa fra 15 e 17 anni).

Il testo del questionario è una traduzione leggermente rivista del questionario originale ed è disponibile come allegato (vedere alla fine dell'articolo).

4.2. Analisi dei risultati

L'esito del test è presentato nella Tabella 1, in cui sono riportati:

- i risultati complessivi (esercizi corretti e percentuale di successo);
- i risultati relativi agli studenti non esperti;
- i risultati relativi agli studenti esperti;
- per ognuno dei casi, i risultati ottenuti dal questionario originale (Batanero et al. 1997);
- i coefficienti di correlazione fra il test attuale e quello originale.

Studenti in fila	Scatola con palline colorate	Lettere e buste	Macchinine	Urna e tombolini	Le sorelle dalla nonna	Compito matematica e tedesco	Cancellare la lavagna	Il parcheggio	Carte da gioco	Sacchetto e tombolini	Cinque carte	Un comitato		
49	25	32	3	50	23	30	23	24	35	30	28	31		**Risposte corrette (tutti)**
86%	44%	56%	5%	88%	40%	53%	40%	42%	61%	53%	49%	54%	52%	% successo
39	22	26	3	40	18	18	19	21	26	26	25	28		**Risposte corrette (studenti esperti)**
93%	52%	62%	7%	95%	43%	43%	45%	50%	62%	62%	60%	67%	57%	% successo
71%	28%	27%	6%	81%	7%	39%	46%	42%	37%	59%	30%	60%	41%	% successo in Batanero
													0.83	correlazione campione / Batanero
10	3	6	0	10	5	12	4	3	9	4	3	3		**Risposte corrette (studenti non esperti)**
67%	20%	40%	0%	67%	33%	80%	27%	20%	60%	27%	20%	20%	37%	% successo
24%	16%	27%	3%	77%	13%	32%	23%	4%	31%	13%	11%	95%	28%	% successo in Batanero
													0.32	correlazione campione / Batanero

Tabella 1. Analisi dei successi per ogni esercizio

Si può evidenziare innanzitutto, nel caso degli studenti esperti, una correlazione molto alta (0.83) fra i risultati del campione attuale e di quello originale. Ciò testimonia la validità del presente studio, pur nell'esiguità del campione a disposizione. La scarsa correlazione nel caso di studenti non esperti va invece attribuita all'estrema variabilità delle risposte fornite da tali studenti, costretti a improvvisare le strategie risolutive. Nel caso degli studenti esperti è interessante notare inoltre come i due esercizi con punteggio minore e maggiore (rispettivamente il quarto e il quinto) siano gli stessi per il questionario attuale e per quello originale.

Nelle due tabelle seguenti vengono analizzate le relazioni fra il successo nella risoluzione e le variabili (operazione, modello e scenario), prima per gli studenti esperti e poi per quelli inesperti. In entrambi i casi sono state riportate le misure corrispondenti documentate in Batanero (1997).

	(studenti esperti)	**Percentuale successi**		
		Attuale	Batanero 1987	Coeff corrleazione lineare
Operazione	Permutazioni semplici	94%	63%	0.99
	Permutazioni con ripetizione	52%	26%	
	Disposizioni semplici	58%	28%	
	Disposizioni con ripetizione	37%	16%	
	Combinazioni	56%	32%	
Modello	Distribuzione	61%	25%	0.62
	Selezione	64%	41%	
	Partizione	37%	24%	
Scenario	Persone	58%	33%	0.95
	Oggetto	43%	16%	
	Numeri e lettere	73%	37%	

Tabella 2. Analisi dell'esito nel caso di studenti esperti

	(studenti non esperti)	Percentuale successi		
		Attuale	Batanero 1987	Coeff corrleazione lineare
Operazione	Permutazioni semplici	67%	63%	0.90
	Permutazioni con ripetizione	40%	26%	
	Disposizioni semplici	20%	28%	
	Disposizioni con ripetizione	20%	16%	
	Combinazioni	42%	32%	
Modello	Distribuzione	36%	25%	-0.74
	Selezione	32%	41%	
	Partizione	47%	24%	
Scenario	Persone	45%	33%	1.00
	Oggetto	20%	16%	
	Numeri e lettere	51%	37%	

Tabella 3. Analisi dell'esito nel caso di studenti non esperti

Nel caso degli studenti esperti, risulta confermata la graduatoria di difficoltà in funzione del modello, dello scenario e dell'operazione:
- l'operazione più complessa è la Disposizione con ripetizione;
- l'operazione più semplice è la Permutazione senza ripetizione;
- il modello più complesso è la Partizione;
- il modello più semplice è la Selezione;
- lo scenario più semplice è quella che impiega lettere e numeri;
- lo scenario più complesso è quella che impiega oggetti diversi da lettere, numeri e persone.

In aggiunta ai dati riportati nelle tabelle, è stata analizzata anche la relazione fra il valore numerico della soluzione (cardinalità) e la facilità di soluzione. La correlazione risultante indica una minore successo per gli studenti inesperti laddove la soluzione consista in un numero maggiore della decina, probabilmente perché molti di essi hanno adottato la tecnica dell'enumerazione esaustiva per ricavare la soluzione.

Nell'analisi qualitativa delle risposte fornite dagli studenti esperti, si è anche potuto osservare che:
- raramente vengono impiegati i termini «combinazione», «disposizione» e «permutazione»; nei pochi casi in cui ciò accade si riscontrano frequentemente errori di denominazione;
- non è mai stato menzionato l'operatore «coefficiente binomiale», mentre è spesso stata indicata l'espressione cui esso corrisponde (quoziente di fattoriali);
- solo in due casi lo studente ha impiegato lo strumento grafico dell'albero decisionale per rappresentare le soluzioni.

Infine è stato approfondito il caso dei 10 studenti che hanno ottenuto i risultati migliori (almeno 10 esercizi corretti su 13). Si nota in particolare che nessuno di loro è stato in grado di risolvere il quarto esercizio, caratterizzato da un valore numerico molto alto (che impediva l'enumerazione esaustiva) ma cui corrispondeva in realtà un'operazione combinatoria molto semplice (la disposizione con ripetizione, equivalente a un elevamento a potenza). Il testo dell'esercizio era il seguente:

Un bambino ha quattro macchinine di colori diversi (Nera, Rossa, Verde e Gialla) e decide di regalarle ai suoi amici Alberto, Beniamino e Carlo. In quanti modi diversi può distribuire le macchinine? È anche ammesso, ad esempio, che tutte e 4 le macchinine siano date allo stesso bambino.

Tutti e 10 gli studenti hanno affrontato il problema cercando di enumerare le possibili configurazioni dal punto di vista dei «bambini», cercando una regola che consentisse di esprimere in modo sintetico tutti i casi possibili (4 macchinine al primo bambino e 0 agli altri; 3 macchinine al primo bambino, 1 al secondo e 0 agli altri etc.).

In realtà l'esercizio poteva essere risolto con un solo semplice passaggio seguendo il punto di vista delle «macchinine» e osservando come ciascuna macchinina, indipendentemente dalle altre, avesse tre possibilità di assegnazione (corrispondenti ai tre bambini cui poteva essere regalata).

Questo risultato, perfettamente corrispondente a quello trovato da Batanero, può interpretarsi come l'evidenza della difficoltà da parte degli studenti (anche di quelli più preparati) nell'analizzare criticamente il testo di un problema e nel saper valutare la presenza e la convenienza di più strategie risolutive.

Altrettanto interessante è osservare come la strategia corretta sia stata invece individuata solo da 3 studenti che hanno complessivamente ottenuto risultati non elevati (5, 7 e 8 esercizi corretti su 13), cui probabilmente corrisponde una capacità di ragionamento non convenzionale.

4.2.1. Conclusioni dell'indagine

L'indagine svolta ha evidenziato i seguenti punti.

- Appaiono più semplici da risolvere gli esercizi basati sul modello «selezione», cui viene generalmente data più enfasi nei libri di testo. La maggiore difficoltà incontrata negli altri due modelli può indicare la necessità di enfatizzare, nel corso dell'attività didattica, i metodi che consentono allo studente di trasformare un problema in un altro a esso equivalente ma descritto con un modello differente.
- Negli studenti esperti è rimasta poca traccia delle definizioni formali delle operazioni di calcolo combinatorio, anche se ciò non ha impedito il successo nella risoluzione degli esercizi. Ciò potrebbe suggerire che i termini impiegati per identificare le tre operazioni combinatorie (disposizioni, permutazioni e combinazioni) siano probabilmente il frutto di una scelta didattica infelice, perché facilmente equivocabili e poco legati al significato della medesima parola nel linguaggio corrente. A questo proposito si può osservare come alcuni testi anglosassoni siano meno affezionati a una definizione unica e propongano alternative più prossime all'esperienza pratica degli studenti: ad esempio le disposizioni vengono spesso denominate «lineups» o «variations» e le combinazioni «committees»,

termini di uso comune che richiamano direttamente e correttamente l'operazione combinatoria corrispondente[6].

- Anche fra gli studenti inesperti si riscontra una notevole (37%) capacità di risolvere gli esercizi di calcolo combinatorio. Ciò conferma quanto già osservato da diversi autori, ossia che l'apprendimento del calcolo combinatorio può fare tesoro di una significativa presenza di schemi mentali già formati e può essere anticipato.

4.3. La proposta didattica

4.3.1. Descrizione generale

Sulla base dei risultati dell'indagine di ricerca, si è pensato di impostare il piano delle lezioni sul calcolo combinatorio, fornendo allo studente la seguente doppia chiave interpretativa dei problemi.

A. Procedendo lungo la dimensione dell'operazione combinatoria (quella più classica) sono state evidenziate le proprietà delle singole operazioni, spiegando come si possa transitare da una configurazione a un altra rilassando o introducendo vincoli.
B. Seguendo invece la dimensione del modello combinatorio, è stato evidenziato come sia possibile costruire un'equivalenza fra problemi descritti con modelli diversi. La capacità di trasformare un problema in un altro equivalente, diversamente descritto, è spesso la tecnica risolutiva vincente. Un allenamento in questo modo di ragionare ha inoltre il duplice effetto di sviluppare capacità di problem solving e di minimizzare la memorizzazione di tecniche risolutive canoniche.

Il piano delle lezioni è fondato su tre strumenti:

1. le lezioni in classe, basate principalmente su esercizi proposti dal docente e risolti dagli studenti organizzati in piccoli gruppi di 3-4 persone;
2. una raccolta di dispense contenenti sia la teoria esposta a lezione che una raccolta di esercizi svolti, seguendo ove possibile più di una strategia, destinate ad aiutare gli studenti nello studio individuale;
3. un modulo on-line, basato sulla piattaforma Moodle, che è l'oggetto del capitolo seguente.

Per i primi due punti si è strutturato il percorso logico dell'esposizione degli argomenti del calcolo combinatorio enumerativo seguendo una delle tracce canoniche, affrontando in sequenza:

- le permutazioni, con e senza ripetizione
- le disposizioni e le combinazioni semplici
- le disposizioni con ripetizione
- le combinazioni con ripetizione

6. Nello stesso ordine di idee, troviamo la denominazione «anagramma», proposta da Arrigo al posto di «permutazione» (Arrigo G., 2015).

La teoria e gli esercizi sono stati pensati per presentare sempre i due modelli combinatori principali («selezione» e «distribuzione»), spiegando come sia possibile trasformare un problema da un modello a un altro.

Il progetto del modulo on-line è stato focalizzato invece sul tentativo di aiutare gli studenti a costruirsi autonomamente un opportuno insieme di schemi mentali che potesse guidarli nell'analisi, classificazione e risoluzione dei problemi di calcolo combinatorio enumerativo.

4.3.2. Obiettivi di apprendimento per lo studente

Gli obiettivi di apprendimento sono stati così definiti:

1. Apprendere come classificare i problemi semplici.
2. Apprendere le metodologie risolutive e le operazioni combinatorie di base (disposizioni, combinazioni, con e senza ripetizioni).
3. Apprendere l'esistenza dei modelli combinatori e la possibilità di leggere un problema secondo modelli diversi.

Il primo obiettivo consiste nel far acquisire allo studente la competenza necessaria a riconoscere, dato un problema di calcolo combinatorio semplice, quale sia l'operazione da compiere sui dati del problema. Questa è legata alla capacità di individuare nel testo del problema le parole chiave che consentono di discriminare se si tratti di una combinazione o di una disposizione e, in seguito, di riflettere sulla possibilità che nelle configurazioni accettabili compaia più volte lo stesso elemento (ripetizione). Riconoscere l'operazione da applicare richiede un'attenta analisi del testo e una riflessione basata sullo svolgimento precedente di esercizi analoghi.

Una volta riconosciuta l'operazione da compiere, lo studente ha bisogno di apprendere la metodologia risolutiva. Essa si presenta sotto due forme.

- Quella «descrittiva», costituita di un elenco di passi successivi, ciascuno dei quali intuitivamente comprensibile e ben giustificabile.
- Quella «algebrica», rappresentata in forma sintetica da una funzione dei dati del problema.

È importante che lo studente apprenda soprattutto la forma «descrittiva» della tecnica di risoluzione, che risulta più semplice da ricordare e che offre comunque, in un secondo tempo, l'opportunità di ricavare la forma «algebrica». L'apprendimento della sola forma «algebrica» può risultare poco utile perché non stimola, né esercita, il ragionamento combinatorio.

Il terzo obiettivo si spinge oltre i requisiti minimi per il liceo e mira a far riflettere lo studente sull'esistenza di due dimensioni ortogonali per l'analisi dei problemi combinatori: l'operazione e il modello. La prima dimensione è normalmente ben esplorata, mentre della seconda a volte non si fa cenno. Ci limitiamo qui a considerare per semplicità solo due modelli combinatori:

- Il modello della «selezione» (o «campionamento»), traducibile nel calcolare in quanti modi si possa scegliere da un insieme di n elementi un sottoinsieme di k di essi.

– Il modello della «distribuzione», in cui il problema è traducibile nel calcolare in quanti modi si possano distribuire k oggetti in n posti disponibili.

Per quest'obiettivo, la prima competenza che si vuole sviluppare è quella di riconoscere quale sia il modello sottostante al problema. Una volta riconosciuto il modello, la seconda competenza consiste nel saper individuare quali siano le domande, tipiche del modello, che è necessario porsi per classificare il problema. La terza competenza che s'intende sviluppare è la capacità di tradurre un problema, espresso secondo un modello, in un altro equivalente espresso secondo l'altro modello.

4.3.3. Esempi impiegati nel modulo didattico on-line[7]

I casi per il modulo on-line sono stati scelti in modo tale da rendere evidente la possibilità di trasformare un problema, espresso secondo il modello A in un problema equivalente, espresso secondo il modello B. Sono stati scelti due esempi, descritti nel seguito.

Il primo esempio è il problema della selezione di tre numeri della tombola da un sacchetto che ne contiene cinque. Interpretandolo secondo il modello «selezione», si arriva alle quattro operazioni di base (combinazioni e disposizioni, con e senza ripetizioni) specificando se i numeri della tombola vengano, o no, re-inseriti e se l'ordine di estrazione sia, o no, significativo.

La trasformazione di questo problema nel modello «distribuzione» si basa sull'artificio di immaginare che i cinque tombolini siano già presenti sul tavolo e che si assegnino loro tre etichette. A seconda che:

– le tre etichette siano numerate o identiche,
– si possa assegnare a un tombolino anche più di un'etichetta.
– si ottengono nuovamente le quattro operazioni combinatorie di base (e ovviamente le stesse soluzioni numeriche dei problemi equivalenti nel modello «selezione»).

Il secondo esempio è invece impostato per essere intuitivamente interpretato con il modello «distribuzione». Si tratta di parcheggiare tre auto in cinque posti disponibili. Le quattro operazioni combinatorie di base derivano dalle due opzioni:

– automobili distinguibili o indistinguibili;
– posti singoli o multipli (ossia in grado di ospitare più di un'auto).

La trasformazione nel modello «selezione» avviene immaginando di definire cinque etichette rappresentanti i cinque posti disponibili e di inserirle in un'urna, per poi procedere all'estrazione di tre di esse e all'assegnazione alle tre auto. Le quattro operazioni combinatorie di base sono il risultato delle risposte alle due domande:

– re-inserisco un'etichetta nell'urna, dopo averla estratta?
– l'ordine di estrazione è significativo?

Anche in questo caso si arriva a una classificazione in quattro casi che può essere fatta corrispondere bi-univocamente alla classificazione realizzata nel modello «distribuzione».

7. Il lettore particolarmante interessato può richiedere all'autore il materiale non pubblicato: ernesto.colizzi@gmail.com

4.3.4. Metodologia adottata nel modulo on-line

Nel modulo on-line, i tre obiettivi didattici vengono perseguiti in modo diverso. L'apprendimento dei metodi di classificazione dei problemi avviene in tre passi:

- Nella parte introduttiva si avvisa lo studente che, al termine della lezione, dovrà costruire uno schema classificatorio entro il quale inquadrare gli esempi proposti.
- Nel corso della discussione degli esempi, si enfatizza l'esistenza di «domande chiave» richiamando il fatto che dalle loro risposte si arrivi a tecniche risolutive diverse.
- Infine, si chiede allo studente di utilizzare le informazioni raccolte per riempire una «tabella classificatoria» muta inserendo negli spazi vuoti le due «domande chiave» e le «operazioni combinatorie» risultanti dall'incrocio delle risposte alle due domande.

Gli schemi proposti sono in realtà due, uno per il modello «selezione» e uno per quello «distribuzione». L'osservazione che a entrambi i metodi corrispondano le stesse quattro operazioni di base è lasciata a un momento consuntivo della prova svolta.

L'apprendimento delle tecniche risolutive avviene mediante la presentazione esplicita dei passi necessari per ricavare il risultato numerico a partire dai dati del problema. La soluzione del problema specifico viene presentata allo studente in modo tale che sia intuibile come generalizzarla. Allo studente viene successivamente chiesto di formalizzare una soluzione generale per tutti i tipi di problemi di quel tipo, esprimendola mediante una funzione. Indipendentemente dalla risposta data dallo studente al quesito precedente, viene infine presentata e discussa la formula risolutiva corretta, sottolineando come l'uso della notazione fattoriale possa rendere più elegante e compatta la rappresentazione.

Per poter capire che si possono trasformare i problemi da un modello a un altro, lo studente è invitato a ripercorrere l'analisi del problema secondo la chiave di lettura fornita dal modello alternativo. La struttura grafica della presentazione è perfettamente simmetrica e consente allo studente di osservare come in entrambi i casi sia possibile isolare due «domande chiave», la cui risposta consente la classificazione del problema nei quattro casi corrispondenti alle medesime quattro operazioni combinatorie già viste nel modello di partenza.

4.3.5. Struttura del modulo on-line

Il modulo didattico precedente è stato implementato con *Moodle*: un software gratuito, che può essere impiegato in rete disponendo di un server[8].

La struttura del corso prevede:

- una «page» introduttiva, in cui si spiega allo studente lo scopo del modulo e quali saranno le richieste per svolgere il compito finale;

8. Abbiamo usufruito della gentile concessione dei gestori degli strumenti IT del Liceo di Bellinzona.

- una sequenza di 8 «lessons», che corrispondono agli 8 problemi da risolvere:
  - 4 per il modello «selezione» e 4 per il modello «distribuzione»;
  - per ciascun modello, un problema riconducibile a una:
    - disposizione semplice;
    - combinazione semplice;
    - disposizione con ripetizioni;
    - combinazione con ripetizioni;
- un file «word» scaricabile, che contiene la tabella di classificazione «muta» da riempire a cura dello studente;
- un «assignment» in cui lo studente è invitato a caricare il file «word» della sua proposta di classificazione; i file raccolti saranno disponibili per la valutazione successiva del docente.

Il cuore del corso sono ovviamente le 8 «lessons», che hanno la medesima struttura:

- una pagina «content» in cui si presenta il testo del problema e si offre allo studente la scelta se studiarlo secondo i modelli «selezione» o «distribuzione»;
- per ciascun modello, tre pagine «test» a risposta multipla, in cui lo studente è invitato a rispondere alle seguenti domande:
  - quali siano i parametri del problema;
  - se l'estrazione del campione preveda la successiva re-inserzione (modello «selezione»);
  - se l'ordine di estrazione sia, o no, rilevante (modello «selezione»);
  - se gli oggetti da distribuire siano indistinguibili (modello «distribuzione»);
  - se i posti in cui distribuire gli oggetti ne possano contenere più di uno (modello «distribuzione»);
- una pagina «content» in cui si riassume quanto raccolto fino a quel momento sul problema esaminato e si spiega la tecnica risolutiva;
- una pagina «test» di tipo «essay» in cui lo studente è invitato a scrivere la formula che corrisponde alla risoluzione nel caso generale; queste risposte vengono collezionate dal *tool* e rese disponibili al docente;
- una pagina «content» in cui si presenta la formula corretta e la si commenta;
- una pagina «content» conclusiva in cui si riassume quanto svolto fino a quel momento e s'invita lo studente ad analizzare il medesimo problema secondo il modello alternativo.

4.3.6. Svolgimento della sperimentazione

Il modulo on-line è stato proposto a due classi terze (3F e 3D) del Liceo Lugano 2, all'interno di un programma che prevedeva tre lezioni di due ore svolte in classe, distanziate di due settimane.

Nella prima lezione è stato inizialmente presentato il calcolo combinatorio nel suo complesso e sono stati introdotti due problemi tipici, uno per il modello «selezione» (estrazione di numeri dalla tombola) e uno per il modello «distribuzione» (sistemazione di oggetti in una cassettiera).

Per ciascuno dei due modelli è stata rappresentata, nei due lati opposti della lavagna, una tabella di classificazione, di due righe e due colonne, in cui ciascuna delle dimensioni corrispondeva alla domanda «chiave» importante per la classificazione. Le due tabelle sono qui rappresentate.

Modello «selezione» (estraggo k oggetti fra n)		Conta l'ordine di estrazione?	
		Sì	No
Reinserisco dopo ogni estrazione?	No	Disposizioni semplici $\frac{n!}{(n-k)!}$	Combinazioni semplici $\frac{n!}{(n-k)!k!}=\binom{n}{k}$
	Sì	Disposizioni con ripetizioni n^k	Combinazioni con ripetizioni $\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}=\binom{k+n-1}{k}$

Tabella 4. Classificazione dei problemi di «selezione»

Modello «distribuzione» (distribuisco k oggetti in n posti)		Gli oggetti sono distinguibili?	
		Sì	No
Posso inserire più di un oggetto nello stesso posto?	No	Disposizioni semplici $\frac{n!}{(n-k)!}$	Combinazioni semplici $\frac{n!}{(n-k)!k!}=\binom{n}{k}$
	Sì	Disposizioni con ripetizioni n^k	Combinazioni con ripetizioni $\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}=\binom{k+n-1}{k}$

Tabella 5. Classificazione dei problemi di «distribuzione»

Questi due schemi, inizialmente vuoti, sono stati presenti sulla lavagna per tutte e sei le ore di lezione e sono stati gradualmente riempiti con i risultati ottenuti dalle spiegazioni teoriche e dallo svolgimento degli esercizi. Si è voluta sottolineare l'esistenza dei due modelli diversi (distinti dalle differenti domande chiave) e delle quattro operazioni combinatorie (rappresentate nelle celle centrali della tabella) comuni ai due modelli.

Nella prima lezione sono stati esaminati i casi di «disposizioni semplici» e «combinazioni semplici» in entrambi i modelli, proponendo alla classe esercizi da risolvere in gruppi di 2-3 studenti[9].

La seconda lezione è stata impiegata inizialmente per la discussione del caso «disposizioni con ripetizione», sfruttando la forma didattica (esercizi a gruppi) già sperimentata nella prima lezione.

Successivamente sono stati dedicati 30 minuti allo svolgimento dello stesso test già descritto in questo documento e tratto da (Batanero, 1997) e già proposto agli studenti prima di Natale. In questo caso il test è stato proposto in termini sem-

9. Al termine della prima lezione si è proceduto alla raccolta dei dati anagrafici (nome, cognome ed e-mail) necessari per l'iscrizione di ciascuno studente sulla piattaforma *Moodle* del Liceo di Bellinzona.

plificati, chiedendo agli studenti unicamente di identificare, per ognuno dei 13 problemi proposti, l'operazione combinatoria corrispondente, senza procedere al calcolo numerico. Si è trattato di una valutazione formativa sull'efficacia delle prime due lezioni, al fine di meglio calibrare forme e tempi per la successiva e ultima lezione.

I risultati non sono confrontabili direttamente con quelli raccolti prima di Natale, perché le modalità di svolgimento del test e le consegne sono diverse. Si è potuto comunque osservare che:

- in 11 esercizi su 13 il risultato è migliorato;
- i 2 esercizi in cui il risultato è leggermente peggiorato corrispondono a casi non riconosciuti di «combinazioni semplici»;
- l'esercizio che aveva comportato difficoltà a gran parte degli studenti nella prima edizione del questionario, è stato invece risolto correttamente dall'89% degli studenti;

I risultati sono stati quindi confortanti e hanno permesso di procedere con il programma previsto con la sola aggiunta di un ripasso concernente la distinzione tra combinazioni e disposizioni.

L'ultima parte della lezione è stata invece dedicata alla descrizione dell'applicazione *Moodle* che sarebbe stata poi assegnata agli studenti come compito per la lezione successiva. Particolare attenzione è stata posta nella spiegazione della consegna principale, che consisteva nella realizzazione di due tabelle simili a quelle presentate in classe alla lavagna.

La terza lezione è iniziata con una discussione aperta sull'impiego delle tecnologie informatiche a scuola, con particolare riferimento alla lezione *Moodle* e si è conclusa con lo svolgimento in classe di esercizi non elementari, aventi lo scopo di stimolare discussioni e intuizioni.

Negli ultimi cinque minuti, come accennato, è stato distribuito e immediatamente raccolto un questionario volto a raccogliere un riscontro su:

- la percezione di autoefficacia relativamente al calcolo combinatorio;
- la valutazione delle lezioni e delle dispense;
- la valutazione della lezione on-line.

Alcuni risultati sono presentati nella prossima sezione di questo documento.

Un'ulteriore preziosa opportunità di raccogliere feedback è stata offerta da un'ora di discussione aperta che il docente ha concesso in classe 3F nella settimana successiva alla terza lezione e che gli studenti hanno spontaneamente deciso di dedicare al tema «le tecnologie informatiche applicate all'insegnamento», con particolare riferimento alla lezione *Moodle* cui avevano partecipato.

4.3.7. Risultati della sperimentazione del modulo on-line

Aspetti organizzativi

Al corso *Moodle* sono risultati iscritti 43 studenti, indicativo dell'elevata percentuale di studenti che hanno accesso a un personal computer.

La lezione *Moodle* proponeva due tipi di consegne:

A. Una consegna intermedia, consistente nella scrittura della formula risolutiva generalizzata per ciascuna delle quattro operazioni combinatorie.
B. La consegna finale, consistente nella creazione delle due tabelle di classificazione (per i modelli «selezione» e «distribuzione») e nel caricamento delle stesse sulla piattaforma.

Solo 20 hanno svolto la consegna intermedia, mentre 31 hanno svolto quella finale. L'interpretazione più probabile (parzialmente confermata a voce dagli studenti) è che i contenuti descritti in classe e le dispense distribuite fossero ritenuti sufficienti per svolgere direttamente la consegna finale.

Aspetti disciplinari

La consegna intermedia è stata valutata in centesimi. La media dei risultati è stata pari a 88 centesimi con i risultati peggiori concentrati nella domanda riguardante il caso delle «combinazioni con ripetizioni», non trattate in precedenza in classe e quindi legittimamente suscettibili d'incomprensioni, anche considerando la complessità del caso specifico.

La consegna finale è stata invece completata con punteggio pieno da 22 studenti su 31 e ha raggiunto una votazione media di 91 centesimi.

Gli studenti che hanno svolto la consegna sono stati quindi in grado di ri-sintetizzare correttamente lo schema classificatorio visto in classe, compiendo così un'attività di auto-costruzione del proprio schema mentale che costituiva l'obiettivo della sperimentazione.

Feedback soggettivo degli studenti

Sintetizzando si può affermare che un numero rilevante di studenti:

– Ritiene che un'attività on-line, svolta a casa, non possa in alcun modo sostituire, nemmeno parzialmente, l'attività svolta in classe.
– Ha valutato «troppo monotona e banale» la sequenza di quiz che aveva l'obiettivo di portare gradualmente lo studente a comprendere la classificazione.
– Ha valutato «poco chiara» la consegna finale, nonostante i risultati siano stati più che soddisfacenti. Probabilmente gli studenti si sono consultati fra loro per risolvere i dubbi.

Gli studenti, da un lato, sono convinti di aver appreso e compreso una tecnica di classificazione chiara e dall'altro si rendono conto che i problemi non elementari comportano comunque la necessità di uno sforzo di ragionamento e intuizione che non può essere sostituito dall'apprendimento di una tecnica.

5. Conclusione: vantaggi e limiti della proposta didattica

Il modulo di e-learning sul calcolo combinatorio è stato strutturato per un impiego a casa, senza la presenza del docente. La probabile mancanza di dimestichezza degli studenti con le applicazioni di e-learning (e di *Moodle*, in particolare) suggerisce comunque, per eventuali esperimenti simili, un iniziale addestramento a scuola, in aula d'informatica. Ciò consentirebbe al docente di prevenire dubbi e difficoltà di tipo prettamente tecnico e di calibrare meglio il linguaggio da utilizzare e di giungere a un utilizzo autonomo da parte degli studenti.

Dal punto di vista tecnico, lo strumento *Moodle* ha presentato diversi limiti. In particolare:

– non è utilizzabile la funzionalità di generazione di esercizi con dati casuali e di controllo automatico delle risposte, in quanto non è previsto il tipo di dato «numero intero» e nemmeno l'operatore «fattoriale»;
– l'impaginazione del corso è difficilmente migliorabile, visti i vincoli imposti;
– la «navigabilità» delle pagine è complessa e rende difficile la comprensione del punto in cui ci si trova in ogni momento.

Dal punto di vista didattico, il limite maggiore dell'applicazione sviluppata è, a mio avviso, quello comune a tutte le applicazioni di e-learning: la loro percezione da parte degli studenti.

Se, infatti, uno studente adulto può adattarsi a una forma di comunicazione impersonale, per un adolescente può risultare invece inaccettabile dover rispondere a un'applicazione informatica che sostituisce, in quel momento, il docente con cui è abituato a un contatto diretto.

Per il docente, invece, questa modalità consente di raccogliere in un'unica piattaforma le dispense del corso, gli esercizi da risolvere a casa e lo strumento di valutazione.

In un ambiente scolastico collaborativo, l'applicazione potrebbe inoltre essere arricchita dal contributo di altri colleghi e divenire quindi patrimonio della scuola.

Complessivamente, dal punto di vista dell'efficacia, la combinazione di una lezione convenzionale e di una lezione on-line sembra aver comunque raggiunto gli obiettivi previsti. In particolare, la classificazione degli esercizi del calcolo combinatorio che è stata proposta agli studenti appare ormai condivisa e assimilata.

Allegato Valutazione delle competenze

[Tratto da: Batanero, Navarro-Pelayo, Godino, «Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary schools pupils», Educational Studies in mathematics, vol.32, pp. 181-199, 1997].

Quiz 1 Quattro studenti sono inviati dal direttore della scuola perché disturbavano. Nella sala d'attesa devono mettersi in fila per essere ricevuti. Supponiamo che si chiamino Andrea, Beniamino, Carlo e Davide (A, B, C, D). Quanti sono i modi possibili in cui i quattro studenti possono mettersi in fila?

Quiz 2 In una scatola ci sono quattro palline colorate: due blu, una bianca e una rossa. Estraiamo a caso una pallina e annotiamo il colore. Poi facciamo lo stesso con una seconda, con la terza e con la quarta. In quanti modi diversi è possibile estrarre le quattro palline?

Quiz 3 Supponiamo di avere tre lettere identiche che vogliamo inserire in quattro buste di colore diverso (Giallo, Blu, Rosso e Verde). In ogni busta può entrare al massimo una lettera e quindi una delle quattro buste rimarrà vuota. In quanti modi possibili posso inserire le tre lettere nelle quattro buste?

Quiz 4 Un bambino ha quattro macchinine di colori diversi (Nero, Arancio, Bianco e Grigio) e decide di regalarle ai suoi amici Alberto, Beniamino e Carlo. In quanti modi diversi può distribuire le macchinine? (Fra le soluzioni ammissibili c'è anche quella in cui tutte e 4 le macchinine sono date allo stesso bambino).

Quiz 5 In un'urna ci sono i tre tombolini corrispondenti ai numeri 2, 4 e 7. Estraiamo a caso il primo e segniamo il suo valore. Poi, a caso e senza reinserire il primo tombolino estratto, estraiamo il secondo e segniamo il suo valore e infine il terzo. In questo modo abbiamo scritto un numero di tre cifre composto dalle cifre. Quanti numeri diversi potrei ottenere con questo metodo?

Quiz 6 Quattro sorelle (Alice, Beatrice, Carolina e Diana) vanno a dormire dalla nonna, che ha due stanze disponibili, ciascuna delle quali in grado di ospitarle tutte e quattro. In quanti modi possibili posso sistemarsi le quattro bambine?

Quiz 7 Quattro amici (Anna, Beatrice, Carlo e Davide) devono svolgere due esercizi: uno di Matematica e uno di Tedesco. Decidono di dividersi il compito, in modo tale che due amici svolgano il compito di matematica mentre gli altri quello di Tedesco. In quanti modi possibili possono dividersi i quattro amici? Ad esempio: (Anna, Beatrice, Matematica) e (Carlo, Davide, Tedesco).

Quiz 8 Cinque studenti (Anna, Beatrice, Carlo, Davide ed Elena) si offrono volontari per cancellare la lavagna. All'insegnante ne bastano tre: in quanti modi diversi può scegliere i tre studenti fra i cinque disponibili?

Quiz 9 Il parcheggio della casa di Angelo ha cinque posti numerati (1,2,3,4 e 5). Nella casa però abitano solo in tre: Angelo, Beatrice e Carlo. In quanti modi possono parcheggiare?

Quiz 10 Marco e Claudio hanno in tutto quattro carte da gioco, numerate da 1 a 4. Decidono di spartirsele due per ciascuno. In quanti modi diversi possono dividersele?

Quiz 11 In un sacchetto ci sono i quattro tombolini corrispondenti ai numeri 2, 4, 7 e 9. Scegliamo un tombolino e annotiamo il numero corrispondente. Poi reinseriamo il tombolino nel sacchetto ed effettuiamo un'altra estrazione, annotando anche questa volta il numero estratto. Reinseriamo il tombolino e procediamo con la terza estrazione, annotando il terzo numero. Con i tre numeri estratti abbiamo composto un numero di tre cifre (ad esempio 222). Quanti numeri a tre cifre possiamo costruire con questo metodo?

Quiz 12 Abbiamo 5 carte, su ciascuna delle quali è scritta una lettera. Più precisamente, sulla prima è scritta la lettera A, sulla seconda la lettera B, sulla terza, quarta e quinta la lettera C. In quanti modi diversi posso allineare le carte sul tavolo? Ad esempio: ACBCC.

Quiz 13 Vogliamo creare un comitato composto di tre persone (il presidente, il segretario e il cassiere). Abbiamo quattro candidati (Andrea, Barbara, Carolina e Daniele). Quanti comitati diversi posso comporre?

Bibliografia

Arrigo G. (2014). Conversioni e trattamenti semiotici nel problem solving. *Bollettino dei docenti di matematica nr. 69*. Bellinzona: UIM-CDD

Arrigo G. (2015). Problemi per tutti. *Bollettino dei docenti di matematica nr. 70*. Bellinzona: UIM-CDD

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., & Godino, J. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics, 32*, 181-199.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. e Iori M. (2013). *Primi elementi di semiotica*. Prefazioni di Raymond Duval e Luis Radford. Bologna: Pitagora editrice.

D'Amore B. (2015). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Digital docet.

David, F. (1998). *Games Goal and Gambling: A History of Probability and Statistical Ideas*, Dover Press, New York, citato in Tucker (2002).

Dubois, J. G. (1984*). Une systématique des configurations combinatoires simples.* Educational Studies in Mathematics, 15(1), 37-57.

English, L. D. (1991). Young children's combinatorics strategies. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 451-470.

English, L. D. (1993). Children's strategies for solving two- and three-dimensional combinatorial problems. *Journal of Mathematical Behavior, 24*(3), 255-273.

English, L. D. (2005). Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* , 40, 121-141.

Fischbein, E., & Gazit, A. (1988). The combinatorial solving capacity in children and adolescents. *ZDM, 5*, 193-198.

Fischbein, E., & Grossman, A. (1997). Schemata and intuitions in combinatorial reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 34*, 27-47.

Gal, I., & Garfield, (1997). *The Assessment Challenge in Statistics Education*. IOS Press (ISBN 90 5199 333 1), 239-252.

Lockwood, E. (2011). Student connections among counting problems: an exploration using actor-oriented transfer. *Educational Studies in Mathematics, 78(3)*, 307-322.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in children*. Norton, New York, citato in Lockwood (2011).

Pólya G. (1945). *How to Solve It*. Princeton: University Press. Versione italiana (1967). *Come risolvere i problemi di matematica: logica ed euristica nel metodo matematico*. Milano: Feltrinelli.

Radford L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica.* 2, 191-213.

Repubblica e Cantone Ticino (2002), Dipartimento dell'educazione e della cultura, *Piano degli studi liceali*.

Tucker, A. (2002). *Applied Combinatorics* (4th ed.). New York: John Wiley & Sons.

Wirthworth, W. (1901). *Choice and Chance*, 5th ed., Hafner Press, New York, citato in Tucker (2002).

3. Come una mostra d'arte può accendere curiosità matematiche

Lorella Maurizi[1]

The article highlights the importance of «being able to listen to children» in order to get interesting opportunities to introduce new topics not only in the field of maths. It is always exciting to add new challenges to classroom routines, which not even the teacher knows where they could lead to.

This is the story of a visit to an art exhibition that offers opportunities to talk about maths. Everything developed as the result of an intuition and we made adjustments where necessary during the whole process with the help of the children's comments and thoughts.

L'articolo vuole evidenziare come il «saper ascoltare i bambini» sia centrale per cogliere occasioni ghiotte per l'introduzione di nuovi argomenti non solo matematici. È interessante e stimolante introdurre nella consuetudine della didattica d'aula sfide aperte dove nemmeno la maestra sa dove si andrà a finire. Qui si racconta la visita ad una mostra d'arte che apre opportunità di parlare di matematica. Tutto si è sviluppato in seguito a un'intuizione e per tutto il percorso di lavoro si è «navigato a vista» utilizzando come timone i commenti e i pensieri dei bambini.

Nel mese di ottobre presso lo spazio espositivo «Casa Elide Ceretti» di Verbania si è svolta una mostra «L'arte si mette in gioco», di giocattoli artistici in legno ognuno di essi ideato da un design differente e poi realizzati dalla ditta svizzera NAEF[2]. I giocattoli di legno sono costituiti da parti modulari che consentono molteplici composizioni creative e la perfezione quasi maniacale della costruzione consente situazioni interessanti dal punto di vista fisico: per esempio un gioco in legno denominato Rainbow (design Heiko Hilling) costituito da semicerchi in legno colorato può essere utilizzato anche come strumento musicale, una specie di xilofono, oppure il Cubicus (design Peer Clahasen) che anche quando cade non lo fa a caso, ma secondo una sua regolarità.

A corredo della mostra, lungo le pareti della sala erano esposte delle opere di Fulvio Castiglioni[3], un *designer* svizzero con uno studio ad Oggebbio sul lago Maggiore.

Con la mia classe, una seconda elementare della scuola primaria «Maria Peron» di Verbania ho visitato la mostra e i bambini hanno potuto divertirsi con i giochi messi a disposizione dagli organizzatori. Sono rimasta piuttosto sorpresa dal fatto che le opere artistiche abbiano colpito i bambini più dei giocattoli cui, in verità, era de-

1. Insegnante alla scuola primaria «Maria Peron» di Verbania e membro del RSDDM di Bologna.
2. Consultare il sito www.naefspiele.ch
3. Consultare il sito www.fcastiglioni.ch

dicata la mostra. Questo fatto, forse è dovuto al *backgruond* dei miei alunni, «nati» con i LEGO e abituati fin dalla più tenera età a maneggiare giochi a incastro e modulari. Sta di fatto che i giochi della Naef sono stati progettati e realizzati con cura e quindi sono particolarmente belli, è anche vero che potessero non costituire una novità nell'esperienza dei bambini.

Le opere di Fulvio Castiglioni, invece hanno incuriosito così tanto i miei alunni che, al ritorno in classe e anche durante il tragitto a piedi dalla sede della mostra a scuola, hanno commentato vivacemente le opere.

Uno degli aspetti che ha colpito i bambini è stato il fatto che, per la realizzazione delle opere, Castiglioni abbia utilizzato oggetti di uso comune: dalle puntine da disegno alle caramelle, dai telaietti per diapositive ai bastoncini del gelato.

Non a caso, alla domanda: «come mai vi sono piaciute le opere di Fulvio Castiglioni? cosa ci avete trovato di particolare?» i bambini mi hanno risposto così:

– *ha usato oggetti comuni, quindi facili da trovare (Greta)*
– *sì, però non li ha messi a caso, ma in modo ordinato (Leonardo)*

la discussione è poi proseguita in termini sempre più definiti .

Maestra: che cosa, secondo voi, dava il senso dell'ordine?

– *la forma su cui ha appoggiato gli oggetti(Elena)*
– *anche la distanza sempre uguale degli oggetti (Andrea)*

Maestra: quale forma?

– *il quadrato (Alessandro)*
– *sì, però anche il colore è importante. (Sofia)*
– *lui (Fulvio Castiglione) ha usato sempre lo sfondo nero (Mattia)*
– *però ha messo oggetti colorati....forse per dare un po' di allegria!(Matteo)*
– *ce n'erano anche solo in bianco e nero, ma a me piacciono di più quelli colorati! (Giulia)*
– *Potremmo pensare alle sue opere (di Castiglioni) e provare a farle anche noi, cosa ne dici maestra? (Leonardo)*

Maestra: perchè no? fate un progetto con colori, forme e oggetti e poi vediamo se riusciamo a realizzarlo.

– *lo sfondo nero è un po' triste però... (Haleney)*
– *è vero, però lo sfondo deve essere scuro, così i colori risaltano di più*
– *potremmo usare il blu, oppure il verde scuro... (Lucrezia)*
– *a me piace il giallo, ma forse non va bene (Alan)*

I bambini si lanciano in questa nuova sfida e subito nascono i primi problemi:

– *come facciamo a fare un quadrato* giusto *su cui attaccare gli oggetti?*

Ecco un bel pretesto per fare un po' di geometria. Vediamo insieme quali sono le caratteristiche che deve avere un quadrato per essere *giusto.* Prima di tutto lati congruenti, o come dicono i bambini *lati lunghi uguali.* Partiamo da qui: i bambini armati di righello provano a costruire con cartoncini colorati dei quadrati, ma non sempre i risultati sono soddisfacenti.

Margherita propone di fare un quadrato con fogli di carta centimetrata (che utilizziamo spesso per molte attività); così basta contare i quadrettoni e poi appoggiare sopra il cartoncino e ritagliarlo.

– *i quadrettoni devono essere uguali sui quattro lati, precisa Francesco.*

Ottima idea! Approfitto dell'occasione ghiotta e faccio notare che un quadrettone ha il lato che corrisponde a un centimetro di quelli che hanno sul righello, perciò possono fare la corrispondenza quadrettoni-centimetri.

Dopo aver realizzato le basi di dimensioni diverse, ma tutte rigorosamente quadrate, i bambini scelgono oggetti diversi e provano a posizionarli, ma sorgono altri problemi:

– *Maestra, ma per dare la forma giusta anche agli oggetti non possiamo metterli a caso... (Alan)*
– *e neanche tutti quelli che vogliamo, io volevo mettere un sacco di perline, ma non so come fare a farle stare bene, si lamenta Marta.*

Propongo loro di contare quanti sono gli elementi che ritengono siano *giusti* e così scopriamo che alcuni numeri *disposti bene* danno la forma di quadrato.

Chiedo: ma cosa vuol dire disposti bene?

– *anche loro a quadrato!! rispondono in coro*

Racconto ai bambini che tanto tanto tempo fa un matematico greco di nome Pitagora giocando con dei sassolini scopre che alcune quantità possono essere disposte «a forma quadrata» e decide di chiamare tali quantità NUMERI QUADRATI. Invito i bambini a scoprire i numeri quadrati utilizzando piccoli oggetti. E così troviamo la sequenza dei quadrati 2-9-16-25-36 ecc...

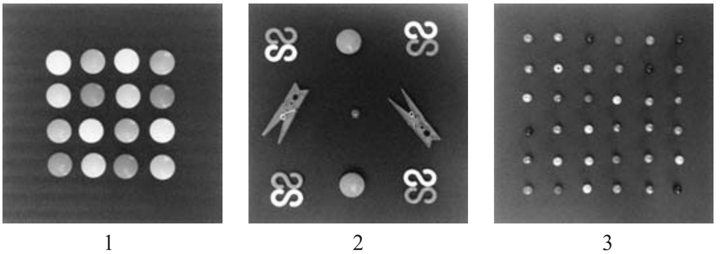
A questo punto chiedo: secondo voi quanti sono i numeri quadrati?

– *almeno 10 o 20*
– *ma no di più...*
– *sono tanti, tantissimi perché puoi aggiungere un sassolino al lato e così via...*
– *puoi fare sempre uno in più, ma non solo di sassolini anche di altre cose.*

Insisto. Ma allora quanti sono?

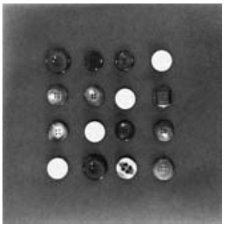
Azzardano: infiniti?

– *e sì, in effetti sono infiniti, confermo.*

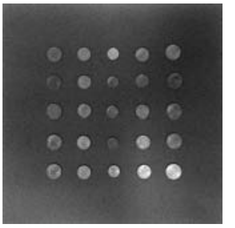


1 2 3

Greta punta sui colori (1), mentre Margherita sceglie il rosso e il bianco (2), per Matilde più perline ci sono e meglio è! (3).

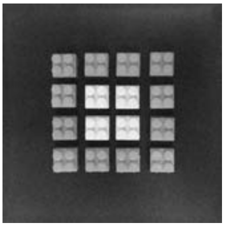

4

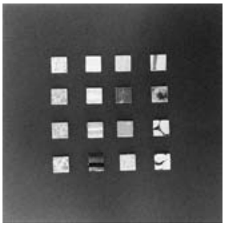

5

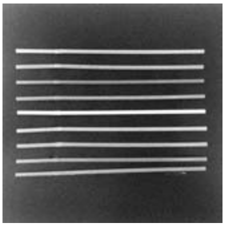

6

Quest'opera di Sara si intitola «la diagonale rossa» (4), ricordo che siamo in seconda elementare e che il concetto di diagonale non è ancora stato trattato; Sara ha scelto questo nome tratto dalla sua esperienza quotidiana, ma sono certa che, anche quando tratteremo la diagonale in maniera puntuale in ambito geometrico si ricorderà di questa esperienza.

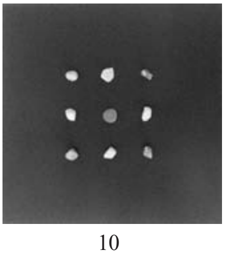
Poi pupazzetti (5) e centesimi di euro (6)


7

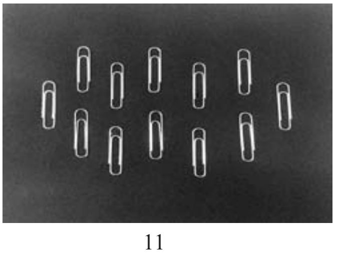

8

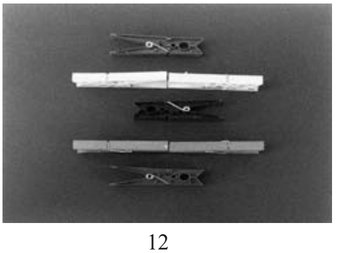

9

… e ancora lego, piastrelle e cannucce

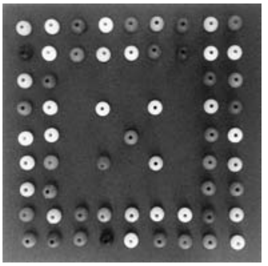

10

Asia ha un approccio più minimalista, ma molto artistico! Solo 9 sassolini (10)

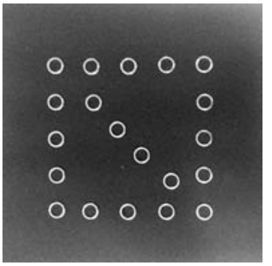

11


12

mentre per Emma (11) e Alessandro (12) la forma quadrata è superata!



13



14

Marta (13) e Silvia (14) hanno il problema di non avere abbastanza elementi perciò si inventano disposizioni che possano risolvere la situazione mettendo il maggior numero di oggetti possibile, e risultato che ottengono è comunque ordinato e gradevole!

15

Quest'opera di Andrea ha suscitato discussioni perché pur realizzando la forma quadrata con le figurine la disposizione non segue la regola infatti su un lato sono disposte 4 figurine mentre sull'altro solo 3. Solo dopo accese riflessioni trovano la motivazione di questa «anomalia» nella forma rettangolare delle figurine.

Questo lavoro è durato a lungo, perché è capitato che i bambini non fossero soddisfatti e rifacessero tutto da capo. Il principale problema incontrato si è rivelato essere legato alla precisione della disposizione. I bambini lo hanno risolto utilizzando la mascherina di carta centimetrata.

Una volta realizzata, la mascherina è stata sovrapposta al cartoncino ed i bambini hanno effettuato dei buchini con un punteruolo in corrispondenza della posizione che avrebbero dovuto avere gli oggetti: così facendo una volta tolta la mascherina, il cartoncino si presentava bucherellato secondo la disposizione progettata.

Mi pare che per bambini di 7 anni aver affrontato un problema del genere non sia cosa da poco!

Al termine del lavoro ho chiesto ai bambini di presentare ai compagni le loro opere motivando scelte e descrivendo difficoltà e soddisfazioni.

Sono emerse dichiarazioni di soddisfazione per il lavoro fatto, inizialmente ritenuto troppo difficile da realizzare , ma anche commenti sulla scelta dei colori e degli oggetti. e i compagni hanno osservato e commentato con competenza. Ogni autore ha poi assegnato un titolo all'opera e abbiamo realizzato una piccola mostra.

Perché proporre in classe un'esperienza di questo tipo? Perchè iniziative come queste danno gusto al lavoro dell'insegnante. Aggiungo che è interessante e stimolante introdurre nella consuetudine della didattica d'aula sfide aperte dove nemmeno la maestra sa dove si andrà a finire.

Quando ho deciso di portare i miei alunni a visitare la mostra non avevo pensato che questa circostanza potesse aprirmi l'opportunità di parlare di matematica. Tutto si è sviluppato in seguito a un'intuizione e per tutto il percorso di lavoro ho «navigato a vista» utilizzando come timone i commenti e i pensieri dei bambini.

Le nuove indicazioni nazionali recitano: «Obiettivo della scuola è quello di far nascere 'il tarlo' della curiosità, lo stupore della conoscenza, la voglia di declinare il sapere con la fantasia, la creatività, l'ingegno, la pluralità delle applicazioni delle proprie capacità, abilità e competenze» e cosa meglio di esperienze come quella descritta possono abituare all'assunzione di responsabilità del bambino di fronte a sfide e problemi anche casuali e quotidiani?

I miei alunni hanno mobilitato in modo consapevole le loro risorse di creatività e progettazione, riflessione e comunicazione diventando protagonisti del loro apprendimento.

IV. Giochi

1. Agorando[1] 4
Buon 2016

Paolo Hägler e Giorgio Mainini

Vuoi mandare un augurio originale per l'anno nuovo?

Puoi fare così: se il destinatario nel 2016 compirà 14 anni, gli invii un cartoncino come questo:

Se ha il pallino per i numeri potrebbe gradire.

Poi, già che ci sei, usando tutte e soltanto le cifre che formano il numero 2016, eventualmente più volte, le quattro operazioni aritmetiche, l'elevazione a potenza, la radice quadrata e le parentesi, cerca di ottenere qualche numero da 0 a 100, tanto meglio se tutti.

Come vedi dall'esempio, è possibile formare numeri usando le cifre ammesse. Verrà premiato chi avrà ottenuto il maggior numero di numeri.

Le soluzioni vanno inviate all'indirizzo di posta elettronica
agorando.bdm@gmail.com

1. Il verbo greco *agoràzein* è traducibile, più o meno, con *andare in piazza a curiosare*. Qui si troveranno spunti matematici presi qua e là sui quali curiosare.

Soluzione Agorando 3

Purtroppo ci sono giunte poche soluzioni al quiz Agorando 3.

Siccome però esistono più possibilità per ricavare il testo in chiaro, per ora pubblichiamo solo questo per permettere, a chi lo volesse, di confrontare i due testi (cifrato e in chiaro), di mettere a punto un metodo di decifrazione e di comunicarcelo al solito indirizzo agorando.bdm@gmail.com

Nel prossimo numero esporremo alcuni possibili metodi per la decrittazione del testo.

LA MACCHINA DI TURING AGISCE SOPRA UN NASTRO CHE SI PRESENTA COME UNA SEQUENZA DI CASELLE NELLE QUALI POSSONO ESSERE REGISTRATI SIMBOLI DI UN BEN DETERMINATO ALFABETO FINITO; ESSA HA UNA TESTINA DI LETTURA E SCRITTURA CON CUI EFFETTUA OPERAZIONI DI LETTURA E SCRITTURA SU UNA CASELLA DEL NASTRO. HA ANCHE UN REPERTORIO FINITO DI ISTRUZIONI CHE DETERMINANO LA SUA EVOLUZIONE IN CONSEGUENZA DEI DATI INIZIALI. LE CARATTERISTICHE PRECEDENTI SONO COMUNI A MOLTE MACCHINE FORMALI, MA LE MDT HANNO INOLTRE LA CARATTERISTICA DI DISPORRE DI UN NASTRO POTENZIALMENTE INFINITO, OSSIA ESTENDIBILE QUANTO SI VUOLE QUALORA QUESTO SI RENDA NECESSARIO. OGNI PASSO DELL'EVOLUZIONE VIENE DETERMINATO DALLO STATO ATTUALE *S* NEL QUALE LA MACCHINA SI TROVA E DAL CARATTERE *C* CHE LA TESTINA LEGGE SULLA CASELLA DEL NASTRO SU CUI SI TROVA E SI CONCRETIZZA NELL'EVENTUALE MODIFICA DEL CONTENUTO DELLA CASELLA, NELL'EVENTUALE SPOSTAMENTO DELLA TESTINA DI UNA POSIZIONE VERSO DESTRA O VERSO SINISTRA E NELL'EVENTUALE CAMBIAMENTO DELLO STATO.

V. Segnalazioni

1. Recensioni

Toffalori C. (2015). ***Algoritmi*****. Bologna: il Mulino, pp. 216. ISBN 978-88-15-25415-3.**

Che Carlo Toffalori sia persona colta, arguta e simpatica si sapeva già, basta vedere la sua produzione precedente. Ma in questo libro, ricco e sottile, costruito con cura in modo armonico e avvincente, supera sé stesso. Fin dall'esordio (Bolle di sapone) ci conquista con un sarcasmo e un'ironia sottili, e poi così prosegue anche se, talvolta, affronta argomenti assai spinosi e complessi, anche se lo fa con un linguaggio avvincente. Fin dai primi passi, riesce a catturare il lettore con esempi stimolanti che sembrano sempre alla portata di tutti e che invece spesso nascondono contenuti sottili e tutt'altro che banali. Nella famosa soluzione (assurda: -4) del celebre problema delle noci da dividere e della scimmia, riesce a dare un tocco di magia narrativa, per esempio. E poi, pian piano, sistematizza tutto l'argomento, ma sempre senza eccedere in formalismi eccessivi, anche perché la collana (Raccontare la matematica) è destinata al grande pubblico.

Mi sono divertito moltissimo con la metafora di Merlino e Artù, attraverso la quale è riuscito a svelare più d'una sottile verità, ricorrendo al racconto brillante e creando una situazione falsamente verosimile. Mille esempi, mille citazioni, mille riferimenti, proposti e regalati con eleganza e ironia, ma una ironia sottile che conquista il lettore. L'ultimo capitolo, il IV, è un vero gioiello per i contenuti molto attraenti e per la maestria con la quale essi sono proposti. Conoscendo un po' la tematica di tutto il libro e in particolare alcuni degli argomenti in maniera più specifica, mi sono molto divertito a vedere le strategie ricche di perizia con le quali li affronta.

Io credo che questo libro possa essere letto con profitto da tutti gli insegnanti di matematica, per il proprio diletto personale e per arricchire la propria cultura, fondamentale per la professione. Ma lettori possibili sono anche bravi studenti di secondaria e di università. Gli insegnanti, poi, potrebbero sfruttare molte delle stimolazioni narrative e giocose qui proposte, per proporle a mo' di contenuti matematici nella loro attività didattica. Alcuni famosi giochi sono qui proposti in maniera accattivante e, secondo me, direttamente proponibili in aula, come le Torri di Hanoi, l'Hex e molti altri. Mostrare a dei giovani studenti che, all'origine o nella risoluzione di giochi appassionanti la matematica fa la differenza, è certo una provocazione culturale e una sollecitazione cognitiva di alto livello. (B. D'Amore)

Bottazzini U. (2015). *Numeri*. Bologna: il Mulino, pp. 208, 14 €. ISBN 978-88-15-25414-6. Versione e-book (formato: Kindle, ePub), 9.49 €.

Questo è davvero un bel libro adatto a tutti, da leggere con gusto e interesse, approfittando delle curiosità stimolanti che contiene, degli infiniti riferimenti storici, delle ghiotte narrazioni. Piacevoli i riferimenti a questioni evolutive, a problematiche storiche, a leggende o narrazioni, più o meno note, sempre arricchite da immagini o suggerimenti precisi. L'Autore riesce, in meno di 200 pagine, a dare una visione ampia dell'aritmetica e sui numeri in generale, di vasta cultura, restando il più possibile sul generale (anche per non spaventare l'eventuale lettore non specialista) ma compiendo ogni tanto degli a-fondo ammirevoli su alcune questioni che lo meritano.

Si passa dalla percezione spontanea della quantità alla formazione dell'idea di numero negli animali e nell'uomo, alla preistoria dell'aritmetica, alla sua nascita composta e consapevole; e si procede con gli esempi della prima civiltà Grecia fino all'Ellade. Si narra delle difficoltà che ebbe l'aritmetica indiano-araba a penetrare in Europa e la straordinaria avventura della creazione di sistemi numerici sofisticati, come gli immaginari, i complessi, i quaternioni, gli ipercomplessi. Impossibile non avventurarsi nel ginepraio dell'infinito, iniziando con i primi matematici di cui si hanno notizie storiche e culminando con l'avventura di Georg Cantor e Richard Dedekind, e dunque affrontando la spinosa questione della creazione dei numeri reali (ai quali l'Autore aggiunge gli irreali e i surreali, non a tutti noti).

Bello l'ultimo capitolo che porta il titolo stesso di uno dei più celebri articoli della storia della matematica (Cosa sono i numeri?); sono poche pagine, una dozzina o poco più, ma dense di fascino epistemologico e storico.

Credo che nessun insegnante di matematica debba farsi scappare l'opportunità di leggere questo libro per usarlo concretamente in aula, per farlo conoscere ai suoi allievi più brillanti. A volte, durante le lunghe ore scolastiche, quasi per forza di cose, la matematica rischia di essere pesante e ripetitiva; interrompere per qualche decina di minuti con uno di questi ghiotti esempi, con la lettura di un paragrafo, credo possa giovare al rapporto non sempre felice fra i nostri giovani liceali (o universitari) e la matematica. (B. D'Amore)

Guy Brousseau, Nadine Brousseau, Virginia Warfield (2014). *Teaching Fractions throught Situations: A Fundamental Experiment*. Dordreght and other: Springer, pp. 215, 99 €. ISBN: 978-94-007-2714-4 (Print) 978-94-007-2715-1 (Online)

Chiedo scusa al direttore della rivista che accoglie questa mia recensione e soprattutto ai lettori; questo libro formidabile è uscito oltre un anno fa, ma consegno questo mio testo solo ora. La lettura è stata in un certo senso agevole e anche abbastanza rapida, soprattutto perché molte di queste esperienze didattiche mi erano familiari, assai note nella loro sostanza e in molti particolari da decine d'anni; ma la presentazione critica che ne viene qui fatta è allo stesso molto storicizzata e attuale e mi ha costretto ad alcune letture complementari. Alcune riguardano testi del passato, perfino degli anni '70, altre sono più moderne perché gli Autori, oltre che raccontare imprese del passato e fare il punto su quelle teorie che, di fatto, hanno dato il via a quella scienza che oggi chiamiamo in tutto il mondo *Didattica della Matematica*, hanno voluto inserire in bibliografia anche testi assai più recenti, alcuni dei quali non avevo esaminato a fondo fino ad oggi.

Per me è stata la piacevole riscoperta di «esperimenti fondamentali» (come li hanno sempre chiamati i coniugi Brousseau fin dagli esordi), ma anche di una loro revisione critica, molto importante e attuale.

Dunque, il libro. Il libro parla di frazioni, ma soprattutto parla di teoria delle situazioni, ma parla anche di che cosa significa creare un esperimento fondamentale, all'interno della teoria delle situazioni, sul tema delle frazioni. Creare cioè delle situazioni empiriche concrete interessanti che spingano lo studente a ricostruire da sé la teoria, non ad ascoltarla – farla propria come fosse un oggetto esterno a sé – saperla ripetere. Sappiamo tutti che la base della teoria delle situazioni consta di due momenti iniziali fondamentali: la *devoluzione* (da parte dell'insegnante) e l'*implicazione* (da parte dello studente). Lo studente sa che sta accettando di attuare, implicandosi nella situazione proposta dall'insegnante, per imparare qualcosa, ma non sa che cosa; sta all'insegnante creare situazioni opportune, non solo attraenti, ma efficaci, affinché lo studente impari quel che l'insegnante ha in mente, un particolare oggetto matematico.

Ricordo qui che Guy Brousseau pubblicò con Dunod nell'ottobre del 1964, come sua prima esperienza editoriale, un libro di matematica senza parole, solo suggerimenti di lavoro per i bambini di prima primaria; e che da lì partirono poi tutte le sue famosissime esperienze che ufficialmente datano 1975 e oltre, ma la cui sistemazione teorica ha basi precedenti. Le idee teoriche di Guy e Nadine Brousseau divennero concreta azione didattica negli anni '70 e '80 grazie alle esperienze francesi del COREM e degli IREM che furono considerate esempi da seguire da tutti gli studiosi delle problematiche di insegnamento - apprendimento del mondo intero.

Questo libro è un esempio, e che esempio!, di come una situazione speciale, opportuna, ben studiata a tavolino possa costituire l'ossatura concreta di un apprendimento che sia significativo, creativo, razionale, duraturo, L'esperienza è descritta con mille dettagli in 15 moduli, per un totale di oltre 40 lezioni efficaci, 120 pagine. Poi si passa alle osservazioni legate alla realizzazione effettuata dai maestri, i veri artefici dell'*Avventura*, con tutte le note da essi proposte all'esperienza, poco meno di 40 pagine. Per poi passare all'esperienza messa a disposizione dei ricercatori, con una descrizione storica di estremo interesse dei preludi della *Didattica della Matematica*, dalla «Matematica Moderna» degli anni '50-'60 a oggi, altre 35 pagine di estremo interesse.

Si tratta di una vera ghiottoneria per l'insegnante che ha avuto esperienza della difficoltà di far costruire agli allievi l'idea di «frazione» nella scuola primaria o secondaria; e per i ricercatori che hanno la possibilità di poter far uso, in un testo concentrato e unico, di migliaia di informazioni storiche sull'evoluzione della prima teoria scientifica che abbia costituito la *Didattica della Matematica*, cioè la teoria delle situazioni.

Oggi, che di teorie ne esistono tante, a maggior ragione ha senso cercare una radice comune a tutte; non per servirsene in maniera univoca, ma per concepire il fatto che tutte queste teorie costituiscono un *unicum*, una sola scienza. (B. D'Amore)

Luigi Borzacchini (2015). *Il computer di Platone. Alle origini del pensiero logico e matematico*. Prefazione di Piergiorgio Odifreddi. Bari: Dedalo, pp. 520, 18.70 €. ISBN 9788822002273.

Luigi Borzacchini (2010). *Il computer di Ockham. Genesi e struttura della rivoluzione scientifica*. Bari: Dedalo, pp. 656, 22.10 €. ISBN 9788822002471.

Luigi Borzacchini (2015). *Il computer di Kant. Struttura della matematica e della logica moderne*. Prefazione di Gabriele Lolli. Bari: Dedalo, pp. 592, 22.10 €. ISBN 9788822002631.

Ricordo ancora quando lessi il primo volume di questa trilogia, ricordo che me lo consigliò il collega e amico che ne aveva scritto la prefazione. Senza conoscere l'autore, gli scrissi una lettera, la nostra prima lettera. Diceva, sostanzialmente: «Caro Collega, ti odio». Questo forte sentimento ambivalente era dovuto in prima istanza al fatto che per leggere le 500 pagine del libro ci avevo messo un anno, impegnandomi a fondo e ovviamente lasciando indietro cose urgenti; ma soprattutto al fatto che gli studi, le riflessioni, le analisi dell'autore mi avevano costretto a dolorosi ripensamenti. Mi resi conto che anch'io ero caduto in quella che potremmo chiamare la «trappola del paradigma sintattico», sulla base del quale ciascuno di noi assegna al linguaggio l'idea di rappresentare la realtà, usando poi le derivazioni sintattiche per interpretare deduzioni logiche e non fenomeniche e riportarle (a volte acriticamente) alla realtà. Sembra così ovvio e sembra così naturale tutto ciò, anche grazie al trionfo del computer nella nostra attualità, che quasi non ci si interroga più su come fosse prima che nascessero i formalismi algebrici e le logiche almeno formali se non matematiche. Eppure è possibile, grazie a Borzacchini, ripercorrere la storia del pensiero logico per rendersi conto che questo nostro punto d'arrivo è un traguardo cognitivo, non innato, che le nostre sorgenti culturali ne erano prive. Su ogni pagina nella quale trovavo spunti interessanti, scrivevo note a volte lunghissime; e ora la mia copia ha i margini delle singole pagine, che una volta erano bianchi, completamente grigi, perché prendevo (e prendo) appunti rigorosamente a matita. Alcuni ripensamenti critici sono stati duri da accettare, in un certo qual senso dolorosi, ma necessari, di fronte all'incalzare stringente, dotto e logico dell'autore. Gli scrissi ancora, confermando una versione positiva di quell'odio, ma facendogli i complimenti per questo possente studio. E lui mi annunciò che già stava lavorando al seguito …

Uscì, di fatto, tale seguito, cinque anni dopo, passando dall'Antichità al Medioevo e al Rinascimento, l'epoca nella quale si realizzò quella rivoluzione scientifica che ancora oggi anima e informa le nostre moderne visioni di scienza. Da Parmenide, Zenone, Pitagora, Platone, i Sofisti, Aristotele, Eudosso, Archimede, Diofanto, Cina, si passa ad Anselmo, la Scolastica, Abelardo, Arabi, Fibonacci, Giordano Nemorario … agli eroi dei Rinascimento. Non una «fastidiosa parentesi» fra il mondo antico e quello moderno, come a volte sembrano volere affermare fra le righe certi autori, ma il periodo della nascita di un mondo nuovo, che getta le basi di questa «scienza dei segni» che oggi domina le visioni epistemologiche. Capire Ockham, dopo aver capito Platone, è un altro passo verso, dice l'autore, «capire davvero come funziona un computer», il trionfo della «rappresentazione sintattica». E, anche in questo caso, molte delle visioni contemporanee su quel che significò per tutti noi moderni l'epoca Medioevo-Rinascimento va rivisitata e reinterpretata, facendo piazza pulita di sensi comuni e di idee consolidate. Con che coraggio Borzacchini propone reinterpretazioni stringenti e appassionanti. In queste nuove 650 pagine avvince e distrugge, con citazioni e informazioni perfette, stringenti, convincenti. Questa volta decisi di stendere le note su un quaderno a parte e di mettere uno sticker colorato che sporgesse dal corpo del libro, sul bordo superiore di ogni pagina che contenesse un brano sul quale avessi scritto note e riflessioni personali; il risultato è che ci sono ora centinaia di bordi gialli di foglietti autoadesivi che gonfiano il libro a dismisura. Mi piacerebbe farvi vedere la foto.

Fu a questo punto, 2010, che seppi del III volume, anche perché lo sforzo editoriale della coraggiosa Dedalo era notevole e mi misi, da una parte ad aspettarlo, quasi con ansia, e da una parte a caldeggiarlo presso la casa editrice …

E uscì, è uscito da poco, da pochi mesi, il III tomo, altre 600 pagine. Ancora esattamente 5 anni dopo. Questa volta la lettura è per me più agevole, vuoi perché conosco meglio gli autori da Leibniz (che ho tanto studiato in passato) in poi, vuoi perché la parte strettamente matematica prende il sopravvento: Newton, Lagrange, Dedekind, Cantor, Frege … Vuoi perché ho dedicato anni allo studio di Kant, e questa volta mi ci ritrovo in pieno. Lettura rapida? Aspetta, aspetta … «Rapida» è aggettivo poco adatto, pur sempre di mesi si tratta. Vi sono capitoli che mettono in evidenza un'analisi così sottile che vanno letti e riletti, come quello sull'infinito (Capitolo 9), tema che ciascuno di noi scopre di sapere a modo suo, tanto che quando lo leggi scritto da un altro, a volte sei sorpreso. I numeri reali, la logica moderna, il trionfo specifico del paradigma sintattico di Frege (altro mio grande amore del passato), il ruolo di Bolzano e di Gauss … C'è una frase dell'autore che mi ha conquistato, messa addirittura in copertina: «Dietro l'odore di eterno che aleggia tra i numeri c'è un'antropologia, la più radicale delle antropologie, che vive di mutamenti cognitivi inauditi, nascosti sotto l'apparente immutabilità delle sue leggi». Vedete, potenziali lettori? Vedete che forza? Come non odiarlo pensando: «Questa frase l'avrei potuto/voluto scrivere io, la penso esattamente così. Ma perché l'hai scritta tu?». Come può un matematico che si occupa di apprendimento restare impassibile di fronte a quel che scrive il prefatore, citando l'autore? «Borzacchini ci avverte che la storia della scienza non è veramente comprensibile se la si racconta come scandita dalle grandi idee, perché al di sotto delle idee agiscono i processi cognitivi che tali idee motivano e trasformano».

Il mio sogno è che ogni persona che abbia a cuore la matematica, la sua storia, il suo pensiero, i suoi processi cognitivi decida di leggere con estrema attenzione e dedizione questi tre volumi, ringraziando l'autore per averli scritti e Claudia, l'editore, per averli accettati e stampati. Credo che ciascuno di noi, che diciamo di amare o di credere nella matematica e nel pensiero scientifico che essa veicola, debba nella vita trovare il tempo, il modo, la costanza di studiare con profondità questa opera. Di modo che, quando saremo costretti dalle barbarie a buttare al rogo tutti i libri del mondo e a salvarne solo alcuni, questi siano un candidato prepotente. (B. D'Amore)

Progetto grafico
Bruno Monguzzi
Prestampa
Taiana
Stampa
Veladini

Redazione
Laboratorio di didattica della matematica
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera

Telefono
091 814 18 21/22/24
Fax
091 814 18 19
gianfranco.arrigo@span.ch

Amministrazione
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera
Fax
091 814 18 19

Esce due volte all'anno
a maggio e a dicembre

Abbonamento annuo
SFR 30
€ 16

Bollettino dei docenti di matematica
71

In questo numero: simmetrie dell'Alhambra di F. Hernández Rojo; gettoni di argilla mesopotamici di S. Buscherini; Chopin, Darwin e Gauss di S. Maracchia; storia della moltiplicazione di E. Montella; sulla dimensione semio-cognitiva dell'apprendimento di M. Iori; didattica del calcolo combinatorio di E. Colizzi; curiosità matematiche in una mostra d'arte di L. Maurizi; quiz Agorando 4 di P. Hägler e G. Mainini; segnalazioni e recensioni.

ISBN 978-88-99453-00-8
Fr. 18.–

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport