A cura
del Laboratorio di didattica della matematica

Bollettino dei docenti di matematica

72

Maggio
2016

Ufficio
dell'insegnamento medio
Centro di risorse
didattiche e digitali

Bollettino
dei docenti di matematica
72

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport

ISBN 978-88-99453-01-5

Bollettino dei docenti di matematica 72

Maggio
2016

Ufficio dell'insegnamento medio
Centro di risorse didattiche e digitali

Indice

Prefazione

Il primo articolo porta la firma di tre autori fra i quali Gianfranco Gambarelli, a noi noto come specialista di teoria dei giochi. Questa volta la teoria viene applicata alla politica e alla finanza.

La sezione Varia continua con un contributo di Giovanni Nicosia, sui Sangaku, tema al quale la SMASI ha dedicato una mostra nel 2010, creata nell'ambito del Mese della cultura della Città di Lugano.

Nella sezione Matematica, Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla ci regalano un articolo originale che completa la questione relativa alla costruzione analitica del campo numerico da N a R. Dello stesso facciamo seguire per la prima volta anche la versione spagnola, come omaggio ai numerosi lettori spagnoli e latino-americani.

La sezione Didattica, è di nuovo molto ricca. Dapprima ospita un articolo di Annarita Monaco, attenta lettrice della nostra rivista, sintesi del suo lavoro di dottorato, sulla risoluzione dei problemi matematici. Sullo stesso tema si esprime di nuovo Gianfranco Arrigo che propone una riflessione su come svolgere in classe attività di *problem solving*. Chiude Marina Casson con un articolo dedotto dal suo lavoro di Master al DFA, concernente il laboratorio matematico.

Non manca la sezione Giochi che, con Paolo Hägler e Giorgio Mainini, propone un avvincente problema legato all'organizzazione del campionato di calcio EURO 2016. Gli stessi autori presentano un approfondimento della situazione proposta in Agorando 3 sulle possibili strategie per decifrare messaggi cifrati con il metodo di sostituzione monoalfabetica.

Nelle segnalazioni si trova l'abituale annuncio dell'annuale convegno di Castel San Pietro Terme: un appuntamento da non mancare!

I. Varia

1. Indici di potere in politica e in finanza

Cesarino Bertini[1], Gianfranco Gambarelli[2] e Izabella Stach[3]

The possibility of bargaining among EU members, or among political parties in a little municipality, the contractual value of thousandths of an apartment building, the weight of a block of shares of a company, the vote of the International Olympic Committee members can be described with the same mathematical models: the power indices. A feature common to the above is the possibility, for each «player», to obtain certain majorities by a coalition with other players. The study of power indices allows the construction of efficient models for forecasting, simulation, optimization and regulations in several fields: political, economic, financial and so on. This paper summarizes some results obtained on the matter, in the Universities of Bergamo and AGH in and give some ideas for further developments.

1. Introduzione

La formazione della coalizione di maggioranza è spesso di difficile spiegazione perfino per gli stessi protagonisti, in quanto si basa su molteplici fattori: da semplici dati numerici a simpatie e antipatie, affinità e lontananze, influenze esterne, abilità, psicologia. Risulta di solito difficile formulare previsioni sul tema; ciò non toglie che qualche tentativo possa essere fatto. In un primo approccio è opportuno limitarsi alla sola gestione dei dati più facilmente quantificabili, che siano in grado di cogliere il nocciolo del fenomeno e di fornire una solida base per successivi miglioramenti.

Consideriamo un Paese ove vi siano tre soli partiti politici, *A, B* e *C,* con la seguente ripartizione di seggi: 30% ad *A* e *B* e 40% a *C*. Se non vi sono particolari propensioni o avversioni per certe alleanze, è facile constatare che tutti e tre sono sullo stesso piano agli effetti delle possibili coalizioni di maggioranza semplice. Possiamo quindi assegnare un «potere coalizionale» paritetico, cioè del $33,\overline{3}\%$ a ciascuno. La stessa situazione si presenterebbe se *A* e *B* avessero il 49% dei seggi ciascuno e *C* il 2%: quest'ultimo partito avrebbe infatti, pur con un potere nominale molto basso, un potere reale uguale a quello degli altri. Se invece *A* avesse da solo il 51% del peso, il suo potere sarebbe del 100% (cioè 1). Che dire se la ripartizione dei seggi è 50% per *A*, 30% per *B* e 20% per *C*? In questo caso *A* non possiede da solo la maggioranza; d'altra parte ciascuno degli altri due partiti ha bisogno di coalizzarsi con *A*, in quanto la coalizione fra *B* e *C* è minoritaria. È intanto facile intuire che questi ultimi, pur avendo diverse quantità di seggi, sono in ugual posizione di potere; è anche presumibile che *A* abbia

1. Dipartimento di Scienze Aziendali, Economiche e Metodi Quantitativi, Università di Bergamo, via dei Caniana 2, 24127 Bergamo, Italy (cesarino.bertini@unibg.it)
2. Dipartimento di Scienze Aziendali, Economiche e Metodi Quantitativi, Università di Bergamo, via dei Caniana 2, 24127 Bergamo, Italy (gambarex@unibg.it). http://dinamico2.unibg.it/dmsia/staff/gambar.html
3. AGH University of Science and Technology, Faculty of Management, Al Mickiewicza 30, 30-059 Krakow, Poland (istach@zarz.agh.edu.pl)

un potere maggiore, data la sua posizione prioritaria; ma potremo calcolare una ripartizione di (2/3, 1/6, 1/6), secondo il modello di Shapley e Shubik, o di (3/5, 1/5, 1/5), secondo quello di Martin, Banzhaf e Coleman, o che altro?

2. Alcune definizioni preliminari

Sia $N = \{1,..., n\}$ l'insieme dei giocatori di un gioco cooperativo. Si chiamano *coalizioni* (fra membri di N) tutti i 2^n sottoinsiemi di N. Si dice che il gioco è espresso *in forma caratteristica* v se ad ogni coalizione S è associato un numero reale $v(S)$ (la *vincita*), con la convenzione che alla coalizione vuota è associata una vincita nulla: $v(Ø) = 0$. In questo lavoro ci occuperemo solo di giochi in forma caratteristica. Un gioco si dice *semplice* se la sua funzione caratteristica può valere solo 0 (coalizione *perdente*) o 1 (coalizione *vincente*).

Ogni gioco semplice si dice *di maggioranza ponderata* se la sua funzione caratteristica è definita da n numeri reali $w_1, ..., w_n$ (che esprimono i *pesi* dei giocatori), con somma totale t, e da una *quota di maggioranza* q ($> t/2$), secondo la regola:

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \sum_{i \in S} w_i \geq q \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Nel primo caso si dice che la coalizione *S è maggioritaria*; nel secondo caso che è *minoritaria*. Il gioco si rappresenta usualmente con il simbolo $[q; w_1, ..., w_n]$ ovvero con $[q; w]$.

Per tornare all'ultimo esempio del paragrafo 2, usando per semplicità le lettere in luogo dei numeri, otteniamo $N = \{A, B, C\}$, $w_A = 50$, $w_B = 30$, $w_C = 20$, $t = 100$, $q = 51$, pertanto il gioco si rappresenta come [51; 50, 30, 20]. Le coalizioni vincenti sono (A, B), (A, C) e (A, B, C) mentre le coalizioni perdenti sono Ø, (A), (B), (C) e (B, C).

Un *valore* per un gioco v è una funzione atta a rappresentare una ragionevole aspettativa a priori della ripartizione della vincita globale $v(N)$ fra gli n giocatori, oppure un'equa divisione di tale vincita. Sono stati proposti diversi valori, sulla base di diversi modelli assiomatici e/o di contrattazione.

Un *indice di potere* è un valore per giochi semplici.

Negli esempi del paragrafo precedente, la vincita (il «potere») della coalizione globale vale uno: $v(A, B, C) = 1$. È ovvio che, se si considerano equiprobabili tutte le possibili coalizioni, un indice di potere attendibile deve attribuire al gioco [51; 30, 30, 40] la ripartizione di potere (1/3, 1/3, 1/3); analogamente per il gioco [51; 49, 49, 2]. È altresì ovvio che un buon indice deve attribuire al gioco [51; 51, 39, 10] la ripartizione di potere (1, 0, 0) ma non è così facile assegnare al gioco [51; 50, 30, 20] una ripartizione della vincita globale. Come procedere? Una strada naturale si basa sul concetto di *crucialità*. Si dice che l'i-esimo giocatore è *cruciale* per la coalizione S se $v(S) = 1$ e $v(S \setminus \{i\}) = 0$, cioè la coalizione S è vincente, ma diviene perdente nel caso in cui tale giocatore la abbandoni.

Nell'esempio appena visto, il giocatore A è cruciale per le coalizioni (A, B), (A, C) e (A, B, C); il giocatore B è cruciale solo per la (A, B) e il giocatore C solo per la (A, C).

3. Gli indici di Martin-Penrose-Banzhaf-Coleman e di Shapley-Shubik

L'indice ß di Banzhaf-Coleman-Martin-Penrose [1965-1971-1787-1946], usualmente chiamato *indice di Banzhaf-Coleman*, deve il suo nome a studi di vari autori (per quanto riguarda Martin v. [Riker, 1986]). Tale indice assegna a ogni giocatore una quota proporzionale al numero di coalizioni per cui egli è cruciale. Nel caso dell'ultimo esempio *A* è cruciale per 3 coalizioni, mentre *B* e *C* sono cruciali ciascuno per una coalizione. Quindi $ß_A = 3/5$, $ß_B = ß_C = 1/5$.

L'indice Φ di Shapley-Shubik [1954] è una particolarizzazione, per giochi semplici, del valore di un gioco secondo Shapley [1953]. Tale indice assegna a ogni giocatore una vincita corrispondente alla probabilità che egli si trovi in una posizione cruciale, in fase di aggiunta ad una coalizione già costituita. Se ad esempio (v. tabella 1) inizialmente v'è la coalizione formata dal solo giocatore *A* e ad essa si unisce il giocatore *B*, la nuova coalizione (*A*, *B*) diviene maggioritaria e pertanto *B* è cruciale per tale coalizione (v. prima riga). Analogamente (v. seconda riga) se alla coalizione del solo *A* si unisce *C*, quest'ultimo rende maggioritaria per (*A*, *C*). Negli altri quattro casi, è *A* il giocatore cruciale per la coalizione in formazione. Dai totali si deduce che l'indice di Shapley-Shubik è 4/6 per *A* e 1/6 per *B* e *C*, cioè $\Phi = (2/3, 1/6, 1/6)$.

In sostanza, la differenza fra l'indice di Banzhaf-Coleman e quello di Shapley-Shubik sta nel modello di contrattazione: il primo prescinde dall'ordinamento con cui si forma la coalizione vincente, mentre il secondo ne tiene conto (tecnicamente, il primo lavora sulle combinazioni e il secondo sulle permutazioni).

	A	B	C	
A ← **B** ← C		x		
A ← **C** ← B			x	
B ← **A** ← C	x			
B ← C ← **A**	x			
C ← **A** ← B	x			
C ← B ← **A**	x			
totali	4	1	1	= 6

Tabella 1. Formazione dell'indice di Shapley-Shubik.

Nel caso dell'indice di Shapley-Shubik, v'è una formula che consente di evitare i calcoli della tabella 1. Tale formula, ottenuta da Shapley in [1953], assegna all'i-esimo giocatore il potere

$$\Phi_i = \frac{1}{n!}\sum (s-1)!(n-s)!$$

ove la sommatoria è estesa a tutte le coalizioni di *s* membri per cui l'*i*-esimo giocatore è cruciale. Nel caso dell'esempio,

$$\Phi_A = \frac{1}{3!}\left((2-1)!\cdot(3-2)!\cdot 2 + (3-1)!\cdot(3-3)!\cdot 1\right)$$

$$\underset{(A,B)\,+\,(A,C)}{\uparrow} \qquad \underset{(A,B,C)}{\uparrow}$$

$$\Phi_B = \Phi_C = \frac{1}{3!}\left((2-1)!\cdot(3-2)!\cdot 1\right) = \frac{1}{6}$$

Oltre alle succitate caratteristiche di ordinamento che distinguono i due indici, va precisato che il primo non è in generale *monotòno*: può cioè accadere che, se un giocatore aumenta il suo peso a danno di un altro, il suo indice di Banzhaf-Coleman diminuisca. Un semplice esempio può provare quanto sopra: nel gioco a 5 persone [9; 5, 5, 1, 1, 1] ciascuno degli ultimi tre giocatori è «*dummy*», cioè non è cruciale per alcuna coalizione. La ripartizione del potere è quindi facile da calcolare: (1/2,1/2, 0, 0, 0). Se il primo giocatore acquisisce un'unità di peso dal secondo, il gioco diviene [9; 6, 4, 1, 1, 1] e l'indice di Banzhaf-Coleman (9/19, 7/19, 1/19, 1/19, 1/19). Pertanto il primo giocatore aumenta di peso a spese del secondo, ma si vede ridurre il potere (secondo Banzhaf-Coleman) da 1/2 a 9/19.

L'indice di Shapley-Shubik è invece monotono.

Nota riservata ai soli esperti: un altro pregio dell'indice di Shapley-Shubik, che manca in generale a quello di Banzhaf-Coleman, è l'appartenenza al «core» in tutti i giochi convessi.

Per molti dei motivi suesposti l'indice di Shapley-Shubik appare più adatto a descrivere risultati di contrattazioni (ad esempio compravendite azionarie con coalizioni già costituite che mutano struttura), mentre quello di Banzhaf-Coleman è ritenuto più indicato per utilizzi normativi: ad esempio per sistemi elettorali, ove entra in gioco la pura proporzionalità. In particolare, Rydqvist ha rilevato in [1985] una forte vicinanza fra l'indice di Shapley-Shubik e le quotazioni dei titoli in presenza di scalate al controllo azionario nel mercato svedese.

Una caratterizzazione assiomatica dell'indice di Shapley-Shubik (cioè un insieme di requisiti che quel solo indice è in grado di rispettare) è stata fornita da Dubey in [1975a]; una caratterizzazione dell'indice di Banzhaf-Coleman è stata fornita da Owen in [1978]. Per altri indici meno noti o utilizzati rimandiamo a [Bertini, Freixas, Gambarelli e Stach, 2013a e 2013b] e [Bertini, Gambarelli e Stach, 2008].

Per maggiori approfondimenti sui contenuti dei paragrafi precedenti rinviamo alle voci enciclopediche [Bertini, 2011a, 2011b, 2011c], [Bertini e Stach, 2011a, 2011b, 2011c], [Gambarelli, 2011a, 2011b, 2011c, 2011d], [Gambarelli e Miller, 2011] e [Stach, 2011a, 2011b, 2011c]; v. inoltre [Gambarelli, 2003]. Per ulteriori considerazioni, soprattutto di carattere storico, rinviamo invece a [Gambarelli e Owen, 2004].

4. Una prima applicazione

La tabella 2 riporta gli indici di Banzhaf-Coleman e di Shapley-Shubik relativi alle elezioni italiane della Camera dei Deputati nel passaggio dalla X alla XI legislatura (i calcoli sono stati effettuati mediante gli algoritmi riportati in [Gambarelli, 1996].

Prima di addentrarci nell'esame dei risultati numerici, facciamo qualche osservazione sull'attendibilità, in ambito politico, dei modelli considerati.

È ovvio che alcune coalizioni possibili in teoria non sono in realtà attuabili: ad esempio quelle fra estrema destra ed estrema sinistra. Per la corretta applicazione di un indice è quindi necessario eliminare, dal computo delle crucialità di ogni giocatore, tutte le coalizioni non attendibili (in generale ciò comporta un aumento del potere per i giocatori più «graditi», a spese di quelli più isolati). In effetti Guillermo Owen ha proposto delle generalizzazioni all'indice di Shapley-Shubik (in [1977]) e di Banzhaf-Coleman (in [1981]), per il caso si possano stabilire delle valutazioni a priori sulla formazione delle varie coalizioni. La pura applicazione degli indici originari può peraltro aver senso in alcune situazioni ove i dati numerici acquistano un valore preponderante: referendum, elezioni presidenziali eccetera. Vedremo più avanti che vi sono anche importanti applicazioni in altri campi, dove le affinità e le ostilità sono meno rilevanti.

Osserviamo ora la tabella 2. Al di là di considerazioni di minore rilevanza, appare interessante il fatto che la DC abbia diminuito il numero dei seggi (da 234 a 206) e aumentato il potere secondo entrambi gli indici. La diversa distribuzione dei seggi ha quindi favorito tale partito a danno di altri.

Partito	X legislatura			XI legislatura		
	Seggi	Ba.Co.	Sh.Sh.	Seggi	Ba.Co.	Sh.Sh.
DC	234	35,3	39,3	206	42,7	41,6
PDS	177	21,2	22,1	107	13,3	15,5
PSI	94	21,2	22,1	92	13,0	13,8
Lega Lom.	1	1,3	0,1	55	8,4	7,1
Rif. Com.	0	-	-	35	4,6	4,2
MSI	35	3,9	5,1	34	4,5	4,1
PRI	21	6,5	2,8	27	3,5	3,4
PLI	11	2,0	1,5	17	2,3	2,3
PSDI	17	2,7	2,0	16	2,1	2,1
Verdi	13	2,3	1,7	16	2,1	2,1
Rete	0	-	-	12	1,6	1,5
Pannella	13	2,3	1,7	7	0,9	1,0
SVP	3	0,5	0,3	3	0,5	0,7
Altri	8+1+1+1	0,8	1,3	1+1+1	0,5	0,6
TOTALI	630	100,0	100,0	630	100,0	100,0

Tabella 2. Indici di Banzhaf-Coleman e di Shapley-Shubik nella Camera dei Deputati in Italia.

Una seconda osservazione riguarda il confronto fra PDS e PSI nella X legislatura. Si può notare che il primo partito, pur avendo un numero di seggi quasi doppio del secondo, ha lo stesso potere (anche se con valori numerici diversi a seconda dell'indice considerato). La spiegazione è intuibile, se si ricorda la classica situazione (49, 49, 2) in cui il terzo partito ha un potere coalizionale uguale a quello degli altri due. Restano peraltro degli interessanti interrogativi: in quali casi l'indice di Shapley-Shubik, quello di Banzhaf-Coleman e magari altri indici hanno uguali comportamenti, pur con valori numerici diversi? Come utilizzare queste proprietà nelle applicazioni? Qualche risposta verrà data nei paragrafi seguenti.

5. Applicazioni finanziarie

Cambiando contesto, immaginiamo che i partiti della tabella 2 siano investitori proprietari di azioni ordinarie di un'azienda. Notiamo che l'«azionista PDS» si trova a possedere molte azioni in più rispetto all'«azionista PSI», pur con lo stesso potere decisionale. Può allora valutare la possibilità di vendere parte delle azioni che non gli servono per il controllo e acquistarne altre in altre compagnie, per migliorare in esse la sua posizione di potere. Più in generale, può domandarsi se esista un modello matematico di compravendite azionarie, in grado di fornirgli la massima aspettativa di successo nel controllo su varie aziende. Il problema, di rilevanza facilmente intuibile per via dei notevoli capitali coinvolti, fu risolto negli anni '80 grazie alla teoria degli indici di potere. Con l'occasione furono anche evidenziati alcuni comportamenti comuni ai vari indici, in risposta agli ultimi quesiti del paragrafo precedente. Inizieremo a considerare i casi più semplici (due azionisti) per poi generalizzare a tre e oltre.

5.1. Gioco fra due persone

Supponiamo che le azioni di una compagnia siano inizialmente distribuite fra due soli azionisti nella proporzione 75% e 25%. In tal caso, per tutte le delibere che richiedono la maggioranza del 51%, il primo azionista è da solo maggioritario, pertanto l'indice di potere (comunque sia definito, purché rispetti ragionevoli principi di verosimiglianza) è (1, 0). Se invece la suddivisione delle quote è 50,5% e 49,5%, con quota di maggioranza 51%, nessun azionista è maggioritario da solo e l'indice è (1/2, 1/2). In generale, detti w_1 *e* w_2 i pesi dei due azionisti (con le convenzioni $w_1 \geq 0$, $w_2 \geq 0$ e $w_1 + w_2 = 100$), l'insieme dei punti del piano cartesiano che rappresentano le possibili ripartizioni delle azioni consiste nel segmento obliquo in figura 1. Notiamo che in tutti i punti in cui $w_1 \geq 51$ l'indice di potere è (1, 0); in tutti quelli in cui $w_1 \leq 49$ è (0, 1), mentre negli altri punti è (1/2, 1/2).

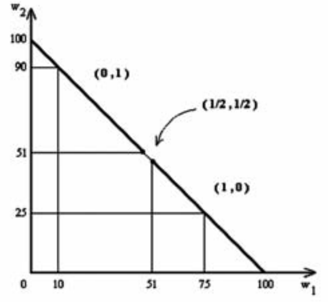


Figura 1.

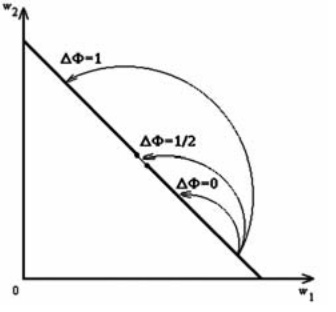


Figura 2.

Supponiamo che, partendo dalla posizione (75, 25), il primo azionista venda azioni al secondo (v. figura 2). Fintantoché il punto si mantiene sul segmento in basso a destra (estremi inclusi), il potere rimane invariato, pertanto il decremento di potere $\Delta\Phi$ del primo azionista è nullo. Se il punto arriva nel segmento centrale, $\Delta\Phi = ½$, mentre se lo oltrepassa, risulta $\Delta\Phi = 1$.

5.2. Gioco fra tre persone

Passiamo al caso di tre giocatori *A, B* e *C* (v. fig. 3). Indichiamo w_i il peso dell'i-esimo azionista, al variare di i da 1 a 3, con le convenzioni $w_i \geq 0$ e $t = \Sigma\, w_i = 100$. Per la seconda convenzione, il vettore w dei pesi appartiene al piano passante per i punti (100, 0, 0), (0, 100, 0) e (0, 0, 100); più in particolare, per la prima convenzione, tale vettore appartiene al triangolo con vertici nei punti succitati. Per semplicità di disegno, consideriamo il gioco limite, al tendere a 50 della quota di maggioranza q. Consideriamo il piano parallelo al primo e al terzo asse, passante per il punto (0, 50, 0). In tutti i punti alla destra di tale piano il secondo giocatore ha, da solo, la maggioranza, quindi in tali punti il suo potere è 1. Sul nostro triangolo possiamo quindi evidenziare il triangolino di vertici (0, 100, 0), (50, 50, 0) e (0, 50, 50) ove l'indice di potere vale (0, 1, 0) (ad eccezione, naturalmente, del lato congiungente gli ultimi due vertici). Per lo stesso motivo l'indice vale (1, 0, 0) nei punti

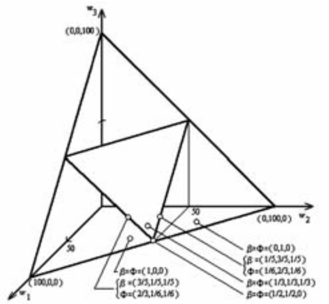


Figura 3.

dell'analogo triangolino con vertice in (100, 0, 0) e vale (0, 0, 1) nei punti dell'analogo triangolino con vertice in (0, 0, 100). È inoltre facile verificare che l'indice vale (1/3, 1/3, 1/3) in tutti i punti del triangolino centrale (lati esclusi). Per quanto riguarda i lati, nei punti interni si hanno valori diversi a seconda dell'indice usato. Ad esempio, in quello congiungente i vertici (50, 50, 0) e (0, 50, 50) l'indice di Banzhaf-Coleman vale (1/5, 3/5, 1/5), mentre quello di Shapley-Shubik vale (1/6, 2/3, 1/6); analogamente (con opportune permutazioni) negli altri. Nei vertici del triangolino centrale l'indice vale (1/2, 1/2, 0), (1/2, 0, 1/) e (0, 1/2, 1/2). Notiamo infine che, per q significativamente maggiore di 50, nel disegno si vedrebbero suddivisioni del triangolo grande non solo in triangolini, ma anche in trapezi (si può verificare che vi sono tre tipi di disegni, a seconda che q sia maggiore, minore o uguale a $2t/3$). In ciascuno di tali poligoni il gioco è costante, agli effetti delle coalizioni per cui ogni giocatore è cruciale. Possiamo ora intuire la risposta ad uno degli interrogativi posti alla fine del quarto paragrafo: in quali casi l'indice di Shapley-Shubik, quello di Banzhaf-Coleman e magari altri indici hanno comportamenti simili, pur con valori numerici diversi?

5.3. Gioco fra n persone

È ora possibile immaginare una generalizzazione di quanto visto finora, al caso di giochi con n persone. Il triangolo della figura 3 diviene un simplesso dello spazio euclideo n-dimensionale, con vertici in tutti i punti tali che una delle componenti sia t (nel nostro caso t=100) e tutte le altre nulle. Tale simplesso viene suddiviso in poliedri convessi dagli iperpiani paralleli a quelli principali. In ciascuno di tali poliedri il gioco resta costante, agli effetti delle coalizioni per cui ogni giocatore è cruciale; pertanto, una volta scelto un indice di potere atto a rappresentare la situazione reale esaminata, in tutti i punti di ogni poliedro tale indice resta invariato (per la dimostrazione v. [Gambarelli, 1983]).

5.4. Scambio di quote fra due giocatori

Supponiamo che la distribuzione iniziale di azioni fra i giocatori *A*, *B* e *C* di un gioco a tre persone con maggioranza semplice, sia (51, 40, 9) (v. tab. 3). Ovviamente una qualsiasi compravendita di azioni fra *B* e *C* non muta la situazione, in quanto *A* resta maggioritario. Valutiamo allora quello che accade in compravendite fra *A* e *C*. Se *C* acquista un'azione da *A*, la distribuzione delle azioni diviene (50, 40, 10) e quella del potere (in termini di indice di Shapley-Shubik) diviene (2/3, 1/6, 1/6). Se invece *C* acquista 2 azioni da *A*, la distribuzione delle azioni diviene (49, 40, 11) e quella del potere (1/3, 1/3, 1/3). La ripartizione del potere resta la stessa anche se *C* acquista 40 azioni da *A*, perché in tal caso le azioni diventano (11, 40, 49) e ogni giocatore è nella stessa posizione degli altri rispetto alle possibili coalizioni di maggioranza. La situazione cambia solo se *C* acquista 41 azioni da *A*: in tal caso la distribuzione diventa (10, 40, 50) e il potere di *C* sale a 2/3. Notiamo che con 50 azioni *C* diventa un giocatore «fondamentale» in quanto la maggioranza diventa possibile solo con la sua presenza. Tecnicamente si dice che il giocatore *C* è un blocking player in quanto, pur non avendo ancora raggiunto la maggioranza, risulta cruciale in tutte le coalizioni vincenti. Con un'ulteriore azione, *C* acquisisce la maggioranza da solo e il suo potere sale al 100%. Come si vede dalla sintesi in Tabella 3, il potere di *C* è una funzione a scala monotòna del numero di azioni acquistate da *A*; gli stock critici che fanno passare *C* da una posizione di potere alla successiva sono 9, 10, 11, 50 e 51.

Nella figura 4 possiamo osservare lo spostamento del vettore delle azioni, nel corso di una compravendita fra *A* e *C*. Poiché il numero di azioni di *B* resta invariato, la relativa componente è costante, pertanto il punto si muove su un piano parallelo al piano $w_A w_C$. Il segmento risultante incontra i lati del triangolino centrale in due punti, determinando la funzione a scala

gioc.	n. di azioni che *C* compera da *A*	distribuzione delle azioni risultante	distribuzione del potere risultante	aumento del potere di *C*
A		51	1	
B		40	0	
C	0	9	0	0
A		50	2/3	
B		40	1/6	
C	1	10	1/6	1/6
A		49	1/3	
B		40	1/3	
C	2	11	1/3	1/3
A		10	1/6	
B		40	1/6	
C	41	50	2/3	2/3
A		9	0	
B		40	0	
C	42	51	1	1

Sintesi			
con	un'azione	acquistata:	+ 16, 7 %
da	2 a 40 azioni	acquistate:	+ 33, 3 %
con	41 azioni	acquistate:	+ 66, 7 %
da	42 a 51 azioni	acquistate:	+100, 0 %

Tabella 3. Scambio di quote fra due giocatori

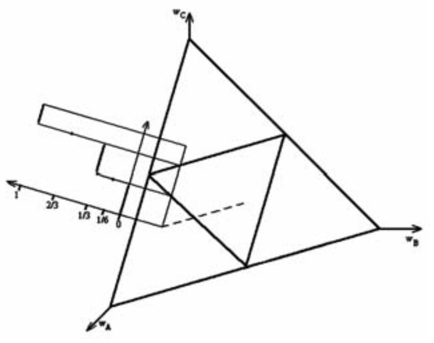


Figura 4.

(evidenziata in alto a sinistra del disegno) che esprime il potere di C in funzione del numero di azioni acquistate da A. Dalla figura si nota anche come uno stesso numero di azioni scambiate possa dare diversi risultati, in termini di indice di potere, a seconda dell'acquirente. Se infatti A vende le stesse 11 azioni a B invece che a C, il suo potere passa da 1 a 0 (v. segmento tratteggiato), invece che da 1 a 1/3. È quindi importante conoscere, oltre che i punti di discontinuità della funzione a scala (cioè gli stock critici di azioni), anche il partner più pericoloso nella compravendita. Risultati in merito, per il caso generale di compagnie con n azionisti, si sono ottenuti in [Gambarelli e Szegö, 1982]. Se, invece di utilizzare l'indice di Shapley-Shubik, ci serviamo di quello di Banzhaf-Coleman, le variazioni del potere cambiano, ma gli stock critici restano gli stessi.

In [Gambarelli, 1983] è stato provato che, comunque si definisca un indice di potere (purché dotato di adeguate proprietà di monotonia, come quello di Shapley-Shubik) la sequenza degli stock critici corrispondenti a scambi di azioni fra due giocatori i e j è la stessa. Le formule che generano tali stock d_s in società di n azionisti sono:

$$d_S = q - \sum_{h=1}^{n} b_h w_h \qquad \text{e} \qquad d_S = t - q + 1 - \sum_{h=1}^{n} b_h w_h$$

al variare dei vettori n-dimensionali b le cui componenti assumono i soli valori 0 e 1, nella condizione $b_i = b_j = 0$. Le due sommatorie sono inoltre soggette al vincolo:

$$0 \le \sum_{h=1}^{n} b_h w_h < H$$

dove H è il minimo fra q e $(t - q)$.

Notiamo che la formula $d_S = t - q + 1 - \sum_{h=1}^{n} b_h w_h$ calcola la posizione del giocatore acquirente quando risulta cruciale in tutte le coalizioni vincenti (con scambi discreti di quote).

Nel caso dell'esempio, $t = 100$, $q = 51$, $t - q = 49$, $i = 1$ e $j = 3$. Gli unici vettori binari da considerarsi sono (0, 0, 0) e (0, 1, 0). Dalle formule di cui sopra si ottengono i valori 10, 11, 50 e 51, che generano le sequenze (51, 50, 49, 10, 9) per *A* e (9, 10, 11, 50, 51) per *C*.

5.5. Scambio di quote fra un giocatore e l'oceano

Supponiamo che una compagnia sia composta da tre grossi azionisti *A*, *B* e *C* e da un «*oceano*» di piccoli azionisti disinteressati o impossibilitati ad entrare direttamente nella lotta per il controllo. Sia inizialmente (20, 15, 4) la ripartizione delle azioni fra i grossi giocatori (v. tab. 4). Supponiamo che *C* voglia farsi un'idea di quante azioni gli possano servire, prima di lanciare un'Offerta Pubblica di Acquisto per aumentare la sua posizione di controllo.

Se *C* acquista un'azione dall'oceano, la distribuzione delle azioni diviene (20, 15, 5) e quella dei poteri (in termini di Shapley-Shubik) diviene (2/3, 1/6, 1/6), in quanto la quota di maggioranza passa da 19.5 a 20. Se *C* acquista due azioni dall'oceano, la distribuzione delle quote diviene (20, 15, 6) e quella dei poteri (1/3, 1/3, 1/3). La ripartizione del potere rimane invariata anche se *C* acquista trenta azioni. La situazione cambia solo se *C* acquista trentuno azioni;

gioc.	n. di azioni comperate da *C*	distribuzione delle azioni risultante	maggior anza risultante $(A+B+C)/2$	distribuzione del potere risultante
A		20		1
B		15		0
C	0	4	19, 5	0
A		20		2/3
B		15		1/6
C	1	5	20	1/6
A		20		1/3
B		15		1/3
C	2	6	20, 5	1/3
A		20		1/3
B		15		1/3
C	30	34	34 ,5	1/3
A		20		1/6
B		15		1/6
C	31	35	35	2/3
A		9		0
B		40		0
C	32	36	35, 5	1

Sintesi			
con	un' azione	acquistata:	+ 16, 7 %
da	2 a 30 azioni	acquistate:	+ 33, 3 %
con	31 azioni	acquistate:	+ 66, 7 %
con	32 e più azioni	acquistate:	+100, 0 %

Tabella 4. Scambio di quote fra un giocatore e l'oceano

in tal caso la distribuzione delle quote diventa (20, 15, 35) e quella dei poteri (1/6, 1/6, 2/3). Con un'ulteriore azione, *C* acquisisce la maggioranza da solo e il suo potere sale al 100%. Anche nel caso dell'indice di Banzhaf-Coleman, pur avendosi diverse variazioni di potere ($0 \rightarrow 1/5 \rightarrow 1/3 \rightarrow 3/5 \rightarrow 1$), gli stock critici sono gli stessi che abbiamo visto sopra.

Una maggiore evidenza di questi comportamenti si ha nella fig. 5, che è analoga alla fig. 4, con la sola differenza che il punto si muove lungo il piano verticale passante per l'asse w_C, restando invariato il rapporto fra i numeri di azioni di A e di B.

In [Gambarelli, 1983] è stato provato che anche in questi casi, comunque si definisca l'indice di potere (purché dotato di adeguate proprietà di monotonia, come quello di Shapley-Shubik) il potere coalizionale dello scalatore è una funzione a scala monotòna del numero di azioni acquistate dai piccoli azionisti. Gli stock critici d_S per lo scalatore (o «raider») i sono generati dalla seguente formula:

$$d_S = -\frac{M}{tb_i - q} + b_i \qquad \text{ove} \qquad M = \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq i}}^{n} \left(tb_h - q\right) w_h$$

con la condizione $M \geq 0$ per $b_i = 0$; $M \leq 0$ per $b_i = 1$.

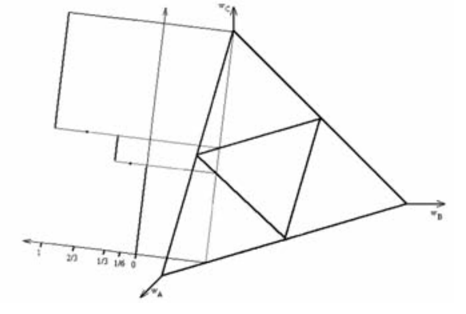


Figura 5.

Nel caso dell'esempio, il giocatore interessato è il terzo (i = 3). Inizialmente t = 39, q = 19,5, w = (20, 15, 4) e tali valori mutano al crescere di w_3. La formula, fornisce i punti critici 5, 6, 35 e 36.

Notiamo che il modello qui proposto si differenzia da quelli classici sui giochi oceanici (v. ad es. [Milnor e Shapley, 1961] e [Mann e Shapley, 1962]) in quanto presuppone l'intero potere concentrato fra i soli grossi azionisti. In tal modo esso si adatta più specificamente ai mercati imperfetti e a informazione incompleta, ove i «piccoli» sono di fatto esclusi dal consiglio di amministrazione e il raider dispone di mezzi, oltre che di informazioni, di entità molto superiore. Quanto sopra rende trascurabile l'influenza diretta dei componenti l'oceano che non siano in grado di coalizzarsi (in effetti il presente modello descrive proprio situazioni di questo tipo, in quanto l'i-esimo giocatore potrebbe anche essere un sindacato di azionisti).

5.6. Considerazioni sui prezzi

Le scalate al controllo azionario (tecnicamente *takeover*) possono avvenire con l'accordo dell'attuale gruppo di controllo (che in tali casi gradisce l'ingresso del nuovo azionista per motivi di politica aziendale, prospettive di sviluppo ecc.), ovvero in antitesi.

In quest'ultimo caso, lo scalatore deve prevedere un aumento del prezzo di offerta delle azioni all'aumentare della quantità richiesta. Tale aumento è artificiale rispetto al valore effettivo delle azioni (che rappresentano puramente una quota-parte dell'azienda interessata), in quanto esprime un valore aggiunto che il «raider» è disposto a pagare pur di raggiungere il controllo e i benefici connessi a quella posizione. Ne può conseguire un aumento del valore dell'azienda (ad esempio attraverso migliori politiche direzionali) ovvero danno, ad esempio attraverso l'utilizzo di fornitori, dirigenti e politiche non ottimali, ma collegate per altre vie allo scalatore, uso di informazioni interne per altri fini eccetera. L'eventuale nuovo controllore potrà così influenzare indirettamente il valore delle azioni, ma tale influenza è per lo più lontana dal momentaneo aumento delle quotazioni inerente la scalata.

Un altro vantaggio ottenibile dal «raider» può essere la rivendita all'attuale gruppo di controllo, dell'intero pacchetto azionario raccolto, naturalmente a prezzo maggiorato: ciò creerà successive diminuzioni della quotazione del titolo, di cui pagheranno le conseguenze anche i piccoli azionisti. Per ulteriori considerazioni in merito segnaliamo [Buzzacchi e Mosconi, 1993] e [Corielli, Nicodano e Rindi, 1993].

Durante la fase di acquisizione, le prime azioni vengono usualmente rastrellate sul mercato dei «piccoli» (ed eventualmente su mercati paralleli) con operazioni il più possibile silenziose, tali da non mettere in allarme il gruppo di controllo. Dopo eventuali accordi con qualcuno dei grossi azionisti, viene lanciata l'Offerta Pubblica di Acquisto, con un prezzo fisso e un impegno all'acquisto nel solo caso si raggiunga una quantità predeterminata.

Una valutazione a priori del prezzo da pagare per tale operazione è quindi importantissima per il «raider». Si basa su informazioni oggettive (quantità di azioni disponibili sul mercato, vicinanza alla quota di maggioranza, potenza economica dell'attuale gruppo di controllo, eventuale sottoquotazione del titolo, eccetera) e soggettive (potenza e coesione dell'attuale gruppo di controllo, possibilità di incentivi «a latere» in grado di favorire accordi destabilizzanti eccetera).

Notiamo infine che l'andamento dei prezzi in funzione della domanda, nei mercati perfetti dovrebbe coincidere con l'andamento della posizione di potere, misurata da un adeguato indice. Invece, nei casi più usuali in cui i piccoli azionisti sono di fatto impossibilitati al controllo, le due curve non coincidono: sta proprio su un'oculata valutazione a priori di questa differenza che può giocare il «raider». Il modello presentato nel paragrafo precedente può comunque descrivere anche gli effetti della formazione di un sindacato di piccoli azionisti interessati a una difesa delle relative posizioni.

5.7. Quantità di sicurezza

Un importante concetto di cui non si è finora parlato riguarda la difesa della posizione di potere raggiunta attraverso gli acquisti effettuati. Non è infatti sufficiente il numero minimo di azioni che consentono l'ingresso in una certa posizione di potere, a garantirne l'effettivo impiego. Gli attuali controllori possono infatti acquistare a loro volta, naturalmente a prezzi maggiorati, ulteriori azioni in modo da rigettare l'intruso al di fuori della posizione di potere acquisita (in termini geometrici, dal poliedro a potere costante raggiunto). Occorre quindi prevedere l'acquisto di una certa «quantità di sicurezza» Δs in più rispetto al punto di discontinuità s scelto. Come determinare tale quantità? È ovvio che un acquisto tale da far raggiungere la quota di maggioranza assoluta metterebbe al riparo da ogni contromossa, ma è altresì evidente che la spesa necessaria a tale operazione potrebbe annullarne i vantaggi.

In [Gambarelli, 1991] è stato suggerito un metodo basato sulla seguente considerazione. Nel momento in cui gli attuali controllori si rivolgessero al mercato per acquistare le azioni necessarie a recuperare la posizione perduta, avrebbero delle difficoltà a reperirle e dovrebbero pagare per tali azioni un prezzo ulteriormente maggiorato. Lo stesso raider potrebbe allora offrirsi di rivendere loro le azioni mancanti, a un importo tale da ripagarlo del sovrapprezzo pagato per l'acquisto. Disponendo di un attendibile modello di previsione della quotazione $p(s)$ in funzione del numero di azioni s compravendute, a partire dal prezzo iniziale p_o, l'investitore può calcolare la quantità incognita Δs uguagliando la somma dei sovrapprezzi pagati per ciascuna azione (da 0 a $s + \Delta s$) alla somma dei successivi sovrapprezzi da richiedere per ciascuna azione (da $s + \Delta s$ a $s + 2\Delta s$). Passando a un modello continuo, si tratta in sostanza di uguagliare le aree delle due regioni tratteggiate in fig. 6, deducendo l'incognita Δs dall'equazione

$$\int_0^{s+\Delta s} p(s)ds - p_o(s+\Delta s) = \int_{s+\Delta s}^{s+2\Delta s} p(s)ds - p_o\Delta s$$

Indicata $P(s)$ una primitiva di $p(s)$ nell'intervallo considerato, il problema si riduce alla ricerca del minimo Ds soluzione dell'equazione

$$P(s + 2\Delta s) - 2P(s + \Delta s) = - p_o s - P(0)$$

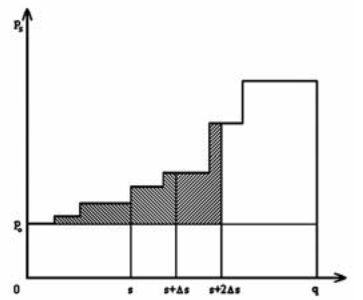


Figura 6.

5.8. Controllo indiretto

Un problema di interesse sia teorico che applicativo consiste nella valutazione del controllo indiretto di un giocatore su un'assemblea. Supponiamo ad esempio che un azionista detenga il 20% di azioni di una compagnia, le cui quote restanti siano divise egualmente (40% e 40%) fra due altri investitori. Supponiamo che questa compagnia possieda il 51% delle azioni di un'altra, la quale abbia a sua volta un quarto delle azioni di una terza compagnia, le cui azioni restanti siano suddivise egualmente fra altri tre investitori. Qual è il potere del primo azionista su quest'ultima compagnia?

Viene spontanea la seguente risposta: l'azionista ha un terzo di potere sulla prima, che ha l'intero potere sulla seconda; quindi egli ha di fatto un terzo di potere sulla seconda. Quest'ultima ha un quarto di potere sull'ultima, pertanto l'azionista ha (1/3)×(1)×(1/4) = 1/12 di potere sull'ultima. Parrebbe, in generale, logico assegnare ad ogni investitore un potere di controllo indiretto dato dal prodotto degli indici di potere. Vi sono peraltro dei controesempi che mostrano come un tal modo di procedere nel calcolo possa portare a un totale di quote-parte dell'azienda diverso dal 100%. Occorre quindi usare un'altra via.

Il problema è stato risolto in [Gambarelli e Owen, 1994], ove si è trovato un procedimento in grado di trasformare l'insieme dei vari giochi di maggioranza fra loro concatenati, in un unico gioco. Tale procedimento è basato sulle *estensioni multilineari*, un concetto introdotto in [Owen, 1972] (v. anche [Owen, 1995]). Un vantaggio di tale metodologia sta nel fatto che può venire utilizzata con qualsiasi indice di potere, in quanto si limita a costruire il gioco risultante, a cui si potrà applicare l'indice ritenuto più adatto a descrivere la situazione in esame. Un problema aperto sta nella complessità computazionale dell'algoritmo, che andrebbe migliorata ai fini pratici.

Per ulteriori studi su questi argomenti segnaliamo [Brioschi, Buzzacchi e Colombo, 1990], [Salvemini, Simeone e Succi, 1995], [Denti e Prati, 2004] e [Crama e Leruth, 2013].

5.9. Un indice di destabilizzabilità

Consideriamo un insieme di m aziende suscettibili di scalata. Possiamo determinare, con criteri il più possibile obiettivi, qual è la più vulnerabile, ovvero, in generale, dare una valutazione numerica dello «stato di stabilità» di ciascuna? Una risposta è stata fornita in [Gambarelli, 1993]. Vediamo come procedere. Supponiamo di aver individuato n grossi investitori che detengono azioni di almeno una di tali aziende, mentre tutte le altre azioni sono sparse nell'oceano dei piccoli. Costruiamo la matrice A tale che il suo generico elemento a_{hk} esprime la quantità di azioni della k-esima azienda possedute dall'h-esimo investitore ($1 \leq h \leq n$) o dall'h-esima azienda ($n+1 \leq h \leq n+m$). Costruiamo, con i metodi citati nel paragrafo precedente, la matrice B il cui generico elemento b_{hk} esprime l'indice di Shapley-Shubik dell'h-esimo investitore sulla k-esima azienda (intendendo il potere distribuito solo fra i grossi investitori, escluse quindi le altre aziende).

Costruiamo ora la matrice C il cui generico elemento c_{hk} esprime il potere effettivo (in termini di indice di Shapley-Shubik) dei rappresentanti dell'h-esimo azionista nel Consiglio di Amministrazione della k-esima azienda. Il generico elemento d_{hk} della matrice $D = C - B$ esprime la differenza fra il potere teorico e quello reale; in corrispondenza dei più alti valori di d_{hk} si può quindi prevedere una maggiore insoddisfazione, da parte dell'h-esimo azionista, per la situazione della k-esima azienda. Nel calcolo degli indici di cui sopra va peraltro tenuto conto di eventuali particolari legami fra grossi azionisti (va quindi utilizzata la generalizzazione fornita in [Owen, 1977]). Indichiamo dunque d_k il massimo valore della k-esima colonna della matrice D. Tale valore esprime la massima insoddisfazione nell'ambito dell'azienda interessata (la k-esima) e concorre a formare *l'indice di destabilizzabilità* proposto in [Gambarelli, 1993]. Altri dati coinvolti nella determinazione di tale indice sono, relativamente a ciascuna azienda (per semplicità di scrittura, ometteremo l'identificazione k):

w_r	il numero di azioni possedute dal «raider»
w_c	il numero di azioni possedute dal gruppo di controllo ($0 \leq w_r < w_c$)
q	la quota di maggioranza
p_z	un prezzo di riferimento passato del titolo
p_o	l'attuale quotazione del titolo
s	la forza (in termini di potere politico ed economico) dell'attuale gruppo di controllo; questo parametro dà delle indicazioni sulla relativa capacità di reazione ($0 \leq s \leq 1$).

I valori sopra riportati concorrono alla formazione dei seguenti indici provvisori, ciascuno dei quali varia da 0 (= massima stabilità) a 1 (= minima stabilità) dell'azienda:

$c = w_r/w_c$	rapporto fra i numeri di azioni possedute dal raider e dal gruppo di controllo
$m = (t - w_r - w_c)/t$	disponibilità di azioni residue sul mercato
$v = (q - w_c)/q$	vicinanza alla quota di controllo assoluto, da parte degli attuali controllori
$f = \max(0, (p_z - p_o)/p_z)$	è la caduta della quotazione corrente p_o rispetto a una quotazione di riferimento p_z

L'indice globale i è dunque dato da:

$$i = d^{a_1} \cdot s^{a_2} \cdot c^{a_3} \cdot m^{a_4} \cdot v^{a_5} \cdot f^{a_6}$$

ove $a_1, ..., a_6$ sono parametri esogeni positivi, che possono essere stimati sulla base di serie storiche relative ad operazioni di takeover avvenute in passato.

Notiamo infine che l'indice i risultante è ancora compreso fra 0 (= massima stabilità) e 1 (= minima stabilità).

5.10. Selezione del portafoglio

Un'importante estensione dei risultati fin qui descritti riguarda la selezione del portafoglio, cioè la scelta, da parte di un investitore, del modo migliore di impiegare il proprio capitale in investimenti rischiosi. I modelli classici suggeriscono di diversificare il capitale in diversi tipi di azioni scarsamente correlate fra loro, cioè tali che la storia passata delle relative quotazioni mostri degli andamenti dissimili, possibilmente in antitesi l'uno con l'altro. In tal modo l'eventuale calo di un settore potrà essere compensato da un rialzo di un altro. È così possibile diminuire il rischio, pur con l'inevitabile riduzione delle prospettive di rendimento (tecnicamente, il problema consiste in un'ottimizzazione multi obiettivi con massimizzazione del rendimento atteso e minimizzazione del rischio; per una trattazione più generale rimando a [Szegö, 1980]). La diversificazione degli investimenti connessa alla minimizzazione del rischio è però in contrasto con la concentrazione di azioni necessaria al controllo. Occorre dunque generalizzare i modelli classici di selezione del portafoglio, tenendo conto di questi aspetti ignorati in passato, ma di notevole rilevanza pratica, in quanto coinvolgono ingenti capitali.

I primi approcci in merito, dovuti ad Amihud e Barnea [1974] e a Batteau [1980], trovarono un ostacolo nella determinazione della funzione controllo, funzione che fu individuata all'inizio degli anni '80 in [Gambarelli e Szegö, 1982] e [Gambarelli, 1982a, 1983] e via via perfezionata. Fu così possibile approntare in [Gambarelli, 1982b] il primo modello di selezione del portafoglio che teneva conto delle possibilità di takeover. Tale modello è tuttora in fase di perfezionamento, con l'aggiunta dei risultati successivamente ottenuti.

In sintesi, la composizione ottima del portafoglio di un investitore viene determinata tenendo conto non solo di rendimento atteso e varianza relativi agli investimenti classici, ma anche di quelli relativi agli investimenti in azioni ordinarie da utilizzare ai fini del controllo. Una delle difficoltà connesse a questa generalizzazione sta nel fatto che, mentre nei modelli classici si contava su un prezzo certo di acquisto delle azioni, nel nuovo modello anche tale dato è aleatorio.

Il metodo consiste in:

- individuazione di un «indice di propensione al controllo» dell'investitore, che può essere messo in relazione al suo indice di avversione al rischio utilizzato nei modelli classici;
- ripartizione del capitale nelle due classi di investimenti (quelli classici e quelli in controllo), utilizzando il nuovo indice introdotto;
- individuazione dell'azienda (o delle aziende, nel caso di piccola dimensione rispetto al capitale disponibile) da scalare e delle quote di potere più convenienti in ciascuna;
- eliminazione, dall'insieme delle compagnie destinate agli investimenti classici, di quelle già individuate ai fini del «takeover» e delle aziende fortemente correlate con queste ultime;
- avviamento silenzioso dei primi acquisti relativi alle scalate;
- completamento dell'operazione.

Nel corso dell'applicazione del modello vengono utilizzati gli algoritmi citati nel paragrafo seguente. Per ulteriori applicazioni dei Giochi al Portafoglio segnalo [Bassetti e Torricelli, 1992] e [Gambarelli e Pesce, 2003].

5.11. Algoritmi per applicazioni finanziarie

Sulla base di considerazioni relative a proprietà geometriche del valor Shapley, è stato costruito in [Gambarelli, 1980] un algoritmo per il calcolo di tale valore nei giochi in forma caratteristica superadditiva (cioè ove la vincita di ogni coalizione è non inferiore alla somma delle vincite di qualunque sua partizione); tale algoritmo è stato generalizzato in [Gambarelli, 1990] anche per giochi subadditivi. L'algoritmo è molto veloce, in quanto è lineare nel numero di coalizioni considerate e utilizza un teorema di arresto precoce, al raggiungimento dell'ordine di precisione desiderato. Peraltro nei giochi di maggioranza con peso totale piccolo, il valor Shapley (che, come abbiamo visto, assume in tali casi la veste di indice di Shapley-Shubik) è più vantaggiosamente calcolabile mediante l'algoritmo [Mann e Shapley, 1962]. Quest'ultimo fu suggerito a Shapley da un'idea di Cantor secondo cui, in tali giochi, l'indice può essere espresso in una forma che non dipende dalle coalizioni, ma direttamente dai pesi dei giocatori; il risparmio è allora di ordine esponenziale, in quanto le possibili coalizioni fra n giocatori sono 2^n.

La generazione della funzione «potere» relativa a scambi di azioni fra giocatori (v. paragrafi (5.4) e (5.5)) presuppone l'uso ripetuto dell'algoritmo di Mann e Shapley in ciascuna delle regioni a potere costante. Un successivo algoritmo di Arcaini e Gambarelli [1986] consente un ulteriore risparmio nel calcolo, in quanto genera direttamente l'incremento dell'indice a partire da ogni punto di discontinuità, tenendo conto delle informazioni che sono servite a calcolare il valore precedente. Con l'occasione è stato risolto un interrogativo sollevato da Milnor e Shapley in [1961] sulla generazione ricorsiva del valore.

Un analogo principio è stato applicato in [Gambarelli, 1996] per la generazione automatica della funzione «potere» nel caso dell'indice di Banzhaf-Coleman. In conclusione, è ora disponibile un programma in grado di generare le funzioni «potere» (sia nel caso dell'indice di Shapley-Shubik che in quello dell'indice di Banzhaf-Coleman) nello scambio di azioni fra due azionisti, ovvero fra un azionista e l'oceano. Tale programma necessita di poca memoria, in quanto richiede la sola gestione di pochi vettori, e può essere abbinato ad altri algoritmi per la selezione del portafoglio.

6. Applicazioni politiche

Premettiamo che le applicazioni degli indici di potere in ambito politico necessitano in molti casi di correzioni, in quanto non tutte le coalizioni teoricamente possibili lo sono anche in pratica: ad esempio quelle fra estrema destra ed estrema sinistra. Per tali correzioni si ricorre usualmente ai risultati di (Owen, 1977) per l'indice di Shaple-Shubik e (Owen, 1978) per quello di Banzhaf-Coleman e ai successivi sviluppi di tali risultati.

A livello legislativo non si può peraltro tener conto delle affinità fra i partiti, per cui è necessario lavorare sugli indici originari; allo stesso modo vi sono situazioni come referendum, leggi costituzionali eccetera, dove la forza numerica è preponderante su altre considerazioni. In questi paragrafi ci occuperemo degli indici originari e solo al termine parleremo di affinità.

Alla fine del paragrafo 4 ci eravamo posti alcuni interrogativi: in quali casi l'indice di Shapley-Shubik, quello di Banzhaf-Coleman e altri indici hanno comportamenti simili, pur con valori numerici diversi? Come utilizzare queste proprietà nelle applicazioni?

Una risposta al primo quesito è stata data con l'individuazione dei poliedri a indice costante, di cui abbiamo parlato nel sottoparagrafo 5.3. Alcune risposte al secondo quesito sono state fornite nel corso di tutto il quinto paragrafo, per le applicazioni finanziarie. Per quanto riguarda le applicazioni politiche, vediamo ora qualche risultato.

6.1. Criteri da rispettare negli arrotondamenti democratici

Consideriamo un organismo politico composto di tre partiti che hanno ricevuto in un'elezione 11, 10 e 2 voti rispettivamente. Se i seggi da assegnare sono in tutto tre, andrebbero dati in teoria 3×11/23 ≅ 1,43 seggi al primo, 3×10/23≅@ 1,30 al secondo e 3×2/23 ≅ 0,26 al terzo (v. seconda colonna della Tabella 5).

VOTI	quozienti	parti intere	seggi residui	SEGGI TOT.
11	1,43	1	1	2
10	1,30	1	0	1
2	0,26	0	0	0
23	3,00	2	1	3

Tabella 5. Ripartizione secondo il Sistema Proporzionale.

Per rendere interi i seggi si devono effettuare degli arrotondamenti, tenendo conto di ragionevoli criteri di equità: ad esempio a voti uguali dovrebbero corrispondere seggi uguali, a voti maggiori dovrebbero corrispondere seggi non inferiori («monotonìa») e in generale l'assegnazione dei seggi non dovrebbe dipendere dall'ordine con cui i partiti sono considerati («simmetria»). Fra gli altri criteri più noti v'è il rispetto degli arrotondamenti per difetto e per eccesso: cioè il numero di seggi da assegnare a ciascun partito non deve essere inferiore al relativo quoziente esatto, arrotondato per difetto («hare minimo»), né deve essere superiore al relativo quoziente esatto, arrotondato per eccesso («hare massimo»). Un altro criterio di una certa rilevanza è detto della «superadditività» e consiste in quanto segue. Se un metodo di arrotondamento assegna a due partiti certi seggi, lo stesso metodo deve assegnare al partito-unione (ottenuto cioè da un'ipotetica coalizione fra i due) un numero di seggi non inferiore alla somma dei seggi assegnati ai singoli. Un altro criterio, introdotto in [Gambarelli e Hołubiec, 1990], verrà illustrato più avanti.

L'applicazione di questi criteri, che sembrerebbero a prima vista irrinunciabili, può peraltro essere irrealizzabile. Ad esempio, se i partiti sono due e ricevono lo stesso numero di voti, è impossibile assegnare un numero dispari di seggi senza violare il primo criterio. In generale è stato provato che qualsiasi metodo di arrotondamento in grado di rispettare simmetria e monotonia non può rispettare congiuntamente hare massimo e superadditività.

6.2. I sistemi elettorali classici

Facciamo ora una breve presentazione dei metodi di arrotondamento più noti (gli altri sono, per lo più, ritocchi di questi).

Secondo il **Sistema Proporzionale** (o di Hamilton) a ciascun partito viene inizialmente assegnata la parte intera dei seggi teorici (nel nostro caso 1, 1, 0). I seggi residui (nel nostro caso 1) vengono assegnati ai partiti con parte frazionaria più alta (nel caso in esame al primo partito, la cui parte frazionaria è 0,43). Nell'esempio, la distribuzione risultante è quindi 2, 1, 0.

Secondo il **Metodo dei massimi divisori** (o di Hondt) si procede come segue. Si dividono i voti ricevuti dal primo partito per 1, poi per 2, per 3 ecc. finché la procedura lo renderà necessario. Si effettuano analoghe divisioni nel caso dei voti ricevuti dagli altri partiti. Si considerano allora i più alti quozienti (tanti, quanti sono i seggi da assegnare) e si attribuisce un seggio a ciascuno dei partiti corrispondenti a tali quozienti.

VOTI	:1	:2	:3	. . .
11	**11**	**5,5**	$3,\overline{6}$	. . .
10	**10**	5	$3,\overline{3}$	. . .
2	2	1	$0,\overline{6}$	. . .

Tabella 6. Ripartizione secondo il metodo dei Massimi Divisori.

Nel caso del nostro esempio (v. Tab. 6) i quozienti più alti sono, in ordine decrescente, 11, 10 e 5,5; di essi due corrispondono al primo partito (11 e 5,5) e uno al secondo partito (10). Pertanto si assegnano due seggi al primo partito e un seggio al secondo. Questa assegnazione corrisponde nell'esempio considerato a quella del Sistema Proporzionale, ma in generale può dare risultati diversi. Il metodo dei massimi divisori può portare in generale assegnazioni che non rispettano l'hare massimo; Balinski e Young hanno allora introdotto in [1975] il **Metodo dei massimi divisori con quota**, secondo cui le eventuali eccedenze rispetto all'arrotondamento per eccesso non vengono assegnate a quel partito; tale metodo porta peraltro altri inconvenienti. Nel caso dell'esempio, questo metodo riporta alla Tabella 6. Nei vari sistemi, in caso di parità (fra le parti frazionarie residue o fra i quozienti più alti) si ricorre a criteri esogeni: età dei candidati, sorteggi ecc.

6.3. Il criterio degli indici di potere

Tornando al nostro esempio, osserviamo che la ripartizione percentuale dei voti porta, secondo i più usuali indici di potere, allo stesso valore dell'indice per tutti e tre i partiti. Le ripartizioni di seggi fornite dalle Tabelle 5 e 6 portano invece al primo partito la maggioranza assoluta, con conseguente ripartizione di potere (1, 0, 0). Quanto sopra (illustrato in Tab. 7) mostra quanto possa essere sostanzialmente antidemocratica la ripartizione ottenuta con i metodi classici. Infatti tali metodi apportano una distorsione sui poteri coalizionali dei partiti, ledendo il principio della maggioranza, fondamentale in ogni democrazia. Una spiegazione di questo fenomeno è illustrata in fig. 7. Il passaggio dai voti ai seggi implica infatti una trasformazione da un punto sul triangolo dei voti (quello più grande in figura, con vertici sui tre assi) a un punto sul triangolo dei seggi (quello più piccolo).

V O T I			S E G G I	
n.	%	potere	SP e MD	potere
11	47,83	1/3	2	1
10	43,48	1/3	1	0
2	8,70	1/3	0	0
23	100	1	3	1

Tabella 7. Esempio di distorsioni al potere coalizionale apportate dai più noti sistemi elettorali (SP = Sistema Proporzionale; MD = Massimi Divisori).

Non tutti i punti del triangolo piccolo sono però accettabili: occorre infatti che il punto di arrivo abbia tutte le coordinate intere. Si tratta in sostanza di un sottoinsieme discreto di tale triangolo, costituito dai singoli punti indicati in figura (dove, per semplicità di disegno, il numero totale di seggi da distribuire è 10). Congiungendo il vettore dei voti con l'origine, si ottiene un segmento la cui intersezione con il triangolo piccolo dà la ripartizione dei seggi secondo i quozienti esatti. Se tale intersezione cade su un punto a coordinate intere, allora si ottiene la ripartizione perfetta. Altrimenti occorre valutare, fra i punti ammissibili, quello più «vicino» all'intersezione secondo un'opportuna metrica. Può capitare che il punto così ottenuto appartenga a una regione a potere costante diversa dalla corrispondente regione a potere costante del triangolo di partenza; in tal caso si realizza la diversità degli indici di potere fra voti e seggi.

Per risolvere il problema Gambarelli e Hołubiec, proposero in [1990] una soluzione tale da rispettare la regione a potere costante, minimizzando, come secondo obiettivo, l'angolo

fra le due semirette uscenti dall'origine, passanti una per il punto sul triangolo (e in generale sul simplesso) dei voti e l'altro su quello dei seggi.

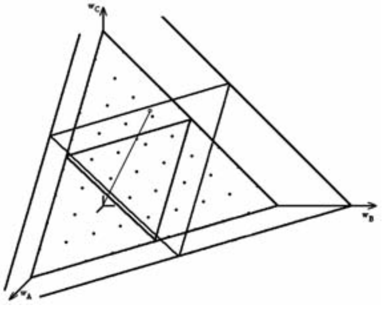


Figura 7.

6.4. Il metodo del Minimax

In [1999] Gambarelli ha proposto un metodo di arrotondamento più generale. Preso atto che nessun metodo è in grado di rispettare tutti i criteri di equità presentati in precedenza, il metodo proposto ribalta il problema: parte da un ordinamento dei criteri da rispettare, in ordine di importanza e procede eliminando le assegnazioni che non rispettano il primo criterio, poi quelle che non rispettano il secondo, e così via fino all'ultimo criterio.

Una generalizzazione di tale metodo per sistemi con più circoscrizioni è stata fatta da Gambarelli e Palestini in [2007].

6.5. Simulazioni

Osserviamo che le formule del paragrafo (5.5) possono essere applicate a problemi politico-elettorali, in quanto sono in grado di descrivere le variazioni dell'indice susseguenti all'introduzione di leggi elettorali che consentono di estendere il voto a nuove categorie di elettori (ad es. immigrati, emigrati, diversamente abili, carcerati, giovani eccetera) presumibilmente orientati verso un particolare partito.

Ulteriori applicazioni politiche utilizzano i risultati del paragrafo 5.8 relativi al controllo indiretto, in quanto molti partiti sono costituiti da varie correnti, all'interno delle quali possono esservi ulteriori diversificazioni. I risultati di [Gambarelli e Owen, 1994] si possono allora applicare alla quantificazione del potere di ciascuno di tali sotto-organismi su tutto il consesso.

Un altro tipo di applicazione riguarda la soglia di sbarramento che si impone ai partiti piccoli nei sistemi elettorali (v. [Gambarelli, 1988]). Anche qui ci rifacciamo ai discorsi fatti all'inizio del sesto paragrafo sulle affinità; è comunque possibile fare simulazioni sulle variazioni degli indici di potere per i grossi partiti, al variare di tale soglia. Ad esempio si può vedere in Tabella 8 come la Lega Lombarda, nel passaggio dall'1 al 2% dello sbarramento, diminuisce, invece che aumentare, il suo potere (qui misurato con l'indice di Banzhaf-Coleman).

Ulteriori studi riguardano il numero di seggi da assegnare ai Paesi componenti il Parlamento Europeo; una simulazione basata su una combinazione lineare di popolazioni e PIL è stata fatta in [Bertini, Gambarelli e Stach, 2005 e 2014].

		Poteri in caso di sbarramento						
Partito	% 92	0 %	1 %	2 %	3 %	4-5 %	6-8 %	9 %
DC	33,1	42,2	43,2	43,6	46,2	46,2	50,0	100,0
PDS	18,1	14,1	14,6	14,5	15,4	15,4	16,7	0
PSI	14,9	13,9	14,3	14,5	15,4	15,4	16,7	0
Lega L.	8,5	8,6	9,4	8,2	11,5	7,7	16,7	-
Rif. Com.	5,8	4,9	4,8	5,5	3,8	7,7	-	-
MSI	5,3	4,5	4,4	5,5	3,8	7,7	-	-
PRI	3,9	3,1	3,0	2,7	3,8	-	-	-
PLI	2,2	1,9	1,7	1,8	-	-	-	-
Verdi	2,1	1,8	1,7	1,8	-	-	-	-
PSDI	2,0	1,7	1,7	1,8	-	-	-	-
Rete	1,6	1,3	1,2	-	-	-	-	-
Pannella	0,7	0,6	-	-	-	-	-	-
SVP	0,6	0,5	-	-	-	-	-	-
Autonom.	0,3	0,3	-	-	-	-	-	-
Altri	0,7	0,7	-	-	-	-	-	-
TOTALI	100	100	100	100	100	100	100	100

Tabella 8. Poteri in Italia nel caso di sbarramenti ai partiti piccoli (Camera + Senato, 1992).

6.6. Previsioni

Rifacendoci alle considerazioni fatte all'inizio del paragrafo 6, le previsi dei rapporti di forza in ambito politico non possono prescindere dalle affinità e lontananze ideologiche fra i vari partiti. In aggiunta, molti Parlamenti sono bicamerali e il fatto che un certo partito abbia due diversi indici di potere nelle due Camere può creare perplessità sul potere complessivo di quel partito. Il problema è stato affrontato globalmente in [Gambarelli e Uristani, 2009], dove è stato elaborato un modello (con relativo software) che formula previsioni sulla forza dei vari partiti in Parlamenti multicamerali, tenendo conto di affinità e ostilità. Il modello è stato applicato a tutti i Paesi europei dotati di Parlamenti bicamerali e in generale all'Unione Europea.

7. Alcuni problemi aperti

Diversi problemi restano aperti nella teoria e nelle applicazioni degli Indici di Potere. Ne citiamo alcuni di nostro specifico interesse.

7.1. Problemi aperti in ambito teorico

In ambito teorico riteniamo di particolare interesse:

- l'estensione dei risultati ottenuti in [Gambarelli, 1990] sul valor Shapley come baricentro, ad altri valori, con possibili applicazioni all'allestimento di algoritmi più efficienti per il relativo calcolo.
- un completamento degli studi fatti in [Bertini, Freixas, Gambarelli e Stach, 2013a e 2013b] su un confronto fra molti indici di potere presenti in letteratura, per individuare quello di volta in volta più adatto all'applicazione in esame.

7.2. Problemi aperti in ambito finanziario

In ambito finanziario riteniamo di particolare interesse:

- una migliore descrizione della formazione delle coalizioni di controllo, utilizzando lavori che sono stati finora applicati solo in ambito politico: ad esempio [Owen e Shapley, 1989];
- un confronto fra i risultati ottenuti nei paragrafi (5.4) e (5.5), e i Giochi Oceanici. Questi ultimi considerano situazioni con un certo numero di grossi azionisti e un oceano di piccoli azionisti, anch'essi nelle stesse condizioni dei «grossi» rispetto alla possibilità di gestire operazioni di controllo (qui sta la differenza con i modelli presentati in questo articolo, che, come abbiamo visto, si applicano a mercati imperfetti). Nei Giochi oceanici si studia il comportamento-limite degli indici di potere, al tendere a zero del peso del più grande fra i piccoli azionisti. Alcuni dei risultati ottenuti in tali giochi (ad esempio [Shapiro e Shapley, 1960], [Milnor e Shapley, 1961], [Aumann e Shapley, 1974], [Dubey, 1975b], [Dragan e Gambarelli, 1990], potrebbero essere messi a confronto con quelli qui descritti, per trovare eventuali relazioni e discutere le principali differenze.

Risulterebbero particolarmente utili algoritmi efficienti per il calcolo del potere nel controllo indiretto, facendo seguito al [Gambarelli e Owen, 1994] e al [Denti e Prati, 2004].

Lavori di taglio più applicativo sono inoltre necessari per calibrare i parametri relativi all'indice di stabilità presentato nel paragrafo (5.9), con l'utilizzo di serie storiche relative a passate operazioni di «takeover». Ancora di perfezionamenti necessitano i modelli di selezione del portafoglio. La difficoltà di ottenere dati concreti rende particolarmente difficili questi lavori, per via della naturale ritrosia dei protagonisti a diffonderli.

Per ulteriori problemi aperti relativi all'applicazione degli indici di potere in ambito fianziario v. ad esempio [Bertini, Gambarelli e Stach, 2015].

7.3. Problemi aperti in ambito politico

In ambito politico riteniamo di particolare interesse:

– l'applicazione dei modelli presentati in questa sede, a Paesi non considerati in questi lavori, ad esempio extraeuropei;
– la creazione di algoritmi efficienti per la trasformazione dei seggi in voti nei casi a più circoscrizioni, in quanto il [Gambarelli e Palestini, 2007] è concretamente inapplicabile a tabelle di grandi dimensioni. Segnaliamo in proposito [Demange, 2013], [Pukelsheim, 2006] e [Pukelsheim, Ricca, Scozzari, Serafini e Simeone, 2012].

Infine segnaliamo nuovamente il lavoro [Bertini, Gambarelli e Stach, 2015a] per ulteriori problemi aperti relativi all'applicazione degli indici di potere in ambito politico.

8. Ringraziamenti

Questo lavoro è sostenuto dai Fondi di Ateneo dell'Università degli Studi di Bergamo, dal Gruppo GNAMPA dell'INDAM. Alcune parti sono tratte da precedenti opere degli stessi autori; in particolare da [Gambarelli e Stach, 2009] e [Bertini, Gambarelli e Stach, 2015b]. Si ringraziano gli editors per le relative autorizzazioni.

Bibliografia

Amihud Y. e Barnea A. (1974). Portfolio Selection for Managerial Control. *Omega* 2, 775–83.

Arcaini G. e Gambarelli G. (1986). Algorithm for Automatic Computation of the Power Variations in Share Trading. *Calcolo* 23, 1, 13–19.

Aumann R. J. e Shapley L. S. (1974). *Values of Non-Atomic Games.* Princeton: University Press, Princeton.

Balinski M.L. e Young H.P. (1975). The Quota Method of Apportionment. *American Mathematical Monthly* 82, 701–730.

Banzhaf J. F. (1965). Weighted Voting Doesn't Work: a Mathematical Analysis. *Rutgers Law Review* 19, 317–343.

Bassetti A. e Torricelli C. (1992). Optimal Portfolio Selection as a Solution to an Axiomatic Bargaining Game, in: G. Feichtinger (ed.), *Dynamic Economic Models and Optimal Control.* Amsterdam: Elsevier Publisher, 373–84.

Batteau P. (1980). Approches formelles du problème du contrôle des firmes et sociétés par actions, *Revue de l'Association Française de Finance* 1, 1–26.

Bertini C. (2011a). Minimal Winning Coalition, in: K. Dowding (ed.). *Encyclopedia of Power*. Los Angeles: SAGE, 422–423, ISBN 978-1-4129-2748-2.

Bertini C. (2011b). Owen Value, in: K. Dowding (ed.). *Encyclopedia of Power*. Los Angeles: SAGE, 466–470, ISBN 978-1-4129-2748-2.

Bertini C. (2011c). Shapley Value, in: K. Dowding (ed.), *Encyclopedia of Power*. Los Angeles: SAGE, 600–603, ISBN 978-1-4129-2748-2.

Bertini C., Freixas J., Gambarelli G. e Stach I. (2013a). Comparing Power Indices, in: Fragnelli V. and Gambarelli G. (eds.). *Open Problems in the Theory of Cooperative Games*, Special Issue of *International Game Theory Review* 15, 2: 1340004-1–1340004-19.

Bertini C., Freixas J., Gambarelli G. e Stach I. (2013b), Some Open Problems in Simple Games, in: Fragnelli V. and Gambarelli G. (eds.). *Open Problems in the Theory of Cooperative Games*, Special Issue of *International Game Theory Review*, 15, 2: 1340005-1–1340005-18.

Bertini C., Gambarelli G. e Stach I. (2005). Apportionment Strategies for the European Parliament, in: Gambarelli G. and Holler M. (eds.). *Power Measures III*, *Homo Oeconomicus*, 22, 4, 589–604. Republished in: (2013), M.J. Holler and H. Nurmi (eds.), *Power, Voting, and Voting Power: 30 Years After*. Heidelberg: Springer-Verlag, 541–552.

Bertini C., Gambarelli G. e Stach I. (2008). A public Help Index. *Power, Freedom, and Voting*, in: M. Braham and F. Steffen (eds.). Berlin-Haidelberg: Springer, 83–98, ISBN 978-3-540-73381-2 e-ISBN 978-3-540-73382-9, DOI 10.1007/978-3-540-73382-9.

Bertini C., Gambarelli G. e Stach I. (2014). A method of seat distribution in the European Parliament, in: P. Łebkowski (ed.). *Zarządzanie przedsiębiorstwem. Teoria i praktyka 2014*, Cracovia: AGH University of Science and Technology Press, 271–280, ISBN 978-83-7464-732-8.

Bertini C., Gambarelli G. e Stach I. (2015a). Some Open Problems in the Application of Power Indices to Politics and Finance. *Homo Oeconomicus*, 32(1), 147–156, Monaco: Accedo Verlagsgesellschaft, ISBN 978-3-89265-117-8, ISSN 0943-0180.

Bertini C., Gambarelli G. e Stach I. (2015b). Some Open Problems in Cooperative Games. *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczeci skiego nr* 855, «Finanse, Rynki Finansowe, Ubezpieczenia», 74, t. 1, 469–479; DOI: 10.18276/frfu.2015.74/1-40, ISSN 1640-6818.

Bertini C. e Stach I. (2011a). Banzhaf Voting Power Measure, in: K. Dowding (ed.), *Encyclopedia of Power*. Los Angeles: SAGE, 54–55, ISBN 978-1-4129-2748-2.

Bertini C. e Stach I. (2011b). Coleman Index, in: K. Dowding (ed.), *Encyclopedia of Power*. Los Angeles: SAGE, 117–119, ISBN 978-1-4129-2748-2.

Bertini C. e Stach I. (2011c). Voting Power, in: K. Dowding (ed.), *Encyclopedia of Power*. Los Angeles: SAGE, 699–700, ISBN 978-1-4129-2748-2.

Brioschi F., Buzzacchi L. e Colombo M.G. (1990). *Gruppi di imprese e mercato finanziario.* Roma: La Nuova Italia Scientifica.

Buzzacchi L. e Mosconi R. (1993). *Azioni di risparmio e valore di controllo: alcune evidenze empiriche e spunti di ricerca*. Centro di Economia Monetaria e Finanziaria Paolo Baffi, Milano, 73.

Coleman J. S. (1971). Control of Collectivities and the Power of Collectivity to Act, in: B. Liberman (ed.), *Social Choice,* Gordon and Breach, New York, 269–300.

Corielli F., Nicodano G. e Rindi B. (1993). *The value of Non-voting Shares, the Structure of Corporate Control and Market Liquidity*. Centro di Economia Monetaria e Finanziaria Paolo Baffi, Milano.

Crama Y. e Leruth L. (2013). Power Indices and the Measurement of Control in Corporate Structures, in: Fragnelli V. and Gambarelli G. (eds.). *Open Problems in the Applications of Cooperative Games*. Special Issue of *International Game Theory Review*, 15 (3): 1340017-1–1340017-15.

Demange G. (2013). On Allocating Seats to Parties and Districts: Apportionments, in: Fragnelli V. and Gambarelli G. (eds.). *Open Problems in the Applications of Cooperative Games*, Special Issue of *International Game Theory Review*, 15 (3): 1340014-1–1340014-14.

Denti E. e Prati N. (2004). Relevance of Winning Coalitions in Indirect Control of Corporations, in: Gambarelli G. (ed.). *Essays on Cooperative Games - in* Honor of Guillermo Owen, Special Issue of Theory and Decision, 36,183–192.

Dragan, I. e Gambarelli G. (1990). The compensatory bargaining set of a big boss game. *Libertas Mathematica*. Arlington, 10, 53–61.

Dubey P. (1975a). On the Uniqueness of the Shapley Value. *International Journal of Game Theory* 4, 131–139.

Dubey P. (1975b). Some results on values of finite and infinite games. *Technical Report, Center of Applied Mathematics.* Ithaca: Cornell University Press,14853.

Gambarelli G. (1980). Algorithm for the numerical computation of the Shapley value of a game. *Rivista di Statistica Applicata* 13, 1, 35–41.

Gambarelli G. (1982a). The control quota component in the price of shares. *Rivista di Matematica per le Scienze Economiche e Sociali* 5, 1, 53–63.

Gambarelli G. (1982b). Portfolio Selection and Firms' Control. *Finance* 3(1), 69–83.

Gambarelli G. (1983). Common Behaviour of Power Indices. *International Journal of Game Theory* 12(4), 237–244.

Gambarelli G. (1988). Quale soglia per i partiti piccoli? *Politeia* 4, 12, 15–18.

Gambarelli G. (1990). A New Approach for Evaluating the Shapley Value. *Optimization* 21(3), 445–452.

Gambarelli G. (1991). Political and Financial Applications of the Power Indices, in: G. Ricci (ed.), *Decision Processes in Economics*. Berlino-Heidelberg: Springer Verlag, 84–106.

Gambarelli G. (1993). An Index of De-stability for Controlling Shareholders, in R. Flavell (ed.). *Modelling Reality and Personal Modelling*. Heidelberg: Physica Verlag, 116–127.

Gambarelli G. (1996). Takeover Algorithms, in: Bertocchi M., Cavalli E. and Komlosi S. (eds.). *Modelling Techniques for Financial Markets and Bank Management, Proceedings of the 16-th and 17-th Euro Working Group of Financial Modelling Meetings*. Heidelberg: Physica Verlag, 212–222.

Gambarelli G. (1999). Minimax Apportionments. *Group Decision and Negotiation* 8 (6), 441–461. Republished in: (2003). Kacprzyk J. and Wagner D. (eds.). Group Decisions and Voting, Systems Research Institute, Polish Academy of Sciences. Varsavia, 9–30.

Gambarelli G. (2003). *Giochi competitivi e cooperativi* II. Torino: ed. Giappichelli, ISBN 88-348-3378-3.

Gambarelli G. (2011a). Banzhaf Value, in: K. Dowding (ed.). *Encyclopedia of Power*. Los Angeles: SAGE, 53–54, ISBN 978-1-4129-2748-2.

Gambarelli G. (2011b). Pivot Player, in: K. Dowding (ed.). *Encyclopedia of Power*. Los Angeles: SAGE, 479–480, ISBN 978-1-4129-2748-2.

Gambarelli G. (2011c). Value of a Game, in: K. Dowding (ed.), *Encyclopedia of Power*. Los Angeles: SAGE, 683–684, ISBN 978-1-4129-2748-2.

Gambarelli G. (2011d). Weighted Majority Game, in: K. Dowding (ed.). *Encyclopedia of Power*. Los Angeles: SAGE, 709–710, ISBN 978-1-4129-2748-2.

Gambarelli, G. e Hołubiec J. (1990). Power Indices and Democratic Apportionments, in: Fedrizzi M. and Kacprzyk J. (eds.). *Proceedings of the 8-th Italian-Polish Symposium on Systems Analysis and Decision Support in Economics and Technology*. Varsavia: Onnitech Press, 240–255.

Gambarelli G. e Miller N.R. (2011). Simple Games, in: K. Dowding (ed.). *Encyclopedia of Power*. Los Angeles: SAGE, p. 607-608, ISBN 978-1-4129-2748-2.

Gambarelli G. e Owen G. (1994). Indirect Control of Corporations. *International Journal of Game Theory* 23(4), 287–302.

Gambarelli G. e Owen G. (2004). The Coming of Game Theory, in: Gambarelli G. (ed.). *Essays on Cooperative Games - in Honor of Guillermo Owen*. Special Issue of *Theory and Decision*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 36, 1–18.

Gambarelli G. e Palestini A. (2007). Minimax Multi-District Apportionments, in: Gambarelli G. (ed.). *Power Measures IV*. Special Issue of *Homo Oeconomicus* 24 (3/4), 335–356. Republished in (2013). Holler M.J. and Nurmi H. (eds.) *Power, Voting, and Voting Power: 30 Years After*. Heidelberg: Springer-Verlag, 169–186, ISBN 978-3-642-35928-6.

Gambarelli G. e Pesce S. (2004). Takeover Prices and Portfolio Theory, in Gambarelli G. (ed.). *Essays on Cooperative Games - in Honor of Guillermo Owen*. Special Issue of *Theory and Decision*. Dordrecht Kluwer Academic Publishers, 36,193–203.

Gambarelli G. e Stach I. (2009). Power Indices in Politics; Some Results and Open Problems, Essays in Honor of Hannu Nurmi. *Homo Oeconomicus*, 26(3/4), 417–441.

Gambarelli G. e Szegö G. P. (1982). Discontinuous solutions in n-person games, in: Szegö G.P. (ed.). *New Quantitative Techniques for Economic Analysis*. New York: Academic Press, 229–244.

Gambarelli G. e Uristani A. (2009). Multicameral Voting Cohesion Games. *Central European Journal of Operations Research*, 17(4), 433–460.

Mann I. e Shapley L. S. (1962). Values of Large Games, VI: Evaluating the Electoral College Exactly. Santa Monica: Rand Corporation, RM 3158.

Milnor J.W. e Shapley L.S. (1961). Values of Large Games II: Oceanic Games. Santa Monica: Rand Corporation, RM 2646.

Owen G. (1972). Multilinear Extensions of Games. *Management Science* 18, 64–79.

Owen G. (1977). Values of Games with a Priori Unions. *Lecture Notes in Economic and Mathematical Systems* 141, 76–88.

Owen G. (1978). Characterization of the Banzhaf-Coleman Index. *SIAM Journal of Applied Math*. 35, 315–327.

Owen G. (1981). Modification of the Banzhaf-Coleman Index for Games with a Priori Unions, in: Holler M. J. (ed.). *Power, Voting and Voting Power*. Würzburg: Physica, 232–238.

Owen G. (1995). *Game Theory,* III ed. San Diego: Academic Press.

Owen G. e Shapley L. S. (1989). Optimal Location of Candidates in Ideological Space. *Internaional Journal of Game Theory* 18, 3, 339–356.

Penrose L. S. (1946). The elementary statistics of majority voting. *Journal of the Royal Statistical Society* 109, 53–57.

Pukelsheim F. (2006). Current issues of apportionment methods, in: B. Simeone and F. Pukelsheim (eds.). *Mathematics and democracy: recent advances in voting systems and collective choice.* Springer, 167-176.

Pukelsheim F., Ricca F., Scozzari A., Serafini P. e Simeone B. (2012). Network flow methods for electoral systems. Networks, 59, 73–88.

Riker W. H. (1986). The First Power Index. *Social Choice and Welfare* 3, 293–295.

Rydqvist K. (1985). The Pricing of Shares with Different Voting Power and the Theory of Oceanic Games. *Stockolm School of Economics* 4, 1–70.

Salvemini M.T., Simeone B. e Succi R. (1995). Analisi del possesso integrato nei gruppi di imprese mediante grafi. *L'industria* 16, 4, 641–62.

Shapiro N. Z. e Shapley L. S. (1960). *Values of Large Games, I: a Limit Theorem*. Santa Monica: Rand Corporation*,* RM 2646.

Shapley L. S. (1953). A Value for n-person Games, in: Tucker A.W. and Kuhn H.W. (eds.). *Contributions to the Theory of Games II*. Princeton : Princeton University Press, 307–317,

Shapley L. S. e Shubik M. (1954). A Method for Evaluating the Distributions of Power in a Committee System. *American Political Science Review* 48, 787–792.

Stach I. (2011a). Proper Simple Game, in: K. Dowding (ed.). *Encyclopedia of Power*. Los Angeles: SAGE, 537–539, ISBN 978-1-4129-2748-2.

Stach I. (2011b). Shapley-Shubik Index, in: K. Dowding (ed.). *Encyclopedia of Power*. Los Angeles: SAGE, 603–606, ISBN 978-1-4129-2748-2.

Stach I. (2011c). Tijs Value, in: K. Dowding (ed.). *Encyclopedia of Power*. Los Angeles: SAGE , 667–670, ISBN 978-1-4129-2748-2.

Szegö, G. (1980). *Portfolio Theory.* New York: Academic Press.

2. Sangaku 算額 la matematica come spettacolo sacro

Giovanni Nicosia[1]

Sangaku (算額) are votive tablets with mathematical subjects like problems or theorems, drawn by mathematicians-artists in Japan from 18th to 20th century. They were hung in temples and sanctuaries in the whole country, but their exact function isn't surely understood. Here some examples of problems are discussed as stimulating themes for teachers.

1. Le tavolette matematiche votive

Nei primi anni di questo decennio la Società Matematica della Svizzera Italiana (SMASI) fece circolare in Ticino e in Italia una splendida mostra dal titolo *San-Gaku* costituita da una collezione di riproduzioni fotografiche stampate su pannelli di tela raffiguranti alcuni oggetti che per la sensibilità europea sono di difficile catalogazione, a metà tra le rappresentazioni matematiche, gli arredi sacri, le opere d'arte di altissima qualità tecnica ed estetica, gli strumenti di comunicazione.

Letteralmente il termine *sangaku* (算額) significa «tavolette matematiche» e designa dei quadri su legno che dai primi del XVIII secolo sino agli inizi del XX vennero appesi alle pareti esterne dei templi buddisti e dei santuari scintoisti del Giappone. Anche in precedenza i seguaci di queste due religioni avevano appeso nei luoghi sacri delle tavolette per ringraziare le divinità o per ingraziarsele, ma esse avevano tradizionalmente rappresentato animali o eventi delle storie sacre. I *sangaku* invece presentano enunciati matematici come teoremi o proposizioni oppure testi di problemi, con relative figure di accompagnamento. Alcuni riportano più d'un enunciato, qualcuno addirittura una ventina.

2. Cenni storici

Della grande produzione di poco più di 3 secoli resta oggi un patrimonio di circa 900 splendidi esemplari, in prevalenza risalenti al XIX secolo. Le loro dimensioni sono varie come pure le tecniche di realizzazione.

In un angolo riportano sempre un nome di persona, probabilmente il donatore, con anche una parola che ne chiarisce lo status sociale o la qualifica, cosa che

1. Membro del RSDDM di Bologna e del ISGEm (International Study Group of Ethnomatematics).

rende questi manufatti dei preziosi documenti storici per conoscere un aspetto della società del tempo. Tra i personaggi citati, oltre ai rappresentanti di quella piccola nobiltà guerriera che all'epoca, nel paese recentemente riunito e pacificato, era in cerca di un nuovo ruolo, troviamo sorprendentemente anche insegnanti, contadini e persino donne e bambini.

I *sangaku* erano oggetti rivolti a un pubblico ben più vasto della sola comunità dei letterati nobilissimi che cominciavano a costituire l'ossatura amministrativa del nascente funzionariato, come si deduce dal fatto che fossero affissi in luoghi di grande afflusso di gente di ogni fascia sociale e dal linguaggio in cui sono scritti i loro testi. Molti, infatti, dovevano essere in grado di leggere la grafia *kanbun* (漢文), composta da caratteri cinesi e da altri segni più confacenti alla fonetica giapponese.

Da notare anche la grande diffusione geografica delle tavole, che si sono ritrovate in quasi tutto il paese. Da un lato ciò testimonia una grande confidenza della popolazione con questi manufatti artistici. Dall'altro, come nota Bogomonly (1996), il fatto che proposizioni simili compaiano in tavolette affisse in luoghi molto distanti tra loro e in tempi diversi lascia pensare che dei matematici-artisti professionisti vagassero per il paese realizzando *sangaku* per una variegata committenza, mantenendosi in qualche modo fedeli al loro stile personale.

Un'altra ipotesi è che queste opere avessero proprio la funzione di ostentare l'abilità dei solutori, dimostratori o ricercatori di temi scientificamente interessanti, in un'epoca in cui non esistevano riviste di ricerca e nemmeno altre occasioni di divulgazione. I giovani talenti potevano farsi conoscere dai maestri prestigiosi, ovvero le scuole stesse potevano pubblicizzare la loro attività e qualità facendo affiggere *sangaku*. All'affissione di un *sangaku* poteva seguire un dibattito tra scuole o l'affissione di una risposta scritta su fogli appesi lì accanto, in special modo quando recavano il testo di un problema ma non la soluzione.

Le scuole di matematica, rese necessarie dalle nuove necessità della pianificazione agricola e della contabilità ma organizzate come vere e proprie sette, erano rivali e sempre in aspra polemica tra loro. Verso il XVIII secolo prevalsero, però, le necessità di confronto e condivisione, per cui le scuole presero a cooperare. I matematici presero a compilare raccolte di problemi tratti da *sangaku*, che in molti casi andavano deteriorandosi per l'esposizione agli agenti atmosferici, corredandoli di soluzioni. Ci sono arrivati anche resoconti di viaggi di studio di intellettuali interessati alla matematica che percorrevano il Giappone toccando i santuari e i templi più ricchi di tavole.

La tradizione delle affissioni continuò sino ai primi dell'era industriale, quando entrò in decadenza. La riscoperta di oggi segue un ripensamento critico della tradizione culturale.

3. La matematica dei sangaku

Trattandosi di oggetti da guardare, i *sangaku* recano prevalentemente problemi di geometria piana o solida con illustrazioni tecnicamente raffinatissime e brevi testi. Per risolverli occorrono solitamente alcuni teoremi di geometria euclidea, che i matematici giapponesi avevano appreso da testi cinesi e che avevano rielaborato in proprio, primo tra tutti il Teorema di Pitagora sul Triangolo Rettangolo (che i matematici cinesi e giapponesi non chiamavano così). Anche le similitudini fra triangoli e i teoremi su rette tangenti a circonferenze e su corde sono molto sfruttati.

Ci sono, però anche problemi di argomento aritmetico o che si possono risolvere con sistemi di equazioni.

Nelle raccolte le risoluzioni abbondano di dettagli di tipo algebrico. Le equazioni di secondo grado hanno un ruolo importante nella matematica giapponese dell'epoca, risolte spesso per completamento. Anche l'algebra dei radicali era molto usata nelle razionalizzazioni.

Non venivano usate esplicitamente funzioni goniometriche ma i procedimenti suggeriti fanno pensare che le principali identità trigonometriche fossero ben note.

4. Qualche esempio

Un *sangaku* della metà del XVIII secolo, riportato da Fukugawa e Rothman (2008) reca:

> Ci sono 50 animali tra polli e conigli. In tutto ci sono 122 zampe.
> Quanti conigli ci sono?
> Se i conigli fossero polli in tutto avremmo 100 zampe, quindi sappiamo che le 22 zampe in più sono tutte di coniglio, il che implica che sono 11 conigli e 39 polli.

Nel linguaggio della matematica accademica di oggi si può impostare il sistema:
$\begin{cases} x + y = 50 \\ 2x + 4y = 122 \end{cases}$ che ha proprio la soluzione $\begin{cases} x = 39 \\ y = 11 \end{cases}$. Il procedimento di risoluzione proposto, semanticamente legato agli oggetti citati, considera che 50 polli avrebbero 100 zampe, quindi i conigli posseggono le rimanenti 22, per cui

$$100 + 2y = 122 \rightarrow y = 11 \rightarrow x = 50 - 11 = 39$$

Un altro esempio

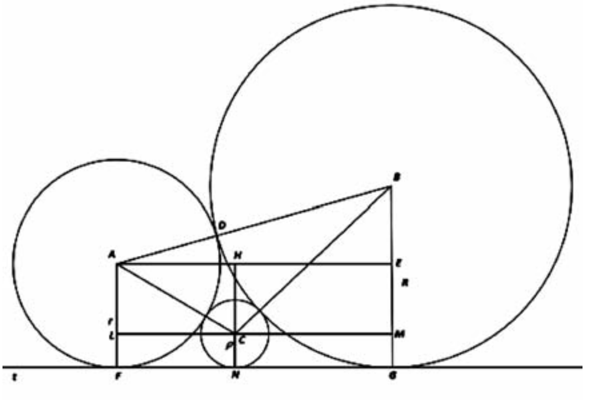
Dal sito *Japanese Temple Geometry Problem* con licenza di libero uso.

La seconda figura nel *sangaku* soprastante e il problema cui si riferisce compaiono anche in altri sangaku.

Due circonferenze tangenti tra loro sono tangenti a una retta. Provare che il raggio ρ di una terza circonferenza tangente alla retta e alle due circonferenze soddisfa la seguente relazione con i loro raggi R e r:

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{r}}$$

Il testo non riporta soluzioni. La figura può essere così rielaborata con un programma di geometria dinamica[2]:



1. Le due circonferenze tangenti tra loro e alla retta *t* hanno una centro *A* e raggio *r,* l'altra centro *B* e raggio *R*. La terza circonferenza, tangente alle prime due e alla retta *t*, ha centro *C* e raggio ρ.
2. Tracciamo i due segmenti perpendicolari alla retta *t* e passanti uno per *A* e uno per *B*; *AF* è lungo quanto il raggio *r*, *BG* quanto il raggio *R*.
3. Possiamo costruire il segmento *AE* parallelo alla retta *t*, che è perpendicolare al segmento *BG;* il triangolo *AEB* è rettangolo in *E*, la sua ipotenusa *AB* = *r* + *R*, il suo cateto *BE* = *R* – *r* e l'altro è la somma dei due segmenti *AH* + *HE;* quindi per il Teorema di Pitagora:

   $\left(AH + HE\right)^2 = \left(R + r\right)^2 - \left(R - r\right)^2$; con qualche calcolo si deduce che

   $\left(AH + HE\right)^2 = 4Rr$, cioè che $AH + HE = 2\sqrt{Rr}$.

4. Tracciamo anche i segmenti *LC* e *CM* paralleli alla retta *t* e dunque perpendicolari ad *AF* e a *BG*; è utile notare che ci sono uguaglianze tra lunghezze: *AH* = *LC* = *FN* e *HE* = *CM* = *NG*.
5. Il triangolo *LCA* è rettangolo in *L*; la sua ipotenusa *AC* = *r* + ρ e il suo cateto *AL* = *r* – ρ; per il teorema di Pitagora $LC^2 = \left(r + \rho\right)^2 - \left(r - \rho\right)^2$;

   se ne deduce che $LC^2 = 4r\rho$, cioè che $LC = 2\sqrt{r\rho}$.

2. Qui si è usato *GeoGebra*.

6. Il triangolo CMB è rettangolo in M; la sua ipotenusa $CB = R + \rho$ e il suo cateto $MB = R - \rho$; per il teorema di Pitagora $CM^2 = (R+\rho)^2 - (R-\rho)^2$; se ne deduce che $CM^2 = 4R\rho^2$ cioè che $CM = 2\sqrt{R\rho}$.
7. Mettendo insieme le relazioni dei punti (3), (5) e (6) e le uguaglianze del punto (4) si ha che $2\sqrt{Rr} = 2\sqrt{r\rho} + 2\sqrt{R\rho}$; da cui, raccogliendo il 2 a secondo membro e dividendo ambo i membri per $2\sqrt{Rr\rho}$ si ottiene la relazione desiderata: $\frac{1}{\sqrt{\rho}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{r}}$.

Tra le tante altre soluzioni che si possono ritrovare l'impostazione analitica ha il vantaggio di rendere facile anche la determinazione del centro *C* in base alle coordinate del centro *A*: sistemando il riferimento cartesiano in modo che le posizioni reciproche siano quelle della figura e che la retta *t* sia parallela all'*Asse delle Ascisse* si ha che $C_x = A_x + LC$, quindi $C_x = A_x + 2\sqrt{r\rho}$, e chiaramente $C_y = A_y - r + \rho$.

5. Conclusione

Oggi, dopo la riscoperta dei *sangaku* da parte dall'insegnante Fukugawa (Fukagawa H., Pedoe D; 1989), il grande patrimonio di temi, problemi e figure racchiuso in questa forma d'arte è a disposizione di una sempre più vasta platea di interessati, che possono profittarne per diletto personale e nell'attività scolastica.

Da questi oggetti sacri, artistici e matematici insieme i matematici europei possono a buon diritto confessarsi commossi, ammirando la particolare sensibilità della cultura giapponese.

Bibliografia

Arrigo G. (2010). La SMASI presenta la Mostra SanGaku. Tra arte e scienza, la matematica tradizionale giapponese durante il periodo di Edo (1603-1868). *Bollettino dei docenti di matematica. Bellinzona: UIM-CERDD, 61 (dicembre 2010)*, pp. 35-40.

Bogomolny A. (1996). Sangaku: Reflections on the Phenomenon from Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles

http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Sangaku.shtml, Accessed 10 August 2014

Fukagawa H., Pedoe D. (1989). *Japanese Temple Geometry Problems Sangaku.* Winnipeg: The Charles Babbage Research Centre.

Fukagawa H., Rothman A. (2008). *Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry*. Princeton University Press.

Horiuchi Annick (2010). La matematica al servizio degli dei in Giappone? *Bollettino dei docenti di matematica. Bellinzona: UIM-CERDD, 61 (dicembre 2010)*, pp. 41-48.

Huvent G. (2008). *Sangaku. Le mystère des énigmes géométriques japonaises*. Paris: Dunod.

Smith D.E., Mikami Y. (1941). A history of Japanese mathematics. *Chicago: The Open Court Publishing Company.*

Vincent J., Vincent C. (2004). Japanese temple geometry. *Australian Senior Mathematics Journal, 18 (1)*, pp. 8-20.

Sitografia

Kotera H. (dal 1996) Japanese Temple Geometry Problem

http://www.wasan.jp/english/index.html

Bogomolny A. Sangaku: Reflections on the Phenomenon.

http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Sangaku.shtml.

Fukagawa H. and Pedoe D. Japanese. (1989). *Temple Geometry Problems.* Winnipeg, Manitoba (Canada): Charles Babbage Research Foundation.

Fukagawa H. and Rigby J. F. (2002). *Traditional Japanese Mathematics Problems from the 18th and 19th Centuries*. Singapore: Science Culture Technology Press.

Hidetoshi F. and Rothman T. (2008). *Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Huvent G. Sangaku (2008). *Le mystère des énigmes géométriques japonaises*. Dunod.

Kimberling C. *Review: Traditional Japanese Mathematics Problems from the 18th and 19th Centuries and Japanese Temple Geometry Problems.*

Kotera H. Japanese Temple Geometry Problem: Sangaku.

http://www.wasan.jp/english/.

Mikami, Y. The Development of Mathematics in China and Japan, 2nd ed. New York: Chelsea, 1974.

Rothman T. (1998). Japanese Temple Geometry. Scientific American 278, maggio 1998, Pp. 85-91.

Rothman, T. «Japanese Temple Geometry.

http://www2.gol.com/users/coynerhm/0598rothman.html.

Smith D. E., Mikami Y. (1914) *A History of Japanese Mathematics*. Chicago: Open Court.

1. Una costruzione analitica dall'insieme dei numeri razionali all'insieme di particolari numeri reali algebrici.

Un tema tipico delle «Matematiche Elementari da un punto di vista superiore», utile a riflessioni sulla Didattica della matematica.

Bruno D'Amore[1] e Martha Isabel Fandiño Pinilla[2]

In several occasions we read that the real numbers is an analytical extension of rational numbers by means of the extraction of root. In this paper we show that this affirmation is false.

In diverse occasioni si legge che i numeri reali sono una estensione analitica dei numeri razionali ricorrendo alla operazione di estrazione di radice. In questo articolo si mostra che questa affermazione è falsa.

En diversas ocasiones se lee que los números reales son una extensión analítica de los números racionales recurriendo a la operación de extracción de raíces. En este artículo se muestra que esta afirmación es falsa.

Versione italiana

1. Premessa

In più occasioni abbiamo sentito dire durante corsi, seminari e conferenze e letto su appunti, manuali e testi, che:

– così come si estende N a Z (per poter far sì che la sottrazione sia un'operazione interna) in maniera «analitica», cioè con un opportuno passaggio al quoziente (si veda oltre),
– così come si estende Z a Q (per poter far sì che la divisione sia un'operazione interna) in maniera «analitica» (si veda oltre),
– si potrebbe estendere Q a R in maniera «analitica» per poter far sì che l'estrazione di radice sia un'operazione interna.

Questa affermazione è doppiamente falsa.

1. In una estensione analitica non cambia la cardinalità dall'insieme di partenza a quello esteso, mentre un ben noto teorema di Georg Cantor (1845-1918) mostra, usando il metodo della «diagonalizzazione»,[3] che l'insieme dei numeri reali compresi fra 0 e 1 (e dunque tutto R) non è numerabile. Come risultato esteso si può affermare che $|Q|<|R|$: Q ha la potenza del numerabile, R quella del continuo.
2. D'altra parte, in R trovano posto i reali algebrici (R_A) e i reali trascendenti (R_T); un altro celebre teorema di Cantor mostra come R_A abbia a sua volta la potenza del numerabile.
   Dunque, se una estensione analitica di Q è possibile, non è a tutto R.

---

1. PhD, Universidad Distrital «Francisco José de Caldas», Bogotà, Colombia.
2. PhD, NRD, Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna, Italia.
3. Esposto la prima volta nel 1891 sulla rivista: *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*.

Ricordiamo che:

D1 i numeri reali algebrici sono radici di equazioni algebriche a coefficienti interi;

D2 un numero reale trascendente t è caratterizzato dal fatto che non esiste alcuna equazione algebrica che abbia t come radice[4].

Il presente lavoro si inserisce a nostro avviso nel filone delle riflessioni sulle «Matematiche elementari da un punto di vista superiore», inteso nella maniera di Felix Klein (1849-1925). Si veda il lavoro originale di Klein (1908-1909) e almeno qualcuna delle numerosissime interpretazioni (Enriques, 1924-27; Carruccio, 1971; Rademacher, 1983).

Tuttavia il suo interesse ci sembra investire di più il campo della Didattica della matematica, dato che in questa disciplina si è costretti a compiere analisi di tipo epistemologico. Pensiamo a campi come la formazione professionale degli insegnanti di Matematica e a ricerche legate all'apprendimento dell'infinito, affrontati da vari autori in contesto internazionale.

2. Richiami elementari sulla estensione analitica da N a Z a Q

L'idea di estensione analitica da un sistema numerico a un altro con il metodo del passaggio al quoziente è di solito attribuita a Hermann Hankel (1839-1873) (Enriques, 1924-27; Carruccio, 1971).

Da N a Z

Definiamo la relazione binaria $R_1 \subseteq N^2$ come segue:

$\forall$ a, b, c, d $\in$ N: (a, b) R_1 (c, d) $\Leftrightarrow$ a+d = b+c.

R_1 è di equivalenza (dimostrazione banale), dunque induce in N^2 una partizione in classi che permette di definire analiticamente Z nel modo seguente: $Z = N^2/R_1$. Gli elementi di Z sono classi di equivalenza del tipo [(a, b)] che si possono scrivere, per esempio, nella notazione usuale formale a–b con la quale si evidenzia che la sottrazione è interna a Z. Si è soliti parlare di «rappresentante» di [(a, b)]: si usa scegliere la coppia (r, s) $\in$ [(a, b)] che contiene almeno uno 0. Se a=b, la classe si denomina 0; se $a>b$ si parla di numeri interi positivi; se $a<b$ si parla d numeri interi negativi.

Da N a Q^a (razionali assoluti)

Indichiamo con N^+ l'insieme N privato dello 0. Definiamo la relazione binaria $R_2 \subseteq N \times N^+$ come segue: $\forall$ a, c $\in$ N, b, d $\in N^+$: (a, b) R_2 (c, d) $\Leftrightarrow$ ad=bc.

R_2 è di equivalenza (dimostrazione banale), dunque induce in $N \times N^+$ una partizione in classi che permette di definire analiticamente Q^a nel modo seguente: $Q^a = N \times N^+/R_2$. Gli elementi di Q^a sono classi di equivalenza del tipo [(a,b)] che si possono scrivere, per esempio, nella notazione usuale formale a/b (b≠0) con la quale si evidenzia che la divisione è interna a Q^a. Si è soliti parlare di «rappresentante» di [(a, b)]; si usa scegliere la coppia (r, s) $\in$ [(a, b)] (s≠0) in modo tale che il MCD di r e s valga 1.

4. Nel 1882, Ferdinand von Lindemann dimostrò che π è trascendente.

Da Z a Q

Indichiamo con Z_0 l'insieme Z privato dello zero. Definiamo la relazione $R_2' \subseteq Z \times Z_0$ (in modo analogo al paragrafo precedente) come segue: $\forall$ a, c $\in$ Z, b, d $\in$ Z_0: (a, b) R_2' (c, d) $\Leftrightarrow$ ad=bc.

R_2' è di equivalenza (dimostrazione banale), dunque induce in $Z \times Z_0$ una partizione in classi che permette di definire analiticamente Q nel modo seguente: $Q = Z \times Z_0 / R_2'$. Osservazioni analoghe alle precedenti andrebbero fatte sulla divisione come operazione interna a Q e sul «rappresentante».

Si noti come $|N|=|Z|=|Q^a|=|Q|$. D'altra parte una costruzione analitica non fa altro che ridistribuire con ordine diverso le infinite numerabili classi [(a, b)] a sua volta costituite da una infinità numerabile di coppie (a, b), di N e di Z, in ordine diverso.

3. Da Q all'insieme R_{AR} sottoinsieme di R_A

Seguendo questa linea analitica è possibile costruire un insieme che chiameremo insieme dei reali algebrici radicali e che indicheremo con R_{AR}, sottoinsieme dell'insieme R_A dei reali algebrici, con un procedimento del tutto analogo.

Da Q^a a R_{AR}^+ (reali algebrici radicali positivi o nulli)

Siano a, b, c, d, m, n, p, q $\in$ N, con b≠0, d≠0, m≠0, p≠0, n≥1, q≥1;

poniamo: $(\frac{a}{b}, \frac{m}{n})\ R_3 \left(\frac{c}{d}, \frac{p}{q}\right) \Leftrightarrow (\frac{a}{b})^{mq} = (\frac{c}{d})^{np}$.

Teorema: R_3 è di equivalenza.

Dimostrazione.

R_3 è riflessiva.

$(\frac{a}{b}, \frac{m}{n})\ R_3 (\frac{a}{b}, \frac{m}{n})$; infatti: $(\frac{a}{b})^{mn} = (\frac{a}{b})^{mn}$.

R_3 è simmetrica.

$(\frac{a}{b}, \frac{m}{n})\ R_3 \left(\frac{c}{d}, \frac{p}{q}\right) \Rightarrow \left(\frac{c}{d}, \frac{p}{q}\right) R_3\ (\frac{a}{b}, \frac{m}{n})$; infatti: $(\frac{a}{b})^{mq} = (\frac{c}{d})^{np} \Rightarrow (\frac{c}{d})^{np} = (\frac{a}{b})^{mq}$.

R_3 è transitiva.

$\{[(\frac{a}{b}, \frac{m}{n})\ R_3 \left(\frac{c}{d}, \frac{p}{q}\right)] \wedge [\left(\frac{c}{d}, \frac{p}{q}\right) R_3\ (\frac{e}{f}, \frac{r}{s})]\} \Rightarrow (\frac{a}{b}, \frac{m}{n})\ R_3\ (\frac{e}{f}, \frac{r}{s})$;

infatti: $\{[(\frac{a}{b})^{mq} = (\frac{c}{d})^{pn}] \wedge [(\frac{c}{d})^{ps} = (\frac{e}{f})^{rq}]\} \Rightarrow [(\frac{a}{b})^{ms} = (\frac{e}{f})^{rn}]$,

poiché: $\{[(\frac{a}{b})^{mqs} = (\frac{c}{d})^{psn}] \wedge [(\frac{c}{d})^{pns} = (\frac{e}{f})^{nrq}]\} \Rightarrow [(\frac{a}{b})^{mqs} = (\frac{e}{f})^{rnq}]$,

da cui la tesi, con l'introduzione di numeri razionali assoluti generici e, f, r, s con f≠0, r≠0 e s≥1. Gli elementi di R_{AR}^+ sono classi di equivalenza del tipo $[(\frac{a}{b}, \frac{m}{n})]$ che si possono scrivere, per esempio, nella notazione $(\frac{a}{b})^{\frac{m}{n}}$ oppure $\sqrt[n]{(\frac{a}{b})^m}$.

Avendo posto n, q≥1, si deve porre che la radice 1-esima sia l'identità: $\sqrt[1]{a} = a$.

Notiamo che ogni numero razionale è elemento di R_{AR}, cioè: $Q \subset R_{AR}$. Infatti, qualsiasi razionale $\frac{h}{k}$ (h, k ∈ Z, k≠0) è esprimibile nella forma $(\frac{h}{k})^1$.

Una banale estensione ci permette di costruire analiticamente il passaggio da Q a R_{AR} senza più alcuna restrizione; nella scrittura $(\frac{a}{b}, \frac{m}{n})$ per i numeri interi *a*, *b*, *m*, *n* si devono porre le seguenti restrizioni supplementari: $n > 1$, $(\frac{a}{b})^m \geq 0$.

Quanto mostrato precedentemente ribadisce in altra forma il teorema di Cantor secondo cui R_{AR} è numerabile.

Osserviamo che ogni elemento $\sqrt[n]{(\frac{a}{b})^m}$ di R_{AR} è radice di un'equazione algebrica a coefficienti interi, per esempio $b^m x^n = a^m$, a conferma del fatto che $R_{AR} \subseteq R_A$.

Le operazioni razionali (addizione, sottrazione, divisione, moltiplicazione), l'elevamento a potenza, l'estrazione di radice n-esima sembrano tutte definibili in R_{AR} ma in realtà non sono interne a R_{AR}.

Per esempio, l'addizione di due numeri reali algebrici radicali non dà come somma in generale un numero reale algebrico radicale, ma un numero reale algebrico. D'altronde tutti i numeri reali algebrici radicali sono reali algebrici.

Si ha quindi: $R_{AR} \subset R_A$.

4. Alcune note

1. $Q \subset R_{AR}$; basta porre nelle scritture precedenti: n=1.
2. $R_T \cap R_A = \varnothing$, dunque a maggior ragione: $R_T \cap R_{AR} = \varnothing$; $R_T \cup R_A = R$; $R_T \cup R_{AR} \subset R$.
3. R_{AR} è totalmente ordinato e denso.
4. Né R_{AR} né R_A sono continui, a causa, per esempio, del già citato teorema di Lindemann.
5. Si può effettuare su R_A il procedimento delle sezioni di Dedekind, usualmente effettuato su Q, riottenendo tutto R.

5. Conclusione

Affermare dunque che si può passare da Q a R con un ampliamento analitico introducendo l'operazione di estrazione radice è un errore; passando al quoziente ampliando Q con l'operazione di estrazione di radice, non solo non si giunge a R, il che è piuttosto intuitivo, ma non si giunge neppure a R_A che ha la stessa potenza di Q, bensì a un insieme R_{AR}, sottoinsieme stretto di R_A.

6. Ringraziamenti

Gli autori ringraziano i colleghi professori Gianfranco Arrigo, Paolo Hägler, Paolo Negrini e Carlos Vasco U. per letture critiche e suggerimenti che hanno gentilmente e generosamente accettato di fare a versioni precedenti di questo articolo.

Una construcción analítica de un subconjunto de los números reales algebraicos a partir del conjunto de los números racionales.

Un tema típico de las «Matemáticas elementales desde un punto de vista superior», útil para reflexiones sobra la Didáctica de la matemática.

Versión española

1. Premisa

En más de una ocasión hemos escuchado decir en diferentes circunstancias: cursos, seminarios o conferencias, y también lo hemos leído en notas, en manuales y en textos, que:

– así como se extiende **N** a **Z** (para poder hacer que la sustracción sea una operación interna) de forma «analítica», es decir con un oportuno pasaje al «conjunto cociente» (véase más adelante), se extiende **Z** a **Q** (para poder hacer que la división sea una operación interna) de forma «analítica» (véase más adelante), y que se puede extender igualmente **Q** a **R** de forma «analítica» para que la extracción de la raíz sea una operación interna.

Esta afirmación es doblemente falsa.

1. En una extensión analítica no cambia la cardinalidad del conjunto. Dado que un conocido teorema de Georg Cantor (1845-1918) muestra, usando el método de la «diagonalización»,[5] que el conjunto de los reales comprendido entre 0 y 1 (por tanto todo **R**) no es numerable, se puede afirmar que $|\mathbf{Q}|<|\mathbf{R}|$ (**Q** tiene la misma potencia que N, **R** la del continuo).
2. Por otra parte, R contiene los reales algébricos ($\mathbf{R}_A$) y los reales trascendentes ($\mathbf{R}_T$); otro famosos teorema de Cantor muestra que $\mathbf{R}_A$ es numerable. Por tanto, sí una extensión analítica de **Q** es posible, no es a todo **R**.

Recordemos que:

D1 los números reales algébricos son raíces de ecuaciones algébricas con coeficientes enteros;

D2 un número real trascendente t se caracteriza por el hecho de que no existe ninguna ecuación algébrica que le tenga como raíz[6].

El presente trabajo se inserta, en nuestra opinión, en la línea de las reflexiones sobre las «Matemáticas elementales desde un punto de vista superior», entendido a la manera de Félix Klein (1849-1925). Véase el trabajo original de Klein (1908-1909) o al menos una de sus numerosas interpretaciones (Enriques, 1924-27; Carruccio, 1971; Rademacher, 1983). Sin embargo, el interés del trabajo está centrado en el campo de la Didáctica de la matemática, dado que en esta disciplina estamos obli-

5. Expuesto por primera vez en 1891 en la revista: *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*.

gados a hacer, entre otros, análisis de tipo epistemológico. Pensemos, por ejemplo, en campos como la formación profesional de los docentes de Matemática y en las investigaciones relacionadas con el aprendizaje del infinito, aspectos afrontados por varios autores en el contexto internacional.

2. Reflexiones elementales sobre la extensión analítica de N a Z y de N a Q

La idea de extensión analítica de un sistema numérico a otro por el método del paso al conjunto cociente se atribuye a Hermann Hankel (1839-1873) (Enriques, 1924-27; Carruccio, 1971).

De N a Z

Definimos la relación binaria $R_1 \subseteq N\times N$ como sigue:

$\forall$ a, b, c, d $\in$ N: (a, b) R_1 (c, d) $\Leftrightarrow$ a+d = b+c.

R_1 es de equivalencia (demostración banal), por tanto induce en N^2 una partición en clases que permite definir analíticamente Z de la siguiente forma: $Z = N^2/R_1$. Los elementos de Z son clases de equivalencia del tipo [(a, b)] que se pueden escribir, por ejemplo, en la notación usual a-b, con la cual se evidencia que la sustracción es interna a Z. Por lo general, se habla de «representante» de [(a, b)] y usualmente se elige el par (r, s) $\in$ [(a, b)] que contiene al menos un 0. Si a=b, la clase se denomina 0; si $a>b$ se habla de números enteros positivos; si $a<b$ se habla de números enteros negativos.

Da N a Q^a (racionales absolutos)

Indicamos con N^+ el conjunto N sin el 0. Definimos la relación binaria $R_2 \subseteq N\times N^+$ como sigue: $\forall$ a, c $\in$ N, b, d $\in N^+$: (a, b) R_2 (c, d) $\Leftrightarrow$ ad=bc.

R_2 es de equivalencia (demostración banal), por lo tanto induce en $N\times N^+$ una partición en clases que permite definir analíticamente Q^a de la siguiente manera: $Q^a = N\times N^+/R_2$. Los elementos de Q^a son clases de equivalencia del tipo [(a, b)] que se pueden escribir, por ejemplo, en la notación usual formal a/b ($b\neq 0$), con la cual se evidencia que la división es interna a Q^a. Por lo general, se habla de «representante» de [(a, b)] y usualmente se elige el par (r, s) $\in$ [(a, b)] ($s\neq 0$) de forma tal que el MCD de r y s sea 1.

Indicamos con Z_0 el conjunto Z sin el cero. Definimos la relación $R_2' \subseteq Z\times Z_0$ (de forma análoga al parágrafo precedente) como sigue: $\forall$ a, c $\in$ Z, b, d $\in Z_0$: (a, b) R_2' (c, d) $\Leftrightarrow$ ad=bc. R_2' es de equivalencia (demostración banal), por lo tanto se induce en $Z\times Z_0$ una partición en clases que permite definir analíticamente Q de la siguiente manera: $Q = Z\times Z_0/R_2'$. Observaciones análogas a las precedentes deberían hacerse sobre la división como operación interna en Q y sobre el «representante».

Nótese que $|N|=|Z|=|Q^a|=|Q|$. Por otra parte una construcción analítica no hace otra cosa que redistribuir con orden diverso las infinitas clases numerables [(a, b)], a su vez constituidas por infinitos pares numerables (a, b), de N y de Z, en diverso orden.

6. En 1882, Ferdinand von Lindemann demostró que π es trascendente.

3. De Q al conjunto R_{AR} subconjunto de R_A

Siguiendo esta línea analítica es posible construir un conjunto que llamaremos conjunto de los reales algébricos radicales y que indicaremos con R_{AR}, subconjunto del conjunto R_A de los reales algébricos, con un procedimiento análogo.

De Q^a a R_{AR}^+ (reales algébricos radicales positivos o nulos)

Sean a, b, c, d, m, n, p, q ∈ N, con b≠0, d≠0, m≠0, p≠0, n≥1, q≥1;

establecemos: $(\frac{a}{b}, \frac{m}{n})\ R_3 \left(\frac{c}{d}, \frac{p}{q}\right) \Leftrightarrow (\frac{a}{b})^{mq} = (\frac{c}{d})^{np}$.

Teorema: R_3 es de equivalencia.

Demostración.

R_3 es reflexiva.

$(\frac{a}{b}, \frac{m}{n})\ R_3 (\frac{a}{b}, \frac{m}{n})$; de hecho: $(\frac{a}{b})^{mn} = (\frac{a}{b})^{mn}$.

R_3 es simétrica.

$(\frac{a}{b}, \frac{m}{n})\ R_3 \left(\frac{c}{d}, \frac{p}{q}\right) \Rightarrow \left(\frac{c}{d}, \frac{p}{q}\right) R_3\ (\frac{a}{b}, \frac{m}{n})$; de hecho: $(\frac{a}{b})^{mq} = (\frac{c}{d})^{np} \Rightarrow (\frac{c}{d})^{np} = (\frac{a}{b})$.

R_3 es transitiva.

$\{[(\frac{a}{b}, \frac{m}{n})\ R_3 \left(\frac{c}{d}, \frac{p}{q}\right)] \wedge [\left(\frac{c}{d}, \frac{p}{q}\right) R_3\ (\frac{e}{f}, \frac{r}{s})]\} \Rightarrow (\frac{a}{b}, \frac{m}{n})\ R_3\ (\frac{e}{f}, \frac{r}{s})$;

de hecho: $\{[(\frac{a}{b})^{mq} = (\frac{c}{d})^{pn}] \wedge [(\frac{c}{d})^{ps} = (\frac{e}{f})^{rq}]\} \Rightarrow [(\frac{a}{b})^{ms} = (\frac{e}{f})^{rn}]$,

dado que: $\{[(\frac{a}{b})^{mqs} = (\frac{c}{d})^{psn}] \wedge [(\frac{c}{d})^{pns} = (\frac{e}{f})^{nrq}]\} \Rightarrow [(\frac{a}{b})^{mqs} = (\frac{e}{f})^{rnq}]$,

de donde la tesis, con la introducción de números racionales absolutos genérico e, f, r, s con f≠0, r≠0 e s≥1. Los elementos de R_{AR}^+ son clases de equivalencia del tipo $[(\frac{a}{b}, \frac{m}{n})]$ que se pueden escribir, con la notación $(\frac{a}{b})^{\frac{m}{n}}$ o también $\sqrt[n]{(\frac{a}{b})^m}$.

Teniendo fijado n, q≥1, se debe establecer que la raíz 1-ésima sea la identidad $\sqrt[1]{a} = a$.

Notemos que cada número racional es elemento de R_{AR}, es decir: $Q \subset R_{AR}$. De hecho, todo racional $\frac{h}{k}$ (h, k ∈ Z, k≠0) se puede expresar de la forma $(\frac{h}{k})^1$.

Una banal extensión nos permite construir analíticamente el pasaje de Q a R_{AR} sin ninguna restricción; en la escritura $(\frac{a}{b}, \frac{m}{n})$ para los números a, b, m, n se deben dar las siguientes restricciones suplementarias: $n > 1$, $(\frac{a}{b})^m \geq 0$.

Lo demostrado anteriormente refuerza de otra forma el teorema de Cantor, según el cual R_{AR} es numerable.

Observamos que cada elemento $\sqrt[n]{(\frac{a}{b})^m}$ de R_{AR} es raíz de una ecuación algébrica con coeficientes enteros, por ejemplo $b^m x^n = a^m$, confirmando que $R_{AR} \subseteq R_A$.

Las operaciones racionales (adición, sustracción, división, multiplicación), la elevación a potencia, y la extracción de raíz n-ésima parecen todas definibles en R_{AR} pero en realidad no son internas a este conjunto. Por ejemplo, la adición de dos números reales algébricos radicales no da como suma, en general, un número real algébrico radical, sino un número real algébrico.

Se tiene entonces: $R_{AR} \subset R_A$..

4. Algunas notas

1. $Q \subset R_{AR}$; basta poner en la escritura precedente: n=1
2. $R_T \cap R_A = \varnothing$, por lo tanto con mayor razón: $R_T \cap R_{AR} = \varnothing$; $R_T \cup R_A = R$; $R_T \cup R_{AR} \subset R$.
3. R_{AR} es totalmente ordenado y denso.
4. Ni R_{AR} ni R_A son continuos, a causa, por ejemplo, del ya citado teorema de Lindemann.
5. Se puede efectuar en R_A el procedimiento de las cortaduras de Dedekind, usualmente efectuado en Q, re-obteniendo todo R.

5. Conclusión

Afirmar que se puede pasar de Q a R con una ampliación analítica introduciendo la operación de extracción de raíz es un error. Al pasar al conjunto cociente ampliando Q con la operación de extracción de raíz, no sólo no se obtiene R, lo que es por demás intuitivo, sino que ni tan solo se llega a R_{A}, que tiene la misma potencia que Q, sino a un conjunto R_{AR}, subconjunto proprio de R_A.

6. Agradecimientos

Los autores agradecen a los colegas profesores Gianfranco Arrigo, Paolo Hägler, Vicenç Font Moll, Paolo Negrini e Carlos Vasco U. por la lectura crítica y sugerencias que gentil y generosamente aceptaron hacer a versiones precedentes de este artículo.

Riferimenti bibliografici – Referencias bibliográficas

Carruccio, E. (1971). *Matematiche elementari da un punto di vista superiore*. Compilado por D'Amore. Bologna: Pitagora.

Enriques, F. (1924-27). *Questioni riguardanti le matematiche elementari*. Bologna: Zanichelli.

Klein, F. (1908-1909). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*. (3 Bände). Leipzig: B. G. Teubner. [Berlín: Springer, 1928.

Rademacher, H. (1983). *Higher mathematics from an elementary point of view*. Compilado por D. Goldfeld. Con notas de G. Crane. Bostón, Mass.: Birkhäuser.

1. La risoluzione dei problemi matematici: strategie e rappresentazioni spontanee in evoluzione[1]

Annarita Monaco

This work aims at studying representations and spontaneous strategies developed by fifth-year primary school children, who have to solve challenging problems by co-operating in small groups. The children were made to read, analyze and solve problems which were considered the most difficult for such an age group, which is the so-called zone proximal development. The teacher's role was that of observer-director who intrudes as little as possible in the decisive processes of his pupils.

Una grande scoperta risolve un grande problema, ma nella risoluzione di qualsiasi problema c'è un pizzico di scoperta. Il tuo problema può essere modesto, ma se stimola la tua curiosità, tira in ballo la tua inventiva e risolvilo con i tuoi mezzi; puoi sperimentare la tensione e gioire del trionfo della scoperta. (George Polya)

Introduzione
Alla ricerca di un *ambiente* matematico

In molte occasioni, gran parte del tempo, nelle ore di matematica della scuola primaria, è dedicato ad attività che vedono i bambini impegnati:

- nell'ascolto delle spiegazioni degli insegnanti, ai quali generalmente pongono domande e chiedono chiarimenti;
- nell'esecuzione di esercizi, di molti esercizi -soprattutto scritti- che permettono il consolidamento e la verifica dell'acquisizione di regole e tecniche apprese;
- nella risoluzione di problemi che, per lo più, non sono realmente tali, perché non mettono in gioco le componenti strategiche e creative. Pertanto si convertono in *esercizi*.

Gli stessi libri di testo contengono pagine di problemi già classificati come *di addizione, di sottrazione, con le frazioni, con dati carenti o sovrabbondanti*, *impossibili*, per i quali non appare necessario alcun atto strategico o creativo dell'alunno, che già possiede l'itinerario risolutivo.

Eppure, nelle «Indicazioni nazionali per il curricolo del 2012», si legge: *La matematica (…) contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare*

1. Articolo dedotto dalla tesi di laurea in Psicologia ottenuta all'Università Sapienza di Roma. Relatore: prof.ssa Franca Rossi. Correlatore: prof.ssa Francesca Federico.

e di discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri. E ancora: *In matematica (...) è elemento fondamentale il laboratorio (...) come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive*. Continuiamo con la lettura: *Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola. Stimolato dalla guida dell'insegnante e dalla discussione con i pari, l'alunno imparerà ad affrontare con fiducia e determinazione situazioni problematiche, rappresentandole in diversi modi, conducendo le esplorazioni opportune, dedicando il tempo necessario alla precisa individuazione di ciò che è noto e di ciò che si intende trovare, congetturando soluzioni e risultati, individuando possibili strategie risolutive*.

Ma quanto, di ciò che è scritto nelle «Indicazioni nazionali per la scuola primaria», è presente nelle nostre aule scolastiche? È mia convinzione che in aula si dia troppo poco spazio ai pensieri, alle parole, alle rappresentazioni dei bambini, sostituendo l'ascolto dei loro ragionamenti con le nostre precoci spiegazioni di adulti esperti. Ma sono ancora altre le difficoltà che limitano i tempi per far discutere i bambini tra loro:

- il timore di non riuscire a trasmettere tutti i contenuti previsti o attesi;
- l'ansia di voler ricevere le risposte giuste in tempi brevi;
- la difficoltà di gestire problemi che mettono in gioco capacità strategiche.

L'insegnante, dunque, spesso propone ai suoi alunni ciò che sa di poter controllare e gestire, ed esclude tutto ciò che permetterebbe loro di sperimentare *al buio*. La mente di un bambino, però, può riuscire ad accogliere, gestire e risolvere problemi di fronte ai quali un adulto può avvertire difficoltà concettuali e strategiche, se si creano in aula situazioni *ad hoc* e se non lo si lascia solo, creando situazioni collaborative che permettono la costruzione condivisa di conoscenza (Pontecorvo, 1993).

Nelle ore di matematica manca ancora spesso un *ambiente* dove si abbia il tempo e il modo di leggere con attenzione, analizzare, rappresentare in modalità spontanee, confrontarsi, escludere o scegliere sulla base di argomentazioni. Fare tutto ciò in piccolo gruppo rappresenta un momento importante per un bambino: è un'esperienza che lo rende più forte nella situazioni di sfida, quando si richiede la messa in campo di un atteggiamento positivo di ricerca e di cura del processo. Pensiamo a quando i bambini si trovano ad affrontare i giochi matematici organizzati dalle varie Università – per esempio i Giochi del Mediterraneo dell'Università di Palermo; i Giochi di Primavera e di Autunno dell'Università Bocconi di Milano, i quesiti del Rally transalpino della matematica ecc. Tali giochi riescono spesso a mettere in crisi anche gli allievi considerati *molto competenti* e, a volte, i docenti stessi.

In risposta a questo disagio – ma è solo un esempio – due possono essere le reazioni dell'insegnante:

– rinunciare a prendere in carico e ad affrontare questa impasse cognitiva, accantonandola o negandola;
– mettersi in discussione e attivarsi, per capire quali cambiamenti siano necessari nella propria modalità di insegnamento, con il fine di garantire un reale e significativo apprendimento matematico dei nostri alunni.

Scegliendo questa seconda strada, per esempio, ci si potrebbe chiedere: perché l'alunno sbaglia? Non ha costruito il concetto? Non sa usare il concetto, pur appreso, in una situazione nuova? Non sa gestire i cambi di rappresentazione semiotica che spesso un compito di matematica richiede? (Fandiño Pinilla, 2008). Se un docente vuole comprendere quali sono le motivazioni di un insuccesso, deve effettuare un'attenta analisi per arrivare a determinare la causa dell'errore e non banalmente considerare l'errore (Zan, 2007).

Questo lavoro vuole essere un piccolo passo esplorativo e conoscitivo, che parte dai pensieri e dagli atti dei bambini, espressi in un clima di dialogo, di ascolto, di confronto e mira a capire come si può costruire un risultato (prodotto) a più mani e a più voci, facendo particolare attenzione al processo.

1. Apprendimento matematico: strategie, rappresentazioni e comunicazione

1.1. Le diverse componenti dell'apprendimento matematico

L'apprendimento matematico si presenta come un fattore multiplo, ricco di mille aspetti. In matematica, infatti, non basta aver costruito un concetto, ma occorre saperlo usare per effettuare calcoli o dare risposta ad esercizi, combinarlo con altri e con strategie opportune per risolvere problemi, occorre saper spiegare a sé stessi e agli altri il concetto costruito e la strategia seguita, ma anche far uso sapiente delle trasformazioni semiotiche che permettono di passare da una rappresentazione all'altra (Fandiño Pinilla, 2008, p. 11).

L'apprendimento della matematica comprende almeno cinque tipologie di apprendimenti distinti:
– apprendimento concettuale (noetica);
– apprendimento algoritmico (calcolare, operare,…);
– apprendimento di strategie (risolvere, congetturare,…);
– apprendimento comunicativo (argomentare, validare, dimostrare,…);
– apprendimento e gestione delle trasformazioni semiotiche (di trattamento e di conversione).

(Ibidem, p. 13).

Ci occupiamo degli apprendimenti strategico e comunicativo, poco valorizzati in aula.

Le ore di matematica sono caratterizzate dalla presenza di molte attività attinenti l'apprendimento di regole, tecniche, simboli e formule che gli alunni devono imparare e successivamente saper applicare. Dopo, l'alunno può fare qualcosa di molto importante: può pensare. Deve, cioè, combinare le regole apprese in una varietà di nuove regole di ordine superiore. Risolve problemi mai incontrati, arricchendo così il suo patrimonio di capacità. Il problem solving consiste perciò nell'acquisizione di nuove idee che moltiplicano l'applicabilità di regole già apprese e non è quindi costruito sul vuoto. La condizione più importante per incoraggiare il soggetto a pensare è assicurarsi che egli abbia già qualcosa su cui pensare. L'apprendimento mediante problem solving conduce a nuove capacità di ulteriore pensiero (Gagné, 1976, in: D'Amore, 2014).

La parte più importante del processo si svolge all'interno del soggetto. La risoluzione può essere guidata da una maggiore o minore quantità di comunicazione verbale, proveniente dall'esterno, ma le variabili essenziali sono interne. Durante questo processo di pensiero, egli proverà un certo numero di ipotesi verificando la loro applicabilità. Quando trova una combinazione particolare di regole che si adatta alla situazione, egli non ha solo «risolto il problema», ma ha anche appreso qualcosa di nuovo. La risoluzione dei problemi, dunque, è una condizione ottimale per l'apprendimento. L'azione risolutiva deve situarsi nella zona di sviluppo potenziale, meglio se in quella prossimale; non nella zona di sviluppo effettivo, cioè delle conoscenze già acquisite, altrimenti si perde il diritto di chiamarlo *problema* e si dovrebbe chiamarlo *esercizio* (D'Amore, 2014, p. 181). È bene potenziare e dare importanza a procedimenti e strategie che si usano, al fine di convincere gli allievi che quel che conta sono i processi più che i prodotti. Parecchi autori hanno messo in evidenza come le motivazioni siano determinanti per spingere i bambini ad apprendere e, tra di esse, cruciale è la gratificazione sociale di essere considerato un buon risolutore di problemi: questa motivazione, indotta dalle considerazioni di insegnanti, genitori e compagni, attiva la volizione, cioè il voler fare, il volersi impegnare (D'Amore, 2003). L'essere umano è storicamente teso a risolvere problemi. Questo tipo di apprendimento è il più elevato e induce nell'individuo un nuovo abito mentale.

È bene valorizzare il lavoro matematico degli allievi, privilegiando, come già si diceva, il processo più che il prodotto e dando importanza a ciascuno dei passi effettuati nel processo di risoluzione dei problemi. È fondamentale considerare le differenti strategie che i bambini usano per risolvere un problema, sondare il grado di comprensione chiedendo loro di spiegare il proprio ragionamento, per iscritto o oralmente, invitarli a confrontare il proprio processo con quello di un compagno. Ciò mette in stretto contatto l'atteggiamento strategico con quello comunicativo.

L'apprendimento comunicativo mette in evidenza la capacità degli allievi di esprimere idee matematiche, giustificando, validando, argomentando, dimostrando e facendo uso di figure, disegni o schemi per comunicare. Saper comunicare in matematica è un traguardo cognitivo specifico che per tanto tempo è stato sottaciuto e dato per scontato (Ibidem, p. 95). Imparare a comunicare è diventata una priorità del curricolo scolastico; molti studiosi affermano oggi che la comunicazione è una delle principali competenze da sviluppare negli allievi. Ciononostante si incontrano ancora parecchie difficoltà a prendere in considerazione il ruolo della comunicazione nelle ore di matematica. Una delle difficoltà deriva dal fatto che molti insegnanti delle nostre scuole appartengono a quelle generazioni che concepivano l'insegnamento della matematica secondo il modello che considera l'allievo un soggetto che impara «solo» (Radford e Demers, 2006).

Come si può concettualizzare la comunicazione? Le diverse teorie contemporanee in educazione matematica convergono sul seguente punto: la comunicazione è una forma di apprendimento. Alcuni approcci socio-costruttivisti e interazionisti concepiscono l'apprendimento come una negoziazione concettuale alla quale prendono parte allievi e insegnanti, interagendo tra loro nel processo di insegnamento apprendimento. Queste teorie danno molta più importanza alla comunicazione d'aula di quanto faccia l'insegnamento tradizionale che, invece, confina spesso l'allievo nell'isolamento del lavoro individuale. Allo stesso modo, gli approcci ispirati ai lavori di Lev Vygotskij mettono l'accento sul ruolo dei pari; si parla di «collaborazione fra pari». La collaborazione si svolge all'interno di un'attività spesso strutturata in tappe.

Tale attività è caratterizzata da uno scopo globale (nel nostro caso il contenuto dell'apprendimento) che è raggiunto mediante strumenti culturali (simboli, oggetti…) che mediano l'attività stessa (cioè che fanno da supporto e permettono di condurla a termine) (Ibidem, p.11). Le comunicazioni efficaci sono quelle che offrono occasioni di scambio e riflessioni fra allievi e tra allievi e insegnanti, sollecitando l'analisi critica della pertinenza e dell'esattezza dei ragionamenti utilizzati. Per essere efficace, però, la comunicazione deve favorire l'uso di argomentazioni e ragionamenti matematici relativi ai concetti da costruire.

La comunicazione, dunque, non è semplicemente accessoria all'apprendimento; essa è concepita, al contrario, come parte integrante del cammino graduale che permette all'allievo di afferrare e di assimilare i concetti matematici all'interno dei processi sociali di produzione di senso. Se la partecipazione alla comunicazione in aula sollecita l'allievo a mobilitare forme di ragionamento e di argomentazione appropriate, sollecita ad inserirsi in processi sociali di produzione di senso e ad adottare comportamenti discorsivi di natura sociale (come il saper ascoltare), la comunicazione può essere considerata come una competenza che gli allievi sviluppano progressivamente (Ibidem, pp. 14-15). Radford e Demers (2006) si interrogano su quali possano essere le condizioni più adatte affinché gli alunni si impegnino nell'attività discorsiva e nella produzione di adeguati argomenti matematici.

Tra gli obiettivi chiave troviamo:

- *ascoltare le proposte dei compagni relative alla matematica;*
- *interpretare le argomentazioni matematiche dei compagni;*
- *valutare criticamente gli argomenti degli altri;*
- *confutare un argomento errato;*
- *presentare giustificazioni matematiche a sostegno degli argomenti scelti, utilizzando diversi sistemi di segni* (Ibidem, p. 25).

1.2. Primo piano sul processo risolutivo.

Nella pratica creativa matematica l'atto di intuizione è preponderante; così accade anche nel corso della risoluzione di un problema. Secondo Glaeser (1975, in D'Amore, 2014, p.212) ci sono cinque fasi che costituiscono un processo euristico:

- la *preparazione*, nella quale gioca un ruolo essenziale la motivazione: l'insegnante favorisce l'implicazione attiva del bambino proponendogli o facendo emergere una situazione problematica interessante;
- l'*incubazione*: sono i primi tentativi di analisi, a volte impliciti, che il bambino mette in atto; per esempio, ripete il problema, si costruisce rappresentazioni del fatto descritto;

- il *bricolage* (è la fase delle prime timide ipotesi: «E se…», con le quali entra in contatto diretto con il problema, studiandolo da varie angolazioni e facendolo proprio). Incubazione e bricolage sono fasi intimamente connesse e non rigidamente divise;
- l'*ispirazione o eureka*: può essere il momento finale, nel caso in cui il bambino fornisca la risposta finale o un' illuminazione significativa del processo di risoluzione; è il momento di massima attività, di più forte coinvolgimento emotivo;
- *la verifica e la redazione:* si tratta di un'attività esplicita, se l'insegnante ha abituato il bambino a questa fase, oppure semplicemente un controllo mentale, anche rapido, di coerenza tra la soluzione trovata e il problema proposto (D'Amore, 2014).

Uno dei principali approcci al problem solving elaborati dagli psicologi è certamente quello gestaltista: se una persona tenta liberamente di descrivere le proprie sensazioni, le proprie impressioni, le intuizioni che accompagnano un'attività mentale qualsiasi (tra le altre, la risoluzione dei problemi), ci si accorge che il pensiero non scorre lineare da una fase all'altra, ma si crea una vasta rete molto complessa di percezioni, pensieri, atteggiamenti. Gli psicologi che si identificano con l'idea della Gestalt (Kohler, Koffka, Wertheimer) riconoscono il fatto che la mente umana non si limita a entrare in contatto o a prendere atto di quel che si presenta, ma interpreta eventi, fenomeni, atti, oggetti, forme, a partire dalla semplice percezione, fino ad arrivare alla risoluzione di un problema (di qualsiasi tipo, non solo matematico), attività quest'ultima che i gestaltisti considerano come espressione tipica e più elevata dell'intelligenza umana. Molti psicologi si sono domandati, nel tempo, se ci fosse un procedimento graduale che è possibile seguire nella mente di colui che risolve un problema. Il gestaltista Max Wertheimer, nel suo saggio *Il pensiero produttivo* scritto nel 1943, ci illumina sul processo dinamico del pensiero, di fronte a una situazione problematica. Egli sostiene che, in questi casi, la mente può produrre un'improvvisa intuizione e illuminazione, che chiama *insight.*

L'attenzione della ricerca sul problem solving si è concentrata sui metodi risolutivi, sia in educazione matematica che in altri contesti. È proprio attraverso il processo risolutivo che si esprime il pensiero «produttivo» che caratterizza il problem solving.

Nell'ambito dell'educazione matematica i primi studi sistematici sui metodi risolutivi sono dovuti al matematico ungherese George Polya (1945). L'autore si è posto un obiettivo didattico: insegnare a risolvere problemi. Per far questo egli ha assunto come modello quello del «bravo risolutore», il professionista della risoluzione di problemi, per esempio il matematico; ha analizzato i processi messi in atto da questi bravi risolutori, tentando di evidenziare quali sono i metodi risolutivi che essi impiegano, nella convinzione di poterli insegnare. Lo studio di tali metodi risolutivi è chiamato da Polya *euristica*. L'euristica è lo studio dei metodi e delle leggi di invenzione e di scoperta (Zan, 2007, p. 149).

Secondo Polya, l'euristica moderna consente la comprensione del processo di risoluzione dei problemi, soprattutto per quanto concerne le operazioni mentali tipiche di esso. Tali operazioni possono essere stimolate da alcune domande chiave che il bravo solutore di problemi pone a sé stesso in modo naturale e spontaneo. Ha distinto *quattro fasi*, tipiche della risoluzione di un problema:

– *fase 1*: si deve comprendere il problema;
– *fase 2*: si devono scoprire i legami che ci sono tra le varie informazioni, fra ciò che si cerca e i dati, per compilare un piano di soluzione;
– *fase 3*: si procede allo sviluppo del piano;
– *fase 4*: si esamina attentamente il risultato e si procede alla verifica (Zan, 2007, p.153).

Secondo Polya, ad ogni fase il bravo solutore si pone in modo naturale alcune domande che, a loro volta, stimolano le operazioni mentali utili per la loro risoluzione, suggerendo quindi delle euristiche. I lavori di Polya hanno avuto un grande impatto nella ricerca sul problem solving in educazione matematica. Mostrano come i bravi risolutori siano caratterizzati dall'avere a disposizione non solo un buon bagaglio di conoscenze, ma anche un buon repertorio di strategie e di euristiche; alla stessa conclusione giungono gli studi di psicologia. Tuttavia i programmi finalizzati a insegnare a risolvere problemi attraverso l'acquisizione di un repertorio di euristiche specifiche si rivelano fallimentari: i soggetti così «addestrati» non sembrano essere in grado di generalizzare e trasferire le conoscenze apprese ad altre situazioni (Ibidem, p. 155).

Così si sposta l'attenzione sulle decisioni che il soggetto prende quando risolve un problema.

Nel contesto dell'educazione matematica, Schoenfeld (1985) ha usato il termine «decisioni strategiche» differenziando le decisioni *tattiche* da quelle *strategiche*. Le decisioni tattiche comprendono tutti gli algoritmi e la maggior parte delle euristiche (nel senso di Polya) quali:

– analizzare e comprendere un problema;
– fare un disegno o uno schizzo;
– pianificare una soluzione;
– esplorare;
– verificare una soluzione.

Le decisioni strategiche riguardano la gestione delle risorse durante il processo risolutivo: la gestione del tempo, la chiusura di un tentativo di soluzione e l'apertura di un altro, il ritenere chiusa la fase di comprensione e il passare alla fase di esplorazione. Le decisioni strategiche sono importanti ma non sono in genere oggetto di attenzione in classe. Schoenfeld (1983), per sottolineare meglio l'importanza delle decisioni strategiche all'interno di un comportamento risolutivo, propone di dividerlo in parti di comportamento coerente, che chiama *episodi*. Egli caratterizza i vari episodi in: lettura, analisi, esplorazione, pianificazione, implementazione, verifica, transizione.

I punti di decisione strategica si possono riconoscere nei passaggi da un episodio all'altro o nei punti in corrispondenza dei quali la direzione o la natura della soluzione cambia in modo significativo. Il confronto tra bravi e cattivi solutori mette in evidenza una differenza notevole della quantità e della qualità delle decisioni strategiche. In particolare, nei cattivi solutori la gestione del tempo appare inefficace; essi dedicano poco tempo alla comprensione del testo, riservando tutto quello che resta all'esplorazione, cioè a fare diversi tentativi tattici. I bravi solutori, invece, spendono la maggior parte del tempo a pensare piuttosto che a fare, ponendosi svariate domande del tipo: «Che sto facendo?». Inoltre un bravo solutore considera diversi approcci, molti dei quali sbagliati, ma non li porta mai fino in fondo (come fanno i cattivi solutori). Nel processo di risoluzione di un problema si possono riconoscere alcune decisioni cruciali, che corrispondono a processi di controllo: assicurarsi della perfetta comprensione del problema prima di intraprendere un piano d'azione, pianificare, mantenere il controllo di come procedono le cose durante la risoluzione (in particolare decidere cosa fare e quanto tempo riservare ai vari tentativi), distribuire bene le proprie risorse (Ibidem, p. 161).

1.3. Uso di rappresentazioni nella risoluzione di problemi

A questo punto, spostiamo l'attenzione sull'importanza della semiotica in matematica, più specificamente nel problem solving. Raymond Duval (1993) distingue due componenti fondamentali dell'apprendimento semiotico:

- scegliere i tratti distintivi che di un tal oggetto matematico cognitivamente costruito o in via di costruzione si vogliono rappresentare; scegliere il registro o i registri semiotici che si reputano adatti a tale rappresentazione; dare una rappresentazione semiotica in quel registro, o dare varie rappresentazioni semiotiche in uno o più dei registri scelti;
- una volta ottenuta una rappresentazione semiotica di un dato oggetto matematico, saperla trasformare in un'altra dello stesso registro (trattamento) o di un altro (conversione) in modo opportuno, senza perdere di vista il significato dell'oggetto di partenza.

Interpretando Polya (1945) con questa ottica molto più moderna, la variazione di un problema comporta quasi sempre una trasformazione semiotica. Queste attività si svolgono normalmente durante le lezioni di matematica, in ogni ordine scolastico, il più delle volte in modo inconscio. Troppo spesso è l'insegnante che opera le conversioni (per esempio tra i registri numerico e geometrico) e, ciò, se diventa abitudine didattica, non è positivo. Perché è l'allievo stesso che piano piano deve acquisire la capacità, l'abito mentale, di operare simili trasformazioni, di cambiare coscientemente registro, di compiere opportuni trattamenti. È necessario che gli insegnanti lavorino con convinzione in questa direzione: ne trae beneficio l'apprendimento e migliora decisamente l'immagine che gli allievi hanno della matematica (Arrigo, 2014, p. 87).

La formazione spontanea dei concetti matematici ha delle peculiarità che la ricerca ha ampiamente messo in evidenza. Gli individui, immersi in un mondo che propone continuamente nuove conoscenze, si trovano ad avere relazioni con gli oggetti matematici che, però, non essendo accessibili percettivamente, stante la loro natura astratta, possono essere conosciuti solamente grazie alle rappresentazioni semiotiche che l'essere umano fa di essi e che condivide con gli altri, in opportune comunità (Duval, 1993).

Un oggetto matematico emerge da un sistema di prassi dove sono manipolati oggetti materiali o linguistici; la loro rappresentazione si fa in diversi *registri semiotici:* registro orale, delle parole, delle espressioni pronunciate; registro gestuale; registro della scrittura e del disegno (grafici, formule, calcoli…) (Chevallard, 1991). L'oggetto matematico, dunque, sarebbe il risultato di prassi su oggetti materiali, all'interno di una comunità che stabilisce i codici e i registri semiotici di rappresentazione. Da un punto di vista didattico, l'oggetto matematico viene costruito quando si sanno scegliere le caratteristiche peculiari da rappresentare, si sa scegliere il registro semiotico più opportuno, si sanno operare le trasformazioni di trattamento e conversione, quando esse sono utili. Parlando di rappresentazioni semiotiche, Duval, in un suo scritto del 1996, afferma:

Le rappresentazioni semiotiche sono rappresentazioni la cui produzione non è possibile senza la mobilitazione di un sistema semiotico: così le rappresentazioni semiotiche possono essere produzioni discorsive (in lingua naturale o in lingua formale) o non discorsive (figure, grafici, schemi…). Questa produzione non risponde solo ad una funzione di comunicazione; può anche rispondere ad una funzione di oggettivazione (per sé stessi) e ad una funzione di trattamento.

Dobbiamo chiamare in causa: conoscenza per fini personale (oggettivazione); conoscenza per e da comunicare; conoscenza per rappresentare (D'Amore, Marazzani, 2008).

Le tre funzioni sembrano fondersi in una, se si pensa che il processo di oggettivazione è possibile solo grazie alla comunicazione (a sé stessi e ad altri) e che, in ogni caso, costruire conoscenza è compiere tutte e tre queste funzioni. Il termine oggettivazione è composto da due parole: ogget+tivazione (ibidem p. 295). La prima viene da «obiettare» che significa mettere qualcosa davanti a qualcuno in modo che lo possa percepire. I mezzi che si usano per mostrare l'oggetto sono quelli che si chiamano mezzi semiotici di oggettivazione: oggetti, artefatti, termini linguistici, in generale segni che si utilizzano per rendere visibile un'intenzione e per condurre a termine un'azione.

Quindi la funzione di oggettivazione esce dal mero uso personale, privato, e abbraccia la volontà di mostrare qualche cosa a qualcuno, presupponendo una volontà comunicativa (Radford, 2005).

Nella prassi comunicativa, se la trasformazione non porta ai risultati sperati, chi sta oggettivando convertirà la rappresentazione in un'altra nuova. In base a questa necessità comunicativa, chiunque si trovi in una situazione di insegnamento/apprendimento dalla parte dell'insegnare, deve necessariamente fare entrare i propri allievi in un processo di oggettivazione; sceglie, dunque, quali rappresentazioni, fra le tante possibili di un dato oggetto matematico, proporre a chi si trova dalla parte dell'apprendere. Tale scelta dovrebbe basarsi su quelle rappresentazioni semiotiche che il soggetto in fase di apprendimento è già in grado di riconoscere, di manipolare e gestire. Ma non possiamo credere che chi si trova in una fase di apprendimento sia privo di idee al riguardo. Se si pronuncia il nome di un oggetto a qualcuno a cui questo oggetto è ignoto, non bisogna credere che costui non sia in grado di farsi un'immagine di quell'oggetto. Egli si fa, in modo confuso, oppure incompleto, o solo parziale, in base alle proprie conoscenze ed esperienze, un'immagine che può essere figurale, oppure un suono, una parola,…(Fandiño Pinilla, D'Amore, 2006) perché, per sua natura, l'essere umano si forma spontaneamente immagini (mentali) di ciò con cui entra a contatto in forma sensibile (vista, udito, tatto, …). Per poter selezionare, quindi, le rappresentazioni da proporre all'allievo, per poter scegliere, cioè, i mezzi semiotici di oggettivazione, sembra necessario conoscere preventivamente quali sono le rappresentazioni semiotiche di cui gli allievi si possono servire spontaneamente per comunicare le proprie idee relativamente ad un oggetto della matematica (D'Amore, 1998). Occorre inoltre tener presente che è il contesto d'uso a prendere il sopravvento e a determinare le concezioni e le convinzioni. È in effetti l'uso che condiziona la significatività e quindi il valore di un contenuto (Sbaragli, 2003). Dal punto di vista del successo apprenditivo, ovviamente, gli oggetti costruiti sui contesti di uso sono personali, mentre nella visione pragmatista, basata su quella antropologica, si deve giungere a una visione cosiddetta «istituzionale». Stiamo evidenziando una sorta di complessa interazione tra la concettualizzazione dovuta al contesto d'uso, l'azione didattica e la costruzione concettuale (D'Amore e Marazzani, 2004).

Quando si parla di rappresentazioni spontanee si possono intendere due tipologie:

– *rappresentazioni spontanee del primo tipo*: sono quelle rappresentazioni che l'allievo sceglie fra tutte quelle che vengono proposte da altri (dagli insegnanti, per esempio) e condivise in una classe intesa come comunità di pratiche (Godino e Batanero, 1994; Radford, 1997; D'Amore, 2005);
– *rappresentazioni spontanee del secondo tipo*: sono quelle rappresentazioni che l'allievo propone come sue proprie rappresentazioni dell'oggetto; tali rappresentazioni possono aver origine scolastica (rielaborazione personale di idee emerse in aula, per esempio in situazioni ludiche o non didattiche o didattiche, oppure da contesti privati extrascolastici, di vita quotidiana). Esse dovrebbero essere intese come rappresentazioni scelte non sulla base della volontà di soddisfare le richieste dell'insegnante che spingono l'allievo a basarsi su quanto stabilito all'interno della classe (comunità di pratiche) nel corso di rappresentazioni specifiche di un oggetto, né sulla base di una libera scelta effettuata su una vasta gamma di rappresentazioni proposte sempre dall'insegnante. Le rappresentazioni di questo secondo tipo sono quelle dettate dalla volontà di comunicare all'esterno modelli interni dell'oggetto in questione che lo studente possiede già al momento della loro evocazione in aula, da parte dell'insegnante. Gli allievi, in questo caso, non conoscono le rappresentazioni condivise dalla comunità di pratiche (intesa in senso generale : la società, la noosfera, non solo la classe) e non possono riferirsi a rappresentazioni proposte dall'insegnante (quindi alla classe intesa come micro-società che condivide prassi; tuttavia essi possono fare, e fanno, riferimento alle esperienze esterne, di vita vissuta quotidiana). Gli allievi avvertono la necessità allora di comunicare all'esterno il modello interno che si sono costruiti spontaneamente a proposito dell'oggetto matematico di riferimento. Ci stiamo riferendo a modelli ingenui che vengono portati o che verrebbero portati all'esterno per necessità o volontà comunicative (D'Amore e Marazzani, 2008, pp. 305-306).

Occorre evidenziare che, dal punto di vista antropologico dell'approccio semiotico, c'è un'importante distinzione da fare tra apprendimento e produzione di sapere.

Mentre la produzione di nuovi saperi risulta da attività in comune, riflessive, mediate, che sfociano nella creazione di concetti culturali (oggetti matema-

tici,…) l'apprendimento scolastico è il processo di trasformazione attiva degli oggetti culturali in oggetti di coscienza. Nel caso degli oggetti concettuali, il percepito è di fatto non percepibile, nel senso che è accessibile solo indirettamente, attraverso mezzi semiotici di oggettivazione (Radford, 2005, pp. 191-213).

Se ci mettiamo in situazioni idonee, dunque, si potrebbe verificare quali siano i mezzi semiotici di oggettivazione che giovani allievi mettono in atto per accedere agli oggetti matematici, *sia in situazioni nelle quali ancora non vi sono stati contatti istituzionali con tali oggetti, sia nel caso contrario, per verificare come tutto ciò avviene, che cosa significa spontanee, se le rappresentazioni sono idonee e se persistono e come, anche dopo le istituzionalizzazione scolastiche* (D'Amore e Marazzani, 2008, p. 307).

La pratica quotidiana mostra che sono molteplici le occasioni in cui l'individuo alle prese con un problema (non solo di matematica), ricorre ad altri linguaggi per motivi diversi. Pensando al disegno, è ben noto che vi sono disegni richiesti e disegni spontanei (…). Spesso l'insegnante spinge lo studente a ricorrere al disegno per rappresentare in modo figurato il testo di un problema, certo del fatto che l'immagine grafica sia un sicuro e notevole aiuto alla ricerca di una strategia risolutiva. Il messaggio in doppio codice (testo scritto-testo rappresentato sotto forma di figura) dovrebbe, a detta di moltissimi insegnanti, portare quasi automaticamente alla risoluzione di un problema. Ma le cose non stanno così. Lo studente, più spesso di quanto non si crede, considera una vera seccatura inutile fare il disegno. Se si fa il disegno è solo perché l'insegnante lo pretende; costituisce una clausola esplicita del contratto didattico il seguente fatto: se il testo del problema non è già accompagnato da una figura, occorre farlo perché l'insegnante la pretende. La figura non è sempre un aiuto; il doppio codice, linguistico e figurale, può in taluni casi complicare ancora di più la situazione, la può ingarbugliare al punto che lo studente non sa più come comportarsi. Può finire con il credere di avere di fronte a sé due problemi e non vede la convergenza delle informazioni. Alla base teorica di queste riflessioni possiamo mettere i classici studi di Fischbein (1993) (D'Amore, 1995).

Ma nel disegno spontaneo, pensato come ausilio nella risoluzione dei problemi di matematica, quanto c'è di aiuto reale? L'allievo che fa un disegno spontaneo appropriato, è un ragazzo che risolverà bene l'esercizio proposto? Per poter rispondere a questa domanda, occorre trovare e fare uso di problemi adatti, tali da spingere lo studente al ricorso al disegno. Un esercizio standard troppo vicino alla routine quotidiana è affrontato con superficialità, e dunque non genera quella vivace curiosità necessaria a far sì che, volendo risolvere a tutti i costi un problema, il ragazzo ricorra a tutti i mezzi a sua disposizione, anche se non sono contemplati ufficialmente. Un'idonea attività è dunque quella di scegliere qualche problema adatto a far sì che i ragazzi ritengano necessario ricorrere al disegno (Ibidem).

2. Apprendere la matematica cooperando tra pari

La grande scommessa pedagogica che si può giocare in classe è quella di realizzare un ambiente generativo di conoscenza in cui si impara a pensare e ad apprendere dagli altri e con gli altri. Nella scuola, e nella classe, è possibile co-costruire valore aggiunto quando la diversità personale e culturale viene riconosciuta come una risorsa e fatta dialogare per coprire ciò che è «*collettivamente valido*» (Miller, 1987, in: Dozza, 2007). Questi sono gli elementi che permettono alle idee e ai progetti innovativi di lievitare e di fare della scuola un contesto ricco, dove le specifiche intelligenze si intrecciano e si arricchiscono. Per vivere il piacere di fare matematica serve, dunque, un ambiente generativo, in cui l'allievo sia incoraggiato a mettersi alla prova e possa esprimere la propria capacità di azione e di immaginazione. La partecipazione attiva e costruttiva a gruppi di lavoro, intese come vere e proprie sottocomunità di apprendimento, nutre la capacità di giudizio, di coordinamento e di aiuto reciproco (Dozza, 2007).

Quali sono, secondo i bambini, i comportamenti da mettere in atto nell'attività di risoluzione dei problemi? Su questo punto le indicazioni sono unanimi: bisogna leggere e rileggere il testo, ragionare, stare calmi e ragionare da soli (Zan, 1988, p. 43).

La ricerca più avanzata, nella prospettiva neopiagetiana e neovygotskijana, sostiene l'idea che il problem-solving congiunto, ossia l'opportunità di discutere le differenze di opinione e di condividere il processo decisionale, porta a un livello di comprensione che non è accessibile con i soli sforzi individuali o nell'interazione non collaborativa. Nel processo di co-costruzione gli allievi possono giungere a due punti di vista polari ugualmente giustificati e che si escludono a vicenda: sarà la ricerca di coerenza a spingerli a cercare di cambiare il presupposto collettivamente valido per risolvere la contraddizione (Dozza, 2007, p. 224). L'argomentare e il giustificare attivano processi di trasformazione della comprensione basati sulla creazione di pensiero condiviso e sulla ridefinizione di ciò che è collettivamente e localmente valido (Rogoff, 1990). In tali processi l'argomentazione dei bambini con gli adulti e con i pari rappresenta una forma centrale di scambio sociale di primaria importanza (Miller, 1987, p. 231).

L'importanza di considerare il dialogo educativo fra pari e tra pari e insegnanti deriva dall'assunto secondo cui l'apprendimento a scuola non si esaurisce nell'acquisizione di contenuti e parallelamente l'insegnamento non ha come unica finalità il raggiungimento di obiettivi curricolari (Molinari, 2010, Perret-Clermont, 2005; Mameli, 2012; Pontecorvo, 2005). Il discorso, quindi, inteso come attività collettiva sede del processo conoscitivo, funge da strumento privilegiato di apprendimento.

2.1. La prospettiva vygotskiana e la zona di sviluppo prossimale

Con questo lavoro desidero mettere in evidenza il grande valore dell'interazione sociale nei processi di costruzione della conoscenza e di cambiamento cognitivo, nell'ambito delle attività scolastiche.

Fondamentale, dunque, è il richiamo a Vygotskij e alla scuola storico-culturale che hanno ben analizzato il ruolo dell'interazione sociale e della mediazione culturale nell'apprendimento. Lo sviluppo va interpretato nell'ambito di una cultura e di diverse mediazioni affettive, educative e socio-culturali. C'è una stretta interrelazione tra le dimensioni di sviluppo e i fattori educativi, in quanto lo sviluppo avviene sempre nel contesto di una cultura e attraverso la comunicazione e lo scambio con gli altri. Il bambino è, sì, costruttore delle sue conoscenze, abilità, atteggiamenti, come ci ha insegnato la teoria piagetiana, ma all'interno di un contesto culturale che gli offre gli strumenti (Pontecorvo, Ajello e Zucchermaglio, 1991).

Secondo Vygotskij, nelle attività umane, gli utensili di lavoro e i segni hanno peculiarità simili, ma si applicano ad azioni diverse. Gli utensili -intesi come strumenti concreti, tecnici- e i segni -intesi come strumenti psicologici- sono simili per il fatto che entrambi permettono agli individui di agire e interagire con il loro ambiente, non in forma diretta ma in forma mediata. Eppure sono differenti per il modo in cui essi orientano il comportamento umano. Da una parte, l'utensile è orientato verso l'oggetto dell'attività (per esempio, il controllo della natura). In tal caso l'utensile serve per orientare esternamente il comportamento umano. Dall'altra parte, il segno è un elemento cruciale per l'attuazione di un processo psichico che orienta internamente il comportamento umano (Vygotskij, 1978).

Un ruolo importante è svolto dal linguaggio e dalla mediazione semiotica offerta dagli strumenti tecnici e psicologici, in modo particolare dai sistemi di segni offerti dalla cultura. Il linguaggio è lo strumento più importante che media lo sviluppo delle funzioni psichiche superiori.

Nella prospettiva vygotskijana, relativamente ai modi di passaggio dal sociale all'individuale, si assiste ad un capovolgimento dell'usuale modo di vedere i rapporti tra sviluppo e trasmissione della conoscenza (Pontecorvo, Ajello e Zucchermaglio, 1991, p. 30).

La psicologia individuale è un aggregato di relazioni sociali interiorizzate: ogni funzione psichica superiore appare due volte nello sviluppo culturale del bambino: prima sul piano sociale, poi su quello psicologico, cioè in primo luogo come una categoria di funzionamento interpsicologico che poi diventa intrapsicologico. Ciò che è divenuto mentale, quindi, è preceduto da una fase esterna sociale: pertanto le relazioni sociali tra le persone sono geneticamente prioritarie per tutte le funzioni superiori.

I due costrutti, che possono spiegare il modo in cui avviene il passaggio dall'individuale al sociale, sono: il meccanismo dell'interiorizzazione e la presenza di una zona di sviluppo prossimo. (…). La priorità dei processi sociali su quelli individuali, intesa come l'emergere delle funzioni psicologiche del bambino nelle interazioni con gli adulti e con i coetanei più competenti, si manifesta nel ruolo della zona di sviluppo prossimo, definita come quell'area di funzionamento psicologico che è possibile al soggetto se sostenuto dall'aiuto di un altro, e quindi da una forma di interazione e di regolazione, che sostiene e attiva quelle funzioni che non operano ancora da sole, ma che hanno bisogno del supporto esterno (Ibidem, pp. 31 e 32).

Possiamo utilizzare in due modi questa nozione: distinguere tra ciò che il soggetto può fare da solo nel suo funzionamento indipendente (il suo livello attuale di sviluppo) e ciò che può fare quando riceve un qualche aiuto (il suo livello di sviluppo potenziale, prossimale o prossimo) che può essere molto diverso anche tra soggetti che presentano lo stesso livello di sviluppo attuale. Dato che il bambino può operare al di là del suo livello attuale di sviluppo quando interagisce con adulti, ma anche con altri compagni, l'istruzione può operare attivamente nella zona prossima e nello stesso tempo può creare una «nuova zona» in quanto anche il livello potenziale può essere espanso dall'intervento dell'istruzione. Ciò significa anche che ci deve essere un precursore dell'attività che deve essere sviluppata all'interno di un contesto significativo per tutti i partecipanti. È pertanto in tale «zona» che si può stabilire quel legame tra i partecipanti nell'interazione in modo che si incontrino sul piano del funzionamento interpsicologico. La possibilità di una comprensione condivisa di un compito dipende dalla «definizione della situazione», cioè dal modo in cui il setting è rappresentato da coloro che vi operano.

Poiché la rappresentazione è attivamente costruita da ciascun partecipante, essa è anche diversa per ciascuno: lo scopo dell'interazione e dell'istruzione è di pervenire a una ri-definizione condivisa della situazione, attraverso livelli di progressiva maggiore intersoggettività che lasciano spazio alla negoziazione (Ibidem, pp. 32-33).

Il pensiero e il ragionamento individuali si costruiscono attraverso pratiche sociali di discorso: i processi interattivi che sono condotti pubblicamente nello scambio con altri individui sono la base per qualsiasi competenza che possa venire interiorizzata e sono riattivati in altri contesti di discorso e ragionamenti (Ibidem, p. 62).

2.2. La discussione per co-costruire conoscenza

Mettere i riflettori sull'attività discorsiva in aula consente di recuperare le dimensioni socioculturali dell'apprendimento accanto a quelle più specificamente cognitive. Discutere in un gruppo di pari rende possibile il coinvolgimento affettivo dell'alunno e l'attivazione dei suoi scopi personali, condizioni indispensabili per un reale apprendimento.

La situazione paritaria consente una modalità di discorso chiamata da Barnes ipotetica, perché caratterizzata da supposizioni, tentativi di mettere alla prova una certa asserzione applicandola in modo immaginario a situazioni diverse, esplorazioni in diverse direzioni: durante queste fasi discorsive libere ognuno può contribuire con esempi ulteriori, casi contrari e alternative possibili: da un punto di vista discorsivo, i contributi sono costruiti in modo concatenato, potendo ognuno elaborare il proprio intervento, in modo co-costruttivo od oppositivo, sulla base degli ultimi interventi degli altri (Fasulo e Pontecorvo, 1999, p. 82).

Un ruolo centrale è stato attribuito all'opposizione discorsiva; le caratteristiche discorsive delle sequenze di opposizione riescono a generare operazioni di riflessione sulle conoscenze per poterle organizzare e presentare in modo convincente. Questo bisogno si presenta appunto come conseguenza dello sforzo di legittimare una mossa oppositiva e di contro-argomentare alle opposizioni ricevute (Ibidem).

Gli studi di Vygotskji hanno favorito il diffondersi di una prospettiva socio-culturale anche in campo psicologico e hanno messo in luce la necessità di mettere a punto strumenti sempre più accurati di descrizione e interpretazione di ciò che avviene di fatto nell'interazione sociale finalizzata alla conoscenza e all'apprendimento. All'interno degli studi sull'interazione si sono distinti due modi diversi di intendere il termine inglese *sharing*. Il primo modo rappresenta una situazione sociale che permette di dividere tra i partecipanti il carico cognitivo del compito da affrontare; il secondo modo esprime il fatto che si viene modificando il contenuto, la conoscenza, il pensare condiviso, in particolare quando si tratta di soggetti in età evolutiva che stanno entrando in una cultura (Pontecorvo, Ajello e Zucchermaglio, 1991; Molinari, 2010).

In questi ultimi decenni l'attenzione della ricerca si è sempre più rivolta verso lo studio della discussione in classe, allo scopo di precisare e verificare le condizioni che rendono cognitivamente produttivo questo particolare tipo di interazione verbale anche nel contesto scolastico (Ibidem). La discussione è un particolare tipo di situazione di interazione che comporta processi linguistici e socio-cognitivi particolarmente rilevanti al fine dell'acquisizione di nuove strategie e conoscenze più complesse. In ogni caso la discussione di piccolo o di grande gruppo, non necessariamente regolata dall'insegnante in modo diretto, è il modello ideale di una interazione a scopi cognitivi. La discussione non si realizza naturalmente a scuola, ma è il risultato dell'inserimento di un insieme di condizioni sperimentali o quasi sperimentali in quanto definite a priori e introdotte nei contesti naturali. Tali condizioni specifiche sono:

a) *un'esperienza comune, preliminare alla discussione, tale però da non comportare un'unica lettura o soluzione;*
b) *un discorso che rielabora l'esperienza compiuta e che si struttura come situazione di problem-solving collettivo, in cui sia possibile negoziare significati; condividere e confrontare differenti soluzioni o interpretazioni di uno stesso materiale (ad esempio un testo scritto) oppure di un fenomeno o di un evento.*
c) *un cambiamento delle usuali regole di partecipazione al discorso scolastico: i turni di discorso non debbono essere controllati dall'insegnante; le usuali domande dell'insegnante sono in parte sostituite da riprese e rispecchiamenti degli interventi degli allievi, da richieste di spiegazione e da interventi che sottolineano un'eventuale discordanza di posizioni* (Ibidem).

Sono state effettuate ricerche che muovevano dall'intenzione di analizzare il rapporto tra processi e contenuti di conoscenza nell'interazione in classe, mirando a distinguere gli aspetti generali, positivi e negativi, che si possono ritrovare in qualsiasi contenuto e quelli che, invece, caratterizzano specifici contenuti di conoscenza e con i quali si costruiscono e si trasformano le concettualizzazioni dei bambini.

Nell'analizzare protocolli di ricerca è stata operata una distinzione tra due dimensioni rilevanti nelle discussioni: *sviluppo* e *pertinenza*. Entrambe le dimensioni hanno inteso considerare la discussione come un ragionamento esteriorizzato di tipo collettivo, nel quale la conoscenza si costruisce attraverso la concatenazione degli argomenti, attraverso un pensiero collettivo che passa dall'uno all'altro, come se non si trattasse più di individui diversi ma di un unico soggetto che parla con più «voci». Per *sviluppo* si intende dunque la dimensione che si manifesta nel fatto che il filo del ragionamento si mantiene in modo coerente nel passare dall'uno all'altro interlocutore, facendo collettivamente avanzare e procedere l'analisi, l'interpretazione, la chiarificazione dell'oggetto di discorso, attraverso l'introduzione di nuovi elementi e di nuove prospettive. Il *non-sviluppo* si verifica tipicamente quando il discorso si avviluppa o quando si crea una situazione di arresto, di blocco del ragionamento collettivo.

La dimensione della pertinenza permette invece di distinguere se il progredire, o meno, del discorso si colloca all'interno del tema proposto dall'insegnante e condiviso dagli interlocutori oppure se ci sono deviazioni più o meno importanti dell'oggetto principale: deviazioni che possono anche ben caratterizzate sul piano dello sviluppo, ma non essere affatto pertinenti. Questa distinzione dipende dalla preoccupazione iniziale di guardare l'evolversi delle rappresentazioni e delle concettualizza-

zioni, al di là della pur importante messa in atto di abilità procedurali e argomentative (Ibidem, p. 77).

All'interno della dimensione dello sviluppo, sono stati individuati indicatori positivi e negativi nella forma di categorie con le quali si possono codificare i diversi enunciati e le loro componenti. Ci sono categorie che segnalano un non sviluppo e sono: ripetere, confermare, riferirsi a un'esperienza personale. Le categorie che indicano invece lo sviluppo sono: apportare elementi nuovi, mettere in relazione, delimitare, opporsi con ragioni, comporre relazioni di livello più alto, generalizzare, problematizzare, ristrutturare. L'ordine delle categorie di sviluppo corrisponde a una possibile sequenza di sviluppo del discorso-ragionamento collettivo e risponde a una visione argomentativa della costruzione della conoscenza, in cui si alternano fasi più cognitive, quali mettere in relazione, generalizzare, e fasi più psicosociali, quali delimitare, opporsi con ragione, comporre relazioni di livello più alto, generalizzare, ristrutturare, problematizzare.

Il sistema descritto può essere utilizzato per distinguere le modalità interattive proprie di diverse situazioni, utilizzando come indicatore la proporzione di enunciati di sviluppo pertinente di più alto livello cognitivo, per la presenza maggiore delle categorie: comporre relazioni, generalizzare, problematizzare, ristrutturare. Andando a cercare i meccanismi psico-sociali che rendono possibile lo sviluppo del discorso-ragionamento, si può individuare l'importanza del meccanismo sociale scatenato dall'interlocutore esigente, da colui che non è soddisfatto da ciò che dicono o rispondono gli altri, che si oppone agli altri avanzando obiezioni, domande, delimitazioni. Si possono così considerare le discussioni come dibattiti e situazioni in cui l'opposizione è produttiva perché spinge ad articolare il ragionamento. E nei bambini è attraverso la pratica della discussione che si manifesta e si articola il ragionare (Ibidem).

Dunque possiamo dire che non solo è possibile ma è più facile, quasi normale, pensare insieme.

Questo succede nelle discussioni tra bambini in situazioni scolastiche in cui gli interventi dell'insegnante sono assai meno di quelli usuali. Tali modalità collettive, e socialmente condivise, di pensare e ragionare, si manifestano nel dialogo e nella conversazione.

Il ragionamento su un argomento specifico si costruisce spesso attraverso il contribuito di più interlocutori: ha luogo il pensare insieme che non corrisponde esattamente al pensare di qualcuno. Questo fenomeno si chiama co-costruzione del ragionamento. La co-costruzione si manifesta con una notevole varietà di forme, come nel fenomeno di cooperazione nel completamento dell'asserzione che è tipico tra soggetti di alta familiarità reciproca, in cui è condiviso l'oggetto del discorso, perché si sta pensando alla stessa cosa. Ciascun interlocutore, dunque, ha bisogno dell'altro per costruire una proposizione completa. Un'altra forma di co-costruzione è data dalle interazioni di tipo ellittico: nessuno degli interlocutori esplicita il suo pensiero in quanto non completa la frase, eppure il proseguimento del discorso da parte di altri è avvenuto implicitamente,

Un altro esempio di co-costruzione è quello offerto dalla ripresa più o meno esplicita di un tema introdotto da un altro interlocutore, allo scopo di apportarvi delle aggiunte, variazioni, elaborazioni, integrazioni. La dimensione più caratterizzante della discussione è data dal ruolo dell'opposizione nello spingere in avanti il discorso-ragionamento e nel provocare sviluppi e approfondimenti; modalità di tipo oppositivo-argomentativo sembrano essere rilevanti in tutti i momenti in cui si verificano degli sviluppi significativi dell'argomento in discussione. L'opposizione è caratterizzata dall'espressione esplicita di un disaccordo, spesso attivata dalla domanda polemica di un qualche interlocutore, di colui che non è soddisfatto delle risposte offerte al problema e che vuole capire meglio che cosa è in gioco. In ogni caso la messa in questione da parte di uno degli interlocutori nel discorso provoca un argomentare più approfondito e produce delle analisi più accurate del problema (Ibidem).

Le discussioni possono essere uno strumento privilegiato per raggiungere due obiettivi essenziali di una educazione cognitiva:

a) permettere la comunicazione, il confronto, la messa in comune di problemi, modelli, conoscenze, informazioni, metodi di lettura, soluzioni;
b) permettere lo svolgimento di un ragionamento collettivo durante il quale i bambini hanno la possibilità di lavorare nell'area di sviluppo potenziale, di verificare e controllare la validità dei modelli e di costruirne, con il contributo degli altri, di più soddisfacenti.

Grazie alle suddette caratteristiche della discussione, l'insegnante ha la possibilità di identificare i modelli di spiegazione utilizzati dai bambini, di conoscere le loro procedure cognitive preferenziali, di seguire l'evoluzione dei processi di concettualizzazione da una rappresentazione di senso comune a una scientifica.

Le discussioni, dunque, sono uno degli strumenti di indagine e sollecitazione più adeguati per comprendere i processi di costruzione delle conoscenze messi in atto dai bambini in relazione alle stimolazioni culturali offerte dagli specifici contenuti disciplinari proposti a scuola (Ibidem, p. 183). Grazie alle sue caratteristiche dinamiche e sociali, si ha la possibilità di superare i limiti delle tradizionali metodologie di indagine, che utilizzano, per lo più, compiti statici e poco significativi ai fini dei processi sociali di costruzione concettuale.

La discussione è una situazione in cui si elabora e si costruisce la soluzione di un problema attraverso il ragionare insieme, attraverso un pensiero-discorso che ciascuno degli interventi manifesta e insieme raccoglie dagli altri. Ciò è più facile che si verifichi tra i bambini che tra gli adulti. *Il filo del ragionamento collettivo passa da un bambino all'altro con una notevole permeabilità reciproca, con tutti i rischi del caso: ci possono essere, per esempio, idee buone che vengono poi abbandonate anche da chi le aveva proposte, proprio per effetto del pensare insieme e quindi di una certa logica di gruppo che si determina* (Pontecorvo, Ajello e Zucchermaglio, 1991).

Il risultato di una discussione non è quello di arrivare necessariamente alla «soluzione di un problema». Un buon esito può essere rappresentato dal riuscire a delimitare o definire il problema, escludendo gli elementi secondari, accessori o devianti; o può essere quello di avvicinarsi alla risoluzione attraverso una serie di fasi intermedie che si rivela necessario percorrere. Si può, ancora, pervenire a un primo livello di spiegazione dei fenomeni, condiviso dagli interlocutori che rappresenta una buona approssimazione al risultato (Ibidem).

Nell'ambito della discussione si può riuscire a identificare il ruolo dei bambini: tale ruolo è caratterizzato dai modi peculiari che ogni bambino utilizza nel contribuire cognitivamente al ragionamento collettivo. Ci sono bambini che pongono domande oppure sollevano questioni; altri bambini effettuano interventi più di tipo metodologico o procedurale; altri ancora introducono aspetti nuovi e ristrutturano quelli già dati; altri riassumono i risultati raggiunti; altri apportano elementi di tipo aneddotico-episodico; alcuni, che dispongono di più conoscenze, avanzano spiegazioni complessive, assertive e conclusive (Ibidem, p. 195).

2.3. L'intervento dell'insegnante

L'intervento didattico da parte di un insegnante è necessario in quanto gli allievi non sono ancora capaci di svolgere da soli certe attività in modo soddisfacente. Ma l'intervento funziona se l'insegnante ritiene che qualsiasi cosa dicano gli allievi può diventare il punto di partenza per l'attività prevista. Vygotskij afferma che è efficace solo quell'insegnamento che precorre lo sviluppo e, ancora, che scopo dell'istruzione è quello di richiamare alla vita e di risvegliare nel bambino una serie di processi di sviluppo interiori che sono in un dato momento possibili per il bambino soltanto nell'ambito della comunicazione con l'adulto e la collaborazione con i compagni. Il bambino si appropria di uno strumento culturale all'interno di attività culturalmente organizzate e lo strumento stesso può essere cambiato dall'uso che ne fa un nuovo membro della cultura. Nello stesso tempo l'insegnante si appropria di ciò che fa o dice il bambino, incorpora le azioni del bambino nel suo sistema di attività, lo utilizza come se fosse stato prodotto in funzione dello scopo che l'insegnante ha in mente. Ecco che si chiarisce il modo di funzionare della zona di sviluppo prossimale come zona di costruzione, come luogo in cui avviene la negoziazione sociale dei significati; dove insegnanti e allievi si appropriano delle reciproche operazioni e interpretazioni, con una conseguente negoziazione e condivisione degli scopi.

L'insegnamento-apprendimento che opera nella zona di sviluppo prossimale si basa sulla presenza di una funzione che è stata praticata spontaneamente e non coscientemente. L'adulto, l'insegnante, il gruppo e, più in generale, l'attività di mediazione propria dell'insegnamento, rendono esplicita e consapevole l'azione cognitiva del bambino, mettendogli a disposizione una coscienza e un controllo che gli vengono progressivamente consegnati o di cui lui si impadronisce a poco a poco (Pontecorvo, Ajello e Zucchermaglio, 1995). In questa prospettiva l'interesse dell'insegnante si rivolge prevalentemente al processo di interazione, a come si struttura, a come si sviluppa, alle diverse forme di partecipazione degli allievi (Pontecorvo, 1993).

Concludo con queste parole di Lev Vygotskij (1934, p. 236):

Al centro dello sviluppo in età scolare vi è il passaggio dalle funzioni inferiori dell'attenzione e della memoria alle funzioni superiori dell'attenzione volontaria e della memoria logica.

3. Sintesi della ricerca

3.1. Le domande di ricerca

1. Nel corso della risoluzione di un problema, realizzata in piccolo gruppo, gli alunni elaborano strategie e rappresentazioni spontanee che evolvono nel corso del procedimento risolutivo?

La mia ipotesi a riguardo era che in una situazione motivante e stimolante, così come è determinata da un gruppo di bambini che risolvono insieme un problema, si sarebbe creato un positivo clima di reciproco incoraggiamento, di confronto e collaborazione, tale da spingere gli allievi a riflettere, modificare ed integrare le proprie strategie risolutive con quelle dei compagni, assumendo un atteggiamento attivo e costruttivo.

2. Che caratteristiche ha l'apprendimento che si genera nell'interazione tra allievi, in un contesto di risoluzione di problemi in piccolo gruppo?

A mio avviso, i bambini, nel comunicare tra loro, avrebbero compreso e interpretato parole e segni prodotte dai compagni e affinato la capacità di modificare, integrare, rafforzare le proprie idee, negoziando con i compagni per arrivare ad una soluzione comune; in questo modo il loro linguaggio si sarebbe modificato e sarebbe evoluto.

3. Che tipo di rappresentazioni producono i bambini in una situazione di problem-solving collaborativo?

Relativamente a quest'ultima domanda di ricerca, la mia ipotesi era che sarebbero state prodotte molte rappresentazioni, sia di *primo tipo* (rappresentazioni che l'allievo sceglie fra tutte quelle che vengono proposte da altri e condivise dalla classe) che di *secondo tipo* (dettate dalla volontà di comunicare all'esterno modelli interni dell'oggetto in questione che il bambino possiede già al momento della loro evocazione).

3.2. Metodologia della ricerca

Il *campione* della mia ricerca è costituito da una classe quinta di scuola primaria[2], nella quale sono docente titolare.

Fin dalla classe prima, ho cercato di attivare, un tipo di insegnamento che coinvolgesse molto gli alunni in prima persona: ho affrontato ogni argomento partendo dalle loro esperienze, idee, conoscenze. Ho curato che i bambini utilizzassero rappresentazioni spontanee, espresse nei diversi registri semiotici. In classe quarta, ho predisposto situazioni didattiche, nel corso delle quali i bambini, divisi in piccoli gruppi, affrontavano problemi e strutturavano progetti; considero questo un vero e proprio training preparatorio all'attività di ricerca, poi implementata in quinta classe.

Ho progettato, all'inizio della classe quinta, il seguente setting: quattro alunni della classe, due bambini e due bambine, si dovevano cimentare nella risoluzione di un problema *sfida*, discutendo e confrontando strategie e rappresentazioni personali, al fine di pervenire a una risoluzione condivisa. Tale soluzione sarebbe stata poi spiegata agli altri compagni di classe. È stata acquisita la disponibilità di ciascun alunno a far parte di un gruppo di problem solving, non forzando in alcun modo la partecipazione, nella convinzione che l'attività dovesse essere svolta in un clima il più possibile sereno e scevro, nelle intenzioni, da ogni minimo elemento d'ansia. Ciò avrebbe facilitato, secondo le mie attese, la riflessione e le espressioni orale, gestuale e grafica di ciascun alunno. Nella formazione dei gruppi è stata curata una certa eterogeneità.

Durante lo svolgimento del problema-sfida del gruppo target, gli altri bambini della classe svolgevano individualmente lo stesso compito, al loro posto, cia-

2. Classe a tempo corto (27 ore settimanali) della scuola elementare «Francesca Morvillo», sita in via Siculiana, a Roma.

scuno sul proprio quaderno. Non posso tuttavia escludere che si siano verificate interazioni col gruppo di problem solving.

Alla fine è stato distribuito un questionario, da me predisposto, al fine di acquisire elementi sul gradimento, i pensieri e le emozioni degli alunni coinvolti.

Per quel che riguarda i *materiali*, determinante, e non semplice, è stata la scelta dei *problemi*. L'intento è stato quello di selezionare testi che potessero costituire una sfida per i bambini (che impegnassero gli alunni nella zona di sviluppo prossimale, in situazione collaborativa) e atti a sollecitare l'uso di rappresentazioni e strategie spontanee.

Per facilitare gli scambi comunicativi tra i bambini, come ulteriori *materiali,* sono stati messi a disposizione grandi fogli di carta e pennarelli di diversi colori. Dopo aver scritto la traccia del problema, in alto nel foglio, invitavo i bambini a leggere il testo del problema e a dare, poi, avvio alla risoluzione di gruppo, utilizzando lo spazio restante del foglio per le loro rappresentazioni. Il procedimento risolutivo doveva essere, nelle intenzioni, completamente gestito dagli alunni, che avrebbero dovuto regolare autonomamente anche l'ordine degli interventi; io sarei intervenuta il meno possibile.

Per quanto riguarda i *tempi*, non è mai stato stabilito un tempo limite; generalmente si dedicava, in una mattinata, un'ora al massimo all'attività di problem solving; se il gruppo, però, non perveniva alla soluzione, si aggiornava il lavoro a un'altra data, nella stessa settimana.

Il **corpus** di dati risulta costituito:
- dalle interazioni comunicative – videoregistrate – di tre diversi gruppi di bambini nel momento della costruzione delle rappresentazioni;
- dai grandi fogli utilizzati dai gruppi, sui quali erano presenti chiare tracce delle rappresentazioni prodotte (sui quali ho acquisito un gran numero di informazioni rispetto ai diversi registri semiotici utilizzati)
- le risposte dei bambini al questionario finale.

Tali esperienze, nate e realizzate all'interno di uno spazio didattico chiamato *Laboratorio di problem solving,* sono state effettuate a cadenza settimanale; hanno partecipato complessivamente 8 gruppi diversi, ciascuno formato da 4 alunni. Alcuni bambini hanno partecipato a più di un gruppo.

Dopo aver raccolto tutto il materiale, ho deciso di trascrivere le interazioni complete di tre gruppi di bambini, con l'intento di mettere poi in evidenza, in brevi testi di commento, l'andamento dei processi risolutivi[3].

Per verificare la prima ipotesi di ricerca, sono stati individuati e riportati tutti quegli elementi che indicavano la presenza di strategie e rappresentazioni spontanee che evolvevano nel corso del procedimento risolutivo.

Per la verifica della seconda ipotesi, sono stati ricercati tutti quegli elementi che avvaloravano quel che mi interessava sondare come apprendimento, cioè la capacità di analizzare e interpretare parole, segni, argomentazioni e quella di modificare, integrare, rafforzare le proprie idee insieme agli altri, modificando il proprio linguaggio e negoziando per arrivare a una soluzione comune;

3. Il testo completo è ottenibile inviando una e-mail all'autrice: annarita.monaco@tin.it

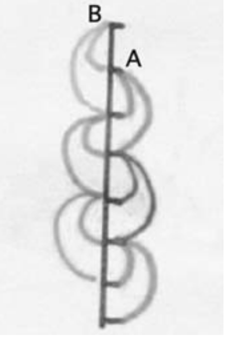
La verifica relativa alla terza ipotesi di ricerca è stata effettuata analizzando le rappresentazioni prodotte, di cui era chiara traccia sui fogli di lavoro.

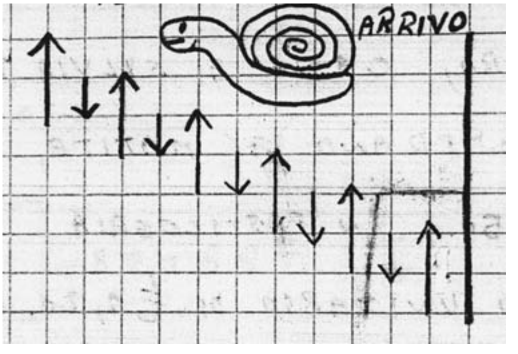
3.3. I problemi e flash su alcuni momenti di risoluzione

Problema 1: La lumaca

Una lumaca vuol salire un muro alto 7 metri. Parte dalla base la mattina di un giorno e sale 2 metri fino al tramonto; ma poi durante la notte scivola giù di 1 metro. Riparte la mattina dopo e così via: durante il giorno sale di 2 metri, durante la notte scivola di 1 metro. Quanti giorni impiega per salire in cima al muro?

Sono state create due rappresentazioni grafiche:





Molto interessante la discussione sull'arrivo in cima al muro. Qualche allievo pensa che, giunta in cima, la lumaca, nella notte successiva, scivola in basso di un metro, per poi risalire di due metri il giorno successivo.

– *Viene 6* [giorni]*, ma ho notato che c'è questo pezzetto, visto che riscende di uno…*
– *Poi risale, un altro giorno… Fa così: uno sale e poi zompa il muro.*
– *Ma mica può arrivare nell'aria, eh.*
– *Se ha già finito, perché riscende?*

Problema 2: Il percorso di Lorenzo

Lorenzo va a trovare il suo amico Valerio. A metà del percorso, comincia a piovere e allora decide di tornare a casa a prendere l'ombrello. A metà del ritorno, però, ricompare il sereno e allora Lorenzo riprende il cammino verso la casa di Valerio. Quando arriva, ha percorso in tutto 3 chilometri. Quanti metri distano le case dei due amici?

Problema 3: Le biglie

Carla ha due biglie in più di Francesco. Il numero di biglie di Francesco è il doppio del numero di biglie di Amerigo, che ha sette biglie in meno di Carla. Quante biglie ci sono in tutto?

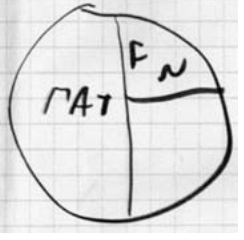
Problema 4: Gli sciatori

Donato è un provetto sciatore e, per fare una certa discesa, ci mette metà del tempo rispetto al suo amico Michele. Se scende 5 volte, impiega solo 5 minuti in più del tempo che occorre a Michele per scendere 2 volte (sempre lungo la stessa discesa). Quanto tempo ci mette Donato a fare una discesa?

Problema 5. Il problema di Pitagora

Si racconta che Pitagora, parlando dei suoi allievi, disse un giorno: «La metà dei miei discepoli studia matematica, la quarta parte studia i fenomeni della natura, 1/7 si esercita al silenzio e alle meditazioni; inoltre ho 3 allieve». Quanti sono, maschi e femmine, gli allievi di Pitagora?

Un allievo esprime la propria idea aiutandosi con la seguente rappresentazione grafica:



Ma ben presto gli allievi si concentrano sul numero piuttosto che sulle parti.

– *(…) la domanda chiede «Quanti sono» e non «quanta parte»…*
– *(…)dobbiamo riuscire a calcolare; dobbiamo prima scegliere un numero…*
– *Mate… 50. Poi c'è un quarto.*
– *Se fai un settimo bisogna calcolare una torta in cui hai sette parti…*
– *Un numero divisibile per 7 che poi dà a sua volta un numero divisibile per 4…*
– *Cerchiamo un numero pari, divisibile per 4 e per 7…*
– *Parla di tre femmine, ma non ha detto dove ce l'ha.*
– *Per me non le considera le femmine…*
– *Tra maschi e femmine, le considera…Basta mettere tre femmine qua e il risultato è 28.*
– *Però, se avete notato, come posso dire, c'è un resto e questo resto è di 3.*
– *Come dice il testo, bisogna aggiungere tre persone, che sono femmine…*
– *Infatti io ho addizionato 14, che era la metà, più 7 che era un quarto, più 4 che era un settimo.*
– *E più il resto.*
– *Il risultato è 28.*
– *Fine!*

Problema 6: Un giardino per Arianna

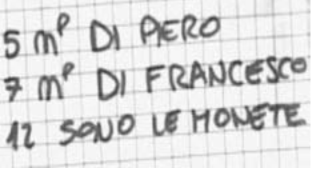
Arianna abita nel mezzo di un grande giardino. Un giorno taglia tanti fiori quanti sono i suoi anni. In seguito, ogni giorno taglia il doppio dei fiori del giorno *precedente. Il quinto giorno, seguendo sempre la stessa regola, compone un enorme mazzo fatto di tanti fiori quanti sono gli anni di sua nonna. La nonna Arianna ha esattamente 60 anni più di lei. Quanti fiori ha tagliato Arianna in tutti questi giorni?*

Problema 7: Le caramelle

La zia Carla entra in un negozio per comprare delle caramelle. Ci sono diversi tipi di caramelle, divise in vari contenitori. Carla prende 2 caramelle dal primo, 4 dal secondo, 6 dal terzo e così via…Ogni volta prende, in effetti, due caramelle in più rispetto a quante ne aveva prese nel precedente contenitore. Dopo essersi servita dell'ultimo contenitore, procede a ritroso, prelevando di nuovo da ogni contenitore tante caramelle quante ne aveva prese prima. Carla acquista in tutto 98 caramelle. Quanti contenitori ci sono nel negozio?

Problema 8: Panini e monete

Piero e Francesco partono per una gita a piedi. Piero mette nel suo zainetto 5 panini e Francesco ne mette 7 nel suo. Lungo la strada incontrano uno sconosciuto, affamato, ma senza provviste. Decidono allora, di mettere in comune i loro panini e mangiano tutti e tre. Al momento di lasciarsi, lo sconosciuto, come ringraziamento per il favore ricevuto, lascia loro 12 monete. Come dovranno essere suddivise le monete fra i due compagni?



Dopo aver messo in chiaro i dati del problema, viene imboccata una prima strada:

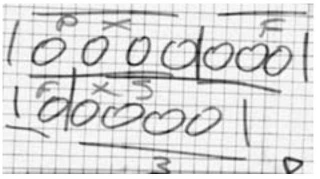
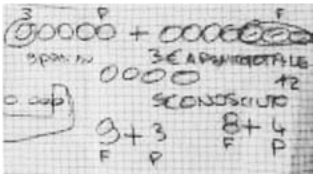
– *Se i panini sono 12 e le monete sono 12, ogni panino vale 1 euro. Quindi Francesco ha 7 panini e avrà sette monete; Piero ha cinque panini e avrà 5 monete.*

Questo primo tentativo non riscuote l'approvazione di tutto il gruppo. Ci si concentra sui 4 panini mangiati dallo sconosciuto:

– *I panini in tutto sono 12: 5 di Piero e 7 di Francesco. Francesco, visto che ce n'ha di più, mette in comune con quelli di Piero. Francesco gliene dà 3 e lui (Piero) 1 (quattro). Allora: 3 di Francesco più 1 di Piero li danno allo sconosciuto. Quindi Piero mangia i 4 suoi e Francesco i 4 suoi. Quindi Francesco dovrebbe avere una somma più alta. Noi dobbiamo proporzionare adesso le 12 monete con i panini.*

La chiave del problema:

– *Quattro li mangia una persona. Ne avanzano tre, e ne prendo un altro di questi (dei cinque di Piero). Per me Francesco non ci deve avere sette* *monete e nemmeno Piero cinque monete. Lo sconosciuto mangia…tre panini di uno e uno di un altro.*

Il passo decisivo:
– *Ho avuto un lampo di genio. Lui* [Francesco] *ce ne ha 9 e lui* [Piero] *ce ne ha 3.*
– *Secondo me, visto che gliene danno 4 in tutto, lo sconosciuto dà 3 euro per panino.*
Giustificano l'abbandono della prima idea di risoluzione:
– *Perché noi all'inizio avevamo contato che lui i soldi glieli dava pure per i panini che lui non si mangiava…*
Concludono:
– *Ah, è vero!*
– *Invece i soldi li dà solo per i panini che lui si mangia. Cioè 4.*
– *E quindi 3-6-9 per Francesco e 3 per Piero.*
– *Risolto!*

3.4. Il questionario e alcuni esempi di risposte

Domanda 1.
È stata una esperienza positiva partecipare ai gruppi di problem solving?
Sì ○ *No* ○ *Un po' sì e un po' no* ○

Tutti gli allievi hanno risposto «Sì».

Spiega i motivi per i quali hai risposto così.

Alcune risposte significative:
– *I problem solving ci aiutano ad affrontare le nostre paure e a imparare ad affrontare i problemi con gli altri e a interagire con loro.*
– *Perché ho iniziato a sforzarmi e pensare e trasmettere le mie idee ai miei compagni.*
– *Perché ragionare con gli altri mi ha fatto capire che l'unione fa la forza, cioè che abbiamo ragionato insieme e infine anche risposto insieme.*
– *Il problem solving mi ha aiutato soprattutto per migliorare le mie abilità di ragionamento e di risoluzione, e anche le capacità di saper trasformare un'idea secondo un altro parere e non di ragionare singolarmente.*

Domanda 2.

Ci sono stati dei momenti nei quali ti sei trovato/a in difficoltà?

Sì ○ *No* ○

Se sì, prova a descriverne uno o più di uno.

Commento

Solo un bambino su 11 ha dichiarato di non aver incontrato difficoltà motivando con il fatto che, ragionando insieme ai compagni, aveva poi trovato insieme a loro la risposta. Gli altri bambini hanno richiamato brevemente situazioni d'impasse vissute nel corso del problema risolto dal gruppo di appartenenza.

Domanda 3.

Con quale atteggiamento hai reagito alle difficoltà?

Qualche risposta:

– *Pensando e cercando di trovare una soluzione per risolvere il problema insieme ai miei compagni.*
– *Con molta calma, pensando e ascoltando i miei compagni.*
– *Mi sono concentrata ancora di più per capirlo e alla fine pian piano l'abbiamo risolto.*

Domande 4. e 5.

Con quali compagni senti di essere riuscito/a a comunicare meglio, all'interno dei gruppi? Spiega anche le tue ragioni.

Con quali compagni senti di essere riuscito/a a comunicare meno bene? Spiega anche in questo caso le tue ragioni.

Commento

I bambini hanno dichiarato, in generale, di essersi trovati meglio con:

– chi proponeva delle soluzioni;
– chi, anche se un po' interrompeva, dava comunque uno spunto;
– chi non si sovrapponeva alla propria voce e permetteva di esprimere le proprie idee.

Hanno dichiarato, inoltre, di essersi trovati meno bene con chi non parlava o mostrava timidezza.

Un bambino, in particolare, ha risposto così:

– *Con tutti, perché tutti mi hanno aiutato a livello di ragionamento e nessuno mi demoliva il ragionamento. Alcuni compagni sono riusciti a risolvere con il mio ragionamento. Tutti mi hanno aiutato ma hanno anche concretizzato le mie ipotesi.*

Domanda 6.

Esprimi infine liberamente ciò che senti di dire ancora rispetto a questa esperienza.

Qualche esempio di risposta:

– *La mia esperienza è stata bella, perché ho parlato e ho detto quello che ho pensato nel mio cervello.*
– *È un'esperienza molto carina e ci aiuta ad applicarci di più sui problemi.*
– *Questa esperienza mi è piaciuta molto perché mi ha trasmesso cos'è la matematica veramente.*

3.5. Note didattiche conclusive

Fine ultimo della ricerca empirica è quello di utilizzare i risultati ai quali è pervenuta per modificare o almeno influenzare la pratica didattica d'aula (D'Amore e Marazzani, 2005). I risultati di questo lavoro mettono in evidenza, a mio avviso, i seguenti aspetti:

1. l'atteggiamento dell'insegnante dovrebbe evolvere, nel senso di essere disponibile a fare emergere e ad accogliere, in ambienti di apprendimento collaborativi, le potenzialità strategiche, comunicative e rappresentative dei bambini, al fine di conoscerle, valorizzarle, amplificarle;
2. in aula bisognerebbe dilatare i tempi che vedono i bambini protagonisti: l'espressione dei loro mondi semiotici può creare un circolo virtuoso di intrecci significativi e metacognitivi che potrebbe completamente modificare il modo di affrontare i problemi e, in generale, migliorare il loro rapporto con la matematica, che sarebbe considerata una materia sicuramente interessante, stimolante e più densa di questioni significative, che fanno pensare;
3. l'errore dovrebbe assumere un significato diverso da quello che solitamente assume nella didattica quotidiana; l'errore dovrebbe essere utilizzato, piuttosto, nella sua dimensione costruttiva. Non dovrebbe essere un fenomeno da stigmatizzare, ma un elemento che, all'interno di un processo risolutivo di gruppo, potrebbe creare un'occasione di discussione, che stimola il problematizzare e l'argomentare e che, una volta superato, produce un apprendimento più profondo, più squisitamente metacognitivo (Cornoldi, 1995, Pontecorvo, 2005).

Tutto ciò, a mio avviso, contribuirebbe alla creazione di un ambiente di apprendimento come una comunità di pensiero nella quale si riflette, si analizza, ci si confronta, ma mai ci si arrende.

Bibliografia

Arrigo G. (2014). Conversioni e trattamenti semiotici nel problem solving. *Bollettino dei docenti di matematica,* 69. Bellinzona (Svizzera): UIM-CERDD, p.85-103.

Arrigo G., Maurizi L. e Minazzi T. (2005) «Chi spiega impara a mettere i pensieri bene»: la comunicazione intenzionale in matematica. *La matematica e la sua didattica,*1, 33-56.

Chevallard Y. (1991). Dimension instrumental, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques e de l'Informatique di Grenoble*. LSD2-IMAG, Université Joseph-Fourier, Grenoble.

D'Amore B. (1995).Uso spontaneo del disegno nella risoluzione di problemi di matematica. *La matematica e la sua didattica*. 3, p.328-370.

D'Amore B. (1998). Oggetti relazionali e diversi registri rappresentativi semiotici. Difficoltà cognitive ed ostacoli. *L'educazione matematica.* 1, p.7-28.

D'Amore B. (2003). *Problemi di matematica nella scuola elementare.* Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (2005). Pratiche e metapratiche nell'attività della classe intesa come società. *La matematica e la sua didattica*. 3, p.325-336.

D'Amore B. (2014) . *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Modena: Digital Index.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Marazzani I. (2004). «Esercizi anticipati» e «zona di sviluppo prossimale»: comportamento strategico e linguaggio comunicativo in attività di problem solving. *La matematica e la sua didattica.* 2, 71-95.

D'Amore B., Marazzani I. (2008) L'angolo, oggetto matematico e modello spontaneo. *La matematica e la sua didattica.* 3, 285-329.

Dozza L. (2007). Apprendere cooperando con i pari. In D'Amore B., Sbaragli S. (a cura di). *Allievi, inegnanti, sapere: la sfida della didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

Duncker K. (1935). *Zur Psychologie des produktiven Denkens.* Berlin: Springer. [Trad. it. (1969): *La psicologia del pensiero produttivo*. Firenze: Giunti-Barbera].

Duval R. (1993). Registres de representation sémiotique et fonctionnement cognitive de la pensée. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*. UPL, IREM Strasbourg. 5, p.37-65.

Duval R. (1996). Quale cognitivo per la Didattica della Matematica? *La matematica e la sua didattica.* 3, p.250-269.

Fandiño Pinilla M.I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica. Valutare e intervenire in modo mirato e specifico*. Trento: Erickson.

Fandiño Pinilla M.I., D'Amore B. (2006). *Area e perimetro. Aspetti concettuali e didattici.* Trento: Erickson.

Fasulo A., Pontecorvo C. (1999). Discorso e istruzione. In: Pontecorvo C. (a cura di). *Manuale di Psicologia dell'educazione*. Bologna: Il Mulino.

Fischbein E. (1993). The Theory of Figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*. 24, 2, p.139-162.

Gagné R.M. (1976), Problem solving negli uomini: eventi interni ed esterni. In: Kleinmunzt B. (a cura di). *Problem solving. Ricerche, metodi, teoria*. 133-150. Roma: Armando.

Glaeser G. (1975). *La matematica moderna per chi deve insegnare*. Milano: Feltrinelli.

Koffka K. (1921). Die Grundlagen der psychischen Entwicklung des Kindes. Osterwieck a/H: Zickfeldt. (Ed. In lingua inglese, London 1924).

Kohler W. (1929). *Gestalt psychology*. New York, Liveright.

Godino J.D., Batanero C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matematicos. *Recherches en didactiques des mathématiques.* 14, 3, p.325-355.

Loiero S., Spinosi M. (2012). Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione. *Fare scuola con le indicazioni*. 249-330. Napoli: Tecnodid Editrice

Mameli C. (2012) Interazioni discorsive tra insegnanti e alunni. *Giornale di Psicologia dello sviluppo*. 101, p.118-130.

Miller M. (1987). Argomentation and cognition. In: Hickmann M. (a cura di). *Social and Functional Approaches to Language and Thought.* San Diego, CA: Academic Press.

Molinari L. (2010) Alunni e insegnanti. Bologna: Il Mulino

Perret-Clermont A.N. (2005) Costruire lo spazio del pensiero a scuola. In C. Pontecorvo (a cura di) Discorso e apprendimento. Roma: Carocci

Polya G. (1945). *How to Solve It*. Princepton: University Press. [Trad. it. (1967). *Come risolvere i problemi di matematica: logica ed euristica nel mondo matematico.* Milano: Feltrinelli].

Pontecorvo C. (1993) (a cura di). *La condivisione della conoscenza.* Firenze: La Nuova Italia.

Pontecorvo C., Ajello Anna Maria, Zucchermaglio C. (1991). *Discutendo si impara. Interazione sociale e conoscenza a scuola.* Roma: Carocci.

Pontecorvo C. (2005) DAP: Discorso e apprendimento. Roma:Edizioni Infantiae.org

Radford L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching ofw Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*. 17 (1), 26-33.

Radford L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica.* 2, 191-213.

Radford L., Demers S. (2006). *Comunicazione e apprendimento. Riferimenti concettuali e pratici per le ore di matematica.* Bologna: Pitagora.

Rogoff B. (1990, trad. it. 2006). *Imparando a pensare. L'apprendimento guidato nei contesti socio-culturali.* Milano: Raffaello Cortina.

Sbaragli S. (2003). La scoperta dell'importanza del contesto: il punto nei diversi ambiti. *Bollettino dei Docenti di Matematica*. Bellinzona (Svizzera). 47, p.49-58.

Schoenfeld A.H. (1983). Episodes and executive decisions in mathematical Problem-Solving. In: Lesh R., Landau M. (a cura di). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. New York, NY: Academic Press. 345-395. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*. UPL, IREM Strasbourg. 5, 37-65.

Schoenfeld A.H. (1985a). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld A.H. (1985b). Metacognitive and epistemological issues. In: Silver E.A. (a cura di). *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple research perspectives.* 361-379. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Vygotskij L.S., (1934, trad.it. 1990). *Pensiero e linguaggio*. Bari: Laterza.

Vygotskij L.S. (1978). *Mind in Society. The development of Higher Psychological Processes*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Wertheimer M. (1959). *Productive thinking*. New York: Harper & Row.

Zan R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*. Milano: Springer.

Zan R. (2007). La comprensione del problema scolastico da parte degli allievi: alcune riflessioni. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 30 A-B, p.741-762.

2. Il problema nella scuola

Gianfranco Arrigo

The author of this article wants to focus on learning through problem solving once again because he feels this way of learning – which is mainly strategic – is seldom practised in our schools. This is surprising, as problem solving has widely been dealt with in international studies and it has been recognized as highly important for an accurate approach to mathematical education. The author has decided to concentrate on practical examples, which have been commented on.

1. Introduzione

L'attività di *problem solving* è sotto la lente di parecchi studiosi di didattica della matematica e costituisce oggi una delle questioni emergenti più delicate che la scuola è chiamata ad approfondire. In matematica, ma non solo. In casa nostra, se diamo un'occhiata ai programmi Harmos ci accorgiamo subito che la risoluzione di problemi occupa un ruolo basilare. Se interpreto bene lo spirito di queste proposte programmatiche, posso affermare senza ombra di dubbio che questi principi didattici permeano tutto il discorso metodologico.

Soffermiamoci sul programma dell'«Area matematica» di Harmos. Nel paragrafo «1.2 Aspetti metodologico-didattici» si legge:

(…) Gli allievi devono essere stimolati a una continua verbalizzazione di idee, intuizioni e proposte; bisogna rimuovere la convinzione erronea che fare matematica consista nel trovare l'unica soluzione corretta e che questa vada trovata, rifuggendo gli errori, mediante l'applicazione di definizioni, formule e procedimenti standard di cui solo l'insegnante è depositario.

E qualche riga più in giù:

(…) È auspicabile che l'acquisizione di competenze da parte degli allievi avvenga a partire da situazioni-problema autentiche, significative e stimolanti, a volte più vicine alla vita quotidiana a volte più intrinseche alla matematica stessa.

Affermazioni che andrebbero scolpite sulla porta di ogni aula di matematica e servire da stimolazione continua dell'attività didattica. Idee direttrici che andrebbero prese sul serio da tutti gli insegnanti, direttori, ispettori, esperti e via dicendo. Stimoli che sollecitano l'animo delle persone capaci di recepirli positivamente e di dar loro seguito nella pratica didattica quotidiana. Purtroppo ciò non sempre avviene. A volte, chi dovrebbe leggere questi testi e rifletterci seriamente assume atteggiamenti di insofferenza, considera tali discorsi didattici come cose inutili, magari utopistiche, comunque lontane dalla «realtà delle classi» e continua a insegnare come ha sempre fatto.

Già, la «realtà delle classi»: comodo alibi per non cambiare nulla. Quante volte mi sono sentito dire, nell'ambito di corsi di formazione continua: «tutto bello quello che ci racconti, ma nella mia classe sarebbe inapplicabile». Eppure ci sono gli insegnanti che riescono ad applicare in classe questi principi didattici ottenendo ottimi risultati e per di più anche con classi considerate «disastrate».

È quindi importante che ogni insegnante si convinca, se già non lo fosse, che occorre a poco a poco staccarsi dai modelli didattici del tipo «spiegazione-esemplificazione-esercitazione-valutazione». Sono chiari esempi di involuzione dell'insegnamento: «ti insegno una conoscenza A, te la esemplifico, ti somministro una serie di esercizi che concernono A, ti valuto su esercizi simili e concludo che hai appreso A». Certo, molto probabilmente ho appreso A, ma, al di fuori del contesto classe e di quel particolare periodo del piano annuale nel quale l'insegnante ha scritto «A» nella apposita casellina, io, allievo qualunque, la conoscenza A non la incontro più, o, per lo meno, non la incontro allo stato puro, come mi è stata insegnata in classe, ma in vesti diverse e mescolate ad altre conoscenze (B, C, ecc.) e quindi quasi mai facilmente riconoscibile.

Insegnare in modo costruttivo non è né facile né comodo, ma fortemente stimolante e soddisfacente. Col passare del tempo, il clima della classe diventa sempre più gradevole sia per l'insegnante sia per gli allievi, che si sentono corresponsabili del loro apprendere, imparano ad autovalutarsi e incrementano la fiducia nei propri mezzi. Ma, al di là di tutto ciò, gli allievi si rendono conto che la matematica non è costituita solamente di una serie di concetti e procedimenti che occorre memorizzare (matematica «morta»), ma è molto di più. È ragionamento, è vita, è un insieme di conoscenze e di atteggiamenti che ciascuno può costruirsi da sé (se ben guidato), affinando nel contempo le proprie capacità di apprendere autonomamente. In questo modo si ottiene un apprendimento di qualità, robusto, formativo, duraturo.

2. Le due anime della matematica e del suo apprendimento

Nessuno è mai riuscito a definire in modo accettabile la matematica come disciplina. Ecco, di seguito, alcuni tentativi fra i molti.

La matematica è l'alfabeto in cui Dio ha scritto l'Universo.
(Galileo Galilei)

Il matematico non scopre: inventa.
(Ludwig Wittgenstein)

L'essenza della matematica è la sua libertà.
(Georg Cantor)

La matematica può essere definita come la scienza in cui non sappiamo mai di che cosa stiamo parlando, né se ciò che diciamo è vero.
(Bertrand Russell)

Non solo la matematica è reale, ma è l'unica realtà.
(Martin Gardner)

Personalmente mi piace abbastanza la definizione tautologica, forse meno criticabile:

La matematica è ciò di cui si occupa il matematico.

Per capire il senso che questi personaggi illustri hanno voluto dare alle loro definizioni di matematica, occorrerebbe considerarne l'epoca e il relativo contesto culturale, ciò che esula dal presente scritto.

Per contro, può essere utile accennare alle due anime della matematica, che si intravedono anche nelle massime citate:

– la risoluzione di problemi
– la costruzione e la sistemazione di teorie

Un bel risolutore di problemi può essere identificato nel nostro Leonhard Euler (1707-1783). Egli, come molti suoi contemporanei, risolse una moltitudine di problemi usando i metodi del calcolo differenziale e integrale, senza lasciarsi influenzare dal fatto che questa teoria (successivamente chiamata analisi), in quel tempo, non era ancora fondata e quindi guardata con sospetto da gran parte dei matematici e dei filosofi. In particolare, non si era ancora arrivati a definire il numero reale e di conseguenza il concetto basilare di continuità di una funzione reale. Cose che vennero poi messe a posto da Richard Dedekind (1831-1916), che di fatto consacrò tutti i risultati che i suoi predecessori ottennero… in via ufficiosa.

Un buon rappresentante dei costruttori di teorie mi sembra sia stato Nicolas Bourbaki, non un matematico, ma un gruppo di matematici francesi che, sotto questo pseudonimo, a partire dal 1930, pubblicarono un'opera monumentale con l'intenzione di sistemare assiomaticamente tutta la matematica conosciuta. Impresa titanica, ma viziata da un errore di fondo che, quasi contemporaneamente, viene evidenziato da Kurt Gödel (1931, teoremi di incompletezza), cioè, in semplici parole, che la cosa non è possibile.

Le due anime della matematica si rispecchiano anche nella didattica di questa disciplina. In questo scritto mi occupo della risoluzione di problemi[1], attività che, dal punto di vista strettamente matematico, non deve subire troppi condizionamenti teorici. L'intuizione la fa da padrona e in questa fase non ci si deve preoccupare della sistemazione dei concetti. Un buon modo di comportarsi è di ritenere corrette le intuizioni che al momento danno risultati non contraddittori, fin non che si scopre un controesempio.

Le caratteristiche dell'attività di risoluzione di problemi si possono riassumere nel modo seguente.

– **La socializzazione dell'apprendimento**. Di fronte a una situazione non conosciuta, tutti gli allievi sono ai piedi della scala. Per poterla superare, occorre la collaborazione di tutti. Ogni idea può essere utile per costruire un corretto percorso risolutivo; anche quelle che risultano errate. In questo contesto l'errore insegna che cosa non fare, quali direzioni non scegliere, quindi assume una connotazione costruttiva, positiva, ciò che

1. Con riferimento soprattutto alla scuola dell'obbligo.

infonde coraggio agli allievi perché sanno che «si può sbagliare, anzi…». Confrontando le proprie idee, i propri tentativi, essi imparano ad ascoltare, a valutare razionalmente e a rispettare le idee altrui. Parallelamente, ogni allievo si sente parte di un gruppo che rincorre lo stesso obiettivo – di giungere a una soluzione – e tutto ciò che viene conquistato è anche parte di se stesso, ciò che contribuisce a rinforzare la fiducia nei propri mezzi.

– **Lo sviluppo del pensiero divergente**. Affrontare un problema mai incontrato significa soprattutto stimolare e sviluppare le proprie capacità intuitive e creative. Nell'ottica metodologica, ci si pone agli antipodi dell'esercitazione su determinati algoritmi conosciuti. La risoluzione di problemi – quindi *in primis* l'apprendimento strategico – si rivela un insostituibile complemento all'apprendimento algoritmico.
– **Il confronto razionale**. La messa in comune delle diverse idee che gli allievi esprimono permette a ciascuno di imparare a confrontarsi razionalmente, il che significa argomentare oppure confutare per mezzo di ragionamenti che devono essere logicamente corretti e coerenti con le conoscenze matematiche già acquisite. Il valore educativo di questa attività è evidente: la ragione si pone al di sopra di qualsiasi idea errata, poco importa se promossa con arroganza o se sostenuta dalla maggioranza. È, insomma, il metodo scientifico che deve prevalere e che ogni allievo, a poco a poco, impara a usare correttamente.
– **L'immagine della matematica**. È soprattutto svolgendo attività di *problem solving* che gli allievi possono costruirsi un'immagine positiva della matematica, come disciplina intellettualmente stimolante, che lascia a chi la pratica notevoli spazi di libertà, pur limitati da una serie di paletti. Si sa però che il valore dell'atto creativo diventa ancor più importante quando lo stesso deve sottostare a determinate condizioni, chiaramente conosciute. Quando questo si realizza, la soddisfazione del soggetto è inimmaginabile. Non è necessario pensare a grandi realizzazioni matematiche, come quelle per esempio che ci ricorda la ricchissima storia di questa disciplina (purtroppo poco conosciuta a differenza di quella politica). Basta vedere la gioia che traspare dagli occhi di un allievo quando giunge alla soluzione.

3. Il problema nella pratica scolastica

Come ho già avuto modo di ricordare più volte[2], nella letteratura, al termine problema si dà un significato preciso che può per esempio essere descritto così:

Un problema sorge quando un essere vivente, motivato a raggiungere una meta, non può farlo in forma automatica o meccanica, cioè mediante un'attività istintiva o attraverso un comportamento appreso. (Kanizsa, 1973)[3]

2. Si veda ad esempio: Arrigo G. (2015).
3. Per approfondimenti si consiglia: D'Amore B. (2014).

Detto questo, occorre chiarire il più possibile le caratteristiche che dovrebbe avere un problema scolastico per essere considerato tale.

Un buon problema scolastico dovrebbe avere almeno le seguenti caratteristiche.

– **Può essere adattato a più ordini di scuola**. Il problema, nella sua veste generale, non dev'essere mai pensato su misura per una data classe, bensì costruito in modo da poter essere presentato a un ampio ventaglio di classi, diciamo dalle elementari (o in certi casi anche dalla scuola dell'infanzia) in su, senza alcun limite superiore. È compito degli insegnanti adattare la consegna ai propri allievi. Con una raccomandazione: non sottovalutare le loro potenzialità. È evidente che il problema, essendo nuovo per l'allievo, pone quest'ultimo di fronte a difficoltà, ma è proprio in questo che sta il valore educativo. Più che il risultato da raggiungere, è importante lo sforzo mentale, il processo, che l'allievo compie e che col tempo lo trasformerà in un individuo che sa affrontare anche situazioni mai viste. Insisto sul verbo «affrontare», che, in questo contesto, preferisco nettamente al solito «risolvere».
– **Deve provocare il desiderio di essere risolto**. Si sa che l'aspetto emotivo è fondamentale nell'apprendimento. L'allievo che viene coinvolto in una problematica, di fronte alla quale sente forte il desiderio di vederci chiaro, di capire il perché, si rende conto che la realtà non sempre coincide con quello che l'esperienza di vita suggerirebbe (il più volte decantato «buon senso») e che con un po' di buona voglia e di semplici conoscenze matematiche ciascuno può giungere alla padronanza (parziale o totale) di una situazione, ricavandone soddisfazione.
– **Può essere risolto in più modi**. È bello, costruttivo e fondamentale poter rendersi conto che ogni problema può essere risolto in più modi, ciò che aumenta considerevolmente il margine di libertà entro il quale gli allievi possono agire. L'insegnante, che avendo in mente almeno un iter risolutivo volesse influenzare gli allievi in quella direzione, commetterebbe un evidente errore didattico. Come docenti ci si dovrebbe astenere anche dal valutare i diversi percorsi risolutivi praticati dagli allievi: se corretti, sono tutti accettabili e non dovrebbero essere considerati più o meno eleganti, più o meno comodi, più o meno coerenti con la propria mentalità. Considerazioni di questo tipo le faranno sicuramente gli allievi, anche se non immediatamente, e col tempo ogni allievo farà le proprie scelte, secondo le proprie inclinazioni ed esperienze.
– **La(e) soluzione(i) è sorprendente, non prevedibile, oppure può anche non esistere**. Anche se non ho dato molta importanza al risultato, lo stesso può in certi casi diventare protagonista e contribuire in modo rilevante allo sviluppo mentale dell'allievo. Ciò avviene quando il risultato non è affatto prevedibile, quando crea sorpresa, quando destabilizza. Ecco quindi un criterio da non dimenticare nella scelta dei problemi da proporre in classe. È importante prendere in considerazione ogni tanto problemi che non hanno soluzione, o che ne hanno più di una o che pre-

sentano dati contraddittori. Intendo presentarli mescolati con altri, senza lasciarsi sfuggire alcun messaggio di attenzione. Sarà poi durante la messa in comune che si sottolineeranno le peculiarità di questi problemi, generalmente considerati abnormi nel contesto scolastico, ma che sono presenti (eccome!) nella realtà in cui viviamo.

– **Deve generare nuove curiosità**. Un buon problema dovrebbe terminare sempre con una domanda del tipo «e se la situazione fosse diversa?». Questo atteggiamento non è automatico negli allievi, ma, col tempo, verrà a galla e allora si osserverà che un problema nato così suscita immediatamente negli allievi la voglia di affrontarlo, proprio perché nato da una loro curiosità.

4. Come proporre un problema in classe

Dico subito che vi sono parecchie modalità di assegnare un problema e che ogni insegnante dovrebbe, nel limite del possibile, tenerne conto e non conformarsi a una sola, a quella abituale, a quella per loro più comoda. Vi sono modi di presentare che si adattano meglio a certe classi di età, a determinati ordini scolastici, ma rompere ogni tanto queste abitudini può essere importante e aumentare negli allievi la voglia di affrontare il problema. Aggiungo che presentare un problema significa prima di tutto presentare una situazione non necessariamente accompagnata da domande. Queste dovrebbero nascere dalla curiosità degli allievi e in un secondo tempo formalizzate dall'insegnante in modo adeguato.

Di seguito, un elenco di modalità di presentazione, fra le più diffuse, abbinate ai diversi registri semiotici che le caratterizzano.

– **Il registro orale**. Modalità adatta ad allievi della scuola dell'infanzia e delle elementari, ma che può anche essere usata con studenti dalle medie in avanti. La presentazione orale ai più piccoli è d'uopo, mentre per gli altri può rivelarsi un buon modo per spingerli a trasformare ciò che hanno udito in un registro semiotico più adatto per risolvere il problema.
– **Il registro testuale scritto**. È certamente il più usato a scuola, tuttavia l'uso prolungato e costante genera una distorsione dell'immagine che gli allievi hanno del problema. Importanti ricerche hanno mostrato come gran parte di loro considerano il problema scolastico come qualcosa che prescinde da ogni situazione reale e per di più come una questione alla quale si deve sempre rispondere operando con i dati numerici contenuti nell'enunciato. Così nel noto problema «l'età del capitano», nella versione usata nel celeberrimo esperimento di Grenoble, gran parte degli allievi addiziona i numeri di pecore (26) e di capre (10) trasportate da una nave per rispondere alla domanda «quanti anni ha il capitano?» (Bolondi, D'Amore, 2010).
– **Il registro iconico-figurale**. Può essere costituito da un'immagine (disegno, foto) oppure da un video, da una striscia di fumetti, ecc. È una modalità di presentazione molto gradita dai giovani di oggi, abituati alla lettura delle immagini, quindi varrebbe la pena usarla maggiormente.

– **Il registro manipolatorio**. Combinato con il registro orale è la modalità di presentazione più applicata con i piccoli allievi, ma che potrebbe essere più presente anche nelle elementari, nelle medie e in qualche occasione anche nelle superiori (per esempio quando si propongono attività sui solidi geometrici, sulla geometria vettoriale, sulla combinatoria e sulla probabilità).
– **Il registro geometrico.** È adatto per allievi che sono in grado di leggere le figure geometriche (bi- o tri-dimensionali) riprodotte su un foglio. Occorre però verificare che ogni allievo legga correttamente la figura, tenendo conto che in essa si usano modalità e simboli assolutamente non universali, quindi variabili a seconda del contesto. Quando l'allievo passa da un ordine scolastico all'altro o quando cambia insegnante può scontrarsi con difficoltà di lettura che non gli permettono di entrare correttamente nella situazione proposta. Vi sono poi modi di rappresentazione «da adulti» che, se dati in pasto precocemente agli allievi, possono creare distorsioni concettuali. Un esempio su tutti, l'archetto usato per indicare gli angoli (Sbaragli, Santi, 2012).
– **Il registro informatico**. Il foglio elettronico fornisce, fra l'altro, all'allievo un'ottima occasione per capire e rafforzare il concetto di variabile e quindi per permettergli di entrare con piena coscienza nel cosiddetto «calcolo letterale» (Arrigo, 2016). D'altro canto, il programma di geometria dinamica offre all'allievo la possibilità di realizzare veri esperimenti con le figure geometriche.

Ovviamente, i vari registri, le diverse modalità, possono anche essere combinati, basta che non vi siano evidenti doppioni. Caso tipico: un problema di geometria presentato con un testo (registro testuale) con accanto una figura (registro geometrico) che ripropone gli stessi dati presenti nel testo.

Come già accennato, nel corso della risoluzione è possibile, utile, in certi casi addirittura obbligatorio, passare da un registro all'altro. L'allievo abituato a ricevere problemi presentati con diverse modalità si abitua a poco a poco a passare da un registro all'altro e anche a ritornare al precedente a seconda di ciò che vuole ottenere.

5. La fase risolutiva

Quando la classe è in chiaro sulla situazione e sulle domande da prendere in considerazione, può iniziare la fase risolutiva. Ricordo che l'iter risolutivo dovrebbe essere praticato in un contesto di apprendimento socializzato, quindi è importante stimolare e promuovere gli scambi di idee fra allievi. Di solito si ricorre alla tecnica del lavoro per piccoli gruppi, intercalata da momenti di dialogo con l'intera classe che permettono di fare il punto alla situazione e di rilanciare il lavoro. Non si deve però pensare che i lavori debbano procedere con lo stesso ritmo e sugli stessi percorsi per ciascun gruppo. Come già detto, un buon problema deve poter essere risolto in più modi e, quanto alla velocità, ogni insegnante sa che sarebbe illusorio aspettarsi che tutti i gruppi avanzino allo stesso modo. Ogni tanto può capitare che qualche allievo esprima il desiderio di lavorare da solo. Non è consigliabile obbligarlo ad aggregarsi a un gruppo: partirebbe con un importante handicap. Può anche verificarsi che, dopo qualche tempo, l'allievo stesso chieda di entrare in un gruppo, tanta è la forza di attrazione esercitata dalle discussioni che avvengono nei vari gruppi e che giungono alle sue orecchie.

Durante questa fase l'insegnante gioca un ruolo importante quanto delicato. Egli deve da un lato aiutare chi si trova in seria difficoltà, ma dall'altro non deve nemmeno esagerare lasciandosi sfuggire affermazioni decisive per il raggiungimento di un determinato risultato.

6. La messa in comune

La ricchezza del problema, l'impegno degli allievi e la libertà offerta loro dovrebbero aver favorito la costruzione di più iter risolutivi. Ogni gruppo, con l'intervento di ogni componente, presenta alla classe le proprie realizzazioni. La classe ascolta e pone domande, avanza obiezioni, effettua valutazioni in un clima costruttivo e permeato dalla razionalità.

L'opera dell'insegnante è volta a mantenere l'ordine in modo che ciascun allievo sia rispettoso delle idee altrui e giustifichi i propri interventi. All'insegnante spetta anche il compito di preservare la correttezza linguistica e l'uso appropriato dei termini matematici. Anch'egli potrebbe presentare una sua risoluzione e sottoporla al giudizio degli allievi. Il valore formativo dell'attività di problem solving appare anche nella comprensione e nel confronto di più iter risolutivi.

7. Esempi di problemi

7.1. La conta

Un gruppo di 8 fanciulli vuole giocare a nascondino. I giocatori, Anna, Beppe, Carlo, Daniela, Enrico, Fedra, Gianna e Heidi devono designare il primo cercatore mediante una conta. Si dispongono in cerchio, nell'ordine, e decidono di contare fino a 51, a partire da Anna e procedendo in senso orario. Chi riceverà il 51 sarà il primo cercatore.

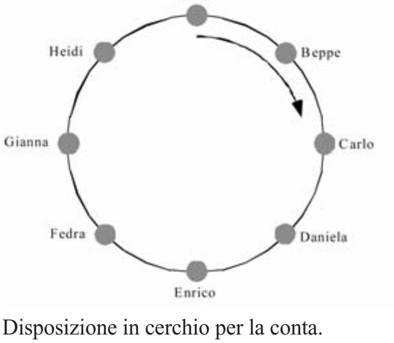


Figura 1. Disposizione in cerchio per la conta.

Domande possibili

Chi sarà il primo cercatore?

Quali numeri si possono sostituire a 51 per fare in modo che il cercatore risulti ancora quello di prima?

Primo livello

Ho scelto di iniziare con il gioco della conta perché, nella sua semplicità, racchiude (quasi) tutte le caratteristiche di un problema come descritto in precedenza.

Con bimbi di prima fascia si può simulare la situazione. Si dispongono 8 allievi in cerchio, ciascuno dei quali assume il ruolo di uno degli otto giocatori, esattamente come descritto dalla consegna scritta (raccontata dall'insegnante) e si procede alla conta, iniziando da Anna. Il 51 cade su Carlo. Si invita un altro allievo a rifare la conta e si suggerisce alla classe di fare bene attenzione ai numeri che successivamente cadono su Carlo: 3, 11, 19, 27, 35, 43, 51. Se si decidesse di contare fino a uno qualsiasi di questi numeri (escludendo forse il 3 perché minore di 8), il cercatore risulterebbe ancora Carlo. Ovviamente si potrebbe poi continuare con 59, 67, ecc.

Secondo livello

Con allievi più grandicelli si esaminano i numeri che cadono su Carlo e ci si rende conto che si succedono di 8 in 8 (che è il numero di fanciulli in cerchio). Questa seconda osservazione è decisiva, perché permette di estendere la situazione a insiemi di alunni di numerosità diversa. Per esempio, se si togliesse Heidi, il cercatore risulterebbe Beppe e i numeri che cadrebbero su di lui sarebbero 2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, 51, ecc. che si succedono di 7 in 7 (numero di fanciulli in cerchio).

Terzo livello

Il problema consiste ora nel trovare queste successioni di numeri, senza compiere la conta e nemmeno la regressione da 51 a 3 (o a 2), il che significa intuire che il primo numero, minore o uguale al numero F di fanciulli in cerchio, è proprio il resto della divisione di 51 per F. Questo passo è decisivo e ha anche una forte valenza concettuale: si toccano i concetti di divisione come successione di sottrazioni (dal dividendo al divisore) o successione di addizioni (dal divisore al dividendo) e di resto.

Quarto livello

A questo punto, con allievi introdotti nei rudimenti del calcolo letterale, si può giungere alla generalizzazione. Se T è il numero che designa il cercatore (che chiamiamo traguardo, negli esempi precedenti T=51) e F è il numero di fanciulli in cerchio, cercatore risulterà chi occupa il posto il cui numero è il resto della divisione di T per F. Così, ad esempio, se gli allievi fossero 9 e il traguardo 50, la conta porterebbe a designare chi occupa il posto numero 5, che è il resto della divisione per 9 di 50.

7.2. Corsa al numero

Si gioca in due.

Si stabiliscono un traguardo, per esempio 43, e un passo massimo, per esempio 7.

Si tira a sorte chi deve iniziare.

Il primo giocatore sceglie un numero naturale minore o uguale a 7, per esempio 5.

Il secondo deve aggiungere al 5 un numero compreso tra 1 e il passo massimo 7, per esempio 6 e si arriva a 11 = 5 + 6
Il gioco passa poi al primo giocatore che, partendo da 11, deve fare la stessa cosa.
E così via.
Vince chi riesce a dire per primo 43.

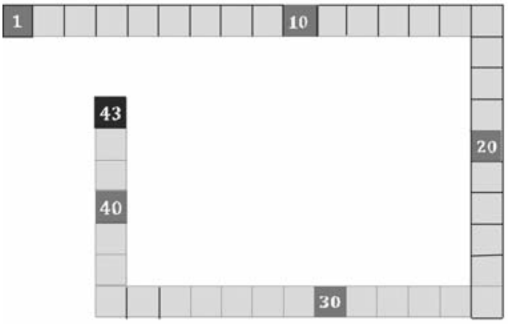


Figura 2. Gioco della corsa al numero, con pedine.

Domanda
Cercare, se esiste, una strategia vincente.

Commento
La consegna deve concernere unicamente le regole del gioco, dopo di che gli allievi, a due a due, iniziano a sfidarsi. In questo modo risulta persino inutile porre la domanda, perché sorge spontaneo in ogni allievo il desiderio di vincere.

Primo livello
Le strategie trovate dagli allievi -corrette, errate o incomplete- vengono testate. A mano a mano che si susseguono le diverse sfide, gli allievi iniziano a capire che chi riesce a dire 35 vince di sicuro. Infatti, in quel caso, l'avversario può al massimo raggiungere 42 e quindi perde. Un passo successivo consiste nel pensare come fare per raggiungere 35 e si scopre che un altro numero vincente è 27. La regressione 27 – 19 – 11 – 3 segue quasi automaticamente.

Quindi, per essere sicuri di vincere con il traguardo (T) 43 e il passo massimo (P) 7, occorre iniziare per primi e dire 3; successivamente occorre dire 11, 19, 27, 35, 43, ciò che è sempre possibile, indipendentemente dal numero scelto dall'avversario. Occorre sempre tener presente che vi sono parecchi percorsi risolutivi e che quindi quelli descritti in queste righe e nelle successive sono solo esempi.

Secondo livello
Se si esamina attentamente la successione vincente 3, 11, 19, 27, 35, 43, si capisce che ogni termine, tranne il primo, è ottenibile dal precedente addizionando 8, cioè 7+1 (7 è il passo massimo). L'analogia col problema precedente (o con uno che abbia la stessa struttura matematica), dovrebbe permettere di procedere più speditamente. Basta ricordarsi di partire dal numero 3 e proseguire di 8 in 8.

Terzo livello
Ultimo passo importante: determinare il numero di partenza. Sempre riflettendo sul problema della conta, si capisce che 3 non è altro che il resto della divi-

sione 43:8, o meglio il resto di 43:(7+1). Qui gli allievi sono di nuovo chiamati a mobilitare i concetti di divisione e di resto.

Questo risultato permette di effettuare un primo passo verso la generalizzazione. Così, se il traguardo fosse 99 e il passo 9, la strategia vincente consisterebbe nell'iniziare per primi scegliendo il numero 9 (resto della divisione 99:(9+1)) e dicendo di seguito i numeri 19, 29, …, 89, 99. Quando gli allievi hanno sufficiente dimestichezza con il calcolo letterale possono esprimere la strategia in termini generali, cioè «iniziare per primi scegliendo il resto della divisione T:(P+1) e poi continuare addizionando P+1 di volta in volta. E se l'avversario volesse giocare per primo? Il *fair play* dice di accettare comunque la sfida. Non si è però sicuri di vincere: tutto dipende dal numero di partenza scelto dall'avversario. Se non fosse il resto della divisione T:(P+1), si ha la strada spianata verso la vittoria. Altrimenti non resta che sperare che l'avversario non inanelli fino alla fine la successione vincente.

Un pregio particolare dei due problemi presentati consiste nel fatto che l'elemento centrale dell'iter risolutivo è il resto di una divisione, che, solitamente, nella scuola, riveste un ruolo secondario.

7.3. Uno strano modo di distribuire caramelle

Marisa vuole distribuire ai suoi amici le caramelle che tiene in un sacchetto. Li dispone in cerchio e li fa numerare da 1 a 15, come mostra, più avanti, la figura 3.

Procede quindi alla distribuzione così:
- compie un primo giro e dà a ciascuno una caramella;
- compie un secondo giro e dà una caramella agli amici che occupano un posto pari;
- compie un terzo giro e dà una caramella agli amici che occupano un posto divisibile per 3;
- continua così fino al quindicesimo giro nel quale dà una caramella a ogni amico che occupa un posto divisibile per 15 (quindi solo al numero 15).

Fatto questo, le rimangono 3 caramelle che tiene per sé.

Domande possibili

Quante caramelle aveva Marisa nel sacchetto?
Chi dei suoi amici ne ha ricevute di meno? Chi di più?
Che qualità deve avere il numero di chi riceve più caramelle?

Primo livello

La situazione può essere proposta mediante una piccola messa in scena. Si mettono in cerchio 15 allievi (o magari 12, come nel quadrante di un orologio, o…) e un altro procede alla distribuzione delle caramelle, seguendo correttamente il modo comunicato dall'insegnante. Alla fine, con pazienza e metodo, si contano le caramelle.

Come alternativa, si può eseguire un calcolo che, come sempre, può essere affrontato in più modi, per esempio così:

$$1+2+2+3+2+4+2+4+3+4+2+6+2+4+4+3 =$$
$$= 1+2\cdot 6+3\cdot 3+4\cdot 5+6 = 10+20+12+6+3=48$$

Secondo livello

La consegna testuale scritta, così come presentata sopra o in altre forme, può essere data ad allievi che non hanno problemi di lettura e comprensione di un testo, per esempio alle medie. Questi potrebbero rappresentare la situazione mediante uno schizzo e simulare la distribuzione di caramelle, per esempio con dei trattini come fanno i giocatori di jass (vedere la figura 4).

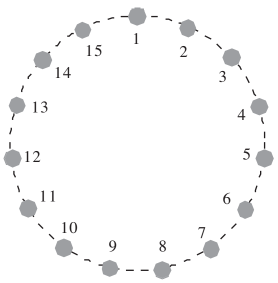


Figura 3. La disposizione in cerchio

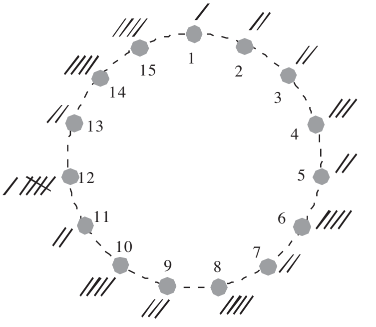


Figura 4. La distribuzione

La conversione dal registro testuale a quello iconico-figurale si rivela vincente. Fatta la simulazione non resta che esaminare la situazione.

Un semplice sguardo alla seconda figura permette di rispondere subito alle prime due domande. Chi occupa la posizione 1 riceve una sola caramella, cioè meno di tutti. Chi sta nelle posizioni 2, 3, 5, 7, 11, 13 riceve due caramelle. Tre caramelle corrispondono alle posizioni 4 e 9. Quattro caramelle sono per le posizioni 6, 8, 10, 14 e 15. Infine chi occupa la posizione 12 riceve il massimo di caramelle cioè 6. A Marisa ne restano 3. Il semplice calcolo ($1+2\cdot6+3\cdot2+4\cdot5+6+3=48$) permette di rispondere alla prima domanda.

La terza domanda stimola gli allievi a riflettere di più. Perché chi occupa la posizione 12 riceve più caramelle? In quali passaggi riceve la caramella?

Terzo livello

A questo punto è possibile rilanciare la riflessione.

Per esempio:

– che qualità hanno i numeri corrispondenti a due caramelle? Hanno due divisori, sono numeri primi!
– che qualità hanno i numeri corrispondenti a tre caramelle? Sono numeri quadrati, hanno 3 divisori, come per esempio 9 che ha i divisori (1, 3 e 9). Anche questa è una bella osservazione!

Nella discussione, prima o poi, emerge il fatto che 15 è numero troppo esiguo per verificare le osservazioni appena fatte. Può allora essere interessante chiedersi quali numeri sarebbe opportuno sostituire al 15 per raggiungere maggiore sicurezza, tenendo presente che numeri troppo grandi renderebbero troppo difficile sia la conta sia il calcolo.

7.4. L'amnistia[4]

Nella lontana Repubblica di Sikinia si celebra l'anniversario della costituzione. Per l'occasione, il presidente decide di concedere l'amnistia a un certo numero di carcerati. La prigione si compone di 16 celle, numerate da 1 a 16. In ogni cella c'è un carcerato. La porta di ogni cella, sull'esterno, ha una maniglia che può essere girata in due sole posizioni: aperta (A) o chiusa (C). All'inizio tutte le maniglie sono messe in posizione C. Il presidente, amante dei giochi matematici, dà al secondino l'ordine seguente.

Inizia dalla cella 1 e, una dopo l'altra, gira tutte le maniglie.

Poi ritorna all'inizio e gira, partendo dalla 2, le maniglie di tutte le celle di numero pari.

Di nuovo torna all'inizio e, partendo dalla cella numero 3, gira tutte le maniglie delle celle dal numero divisibile per 3.

Poi fa la stessa cosa con le celle divisibili per 4, poi con quelle divisibili per 5, e così via fin che l'ultima fatica sarà solo quella di girare la maniglia della cella 16 partendo dalla cella numero 16.

Domanda

Quali celle risulteranno aperte alla fine, permettendo così ai carcerati che le occupano di uscire di prigione?

Commento

La situazione è analoga alla precedente. Cambia solo la domanda e l'accento è messo sui numeri quadrati.

Primo livello

Nella nostra situazione, all'inizio, le maniglie sono in posizione C. Ogni volta che il secondino gira la maniglia di una cella, questa cambia di stato. Se durante l'intera operazione il secondino gira una sola volta la maniglia della cella, questa alla fine risulterà aperta (**C**→A) e il carcerato sarà liberato. Se il secondino gira due volte la maniglia la cella, alla fine, risulterà chiusa (**C**→A→C). Se girerà 3 volte la maniglia (**C**→A→C→A) la cella, alla fine, risulterà aperta, ecc.

Si deduce che saranno liberati i carcerati delle celle la cui maniglia viene girata un numero dispari di volte. Fin qui ci si può arrivare senza troppe difficoltà. È anche possibile rappresentare l'intera situazione mediante uno schema, scrivendo per esempio la successione dei numeri naturali da 1 a 16 e sotto di essa segnando alternativamente con A e con C lo stato delle maniglie a ogni passaggio. Si scoprirà allora che le celle che rimarranno libere portano i numreri: 1, 4, 9 e 16.

Secondo livello

Se osserviamo i numeri 1, 4, 9 e 16 (quelli delle celle che rimarranno aperte alla fine), si costata che sono numeri quadrati e che hanno 1, 3 e 5 divisori. Possiamo intuire che, forse, sono proprio i numeri quadrati che hanno un numero dispari di divisori?

4. Da un'idea di Arthur Engel, matematico e didatta tedesco.

Terzo livello

La riflessione sul numero di divisori può essere formalizzata, per esempio, in questo modo:

se $n = d_1 \cdot d_2$ diciamo che (d_1,d_2) è una coppia di divisori complementari. Ciò significa che ogni numero n possiede k coppie di divisori complementari, cioè 2k divisori? Sì, tranne in un caso, quando una coppia di divisori complementari è del tipo (a,a), cioè quando $n = a \cdot a$, dunque quando n è un numero quadrato.

La versione originale di Arthur Engel parla di 100 celle. Sarebbe umanamente impossibile simulare il lavoro del secondino. Conoscendo però i risultati appena ottenuti, si può rispondere senza più dubbi che alla fine rimangono aperte le celle 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 e 100.

Gli insegnanti troppo preoccupati dalla necessità di raggiungere il risultato potrebbero giudicare questo problema troppo difficile per allievi della scuola obbligatoria. Pensiamo invece al lato formativo, cioè al percorso che gli allievi compiono riflettendo, provando, discutendo tra di loro, anche cogliendo gli stimoli che l'insegnante – sempre in modo discreto e interlocutorio – ritiene di poter dare e concludiamo che vale la pena tentare.

7.5. Distribuzione di cioccolatini

Gianni ha un sacchetto pieno di cioccolatini. Li vuole distribuire in tre cestini in questo modo: inizia a mettere un cioccolatino nel primo cestino in alto e poi compie un percorso composto di un certo numero di movimenti «giù-su» come indicato nella figura seguente. Ogni volta che incontra un cestino, vi mette un cioccolatino.

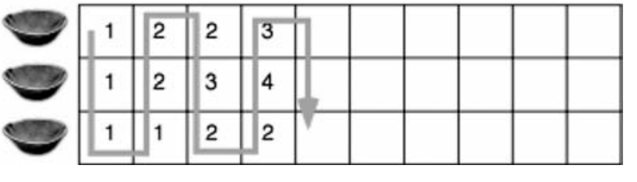


Figura 5. Tabella illustrativa della distribuzione di cioccolatini.

Domande possibili

– Come continua la tabella?
– Che cosa rappresentano i tre numeri dell'ultima colonna?
– Quanti cioccolatini distribuirebbe Gianni se facesse 10 «giù-su»?

Primo livello

La consegna può essere data eseguendo davanti alla classe la distribuzione dei cioccolatini in tre contenitori allineati. La stessa operazione può essere fatta, a turno, dagli allievi stessi. Così dovrebbe essere chiarita anche la struttura della tabella che gli allievi devono completare.

1	2	2	3	3	4	4	5	5	6
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	2	3	3	4	4	5	5

Figura 6. Tabella completata.

Una prima difficoltà consiste nel capire che le colonne significative sono quelle di ordine pari (ogni movimento «giù-su» è rappresentato da due colonne). I tre numeri dell'ultima colonna rappresentano il numero di cioccolatini che si trovano nei tre contenitori dopo 5 «giù-su», cioè 6+10+5=21.

Per rispondere alla terza domanda si può continuare la distribuzione manuale dei cioccolatini fino al decimo «giù-su» ed eventualmente prolungare di conseguenza la tabella.

1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10

Figura 7. Tabella estesa e completata.

Dalla tabella si ricava che dopo 10 «giù-su» si sono distribuiti 11+20+10=41 cioccolatini.

Secondo livello

Agli studenti più grandicelli si potrebbe dare il testo e la tabella da completare. Fatto questo, si invitano gli stessi a cercare di intuire come continuano i numeri di ciascuna riga, senza ricorrere alla distribuzione manuale. La prima osservazione potrebbe essere quella relativa alla terza casella dall'alto. Essa porta il numero progressivo delle operazioni «giù-su» effettuate. Così il terzo numero della terna relativa al decimo «giù-su» sarà 10. Altra osservazione: il primo numero (in alto) è un'unità in più del terzo numero. Infine il numero di mezzo sembra essere il doppio del terzo. Di conseguenza, la terna corrispondente alle 10 operazioni «giù-su» potrebbe essere (11, 20, 10) e i cioccolatini distribuiti sarebbero 11+20+10=41. Ovviamente non si dimostra nulla, si intuisce soltanto.

Terzo livello

Si potrebbe non dare la tabella, solo spiegare come avviene la distribuzione. In questo caso, per rispondere alla terza domanda si potrebbe ragionare direttamente sui totali dei cioccolatini distribuiti nelle successive operazioni «giù-su». È più impegnativo, ma si presta meglio per la generalizzazione. L'idea vincente consiste nell'osservare la successione 5, 9, 13, 17, 21, ecc. In essa, ogni termine, tranne il primo, è ottenibile addizionando 4 al precedente. Con un po' di pazienza, dopo 10 «giù-su», si troverebbe che i cioccolatini distribuiti sono 41.

Quarto livello

Ma si può fare di più, per esempio osservare (in un modo o in un altro) che se n è il numero di «giù-su» e f(n) il numero di cioccolatini distribuiti all'ennesimo «giù-su», si può scrivere:

n=1 f(1) = 5 = 4 · 1 + 1
n=2 f(2) = 9 = 4 · 2 + 1
n=3 f(3) = 13 = 4 · 3 + 1
n=4 f(4) = 17 = 4 · 4 + 1
n=5 f(5) = 21 = 4 · 5 + 1
(…)
n=10 f(10) = 4 · 10 + 1 = 41
in generale:
f(n) = 4 · n + 1

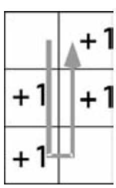
Infine si potrebbero anche considerare tutte le colonne e i loro totali. Si otterrebbe la successione 3=2·**1**+1, 5=2·**2**+1, 7=2·**3**+1, 9=2·**4**+1, 11=2·**5**+1, 13=2·**6**+1, 15=2·**7**+1, 17=2·**8**+1, 19=2·**9**+1, 21=2·**10**+1. Si osserva allora che i numeri scritti in grassetto coincidono con il numero progressivo delle colonne e ogni termine della successione rappresenta il numero di cioccolatini distribuiti fino a quel punto. Quindi dopo 10 «giù-su», nell'ultima colonna (che è la ventesima) si troverebbero 2·20+1=41 cioccolatini. In generale, se k è il numero di colonne, la k-esima colonna conterrebbe 3 numeri la cui somma è 2·k+1. Si nota infine che k=2 n, perciò, se operiamo una semplice sostituzione, possiamo scrivere f(n) = 2 (2 n) + 1 = 4 n + 1. Raggiungiamo così, non senza soddisfazione, il risultato di prima.

Quinto livello

Con studenti delle superiori, si può anche dare carattere rigoroso ai risultati intuiti. Occorre impostare una dimostrazione per induzione completa. Per esempio, in questo modo.

1) **Ancoraggio**: f(1) = 4 · 1 + 1 = 5
2) **Ipotesi di induzione**: f(n–1) = 4 (n–1) + 1 = 4 n – 3
3) **Tesi di induzione**: f(n) = 4 n + 1

Nel passaggio dallo stato n–1 allo stato n, si aggiungono 4 cioccolatini, come risulta dal seguente schema:



Perciò: f(n) = f(n–1) + 4 = (4 n – 3) + 4 = 4 n + 1

4) **Conclusione**: la formula f(n) = 4 n + 1 è vera per n=1 (1), se è vera per n–1, allora è vera per n (2); dunque è vera per n = 1, 2, 3, 4, …, per tutti gli n naturali[5].

Ovviamente il risultato, nei primi quattro livelli, è stato ottenuto per intuizione, dunque va accettato con riserva. Ma in questo contesto lo scopo principale è

5. Ricordo, solo agli insegnanti, che la dimostrazione per induzione completa è equivalente al quinto assioma di Peano dei numeri naturali (1891). Dunque questa particolare dimostrazione può essere ritenuta rigorosa solo se l'assiomatica di Peano lo fosse, ciò che invece è stato negato dai lavori di Kurt Gödel (1931). Sta di fatto che la dimostrazione è usata da quasi tutti i matematici, anche perché, in casi come il nostro, non vi sono alternative.

appunto di sviluppare la capacità di intuire in situazioni numeriche. Il valore formativo sta tutto nelle operazioni mentali che l'allievo compie per giungere a formulare una congettura, ingenua (primo livello), più raffinata (secondo livello), importante (terzo livello), formalizzata (quarto livello).

7.6. Le confezioni regalo

La mamma ha comperato 3 bottiglie di vino bianco, 3 di vino rosso e 3 di spumante. Vuole preparare una confezione regalo di 3 bottiglie.

Figura 8. Le 9 bottiglie di vino.

Domanda
In quanti modi la mamma potrebbe realizzare la confezione?

Commento
La situazione potrebbe anche essere presentata in forme diverse. Per esempio, al posto delle bottiglie di vino si potrebbero considerare 9 palline da tennis, 3 bianche, 3 gialle e 3 arancioni. O altro, basta non cambiare la struttura matematica. Nella consegna (che potrebbe anche essere raccontata o presentata con manipolazione di oggetti) non si dice nulla su come devono essere le confezioni. Per esempio, una confezione potrebbe contenere 3 bottiglie tutte di rosso (R-R-R) o una bottiglia per qualità (R-B-S). Se si adotta la situazione «bottiglie», occorre anche chiarire che, almeno per ora, le 3 bottiglie di una stessa qualità di vino sono identiche (non distinguibili) e inoltre che l'ordine con cui sono messe non conta, per cui R-R-S è la stessa cosa di R-S-R e di S-R-R. È sconsigliabile porre queste condizioni nella consegna perché, oltre che appesantire quest'ultima, difficilmente sarebbero accolte dagli allievi, se non solo per il fatto che «fanno parte del problema». È molto meglio che si arrivi a stabilire queste (o altre) condizioni, nel momento in cui gli allievi si chiedono come potrebbero essere due confezioni diverse. Allora sì che acquistano importanza.

Primo livello
Gli allievi iniziano a identificare alcune possibili confezioni. Per esempio, R-R-R, B-B-B e S-S-S. Con le tre bottiglie della stessa qualità si possono formare 3 diverse confezioni.

Con tre bottiglie fra loro diverse c'è una sola possibilità R-B-S (visto che l'ordine non conta). Con due bottiglie di rosso si possono formare 2 confezioni diverse: R-R-B e R-R-S, così come con due di bianco e con due di spumante. Ci sono altre possibili confezioni? Sembrerebbe di no. In totale abbiamo contato $3+1+2\cdot 3=10$ confezioni diverse.

Secondo livello

Allo stesso risultato si potrebbe giungere con una tabella di questo tipo:

R	B	S
3	0	0
0	3	0
0	0	3
1	1	1
2	1	0
2	0	1
1	2	0
0	2	1
1	0	2
0	1	2

Figura 9. Esempio di tabella risolutiva per le confezioni di 3 bottiglie.

L'insegnante, deve fare bene attenzione che tutti gli allievi capiscano il significato della tabella e sappiano operare correttamente la conversione dal registro manipolatorio a quello schematico e viceversa, ciò che non è del tutto scontato. Il pregio della tabella è la sua qualità sinottica, che aiuta non solo a trovare le 10 confezioni possibili, ma garantisce che non ce ne sono altre. Ecco un chiaro esempio nel quale la conversione da un registro semiotico a un altro induce una notevole semplificazione dell'iter risolutivo.

Terzo livello

Rilanciamo il problema. Le qualità di vino sono ancora le tre di prima, ma a disposizione vi sono 4 bottiglie per qualità e le confezioni devono essere di 4 bottiglie. Vista la comodità della tabella, si potrebbe subito sfruttare questo prezioso aiuto. La tabella va però adattata. In didattica si parla di trattamento all'interno del registro (nel nostro caso di quello schematico). Ecco un esempio di adattamento.

R	B	S
2	1	1
1	2	1
1	1	2
0	2	2
2	0	2
2	2	0
0	1	3
0	3	1
1	0	3
3	0	1
1	3	0
3	1	0
4	0	0
0	4	0
0	0	4

Figura 10. Esempio di tabella risolutiva per le confezioni di 4 bottiglie.

Ovviamente la distribuzione dei numeri nella tabella non deve essere necessariamente questa. La cosa importante è che, comunque si proceda, occorre farlo seguendo criteri chiari ed esaustivi. Qui si è partiti con la considerazione che almeno due delle quattro bottiglie di ogni confezione devono essere identiche. Queste due possono essere o B o R o S, quindi 3 diverse confezioni possibili e nessun'altra (non si dimentichi che la somma dei numeri di ogni riga dev'essere 4). Si è poi continuato mettendo un solo 0 per ogni riga: con 0 e due 2 ci sono 3 possibilità (a seconda dove si colloca lo zero) e con 0 , 1 e 3 si sono trovate 6 diverse confezioni. Infine con due 0, vi sono tre possibilità (a seconda dove si colloca il 4). In totale si hanno perciò 15 diverse confezioni.

Anche se con difficoltà maggiore, la redazione di una simile tabella richiede, come nel livello precedente, l'adozione di un criterio chiaro ed esaustivo. Ciascuno può costruirsi il proprio criterio. La maggior valenza cognitiva dell'iter risolutivo sta proprio in questa attività.

Quarto livello

A questo punto, con allievi più in avanti negli studi, potremmo iniziare una riflessione generale, staccandoci dalla situazione proposta e ragionando in astratto. Nella seconda tabella si possono riconoscere allineamenti del tipo <abb> (nelle prime sei righe e nelle ultime tre) e allineamenti del tipo <abc> nelle righe restanti. Di allineamenti del tipo <abb>, cioè formati di solo due lettere delle quali una è ripetuta, ce ne sono 3: <abb>, <bab> e <bba>, a seconda dove si colloca l'elemento a. Ora però, siccome nel nostro caso a+b+b=4, si hanno 3 allineamenti base: <2,1,1>, <0,2,2> e <4,0,0>, per cui in totale abbiamo 3·3=9 diverse confezioni.

Di allineamenti del tipo <abc> ve ne sono 6 (2 con a al primo posto, 2 con b al primo posto e 2 con c al primo posto). Inoltre esiste una sola scomposizione additiva di 4 con 3 addendi diversi: 0+1+3. Abbiamo quindi 6 confezioni diverse. Altri casi sono esclusi. Dunque in totale la mamma può realizzare la confezione in 9+6=15 modi diversi.

Ci tengo a sottolineare che l'iter risolutivo descritto non è affatto l'unico adottabile. Come ogni buon problema, anche in questa situazione ci si può muovere in piena libertà.

Bibliografia

Arrigo G. (2014). Conversioni e trattamenti semiotici nel *problem solving*. *Bollettino dei docenti di matematica, nr. 69*, 85-104. ISBN 978-88- 86486-91-0

Arrigo G. (2015). Problemi per tutti. *Bollettino dei docenti di matematica, nr. 70*, 81-102. ISBN 978-88- 86486-92-7

Arrigo G. (2016). Sull'introduzione dell'allievo al calcolo letterale. *Alice & Bob, Algebra in Europa,* 93-104. Milano: EGEA, Centro Pristem Università Bocconi. ISBN: 978-88-238-6196-1

Bolondi G., D'Amore B. (2010). *La matematica non serve a nulla, provocazioni e risposte per capire di più*. Bologna: Editrice Compositori.

D'Amore B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Prefazioni di Gérard Vergnaud e di Silvia Sbaragli. Modena: Digital Index. [Versione cartacea e versione e-book].

Sbaragli S., Santi G. (2012). Le scelte dell'insegnante relative al concetto di angolo. *Bollettino dei docenti di matematica. 65*, 35-55. ISBN 978-88- 86486-87-3.

3. Laboratorio di matematica: un'occasione per lo sviluppo di competenze pro-sociali[1]

Marina Casson[2]

This article summarizes the work done with some middle school 4th year students in Ticino concerning statistics and, more specifically, the teenagers' use and disposal of mobile phones. A question was raised about how dealing with statistics contents in a special problem-based environment, the so-called «laboratory of mathematics», could not only help the development of pro-social behaviors and collaboration, but also promote a change in the general attitude towards mathematics.

1. Introduzione

La scuola come istituzione si pone molti obiettivi su vari livelli, sia come formazione culturale di un individuo, sia come educazione e formazione di futuri cittadini. La mia breve esperienza di insegnamento mi ha mostrato come sia talvolta difficile motivare allievi di un corso base ad attività e temi riguardanti la matematica. Questo mi ha spinto a cercare modalità di gestione della lezione e temi atti a coinvolgere e motivare fortemente gli allievi.

La scelta è caduta sullo smaltimento dei telefoni cellulari abbinato ad un'attività di statistica. L'argomento si colloca nell'ambito dello sviluppo sostenibile, in un'area molto vicina ai ragazzi, cosiddetti «nativi digitali», generalmente attratti da queste tecnologie. Durante il percorso ho potuto constatare la grande efficacia di questo tema, soprattutto per quel che concerne la motivazione e l'interesse.

2. Quadro di riferimento teorico

La motivazione ad apprendere può essere definita come il grado di impegno cognitivo investito per il raggiungimento di obiettivi scolastici (Johnson & Johnson, 1989).

Brophy e Kher (1986) hanno proposto di distinguere due tipi di motivazione: una che si manifesta come tratto di personalità e una che si manifesta come stato. Nella prima accezione il concetto si riferisce a una disposizione generale che permette a uno studente di percepire l'apprendimento come un'attività intrinsecamente valida. Intesa come stato, la motivazione ad apprendere spinge gli studenti a impegnarsi nelle

1. Sintesi del master per l'insegnamento nella scuola media, DFA Locarno, anno 2013/2014; relatore: prof. Patrizia Renzetti.
2. Insegnante alla Scuola Media di Biasca.

attività di classe ma, di norma, non implica che i compiti debbano essere percepiti particolarmente interessanti. Lee e Brophy (1996) ipotizzano che tali studenti tendano prevalentemente a vivere lo studio con un senso di dovere, di impegno e di responsabilità.

Si possono trovare svariate strategie per stimolare la curiosità degli allievi e favorire la loro motivazione ad apprendere. Ci si limita ora a esporre quelle più usate.

Promuovere un senso di auto-efficacia

È ormai riconosciuta l'importanza di promuovere nei ragazzi un senso di fiducia nelle proprie capacità di apprendimento. Forme di pensiero diverse emergono prima di intraprendere un'attività: «…non ho qualità positive dentro di me…», «…sarò in grado di portare a termine questo compito…», «…l'insegnante ce l'ha con me…», «…questa scuola è troppo difficile…» (Bandura, 1977; Bar-T al, 1985; Harvey & Weary, 1984). La motivazione ad apprendere è, dunque, il risultato di convinzioni sviluppate nel tempo e riguardanti le proprie capacità scolastiche.

Favorire interazioni positive

Secondo Johnson & Johnson (1989), la motivazione ad apprendere può essere sviluppata da contesti di interazione interpersonale positivi: ossia, si può verificare una forte connessione tra obiettivi scolastici, processi interpersonali e motivazione ad apprendere. Mentre i primi sono oggettivi, esterni e proposti da un curricolo, la motivazione al loro raggiungimento può essere favorita da specifici contesti sociali di apprendimento. È attraverso l'incontro, lo scambio, la relazione con gli altri che lo studente impara a valorizzare l'apprendimento in sé stesso e prova gratificazione per l'acquisizione della conoscenza e dello sviluppo delle sue capacità.

Rendere significativo l'apprendimento

La motivazione ad apprendere può dipendere, inoltre, dal grado con cui gli argomenti di studio assumono un carattere di rilevanza personale. In questa linea di ragionamento si può affermare che la creazione di un ponte tra le conoscenze scolastiche da acquisire e quelle già acquisite è determinante ai fini motivazionali. Si tratta, dunque, di «dare un senso» ai contenuti e alle attività proposti (Gentile, 1998).

3. Principi psico-pedagogici

Presento in sintesi i principi teorici di psico-pedagogia che hanno accompagnato la pianificazione e realizzazione di questo progetto.

Il laboratorio

L'elemento portante di questo lavoro è il laboratorio di matematica, in generale inteso come una qualsiasi situazione didattica che presenti il carattere dell'apprendimento attivo (Baldacci, 2005).

Il laboratorio è un luogo privilegiato per l'apprendimento: esso propone agli allievi una dimensione operativa e progettuale nella quale devono muoversi per risolvere un problema, mobilitando le conoscenze pregresse e passando così per le fasi che Piaget chiamerebbe di assimilazione e accomodamento. Il laboratorio può essere visto come uno spazio nel quale il sapere e le competenze si costruiscono, non si acquisiscono (Mattozzi, 2003).

Il seguente schema rappresenta le idee principali che stanno alla base di un laboratorio:

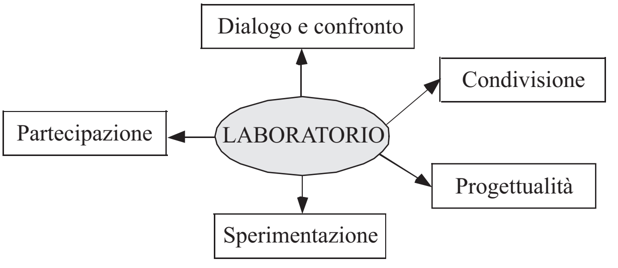


Figura 1. Idee fondamentali per un laboratorio

La concezione comune di didattica si fonda sulla trasmissione «frontale» di conoscenze. Sarebbe errato considerare l'imparare ascoltando come una forma di apprendimento necessariamente passiva: esiste anche un ascolto attivo, in cui l'alunno cerca attivamente di capire e di collegare il contenuto della comunicazione con la propria esperienza e con le proprie conoscenze.

Tuttavia, questa forma di apprendimento è sostanzialmente limitata alla riorganizzazione delle conoscenze che l'individuo possiede da altre fonti esperienziali (Olson, 1979). L'apprendimento dall'esperienza è dunque una componente necessaria della formazione. Ovviamente, dall'esperienza si impara anche al di fuori della scuola; tuttavia, mentre provvede a rifornire gli alunni di strumenti cognitivi necessari per riorganizzare queste esperienze, la scuola deve preoccuparsi anche di accrescere il loro bagaglio esperienziale.

L'interesse verso una pedagogia detta «attiva» ha radici antiche e ha raggiunto il suo vero sviluppo grazie a John Dewey, il cui pensiero si basa su una filosofia dell'esperienza. Il ruolo dell'insegnante è quello di porre gli allievi davanti ad una situazione problema, e metterli poi nella condizione di trovare soluzioni seguendo i propri processi logici, facendo tentativi, insomma facendo esperienza.

Altri esponenti legati a metodi attivi sono, per citarne alcuni: Johann Heinrich Pestalozzi (1746-1827), che sottolineò l'importanza delle attività di gruppo; Maria Montessori (1870-1952), che sviluppò un metodo nel quale i bambini imparano, in modo indipendente, dal loro ambiente e da ciò che manipolano direttamente; Jean Piaget (1896-1980), che distingue diverse fasi durante lo sviluppo cognitivo, a partire da uno stadio senso-motorio estremamente concreto, fino a quando l'individuo riesce a formulare pensieri astratti.

Il pensiero fondante della pedagogia attiva, comune agli autori citati, è il muoversi dall'azione alla conoscenza, piuttosto che dalla conoscenza all'azione.

Come si legge in «Il laboratorio come ambiente per l'insegnamento e l'apprendimento» di Maria Reggiani (2008), lo studente si appropria di una conoscenza tramite un processo che, partendo da un'attività, attraverso prove ed errori, osservazioni, esperimenti, controllo di ipotesi, lo conduce a rielaborare intellettualmente quanto da lui esperito, a formulare nuove idee e a verificarle.

Fra gli elementi che caratterizzano un'attività di laboratorio (di matematica) sono centrali:

– un problema da affrontare;
– la presenza di oggetti / strumenti che si possano manipolare;
– la modalità di lavoro (relazioni – interazione);
– la presenza e il ruolo del docente coordinatore.

Fondamentali ed altrettanto importanti sono gli aspetti sociali dell'apprendimento come la comunicazione fra insegnante e alunni o fra alunni.

Questi entrano in gioco soprattutto nel lavoro di gruppo (collaborazione) e nella discussione in classe (comunicazione e condivisione delle conoscenze).

Il lavoro di gruppo

Lavorare in gruppo non è una competenza innata negli allievi: essi vanno formati alla collaborazione. Lavorare in gruppo favorisce l'apprendimento di nozioni o abilità attraverso un approccio diverso, «partecipato». Nel gruppo si possono valorizzare i partecipanti, le loro competenze, stimolare la loro attenzione. Compito del conduttore del gruppo è creare un ambiente che consenta effettivamente di raggiungere questi obiettivi.

Più in dettaglio, il lavoro di gruppo dovrebbe articolarsi attorno a un problema la cui risoluzione richieda necessariamente la partecipazione di tutti i membri del gruppo. Il compito deve essere sufficientemente complesso da rappresentare una sfida accettabile per gli allievi e concludersi con un prodotto concreto che possa essere apprezzato e valorizzato.

Dopo aver attribuito le consegne ed esplicitato il risultato atteso, il docente dovrebbe distanziarsi e concedere a ogni gruppo l'autonomia necessaria affinché l'attività possa funzionare. In ogni gruppo bisogna osservare soprattutto la comunicazione fra i membri di questo, il clima e l'energia nel gruppo, l'ascolto fra i membri, la leadership e i ruoli che vengono presi dai vari componenti: sono queste le caratteristiche che saranno osservate e commentate nelle *check-list*.

L'ambiente e il clima sono fondamentali in quanto ognuno deve sentire di potersi esprimere liberamente, nei limiti del rispetto e sostegno reciproco. Coordinare un gruppo significa tener presente come ogni individuo possa influenzarlo e, nello stesso tempo, il suo comportamento essere influenzato dal gruppo.

Un momento delicato è rappresentato dalla messa in comune che può rivelarsi ridondante. Una buona soluzione, adottata in questo lavoro, è quella di raccogliere le varie produzioni, metterle assieme e discuterne in un secondo momento.

La discussione

Altro elemento sempre presente in questo percorso è la discussione, sia tra il docente e la classe, sia tra allievi. Si è cercato veramente di usare questo strumento ogni volta che si potesse in quanto essa contribuisce a creare e mantenere un buon clima di lavoro, favorendo partecipazione, condivisione, ascolto e rispetto.

Per essere proficua, una discussione in classe deve far emergere contributi originali degli allievi, farli interagire tra loro. Anche nella tradizione scientifica francese, il cosiddetto *débat scientifique* è applicato alla matematica sia al livello della scolarità obbligatoria, sia a livelli più avanzati. Il ruolo fondamentale dell'insegnante è di moderare il dibattito: l'attenzione è posta soprattutto sul ruolo dei conflitti socio-cognitivi (Doise & Mugny 1981), cioè nei conflitti che si presentano, nell'interazione tra pari, quando una strategia è esplicitamente contraddetta da un'altra persona che prende parte alla discussione. Caratteristica irrinunciabile della discussione deve essere la presenza di più «voci», dove con il termine «voce» si intende una forma di discorso e di pensiero che rappresenti il punto di vista di un soggetto (Bartolini Bussi, Boni, Ferri, 1995). Questo tradizionalmente non succede nelle classi, anzi si tende a eliminare o trascurare le «voci» divergenti, dalle quali bisognerebbe invece cogliere gli aspetti interessanti, e lasciare agli allievi il compito di scartarle se lo ritengono necessario.

4. Principi matematico-didattici

Presento alcuni principi teorici relativi alla statistica in sé, e alla sua didattica. Nella pianificazione di questo itinerario si è tenuto conto degli obiettivi presenti nel Piano di Formazione per la matematica1[3].

Scopo dell'educazione al pensiero statistico è di infondere nell'allievo l'abitudine a considerare matematicamente un insieme di dati già raccolti o da raccogliere, allo scopo di scoprire alcune loro caratteristiche (Arrigo, 2008). Per esempio, è importante fare in modo che l'allievo riesca ad identificare un valore rappresentativo adeguato e che sappia confrontarne l'attendibilità con quello di altre raccolte di dati. È altresì importante che gli allievi comprendano il giusto significato di alcuni termini statistici di uso comune.

Ci si dovrà anche aiutare con rappresentazioni grafiche adeguate e comode da leggere, il che costituisce un bell'esempio di attività di apprendimento semiotico (Fandiño Pinilla, 2008). Inoltre, è utilissimo predisporre un foglio elettronico per la raccolta e l'elaborazione dei dati. Si parla, in questi casi, di *Statistical literacy* (Gal, 2002), intendendo la capacità di un individuo di interpretare e valutare criticamente dati statistici e l'abilità nel discutere e argomentare le sue reazioni davanti a tali informazioni. Gal evidenzia l'importanza di includere queste competenze negli obiettivi educativi della scuola, sottolineando l'importanza di sensibilizzare alla validità o meno di determinati studi. D'altronde, è una finalità generale della scuola quella di fornire metodi e strumenti per affrontare in modo critico e formalizzare problemi complessi.

Solo per fare un esempio, ricordiamo come dai giornali e dai telegiornali vengano periodicamente diffuse informazioni di tipo quantitativo, statistico, che, se divulgate scorrettamente (in modo conscio o inconscio) e acquisite acriticamente, possono produrre disinformazione, piuttosto che fornire strumenti per una adeguata comprensione dei fenomeni che vogliono descrivere.

La statistica è nata dall'esigenza di collettività organizzate, come gli Stati, di conoscere quantitativamente gli aspetti rilevanti della popolazione. Si hanno testimonianze di censimenti da varie epoche e civiltà, fino all'inizio del Novecento quando alla Statistica si riconosce autonomia come disciplina metodologica e viene definita come scienza che studia in generale i fenomeni collettivi.

3. Applicare i concetti di media aritmetica, mediana e moda, come valori centrali o rappresentativi.Usare il foglio elettronico per lavorare su quantità non banali di dati significativi; ripartire i dati in classi, costruire l'istogramma delle frequenze.

Nel corso di uno studio statistico si parla di popolazione come un insieme di individui o unità statistiche considerati omogenei rispetto a una o più caratteristiche legate al fenomeno che si intende studiare; di ogni unità statistica si studiano i caratteri, cioè le caratteristiche su cui si intende indagare, che possono essere qualitativi o quantitativi. Un'indagine statistica si può articolare in quattro fasi fondamentali (Rossi, 2003): pianificazione e rilevazione; elaborazione; presentazione; interpretazione.

In questo lavoro ci si limita a presentare le prime due fasi, mentre la parte di presentazione e interpretazione è stata affrontata con i ragazzi ma non è qui descritta.

Nella prima fase si acquisiscono le informazioni sulle caratteristiche di interesse per ciascuna unità statistica. Quando si pianifica e dirige una rilevazione di dati bisogna stabilire chiaramente quale sia il complesso di informazioni che la stessa deve fornire. Prima di costruire il questionario che gli allievi hanno somministrato agli studenti della sede, è stato necessario uno studio del problema e una delineazione degli obiettivi. Questa fase è necessaria al gruppo classe per entrare nel vivo del tema, stimolare la curiosità e conoscere la situazione. Nella fase di elaborazione, i dati rilevati e registrati nell'apposita matrice vengono classificati e sintetizzati per essere di più facile interpretazione. L'obiettivo è di mettere in luce le caratteristiche di interesse per lo studio del fenomeno collettivo considerato.

Le analisi statistiche consistono, essenzialmente, nell'applicazione di metodologie appropriate per sintetizzare le informazioni contenute nella matrice dei dati. Nel caso «univariato» si tratta di analisi su una colonna per volta, nel caso «bivariato» si prendono in considerazione due colonne congiuntamente con lo scopo di evidenziare possibili connessioni e relazioni tra le variabili corrispondenti. Il caso bivariato, in classe, è stato accennato a fine percorso per completezza. Una volta che si ha una rappresentazione più compatta dei dati, una distribuzione statistica, si può trarre l'informazione che questa contiene attraverso le frequenze assolute e relative. È possibile, poi, fornire rappresentazioni grafiche delle distribuzioni statistiche sotto forma di istogrammi, diagrammi a torte, ecc.

Per quanto riguarda valori significativi e rappresentativi della distribuzione, si parla di indici di posizione e di dispersione, i quali forniscono informazioni su «intorno a dove» si addensi la distribuzione, «in quale misura» questo accada, se siano presenti asimmetrie o particolarità nella sua forma (Rossi, 2003). I principali, da noi utilizzati, sono la media aritmetica, la moda, la mediana e lo scarto semplice medio.

Per quanto riguarda l'aspetto didattico, sicuramente la modalità laboratoriale ben si presta per questi scopi, oltre a una scelta mirata del tema (in questo caso il telefono cellulare) che deve catturare la loro attenzione e curiosità.

5. Disegno di ricerca

In questo lavoro di ricerca-azione si propone un percorso didattico a una quarta media (corso base), che si snoda attraverso un laboratorio di matematica in cui sono sviluppate sia competenze prettamente matematiche sia competenze sociali.

Tale percorso fa riferimento agli obiettivi presenti sul piano di formazione: si tratta di effettuare uno studio statistico sull'uso e sullo smaltimento del telefono cellulare nella sede considerata.

Domande di ricerca

I. La trattazione di contenuti statistici svolti attraverso un laboratorio di matematica può sviluppare competenze pro-sociali di tipo collaborativo?
II. L'utilizzo di una metodologia laboratoriale promuove un cambiamento dell'atteggiamento generale nei confronti della matematica?

Le ipotesi:
I. L'insegnamento/apprendimento nelle modalità indicate da un laboratorio di matematica, che abbia una determinata struttura (un problema da affrontare, la ricerca di soluzioni attraverso prova ed errore, una strutturazione organizzativa che favorisca l'autonomia degli allievi, una organizzazione sociale in piccoli gruppi) contribuisce a promuovere il coinvolgimento attivo, l'apprendimento cooperativo e lo sviluppo di abilità sociali quali: chiedere e dare aiuto, aiutare a organizzare materiale, organizzare, esprimere e condividere sentimenti…
II. La modalità di laboratorio matematico contribuisce alla crescita di una motivazione intrinseca e all'acquisizione di un atteggiamento positivo nei confronti della materia.

Metodologia

La ricerca si sviluppa su due piani fondamentali: uno disciplinare e uno psico-pedagogico, i quali si intrecciano e formano un itinerario complesso, composto di diverse strategie.

Per quanto riguarda l'ambito disciplinare, si definiscono le preconoscenze degli allievi con una prova iniziale, in particolare testando la criticità del loro pensiero in presenza di situazioni statistiche. Si mettono poi gli allievi in situazione utilizzando la modalità di laboratorio matematico, dando loro l'obiettivo di creare un questionario da somministrare a tutti gli studenti dell'istituto. I dati raccolti grazie a tale questionario (riguardanti il telefono cellulare) vengono poi raccolti ed elaborati.

In definitiva, il laboratorio propone: un problema da affrontare, la presenza di oggetti e strumenti che si possano manipolare (prima il questionario, poi i dati raccolti) e la presenza di un esperto coordinatore. È prevista infine una prova sommativa.

Sul piano psico-pedagogico, lo strumento principale è il sociogramma, uno strumento di osservazione e acquisizione di informazioni sul clima generale di preferenze e rifiuti relazionali della classe. Quest'ultimo serve a definire il punto di partenza (per l'aspetto sociale), il termine di paragone grazie al quale si potranno tirare le conclusioni finali riguardo alle relazioni sociali che intercorrono in questo gruppo classe. Lo svolgimento è il seguente: viene sottoposto un questionario agli allievi chiedendo loro con quali persone preferirebbero svolgere un compito o passare un pomeriggio insieme. Domande diverse possono indagare aspetti diversi: capacità cognitive o aspetti relazionali-affettivi. Il questionario proposto in questo lavoro indaga su entrambi questi aspetti.

A questo si aggiunge una mia osservazione sistematica: in una prima fase fatta liberamente, mentre in seguito si aggiunge un'osservazione più metodica attraverso *check-list* che aiutano a monitorare lo sviluppo delle competenze pro-sociali. In particolare, si osservano le dinamiche presenti all'interno dei gruppi rilevando segnali di apprendimento cooperativo.

In conclusione, per l'atteggiamento nei confronti della materia, viene chiesto agli allievi di scrivere un breve testo su come abbiano vissuto il percorso didattico proposto.

Figura 2. Schema riassuntivo di ricerca.

6. Percorso didattico

Il seguente schema rappresenta le varie fasi evidenziando il loro piano di appartenenza.

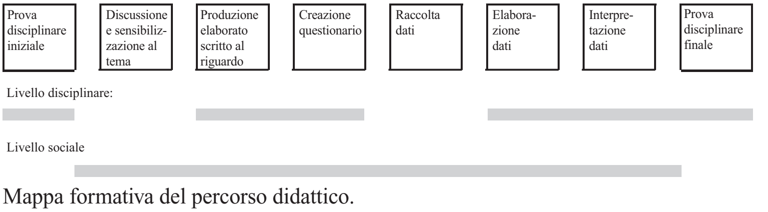


Figura 3. Mappa formativa del percorso didattico.

Nel Piano di formazione della scuola media si trovano anche competenze trasversali, come quella di dotare lo studente delle risorse necessarie per un inserimento attivo e responsabile nella comunità.

La seguente mappa formativa schematizza il lavoro affrontato con la classe considerando i bisogni degli allievi, le esigenze della società e chiarisce le competenze ambite ad acquisire:

	Sapere	Saper fare	Saper essere
Formazione culturale	-Conoscere cosa sia un'indagine statistica; -conoscere il significato di frequenza e degli indici di posizione e dispersione principali;	-Trovare media, moda e mediana di una serie di dati; -trovare le frequenze di determinate modalità; -utilizzo base di un foglio elettronico;	-Essere critici di fronte ad uno studio statistico;
Formazione umana	-Saper "leggere e scrivere" utilizzando diversi registri semiotici (parole, grafici, linguaggio matematico);	-Ragionare ponendosi da punti di vista diversi; -interpretare e valutare fatti umani e sociali fondandosi sulla riflessione critica;	-Partecipare alle attività sociali; -gestire e organizzare il lavoro in gruppo; -ricercare informazioni, selezionare e valutare diverse fonti;
Formazione sociale	-Formare sensibilità e curiosità verso il mondo e la società; -sviluppare una certa sensibilità verso tematiche ambientali e di salute;	-Assumere un atteggiamento di critica oggettiva; -arricchire le proprie capacità di introspezione e la propria autonomia;	-Mantenere un atteggiamento aperto alle argomentazioni altrui; -argomentare le proprie opinioni.

Figura 4. Percorso didattico

7. Percorso psico-pedagodico

Dinamiche socio-relazionali all'interno del gruppo classe

Una doverosa premessa riguarda la descrizione del gruppo classe protagonista di questa ricerca.

Gli allievi si sono presentati molto partecipi e attivi fin dall'inizio dell'anno, ma presentavano già pregiudizi riguardo ad alcuni argomenti di matematica (uno per tutti, le equazioni) cominciati l'anno prima. Dal punto di vista relazionale, il rapporto allievi-docente è stato molto buono fin dall'inizio grazie al rispetto reciproco e a un buon clima di lavoro. Le relazioni tra allievi sembravano inizialmente equilibrate, mentre in seguito sono emerse personalità più esuberanti come Stefania[4] e Marco, i quali trascinano il resto del gruppo. Sono presenti inoltre elementi più isolati, come si vedrà anche nel sociogramma in seguito, tra cui Alessandro e Daria. Quest'ultima, in particolare, è soggetto di molteplici prese in giro da parte dei compagni. A detta sua, comunque, lei è abituata a trovarsi in questa situazione dalla scuola elementare e sa gestirla.

Nella prima parte del percorso gli allievi hanno risposto a un questionario nel quale si chiedeva di indicare tre compagni di classe con cui vorrebbero lavorare su un ipotetico problema di matematica, tre con cui vorrebbero passare del tempo libero insieme, e tre con cui non vorrebbero fare nessuna delle due cose. Le risposte e i risultati non sono stati resi pubblici alla classe. Alcuni aspetti emersi erano prevedibili conoscendo il gruppo, mentre altri si sono rivelati sorprendenti. In particolare, Roberta emerge come leader nella dimensione del lavoro. È una figura di riferimento nel gruppo classe in quanto le sue competenze superano quelle del resto della classe, e inoltre partecipa attivamente alle attività che si svolgono, portando sempre contributi pertinenti e domande stimolanti. Nella dimensione affettiva, Roberta viene anche scelta, ma in maniera meno palese. Anche Stefania viene scelta come compagna di lavoro: è una ragazza carismatica, e sa trascinare tutto il gruppo, sia in positivo sia in negativo.

Altro aspetto che risalta è il numero di persone che non sono state scelte da nessuno. Ben tre componenti del gruppo (Alessandro, Daria e Luca) figurano come elementi isolati.

Alessandro è un ragazzo tranquillo che partecipa poco; le sue competenze disciplinari, però, sono buone, e per questo è sorprendente che nessuno lo abbia scelto.

Luca, d'altro canto, è ben integrato nel gruppo classe, e il suo non essere scelto dipende probabilmente dallo scarso rendimento scolastico, ragion per cui i compagni sanno che averlo in gruppo comporterebbe più lavoro per loro.

Infine c'è Daria, una ragazza estremamente piacevole in classe, educata, partecipe, attiva e volenterosa. Il fatto che non sia stata scelta dai compagni, anzi addirittura rifiutata in maniera molto evidente, era però prevedibile perché Daria è spesso oggetto delle prese in giro dei compagni.

Sarà tra gli obiettivi di questo lavoro lavorare sul gruppo classe per renderlo più coeso e armonioso. Questo avrebbe sicuramente ripercussioni positive in quanto, seguendo il pensiero di Dreikurs (1995), gli studenti possono imparare a cooperare ragionevolmente se si sentono valorizzati e partecipi nel gruppo classe.

4. I nomi non sono quelli originali.

Per perseguire questo ambizioso obiettivo cercherò di usare le risorse che sono a mia disposizione: i leader del gruppo classe e le loro diverse competenze.

La discussione

Prima di cominciare con il lavoro a gruppi per creare il questionario, c'è bisogno di entrare nel tema facendo alcune ricerche: per farlo sono stati utilizzati mezzi informatici, oltre che una modalità di discussione.

Nel concreto, i ragazzi hanno discusso tra loro confrontandosi sul tema del telefonino: sono partiti condividendo i modelli da loro posseduti, passando poi a fare ipotesi sulla situazione prima della loro scuola, e poi globale, scambiando idee, opinioni e punti di vista. Gli allievi sono stati volutamente lasciati alle loro argomentazioni e la docente si è limitata ad ascoltare e mediare.

Più veloce è stato il momento riguardante lo smaltimento del cellulare, in quanto le esperienze e conoscenze dei ragazzi erano minime. Essi parlavano secondo la loro esperienza personale: «li usa qualcun altro in famiglia», «vengono buttati nell'immondizia» o «lasciati in un cassetto in caso si rompa quello nuovo». Nessuno ha menzionato la possibilità del riciclo.

È stato poi fornito agli allievi del materiale riguardo le basse percentuali di telefonini riciclati, i vantaggi a cui il riciclo porterebbe, e qualche dato riguardante la Svizzera.

A coppie hanno poi prodotto un breve testo scritto a riguardo, utilizzando sia il materiale fornito, sia altre fonti trovate da loro. La maggior parte del gruppo sosteneva che quasi tutti gli allievi avessero un telefono cellulare e che nessuno fosse a conoscenza del suo possibile riciclo.

Il lavoro di gruppo

Dopo aver ottenuto abbastanza informazioni, ed essere entrati nel giusto contesto, sono stati formati

tre gruppi di lavoro. I gruppi sono stati formati in base al sociogramma costruito e alle competenze dei vari allievi (gruppi bilanciati).

I. gruppo: Marco, Daria e Giorgia.
Marco contribuisce con le sue buone competenze disciplinari. Egli tende a essere, però, sbrigativo e superficiale, e per questo Daria può essere valorizzata per la sua precisione, la voglia di fare e l'impegno che dimostra con costanza. Anche Giorgia presenta potenzialità dal punto di vista disciplinare, ma ha bisogno di essere guidata fino a prendere fiducia in ciò che fa, e per questo Marco può esercitare una buona influenza.

II. Gruppo: Roberta, Anna e Daniela.
Anna è debole nella materia, sempre poco concentrata. Per questo non può che beneficiare sia di Roberta che di Daniela, la prima per quanto riguarda la disciplina e la voglia di fare, e la seconda per l'impegno e l'entusiasmo che porta sempre con sé.

III. Stefania, Alessandro e Luca.
Stefania, un elemento decisamente portante e carismatico, fa da leader ai due maschi rimasti. Stefania ha discrete competenze disciplinari, che possono essere completate da Alessandro, pure bravo e impegnato. Luca è

spesso svogliato e poco motivato e può decisamente trarre beneficio dalla concentrazione degli altri due membri del gruppo.

Compito assegnato ai gruppi è stato quello di scrivere una bozza del questionario da distribuire a scuola. Non sono state date indicazioni precise su come «debba» essere un questionario del genere, ma è stata lasciata massima libertà.

Esaminando le bozze, si vede che le domande sono formulate in maniera ambigua. Questa è stata l'occasione per discutere su come debba essere un buon questionario che miri a raccogliere dati per un'indagine statistica.

Così, la lezione successiva si è prima deciso cosa chiedere:

- codici identificativi della persona;
- sapere se si possiede almeno un telefono cellulare;
- quanto lo si usa;
- per cosa lo si usa;
- ogni quanto lo si cambia;
- cosa succede al vecchio telefono cellulare quando lo si cambia.

Ogni gruppo è tornato a lavorare e ha prodotto la versione definitiva del proprio questionario. Il questionario definitivo è stato creato collettivamente, mettendo insieme i vari questionari prodotti. A coppie, gli allievi sono andati in tutte le classi della sede, hanno raccolto tutti i questionari compilati e hanno poi elaborato i dati emersi.

Sociogramma finale

Rimanendo sul piano psico-pedagogico, alla fine del percorso si è proposto alla classe lo stesso questionario di qualche mese prima. Bisogna però precisare che nel corso dell'anno Roberta è passata al corso attitudinale.

Dal confronto dei due sociogrammi (iniziale e finale) si è subito notato che, purtroppo, Daria è rimasta isolata, accumulando addirittura ancora più rifiuti rispetto all'inizio. Praticamente metà del gruppo classe ha indicato lei come compagna con cui non voler lavorare/trascorrere un sabato pomeriggio. Addirittura, la ragazza che lei ha scelto per prima su entrambi i livelli, ha rifiutato proprio Daria in entrambe le situazioni. Per Luca la situazione non è cambiata di molto dal punto di vista affettivo, ma da quello del lavoro ha ricevuto molto meno rifiuti, e penso questo sia dovuto anche al suo miglioramento durante l'anno e al suo atteggiamento sempre più partecipe che emerge sia dalle check-list che da osservazioni mie. Luca, infatti, si è dimostrato sempre interessato, dicendo che «questi erano esercizi veri».

Questo suo coinvolgimento è stato scaturito anche da un senso di riuscita nel compito, di autoefficacia: credere nelle proprie capacità porta a prendere i compiti difficili come sfide da dominare invece che da evitare e tale orientamento positivo alimenta l'interesse e un coinvolgimento entusiasta nell'attività (Bandura, 1997, ed. it. 2000).

Alessandro continua a non essere la «prima scelta» di nessuno dei compagni, ma non è neanche stato rifiutato da nessuno. Per lui vedo quindi un miglioramento e una maggiore integrazione nel gruppo. Anche in classe è molto più partecipe rispetto all'inizio dell'anno. Stefania rimane leader del gruppo: è infatti la persona più scelta in entrambi gli ambiti.

In sintesi, le osservazioni nel corso dei vari momenti del percorso mostrano, in generale, una crescente collaborazione tra gli allievi all'interno dei gruppi.

Questo emerge sia dalle griglie di osservazione che dal sociogramma, nel quale si arriva a una più equa distribuzione delle scelte per la dimensione del lavoro. Ciò non può essere detto per quanto riguarda la dimensione affettiva, nella quale non ci sono state rilevanti variazioni. Comunque, poter lavorare assieme in modo efficace su un compito matematico nonostante la non affinità effettiva è una gran conquista, in particolare se si pensa che sono allievi adolescenti.

8. Percorso disciplinare

Verifica delle pre-conoscenze

Prima di avviare il laboratorio si sono testate le preconoscenze degli allievi in materia di statistica.

Si commentano ora gli esercizi di questa «prova».

Nel 1° esercizio si vuole testare la criticità innata degli allievi riguardo ai dati statistici che gli vengono raccontati[5]. Si potrebbe infatti rispondere a Miriam che non ha ben specificato qual è il campione preso in considerazione, e basta una semplice ricerca su internet per scoprire che ci sono molte persone che vengono colpite in testa da una noce di cocco nei paesi dove queste crescono, ed è tutt'altro che una barzelletta. Si tratta di una situazione volutamente leggera, con domande vaghe e poco precise, per non influenzare le risposte degli allievi mettendo in gioco quello che è il contratto didattico. Due allievi su nove hanno scritto che non sarebbero entrati in acqua, mentre tutti gli altri sarebbero entrati, ma a certe condizioni (con altra gente o solo nell'acqua bassa).

Ci sono due frasi che colpiscono: Alessandro, il quale dice che «la gente crede a tutto ciò che legge e vede» e Roberta, l'unica che entrerebbe in acqua senza problemi, la quale risponde «anche se uno squalo mi avesse morso non avrei avuto più probabilità di morire».

Nel 2° esercizio, invece, si tratta di calcolare la media aritmetica e lo scarto di un insieme di 10 voti ottenuti da altrettanti allievi in un test e dire chi si è discostato maggiormente dalla media.

Angelo	Maria	Teresa	Lorenzo	Paolina	Claudio	Valeria	Ricky	Pietro	Agata
4	4.5	5	3	6	3.5	4.5	5	4	2

Per quanto riguarda la media aritmetica, tutto il gruppo la conosce e la calcola correttamente. Solo due indicano Agata come la più «distante» dalla media. Molti indicano invece Paolina e Teresa, considerando quindi solo il distacco «verso l'alto».

5. Testo della domanda. L'estate scorsa son andata in vacanza in Florida. Avevamo una casa sull'oceano, e io ed un'amica del posto abbiamo deciso di andare a farci una nuotata. Giravano voci che in quei giorni qualcuno avesse avvistato un paio di squali dalla spiaggia. Io ero un po' preoccupata e le dissi: «Miriam! E se arriva uno squalo e ci mangia?». La sua risposta mi colpì molto: «Marina...ma tu lo sai che muoiono più persone, ogni anno, perché vengono colpite in testa da una noce di cocco, di quelle che muoiono perché azzannate da uno squalo?». Se fossi stato al mio posto, saresti andato a nuotare nell'oceano? Perché Miriam considera questa una statistica affidabile e tranquillizzante? Ha ragione di crederlo?

Elaborazione dei dati

Abbiamo già parlato in precedenza della modalità con cui si è costruito il questionario relativo al rapporto che ciascun allievo ha nei confronti del telefonino[6]; per questo, descriverò ora la parte più disciplinare relativa all'elaborazione dei dati. Gli allievi hanno a disposizione i dati che hanno raccolto, i quali vanno organizzati e rappresentati in modo da semplificarne la lettura[7].

I ragazzi sono stati divisi in quattro coppie, tenendo conto ancora del sociogramma iniziale. A ogni coppia è stato affidato un questionario di un anno di scolarità, in modo che per ognuno sia possibile fare uno studio statistico univariato. Questo è il motivo per cui si sono dovute creare quattro coppie, invece di gruppi più numerosi. Mettere insieme i risultati di diversi anni di scolarità aiuterà a introdurre, invece, la statistica bivariata.

Con l'aiuto del foglio di calcolo, ogni coppia ha creato una tabella dove ha raccolto le varie risposte tratte dai questionari. Questo lavoro ha occupato 3 ore di lezione, che hanno compreso una discussione iniziale su come si potessero raccogliere i dati in maniera efficace, sulla creazione di una tabella standard per tutti e sul come immettere poi tutti i dati, un questionario alla volta.

La tabella ha reso visibili a colpo d'occhio tutti i dati raccolti, e il foglio di calcolo ha reso possibile un esame più dettagliato. Dopo una breve discussione si è quindi deciso di contare le diverse risposte a ogni domanda e con questo si è potuto parlare di frequenza assoluta e relativa. I ragazzi hanno quindi riempito una tabella delle frequenze per ogni domanda (se ne sono escluse alcune ritenute superflue).

Si è poi parlato in maniera più formale delle frequenze, con l'aiuto di una scheda. Gli allievi hanno anche creato diagrammi a torta rappresentativi dei risultati.

Sono stati gli allievi stessi a parlare per primi di media aritmetica, concetto che già conoscevano, e a proporla per capire a che età mediamente si riceve il primo telefono cellulare. È questo un buon esempio in cui si vede l'efficacia di agganciarsi alle loro conoscenze ed esperienze, facendole agire in situazioni nuove e ampliando così le loro immagini mentali e i loro concetti.

Una proficua discussione ha sottolineato come la media aritmetica si possa calcolare solo nel caso di variabili di tipo quantitativo. Si sono proposti altri indici di posizione come la moda e la mediana, esponendo le informazioni che questi possono dare. Il telefono cellulare, e in particolare il questionario creato, si è prestato bene per l'introduzione di questi concetti, perché erano presenti esempi di variabili sia quantitative che qualitative.

Si è notato come la media sarebbe rimasta la stessa sia se tutti avessero ricevuto il cellulare a 11 anni, sia che la metà l'avesse ricevuto a 4 anni e l'altra metà a 18! Così è stato introdotto il concetto di scarto semplice dalla media, con il quale si è costruito il grafico di dispersione.

Ci si è limitati alla differenza tra i dati raccolti e il valore medio, senza inoltrarsi in varianza e scarto quadratico medio essendo questi meno intuitivi e troppo complessi per questi allievi. Inoltre, lo scarto assoluto medio dà comunque una buona

6. Il questionario si compone di 12 domande che vanno dal numero di telefonini posseduti , all'uso che ciascuno ne fa, fino al rapporto che ciascuno ha con internet.
7. È possibile ottenere in dettaglio il questionario contattando l'autrice: marina.casson@edu-ti.ch

rappresentazione del messaggio che si voleva dare: fare la media aritmetica non è così rappresentativo come spesso si pensa.

Infine, si è accennato alla statistica bivariata unendo i dati trovati per i quattro anni di scolarità.

Gli allievi hanno scelto le tre domande più significative[8], e per ognuna di queste è stata riempita una tabella. Sono state inserite anche le somme totali, con le quali si sono potute calcolare le percentuali di risposte di un certo tipo in tutta la scuola, e costruire poi un istogramma per ogni risposta. Si è ritenuto importante sottolineare come le caselle centrali, quelle «di incrocio», rappresentino una partizione dell'insieme degli studenti della sede.

Verifica delle conoscenze acquisite

A conclusione di questo percorso ho proposto una prova sommativa, per verificare le conoscenze acquisite. Gli esercizi scelti si limitano a testare i contenuti più tangibili, lasciando da parte la criticità verso una serie di dati statistici presentati. Si ritiene infatti difficile testare con un esercizio scritto, o di qualsiasi altro tipo, le competenze acquisite in sensibilità e criticità. Il raggiungimento o meno di questo obiettivo si manifesta più che altro nelle discussioni, nei commenti e nei dibattiti dei ragazzi durante le lezioni.

A questo proposito, è doveroso dire che la classe ha reagito molto bene a tutto questo percorso, sono stati partecipi ed hanno veramente riflettuto su cosa voglia dire raccogliere dei dati ed elaborarli per poi trarne delle conclusioni. Si è avuta prova tangibile di questo in un particolare episodio, durante un esercizio di lettura di grafici, dove bisognava rispondere ad alcune domande relative alle temperature nei vari mesi dell'anno in alcune località svizzere: è nata una discussione tra i ragazzi su dove si preferirebbe vivere tra queste località, e la maggior parte sosteneva, senza nessun indirizzamento da parte della docente, che il grafico in questione fosse limitante in quanto si trattava di temperature medie, senza che venisse detto di quanto si discostassero i valori, e inoltre riferite a un solo anno, per niente recente.

Di seguito, alcune informazioni sul test finale.

Il primo esercizio chiede in maniera chiara ed esplicita di trovare i tre indici di posizione trattati, fornendo una serie storica[9]. L'unica possibile difficoltà anticipata, che si è poi rivelata tale solo per pochi, è la riga relativa agli anni di riferimento: ha creato qualche confusione il fatto che il numero di goal si riferisse a un anno espresso con due numeri (82-83, 83-84 ecc.).

Si chiedeva anche di individuare quale indice di posizione meglio rappresentasse le reti segnate negli anni da questo calciatore. Quest'ultima domanda può essere vista come una verifica di conoscenze acquisite sul significato di questi indici di posizione, anche se si può opinare sulla risposta corretta.

L'obiettivo principale del secondo esercizio è costruire un istogramma che rappresenti il numero di allievi di un istituto di scuola media (dalla prima alla quarta, con dati analitici per ogni classe: IA, IB, IC, ecc).

8. Queste domande sono: «Possiedi un cellulare?», «A quanti anni hai ricevuto il tuo primo telefonino?» e «Sei a conoscenza del fatto che il telefono cellulare possa essere riciclato?»
9. I goal segnati dal calciatore Marco Van Basten nei campionati dal 1982 al 1993.

Il terzo esercizio si occupava invece di diagrammi a torta e loro lettura, insieme a un'applicazione base del calcolo percentuale. È stato quello in cui i ragazzi hanno trovato più difficoltà, non nella lettura del diagramma quanto nel vero e proprio calcolo percentuale. Solo un paio di soggetti, infatti, sono riusciti a calcolare la media degli allievi per classe per ogni anno di scolarità.

Infine, l'ultimo esercizio chiedeva nuovamente i tre indici di posizione insieme allo scarto medio assoluto, e di rappresentare questi dati in un grafico dove fossero evidenti gli scarti semplici dalla media:

I risultati di questa prova hanno superato ogni aspettativa: la messa in pratica di tutti questi concetti ha portato i benefici più che evidenti

9. Conclusioni

Comunemente, purtroppo, il corso base è associato ad allievi disinteressati. Per quanto riguarda questo particolare gruppo, si sono notati più che altro pregiudizi verso la matematica che ritenevano noiosa e inutile. Questa visione della materia da parte degli studenti è alimentata anche da una predilezione, soprattutto nei corsi base, di apprendimenti tecnico-applicativi: quando si presentano difficoltà di comprensione, ci si limita a spiegare il «come si fa» un esercizio, in maniera meccanica. Apprendimenti di questo tipo non vogliono essere sminuiti, anzi è importante acquisire automatismi in alcuni ambiti della matematica, per esempio nel trovare gli indici di posizione data una distribuzione di dati. Quello che si vuole sottolineare, però, è la necessità di includere anche apprendimenti di cui i ragazzi vedano il senso. Ciò non vuol dire che ogni attività presentata debba avere un risvolto empirico concreto nella vita quotidiana; per «dare senso» basta anche esplicitare gli obiettivi in modo che gli allievi conoscano la meta che devono raggiungere.

In questo caso, il tema è molto vicino ai ragazzi i quali si sono subito interessati perché sentivano di poter contribuire con le loro conoscenze; la modalità di laboratorio li ha invece motivati, coinvolgendoli in prima persona e dando senso agli apprendimenti.

Questo tipo di approccio influisce anche sull'atteggiamento degli allievi verso la matematica: questa, infatti, è solitamente vista come disciplina rigida, piena di regole astratte e priva di concretezza. La matematica di cui hanno fatto esperienza i ragazzi, invece, è malleabile, aperta a diverse interpretazioni, ma soprattutto molto concreta.

Una variabile sulla quale si è lavorato per produrre un cambiamento nell'atteggiamento verso la materia è la cura data all'ambiente di apprendimento: le varie modalità di laboratorio, i lavori a gruppi e le discussioni volevano promuovere le interazioni positive tra allievi, stimolando condivisione, argomentazione e collaborazione.

A fine percorso è stato chiesto agli allievi di esprimere un parere sul lavoro affrontato, e se questo avesse in qualche modo modificato il loro modo di vedere la matematica. Eccone qualcuna fra le più significative:

Marco scrive «La matematica ora è un po' più divertente» e aggiunge una faccina sorridente di fianco. Mi sembra significativo perché Marco è un ragazzo con buone competenze, ma molto superficiale e che si distrae facilmente.

Stefania scrive «Ho apprezzato l'unione tra compagni e imparare a usare i computer». Stefania ha quindi notato come si promuovesse l'interazione e la collaborazione nel gruppo, oltre ad aver apprezzato l'introduzione di nuovi elementi e imparato nuove cose insieme ai compagni.

Giorgia scrive «Io pensavo che la matematica era solo fare calcoli e cose del genere invece questa esperienza è stata 'divertente' più 'intrattenente' delle altre. Cosicché la matematica in sé (in certi casi) può essere piacevole». Di questa frase, a parte il bel pensiero, mi ha colpito la precisazione di come la matematica possa essere piacevole «in certi casi». La sua rappresentazione è stata quindi solo in parte modificata, e necessiterebbe forse di più esperienze di questo tipo.

Daria scrive «In questo progetto ho apprezzato che si è lavorato a gruppi e soprattutto che abbiamo fatto qualcosa di diverso» e «con questo lavoro ho rafforzato il mio rapporto con la matematica». Daria è sempre stata isolata dai coetanei, e lei stessa ha confessato di «essersi ormai abituata» e di «non farci più caso». Si è adattata ed è cresciuta in questa situazione, ormai difficile da cambiare. Ciò non toglie che lei abbia comunque apprezzato la modalità di lavoro perché le ha permesso di collaborare e condividere le proprie opinioni.

Alla luce di tutto questo possiamo riprendere le due domande di ricerca espresse inizialmente:

Per quanto riguarda il primo interrogativo[10], gli strumenti su cui ci si può basare per una risposta sono il sociogramma e le griglie di osservazione usate durante i lavori di gruppo.

Sulla base di questi, non sembra che le dinamiche relazionali tra gli allievi di questo gruppo siano mutate. Dal sociogramma salta all'occhio una più equa distribuzione di scelte nel gruppo sulla dimensione disciplinare, che è positiva e indica una focalizzazione maggiore sui compiti. Dalle griglie di osservazione, comunque, emerge una crescente collaborazione in quasi tutti i gruppi, quindi anche se il modo di relazionarsi tra loro è rimasto immutato (sono ragazzi di quarta media che si conoscono da anni), quello che è cambiato è il modo di lavorare a matematica, di condividere le proprie idee. Anche al di fuori di questo percorso, all'interno di altre attività, negli ultimi mesi i ragazzi chiedono spesso di lavorare insieme a gruppi. Un episodio particolare è avvenuto durante un'ora prima delle vacanze di Carnevale, per la quale si era prevista un'attività leggera di calcolo combinatorio. Dopo la consegna, gli allievi hanno espresso il desiderio di formare dei gruppi e mettersi in diversi punti della classe. Si è lasciato che formassero liberamente questi gruppi di tre o quattro elementi, e il risultato è stato ottimo, non solo perché tutti sono arrivati alla soluzione, ma per il modo in cui hanno lavorato, condividendo strategie diverse, ascoltandosi e rispettandosi.

Per quanto riguarda, invece, la seconda domanda[11], solo una ragazza ha detto che per lei non è cambiato assolutamente niente; tutti gli altri, in modo più o meno esplicito, hanno espresso un qualche cambiamento. Il percorso affrontato conteneva dati veri, raccolti da loro, ed è stato ricco di pratica e concretezza. Per questo, certamente ha influito sulla loro immagine della matematica, in maniera più o meno conscia. Questo lo

10. La trattazione di contenuti statistici svolti attraverso un laboratorio di matematica può sviluppare competenze pro-sociali di tipo collaborativo?
11. L'utilizzo di una metodologia laboratoriale promuove un cambiamento dell'atteggiamento generale nei confronti della matematica?

si può affermare dopo aver visto l'impegno e l'entusiasmo dei ragazzi nell'affrontare tutte le varie fasi di questo progetto. Anche allievi che solitamente non dimostrano particolare interesse, come Luca, si sono appassionati a questo argomento, stupendosi anche di trovare qualcosa di piacevole in questa materia che hanno sempre creduto noiosa.

Per quanto riguarda, invece, il tema dell'eco-sostenibilità, è molto difficile dire se i ragazzi hanno acquisito più sensibilità in questo ambito. Chiederglielo direttamente creerebbe una situazione per cui sicuramente risponderebbero quello che pensano sia «giusto», e sarebbe poco affidabile.

È stato interessante constatare che ben il 62% degli allievi della sede erano a conoscenza del fatto che si potesse riciclare il telefonino, quando invece nessuno del gruppo coinvolto in questo lavoro lo sapeva prima. Anche loro sono stati molto stupiti da questo risultato. Per quanto non si possa testare questa «sensibilità», vedere il grado di coinvolgimento in tutto il percorso mi rende sicura che, al momento opportuno, per lo meno ricorderanno e valuteranno la possibilità di riciclare dispositivi elettronici.

Il lavoro svolto è stato ricco e complesso: si è dovuto tener conto di aspetti didattici, relazionali e disciplinari, un intreccio di psico-pedagogia e statistica, messe insieme per creare un buon ambiente d'apprendimento e favorire buone relazioni. Vedere così tanto interesse da parte degli allievi è stato gratificante e motivante, e sicuramente si riproporrà negli anni futuri in nuove vesti.

Bibliografia

Appari, P. Il laboratorio come mappa di percorsi esperti. *Laboratorio e formazione.* Disponibile in: http://lnx.laboratorioformazione.it/index.php?option=com_content&task=view&id

Arrigo, G., Maurizi, L., Minazzi, T., & Ramone, V. (2008). *Combinatoria Statistica Probabilità.* Bologna: Pitagora editrice

Baldacci, M. (2005). Il laboratorio come strategia didattica. *Bambini pensati, Newsletter n°4.* Disponibile in: http://web.educazione.sm/formazione/contributisett2005/Baldacci_Laboratorio.pdf

Bandura, A. (2000). *Autoefficacia. Teoria e applicazioni*. Edizioni Erickson.

Bartolini Bussi, M., Boni, M., Ferri, F. (1995). *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica.* Modena: Centro Documentazione Educativa.

Benini, A., Orlandoni, A. (2007). *Matematica: Ricerca sul curricolo e innovazione didattica*. Tecnodid.

Canonica, C. (DFA 2009-2010). Dispense del corso *Apprendere in Gruppo.*

Crahay, M. (1999). *Psicopedagogia.* Brescia: Editrice La Scuola

Gal, I. (Fall 2004). A brief look at statistical literacy. *Math Practitioner, vol 10(2),* 4-8.

Gentile, M. (1998). Motivare ad apprendere. *ISRE, 5*(2), 80-109.

Lahanier-Reuter, D. (octobre-novembre-décembre 2005). Enseignement et apprentissages mathématiques dans une école Freinet. *Revue française de pédagogie, n. 153,* 55-65.

Pennisi, M. F. M. M. (2009). A class practice to improve student's attitude towards mathematics.

Maschietto, M., Trouche, L. (2010). Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: the productive notion of mathematics laboratories. *ZDM Mathematics Education (2010) 42:*33–47.

Olson, D. (1979). *Linguaggi, media e processi educativi.* Torino, Loescher, p. 122.

Reggiani, M. (2008). Il laboratorio come "ambiente" per l'insegnamento-apprendimento della matematica: riflessioni. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 31 A-B, 645-664.*

Rossi, C. (2003). *La matematica dell'incertezza: didattica della probabilità e della statistica.* Bologna: Zanichelli.

Tessaro, F. (2002). Metodologie dell'insegnamento e tecniche per l'apprendimento attivo. *Processi e metodologie dell'insegnamento. SSIS Veneto. (Mod. 8, 5° lezione on-line)*

1. Agorando[1] 5
Campionato di calcio EURO 2016

Paolo Hägler e Giorgio Mainini

Il 12 dicembre 2015 è avvenuto il sorteggio, che ha suddiviso le 24 squadre che parteciperanno al campionato in 6 gruppi (A, B, C, D, E e F) di 4 squadre ognuno. Prima del sorteggio, tenendo conto sia di certe condizioni regolamentari, sia dei risultati ottenuti durante le qualificazioni, le squadre sono state suddivise in quattro fasce:

1. 6 squadre teste di serie (A, B, C, D, E, F),
2. 6 squadre di prima fascia (le chiameremo P1, P2, P3, P4, P5, P6),
3. 6 squadre di seconda fascia (le chiameremo S1, S2, S3, S4, S5, S6),
4. 6 squadre di terza fascia (le chiameremo T1, T2, T3, T4, T5, T6),

Il sorteggio è avvenuto in modo che in ogni gruppo finisse una testa di serie, una squadra della prima fascia, una della seconda e una della terza. Nella nostra situazione non consideriamo gli altri vincoli che sono stati tenuti in conto durante il sorteggio vero e proprio.

In quanti modi poteva essere formato il gruppo A?
In quanti modi potevano essere formati tutti i gruppi?

Rispondi alle stesse domande immaginando che le 24 squadre siano state suddivise in:

– 4 gruppi di 6,
– 8 gruppi di 3,
– 3 gruppi di 8,
– 2 gruppi di 12 o in 12 gruppi di 2, anche se queste situazioni hanno poco senso.

Tra le diverse suddivisioni elencate sopra, quale dà il maggior numero di possibilità nella composizione del gruppo A? E quale dà il maggior numero di possibilità nella composizione di tutti i gruppi? E quali i minori?

E se il numero di squadre fosse stato diverso?

Le soluzioni sono da inviare all'indirizzo agorando.bdm@gmail.com

Fra tutte le soluzioni esatte sarà scelta quella più completa e che meglio descriverà il lavoro svolto per ottenerla.

1. Il verbo greco *agoràzein* è traducibile, più o meno, con *andare in piazza a curiosare*. Qui si troveranno spunti matematici presi qua e là sui quali curiosare.

Soluzione Agorando 4

Vi proponiamo le migliori soluzioni che siamo riusciti a trovare. Con «migliori» intendiamo che soddisfanno i seguenti criteri preferenziali:

- utilizzare una sola volta ognuna delle quattro cifre di 2016 nell'ordine 2, 0, 1 e 6;
- utilizzare una sola volta ognuna delle quattro cifre di 2016, anche in altri ordini;
- usare due volte una delle quattro cifre e una volta le altre tre.

Nella tabella che segue, per ogni numero, proponiamo una delle migliori soluzioni trovate. In corsivo abbiamo aggiunto alcune soluzioni ancora migliori, che però necessitano l'utilizzo di un'operazione non riportata nel testo del quiz: il fattoriale[1]. Chi dovesse riuscire a far meglio di noi, anche per un solo numero, può comunicarcelo al solito indirizzo: agorando.bdm@gmail.com

	cifre in ordine	ogni cifra una volta	1 cifra ripetuta
0	$2 \cdot 0^{1+6}$		
1	$2 \cdot 0+1^6$		
2	$2+0^{1+6}$		
3	$2+0+1^6$		
4	-2^0-1+6		
5	$-2+0+1+6$		
6	$2 \cdot 0 \cdot 1+6$		
7	$2 \cdot 0+1+6$		
8	$2+0+1 \cdot 6$		
9	$2+0+1+6$		
10	$2 \cdot (0\ \ 1+6)$		
11	*$(2+0!)!\ \ 1+6$*	$(2+0) \cdot 6\ \ 1$	
12	$2 \cdot (0 \cdot 1+6)$		
13	$20-1-6$		
14	$2 \cdot (0+1+6)$		
15	$20+1-6$		
16	$2 \cdot 0+16$		
17	2^0+16		
18	$2+0+16$		
19	$20-1^6$		
20	$20 \cdot 1^6$		
21	$20+1^6$		
22	*$(2+0!)!+16$*		$20+\sqrt{16}-2$
23		*$(6-2)!-0-1$*	$20+\sqrt{16}-1$
24	$20+\sqrt{16}$		
25	$20-1+6$		
26	$20 \cdot 1+6$		
27	$20+1+6$		
28			$20+16/2$
29		$60/2\ \ 1$	
30	*$(2+0!+1)!+6$*	$60 \cdot 1/2$	
31		$60/2+1$	
32	$(2+0) \cdot 16$		
33			$(2+0) \cdot 16+1$
34			$(2+0) \cdot 16+2$
35		$6^2+0\ \ 1$	
36	$20+16$		

1. Il fattoriale di un numero n, indicato con n!, è così definito:
$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, con, per definizione, $0! = 1! = 1$

	cifre in ordine	ogni cifra una volta	1 cifra ripetuta
37		6^2+0+1	
38			$6^2+0\cdot1+2$
39		60–21	
40		(6–2)·10	
41		61–20	
42	*((2+0!)!+1)·6*		6·(6+1)+0·2
43			$6\cdot(6+1)+2^0$
44			6·(6+1)+2+0
45			2·20–1+6
46		6^2+10	
47			2·20+1+6
48		60 12	
49		$(6+0+1)^2$	
50			$(6+0+1)^2+1$
51		$\sqrt{2601}$	
52		62–10	
53		106/2	
54		2^6-10	
55			61–6+0·2
56			$61-6+2^0$
57		60–2–1	
58		$60-2^1$	
59		61–2–0	
60		$61\ 2^0$	
61		62–0–1	
62		62 0·1	
63		2^6+0-1	
64		$2^6+0\cdot1$	
65		2^6+0+1	
66			6·11+0·2
67			201/6·2
68			6·11+2+0
69			61–2+10
70			62+10–2
71			62+10 1
72		62+10	
73			62+10+1

	cifre in ordine	ogni cifra una volta	1 cifra ripetuta
74		$10+2^6$	
75			101–26
76			102–26
77			$11\cdot(6+2^0)$
78			26·(2+0+1)
79			(6+2)·10–1
80		(6+2)·10	
81		61+20	
82			62+20·1
83			62+20+1
84			21·(6+0–2)
85			66+20–1
86			106–20
87			66+20+1
88			(6+2+0)·11
89			101–2·6
90			(6+2+1)·10
91			61+60/2
92			100 2 6
93			101 6 2
94		10^2-6	
95			(20–1)·(6–1)
96		102–6	
97			101+2–6
98			20·(1+6) 2
99			20·(1+6) 1
100	20·(1+6)		

2. Due possibili strategie per decifrare messaggi cifrati con il metodo di sostituzione monoalfabetica applicate al testo di Agorando 3

Paolo Hägler, Giorgio Mainini

In this article are presented two strategies to decrypt the text presented in Agorando 3 (a quiz proposed on the *Bollettino dei Docenti di Matematica, number 70, May 2015)*: a message encrypted with the method of monoalphabetic substitution.

1. Qualche termine

Chiave: parametro del cifrario.
Cifrare: sinonimo di crittografare.
Cifrario: algoritmo utilizzato per rendere incomprensibile un testo, rispettivamente per renderlo di nuovo comprensibile.
Cifratura: tecnica usata per crittografare.
Codice: talvolta usato al posto di cifrario. A voler essere precisi, un codice è un insieme di sostituti di parole o frasi.
Crittoanalisi (gr. *kryiptós* = nascosto; *análysis* = scioglimento, soluzione): parte della crittologia che si occupa di rendere di nuovo comprensibile un testo precedentemente crittografato.
Crittografare: nascondere un testo tramite regole crittografiche.
Crittografia (gr. *grafía* = scrittura): parte della crittologia che si occupa dei metodi per nascondere un testo in modo da renderlo incomprensibile a chi non è autorizzato a leggerlo.
Crittogramma o testo cifrato: testo ottenuto con cifratura.
Crittologia (gr. *lógos* = discorso): scienza che si occupa delle scritture nascoste.
Decifrare: contrario di cifrare.
Testo in chiaro: il testo originale.

2. Il problema di Agorando 3[1]

2.1. Prima proposta di metodo risolutivo

Ci basiamo sul fatto che in ogni lingua la frequenza di uso di ogni lettera è piuttosto determinata, specialmente per testi lunghi.

Le frequenze relative[2] di ogni lettera sono mostrate nella tabella che segue, ordinate dalla frequenza maggiore alla minore:

1. Vedere *Bollettino dei Docenti di Matematica, nr. 70*, Maggio 2015, pag. 119.
2. Con «frequenza relativa« si intende la percentuale di ricorrenza di ogni lettera sul totale delle lettere.

in italiano[3]	E	A	I	O	N	L	R	T	S	C	D	P	U	M	V	G	H	F	B	Q	Z
	11.8	11.7	11.3	9.8	6.9	6.5	6.4	5.6	5.0	4.5	3.7	3.1	3.0	2.5	2.1	1.6	1.5	1.0	0.9	0.5	0.5
nel testo	P	M	V	F	N	B	S	L	D	H	Q	R	A	E	I	U	G	T	Z	C	O
	13.1	11.1	9.6	8.5	8.3	7.4	7.2	7.1	5.3	4.4	4.2	3.5	2.1	1.3	1.3	1.3	1.3	0.9	0.8	0.7	0.6

Siccome il nostro testo è piuttosto breve, non conviene fidarsi troppo delle sostituzioni che la tabella propone. Proviamo a sostituire le lettere più frequenti[3]:

P con **e** ; M con **a** ; V con **i** ; F con **o** ; B con **l**

(N con **n** solo per bellezza, considerato che nel problema è scritto che N è sostituito da sé stesso.)

Teniamo inoltre presente l'informazione, sempre data nel problema, che se X sostituisce Y, allora Y sostituisce X. Ne discende che si può sostituire

E con **p** ; A con **m** ; I con **v** ; O con **f** ; L con **b**

La prima riga (aggiungiamo anche la prima parola della seconda per comodità) diventa:

S**a** **ma**QQU**ina** R**i** **o**HD**in**Z **a**Z**ib**Q**e** **blp**Da H**n** **nabo**Dl QU**e** **bi** **p**D**ebenoa** Q**lme** H**na**

che non è molto soddisfacente ma che fa sperare in due cose:

– «S**a** **ma**QQU**ina**» potrebbe voler dire «la macchina»
– «H**n**» e «H**na**» potrebbero voler dire «un» e «una»

Quindi ricominciamo sostituendo

l con **s** ; C con **q** ; H con **u** e
S con **l** ; Q con **c** ; U con **h**

tenendo presenti le sostituzioni già fatte. Ecco il nuovo inizio:

la macchina R**i** **ou**D**in**Z **a**Z**ibce** **bsp**D**a** **un** **nabo**D**s** **che** **bi** **p**D**ebenoa** **csme** **una** **bequen**G**a** R**i**

Nuove deduzioni:

– «**a**Z**i**b**ce**» potrebbe significare «agisce»
– «**bequen**G**a**» potrebbe significare «sequenza»

Quindi sostituiamo

Z con **g** ; G con **z** ; **b** con S ; **s** con **b** e S con **s** (dobbiamo temporaneamente usare la S maiuscola, per evitare di avere una **s** minuscola sia per la **b** (L originaria) sia per la **l** (B originaria).

Ed ecco il nuovo inizio:

la macchina R**i** **ou**D**ing** **agisce** **sbp**D**a** **un** **naso**D**b** **che** **si** **p**D**esenoa** **cbme** **una** **sequenza** R**i**

Nuove deduzioni:

– «R**i** **ou**D**ing**» dovrebbe stare per «di Turing»
– «**naso**D**b**» per «nastro»
– «**p**D**esenoa** **cbme**» per «presenta come»

3. Per evitare il più possibile di sostituire lettere già sostituite, di seguito utilizzeremo le maiuscole per le lettere del testo cifrato e le minuscole in corsivo e grassetto per le lettere sostituite.

Sostituiamo quindi,
R con **d** ; D con **r** ; **o** con **t**; **b** con **o**
A questo punto il testo cifrato si è tramutato nel seguente[4]:

la macchina di turing agisce sopra un nastro che si presenta come una sequenza di caselle nelle quali possono essere registrati **simfoli** di un **fen** determinato **alTafeto Tinito**; essa ha una testina di lettura e scrittura con cui **eTTettua** operazioni di lettura e scrittura su una casella del nastro. ha anche un repertorio **Tinito** di istruzioni che determinano la sua evoluzione in conseguenza dei dati iniziali. le caratteristiche precedenti sono comuni a molte macchine **Tormali**, ma le **mdt** hanno inoltre la caratteristica di disporre di un nastro potenzialmente **inTinito**, ossia **estendifile** quanto si vuole qualora questo si renda necessario. ogni passo dell'evoluzione viene determinato dallo stato attuale *s* nel quale la macchina si trova e dal carattere *c* che la testina legge sulla casella del nastro su cui si trova e si concretizza nell'eventuale **modiTica** del contenuto della casella, nell'eventuale spostamento della testina di una posizione verso destra o verso sinistra e nell'eventuale **camfiamento** dello stato.

Bisogna ancora decifrare alcune parole, ma il problema è sostanzialmente risolto.

Per la verità c'è ancora un «**mdt**» da interpretare: si può accettare che sia un acronimo di «macchina di Turing».

Se proprio si vuole, si possono mettere le maiuscole al posto giusto, ma con ciò non si aggiunge nulla alla comprensibilità del testo.

2.2. Seconda proposta di metodo risolutivo

Un altro modo per decifrare un testo è quello di sfruttare le proprietà della lingua del testo, nel nostro caso dell'italiano, e non (solo) la frequenza delle singole lettere. Per questo è però necessario che, come nel nostro testo, gli spazi siano indicati.

In particolare, per l'italiano, possiamo sfruttare una o più delle caratteristiche qui esposte:

a) quasi tutte le parole (escludendo quelle straniere e quelle brevi) terminano con una vocale che non sia **u**[5];
b) alcune lettere possono seguire o essere seguite da poche altre;
c) la sintassi delle parole «brevi«, formate da 1, 2 o 3 caratteri;
d) l'uso dei segni grafici, in particolare l'apostrofo.

Lettere finali

Possiamo notare che nel testo di Agorando 3 moltissime parole terminano con B, M, P e V. Verosimilmente, quindi, a queste quattro lettere corrisponderanno

4. Per una questione di leggibilità le lettere sostituite ora non sono più indicate in corsivo e grassetto. Il grassetto è usato per le parole non ancora interamente decifrate, e il corsivo per la «parola» **mdt**, che non sembra una parola comprensibile.
5. Nella presentazione di questo metodo utilizziamo il corsivo grassetto non solo per le lettere sostituite, ma, per facilitare la lettura, anche per quelle di cui discutiamo.

le vocali **a**, **e**, **i** e **o**. Ma in quale ordine? Per questo possiamo ad esempio cominciare a segnare queste lettere come vocali (magari scrivendole in grassetto), e così otterremo delle parole con una sequenza piuttosto lunga o improponibile di lettere non in grassetto, come ad esempio FHD**V**NZ, S**P**FFHD**M**, LQD**V**FFHD**M** e **V**LFDHG**VB**N**V**. Possiamo supporre che la prima di queste parole sia straniera, mentre le altre tre ci suggeriscono che la H corrisponde all'ultima vocale rimasta, la **u**, poiché in italiano le sequenze di quattro consonanti consecutive sono molto rare (nscr, nstr, rscr, rstr e nsch in particolare, ma ce ne sono anche altre: si pensi ad esempio a inscrivere, instradare, perscrutare, superstrada, inschidionare, substrato, …).

Una volta individuata la **u** possiamo sfruttare le parole brevi, oppure la caratteristica indicata nel nostro problema secondo la quale se a una lettera ne corrisponde un'altra, allora è vero anche il contrario. In questo caso, sostituendo H con **u**, possiamo sostituire U con **h**.

Successione di lettere

Un'altra caratteristica dell'italiano ci dice che la **h** è molto spesso preceduta dalla **c**, un po' meno spesso dalla **g**, e raramente da altre lettere. A questo punto, da parole come A**M**QQ**hV**N**M**, Q**hP**, **M**NQ**hP** e Q**M**D**M**FF**P**D**V**LF**V**Q**hP** deduciamo che a Q corrisponde **c**, e quindi a C corrisponde **q**. A conferma di ciò sfruttiamo un'ulteriore caratteristica dell'italiano, ossia che alla **q** segue quasi sempre la **u**. Nel nostro testo abbiamo già trovato entrambe, e notiamo che alla C segue sempre la H.

Possiamo a questo punto aiutarci con la H per determinare le altre vocali, visto che dopo **ch** c'è una **e** o una **i**, e mai (salvo parole straniere) **a** o **o**. Di conseguenza le lettere che seguono QU, ossia P e V, sono **e** e **i**. Disponendo di 3 parole QUP e di nessuna QUV, e siccome **che** (sia pronome sia congiunzione) è più frequente del pronome **chi**, possiamo ipotizzare che a P corrisponda **e** e che a V corrisponda **i**, e quindi anche che a E corrisponda **p** e a I corrisponda **v**.

A questo punto, sapendo inoltre che a N corrisponde **n**, disponiamo di abbastanza lettere per decifrare alcune parole (come A**M**QQU**V**N**M** che corrisponde a A**McchinM**, da cui **macchina** e non A**occhino**), e continuare con le sostituzioni trovate (M con **a**, A con **m**, B con **o**, O con **b**), eccetera.

Parole brevi

In italiano sono poche le parole di una sola lettera, ma queste non ci aiutano molto, poiché si tratta delle quattro vocali più comuni. In realtà c'è anche la **l**, ma seguita da apostrofo (vedi in seguito).

Le parole di due lettere sono più numerose, e non tutte ci aiutano, ma alcune sono composte da due delle quattro vocali già identificate: **ai**, **io**. La loro presenza può aiutarci a capire quale sia la corrispondenza delle lettere identificate come vocali.

Un'altra parola breve di due lettere piuttosto comune che può aiutarci è **un**. Nel nostro caso il compito è facilitato dal fatto che a N corrisponde **n**. Questo termine può aiutarci perché piuttosto comune, e anche **una** e **uno** lo sono, ossia due parole di tre lettere che iniziano allo stesso modo. Nel nostro testo identifichiamo quattro HN e quattro HNM. Possiamo quindi supporre che H sia **u** e M sia **a** (**una** è più comune di **uno**; il primo vale per tutti i nomi femminili che iniziano per consonante, il secondo solo per alcuni, pochi, nomi maschili).

Per quanto riguarda le parole di tre lettere, il migliore aiuto giunge dalle parole palindrome, poiché quella più comune inizia (e termina) in consonante: **non**. In effetti, riconosciuta una parola palindroma di tre lettere (facile da trovare) con una vocale al centro, questa è molto probabilmente il **non** (tra le altre le più comuni sono forse **tot** e **gag**). Nel nostro testo però questa osservazione è inutile, poiché non vi sono parole palindrome di tre lettere.

Segni grafici

Tra i segni grafici più comuni troviamo il punto e la virgola, ma questi non ci danno nessun aiuto. Invece l'apostrofo e l'accento acuto ce ne danno.

Il primo segue spesso **l** (ad esempio **l'**, **all'**, **nell'**, **dell'**), più raramente la **n** (ad esempio **un'**) o più raramente ancora altre lettere (ad esempio **quest'**). In particolare nel nostro testo troviamo quattro apostrofi: RPSS'PIBSHGVBNP, NPSS'PIPNFHMSP, NPSS'PIPNFHMSP, NPSS'PIPNFHMSP. È piuttosto facile ipotizzare che a S corrisponda **l** (quindi a L corrisponde **s**), a P corrisponda **e** (a E corrisponda **p**) e a R corrispondano **d** o **n** (nel nostro caso **d** poiché a N corrisponde **n**) e quindi a D corrisponda **r**.

In conclusione, ecco gli scambi individuati finora:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	Z
m	*o*	*q*	*r*	*p*			*u*	*v*	*s*	*a*	*n*	*b*	*e*	*c*	*d*	*l*		*h*	*i*	

Gli ultimi due scambi sono ora facilissimi, trovata la prima riga:

la macchina di F**urin**Z **a**Z**isce sopra un nas**F**ro che si presen**F**a**

Si può allora completare la tabella così:

F	G	T	Z
t	*z*	*f*	*g*

V. Segnalazioni

1. La matematica e la sua didattica Convegno del trentennale

Castel San Pietro Terme (Bologna):
4-5-6 novembre 2016

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

NRD, Bologna

Direzione: Bruno D'Amore, Martha I. Fandiño Pinilla e Silvia Sbaragli

Conferenze

Venerdì 4 novembre, Centro Congressi Artemide
Tutti gli ordini scolastici

14:30-15:00	**Inaugurazione** alla presenza delle Autorità del mondo politico e accademico.
15:00-15:45	**Ciro Ciliberto** (Presidente dell'UMI, Unione Matematica Italiana): La Matematica tra astrazione e concretezza, tra intuizione e rigore.
15:45-16:30	**Piergiorgio Odifreddi** (ex Università Torino): Il museo dei numeri.
16:30-17:00	Intervallo
17:00-17:45	**Ferdinando Arzarello** (Presidente dell'ICMI, International Commission of Mathematical Instruction): Tra sensate esperienze e necessarie dimostrazioni: quale senso matematico alle pratiche in classe?
17:45-18:30	**Claire Margolinas** (Università Blaise Pascal di Clermont-Ferrand, Francia): Attualità della teoria delle situazioni.
18.30-19.15	**Bruno D'Amore** (Universidad Distrital Bogotà, Colombia) e **Martha Isabel Fandiño Pinilla** (NRD Bologna): Leggere la matematica.

Sabato 5 novembre, Centro Congressi Artemide
Scuola Primaria e Secondaria

14:30-15:15	**Sergio Vastarella** (NRD, Bologna): Dalla classe capovolta all'apprendimento capovolto: la matematica in video e la sfida del modello Flipped Mastery.
15:15-16:00	**Maura Iori** (NRD, Bologna): Conflitti semiotici e semantici nell'insegnamento-apprendimento della matematica.
16:00-16:30	Intervallo

16:30-17:15 **Giorgio Bolondi** (Università di Bologna): La mappa delle competenze di matematica: uno strumento fondante per la costruzione efficace degli apprendimenti, tra didattica e tecnologia.

17:15-18:00 **Silvia Sbaragli** (DFA- SUPSI di Locarno, NRD Bologna): L'importanza dei saperi fondanti in ogni livello scolastico.

18.00-18.45 **Giancarlo Navarra** (Università di Modena e Reggio Emilia): Un'attività di ricerca-sperimentazione del Progetto ArAl: approccio alle equazioni in terza primaria attraverso l'allestimento di 'Scene dinamiche'.

Sabato 5 novembre, Salone delle Terme, Albergo delle Terme
Scuola dell'Infanzia

14:30-15:15 **Claire Margolinas** (Università Blaise Pascal di Clermont-Ferrand, Francia): Il carattere ordinale del numero: un aspetto da valorizzare.

15:15-16:00 **Anna Aiolfi** e **Monica Bellin** (IC Spinea 1): Dalla lista della spesa allo scontrino: esperienze di economia in continuità con la primaria.

16:00-16:30 Intervallo

16:30-17:15 **Benedetto Di Paola** (Università di Palermo) e **Mariangela Ruisi** (IC «Leonardo Sciascia», Misterbianco, CT): I bambini si raccontano: soddisfazioni, paure e aspettative della loro scuola.

17:15-18:00 **Anna Angeli** (RSDDM, Bologna): Le attività di routine come occasione di argomentazione.

18:00-18:45 **Pietro Di Martino** (Università di Pisa): L'importanza dell'avvio all'argomentazione nella scuola dell'infanzia.

Seminari

Sabato 5 novembre

Anusca
Seminari per la Scuola dell'Infanzia

8:30-12.00 Maria Grazia Bolli, Patrizia Fornari, Nicoletta Landi, Bruno D'Amore, Benedetto Di Paola

Centro Congressi Artemide
Seminari per la Scuola Primaria e Secondaria di I Grado

8:30-12.45 Maria Elena Cazzetta, Anna Cerasoli, Aaron Gaio, Pietro Di Martino, Anna Baccaglini, Bruno Iannamorelli

Salone delle Terme, Albergo delle Terme
Seminari per la Scuola Secondaria di I e II grado

8:30-12.45 Anna Alfieri, Maria Giovanna Frassia, Annarosa Serpe, Veronica Cavicchi, Giuseppina Anatriello, Roberto Capone, Francesco Tortoriello, Giovanni Vincenzi, Marcela García Borbón, Jessenia Chavarria Vásquez

Domenica 6 novembre

Anusca
Seminari per la Scuola dell'Infanzia
8:30-12.00 Chiara Franconi, Carla Fugardo, Lietta Santinelli, Silvia Sbaragli, Anna Aiolfi, Valeria Razzini

Centro Congressi Artemide
Seminari per la Scuola Primaria e Secondaria di I grado
8:30-12.45 Francesca Martignone, Manuela Giordani, Michela Maschietto, Nicla Palladino, Nicolina Pastena, Elisabetta Robotti, Antonella Censi, Laura Peraillon, Ida Segor, Barbara Riccardi

Salone delle Terme, Albergo delle Terme
Seminari per la Scuola Secondaria di I e II grado
8:30-12.45 Susanna Abbati, Paola Carante, Alberto Cena, Arianna Coviello, Santina Fratti, Luigia Genoni, Germana Trinchero, Fiorenza Turiano, Gianfranco Arrigo, Paola Magnaghi Delfino, Tullia Norando, Simone Quartara, Silver Cappello

Informazioni

Ufficio Cultura - Comune di Castel San Pietro Terme (BO)
P.zza XX Settembre, 4 - Castel San Pietro Terme (BO) - 40024
Dal lunedì al venerdì: ore 9.00 - 13.00 (giovedì anche 15.00 - 17.45)
Tel. 051.6954127 /.150 - FAX 051.6954179 - cultura@cspietro.it

Siti:
http://www.cspietro.it
http://www.dm.unibo.it/rsddm
http://www.incontriconlamatematica.org
http://www.incontriconlamatematica.net

Il Convegno è aperto a tutti, non essendo a numero chiuso, quale che sia il giorno d'arrivo.

Progetto grafico
Bruno Monguzzi
Prestampa
Taiana
Stampa
Veladini

Redazione
Laboratorio di didattica della matematica
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera

Telefono
091 814 18 21/22/24
Fax
091 814 18 19
gianfranco.arrigo@span.ch

Amministrazione
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera
Fax
091 814 18 19

Esce due volte all'anno
a maggio e a dicembre

Abbonamento annuo
SFR 30
€ 16

Bollettino dei docenti di matematica
72

In questo numero: teoria dei giochi applicata alla politica e alla finanza, di G. Gambarelli e collaboratori; Sangaku, la matematica come spettacolo sacro, di G. Nicosia; costruzione degli insiemi numerici, di B. D'Amore e M. I. Fandiño Pinilla; sulla risoluzione dei problemi matematici di A. Monaco; il problema nella scuola di G. Arrigo; laboratorio di matematica, di M. Casson; il gioco Agorando 5 e un approfondimento concernente Agorando 3, di P. Hägler e G. Mainini; un'importante segnalazione relativa alla formazione continua degli insegnanti.

Direzione
Gianfranco Arrigo

ISBN 978-88-99453-01-5
Fr. 18.–

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport