A cura
del Laboratorio di didattica della matematica

Bollettino dei docenti di matematica

73

Dicembre
2016

Ufficio
dell'insegnamento medio
Centro di risorse
didattiche e digitali

Bollettino
dei docenti di matematica
73

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport

© 2016
Divisione della Scuola
Centro di risorse didattiche e digitali

ISBN 978-88-99453-02-2

Bollettino dei docenti di matematica 73

Dicembre
2016

Ufficio dell'insegnamento medio
Centro di risorse didattiche e digitali

Indice

Prefazione 7

I. Varia

1. Sommare mele con cavalli: una strana esperienza matematica
Silvio Maracchia 9

II. Didattica

1. Proposte metodologiche illusorie nel processo d'insegnamento della matematica
Bruno D'Amore – Martha Isabel Fandiño Pinilla
Traduzione dallo spagnolo di Livia Taddei 15

2. Un metodo per valutare le competenze nella scuola secondaria di primo grado attraverso l'uso degli apprendimenti in matematica
Michele Antonio D'Acunzo 43

3. Il gioco «UnoperUno», ossia una «sfida contadina»
Stefan Meyer e Cecilia Rossi 67

4. La stampante 3D come artefatto di mediazione semiotica
Gabriele Caffi 71

5. Competenze di visualizzazione e concettualizzazione
Romina Casamassa 91

6. Attività sulle griglie isometriche nella scuola primaria
Bernardo Mutti 109

III. Giochi

1. Agorando 6
Lingue formali
Paolo Hägler e Giorgio Mainini 115

Soluzione Agorando 5 116

IV. Matematica

1. Decifrazione di messaggi cifrati con il metodo di sostituzione monoalfabetica
Paolo Hägler, Giorgio Mainini e Jonathan Stoppani 117

V.	Segnalazioni e recensioni		
	1.	La SMASI a LACedu	121
	2.	Recensioni	123

Prefazione

Il numero apre con uno squisito e… imbarazzante contributo di Silvio Maracchia, il cui titolo inizia con le parole «Sommare mele con cavalli» che, da sole, non possono non sollecitare la curiosità di ogni insegnante di matematica.

Si entra poi nella corposa sezione dedicata alla didattica.

Il primo articolo, di Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla, è una sorta di medicina per gli insegnanti troppo affezionati a «metodi» unilaterali d'insegnamento. La lezione che se ne può dedurre è che l'insegnante dovrebbe conoscere le varie proposte metodologiche diffuse nella didattica, ma servirsene solo parzialmente se e dove lo ritiene opportuno. Ciò significa, in altri termini, non rifiutare per principio nessuna proposta, ma cavarne da ciascuna ciò che eventualmente potrebbe servire nella propria pratica di classe.

Si continua con un apprezzato articolo di Michele D'Acunzo sul tema molto caldo della valutazione delle competenze.

Torna ben accolto Stefan Meyer, l'amico di Zurigo, che, con la poschiavina Cecilia Rossi, ci presenta una bella attività da proporre soprattutto a giovani con difficoltà di apprendimento. Tematica: numeri naturali, confronto, addizione e moltiplicazione, il tutto nell'ambiente di un gioco di carte molto diffuso nella Svizzera tedesca.

L'industria offre strumenti elettronici sempre più potenti che hanno un grande impatto sui giovani, mentre la scuola stenta a seguire questo sviluppo. Uno degli ultimi apparecchi apparsi sul mercato è la stampante 3D. Gabriele Caffi, nel suo lavoro di diploma al DFA, si è chinato sul possibile impiego didattico di questa macchina e ci comunica i risultati dell'esperienza che ha portato a termine in una sua classe.

Un altro lavoro interessante, svolto nell'ambito dell'abilitazione all'insegnamento presso il DFA, è quello di Romina Casamassa che consiste in una fine riflessione, legata a una ricerca sperimentale, sul ruolo della visualizzazione in geometria.

La sezione dedicata alla didattica chiude con una nuova proposta di Bernardo Mutti ormai specializzato in attività varie da eseguire su griglie di vario genere.

La sezione Giochi ospita Agorando 6 di Paolo Hägler e Giorgio Mainini, che propone un problema di stampo linguistico-computazionale che sicuramente solleciterà gli appetiti dei risolutori. Gli autori pubblicano anche una loro soluzione del quiz Agorando 5.

Segue un sintetico scritto della coppia Hägler-Mainini, alla quale si aggiunge Jonathan Stoppani, sulla decifrazione di messaggi cifrati con il metodo di sostituzione monoalfabetica. Queste righe sarebbero dovute apparire nel corpo del corrispondente articolo pubblicato sul numero 72, a pagina 119.

Segue la sezione Recensioni che presenta un paio di proposte di indubbio interesse, la prima di grande attualità, la seconda di carattere storico legata alla risoluzione di problemi.

Infine una segnalazione importante e nostrana concernente un ciclo di conferenze organizzate dal LAC di Lugano in collaborazione con la SMASI.

1. Sommare mele con cavalli: una strana esperienza matematica

Silvio Maracchia

This article examines an odd solution of Leonardo Pisano. Breaking the correct prohibition to sum etherogeneous elements (for example velocity and acceleration, seconds and hours etc.) he nevertheless, brilliantly, comes to the correct result that, by the way, he obtains also via… more normal procedures. A genius can afford derogations that not always are to be taken as examples.

Talvolta può capitare al professore di correggere l'errore che si commette allorché qualche allievo somma oggetti di natura diversa: mele con cavalli, ad esempio.

In verità, superato il monito di François Viète che anche nelle equazioni, numeriche o no, stabiliva che tutti i suoi termini dovessero avere la stessa dimensione (geometrica), l'errore si commette generalmente in fisica quando si sommano grandezze diverse come minuti con secondi, velocità con accelerazioni e così via.

Gli studenti però (è meglio non dirglielo) potrebbero difendersi ricordando che anche un grande matematico come Leonardo Pisano (1170-1228 circa) sommò in un famoso problema i giorni del mese con i danari del compenso!

Ma come andarono veramente le cose?

Innanzi tutto osserviamo il problema di Leonardo (risolto in due maniere diverse).

«***Notevole quesito su un lavoratore***. *Un certo lavoratore avrebbe dovuto prendere 7 soldi al mese se avesse lavorato* [tutto il mese] *e altrimenti avrebbe dovuto restituire 4 soldi per un intero mese* [non lavorativo]: *egli rimase* [a lavorare] *per un intero mese nel quale talvolta lavorò e talvolta no cosicché, alla fine del mese, ricevette da colui* [per il quale lavorava] *1 soldo per quanto lavorò sottratto quello per quanto non lavorò. Si domanda quanti giorni dello stesso mese lavorò*»[1]

Per risolvere questo problema senza seguire i metodi di Leonardo Pisano, indicando con x il numero dei giorni lavorativi, basta risolvere l'equazione seguente:

$$\frac{7}{30}x - \frac{4}{30}(30 - x) = 1;$$

1. Leonardo Pisano, *Liber abaci* (Ed. Boncompagni, Roma, 1857 p. 160 e p.323); vedremo tra poco che il problema viene ripetuto due volte con due soluzioni diverse; il testo qui tradotto è quello di p. 160 e lo vedremo riportato nella fig. 2.

da cui[2]

$x = 150/11 = 13 + 7/11$

Leonardo Pisano risolve questo problema usando il metodo della *doppia falsa posizione* che egli, prendendolo dall'arabo, chiama *elchatayn*[3].

Il metodo si applica, come per le equazioni, allorché si vuole determinare un valore ignoto (y) nel caso che applicato a certe condizioni note porta ad un risultato *noto* (x). Ebbene, assegnati due valori («falsi») y_1 e y_2 e calcolati con le condizioni date i due valori corrispondenti x_1 e x_2, si risale al valore cercato attraverso la proporzione:

$$(y_2 - y_1) : (x_2 - x_1) = (y_1 - y) : (x_1 - x),$$

da cui

$$y = y_1 - \frac{(y_2 - y_1)(x_1 - x)}{x_2 - x_1}$$

Si tratta pertanto, a seconda che la x si trovi o no interna all'intervallo (x_1, x_2), di un problema di interpolazione o estrapolazione, lineare nel caso che la corrispondenza tra le variabili siano direttamente proporzionali. In questo caso si ottiene un risultato esatto; se poi la corrispondenza non è lineare il risultato che si ottiene è solo approssimato (v. figg. 1a e 1b).

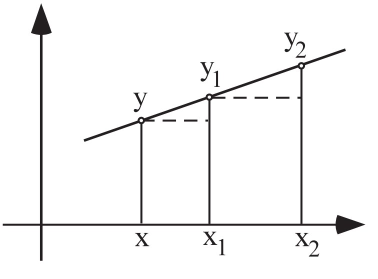


Figura 1a. Corrisp. dir. prop.
La y trovata è il val. esatto

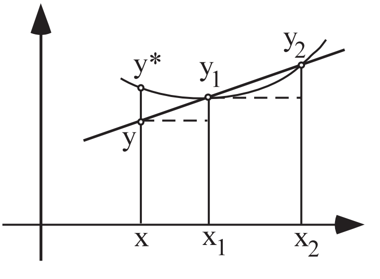


Figura 1b. Corrisp. non dir. prop.
La y trovata è val. appros.
del valore esatto y*

In ogni caso, per la similitudine dei triangoli rettangoli, indicati solo nella figura 1a, si ha appunto la proporzione già scritta.

2. Scrive Leonardo (op. cit. p. 323): «*exibunt dies* $\frac{7}{11}13$ ».

3. Il fatto di usare il nome arabo non ci permette di concludere che Leonardo attribuisse il metodo della falsa posizione agli arabi, noi comunque sappiamo che tale metodo, a dar credito all'indicazione di H. Zeuthen (*Histoire des Mathématiques dans l'Antiquité et le Moyen Age*Gauthier-Villars, Paris 1902, p. 232) si deve attribuire molto più probabilmente alla matematica indiana.

Ebbene, Leonardo Pisano considera prima il valore «falso» $y_1 = 15$, immaginando cioè 15 giorni lavorativi e poi $y_2 = 20$, per cui il guadagno risulterebbe nei due casi:

$$\frac{7}{30}15 - \frac{4}{30}15 = \frac{3}{2} \qquad (x_1)$$

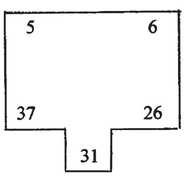
$$\frac{7}{30}20 - \frac{4}{30}10 = \frac{10}{3} \qquad (x_2)$$

Successivamente Leonardo sfrutta la proporzione:

$$(y_2 - y_1) : [(x_2 - x) - (x_1 - x)] = (y_1 - y) : (x_1 - x)$$

che porta alla proporzione già vista e al risultato (150/11) già noto.

Ma ancora prima, come abbiamo indicato nella nota 1, Leonardo Pisano aveva affrontato lo stesso problema e (v. fig. 2) dopo il testo del problema di cui abbiamo riportato la traduzione, scrive: «*Aggiungi i giorni del mese, che sono 30, con i soldi che si guadagnano* [di conseguenza] *e verrà 37*»![4]



De laboratore laborante in quodam opere.

Qvidam erat recepturus in mense causa sui laboris bizantios 7; et si aliquo tempore a labore cessaret, erat redditurus ad rationem mensis bizantios 4: stetit per mensem, ex quo quandoque laborauit, quandoque non; sic quod habuit de eo, quod laborauit, bizantium 1, discomputato eo, quod non laborauit. Queritur quantum laborauit, et quantum non ex ipso mense: sic facies. Addes dies mensis, qui sunt 30, cum bizantiis 7, quos lucrabatur, erunt 37; et de ipsis 30 tolle 4, quos erat redditurus, si non laboraret, remanent 26. Item cum 30 adde lucrum quod fecit, scilicet 1, erunt 31; et dicas: habeo monetam ad 26 et ad 37; et uolo facere ex eis libras 30, scilicet pro diebus mensis, qui sunt 30 ad 31: quod faciendum est per supradictam doctrinam, uidelicet ut differentia, que est a 37 usque in 31, scilicet 6, pones super 26; et differentia, que est a

Figura 2.

Il punto esclamativo è nostro poiché questo 37 è il risultato dall'aver sommato giorni con danari. E Leonardo Pisano si ripete per la perdita ottenuta eseguendo 30 – 4! Per seguire il metodo risolutivo di Leonardo Pisano è necessario ricordare il procedimento per risolvere un problema di miscuglio, cosa che faremo attraverso un esempio.

Supponiamo di voler mischiare y quintali di riso da €37 al quintale con x quintali di riso da €26 in modo da ottenere 30 quintali di miscuglio al prezzo di €31.

È chiaro che basta risolvere l'equazione lineare ($x = 30 - y$):

$$37\,y + 26\,(30 - y) = 30 \cdot 31$$

e ottenere così

4. Il testo prosegue nella pagina seguente (161) e consiste nella disposizione dei vari numeri indicati nella figura riportata a fianco nella figura 2, giustificata da quanto da lui detto in precedenza sulla teoria di miscugli. Vedremo tutto ciò tra poco nel nostro testo.

$y = 13 + 7/11$ (da cui $x = 16 + 4/11$).

È possibile però ottenere lo stesso risultato in altro modo considerando che per ogni quintale del riso di tipo y si ha un aumento di 37 – 31 = 6 euro rispetto a quello voluto per il miscuglio finale e per ogni quintale del riso di tipo x si ha una diminuzione di 31 – 26 = 5 euro. Ebbene, poiché si vuole il miscuglio finale ad €31, non vi deve essere né aumento né diminuzione e questo porta alla relazione:

$6y = 5x$

Questa relazione si può anche scrivere nella forma:

$y : x = 5 : 6$

che, tenuto conto che dev'essere $y + x = 30$, consente di ottenere il risultato voluto[5].

Generalmente si usa la tabella mnemonica che segue (fig. 3) per ricordare rapidamente la proporzione e quindi la soluzione del problema, tabella che può essere applicata in ogni caso simile di miscuglio:

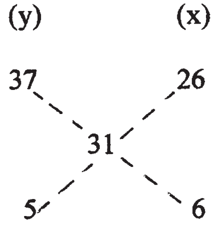


Figura 3. Schema tabella mnemonica

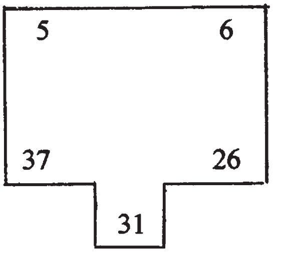


Figura 4. Schema usato da Leonardo Pisano

Ed è proprio con questo schema (fig. 4; v. anche fig. 2) che Leonardo Pisano risolve il suo problema anche se la disposizione è apparentemente diversa.

Ma come mai considera quei numeri 37 e 26? Come mai somma o sottrae il numero dei giorni di un mese con il guadagno o la perdita corrispondente come esplicitamente premette?

Teniamo presente, intanto, che Leonardo Pisano risolve il problema con l'applicazione del metodo del miscuglio. È chiaro dunque che egli considera *giorni da 37* nel senso che sono giorni lavorativi, legati al compenso che producono[6], i quali, legati a *giorni da 26* (legati anch'essi, se vogliamo, al «compenso» che producono) in modo da ottenere con il loro miscuglio, *30 giorni da 31* (dato che si vuole ottenere proprio il compenso di 1).

5. Per una proprietà delle proporzioni si ha $(y + x) : y = (5 + 6) : 5$ cioè $30 : y = 11 : 5$ da cui è possibile ritrovare il valore della y già noto.
6. Sarebbe forse meglio dire «cose da 37»!

Il problema è dunque simile al precedente esempio i cui numeri erano stati scelti proprio in modo da portare ai numeri del problema di Leonardo Pisano[7].

Si tratta di un miscuglio anomalo, anzi doppio, poiché prima si mescolano giorni con soldi in modo da avere «cose da 37» e «cose da 26» e poi si applica il procedimento del miscuglio che Leonardo aveva affrontato in precedenza.

Pur nel suo procedimento anomalo, il modo mostrato da Leonardo Pisano ha, a nostro parere, una sua intima bellezza dovuta al lampo di un genio che, come tale, è talvolta in grado di superare canoni e proibizioni, alla stessa stregua di un poeta cui è consentita talvolta qualche licenza.

Noi, purtroppo, nella nostra normalità, siamo costretti a seguire le regole stabilite, senza pensare di poter sommare tra loro … mele con cavalli se non nel senso esclusivamente numerico[8].

7. Si noti che se Leonardo Pisano avesse scelto 7/30 e -4/30 come valori da dover mescolare in modo da avere con 30 di essi il valore finale di 1/30, avrebbe ottenuto lo stesso risultato ma con una coerenza dimensionale non più criticabile trattandosi in ogni caso del guadagno di un giorno lavorativo o non lavorativo, mescolati in modo da avere in 30 giorni, un guadagno, per giorno, di 1/30.
8. Con questo si intende dire che sommare, ad esempio, 7 mele con tre cavalli, costituisce soltanto un insieme unione di cardinalità 10.

1. Proposte metodologiche illusorie nel processo d'insegnamento della matematica

Bruno D'Amore[1] – Martha Isabel Fandiño Pinilla[2]
Traduzione dallo spagnolo di Livia Taddei

In this paper we present and critically discuss methodologies and tools that have been proposed in illusory way as positively decisive in the complex process of learning mathematics. We present historical and didactic analysis to show the futility in some cases and in others the harmfulness.

0. Premessa

La disciplina della «didattica della matematica» ha una storia propria da circa una quarantina di anni, definita da studi specifici, di cui uno dei primi appartiene ad Artigue, Gras, Laborde & Tavignot (1994) e fa riferimento a «vent'anni di didattica della matematica in Francia»; attualmente, dunque, poco più di di 40 anni.

È possibile definire l'evoluzione storica di questa disciplina partendo dall'evoluzione degli interessi dei ricercatori ed è con questo intento che, alla fine del Ventesimo secolo, abbiamo proposto il seguente itinerario (D'Amore, 1999):

– *Didattica A* («A» da «ars docendi», traduzione dal latino della parola «didattica»): la didattica delle origini, in cui gli studiosi concentravano tutta la loro attività nello svolgimento di esercizi legati all'insegnamento della matematica (cosa insegnare, quando e come): curricoli, progetti educativi strumenti per l'insegnamento , …). Temporalmente, questa fase va situata tra gli anni Cinquanta e la metà degli anni Ottanta del Ventesimo secolo, malgrado sia tuttora in uso, dal momento che in alcuni centri di studio di svariati paesi vengono perseguiti esclusivamente obiettivi di questo tipo.

– *Didattica B* («B» in quanto successiva ad «A») o epistemologia dell'apprendimento della matematica, è quella che considera l'apprendimento della matematica come un fatto specifico e tema principale della ricerca. Facciamo riferimento al 1986 come data approssimativa della transizione della ricerca in didattica A a quella in didattica B, basandoci nell'articolo di Guy Brousseau pubblicato in quello stesso anno (Brousseau, 1986), l'ultimo di una successione di lavori il cui obiettivo era quello di smantellare una forma ascientifica di considerare la ricerca in didat-

1. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotà
2. NRD, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna

tica della matematica per passare a una nuova fase. È su di esso, ad esempio, che si basa la teoria delle situazioni, essenziale per la nascita della moderna teoria della Didattica della matematica (Brousseau, 2015).

– *Didattica C* («C» in quanto successiva a «B»); è la fase in cui i ricercatori cambiano la tipologia del soggetto di studio, passando dallo studente al docente e alle sue convinzioni, decisive per la creazione e l'analisi delle situazioni nell'aula (D'Amore, 2006). Possiamo considerare i primi anni del XXI secolo come l'inizio di tale approssimazione (Leder, Pehkonen, Törner, 2002).

Quasi sempre incentrate nella fase A, furono sviluppate idee, proposti suggerimenti e lanciate idee, … allo scopo di «migliorare» la prassi d'insegnamento della matematica nei vari livelli scolastici.

Dato che la fase A si caratterizza per la mancanza di rigore nella ricerca, non vi sono fondamenti scientifici che sostentino le metodologie proposte. La questione è che per convalidare la significatività di uno strumento didattico (tipo A), è necessario verificare empiricamente l'apprendimento (tipo B). Se le proposte sono in A, non può esserci una conferma significativa su basi scientifiche né degli strumenti né dell'apprendimento.

D'altro canto esiste una profonda distanza tra la pratica scolastica quotidiana dei docenti e le fonti di ricerca in didattica della matematica. La maggior parte delle riviste di ricerca non possono essere consultate o vengono considerate inaccessibili dagli insegnanti. Lo stesso vale per i congressi, i corsi e i seminari di ricerca. Oggi esistono molte riviste che si occupano della divulgazione della ricerca, congressi, seminari, ecc., ma il divario rimane profondo (Boero et al., 1996; Adler et al., 2005).

È inoltre risaputo che in generale un docente, nella sua ricerca di qualcosa che potremmo chiamare *panacea* (Kimmel, Deek, 1996), si lascia sedurre volentieri quando gli vengono offerte metodologie il cui ideatore ne garantisce l'effetto positivo sull'apprendimento; in questo articolo viene usato esattamente il termine «panacea» nello stesso senso usato da Kimmel e Deek (vedasi anche Powers, Powers, 1999).

L'obiettivo di questo lavoro è la discussione critica di alcune di queste proposte illusorie che durante un certo periodo incontrarono successo e gran diffusione nella speranza che il docente imparasse a far uso dei criteri di analisi degli strumenti concreti spesso suggeriti per l'azione nell'aula.

Divideremo l'articolo in due parti: alcune idee metodologiche illusorie e alcuni strumenti concreti chimerici. La distinzione tra metodologie e strumenti è sottile, dato che molti degli ideatori di strumenti li presentano attraverso una metodologia. Dal canto nostro abbiamo deciso di operare una distinzione tra le idee astratte e gli strumenti concreti.

Per quanto riguarda le prime suggeriamo metodologie d'insegnamento mentre per quanto riguarda i secondi presentiamo degli oggetti veri e propri come strumenti d'insegnamento, ma sempre da collocare tra le mani degli allievi. Più avanti presenteremo una lista e un'analisi dei più conosciuti tra questi strumenti.

Come punto di partenza di questo articolo, vogliamo dichiarare esplicitamente quanto segue: le scelte del docente, anche se sono personali, non lo sono in senso stretto; sono infatti fortemente influenzate dal contesto ideologico e pedagogico dell'epoca in cui vengono operate. Per questo motivo non si può, in nessun momento, colpevolizzare il docente per le sue scelte, che, in alcune occasioni, si rivelano erronee agli occhi dei ricercatori; ciò che si può fare è identificarle, studiarle e analizzarle.

1. Alcune idee metodologiche illusorie

Enumeriamo, descriviamo e commentiamo alcune proposte del passato che hanno condizionato su basi illusorie il complesso processo d'insegnamento-apprendimento della matematica.

1.1. Insegnare la logica degli enunciati a tutti i livelli scolastici

Negli anni '90 del XXI secolo, si pensò che, insegnando la logica degli enunciati a tutti gli studenti, di qualsiasi età, questi avrebbero automaticamente imparato le basi stesse della matematica, avrebbero imparato a «ragionare», a fare un uso corretto delle deduzioni e a operare le dimostrazioni.

Questa illusione trasversale si basava su di un'analogia tra elementi della logica degli enunciati e la lingua materna: connettivi logici come connettori della lingua naturale, quantificatori logici come quantificatori linguistici, enunciati logici come frasi del linguaggio, deduzioni come argomentazioni.

Dopo vari anni di sperimentazioni in questo senso, divenne evidente che questo tipo di analogie non era così immediato come si era pensato in un primo tempo (D'Amore, 1991).

Anzi, si constatò che sono pochi gli studenti che ricorrono agli elementi appresi dalla logica aristotelica per elaborare una dimostrazione. Ben al contrario, è generalizzato l'uso spontaneo e incosciente della logica indiana (*nyaya*), molto più ancorata alla realtà (una specie di sillogismo di 5 termini, uno dei quali si chiama, non a caso, «esempio») (D'Amore, 2005).

Venne in breve mostrato come insegnare la logica a tutti i livelli scolastici era un errore metodologico che contribuiva ad allontanare gli studenti dalla matematica.

Per diversi anni si fece precedere l'insegnamento della logica degli enunciati all'insegnamento della matematica tradizionale, quasi come una necessità preliminare. In generale i docenti concentravano la loro attenzione nel sollecitare la ripetizione mnemonica da parte degli studenti di tavole semantiche di verità dei connettivi.

Non siamo contrari all'insegnamento della logica, sempre e quando venga svolto in modo adeguato e opportuno. La logica formale è parte della matematica tanto come l'aritmetica, la geometria o la probabilità, ma è necessario convincersi che l'insegnamento della logica non risolve il problema meta-didattico dell'apprendimento della matematica.

1.2. La teoria «ingenua» dell'insiemistica

La maggior parte delle argomentazioni della matematica sono di tipo collettivo, non hanno cioè a che fare con oggetti matematici bensì con le classi di questi oggetti. Ad esempio:

– Tutti i quadrati sono (anche) rombi; il che permette di affermare che ogni quadrato è un rombo;
– L'insieme dei divisori di 3 è un sottoinsieme dei divisori di 6.

Queste argomentazioni, come ci ha insegnato Leonhard Euler (1707-1783), si possono rappresentare con gli opportuni grafici, che illustrano a meraviglia quella che in seguito è stata chiamata «teoria elementare degli insiemi» (D'Amore, Matteuzzi, 1975; Bagni, 1996; Bagni, D'Amore, 2007; D'Amore, Fandiño Pinilla, 2007). Inoltre, come ben hanno mostrato i bourbakisti, la matematica può ridursi a studio di strutture e può dunque basarsi del tutto sulla teoria degli insiemi come linguaggio formale. Questa direzione era già stata indicata da Felix Klein con le sue definizioni strutturali della geometria, che riducono le varie geometrie a gruppi algebrici particolari (D'Amore, Matteuzzi, 1975).

Negli anni Sessanta del ventesimo secolo è partita dagli Stati Uniti una riforma radicale del curricolo della matematica a tutti i livelli scolastici, basata su di una *teoria ingenua degli insiemi,* come risultato dell'autocritica al proprio sistema educativo a conseguenza del lancio del razzo sovietico *Sputnik* nel 1957. «*Teoria ingenua degli insiemi*» fu il lemma scelto per indicare una teoria degli insiemi non molto formale e certamente non assiomatica. La matematica proposta sulla base di questa teoria venne chiamata *New Math, Nuova Matematica*, *Matematica Moderna* (Phillips, 2014).

Secondo diversi autori, uno degli artefici di questa proposta teorica fu André Lichnerowicz (1915-1998), che in quel periodo lavorava in Francia. Nel 1967 il governo francese creò la «Commissione Lichnerowicz», formata da un gruppo di eminenti insegnanti di matematica. La Commissione raccomandò esplicitamente un curriculum che si basasse sulla teoria degli insiemi (adattandola ad ogni livello scolastico), con il fine di far entrare i bambini precocemente in contatto con le strutture matematiche (Mashaal, 2006).

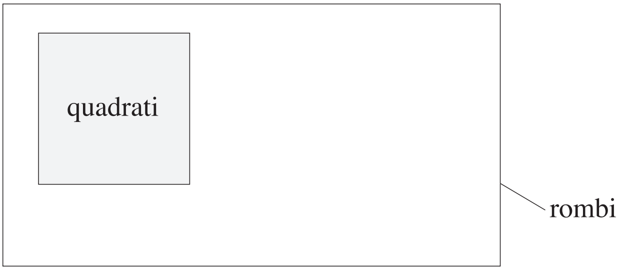
Nel 1973 le case editirici Salvat di Barcellona (Spagna) e Grammont di Losanna (Svizzera) pubblicarono un libro-intervista a Lichnerowiz di Pierre Kister, in cui Lichnerowiz difendeva la via strutturale per la matematica (ovvero basata sulla teoria degli insiemi e sulle strutture algebriche), compresa la matematica per i bambini più piccoli della scuola primaria. Un testo di Joaquín Navarro completava il libro con esemplificazioni (Kister, Navarro, 1973). Questo libro venne tradotto in diverse lingue e contribuì fortemente, dato il prestigio accademico dell'intervistato, alla diffusione dell'idea della Matematica Moderna e dell'insegnamento della teoria degli insiemi in tutti i livelli scolastici.

La proposta può venir spiegata come segue: le scuole devono privilegiare, già a partire dalla scuola materna, una teoria degli insiemi non formale, e trattare questa teoria e solo questa fino a quando non venga compresa e si sia radicata nella conoscenza degli studenti in modo tale da permettere loro di inserire in questo contesto logico-linguistico-rappresentativo qualsiasi aspetto della matematica.

Come risultato di questa prospettiva, scomparve la geometria euclidea tradizionale e l'aritmetica venne posposta. Si assistette al seguente fenomeno: gli allievi della scuola primaria imparavano il significato (almeno con esempi specifici) d'insieme vuoto, insieme universo, intersezione, sottoinsieme, appartenenza, ecc., ma non sapevano fare una somma o una sottrazione. La reazione critica dei matematici fu violenta; in particolare, causò grande sensazione l'analisi critica di Morris Kline (1973).

Le ricerche svolte in vari paesi, compresa l'Italia (D'Amore, 1975), mostrarono come si trattasse di un sogno, lontano dalla realtà dell'apprendimento e questa teoria degli insiemi venne quindi abbandonata. Questo percorso della matematica si rivelò del tutto innaturale, forzato e non produsse risultati significativi, dato che seguendolo non si raggiungeva la capacità di risolvere nemmeno i problemi più banali. In particolare, si rivelarono decisive le analisi critiche, profonde e dettagliate di Guy Brousseau (1965, 1972, 1980a, 1980b, 1982, 1984, 1986; Brousseau e Perez, 1981, 1965, 1972, 1980a, 1980b, 1982, 1984, 1986).

Tuttavia, ciò non significa che non sia possibile disegnare un grafico in cui si trattino alcuni insiemi di oggetti matematici, come il seguente:



Tutti sanno interpretare questo grafico in modo intuitivo: tutti i quadrati sono rombi, ma esistono rombi che non sono quadrati. Ciò che stiamo affermando è che non è necessario sviluppare una teoria specifica per disegnare un grafico con un significato banale e intuitivo come quello dell'esempio, dato che facendolo corriamo il rischio di confondere lo strumento d'insegnamento con l'oggetto di studio, confusione questa che nella didattica della matematica viene definita come *slittamento metadidattico* (Brousseau, D'Amore, 2008).

1.3. I diagrammi di flusso

I diagrammi di flusso sono nati nell'ambito della rappresentazione grafica per fornire modelli visibili di algoritmi, procedure ordinate di svariati tipi che seguivano un ordine determinato e sequenze di operazioni. In inglese si chiamano *flow charts* e hanno avuto un grande sviluppo in informatica. Sono state create forme convenzionali per indicare la tipologia degli oggetti in questione, ad esempio rettangoli, rombi, esagoni, parallelogrammi, ecc. Tra queste forme vengono poste delle frecce per indicare l'ordine da seguire nella sequenza delle operazioni o delle istruzioni. Si tratta quindi di un caso specifico dei cosiddetti diagrammi a blocchi che servono per descrivere processi. Yourdon e Constantine (1979) offrono un'esaustiva rassegna storica dei diagrammi di flusso e dei loro usi.

Il successo di questo strumento rimonta al tentativo degli anni Settanta del XX sec. d'introdurre nell'insegnamento scolastico le basi dell'informatica. Uno dei primi contributi informativi di questo suggerimento è probabilmente la guida monografica n. 4 del progetto *Nuffield per la matematica* (Fondazione Nuffield), con sede editoriale a Edimburgo, Londra e Nuova York.

Questa guida (*Nuffield Project*, 1972), di uso esclusivo per docenti, in un breve lasso di tempo venne tradotta in diversi paesi.

In questo testo 4 del progetto *Nuffield*, le pagine 6-12 sono dedicate a una introduzione dei diagrammi di flusso come schemi per strutturare una successione di attività, e quindi proposti come accesso alla descrizione degli algoritmi e in seguito alla programmazione dei computer come oggetto d'insegnamento e apprendimento della matematica.

Abbiamo analizzato numerose pubblicazioni di quel periodo, dalla prima metà del 1980 fino alla metà del 1990, e i diagrammi di flusso vengono sempre proposti mirando agli obiettivi per i quali erano stati creati originariamente e cioè insegnare agli studenti a programmare, all'inizio principalmente in linguaggio BASIC, finalità questa che venne progressivamente abbandonata e che oggi è proposta solo in rare occasioni.

Non è dato sapere da dove sia sorta l'idea di utilizzare questo strumento di carattere puramente descrittivo convertendolo in uno strumento strategico-risolutivo in chiave didattica. L'ipotesi didattica potrebbe venir descritta come segue: i diagrammi di flusso vengono usati per rappresentare il processo da seguire per risolvere problemi, indipendentemente dal livello scolastico, a partire dalla scuola primaria, facendo coincidere il ragionamento risolutivo con la rappresentazione del processo.

Questo ragionamento poggiava sull'idea che l'uso dei diagrammi di flusso avrebbe aiutato gli studenti a riflettere sul procedimento e avrebbe quindi stimolato l'aumento della capacità di risolvere problemi. Il testo più frequentemente citato da quasi tutti i sostenitori di questa deviazione del significato reale dei diagrammi di flusso è il famoso libro di Seymour Papert (1980), tradotto in diverse lingue.

Tuttavia, ci sono due punti critici sui quali è necessario riflettere.

Punto 1

Nella risoluzione di un problema, senza importarne il tipo, c'è un momento creativo. Ad esempio, nel classico Studio di Glaeser (1975), nella successione delle azioni di risoluzione dei problemi ci sono 5 fasi che ne costituiscono il processo euristico:

– la preparazione;
– l'incubazione;
– il «bricolaje»;
– l'eureka
– la verifica e la redazione

L'eureka è il momento centrale, irrinunciabile e creativo. Inoltre, è proprio questo fatto quello che differenzia la risoluzione di un problema rispetto all'esecuzione di una operazione o di un esercizio, attività che si considera richiedano un minor grado di esigenze cognitive. Pertanto, nessuna rappresentazione grafica di un problema, per quanto dettagliata possa essere, facilita la capacità di affrontare con successo il momento creativo (strategico, secondo alcuni), messo in atto per risolvere un problema (D'Amore, 1995) .

Punto 2

La difficoltà di descrivere mediante un diagramma di flusso un determinato problema è sempre di gran lunga superiore alla difficoltà di risolverlo, indipendentemente dall'età o dal livello, in particolare nella scuola primaria e nei primi anni della secondaria. Pertanto, all'evidente e ben nota difficoltà degli studenti a risolvere problemi, l'applicazione dei diagrammi di flusso non forniva una risposta in termini di reale aiuto ma, al contrario, aggiungeva un'ulteriore difficoltà, in genere insuperabile. Molti furono gli studenti di primaria o secondaria che dichiararono di trovarsi in difficoltà con il disegno del diagramma di flusso, e ciò anche se erano stati in grado di risolvere il problema senza ricorrere a detto diagramma. Ci sono evidenze di bambini che asseriscono di saper risolvere il problema ma di non saper disegnare il diagramma di flusso e alcuni affermano che sanno di doverlo disegnare perché è ciò che l'insegnante pretende in classe. (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, Sbaragli, 2008; D'Amore , Marazzani, 2011).

In seguito alla messa in evidenza di questi punti critici in gran parte del mondo, questa illusione è stata ampiamente criticata e il ricorso a questo strumento completamente abbandonato (D'Amore, 2014). Ciò non significa che non si possano utilizzare sequenze ben strutturate per indicare l'ordine delle operazioni da eseguire; anzi, a volte è assai utile. Lo spieghiamo con un esempio.

Un bambino di scuola primaria tende a usare il segno *uguale* in senso procedurale e non relazionale, come auspicato nell'ambito dell'insegnamento (Camici et al., 2002). Ciò significa che alcuni bambini risolveranno il problema: «*Un cartolaio acquista 12 scatole di penne che contengono ciascuna 6 penne; ogni penna costa 2 euro. Quanto spende il cartolaio?*», nel modo seguente:

$12 \times 6 = 72 \times 2 = 144$

e non così:

$12 \times 6 = 72$

$72 \times 2 = 144$

perché ritengono che il segno = significhi «dà» («resulta»), ovvero che il segno = indichi una procedura (Boero, 1986; D'Amore, 1993a)[3].

Le due espressioni sono simili dal punto di vista semiotico ma non da quello semantico. Le due funzioni, oggettivazione e comunicazione, sono fondamentalmente distinte e portano quindi a giudizi assai differenti per quanto concerne la valutazione della produzione dell'alunno (Duval, 1995a, b).

Diversi ricercatori di tutto il mondo suggeriscono di proporre ai bambini la sostituzione del segno = con una freccia, per appropriarsi il significato di uguaglianza un po' alla volta (Boero, 1986; D'Amore, 2014). È pertanto necessario che il bambino

3. Naturalmente, è possibile proporre diverse interpretazioni del fenomeno, che è sempre stato spiegato come un tentativo di uso *comunicativo*, mentre potrebbe essere, al contrario, il risultato di una *oggettivazione* fatta dal bambino (D'Amore, 2001). Potrebbe dunque venire spiegato come una rappresentazione abbreviata o condensata del processo eseguito per ottenere la risposta (Duval, 1995a).

prenda coscienza del fatto che vanno eseguite due operazioni e che nel processo di risoluzione del problema la seconda operazione è consequenziale alla prima.

Da alcuni anni a questa parte, la proposta di precedere il processo di risoluzione di un problema con uno schema del testo e poi con il procedimento da seguire sotto forma di diagramma di flusso è stata completamente abbandonata; ma quest'idea ha rappresentato un'illusione mantenutasi nel mondo della scuola per più di un decennio.

1.4. «Ricette» metodologiche per risolvere problemi

Dato che l'apprendimento strategico (Fandiño Pinilla, 2010), sembra essere uno dei più complessi in quasi tutti i livelli scolastici, nel corso degli anni sono stati proposti suggerimenti metodologici che il docente utilizza per stimolare gli studenti durante la risoluzione di un problema. Si tratta solitamente di stimoli concreti e indicatori di direzioni strategiche per la risoluzione del problema. Un'analisi attenta mostra l'inutilità di questi suggerimenti che, talvolta, sortono l'effetto contrario.

Questo tipo d'indicazioni si possono riunire in un gruppo che chiameremo «ricette metodologiche» (modelli normativi). (Troviamo la definizione di questo tipo di modelli, la loro presenza in aula e la loro inutilità già in Kleinmuntz, 1976; una rassegna storico-critica in D'Amore, 1999). È interessante constatare che quando allo studente viene chiesto di descrivere i suoi processi personali di risoluzione, egli usi esattamente le frasi del docente come se fossero un copione (Kleinmuntz, 1976; Resnick e Ford, 1981); oggi sappiamo senz'ombra di dubbio che questo tipo di atteggiamento è dovuto al fenomeno del contratto didattico (Brousseau, 1986; per un'analisi più aggiornato vedasi D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, Sarrazy, 2010).

Abbiamo identificato alcuni di questi stimoli, considerati dagli insegnanti delle guide metodologiche utili e necessarie per risolvere un problema di matematica. Per ciascuno di questi stimoli proponiamo un commento scaturito dalle riflessioni critiche dei docenti stessi. (Riguardo all'identificazione di queste frasi e alle autocritiche degli insegnanti in servizio, vedasi D'Amore, 1993a e 2014).

- «Devi fare molta attenzione»; il fatto di prestare attenzione a ciò che si sta facendo non è qualcosa che possa venir ordinato dall'esterno, né è una condizione sufficiente per raggiungere l'apprendimento concettuale o per risolvere un problema.
- «Leggi bene il testo»; il testo in cui si propone un problema non è sempre per forza un testo scritto; il problema può venir presentato tramite un disegno oppure oralmente o con un grafico o in tanti altri modi; inoltre il «leggere bene» non ha un significato preciso; lo studente potrebbe «leggere bene» un testo, parola per parola, e non capire il significato di ciò che ha letto.
- «Leggi bene la domanda»; alla critica precedente va aggiunto che non sempre la domanda del problema è esplicita; a volte non è nemmeno presente.
- «Racchiudi in un circolo i dati numerici»; i dati non sempre corrispondono a numeri e non sempre questi dati numerici sono utili per risolvere un problema.

- «Sottolinea la domanda»; non sempre è necessario evidenziare la domanda; inoltre ci sono problemi in cui non è possibile caratterizzare la domanda, il che porta inevitabilmente al fallimento.
- «Cerca la parola chiave che ti aiuterà a capire»; la presunta parola chiave può essere un ostacolo semantico nella ricerca dell'operazione risolutiva. Alcuni studi di didattica degli anni Ottanta del XX sec. hanno messo in evidenza che questo suggerimento porta al fallimento. Prendiamo questo esempio: «Ho 3 biglie però per giocare ne ho bisogno 7; quante ne devo *aggiungere* a quelle che ho già?». La supposta «parola-chiave» è «aggiungere». Pertanto sulla base del modello intuitivo, chi sta cercando di risolvere il problema eseguirà un'addizione e non l'auspicata sottrazione (Fischbein, 1985a, 1985b; Fischbein, Vergnaud, 1992; Moser, 1985a, 1985b; D'Amore 1993a, 1999, 2014; Vergnaud, 1981, 1982, 1983).
- «Decidi qual è l'operazione (aritmetica) da realizzare»; non sempre c'è una supposta «operazione da eseguire» per caratterizzare la risoluzione di un problema.
- «Analizza se il numero che stai cercando deve aumentare (in questo caso si tratta di una addizione o di una moltiplicazione) o diminuire (in questo caso devi usare…)»; le operazioni «che aumentano» o «diminuiscono» sono uno dei suggerimenti più erronei che un docente può dare agli studenti; serva da esempio una moltiplicazione che non aumenta: 12 x 0,5 (Fischbein, 1985a, 1985b). Mostriamo un caso in cui questi suggerimenti sono, di fatto, un ostacolo alla risoluzione di un problema: «Un pastore ha 12 pecore e 6 capre; quanti anni ha il pastore?» (Brissiaud, 1988; D'Amore, 1993a). Il bambino, sulla base dei precedenti suggerimenti, normativi e descrittivi, perde il contatto con il nonsenso del rapporto tra testo e domanda e si concentra sui dati numerici (li racchiude in un circolo con la matita), sulla domanda (la sottolinea) e sulla presunta operazione da eseguire. E così, invece di dare una risposta corretta del tipo: «La domanda non ha nulla a che fare con il testo» (o simili), in una percentuale elevata propone come risposta «12 + 6» (D'Amore, 1999).
  (Riguardo a tutto ciò vedasi anche: Brousseau, D'Amore, 2008).

Per concludere, diremo che: non ci sono né modi, né strategie, né algoritmi, né indicazioni verbali opportune per insegnare a risolvere problemi a nessun livello scolastico; la fase creativa «eureka» (vedi 1.3.) non può venir identificata con un algoritmo. Non è un caso che attualmente venga fatta una distinzione tra «esercizio» (la cui prassi esecutiva si sviluppa nella zona effettiva di Vygotskij) e «problema» (la cui prassi risolutiva si sviluppa nella zona di sviluppo prossimale di Vygotskij) (Fandiño Pinilla, 2010).

1.5. Il laboratorio di matematica

Nei decenni del 1960 e del 1970 fu sviluppata l'idea di non limitare l'insegnamento e l'apprendimento solo al lavoro in aula e alla teoria, alle lezioni «frontali», come venivano chiamate allora, ma di estenderli al «fare» (De Bartolomeis, del

1978, per una sintesi storica dell'evoluzione delle metodologie d'insegnamento, vedasi Frabboni, 2004).

Si trattava di creare attività manuali in cui il concetto matematico che si voleva conseguire venisse modellato concretamente e lo studente veniva invitato, da solo o in gruppo, a entrare in un vero e proprio laboratorio, dotato di strumenti per lavori manuali (semplici), allo scopo di realizzare manufatti che rispondessero a determinati compiti e a determinate caratteristiche che erano illustrazioni concrete di idee matematiche. Riguardo alle modalità pratiche e teoriche d'interpretazione dei laboratori, ci furono ampi dibattiti; noi sostenevamo e sosteniamo l'interpretazione «forte», vale a dire:

- un laboratorio dev'essere concepito come una vera e propria officina, con attività concrete specifiche;
- con attori specifici (non solo studenti), ad esempio un esperto di laboratorio; va evitata l'identificazione dell'esperto di laboratorio con l'insegnante, per non creare nell'ambiente di laboratorio le norme negative del contratto didattico;
- un locale specifico (non la classe in un lasso di tempo in cui viene fatta astrazione della *routine* di classe).

Tutto questo, corredato di esempi concreti, teorie specifiche e guide pratiche, si può trovare ad esempio in Caldelli e D'Amore (1986) e D'Amore (1988, 1989, 1990-1991). Si potrebbe collocare alla base di questa metodologia di insegnamento la seguente riflessione-speranza: se lo studente fa, costruisce la matematica della realtà e all'interno della realtà, detta matematica implicherà un apprendimento efficace. Vale senza dubbio la seguente massima: *se faccio, capisco*.

Vennero allora studiate molteplici attività che permettessero di raggiungere quest'obiettivo che inizialmente non sembra avere nessuna relazione con la matematica, di per sé astratta (ad esempio Caldelli, D'Amore 1986; D'Amore, 1988, 1989, 1990-91).

Furono allestite mostre pubbliche in cui esporre gli oggetti realizzati nel laboratorio, con lo scopo di rafforzare la motivazione e, al contempo, rendere gli studenti partecipi del processo di diffusione di ciò che avevano appreso. Venivano coinvolte anche altre classi e altri genitori; in altre parole, il mondo della noosfera (D'Amore, 1981 1982a, 1982b, 1982c, 1987a, 1987b, 1988 1989a, 1989b).

All'inizio del primo decennio del 1980, un gran numero di Provveditorati agli Studi d'Italia[4], sensibili a questo tipo di esperienze didattiche, concedevano una riduzione dell'onere accademico: alcuni insegnanti cambiavano il loro status di docenti e si convertivano in esperti di laboratorio. Ciò avvenne in particolare a Bologna città (ad un certo punto si giunse ad avere 10 insegnanti in questa veste) e nella provincia (Imola, Castel San Pietro), così come a Lugo (Ravenna).

Il laboratorio, nella nostra concezione, è quindi un luogo diverso dall'aula, dotato di tutti gli strumenti necessari per l'elaborazione di un oggetto concreto realizzato dallo studente e che dispone di un apposito tecnico che aiuta gli studenti da un punto

4. Direzioni scolastiche provinciali, rappresentanze locali del Ministero italiano della pubblica istruzione, con potere autonomo di decisione.

vista concreto. Nella discussione fra docente e studenti, nell'aula, viene messo in evidenza un problema concettuale matematico, che viene interpretato da un punto di vista concreto, si trasforma nel progetto di un manufatto che realizzi determinate condizioni e risolva determinati problemi. Da solo o in gruppo, lo studente, in certi orari abbandona l'aula e si trasferisce in laboratorio, dove il progetto deve venir trasformato in un oggetto concreto. Il manufatto finito viene discusso dal gruppo con il tecnico. In un secondo tempo, superato l'esame, viene portato in aula e proposto al docente e ai compagni mediante spiegazioni dal punto di vista matematico. I risultati eran considerati eccellenti e il consenso attorno a questa modalità era totale, ma già a metà del decennio del 1980, le nostre analisi didattiche e le osservazioni empiriche in aula cominciarono a mostrare i limiti di questa metodologia didattica (D'Amore, 1988). In una conferenza intitolata *Il laboratorio di matematica: luogo di motivazione e attitudini*, svoltasi a Milano in occasione della XIX riunione del GIRP (*Groupe International de Récherche en Pédagogie de la Mathématique*), 15-22 luglio del 1990, uno degli autori di questo testo mise in evidenza alcuni punti deboli di detta metodologia, venuti alla luce in oltre 10 anni di esperienza e osservazioni.

Nel laboratorio si manifestavano casi di rifiuto alla metodologia, ad esempio in studenti poco interessati al *bricolage*; vennero a crearsi situazioni analoghe a quelle provocate dal contratto didattico in aula. Una volta costruito un oggetto-modello, sorgevano difficoltà per reinterpretarlo sulla base del problema matematico che sosteneva la sua costruzione, così come molti altri problemi di ordine didattico.

D'altro canto, l'unicità metodologica non può garantire, per la sua propria natura, il successo nell'apprendimento (D'Amore, 2003). Fatto questo, confermato da tutti gli studi d'ingegneria didattica, nell'ambito della teoria delle situazioni (D'Amore, 1999; D'Amore, Sbaragli, 2011). Attualmente, il laboratorio di matematica esiste ancora; ne siamo sostenitori e lo proponiamo come metodologia didattica, compresa la fase delle esposizioni aperte al pubblico (D'Amore, Giovannoni, 1997). Tuttavia, le nostre analisi e la consapevolezza raggiunta ci hanno imposto di riconoscere come sia necessario tener conto dei suoi limiti e mettere in evidenza le contraddizioni intrinseche all'uso di detta metodologia didattica (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2003).

Il laboratorio come modalità didattica d'insegnamento-apprendimento esiste ancora e rappresenta un'eccellente modalità alla quale si fa riferimento ancora oggi (D'Amore, Marazzani, 2005, 2011). Ciò nonostante, il suo uso richiede una valutazione critica che tenga in considerazione gli studi scientifici svolti al riguardo: oggigiorno non si può più pensare al laboratorio come a una panacea o a una metodologia de tutto positiva.

1.6. Uso della storia della matematica nell'insegnamento della matematica

Riteniamo che, così come la letteratura si studia attraverso la storia, possa essere interessante dare agli studenti informazioni di carattere storico (D'Amore, 2004). C'è una bella differenza fra l'italiano di Dante Alighieri (1265-1321) e quello di Italo Calvino (1923-1985), così come c'è una gran differenza tra lo spagnolo di Miguel de Cervantes Saavedra (1547-1616) e lo spagnolo di Gabriel García Márquez (1927-2014). Si ha spesso l'impressione che la matematica sia astorica e che Pitagora, Cartesio e Peano fossero colleghi contemporanei, mentre fra il primo e l'ultimo c'è un intervallo di 2500 anni, la qual cosa sorprende molti e non solo gli studenti. Prendendo sempre in considerazione il punto di vista dell'apprendimento dell'allievo, siamo stati partecipi attivi del fatto che molte questioni matematiche possono facilmente e significativamente essere proposte agli allievi chiamando in causa fatti storici e abbiamo fortemente contribuito a creare materiale adatto a questa trasposizione didattica (solo come esempio: D'Amore, Speranza, 1989, 1992, 1995; ma i contributi in tal senso di vari autori sono molti di più).

Anzi, abbiamo teorizzato il fatto che l'uso della storia possa avvenire su tre piani distinti:

- epistemologico-critico,
- cronologico e
- aneddotico,

con funzioni didattiche profondamente diverse (D'Amore, 2004).

Sul piano della formazione degli insegnanti, poi, abbiamo sempre insistito sull'importanza di una formazione:

- in prima battuta disciplinare (apparteniamo ancora alla vecchia guardia, di coloro che ritengono che: non può insegnare la disciplina X chi non è ottimo conoscitore di X);
- in seconda battuta didattica (conoscere la disciplina X è condizione necessaria ma non sufficiente per insegnare X: oggi esiste la didattica disciplinare di X);
- in terza battuta storica ed epistemologica.

Quest'ultimo aspetto è necessario non solo per motivi culturali (che a noi sembrano ovvii), ma anche professionali: la didattica della matematica e più precisamente la teoria degli ostacoli (D'Amore, 1999) ha ampiamente mostrato l'esistenza di ostacoli epistemologici all'apprendimento della matematica (D'Amore, Radford, Bagni, 2006; D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, Sbaragli, 2008). Tuttavia, se davvero si vuol aiutare uno studente in difficoltà e se la natura dell'ostacolo è di tipo epistemologico, è necessaria la conoscenza della storia (anche epistemologica) dell'oggetto matematico che si è trasformato in ostacolo all'apprendimento.

Nel corso degli anni siamo giunti a formulare la seguente ipotesi: all'introdurre un oggetto matematico per il suo apprendimento, è utile dedicare del tempo alla sua storia o perlomeno al periodo storico o al personaggio che l'ha creato; un'attività di questo tipo risveglia l'interesse nei confronti di detto oggetto. Riguardo a quest'ipotesi siamo d'accordo con diversi studiosi (Fauvel, van Maanen, 2000; Bagni, 2004a, 2004b, 2004c; Bagni, Furinghetti, Spagnolo, 2004).

Ma usando questa metodologia, che garanzie abbiamo sull'effettivo apprendimento dell'oggetto matematico proposto? Pur essendo convinti sostenitori dell'uso della storia nel processo d'insegnamento-apprendimento della matematica, dobbiamo denunciare il fatto che l'ingenua equazione:

uso della storia nell'insegnamento in eq. apprendimento sicuro

non funziona automaticamente.

Certo, avere sempre a disposizione un contesto storico produce cultura ed elevate potenzialità, ma la certezza di attivare l'interesse e di raggiungere di conseguenza l'apprendimento non sono così banalmente legate a questi fattori e a questi contenuti.

Nonostante queste limitazioni, riteniamo che la conoscenza tanto della storia come dell'epistemologia della matematica siano necessarie alla formazione degli insegnanti, ma ciò non implica che debbano necessariamente essere usati come strumento didattico esplicito con gli studenti; se si decide di far uso della storia con questo fine, occorre molta cautela. Di per sé, questo strumento metodologico è sì notevole, ma non è una panacea; l'averlo considerato come tale, in un recente passato, è stata una delle molte illusioni.

1.7. Adozione di curricola o di progetti stranieri

Un atteggiamento tipico del mondo della didattica attiva, ma non della ricerca, è quello di considerare che i programmi nazionali non sono all'altezza della situazione attuale e, di conseguenza, guardano con ammirazione a quelli di altri paesi. Ad esempio, un determinato paese straniero ha successo con le prove PISA e si pensa dunque che il sistema di questo paese è il più adeguato, degno di venir imitato e importato. Questo atteggiamento superficiale e ingenuo non si è verificato solo nel passato; leggiamo continuamente parole di ministri, o dei denominati esperti, o di professionisti dell'educazione che sognano d'importare nei loro paesi metodologie strumentali utilizzate in paesi i cui studenti hanno successo nelle prove PISA, con la speranza di poter risolvere così il fallimento nei confronti della matematica dei propri studenti.

In questo periodo, sempre come esempio, si diffuse in Italia l'idea illusoria di utilizzare come libri di matematica per la scuola elementare testi scolastici finlandesi, senza nemmeno tradurli (idea che ha guadagnato seguaci tra le persone acritiche). La rete italiana è satura di commenti al riguardo e in numerose località si stanno diffondendo banalità attorno all'uso di questi testi, considerati come la soluzione ai problemi di apprendimento della matematica. Anche il prestigioso quotidiano italiano *La Repubblica* favorisce acriticamente l'emergere di queste illusioni publicando e incoraggiando l'uso di questi testi nella scuola primaria (vedasi: http://video.repubblica.it/cronaca/viva-la-matikka-scuola-primaria-a-l).

Tutto ciò si traduce generalmente nell'importazione di programmi da altri paesi o nell'adozione di progetti didattici che hanno avuto successo in altri contesti. Questi sogni, vagamente esterofili, pur nelle loro ovvie ed evidenti differenze, sono analoghi. In passato, alcuni paesi che si autoconsideravano inferiori quanto al proprio sviluppo, chiamavano «esperti» di modelli stranieri e li incaricavano di formare i docenti nei nuovi curricola e di far loro assorbire le esperienze dei propri esperti. Potremmo fare vari esempi concreti di cui siamo venuti a conoscenza personalmente. Questo modo di agire ha sempre generato un fallimento.

Il curricolo della matematica di un paese deve esprimerne anche la storia sociale e cuturale, ragione per la quale non può essere asettico, aculturale, astorico. Non conosciamo nessun esempio positivo di adozione dall'esterno che abbia avuto successo nell'apprendimento. Analogamente, in relazione ai progetti stranieri. In Italia, ad esempio, sono stati tradotti i progetti RICME (ungherese; nel 1976), Nuffield (del 1967) e lo *School Mathematics Project* (del 1972; inglese; lo *Scottish Mathematics Project* (tradotto solo in minima parte nel decennio del 1970) e il *Fife Project* (1978) (questi due ultimi scozzesi) e tanti altri. Si trattava senza dubbio di progetti interessanti, stimolanti e curiosi, ma poi rapidamente abbandonati perché lontani dalla sensibilità e dalle aspettative dei docenti italiani.

Come scritto poco sopra, e come ratifichiamo, un progetto rispecchia l'identità culturale, matematica ed epistemologica del paese in cui nasce, la pratica didattica di quel paese, un certo modo di pensare. Certo si possono prendere esempi stranieri, ma a volte si entra in aperto conflitto. Ad esempio in Italia si definisce l'angolo in geometria sintetica elementare come *ognuna delle parti di piano illimitate comprese tra*[5] *due semirette che hanno in comune l'origine*. La ricerca scientifica ci ha insegnato che quando gli studenti provano a costruire questo concetto si trovano davanti a grandi difficoltà di tipo cognitivo (D'Amore, Marazzani, 2008). Nel progetto SMP l'angolo è definito operativamente come rotazione di una semiretta rispetto a un'altra fissa, avendo sempre le due semirette un'origine in comune (AA. VV. SMP, dal 1965). Ora, quello che può fare un docente è introdurre *anche* questa forma di proporre l'oggetto nell'aula: due modalità aiuteranno la capacità cognitiva degli allievi molto più di quanto possa farlo una sola.

Ma considerare che questo progetto interamente importato, lontano dalla tradizione d'insegnamento dei docenti, garantirà l'apprendimento solo perché è straniero, solo perché forma parte di un complesso ben articolato, è a dir poco ingenuo.

Un progetto didattico o una programmazione curricolare devono venir condivisi, pensati e costruiti di comune accordo, devono rispettare il modo di pensare e di lavorare di ogni singolo docente. Ciò non toglie che una programmazione curricolare o un progetto stranieri non possano offrire idee concrete (metodologiche o concettuali) al docente; anzi, lo faranno certamente. Ma riporvi una fiducia ingenua e acritica, non aiuta certo il processo professionale d'insegnamento-apprendimento.

La conoscenza curricolare e i progetti di altri paesi sono certamente di grande aiuto critico perché aprono al mondo e suggeriscono senza dubbio idee stimolanti. Il loro uso acritico non può essere una panacea; è solo un'idea illusoria e un po' banale.

Un'ultima annotazione. Consideriamo che una programmazione curricolare o un progetto sono l'espressione di una cultura locale, di un paese e ne rappresentano in certo modo la storia. Ma i risultati della ricerca in didattica della matematica, invece, sono universali.

Il contratto didattico, il fenomeno della formazione di *misconcezioni*, l'inadeguatezza di alcuni modelli intuitivi rispetto ai modelli formali, la difficoltà di gestire trasformazioni semiotiche, il problema dell'apprendimento della generalizzazione, ecc., sono l'evidenziazione di problematiche di carattere apprenditivo che si possono pensare come comuni a tutti i paesi.

Recentemente alcuni studiosi hanno voluto mettere in dubbio la veridicità di quest'ultima affermazione, suggerendo che gli studi di didattica della matematica dovrebbero essere locali e quindi focalizzati sul paese, sulle sue tradizioni e sulla

5. Qualunque cosa significhi «tra»: vogliate accettarla come un termine primitivo alla maniera di Hilbert (1899).

sua storia culturale. Non escludiamo che ci possano essere considerazioni di questo tipo da fare (anzi, ne siamo consapevoli, anche in accordo con D'Ambrosio (2002); ma nel complesso, l'interesse della didattica della matematica è generale e non locale.

2. Gli strumenti illusori

In questa sezione presenteremo alcuni materiali concreti o risorse didattiche che erano state considerate idonee all'insegnamento di alcuni temi della matematica, in particolare dell'aritmetica e della logica. L'enfasi creata intorno a questi strumenti fu eccessiva, dato che venivano considerati come una vera e propria panacea per l'apprendimento, mentre la loro creazione faceva riferimento solo a metodologie d'insegnamento concrete. Ne proporremo qui solo alcuni; questi materiali (a volte chiamati «materiali strutturati» a causa della loro specificità e delle dettagliate norme d'uso), continuano a venir utilizzati a tutt'oggi, anche se con sempre minor enfasi, mentre in diversi paesi altri «inventori» continuano a creare illusioni nei docenti meno critici. Ci sono due categorie di materiali che non menzioneremo specificamente:

a) I giochi ludici che facevano riferimento all'apprendimento con slogan quali *imparare giocando*. In genere si trattava solo di giochi la cui funzione all'interno dell'apprendimento rimaneva alquanto occulta o appariva come ingenua. Un giorno o l'altro un qualche studioso dovrà affrontare l'analisi scientifica dell'efficacia di questi giocattoli.
b) L'uso delle TIC come garanzia di apprendimento. Questo problema ha bisogno di un'analisi approfondita dettagliata e specifica, data la vastità degli strumenti oggi disponibili. Tuttavia, gli studi riguardo alle illusioni, a volte acritiche, che si svilupparono intorno a questi problemi sono molteplici; per esempio Davis (1992) parla esplicitamente di panacee. Ma già all'alba dell'utilizzo di diversi strumenti, tra cui il PC a scuola, si erano levate voci che cercavano di frenare facili e banali entusiasmi (ad esempio D'Amore, 1988c).

Come detto, queste due tipologie strumentali (a e b), richiedono un'analisi specifica che non affronteremo in questa sede.

2.1. Le reglettes o numeri in colore

Si tratta generalmente di materiali in legno con forma di prisma quadrangolare regolare; il primo (bianco) è un cubo, ovvero l'altezza del prisma è la stessa del lato del quadrato della base; il secondo (rosso) è due volte l'altezza del primo; il terzo (verde) ha tre volte l'altezza del primo; e così succesivamente fino a raggiungere un'altezza dieci volte maggiore all'altezza del primo e cambiando il colore del prisma a mano a mano che cambia la sua altezza.

L'ideazione teorica è dovuta al matematico, pedagogo e filosofo egiziano Caleb Gattegno (1911-1988) mentre la realizzazione pratica con la relativa sperimentazione nella pratica didattica si deve il pedagogo belga Georges Cuisenaire (1891-1975). L'idea originale consiste nell'aggiungere una variabile semiotica alle già evidenti differenze di altezza tra i prismi, con il fine d'insegnare a dominare i numeri naturali pari a 10 e la somma di due o più numeri naturali pari a 10 (1 + 9, 2 + 4 + 4, e così via); accostare cioè prismi di varie lunghezze fino a raggiungere quello di altezza 10. In tutto ciò il colore ha una funzione meramente estetica, ma certamente nessuna importanza dal punto di vista didattico.

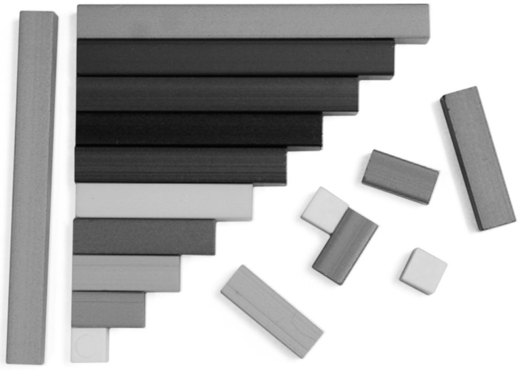


Figura 1. Le reglettes.

Abbiamo già avuto modo di evidenziare le manchevolezze didattiche che si nascondevano dietro questi strumenti, che pure hanno goduto di vasta popolarità ed hanno avuto successo intercontinentale. L'idea di aggiungere alle già tante varianti semiotiche relative ai numeri naturali quella cromatica, piacevole e dunque attraente, nasconde insidie non banali (Locatello, Meloni, Sbaragli, 2008).

La prima è che non c'è alcuna logica cromatica nei modelli delle operazioni elementari; i colori sono del tutto casuali, né potrebbe essere altrimenti. Rosso più Verde uguale a Giallo, non possiede nessuna motivazione di carattere cromatico.

La seconda è che i numeri che si citano rappresentano misure lineari, altezze di prismi che hanno tutti la stessa base, ma differenti altezze; ma non c'è né un'interpretazione cardinale né una ordinale dei numeri (a meno di forzature innaturali); dunque si perdono o si dimenticano significati importanti che formano parte della costruzione cognitiva dell'insieme dei numeri naturali (Marazzani. 2007).

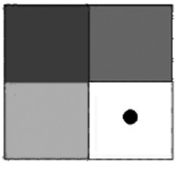
La terza è che non c'è alcuna rappresentazione del numero zero, se non l'assenza dell'oggetto; dunque non si può rappresentare 7 + 0; il numero 0 è bandito da questo strumento.

A nostro avviso, queste gravi lacune e le evidenti contraddizioni non implicano automaticamente che non si debbano usare le reglettes (o numeri in colore). Ogni strumento ha delle sue potenzialità positive, in questo caso ad esempio il controllo diretto delle altezze, la gradevolezza dell'oggetto in sé e la possibilità di fare alcune addizioni per semplice accostamento. L'importante è non cadere nell'inganno illusorio della panacea: questo strumento ha anche risvolti negativi che è fondamentale conoscere; è importante non idealizzare lo strumento come fosse il migliore possibile, come fosse la soluzione di tutti i problemi di apprendimento. Perché le cose non sono così. Dunque, è necessario conoscerne bene vantaggi e svantaggi, per usare quello strumento, qualsiasi strumento, con acutezza e capacità critica. Occorre dominare lo strumento e non esserne dominati.

2.2. Gli abaci

La prima volta che abbiamo visto usare un abaco in una scuola primaria, nei primi anni del decennio del 1970, ci venne presentato come uno strumento per passare in modo quasi automatico da una base numerica all'altra; non per nulla si chiamava allora «abaco multibase». C'era allora la bizzarra idea che, per poter dominare i nuovi strumenti informatici che cominciavano a fare il loro ingresso nelle aule, si dovessero dominare più basi numeriche: la dieci, ovviamente, ma anche la quattro, la sei, la due ...

Per poter usare i PC (alcuni parlavano all'epoca di: programmare), gli studenti dovevano saper gestire i calcoli in base due, il che spiega anche il momentaneo successo che ebbe il cosiddetto minicomputer di George Papy (1920-2011): un quadrato di cartoncino diviso dalle due mediane in quattro quadratini che davano valori diversi alle pedine poste in ciascuno di essi (rispettivamente 2^0, 2^1, 2^2 e 2^3).



Oggi sappiamo che tutto ciò è straordinariamente e totalmente inutile: per usare il PC non è necessario saper programmare né tantomeno serve saper usare con abilità il sistema numerico di base due; resta tuttavia viva la proposta culturale che sempre ci viene suggerita ed evidenziata per controbattere alle nostre perplessità: l'abaco è un buon strumento per far sapere ai nostri allievi che non esiste solo la base dieci.

Fin da allora, abbiamo replicato agli insegnanti (e continuiamo a farlo) che ci sembra assai più interessante far notare che esistono sistemi numerici posizionali e non posizionali, perché questo mostra agli allievi quanto importante e geniale sia l'idea del sistema posizionale che genera, per esempio, algoritmi di calcolo semplici e rapidi, per eseguire i quali non servono abaci, sassolini o altri strumenti concreti, ma solo un foglio di carta e un lapis. Si provi infatti ad eseguire la moltiplicazione 14 × 6 scrivendola; risulta banale con il sistema indo-arabico ma alquanto complicata con quello romano: XIV × VI ...

A questo punto, l'abaco diventa uno strumento sì obsoleto, ma curioso, interessante, purché serva non solo a rappresentare i numeri, ma anche ad eseguire (tentare di eseguire) le operazioni.

L'abaco è uno strumento semplice e accattivante che però va ripensato nella sua funzione didattica; si tratta di un oggetto storico, collocato nel tempo, interessante, ma non certo di panacea. Si può usare fondamentalmente per mostrare il significato del valore posizionale delle cifre che esprimono numeri naturali. Ma dev'essere un oggetto concreto, da poter toccare con le mani e manipolare, non solo un disegno alla lavagna o sul libro di testo.

Ogni colonna deve contenere 9 palline o *fiches*; al momento di aggiungere la decima, vanno sfilate sia le nove già collocate che la decima ancora da infilare e solo una delle palline va messa nella colonna adiacente di sinistra.

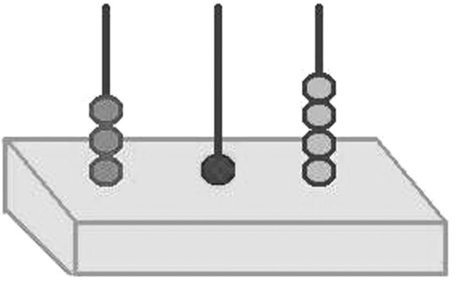


Figura 2. Un abaco le cui palline rappresentano la cifra 314.

Ma qui s'annida un altro strano modo «cromático» di vedere le cose. In molteplici occasioni abbiamo sentito dire ad alcuni docenti che le palline delle unità *devono* essere bianche e quelle delle decine rosse: ciascuna pallina rossa vale dieci bianche. Questa strampalata idea è contraria al senso stesso del valore posizionale delle cifre; sarebbe come dire che nel numerale 322 la cifra 2 al centro va colorata in rosso mentre la cifra 2 a destra in nero. Il significato del valore posizionale è che una cifra, *la stessa cifra*, ha valore diverso a seconda del *posto* che occupa e non del suo *colore*. Supponiamo che un allievo al buio prenda in mano tre palline e le stringa nel suo pugno. Accendiamo la luce. Alla domanda: quante palline hai nella mano?, la risposta ragionevole attesa è: «Tre»; non è, non può essere: «Non lo so, perchè dipende dal colore di ogni pallina».

Lo ripetiamo parzialmente. Il senso aritmetico dell'abaco è il seguente: infiliamo delle palline forate una alla volta nella prima colonna a destra dell'abaco; fino a nove, va tutto bene; quanto tentiamo di mettere la decima, non ci riusciamo perché la colonna in cui tentiamo d'infilarla è corta e ha spazio solo per nove palline; allora tolgo tutte le nove palline già messe e ne metto una sola nella seconda colonna contando da destra, cioè quella delle decine. Quella pallina rappresenta dieci palline non in base al colore, ma in base alla posizione. L'abaco, dunque, con tutte le sue implicazioni e conseguenze, va ripensato daccapo; come molti degli strumenti creati dall'essere umano, ha sia aspetti positivi che negativi. Certamente non costituisce una panacea.

Anche nuove versioni dell'abaco, che abbiamo visto apparire negli ultimi lustri a più riprese, hanno certamente potenzialità positive, ma anche altri aspetti che non vanno elusi: sono strumenti, null'altro, non sono risolutivi, non costituiscono panacee. Ben vengano, se sono tenuti sotto controllo critico dal punto di vista dell'apprendimento, ma non devono costituire nuovi miraggi o creare nuove ricette.

2.3. I blocchi logici

I cosiddetti «blocchi logici» sono stati creati dal matematico ungherese Zoltan Paul Dienes (1916-2014), uno dei teorici più influenti della *New Mathematics*, a partire dai primi anni del 1960. La fama di questo strumento è tale che noi non consideriamo necessario spiegare di cosa si tratta.

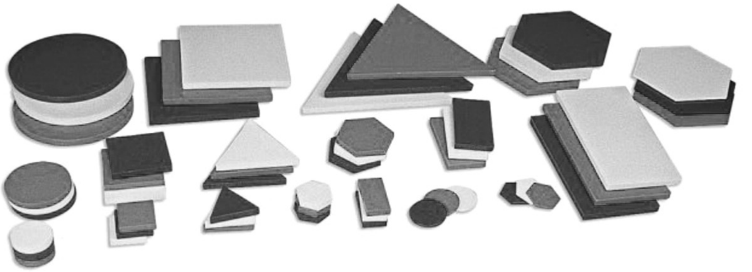


Figura 3. Blocchi logici.

Dienes si dedicò a sviluppare teorie che illustrassero alcuni aspetti cognitivi della matematica di carattere costruttivista post-Piaget dalla fine del 1950 in poi, ma la sua fama divenne internazionale solo verso la metà del decennio del 1960 (Dienes, 1966).

Le idee di Dienes circolarono con estrema disinvoltura in molte scuole a livello mondiale; ma l'acuta critica condotta da Guy Brousseau a metà degli anni '80 del XX sec. (Brousseau, 1986; si veda anche: D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, Sarrazy, 2010) stroncò ogni illusione creatasi attorno alle proposte di Dienes; non solo i suoi famosi e onnipresenti blocchi logici, ma anche tutta la sua costruzione teorica.

Brousseau arrivò a definire un «effetto Dienes» in forma del tutto negativa, con un'analisi che era talmente potente ed evidente da eliminare ogni possibilità di reazione (D'Amore, Fandinño Pinilla, Marazzani, Sarrazy, 2010).

I blocchi logici hanno avuto una fortuna mondiale e sono stati usati da più di una generazione di studenti; ma nessuna scatola preconfezionata può produrre apprendimento; può produrre apprendimento locale e circostanziato, questo sì (Bruner, 1990). Tuttavia, come abbiamo già scritto in molte occasioni, il «transfer cognitivo» (cioè il passaggio della costruzione cognitiva da un ambiente ad un altro), non è automatico e gli apprendimenti legati a un ambiente prefabbricato o precostituito, se avvengono, avvengono in esso, perché l'apprendimento dell'essere umano è situato e il suo transfer o la sua generalizzazione è un compito tipico della didattica, non è spontaneo né automatico (Lave, Wenger, 1990; D'Amore, 1999; D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, Sarrazy, 2010).

I «materiali strutturati», come vennero chiamati nella loro generalità, producono apprendimento all' interno di essi stessi, localmente; dunque servono a poco, se non a nulla, o sono addirittura controproducenti.

Un bambino impara certo, a modo suo, a riconoscere che «l'insieme dei tondi gialli è un sottoinsieme dei tondi», ma questo non gli serve a concludere spontaneamente, come avrebbe voluto la *mathématique vivante* di Dienes (1972), con un passaggio automatico di transfer cognitivo, che «l'insieme dei quadrati è un sottoinsieme dell'insieme dei rombi». Questa affermazione va appresa a parte, non è conseguenza diretta, non si basa su quel che il bambino ha appreso operando con i blocchi logici di una scatola preconfezionata.

Tanto meno, poi, si fa fatica a credere davvero che giocando con 4 note musicali e applicando loro una certa qual operazione binaria interna, a 7 anni, il bambino davvero «strutturasse la sua mente» per imparare il concetto di gruppo astratto in algebra strutturale, in modo che questa fosse già disponibile all'apprendimento di strutture algebriche dello stesso tipo, come quella formata dalle isometrie con l'operazione binaria di composizione (Dienes, 1972; esempi presi dal testo citato). A rileggere oggi questi sogni, non si riesce a credere che, davvero, qualcuno abbia potuto ragionevolmente pensare che questo fosse possibile. Ma lo studio di Brousseau (1986) aveva già perfettamente messo a nudo la vacuità di tutto ciò. Dunque, i blocchi logici e tutti quegli strumenti che andarono sotto il nome di materiale strutturato sono stati sottoposti a critiche scientifiche severe che ne hanno rivelato i profondi difetti. Oggi alcuni docenti usano i blocchi logici solo come componenti che permettono agli allievi di costruire modelli di ambienti (aule, stanze), città, strade, casette... (D'Amore, 2002).

Il che non vuol dire che non si possa usare questo strumento, basta che non venga confuso con panacee inesistenti e che chi lo propone in aula lo faccia *cum grano salis*, consapevole dei limiti, senza vacue illusioni. Tutto quel che di matematica si può fare con i blocchi logici, si può fare con foglie, tappi di bottiglia, figurine e fiches da gioco[6].

Lo stesso discorso si può fare relativamente a strumenti didattici che ancora oggi alcuni (in buona fede, ma per ignoranza scientifica) inventano e propongono, accompagnandoli con sogni illusori basati sul nulla e legati alla facilità con la quale certi insegnanti si lasciano sedurre da speranze create grazie a manufatti che promettono miracoli. Il che non vuol dire che non debbano essere usati in assoluto; si possono usare, basta essere consapevoli che non sono, che non possono essere, panacee.

3. Alcune affermazioni per concludere

L'illusione delle ricette distrugge la profesionalità degli insegnanti.

Il processo di insegnamento-apprendimento è complesso, inutile farsi illusioni e illudere: non esistono ricette. Inoltre, ogni studente apprende a modo suo (Fandiño Pinilla, 2001).

Nessuno può insegnarti a insegnare, la tua classe è un unicum.

Bisogna diffidare, di norma, da chi si propone come qualcuno in grado di insegnare a insegnare. Il compito della ricerca in didattica della matematica non è que-

6. A onor di vero, lo stesso Zoltan Dienes si rese conto da solo, in seguito ai lavori critici di Guy Brousseau, di aver prodotto un strumento con potenzialità negative e lo spiegò in una discussione pubblica che si tenne a Forlì l'8 maggio del 1993 su iniziativa di alcuni direttori di scuola fedeli alla linea didattica creata da Dienes. Il suo intervento fu il primo e in esso dichiarò con un coraggio ammirevole e con spirito autocritico: «osservando il lavoro che facevano i docenti (…) ho pensato: Dio mio, che cosa ho combinato!». Non esistono documenti di detto dibattito, ma uno degli autori di questo testo era l'altro dialogante e testimone diretto del fatto. Dunque, dai primi anni del 1990 Dienes era cosciente della debolezza cognitiva del suo lavoro e accettò le critiche ai suoi materiali strutturati. Il medesimo testimone era presente il 7 ottobre del 1980 a Cognola di Trento (Villa Madruzzo), durante un congresso internazionale proposto dal CNR Italia e dall'UMI (Unione Matematica Italiana). In questa occasione Dienes si stupì del fatto che i matematici presenti e i colleghi didatti non apprezzassero le sue creazioni destinate all'azione dell'insegnamento e dubitassero tanto dei contenuti matematici così come dei risultati che promettevano in relazione all'apprendimento.

sto. Al contrario: lasciando piena libertà al professionista dell'educazione, cioè all'insegnante, di usare le metodologie che meglio crede (al plurale), il compito della ricerca in didattica della matematica è di mostrare e proporre strumenti concreti per interpretare le situazioni d'aula il cui schema, assai più complesso di quel che potrebbe apparire, è formato da: insegnante, allievo e sapere.

L'uso di una sola metodologia di insegnamento è fallimentare.

Siccome ogni studente apprende a modo suo, l'uso di una sola metodologia o modalità didattica non può che avere successo su alcuni individui, ma certo non su tutti. Usando più modalità si aumenta la posibilita di favorire l'apprendimento del maggior numero possibile di studenti presenti in aula (D'Amore, 1999).

Solo la ricerca scientifica valida i risultati.

Mai fidarsi di chi non sottopone a giudizio scientifico serio e pertinente ciò che presenta come proposte di insegnamento.

Le analisi didattiche serie e scientifiche mostrano (talvolta a sorpresa) che certe attività date per scontate nascondono problemi cognitivi.

Ci limitiamo solo a un esempio. Nella scuola primaria si usa la linea dei numeri naturali. Alcuni docenti la fanno partire da 0, altri da 1. Questa «línea» è talmente diffusa che si finisce con il credere che sia «il modelo» perfetto dei numeri naturali (il cui insieme indichiamo con N). Ma gli studi analitici, per esempio quelli condotti dalla scuola di Athanasios Gagatsis (vedasi ad esempio: Gagatsis, Shiakalli, Panaoura, 2003; Elia, 2011), hanno mostrato varie difficoltà e incongruenze.

Cominciamo a pensare al fatto che il modello di N rappresentato dalla linea dei numeri è solo un modello ordinale, non cardinale e dunque non rappresenta una parte cospicua dei significati intuitivi di N. In altre parole, quel modello da solo non è molto completo. Esso rappresenta più una successione ordinata che non un insieme numerico i cui elementi sono in grado di rispondere alla domanda: «Quanti sono?». E inoltre: perché la distanza fra un numero n e il suo successivo $n + 1$ deve essere uguale a quella fra m e $m + 1$? Non c'è nessun motivo, se si pensa che, in N, fra n e $n + 1$ non c'è nulla, c'è il vuoto, l'insieme N ordinato è discreto. C'è poi il problema che i numeri naturali servono anche nel campo della misura; in tal caso la *linea dei numeri* si può pensare come il bordo scritto di un righello, per cui i numeri indicano distanze dall'estremo 0. Una confusione che forse l'adulto domina (anche se abbiamo qualche dubbio) ma che il bambino non può controllare.

E poi c'è il problema delle operazioni. In N l'operazione 3 + 5 ha come modello intuitivo, spesso proposto dallo stesso insegnante come unico, il «mettere insieme delle cardinalità», la cardinalità 3 (un insieme di 3 palline) con la 5 (un altro insieme di 5 palline). Ma nella linea dei numeri questo modello intuitivo è stravolto e quello corretto è di tipo ordinale: partire da 3 e fare 5 passi, o salti, verso destra. 3 + 5 non andrebbe nemmeno più scritto così, quasi non ha senso scriverlo così. Si tratta di un nuovo modello, assai poco intuitivo, che funziona solo perché si è supposto, alla base, un isomorfismo fra i modelli cardinale e ordinale. Molti bambini, per esempio, sono in difficoltà nell'interpretare sulla linea dei numeri una operazione come 5 + 0 che, per loro, non ha senso. Inoltre, parlando di cardinali, 5 + 0 è 5 senza alcun dubbio; parlando di ordinali molti studenti addirittura non accettano di scrivere 5 + 0 perché lo considerano privo di significato. Per non dire poi della sottrazione, che crea problemi inattesi che sono sotto gli occhi di tutti gli insegnanti. Se poi la linea numerica è fatta iniziare da 1, come abbiamo visto in molte occasioni, allora tutto ciò non solo perde senso, ma è addirittura sbagliato. Ad esempio, non si può effettuare 5 – 0, ovvero qualcosa che sembra molto naturale: partire da 5 e «andaré» a sinistra di 0 passi.

Abbiamo preso come esempio questo modello di N, molto diffuso, per far capire come strumenti che sembrano inoffensivi e ingenui e che vengono adottati da tutti, nascondono invece insidie profonde.

Lo abbiamo scelto proprio per la sua diffusione, per suggerire attenzioni critiche a tutti gli insegnanti, professionisti della formazione dei cittadini di domani.

Che cosa sarebbe poi la moltiplicazione sulla linea dei numeri? Come si passa dall'addizione alla moltiplicazione? Di solito ci si ferma a addizione e sottrazione proprio perché il modello della linea dei numeri non permette di andare avanti; e, sembra ovvio, un modello che non permette di andare avanti, evidentemente non è un gran modello.

Il che non significa che non si debba usare questo modello di N; significa solo che, chi lo usa, lo deve studiare con attenzione critica e non credere che sia didatticamente indolore. (In generale su questo punto si veda: D'Amore, 1999).

4. Il nodo centrale: la formazione dei docenti di matematica

Formare insegnanti di matematica di tutti i livelli scolastici, come abbiamo più volte ribadito, comporta formazione matematica (*in primis*), formazione in didattica della matematica, formazione in storia ed epistemologia della matematica (D'Amore, 2004). Ma tutto quanto abbiamo qui voluto evidenziare rientra in una capacità critica che deve diventare sensibilità nel futuro docente. Solo questa sensibilità dovrebbe eliminare per sempre l'affannosa ricerca di una ricetta; e bandire per sempre dal mondo della scuola coloro che le propongono.

Ma la sensibilità non la si può insegnare; dipende in modo specifico dalla personalità professionale del docente. Il mestiere di formatori di esseri umani non è facile e non è riconducibile a ricette; è un mestiere creativo che ogni giorno ha bisogno della nostra capacità critica, sempre vigile e attenta. Se fosse riconducibile a ricette, chiunque potrebbe essere docente, e con successo. Eppure il docente si irrita quando un estraneo al mondo della formazione lo critica e gli suggerisce metodi diversi o tempi differenti da quelli che egli ritiene congeniali. Inoltre, applicando metodologie d'insegnamento considerate come correttamente funzionali all'apprendimento, il docente usa la propria competenza che non è solo *in matematica*, ma è anche una *competenza matematica*, ben diversa da quella di un matematico professionista o di un ingegnere (Fandiño Pinilla, 2003, 2006; D'Amore, Godino, Fandiño Pinilla, 2008).

Ringraziamenti

Gli autori di questo articolo desiderano ringraziare i tre revisori anonimi che hanno generosamente contribuito, con commenti e suggerimenti, al passaggio da una versione anteriore all'attuale. Un ringraziamento speciale agli amici e colleghi Salvador Llinares e Alicia Avila, ai quali si sono rivolti per una consulenza nella preparazione di questa versione.

Bibliografia

AA. VV. SMP (del 1965). *SMP School Mathematics Project*. Cambridge: Cambridge University Press.

Adler, J. (2000). Conceptualising Resources as a Theme for Teacher Education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *3*(3), 205-224. Doi: 10.1023/A:1009903206236.

Adler, J., Ball, D., Krainer, K., Lin, F. L., & Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(3), 359-381. Doi: 10.1007/s10649-005-5072-6.

Artigue, M., Gras, R., Laborde, C. & Tavignot, P. (editori) (1994). *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Bagni, G. T. (1996). *Storia della matematica*. Vol. II. Bologna: Pitagora.

Bagni, G. T. (2004a). Storia della matematica in classe: scelte epistemologiche e didattiche. *La matematica e la sua didattica*, *18*(3), 51–70.

Bagni, G. T. (2004b). La storia della scienza: dall'epistemologia alla didattica. *Progetto Alice*, 15, 547–579.

Bagni, G. T. (2004c). Insegnamento–apprendimento storico. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *27A–B*(6), 706–721.

Bagni, G. T. & D'Amore, B. (2007). A trecento anni dalla nascita di Leonhard Euler. *Scuola ticinese*, *36*(281), 10-11.

Bagni, G. T., Furinghetti, F. & Spagnolo, F. (2004). History and Epistemology in Mathematics Education. In L. Cannizzaro, A. Fiori, & O. Robutti (Editores). *Italian Research in Mathematics Education 2000–2003*. 170–192. Milano: Ghisetti e Corvi.

Boero, P. (1986). Sul problema dei problemi aritmetici nella scuola elementare. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, *9*(9), 48-93.

Boero, P., Dapueto, C., & Parenti, L. (1996). Didactics of mathematics and the professional knowledge of teachers. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Editores). *International handbook of mathematics education*. 1097-1121. Dordrecht e Londra: Kluwer Academic Publishers. Doi: 10.1007/978-94-009-1465-0_30.

Brissiaud, R. (1988). De l'âge du capitaine à l'âge du berger. Quel contrôle de la validité d'un énoncé de problème au CE2? *Revue française de pédagogie*, 82, 23-31.

Brousseau, G. (1965). *Les mathématiques du cours préparatoire.* Parigi: Dunod.

Brousseau, G. (1972). Processus de mathématisation. *La mathématique à l'école élémentaire.* [París: APMEP]. 428-457.

Brousseau, G. (1980a). Les échecs électifs dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. *Revue de laryngologie, otologie, rinologie*, *101*(3-4), 107-131.

Brousseau, G. (1980b). L'échec et le contrat. *Recherches en didactique des mathématiques*, 41, 177-182.

Brousseau, G. (1982). *À propos d'ingénierie didactique.* Université de Bordeaux I. IREM.

Brousseau, G. (1984). Le rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage. *Actes du colloque de la troisième Université d'été de didactique des mathématiques d'Olivet.*

Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques.* Thèse pour le doctorat d'état. Université de Bordeaux I.

Brousseau, G. (1986), Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*(*2*), 33-115.

Brousseau, G. (2015). Peregrinaciones en la didáctica de la matemática. En: D'Amore, B. & Fandiño Pinilla, M. I. (Compiladores). *Didáctica de la matemática. Una mirada internacional, empírica y teórica*. Chia (Colmbia): Univeridad de la Sabana. 13-28. ISBN: 978-958.12.0371.0.

Brousseau, G., & D'Amore, B. (2008). I tentativi di trasformare analisi di carattere meta in attività didattica. Dall'empirico al didattico. En B. D'Amore, & S. Sbaragli (Editores) (2008). *Didattica della matematica* *e azioni d'aula*. Atti del XXII Convegno Nazionale: Incontri con la matematica. Castel San Pietro Terme (Bo), 7-8-9 noviembre 2008. 3-14. Bologna: Pitagora.

Brousseau, G., & Perez, J. (1981). *Le cas Gaël*. Université de Bordeaux I: IREM.

Bruner, J. (1990). *Acts of Meaning*. Cambridge (MA): Harvard University Press.

Caldelli, M. L., D'Amore B. (1986). *Idee per un laboratorio di matematica nella scuola dell'obbligo*. Firenze: La Nuova Italia.

Camici, C., Cini, A., Cottino, L., Dal Corso, E., D'Amore, B., Ferrini, A., Francini, M., Maraldi, A.M., Michelini, C., Nobis, G., Ponti, A., Ricci, M., & Stella, C. (2002). Uguale è un segno di relazione o un indicatore di procedura? *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *25*(3), 255-270.

Cornu, B. (1994). Teacher Education and Communication and Information Technologies: Implications for Faculties of Education. En B. Collis, I. Nikolova, & K. Martcheva (Editores) (1995). *Information technologies in teacher education. Issues and experiences for countries in transition*. *Proceedings of a European Workshop*. 93-104. Parigi: UNESCO.

D'Ambrosio, U. (2002). *Etnomatematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B. (1975). *La matematica inventata*. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B. (1981). *Mostra dei materiali utilizzati per l'educazione matematica*. Catálogo-presentazione della mostra svoltasi nella Scuola primaria «G. Garibaldi» di Bologna, dal 30 maggio al 6 giugno de 1981. Bologna: Direzione didattica XV circolo – Assessorato P.I. del Comune di Bologna.

D'Amore B. (1982a). *Introduzione al catalogo della mostra* «Esposizione di matematica '81-'82». S.E. Gardolo (Tn). Trento: Provincia Autonoma di Trento, Assessorato Istruzione.

D'Amore B. (1982b). *Cura e introduzione al catalogo della mostra: Un progetto di matematica in mostra.* Maggio-giugno 1982. Scuola elementare Scandellara, Bologna. Bologna: Comune di Bologna – Assessorato al coordinamento delle politiche scolastiche.

D'Amore, B. (1987a). *Una mostra di matematica*. Teramo: Giunti & Lisciani.

D'Amore, B. (1987b). Cura e introduzione del catalogo*: Un progetto di Matematica in mostra*. Scuola Elementare Scandellara, Bologna, maggio-giugno 1987.

D'Amore, B. (1988a). Introduzione al catalogo della mostra: *Ma.S.E....giocassimo alla matematica*, mostra Ma.S.E. (Matematica Scuola Elementare), Imola (BO), inaugurazione 14 maggio 1988.

D'Amore, B. (1988b). Il laboratorio di Matematica come fucina di idee e di pensiero produttivo. *L'educazione matematica*, 3, 41-51.

D'Amore, B. (1988c). Evviva i burattini. *Scuola & Informatica - La Tartaruga*, 2, 20-23.

D'Amore, B. (1989a). Introduzione al catalogo: *I bambini e l'educazione matematica- Progetto Ma.S.E.* (Matematica Scuola Elementare). Lugo (Ra), inaugurazione: 23 maggio 1989.

D'Amore, B. (1989b). Introduzione di: *La Matematica fra i 3 e gli 8 anni - Guida alla visita dei laboratori*. Comune di Castel San Pietro Terme (Bo).

D'Amore, B. (1990-1991). Imparare in laboratorio. *Riforma della scuola*. 4 puntate. I: 11, 1990, 42-43; II: Numeri e teoremi in camice bianco, 1/2, 1991, 51-53; III: Fare per saper pensare, 5, 1991, 37-40; IV: Filosofia e linguaggi del laboratorio, 9, 1991, 36-38. [Sunto in: AA.VV. (1991). *Some italian contributions in the domain of the Psychology of Math. Ed*. Genova]. [Sunto in: Barra M. et al. (1992). *The italian research in Mathematics Education: common roots and present trends*. ICME, Québec, Agosto 1992. 129]. [Questo articolo è stato integramente pubblicato in appendice in: D'Amore B., Picotti M. (1991). *Insegnare matematica negli anni novanta nella scuola media inferiore*. Milán].

D'Amore, B. (1991). logica Logica LOGICA, la didattica della logica fra gli 8 e i 15 anni. En B. D'Amore (Editor) (1991). *La Matematica fra gli 8 ed i 15 anni*. 79-90. Bologna-Roma: Apeiron.

D'Amore, B. (1993a). *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving*. Progetto Ma.S.E., vol. XA. Milán: Angeli. Prefazione di G. Vergnaud. [II edizione 1996]. [In lingua spagnola: D'Amore, B. (1997). *Problemas. Pedagogía y Psicología de la Matemática en la actividad de resolución de problemas*. Madrid: Editorial Sintesis. Trad. de F. Vecino Rubio].

D'Amore, B. (1993b). Il problema del pastore. *La vita scolastica*, 2, 14-16.

D'Amore, B. (1995). Uso spontaneo del disegno nella risoluzione di problemi di matematica. *La matematica e la sua didattica*, *9*(3), 328-370.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Prefazione di Colette Laborde. Bologna: Pitagora. [In spagnolo: D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la Matemática*. Prefación de Luís Rico Romero, Colette Laborde y Guy Brousseau. Bogotá: Editorial Magisterio. In portoghese: D'Amore, B. (2007). *Elementos da Didática da Matemática*. São Paulo: Livraria da Física. Prefación de Ubiratan D'Ambrosio, Luís Rico Romero, Colette Laborde y Guy Brousseau. Il libro è stato commentato in *ZDM* 2001, *33*(4), 103-108 (por Hermann Maier)].

D'Amore, B. (2001). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. *Uno*. 27, 51-76.

D'Amore, B. (2002). Basta con le cianfrusaglie! (Titolo della casa editrice). *La Vita Scolastica*, 8, 14-18.

D'Amore, B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora. [In spagnolo: D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. México DF: Reverté-Relime. Prefazione de Guy Brousseau. Prefazione all'edizione spagnola di Ricardo Cantoral].

D'Amore, B. (2004). Il ruolo dell'Epistemologia nella formazione degli insegnanti di Matematica nella scuola secondaria. *La matematica e la sua didattica*, *18*(4), 4-30.

D'Amore, B. (2005). La argumentación matemática de jóvenes alumnos y la lógica hindú (*nyaya*). *Uno*. 38, 83-99. [in inglese: D'Amore, B. (2005). Secondary school students' mathematical argumentation and Indian logic (nyaya). *For the learning of mathematics*, *25*(2), 26-32. In italiano: D'Amore, B. (2005). L'argomentazione matematica di allievi di scuola secondaria e la logica indiana (nyaya). *La matematica e la sua didattica*, *19*(4), 481-500].

D'Amore, B. (2006). Didattica della matematica «C». In S. Sbaragli (editore) (2006). *La matematica e la sua didattica, vent'anni di impegno*. Atti del Congresso Internazionale omonimo, Castel San Pietro Terme (Bo), 23 septiembre 2006. 93-96. Roma: Carocci.

D'Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Modena: Digital Index.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2002). Un acercamiento analítico al triángulo de la didáctica. *Educación Matemática*, *14*(1), 48-62.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2003). Le due facce del laboratorio. Laboratori di recupero e sviluppo. *La vita scolastica. Dossier*. 1, 4-8.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007). Leonhard Euler, maestro di epistemologia e linguaggio. *Bollettino dei docenti di matematica*, 55, 9-14.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla M. I., Marazzani I., & Sarrazy, B. (2010). *Didattica della matematica. Alcuni effetti del «contratto»*. Prefazione e postfazione di Guy Brousseau. Bologna: Archetipolibri.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sbaragli S. (2008). *La didattica e le difficoltà in matematica*. Trento: Erickson.

D'Amore, B., & Giovannoni, L. (1997). Coinvolgere gli allievi nella costruzione del sapere matematico. Un'esperienza didattica nella scuola media. *La matematica e la sua didattica*, *11*(4), 360-399.

D'Amore, B., Godino, D. J., & Fandiño Pinilla, M. I. (2008). *Competencias y matemática*. Bogotà: Magisterio.

D'Amore, B., & Marazzani, I. (Editores) (2005). *Laboratorio di matematica nella scuola primaria. Attività per creare competenze*. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B., & Marazzani, I. (2008). L'angolo, oggetto matematico e modello spontaneo. *La matematica e la sua didattica*, *22*(3), 285-329.

D'Amore, B., & Marazzani, I. (2011). Problemi e laboratori. Metodologie per l'apprendimento della matematica. Proyecto: *Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere*. Vol. 4. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B., & Matteuzzi, M. (1975). *Dal numero alla struttura*. Bologna: Zanichelli.

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2011). *Principi di base della didattica della matematica*. Proyecto: *Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere*. Vol. 2. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B., & Speranza, F. (Editores) (1989). *Lo sviluppo storico della matematica - Spunti didattici*. Volume primo. Roma: Armando.

D'Amore, B. & Speranza, F. (Editores) (1992). *Lo sviluppo storico della matematica - Spunti didattici*. Volume secondo. Roma: Armando.

D'Amore, B., & Speranza, F. (Editores) (1995). *La matematica e la sua storia. Alcuni esempi per spunti didattici*. Milán: Angeli.

D'Amore, B., Radford, L., & Bagni, G. T. (2006). Ostacoli epistemologici e prospettive socioculturali. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *29B*(1), 11-40.

Davis, Z. (1992). Alternative mathematics materials: Panacea or obstacle? In C. Breen, & J. Coombe (Editor). *Transformations: The first years of the Mathematics Education Project*. 18-37. Cape Town (SA): Mathematics Education Project.

De Bartolomeis, F. (1978). *Sistema dei laboratori per una scuola nuova necessaria e possibile*, Milano: Feltrinelli.

Dienes, Z. P. (1966). *Construction des mathématiques*. París: Presses Universitaires de France.

Dienes, Z. P. (1972), *La mathématique vivante*. París: OCDL.

Duval, R. (1995a). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Duval, R. (1995b). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? Atti di l'École d'été 1995.

Elia, I. (2011). Le rôle de la droite graduée dans la résolution de problèmes additifs. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. (Irem de Strasbourg). 16, 45-66.

Fandiño Pinilla, M. I. (2001). La formazione degli insegnanti di matematica: una cornice teorica di riferimento. *La matematica e la sua didattica*, *15*(4), 352-373.

Fandiño Pinilla, M. I. (2003). «Diventare competente», una sfida con radici antropologiche. *La matematica e la sua didattica*, *17*(3), 260-280.

Fandiño Pinilla, M. I. (2006). *Currículo, evaluación y formación docente en matemática*. Bogotá: Magisterio.

Fandiño Pinilla, M. I. (2008). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática*. Prólogo de Giorgio Bolondi. Bogotá: Magisterio.

Fauvel, J., & van Maanen, J. A. (Editores) (2000). *History in Mathematics Education*. *An ICMI study*. Dordrecht: Kluwer.

Fischbein, E. (1985a). Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. In Chini Artusi, L. (Editor) (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base*. 122-132. Bologna: Zanichelli-UMI.

Fischbein, E. (1985b). Intuizioni e pensiero analitico nell'educazione matematica. In Chini Artusi, L. (Editor) (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base*. 8-19. Bologna: Zanichelli-UMI.

Fischbein, E. & Vergnaud, G. (1992). *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*. (Editor Bruno D'Amore). Bologna: Pitagora.

Frabboni, F. (2004). *Il laboratorio*. Roma –Bari: Laterza.

Frank, M. L. (1985). What myths about mathematics are held and conveyed by teachers? *Arithmetic teacher*, 37, 10-12.

Freitas, J. L. M., & Rezende, V. (2013). Entrevista: Raymond Duval e a teoria dos registros de representação semiótica. *RPEM: Revista Paranaense de Educação Matemática*, *2*(3), 10-34.

Gagatsis, A., Shiakalli, M., & Panaoura, A. (2003). La droite arithmétique comme modèle géométrique de l'addition et de la soustraction des nombres entiers. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 8, 95-112.

Hilbert, D. (1899). Grundlagen der Geometrie. In AA. VV. (1899). *Festschrift zur Feier der Entüllung des Gauss-Weber Denkmals in Göttingen*. Leipzig: Teubner. 1-92.

Kimmel, H., & Deek, F. (1996). Instructional technology: A tool or a panacea? *Journal of Science Education and Technology*, *5*(1), 87-91. Doi: 10.1007/BF01575474.

Kister, P., & Navarro, J. (1973). *La nueva matemática*. Barcelona: Salvat Editores.

Kleinmuntz, B. (1976). Problem Solving. *Psychological Review*. 83, 479–491.

Kline, M. (1973). *Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Math*. New York: St. Martin's Press.

Lave, J., & Wenger, E. (1990). *Situated Learning: Legitimate Periperal Participation*. Cambridge: Cambridge University Press.

Leder, G. C., Pehkonen, E., & Törner, G. (Editores) (2002). *Beliefs: A hidden variable on mathematics education?* 177-194. Dordrecht – Boston – London: Kluwer Ac. P.

Lederman, N. G., & Abell S. K. (Editores). *Handbook of Research on Science Education*. Routledge (NJ): Lawrence Erlbaum Associates.

Locatello S., Meloni G., Sbaragli S. (2008). Soli, muretti, regoli e coppie ... Riflessioni sull'uso acritico dei regoli Cuisenaire-Gattegno: i numeri in colore. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 31A*(5), 455-483.

Marazzani, I. (Ed.) (2007). *I numeri grandi*. Trento: Erickson.

Mashaal, M. (2006). *Bourbaki: A Secret Society of Mathematicians*. Providence (RI): American Mathematical Society.

Moser, J. M. (1985a). Alcuni aspetti delle più recenti ricerche sull'apprendimento dei concetti e delle abilità fondamentali della addizione e della sottrazione. In Chini Artusi, L. (Editor) (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base*. 46-60. Bologna: Zanichelli-UMI.

Moser, J. M. (1985b). Analisi delle strategie di risoluzione dei problemi verbali. In Chini Artusi, L. (Ed.) (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base*. 61-85. Bologna: Zanichelli-UMI.

Nuffield Project (1972). *Computers and young children*. Veaving Guides, n. 4. London: Nuffield Foundation.

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas*. New York: Basic Books.

Pehkonen, E. (1994). On Teachers' Beliefs and Changing Mathematics Teaching. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *15*(3-4), 177–209.

Pehkonen, E., & Törner, G. (1996). Introduction to the theme: Mathematical beliefs. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 28, 99-100.

Phillips, C. J. (2014) *The New Math: A Political History*. Chicago: University of Chicago Press.

Powers, K. D., & Powers, D. T. (1999). Making sense of teaching methods in computing education. In AA. VV. (1999). *Actas del Congreso Frontiers in Education Conference*. San Juan, Portorico. Vol. 1, 11B3, 30-35. Doi:10.1109/FIE.1999.839224.

Resnick, L. B. & Ford, W. W. (1981). *The psychology of mathematics for instruction*. Hillsdale (NJ): L.E.A.

Schoenfeld, A. H. (1983). Beyond the purely cognitive: beliefs systems, social cognitions and metacognitions as driving forces in intellectual performance. *Cognitive science*, *7*(4), 329-363.

Scott, P. B. (1983). A Survey of Perceived Use of Mathematics Materials by Elementary Teachers in a Large Urban School District. *School Science and Mathematics*, *83*(1), 61-68. Doi: 10.1111/j.1949-8594.1983.tb10091.x.

Treagust, D. F. (2007). General instructional methods and strategies. In N. G. Lederman, & S. K. Abell (Editores) (2007). *Handbook of Research on Science Education*. Vol. 1, 373-391. Routledge (NJ): Lawrence Erlbaum Associates.

Vergnaud, G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Berne: Peter Lang.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Editores) (1982). *Addition and subtraction*. 39-59. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh, & I. Landau (Editores) (1983). *Acquisition of mathematics concepts and processes*. 127-174. New York – London: Academic Press.

Yourdon, E., & Constantine, L. (1979). *Structured Design: Fundamentals of a Discipline of Computer Program and System Design*. Saddle River (NJ): Prentice-Hall.

2. Un metodo per valutare le competenze nella scuola secondaria di primo grado attraverso l'uso degli apprendimenti in matematica

Michele Antonio D'Acunzo[1]

In this paper we present the outcome of a study inspired by the results of Fandiño Pinilla (2008) in which it is developed a method that relates the different aspects of learning mathematics with its indexes and levels of autonomy, awareness and responsibility manifested by each student attending a secondary school level, allowing it to observe and evaluate, over time, the evolution of competence in mathematics and mathematics.

0. Premessa

La valutazione delle competenze in ambito scolastico è ancora oggi un procedimento che presenta delle «zone d'ombra», come per esempio la declinazione delle stesse e la stesura degli indicatori e degli indici da utilizzare. Il metodo che illustrerò di seguito si basa su un lavoro di ricerca condotto e pubblicato dalla professoressa Martha Isabel Fandiño Pinilla (2008), nel quale si valuta l'apprendimento in matematica attraverso ambiti concettuali ben definiti:

- apprendimento concettuale; indica il livello di conoscenze possedute da un alunno in ambito noetico, cioè specificamente rivolto alle conoscenze concettuali;
- apprendimento algoritmico; rileva le abilità nello scegliere e poi nell'eseguire gli algoritmi;
- apprendimento strategico; monitora la capacità di uno studente di risolvere problemi in matematica (da distinguersi dagli esercizi);
- apprendimento comunicativo; valuta le attitudini comunicative del singolo, basate su criteri di efficacia;
- apprendimento semiotico; si occupa di stabilire se uno studente sa scegliere in quale registro semiotico rappresentare, sa operare trasformazioni di trattamento nello stesso registro rappresentativo, oppure di conversione passando da un registro a un altro.

Nella nostra esperienza, abbiamo adottato questo strumento per un uso specifico nella scuola secondaria di primo grado, poiché abbiamo potuto verificare che esso può aiutare sia l'alunno a monitorare costantemente un apprendimento armonico in matematica, sia il docente nella propria attività di insegnamento in aula e nella valutazione della competenza in matematica e matematica (altra distinzione proposta dalla stessa Autrice: Fandiño Pinilla, in D'Amore, Godino, Arrigo, Fandiño Pinilla, 2003).

1. Insegnante all'Istituto Comprensivo «A. Manzoni» di Vimercate (MB).
e-mail: profdacunzo@hotmail.it

Ogni ambito è dotato di indicatori ben definiti, e ciascuno di questi ha quattro livelli differenti, che vanno da quello in cui l'alunno necessita della guida del docente a quello, in cui lo studente consapevolmente manifesta la propria *competenza matematica* in uno specifico ambito.

1. La valutazione degli alunni nella scuola italiana

Attualmente ciascun allievo che frequenta la scuola secondaria di primo grado riceve: una valutazione periodica (trimestrale/quadrimestrale) e una finale. L'esito dell'esame conclusivo del primo ciclo è espresso con valutazione complessiva in decimi ed è illustrato con una certificazione analitica dei traguardi di competenza e del livello globale di maturazione raggiunti dall'alunno, come riportato nell'articolo 3 della legge 169 del 2008.

Anche la certificazione delle competenze acquisite dall'alunno al termine del primo ciclo d'istruzione è stata nel tempo normata, infatti si è passati dalla definizione di un modello relativo alla certificazione delle competenze redatto dall'Amministrazione centrale, articolo 10 del Dpr 275/99, alla sperimentazione libera della riforma Fioroni del 2007. Col Dpr 122 del 2009 le competenze acquisite dagli alunni sono descritte e certificate al termine della scuola secondaria di primo grado, accompagnate anche da valutazione in decimi, ai sensi dell'articolo 3, commi 1 e 2, del decreto-legge. Si è poi arrivati alla circolare ministeriale 13 febbraio 2015 concernente l'adozione sperimentale dei nuovi modelli nazionali di certificazione delle competenze nelle scuole del primo ciclo di istruzione.

In questa circolare viene ribadita la funzione che tale certificazione ha nelle scuole del primo ciclo: *una prevalente funzione educativa, di attestazione delle competenze in fase di acquisizione, capace di accompagnare le tappe più significative (quinta classe primaria, terza classe secondaria di I grado per i soli alunni che superano l'esame di Stato) di un percorso formativo di base che oggi, partendo dall'età di 3 anni, si estende fino ai 16 anni.*

A questa sono allegate anche linee guida e i modelli sperimentali di certificazione al termine della scuola secondaria di primo grado.

Nel testo suddetto viene anche affermato: *La certificazione delle competenze non è sostitutiva delle attuali modalità di valutazione e attestazione giuridica dei risultati scolastici (ammissione alla classe successiva, rilascio di un titolo di studio finale, ecc.), ma accompagna e integra tali strumenti normativi, accentuando il carattere informativo e descrittivo del quadro delle competenze acquisite dagli allievi, ancorate a precisi indicatori dei risultati di apprendimento attesi. La certificazione si riferisce a conoscenze, abilità e competenze, in sintonia con i dispositivi previsti a livello di Unione Europea per le «competenze chiave per l'apprendimento permanente» (2006) e per le qualificazioni (EQF, 2008) recepite nell'ordinamento giuridico italiano.*

Riassumendo, nel corso del triennio ciascun docente valuta per ogni suo alunno il livello di apprendimento raggiunto nella propria disciplina e al termine del primo ciclo il consiglio di classe redige un certificato delle competenze.

In Wikipedia possiamo leggere: *L'apprendimento consiste nell'acquisizione o nella modifica di comportamenti, conoscenze, abilità, valori preferenze e può* *riguardare la sintesi di diversi tipi di informazioni. Possiedono questa capacità gli esseri umani, gli animali, le piante e alcune macchine. Possono essere appresi sia comportamenti adattativi che disadattativi.*

L'apprendimento è un cambiamento relativamente permanente che deriva da nuova esperienza o dalla pratica di nuovi comportamenti, ovvero una modificazione di un comportamento complesso, abbastanza stabile nel tempo, derivante dalle esperienze di vita e/o dalle attività del soggetto.

Proseguendo, poi, nella lettura dell'articolo possiamo notare che esistono varie tipologie di apprendimento, da quelle più formali a quelle informali. Da quelle euristiche a quelle meccaniche, ecc.

Tutte hanno in comune uno scopo: modificare il comportamento umano finché non raggiunge il proprio obiettivo.

Tra le definizioni di competenze formulate fino ad oggi, una tra quelle più accettate e condivise nell'ambiente scolastico è: *Capacità di far fronte a un compito, o a un insieme di compiti, riuscendo a mettere in moto e a orchestrare le proprie risorse interne, cognitive, affettive e volitive, e a utilizzare quelle esterne disponibili in modo coerente e fecondo* (Pellerey, 2004, pag 12).

Il «*far fronte a un compito*» può essere abbinato alla «*possibilità di mobilitare*», come affermato da Roegiers (2000), ovvero, *la competenza è la possibilità, per un individuo, di mobilitare in modo interiorizzato un insieme integrato di risorse in vista di risolvere una situazione appartenente a una famiglia di situazioni-problema.*

Abbiamo citato anche questo autore perché ci ha colpito l'idea di «mobilitare in vista di…» potrebbe, a parer nostro, chiarire e puntualizzare il concetto di capacità indicato da Pellerey.

Così come per l'apprendimento, anche per le competenze esistono differenti tipologie, ovvero competenze di cittadinanza, chiave, disciplinari, trasversali, ecc.

Queste due definizioni, di apprendimento e di competenza, sembrano lontane e abbastanza nebulose da calare all'interno di un sistema di valutazione.

Infatti, da quando sono state introdotte, i docenti hanno cominciato a chiedersi come conciliare queste due visioni dell'operato dei propri allievi.

Prima della valutazione delle competenze tutto sembrava più facile; ossia il docente si doveva esprimere solo su obiettivi di apprendimento e quindi valutare conoscenze, abilità e tutt'al più qualche capacità.

Come allora ancora oggi, ma con frequenza minore, i concetti di abilità e capacità venivano usati come sinonimi. Tuttavia, su di essi si sono scritte molte pagine per classificare e definire sia le numerose abilità e capacità che un individuo può mettere in opera.

In questa trattazione ci limiteremo a considerare l'aspetto procedurale e cognitivo delle abilità, affermando che con questo termine vogliamo intendere il saper fare.

Nel concetto «saper fare» vogliamo evidenziare la bravura di un alunno nel saper eseguire, operare risolvere…

Per quanto riguarda il termine capacità, è da intendersi come una possibilità (una potenzialità) che l'alunno possiede nel saper svolgere un compito.

Inizialmente, negli anni '80 del secolo scorso, quando si cominciò a parlare di competenze non esisteva ancora una definizione condivisa e chiara.

A livello europeo, all'interno della convenzione di Lisbona iniziata nel 2000 e conclusasi nel 2010, il consiglio europeo si era proposto di raggiungere come obiettivo quello di stimolare i ministri dell'istruzione dei rispettivi paesi membri a sviluppare sistemi formativi più efficaci ed efficienti.

All'interno di questo processo di cambiamento ci sono le raccomandazioni relative alle competenze chiave per l'apprendimento permanente approvate il 18 dicembre 2006 dal Consiglio europeo. Il consiglio ha deliberato che ciascun cittadino europeo deve (dovrebbe) aver acquisito le seguenti competenze chiave:

1. comunicazione nella propria madrelingua;
2. comunicazione nelle lingue straniere;
3. competenza matematica e competenze di base in scienza e tecnologia;
4. competenza digitale;
5. imparare a imparare;
6. competenze sociali e civiche;
7. spirito di iniziativa e imprenditorialità;
8. consapevolezza ed espressione culturale.

Le competenze di base degli assi culturali (Decreto Ministeriale 9 del 27 gennaio 2010) sono acquisite con riferimento alle competenze chiave di cittadinanza di cui all'allegato 2 del Decreto MIUR[2] 139/2007, che si ispirano al precedente elenco, pur con evidenti scostamenti:

1. imparare a imparare,
2. progettare,
3. collaborare e partecipare,
4. comunicare,
5. agire in modo autonomo e responsabile,
6. individuare collegamenti e relazioni,
7. risolvere problemi,
8. acquisire e interpretare informazioni.

La certificazione delle competenze di base avviene in modo formale al termine del primo biennio del secondo ciclo d'istruzione (Di Pietro, 2012, pag 2).

Nella Circolare Ministeriale (3 del 13 febbraio 2015) già più volte menzionata viene espresso in modo chiaro il significato della certificazione al termine del primo ciclo d'istruzione, ovvero, che la certificazione delle competenze al termine delle scuole del primo ciclo d'istruzione ha funzione prevalentemente educativa, perché le competenze di base sono ancora in fase di sviluppo e acquisizione, ribadendo in questo modo la funzione svolta dalla certificazione delle competenze rilasciata al termine del triennio della scuola secondaria di secondo grado.

Oggi disponiamo di una ricca letteratura degli ambiti che possono caratterizzare una competenza. In particolare ne sono stati identificati quattro:

1. Risorse cognitive. Le conoscenze e le abilità necessarie per affrontare un dato compito.
2. Saper agire. La capacità di mobilitare le proprie risorse nell'affrontare il compito proposto, e mettere in gioco l'attivazione dei processi logico-cognitivi di base e complessi.

2. MIUR: *Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca* (italiana). Sito web: www.istruzione.it

3. Poter agire. La sensibilità alle risorse e ai vincoli che il contesto operativo pone.
4. Voler agire. L'atteggiamento con cui il soggetto si pone di fronte al lavoro proposto, in riferimento al compito da affrontare, al contesto d'azione, a sé stesso, agli altri soggetti coinvolti (Castoldi, 2009, pagg. 48-49).

C'è ancora un punto da chiarire: le competenze chiave hanno valenza trasversale, ossia è il consiglio di classe che si esprime sul voto da attribuire a ciascuna di esse per redigere la certificazione.

A questo punto, il lavoro del docente sembra complicarsi sempre di più. Come mai si è giunti a tutto ciò? Fondamentalmente per due motivi:

1. Un cittadino europeo che volesse trasferirsi per lavoro in uno degli stati membri della comunità europea, dovrebbe esser capace di potersi inserire e integrare nel nuovo contesto professionale e svolgere con competenza i compiti richiesti.
2. Valutare solo conoscenze, abilità e qualche capacità è mortificante sia per il docente e sia per gli allievi, e tra quest'ultimi quasi sicuramenti quelli più svantaggiati tenderanno ad allontanarsi da un arido «ambiente scolastico».

Una valutazione integrata, precisa, accurata, responsabile ed eseguita in modo rigoroso e sistematico, senza comode, o deboli, scorciatoie, è uno degli obiettivi che ciascun sistema scolastico deve perseguire (Castoldi, 2009, pag. 152).

Infine, scopo del nostro lavoro è fornire ai docenti della scuola secondaria di primo grado un modello operativo per conciliare la valutazione in matematica dei livelli di apprendimenti acquisiti con quella delle competenze disciplinari e chiave.

2. Le rubriche delle competenze

Alcuni autori che si occupano di valutazione e organizzazione di curricoli formativi, a seguito di studi condotti sulla modalità di valutazione delle competenze e la relazione esistente fra queste e il piano dell'offerta formativa, hanno proposto di organizzare le competenze in rubriche di valutazione.

Secondo noi, questo successivo strumento ha generato ulteriori effetti non proprio positivi, soprattutto nel caso di alcune discipline come la matematica, tra i quali uno dei più evidenti è la discordanza esistente ancora su un punto focale: competenza uguale capacità. In matematica col termine competenza si intende il padroneggiare una conoscenza pratica su qualcosa (D'Amore, 2003, pag. 32).

L'alunno competente mette in gioco conoscenze, nel caso suddetto procedurali, ma egli può mobilitare anche conoscenze di tipo concettuale e argomentativo. In questo caso si parla di comprensione, la quale si occupa della componente teorica o del rapporto con la conoscenza (D'Amore, 2003, pag. 32)

L'obiettivo fondamentale della scuola è quello di far acquisire sia competenza in matematica e sia competenza matematica, ma privilegiare quest'ultima.

La competenza in matematica permette all'allievo di interagire con i suoi simili utilizzando strumenti matematici da un punto di vista procedurale, algoritmico. (Fandiño Pinilla, 2003, pag. 264)

La competenza matematica è la capacità-disponibilità a guardare il mondo in modo matematico, e dato che ciò non si apprende spontaneamente in modo implicito, si rende necessario pensare che deve far parte del curricolo proprio questo processo d'insegnamento-apprendimento specificamente rivolto a saper vedere matematicamente il mondo (Fandiño Pinilla, 2003, pag. 264).

Stilare rubriche delle competenze può essere un'attività istruttiva, appassionante, utile all'azione valutativa svolta dal docente, potrebbe monitorare, nel tempo, anche l'evoluzione delle «competenze» sviluppate dall'allievo. Ma frequentemente capita di osservare che all'interno dei suddetti elenchi ci siano indicatori o più in generale indici, per valutare e analizzare obiettivi procedurali (sa…, non sa…, ecc.). O peggio ancora, la stesura di rubriche valutative potrebbe diventare un mero atto burocratico, atto solo a compilare il certificato delle competenze.

3. L'apprendimento come base per la costruzione di competenza

Oggi disponiamo di un'ampia letteratura sui processi che sottendono l'apprendimento, il quale non è solo l'esito di apposita memorizzazione. Ma è visto come l'esito di un'attività nella quale l'individuo è coinvolto direttamente tanto da imparare con tutti i cinque sensi e non soltanto con l'ascolto e lo studio solitario (Ajello, 2002, pagg. 40-41).

Se l'alunno è chiamato a svolgere un'esperienza «autentica» nella quale comprende, da senso, al proprio operato, autonomamente si sentirà motivato ad apprendere, perché si percepirà competente (capace di…).

Dunque, attraverso una «didattica esperienziale» l'alunno esprime la sua «devoluzione» in ambito matematico e inizia a costruire i propri saperi, le proprie abilità, la propria autostima.

Ed è qui che entra in gioco la multi fattorialità dell'apprendimento in matematica, ovvero, per diventare competente in matematica bisogna aver acquisito e sviluppato, in modo armonico, i diversi ambiti che caratterizzano questa disciplina.

Come già accennato nella premessa, dallo studio condotto e pubblicato dalla professoressa M. I. Fandiño Pinilla l'apprendimento in matematica è contraddistinto da cinque ambiti:

1. Apprendimento concettuale (noetica);
2. Apprendimento algoritmico (calcolare, operare,…);
3. Apprendimento di strategie (risolvere, congetturare,…);
4. Apprendimento comunicativo (dire, argomentare, validare, dimostrare, …);
5. Apprendimento e gestione delle trasformazioni semiotiche (trattamento e conversione).

Questi a loro volta sono descritti da indicatori e livelli, espressi in base al grado di autonomia, consapevolezza e padronanza posseduti dall'allievo.

L'allievo durante il suo apprendimento trovandosi di fronte a situazioni «autentiche», che richiedano la mobilitazione sia interna che esterna di conoscenze, capacità non solo operative, ma anche comunicative e di pensiero, si troverà nelle condizioni tali da sviluppare la competenza in matematica (nel breve periodo) e matematica (nel lungo periodo).

Una valutazione fine, come quella che proponiamo, ha un duplice vantaggio sia per l'alunno e sia per il docente.

Per il primo: al termine di ogni esperienza, l'insegnante attribuendo un voto e un corrispondente giudizio, discente e famiglia saranno informati in modo accurato sugli ambiti della matematica sviluppati adeguatamente e su quelli per i quali è necessario uno studio più proficuo.

Per il secondo: Le valutazioni attribuite offrono una visione d'insieme e contemporaneamente particolareggiata dell'andamento della classe e di ciascun allievo.

Il quadro suddetto potrà così orientare anche le future azioni d'aula del docente per aiutare e sostenere chi dovesse trovarsi in difficoltà. Di seguito illustreremo in modo sintetico, ma preciso i cinque apprendimenti in matematica su menzionati e per tanto rimandiamo il lettore al testo pubblicato nel 2008 dalla casa editrice Erickson «Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica» dell'autrice M. I. Fandiño Pinilla per una trattazione più ampia e approfondita.

3.1. Apprendimento concettuale

Col termine «noetica» si tende a indicare l'apprendimento concettuale da parte di un allievo. Il discente ha acquisito un concetto matematico quando è in grado di:

- Scegliere i tratti distintivi del concetto e rappresentarli in un dato registro;
- Trattare tali rappresentazioni all'interno di uno stesso registro semiotico;
- Convertire tali rappresentazioni da un registro a un altro.

Si può considerare che un concetto è cognitivamente costruito quando l'alunno è rispettivamente in grado di:

- Identificare proprietà del concetto utilizzabili in diversi contesti e dunque di rappresentarlo in maniera adeguata a seconda delle situazioni;
- Di trasformare tale rappresentazione in caso di necessità e di usarla in modo opportuno in una pluralità di situazioni; anche dopo trasformazioni di conversione (Fandiño Pinilla, 2008, pag. 30).

Per valutare l'apprendimento concettuale esistono vari strumenti. Noi ci siamo focalizzati sull'uso dei TEPs, ovvero dei protocolli commentati di *problem solving* adoperati nella nostra ricerca come descrizioni dettagliate o illustrazioni di concetti o algoritmi matematici (D'Amore, Maier, 2002, pagg. 144 – 189). I motivi per i quali abbiamo scelto questo strumento sono: i TEPs sono produzioni scritte degli studenti su argomenti di matematica, che hanno come destinatario un loro pari e non il docente. Questa modalità è utile per far emergere i concetti appresi dal discente scritti nella lingua da egli conosciuta. L'altro motivo per il quale abbiamo scelto i TEPs è di dare l'opportunità allo studente di tenere costantemente sotto controllo la propria *comprensione* di questioni matematiche, grazie anche a un ragionamento e un riflessivo riscontro con l'insegnante e i compagni di classe (D'Amore, Maier, 2002, pagg. 144 – 189).

3.2. Apprendimento algoritmico

Porsi domande e cercare risposte sono esercizi che appassionano gli esseri umani sin dalla loro apparizione sulla Terra (Toffalori, 2015, pag. 7).

Il «cercare risposte» presuppone un soggetto che sta eseguendo delle azioni, e quando queste sono in numero finito e accurate, allora possiamo affermare che in un dato momento è stato eseguito un algoritmo per ottenere una risposta.

L'apprendimento algoritmico descrive la maestria raggiunta da un allievo nell'esecuzione di un certo numero di algoritmi e il loro uso corretto, ovvero, quando, dove e perché adoperare una certa «strategia».

Forse è proprio a causa di questa «maestria» che per alcuni alunni gli algoritmi sono «oggetti» da rifiutare.

In fine lo scopo della padronanza, uso consapevole degli algoritmi è: rendere cosciente l'alunno dei passaggi necessari da effettuare per passare dalle istanze del problema a una sua soluzione se mai vi fosse.

3.3. Apprendimento strategico

Risolvere problemi e saper scegliere come comportarsi in situazioni problematiche, può essere un veicolo eccellente per la formazione dei concetti e noi aggiungeremmo anche nella vita quotidiana.

Possiamo considerare l'attività di risoluzione dei problemi come un'estensione dell'apprendimento di regole o modi di comportarsi o di raccolta di esemplificazione di strategie, ecc.

La capacità di saper risolvere correttamente un quesito genera spesso gratificazione sia interna che esterna, come riconoscimento sociale di essere considerato un buon risolutore di problemi e, dunque, questa attitudine può generare motivazione interna ad apprendere nuovi concetti (Fandiño Pinilla, 2008, pag. 61-62).

Secondo la teoria costruttivista il processo evolutivo non coincide con quello di apprendimento, ma il primo segue il secondo. Infatti, lo sviluppo o maturazione è considerato come una precondizione dell'apprendimento, mai come il risultato di esso. Mentre l'apprendimento forma una sovrastruttura sullo sviluppo, lasciando quest'ultimo essenzialmente inalterato (Vygotskij, 1978, pagg. 118-119).

La risoluzione di un problema, secondo la visione costruttivista, richiede la manifestazione di competenza, sia perché non esiste un sol modo per risolvere un problema e sia perché questo processo non cade esclusivamente nella zona di sviluppo effettivo, ma in quella prossimale (Fandiño Pinilla, 2008, pagg. 67-68).

Accade questo perché di solito per risolvere un problema è necessario un «atto creativo»; non solo bisogna conoscere le possibili strade che portano alla soluzione, ma qualche volta bisogna anche immaginarle.

Esiste un'ampia letteratura su questo tema, ma nessuno studio, finora pubblicato, è riuscito ad imbrigliare «il risolvere problemi» in un'unica procedura.

Una delle caratteristiche principali della valutazione dell'apprendimento strategico è la valorizzazione del lavoro degli allievi, si privilegia il processo più che il prodotto (risultato), dando importanza a ciascuno dei passi nel processo di risoluzione dei problemi, una volta stabilito e reso palese lo strumento valutativo che si intende usare.

Durante la valutazione di tale apprendimento l'insegnante può predisporre, per ciascun allievo, una tabella che contenga i diversi principali aspetti del processo di risoluzione di un problema, per esempio:

- Comprensione del problema;
- Trasformazione o traduzione dell'enunciato in una forma aritmetica;
- Scelta e uso delle strategie;
- Validazione significativa della risposta da parte dell'allievo (ma anche questo punto è strettamente connesso all'apprendimento comunicativo) (Fandiño Pinilla, 2008, pag. 89-90).

È bene usare spesso, anche nella fase di valutazione, situazioni non standard per evitare situazioni vincolanti di contratto didattico; è anche importantissimo far sì che vi siano diverse strategie possibili per arrivare alla risoluzione, per permettere un'ampia discussione con i compagni.

3.4. Apprendimento comunicativo

Qualsiasi comunicazione è efficace se raggiunge il suo scopo, in qualsiasi campo, anche in matematica. L'insegnante deve mediare tra le proprie attese sulla correttezza della comunicazione e le verifiche sull'efficacia della stessa (Fandiño Pinilla, 2008, pag. 116).

La comunicazione in matematica e soprattutto il linguaggio matematico è stato ampiamente trattato da tanti autori e mai, forse, si smetterà di scrivere su questi argomenti (Fandiño Pinilla, 2008, pag. 98).

Noi, qui, vogliamo puntualizzare solo alcuni punti che saranno utilizzati anche nella valutazione di questo apprendimento:

1. In matematica esistono diverse forme di comunicazione: lingua madre, orale e scritta, linguaggio simbolico specifico, icone, schemi, grafi ecc. Ognuna di queste forme è utilizzata in un certo contesto per comunicare un ben definito messaggio.
2. La definizione in matematica riveste un ruolo principale, soprattutto quando vogliamo esprimere le caratteristiche di un oggetto matematico. Esistono differenti modi per definire un concetto, ma una buona descrizione è più che sufficiente se è coerente e dà luogo a una comunicazione del concetto efficace e significativa.
3. Argomentare e dimostrare. Argomentare e dimostrare sono due processi compresenti nel fare matematica e si distinguono per struttura logica del discorso e dei processi cognitivi messi in azione, messi in atto dai differenti obiettivi che li generano e producono differenze significative perché mettono il soggetto su due piani molto vicini ma sostanzialmente diversi.

   L'argomentazione matematica è diversa dell'argomentazione retorica, comunemente usata nel linguaggio naturale, il suo obiettivo consiste nello stabilire la verità di un enunciato attraverso l'esibizione di argomenti convincenti (tenendo però conto della struttura teorica).

La dimostrazione invece ha l'obiettivo di stabilire sia la verità di un enunciato, che la sua deducibilità dai principi della teoria (cioè i motivi per cui è vero).
Entrambi i processi si sviluppano attraverso una concatenazione di deduzioni, ma nel ragionamento argomentativo la deduzione viene fatta ricorrendo a principi assunti secondo criteri di pertinenza e di plausibilità mentre in una dimostrazione c'è il riferimento costante (esplicito o sottointeso) ai principi base della teoria (Marino, 2002, pag. 5).

Le componenti da noi considerate per la valutazione dell'apprendimento comunicativo si basano sugli studi effettuati da Radford e Dermers (2006) e sono:
– Sintassi specifica e simboli opportuni;
– Organizzazione della presentazione;
– Pertinenza e qualità della presentazione;
– Uso di diverse forme di comunicazione;
– Impegno posto nel dialogo;
– Considerazione degli argomenti e delle ragioni degli altri.

Questi indicatori saranno declinati nella nostra griglia di valutazione attraverso degli aggettivi che si riferiscono a chiarezza, pertinenza, esattezza, logica, efficacia, completezza, profondità con cui si esprimono le proprie ragioni, considerazione delle ragioni degli altri; tutte queste parole orbitano attorno ad una, comunicazione (Fandiño Pinilla, 2008, pag. 116).

3.5. Apprendimento e gestione delle rappresentazioni semiotiche

Anche se questo argomento è già stato trattato in generale quando abbiamo parlato della noetica, esso oggi è diventato argomento di studio e ricerca a sé stante (Fandiño Pinilla, 2008, pag. 125). Infatti, la sua ricerca in didattica della matematica si articola principalmente su due fronti:
1. Il tema delle rappresentazioni semiotiche in generale e le articolazioni dei diversi registri linguistici della matematica;
2. Il tema dell'argomentazione e della dimostrazione.

Tuttavia, i due temi sono intimamente connessi. Le rappresentazioni semiotiche possono essere produzioni discorsive (in lingua naturale, in lingua formale) o non discorsive (figure, grafi, schemi,…). Questa produzione non risponde unicamente a una funzione di comunicazione: può anche rispondere soltanto a una funzione di oggettivazione (per se stessi) o ad una funzione di trattamento. Per capire la produzione semiotica, bisogna prendere in considerazione tre aspetti:
– L'aspetto strutturale, relativo alla determinazione della significatività dei segni e a quella delle possibilità di rappresentazione che essi offrono;
– L'aspetto fenomenologico, relativo ai vincoli psicologici di produzione o di comprensione dei segni;
– L'aspetto funzionale, relativo al tipo di attività che i segni permettono di svolgere (Fandiño Pinilla, 2008, pag. 127).

4. La valutazione degli apprendimenti

In base a quanto detto finora per quanto riguarda i differenti aspetti dell'apprendimento in matematica, proponiamo una griglia di valutazione, nella quale sono riportati: indicatori (apprendimenti in matematica) e livelli di valutazione.

Questo prospetto (tabella 1) ha la funzione di orientare sia la valutazione di ciascun apprendimento da parte del docente, sia la scelta delle esperienze da utilizzare per valutare le differenti componenti dell'apprendimento in matematica e sia di offrire agli allievi un quadro di lettura del proprio percorso di apprendimento in matematica.

Se i traguardi delle competenze al termine della scuola secondaria di primo grado rappresentano i criteri per la valutazione delle competenze disciplinari acquisite durante il percorso scolastico svolto, gli apprendimenti in matematica e la loro valutazione, possono offrire quel raccordo che ci siamo proposti fin dall'inizio di raggiungere con la nostra ricerca.

I traguardi esposti anche nelle Indicazioni Nazionali del Ministero della Pubblica Istruzione, sono stati riportati nelle righe della tabella 2, mentre gli apprendimenti sono scritti nelle colonne.

Per compilare e utilizzare, dunque, questo schema basterà al docente rispondere alla seguente domanda: «Quali apprendimenti sono necessari per far raggiungere questo traguardo all'alunno?», barrando la cella in questione l'insegnante avrà un'indicazione sia su quali azioni d'aula e sia su quali esperienze far vivere ai propri alunni.

Tabella 1 – Griglia di valutazione degli apprendimenti in matematica.

Dimensioni	Indicatori	Livelli			
		Parziale (4-5)	Essenziale (6)	Medio (7-8)	Alto (9-10)
Apprendimento concettuale	Scegliere i tratti distintivi del concetto e rappresentarli in un dato registro.	L'alunno necessita della guida dell'insegnante per scegliere: i tratti essenziali del concetto e il registro semiotico idoneo.	L'alunno è in grado di scegliere i tratti essenziali del concetto e di rappresentarlo nel registro semiotico che meglio conosce.	L'alunno è in grado di distinguere i tratti essenziali da quelli primari, distintivi, del concetto e sa scegliere il registro semiotico che meglio rappresenta il concetto di studio.	L'alunno identifica proprietà del concetto utilizzabili anche in contesti diversi e quindi, di rappresentarlo in maniera adeguata a seconda delle situazioni.
	Trattare tali rappresentazioni all'interno di uno stesso registro.	L'alunno necessita della guida dell'insegnante per scegliere la rappresentazione più idonea all'interno di uno stesso registro.	L'alunno è in grado di scegliere la rappresentazione semiotica che meglio conosce all'interno di uno stesso registro.	L'alunno è in grado di scegliere fra più rappresentazioni semiotiche quella che, meglio rappresenta il concetto studiato.	L'alunno è in grado di trasformare autonomamente e consapevolmente tali rappresentazioni a seconda dell'ambito nel quale opera.
	Convertire tali rappresentazioni da un dato registro ad un altro.	L'alunno necessita della guida dell'insegnante per eseguire con sicurezza conversioni da un registro ad un altro.	L'alunno esegue con sicurezza conversioni da un registro ad un altro.	L'alunno sa scegliere la conversione di registro più opportuna.	L'alunno è in grado di usare la conversione in modo opportuno in una pluralità di situazioni.
Apprendimento algoritmico	Maestria nell'uso degli algoritmi.	L'alunno necessita della guida del docente per eseguire semplici algoritmi.	L'alunno sa eseguire con sicurezza semplici algoritmi.	L'alunno sa impostare ed eseguire una sequenza di più algoritmi per la risoluzione di un quesito.	L'alunno è in grado di utilizzare anche in contesti extrascolastici l'uso degli algoritmi.
Apprendimento strategico	Comprensione del problema	L'alunno necessita della guida dell'insegnante per comprendere i dati e la richiesta del problema.	L'alunno è in grado di comprendere ed utilizzare dati e richieste di "problemi semplici".	L'alunno è in grado di comprendere ed utilizzare dati e richieste di "problemi complessi".	L'alunno è in grado di comprendere ed utilizzare informazioni anche di fenomeni o eventi extra scolastici per risolvere i quesiti affrontati.
		L'alunno necessita della guida dell'insegnante per stabilire se: 1 La traccia del problema presenta dati incompleti. 2 La traccia del problema presenta dati superflui. 3 Il problema è irrisolvibile.	L'alunno è in grado di stabilire se: 1 La traccia di un semplice problema presenta dati incompleti. 2 La traccia di un semplice problema presenta dati superflui. 3 Il problema è irrisolvibile.	L'alunno è in grado di stabilire se: 1 La traccia di un problema complesso presenta dati incompleti. 2 La traccia di un problema complesso presenta dati superflui. 3 Il problema è irrisolvibile.	L'alunno, a seconda del problema che ha di fronte, è in grado di stabilire ciò che può essere utile o inutile alla sua risoluzione. Nel caso in cui vi fossero informazioni mancanti, il suddetto è in grado di applicare o ideare strategie, anche personali, per il loro reperimento.

Apprendimento strategico	Trasformazione o traduzione in una forma aritmetica		L’alunno necessita della guida dell'insegnante per trasformare i dati e la richiesta del problema in forma aritmetica.	L’alunno è in grado di trasformare i dati e la richiesta del problema in forma aritmetica.	L’alunno è in grado di tradurre in forma aritmetica i dati e la richiesta del problema utilizzando strumenti di misura se necessari.	L’alunno in modo autonomo e consapevole è in grado di trasformare o tradurre informazioni anche di carattere non scolastico in forma aritmetica.
	Scelta		L’alunno necessita della guida dell’insegnante per scegliere la strategia più efficace per risolvere un problema.	L’alunno è in grado di scegliere tra una serie di strategie conosciute, quella più efficace per risolvere un problema.	L’alunno è in grado di fondere due o più strategie, conosciute, per risolvere un problema.	L’alunno è in grado di creare una strategia personale di risoluzione di problemi sia in ambito scolastico e sia extra scolastico.
	Uso delle strategie		L’alunno necessita della guida dell’insegnante per utilizzare con efficacia ed efficienza una strategia risolutiva.	L’alunno utilizza con efficacia ed efficienza semplici strategie risolutive.	L’alunno è in grado di utilizzare in modo autonomo e consapevole diverse strategie risolutive.	L’alunno sia in ambito scolastico e sia extrascolastico è in grado di individuare o creare e quindi, applicare strategie risolutive personali.
	Validazione significativa della risposta da parte dell’allievo	Spiegare la strategia risolutiva applicata, oralmente o per iscritto	L’alunno necessita della guida dell’insegnante per esporre oralmente o per iscritto la strategia risolutiva applicata.	L’alunno è in grado di esporre oralmente o per iscritto la strategia risolutiva applicata.	L’alunno è in grado di esporre oralmente o per iscritto la strategia risolutiva applicata, le motivazioni delle proprie scelte risolutive e come ha superato gli ostacoli incontrati durante il processo risolutivo.	L’alunno è in grado di esporre oralmente o per iscritto sia le scelte e sia il come ha superato gli ostacoli che lo hanno condotto alla risoluzione del quesito affrontato.
		Confronto del proprio processo risolutivo, da parte di ciascun allievo, con quello di un compagno	L’alunno necessita della guida dell’insegnante per gestire il confronto con altri allievi sul proprio processo risolutivo.	L’alunno è in grado di confrontarsi con altri allievi su processi risolutivi “semplici”.	L’alunno è in grado di confrontarsi con altri allievi su processi risolutivi “complessi”.	L’alunno è in grado di difendere e argomentare le proprie opinioni con pari ed adulti.
Apprendimento comunicativo	Sintassi e simboli L’allievo utilizza i simboli, le convenzioni e la terminologia matematica con chiarezza ed esattezza.		L’allievo utilizza i simboli, le convenzioni e la terminologia matematica con poca chiarezza ed esattezza.	L’allievo utilizza i simboli, le convenzioni e la terminologia matematica con sufficiente chiarezza ed esattezza.	L’allievo utilizza i simboli, le convenzioni e la terminologia matematica con adeguata chiarezza ed esattezza.	L’allievo utilizza i simboli, le convenzioni e la terminologia matematica con chiarezza ed esattezza.

Apprendimento comunicativo	Organizzazione della presentazione Con chiarezza, logica ed efficacia, l’allievo organizza, presenta e sostiene le sue idee ricorrendo a differenti forme di comunicazione	Ricorrendo a differenti forme di comunicazione, l’allievo organizza, presenta e sostiene le sue idee con poca chiarezza, logica ed efficacia.	Ricorrendo a differenti forme di comunicazione, l’allievo organizza, presenta e sostiene le sue idee con sufficiente chiarezza, logica ed efficacia.	Ricorrendo a differenti forme di comunicazione, l’allievo organizza, presenta e sostiene le sue idee con adeguata chiarezza, logica ed efficacia.	Ricorrendo a differenti forme di comunicazione, l’allievo organizza, presenta e sostiene le sue idee con chiarezza, logica ed efficacia.
	Impegno nel dialogo L’allievo esprime ragioni o presenta argomenti allo scopo di far valere i suoi punti di vista matematici con chiarezza, pertinenza e profondità.	L’allievo esprime ragioni o presenta argomenti allo scopo di far valere i suoi punti di vista matematici con poca chiarezza, pertinenza e profondità.	L’allievo esprime ragioni o presenta argomenti allo scopo di far valere i suoi punti di vista matematici con sufficiente chiarezza, pertinenza e profondità.	L’allievo esprime ragioni o presenta argomenti allo scopo di far valere i suoi punti di vista matematici con adeguata chiarezza, pertinenza e profondità.	L’allievo esprime ragioni o presenta argomenti allo scopo di far valere i suoi punti di vista matematici con chiarezza, pertinenza e profondità.
	Considerazione degli argomenti e delle ragioni degli altri L’allievo ascolta gli argomenti degli altri, con efficacia, logica e pertinenza, e prende in considerazione gli argomenti o le ragioni degli altri.	L’allievo ascolta gli argomenti o le ragioni degli altri e li prende in considerazione con poca efficacia, logica e pertinenza.	L’allievo ascolta gli argomenti o le ragioni degli altri e li prende in considerazione con sufficiente efficacia, logica e pertinenza.	L’allievo ascolta gli argomenti o le ragioni degli altri e li prende in considerazione con adeguata efficacia, logica e pertinenza.	L’allievo ascolta gli argomenti o le ragioni degli altri e li prende in considerazione con efficacia, logica e pertinenza.
Apprendimento semiotico	Maestria che il singolo allievo mostra nelle trasformazioni e conversioni.	L’alunno necessita della guida dell'insegnante per operare trasformazioni e conversioni.	L’alunno è in grado di effettuare “semplici” trasformazioni e conversioni.	L’alunno è in grado di effettuare “complesse” trasformazioni e conversioni.	L’alunno sia in ambito scolastico e sia extra scolastico è in grado di utilizzare, trasformare o convertire informazioni in differenti registri.

Tabella 2 – Griglia per la valutazione dei traguardi delle competenze.						
	Traguardi	Competenza in matematica				
		Apprendimento concettuale	Apprendimento algoritmico	Apprendimento strategico	Apprendimento comunicativo	Apprendimento semiotico
1	L'alunno si muove con sicurezza nel calcolo anche con i numeri razionali, ne padroneggia le diverse rappresentazioni e stima la grandezza di un numero e il risultato di operazioni.					
2	Riconosce e denomina le forme del piano e dello spazio, le loro rappresentazioni e ne coglie le relazioni tra gli elementi.					
3	Analizza e interpreta rappresentazioni di dati per ricavarne misure di variabilità e prendere decisioni.					
4	Riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni e la loro coerenza.					
5	Spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati.					
6	Confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi.					
7	Produce argomentazioni in base alle conoscenze teoriche acquisite (ad esempio sa utilizzare i concetti di proprietà caratterizzante e di definizione).					
8	Sostiene le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi adeguati e utilizzando concatenazioni di affermazioni; accetta di cambiare opinione riconoscendo le conseguenze logiche di una argomentazione corretta.					
9	Utilizza e interpreta il linguaggio matematico (piano cartesiano, formule, equazioni, ...) e ne coglie il rapporto col linguaggio naturale.					
10	Nelle situazioni di incertezza (vita quotidiana, giochi, …) si orienta con valutazioni di probabilità.					
11	Ha rafforzato un atteggiamento positivo rispetto alla matematica attraverso esperienze significative e ha capito come gli strumenti matematici appresi siano utili in molte situazioni per operare nella realtà.					

5. Come utilizzare la griglia di valutazione

Una siffatta griglia per valutare i singoli apprendimenti in matematica, può generare un senso di disorientamento, in chi la adopera per la prima volta. Per tale motivo osserviamo come utilizzarla senza perdersi o usare contorte procedure di attestazione del voto:

1. Scegliere l'apprendimento da valutare, per esempio: l'apprendimento concettuale. Esso è caratterizzato da tre indicatori:
   a. Scegliere i tratti distintivi del concetto e rappresentarli in un dato registro.
   b. Trattare tali rappresentazioni all'interno di uno stesso registro semiotico.
   c. Convertire tali rappresentazioni da un dato registro ad un altro.

A ciascun indicatore sono associati quattro indici (livelli) i quali indicano il grado di autonomia, comprensione, consapevolezza, conoscenza e abilità raggiunti da ciascun allievo.

2. Sarebbe opportuno da parte del docente proporre quesiti che si trovino quanto più vicino alla zona di sviluppo effettivo dei propri allievi per:
   a. Dare la possibilità a chiunque di rispondere alla richiesta del quesito.
   b. Far concentrare l'allievo su ciò che dovrà scrivere e non dargli l'opportunità di perdersi o bloccarsi durante il processo di risoluzione del problema.
3. Proporre il quesito all'allievo nel seguente modo:
   Il tuo miglior amico, Luca, manca da tre settimane da scuola e ti contatta per chiederti i compiti di matematica assegnati negli ultimi giorni. Tu glieli spedisci. Dopo qualche giorno, ti scrive per informarti che non è riuscito a risolvere un problema e ti chiede se puoi aiutarlo a risolverlo; spiegandogli in modo preciso e accurato: i dati, le richieste, il procedimento e la soluzione del quesito.
   Il problema da risolvere è il seguente: Si inserisce il quesito prescelto.

L'effetto positivo sulla valutazione nel processo di apprendimento non è certo assicurato dal «semplice» uso dei TEP in aula. Ci sono alcune condizioni per il successo; due appaiono di grande importanza.

– Se si propone agli studenti testi che possano dare una visione profonda del loro modo di fare, di pensare e di comprendere la matematica, bisogna essere sicuri che essi indirizzino i loro TEP a qualcuno che ha bisogno delle informazioni relative alla questione di cui si scrive; questo destinatario, per quanto fittizio, non deve coincidere né con il vuoto né con l'insegnante stesso.
  Quando l'alunno immagina di scrivere al proprio insegnante lo fa senza avvertire necessariamente il bisogno di essere dettagliato ed esplicito, poiché si instaura una forma di contratto didattico e il discente è portato a chiedersi: «cosa si aspetterà che scriva il prof?» (Fandiño Pinilla, 2008, pag. 36).

– Quando si valuta questo genere di apprendimento l'insegnante deve cercare buone idee non solo per dare stimoli significativi agli allievi, ma anche per lavorare, poi, in modo adeguato con i testi prodotti. Innanzi tutto egli deve essere in grado di interpretare e analizzare i TEPs attentamente e in modo esauriente. In realtà non è quasi mai una cosa semplice individuare i concetti matematici, i pensieri e le idee che sono alla base dei testi prodotti dagli allievi. C'è bisogno non solo di molta attenzione, ma anche di grande esperienza e possibilmente di un vero e proprio allenamento specifico (D'Amore, Maier, 2002).

Cosa dovrà fare l'allievo?

1. Scrivere a una persona (un suo pari) che non conosce l'argomento in questione.
2. Tradurre dal registro lingua madre al registro matematico la traccia del problema. Quindi, scrivere i dati e la richiesta in linguaggio matematico.
3. Risolvere il problema.
4. Scrivere le idee, i pensieri, le procedure che ritiene necessarie per passare dal testo letterario (traccia del problema), ai dati, alla soluzione.
5. Scrivere di quali concetti o conoscenze si è avvalso, per risolvere il quesito.
6. Se è necessario, avvalersi di grafi per chiarire la sequenza di passaggi effettuati.

Cosa dovrà fare l'insegnante?

1. Sottolineare all'alunno questo elemento: lo scritto che produrrà, <u>deve rivolgersi</u> a un suo pari, il quale non conosce l'argomento in questione. Questo punto deve essere chiaro a docente e alunno, altrimenti, se il destinatario dell'elaborato è l'insegnante, l'allievo è portato ad essere impreciso e inaccurato nell'esprimere le proprie idee e modi di fare. Proprio a causa di quel contratto didattico instaurato fra le due parti.

2. Individuare, utilizzando gli indicatori suddetti:
   a. I concetti, le conoscenze, le intuizioni espresse dall'allievo nel protocollo argomentativo.
   b. Le modalità di trattamento e conversione delle rappresentazioni utilizzate dall'alunno.
   c. Il grado di autonomia e consapevolezza espresso dal discente.

In questo modo, per l'apprendimento concettuale, l'insegnante attesterà il livello dei tre indicatori con tre giudizi e altrettanti voti.

I tre ambiti definiscono attraverso la lingua madre il grado di preparazione dell'allievo. I tre voti possono essere sintetizzati in uno solo, attraverso una media aritmetica, ciò per una praticità comunicativa ad alunno e famiglia.

Tale procedura, la si effettua per tutti gli apprendimenti declinati nella griglia di valutazione. Una volta ottenuto il profilo complessivo per ciascun allievo, è possibile comunicare il voto apprendimento per apprendimento, oppure abbinare la modalità predetta, con un voto di sintesi, comprensibile anche da chi non è un addetto ai lavori.

6. Raccolta dati

L'arco di tempo nel quale si è svolta la nostra ricerca è di tre anni, un ciclo completo di scuola secondaria di primo grado. In particolare sono stati considerati i seguenti anni scolastici: 2012/2013, 2013/2014, 2014/2015.

All'inizio e al termine di ogni anno scolastico è stato proposto a ciascun allievo un test scritto per valutare i cinque apprendimenti che abbiamo finora esposto.

In particolare il test presentava le domande nel seguente modo:

1. **Quesito per valutare l'apprendimento concettuale:**
   Il tuo miglior amico, Luca, manca da tre settimane da scuola e ti contatta per chiederti i compiti di matematica assegnati negli ultimi giorni. Tu glieli spedisci.
   Dopo qualche giorno, ti scrive per informarti che, non è riuscito a risolvere un problema e ti chiede se puoi aiutarlo a risolverlo; spiegandogli in modo preciso ed accurato: i dati, le richieste, il procedimento e la soluzione del quesito.
   Il problema da risolvere è il seguente:

2. **Quesito per valutare l'apprendimento algoritmico:**
   Di seguito sono elencate delle situazioni, risolvile e giustifica la tua risposta esprimendo gli strumenti che hai utilizzato. Puoi scegliere tra: calcolatrice, calcolo mentale calcolo a mano, o altra tecnica; in tal caso descrivila:

3. **Quesito per valutare l'apprendimento strategico:**
   Il problema da scegliere per valutare questo apprendimento deve privilegiare il lavoro dell'alunno, il procedimento più che il risultato. In tal senso ci sono molti problemi che hanno anche caratterizzato la storia della matematica. Un esempio fra tanti potrebbe essere il problema di Delo[3].

4. **Quesito per valutare l'apprendimento comunicativo:**
   Anche in questo caso è preferibile scegliere un problema vicino alla zona di sviluppo effettivo degli alunni considerati.

---

3. Il filosofo e matematico greco Teone di Smirne (70 ca.-135 ca.) riporta che gli ateniesi, dovendo contrastare una tremenda epidemia, si recarono a Delo per interrogare l'oracolo. Esso rispose che l'ira degli dei si sarebbe placata solamente se l'altare di forma cubica fosse stato raddoppiato.

Per esempio: al termine dello studio delle quattro operazioni (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione) con l'uso dei numeri naturali il docente può proporre alla propria scolaresca un problema aritmetico già risolto: A causa dell'assenza di un insegnate, bisogna distribuire (dividere) gli alunni di una classe prima in altre quattro classi. Quanti alunni andranno in ciascun aula?
Risoluzione: 30 : 4 = 7,5.
Risposta: 7,5.
Questo perché dovranno focalizzarsi su due obiettivi fondamentali:

– Individuare eventuali errori commessi da chi ha risolto il quesito proposto.
– Rispondere in modo adeguato alle seguenti domande:
Analizza la risposta di ***alunno*** *e rispondi alle seguenti domande:*
  – ***Alunno*** *ha inteso correttamente il problema?*
  – *Usa correttamente le informazioni?*
  – *La sua risposta è corretta?*

5. **Quesito per valutare l'apprendimento e la gestione delle rappresentazioni semiotiche:**
Si sceglie un concetto matematico e l'allievo per iscritto dovrà operare delle trasformazioni di trattamento o di conversione.
Pensa ad una frazione, scrivila, e poi rappresentala in tutti i modi (registri semiotici) che conosci. Una delle rappresentazioni potrebbe anche essere, la lingua che usi comunemente.

Durante l'anno scolastico si può utilizzare la stessa struttura di presentazione dei quesiti e al posto di scegliere problemi a prescindere dal livello scolastico osservato, si può orientare la selezione in base all'argomento o al percorso didattico svolto.

I dati ottenuti dalle nostre osservazioni sono stati tabulati. Qui riportiamo solo i grafici delle tabelle riguardanti i risultati ottenuti dai Test d'ingresso/uscita per ciascun anno scolastico considerato.

Teniamo a precisare un punto focale del nostro studio, ovvero, osservare come *la competenza in matematica* e *la competenza matematica* evolvono nel tempo; durante la frequenza dell'allievo alla scuola secondaria di primo grado.

In particolare, abbiamo scelto una serie di quesiti proponibili a qualsiasi studente a prescindere dal grado scolastico osservato. Questo per consentirci di avere un riferimento fisso nel tempo. Infatti la stessa prova è stata distribuita all'inizio del primo anno scolastico, al suo termine e così via, con la stessa cadenza nei due anni successivi.

Non abbiamo restituito qui anche i dati raccolti durante ciascun anno scolastico in merito ai vari argomenti/percorsi di apprendimento svolti, perché creerebbe solo confusione a nostro parere.Noi vogliamo, tenendo ciascun allievo al centro dell'apprendimento e delle osservazioni condotte, evidenziare come sia diventato, nel tempo, competente di fronte a uno stesso «problema», quali strategie ha messo in atto.

Come è migliorata la sua capacità procedurale nel risolvere un «problema». Come è divenuto autonomo e consapevole di poter «vedere» con uno sguardo «matematico» il mondo.

Grafici dei voti ottenuti

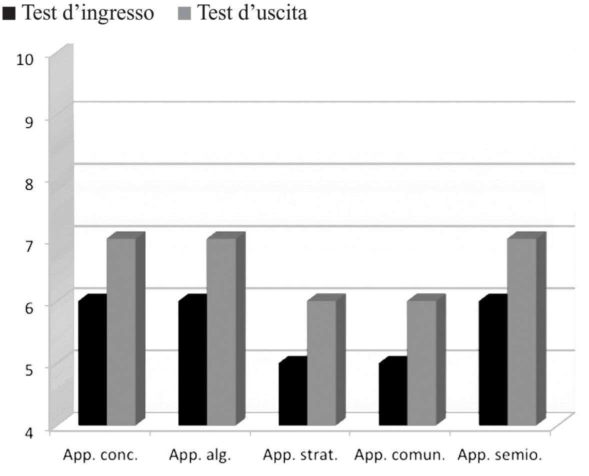


Grafico 1. Risultati test d'ingresso e uscita anno scolastico 2012/2013

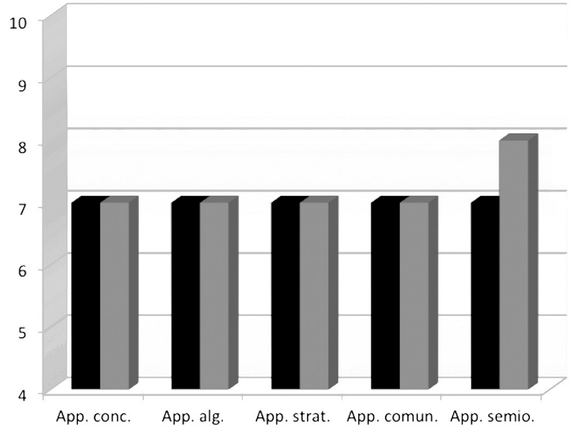


Grafico 2. Risultati test d'ingresso e uscita anno scolastico 2013/2014

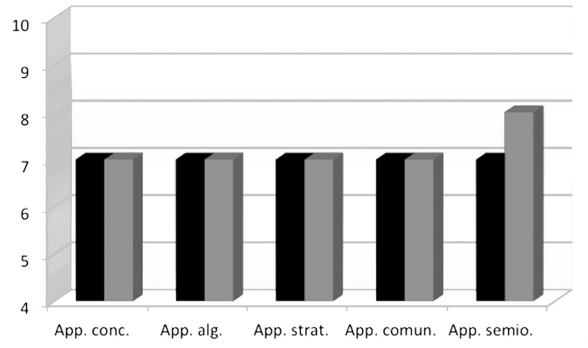


Grafico 3. Risultati test d'ingresso e uscita anno scolastico 2014/2015

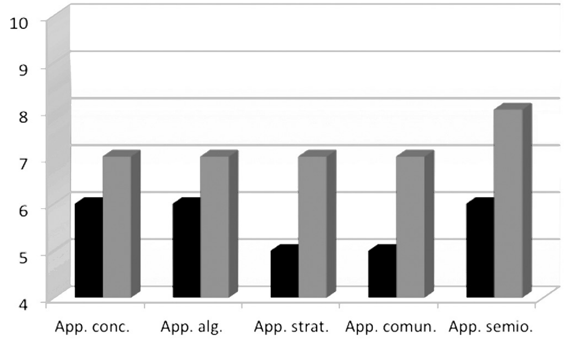


Grafico 4. Risultati test d'ingresso e uscita dalla scuola secondaria di primo grado

7. Conclusioni

Dai dati ottenuti e dalle osservazioni che abbiamo svolto nel corso di questi tre anni possiamo fare una serie di affermazioni, condivise anche da alunni e famiglie coinvolte, più che esprimere una serie di certezze. Poiché il processo di apprendimento-insegnamento è un procedimento multiforme e dinamico, che ha effetti sia nel breve e nel lungo termine. Nello specifico:

– Siamo riusciti a migliorare la percezione che si ha della matematica da parte degli alunni, soprattutto quelli più svantaggiati o che hanno un duro rapporto con questa disciplina.
  L'aspetto che ha colpito di più questi allievi è stata la modalità con la quale il docente ha fatto familiarizzare gli argomenti affrontati, la somministrazione delle prove e il conseguente commento alle prove.
– Elemento di successo per lo svolgimento delle prove è stata la scelta di far scrivere agli alunni secondo il proprio linguaggio, senza chiedere o far sentire la necessità di esprimersi secondo definizioni prestabilite.
– L'elemento che ha favorito la rottura e la rielaborazione del contratto formativo docente-alunno è stata la scelta di problemi che fossero vicini alla zona di sviluppo effettivo, ma che venivano proposti in modo inusuale per gli alunni. Un esempio fra tanti è stata la descrizione del procedimento

per stabilire il resto di una divisione approssimata con l'uso di differenti strumenti, tra i quali la calcolatrice.

– L'uso e la trasformazione da un registro semiotico a un altro o nello stesso registro è stato l'ostacolo più grande da superare per molti allievi che avevano immagini dei concetti matematici molto radicate.
– Alunni e famiglie sono riusciti a superare l'iniziale diffidenza e a comprendere l'uso di una valutazione per apprendimenti, che ha come scopo ultimo l'individuazione, attraverso un lavoro fine, dei punti di forza e dei punti debolezza di ciascun allievo nei confronti della matematica.

Infine ci piace concludere questo lavoro con un pensiero della professoressa Fandiño Pinilla M. I.: *chi meglio di una persona competente è in grado di valutare la propria effettiva competenza?* (Fandiño, 2003, pag. 279)

Bibliografia

Ajello A. M., (2002). Apprendimento e competenza: un nodo attuale. *Scuola e città*, volume 1, Firenze : La Nuova Italia, http://www.edscuola.it/archivio/antologia/scuolacitta/ajello.pdf.

Beltrame S., Torretta G. (2008). Dal gioco alla dimostrazione. In: D'Amore B., Sbaragli F. (Eds) (2008). *Didattica della matematica e azioni d'aula.* Atti del XXII Convegno Nazionale: *Incontri con la matematica*. Castel San Pietro Terme (Bo), 7-8-9 novembre 2008. Bologna: Pitagora. 197-200. ISBN: 88-371-1746-9.

Brousseau G., D'Amore B. (2008). I tentativi di trasformare analisi di carattere meta in attività didattica. Dall'empirico al didattico. In: D'Amore B., Sbaragli F. (Eds) (2008). *Didattica della matematica e azioni d'aula.* Atti del XXII Convegno Nazionale: *Incontri con la matematica*. Castel San Pietro Terme (Bo), 7-8-9 novembre 2008. Bologna: Pitagora. 3-14. ISBN: 88-371-1746-9.

Carugati F. (2008). Le scuole che vorremmo. In: D'Amore B., Sbaragli F. (Eds) (2008). *Didattica della matematica e azioni d'aula.* Atti del XXII Convegno Nazionale: *Incontri con la matematica*. Castel San Pietro Terme (Bo), 7-8-9 novembre 2008. Bologna: Pitagora. 215-219. ISBN: 88-371-1746-9.

Castoldi M. (2009). *Valutare le competenze. Percorsi e strumenti.* Roma: Carocci Editori.

Castoldi M. (2013). *Curricolo per competenze: percorsi e strumenti.* Roma: Carocci Editori.

Caviglia F. (2008). Competenze trasversali e discipline: osservazioni a margine delle indagine OCSE-PISA. In: D'Amore B., Sbaragli F. (Eds) (2008). *Didattica della matematica e azioni d'aula.* Atti del XXII Convegno Nazionale: *Incontri con la matematica*. Castel San Pietro Terme (Bo), 7-8-9 novembre 2008. Bologna: Pitagora. 201-204. ISBN: 88-371-1746-9.

D'Amore B. (2001). *Didattica della matematica.* Bologna: Pitagora.

D'Amore B., Maier H. (2002). Produzioni scritte degli studenti su argomenti di matematica (TEPs) e loro utilizzazione didattica. *La matematica e la sua didattica.* 2, 144-189

D'Amore B., Godino J. D., Arrigo G., Fandiño Pinilla M. I. (2003). *Competenze in matematica.* Bologna: Pitagora.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I. (2007). *Le didattiche disciplinari.* Trento: Erickson.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I., Marazzani I., Sbaragli S. (2008). *La didattica e le difficoltà in matematica*. Trento: Erickson. ISBN: 978-88-6137-238-2.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I., Iori M. (2013). *Primi elementi di semiotica. La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica.* Bologna: Pitagora.

Di Pietro F. (2012). Le competenze trasversali nella certificazione dell'obbligo scolastico. *Rivista scuola IaD,* numero 6, Roma, http://rivista.scuolaiad.it/n06-2012/le-competenze-trasversali-nella-certificazione-dellobbligo-scolastico.

Fandiño Pinilla M. I. (2002). *Curricolo e valutazione in matematica.* Bologna: Pitagora.

Fandiño Pinilla M. I. (2003). «Diventare competente», una sfida con radici antropologiche. La matematica e la sua didattica. Volume 17, numero 3. Bologna: Pitagora. 260 – 280

Fandiño Pinilla M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica. Valutare e intervenire in modo mirato e specifico.* Trento: Erickson.

Iori M. (2008). Epistemologia dell'insegnante di matematica sula sua conoscenza professionale. In: D'Amore B., Sbaragli F. (Eds) (2008). *Didattica della matematica e azioni d'aula.* Atti del XXII Convegno Nazionale: *Incontri con la matematica*. Castel San Pietro Terme (Bo), 7-8-9 novembre 2008. Bologna: Pitagora. 224-227. ISBN: 88-371-1746-9.

Marino T. (2002). Argomentare, congetturare e dimostrare. *Quaderni di ricerca in didattica*, supplemento al n10, Palermo, http://math.unipa.it/~grim/PA02cap2.pdf. Capitolo 2.

Menna L. (2009). Argomentare e dimostrare in registri semiotici diversi. *Quaderni di ricerca in didattica*. 19. http://dipmat.math.unipa.it/~grim/ quaderno19.htm. 253-262.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (MIUR) (2012). Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione. *Annali della Pubblica Istruzione.* Firenze: Le Monnier. 60-65.

Pellerey M. (2004). *Competenze individuali e portfolio*. *ETAS*. 12.

Radford L., Dermers S. (2006). *Comunicazione e apprendimento*. Bologna: Pitagora.

Roegiers X. (2000). *Une pédagogie de l'intégration.* Bruxelles: De Boeck Université.

Santi G. (2008). Concettualizzazione e senso in matematica; la prospettiva semiotica-culturale. In: D'Amore B., Sbaragli F. (Eds) (2008). *Didattica della matematica e azioni d'aula.* Atti del XXII Convegno Nazionale: *Incontri con la matematica*. Castel San Pietro Terme (Bo), 7-8-9 novembre 2008. Bologna: Pitagora. 209-212. ISBN: 88-371-1746-9.

Vygotskij L. S. (1987). *Il processo cognitivo.* Torino: Bollati Boringhieri.

3. Il gioco «UnoperUno», ossia una «sfida contadina[1]»

Stefan Meyer e Cecilia Rossi[2]

The so called «War» is one of several multiplication games portrayed by Kamii & Anderson (2003). This article outlines rules, levels and complexity of the game from additional to multiplicative thinking. Possibilities of schooling mathematical and social thinking and memorization in a third class of an elementary school are described.

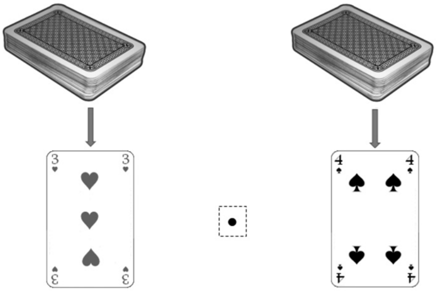
Il gioco

La *Sfida contadina* è un semplice gioco da farsi con le normali carte da gioco. (Kamii & Anderson, 2003, p. 139 e segg.). Nella versione tradizionale i due giocatori dispongono di un mazzetto di carte coperte, che non possono assolutamente vedere.

I due giocatori scoprono contemporaneamente la carta che si trova in cima al proprio mazzo. Chi possiede la carta più alta prende tutte e due le carte e le mette insieme alle sue. Se le due carte avessero uguale valore, ciascuno si tiene la sua. Alla fine vince chi ha più carte.

Una variante del gioco può essere la seguente: scoperte le due carte, invece di stabilire la carta più alta si invitano i giocatori a dire il prodotto dei due valori. Il primo che dice il risultato corretto prende le due carte.

La figura 1 riproduce una situazione di gioco ($3 \cdot 4 = 12$).



1. Tratto da Meyer S. (2016). Einmaleins-Kriegerlis. Übersetzung und Kommentar von *Multiplication Games* (C. Kamii). Traduzione in tedesco e commenti di Stefan Meyer, docente HfH, 2016. Traduzione italiana di Gianfranco Arrigo.
2. SHP (pedagogista curativa specializzata) Poschiavo / Li Curt

All'inizio si possono usare solo le carte da 1 a 5, poi gradualmente si possono aggiungere quelle che valgono 6, 7, 8 e 9.

Commento

Le autrici Kamii e Anderson (2003) nel loro commento didattico sostengono che in questi giochi è importante lasciare libera scelta sia del tipo di carte e di gioco sia del partner. Si possono anche usare le carte del gioco *Elfer Raus*[3] I bimbi della classe sperimentale, una terza elementare, hanno giocato appunto con queste carte. È stato decisivo il fatto che gli insegnanti giocassero assieme ai bambini e notassero i momenti significativi.

Gli insegnanti avevano il compito di offrire nuovi stimoli, e di ottimizzare, gradualmente nel tempo, gli apprendimenti. Ciò veniva fatto con l'introduzione, ogni due settimane, di nuovi moltiplicatori più grandi. Dopo un mese, giocando in modo differenziato, sono stati proposti dei livelli di gioco per la classe intera.

Un'altra variante consiste nell'inserire nel mazzo dei moltiplicatori le carte da poker 2, 5 e 10 (per ogni colore). Questo lo si accompagna a un mazzo dei moltiplicandi costituito da carte di *Elfer Raus* (da 1 a 19). Si gioca in due. Ogni giocatore scopre una carta da ciascun mazzo (per esempio, 5 e 11). Se dice per primo 55, può conservare la carta di *Elfer Raus*, mentre quella dei moltiplicatori torna in fondo al mazzo. Ogni carta guadagnata significa 1 punto. I bimbi stessi possono contare le carte guadagnate.

Si può giocare anche con tre o quattro giocatori, ciascuno con il proprio mazzo. A un segnale i giocatori scoprono contemporaneamente una carta. Chi per primo dice la somma o il prodotto corretto, guadagna le 4 carte. La vincita è cospicua!

È importante che gli insegnanti promuovano discussioni metacognitive con l'intera classe, sulle strategie e sulla comprensione delle relazioni moltiplicative. Simili momenti di riflessione in comune dovrebbero avvenire regolarmente. Si potrebbero svolgere anche come laboratorio di matematica (Wittmann & Müller, 2009), durante il quale si cerca di esaminare coppie di fattori legate a determinati numeri naturali, come per esempio (1;16), (2;8), (3;6), (4;4), (8;2), (6;3), (8;2), (2;16), ecc.

Prima finestrella

Osservazioni sulla «Sfida contadina» in una 3ª classe elementare del Comune di Poschiavo

Il gioco è stato introdotto e sperimentato in una classe formata da 16 allievi e allieve secondo le prescrizioni di Kamii & Anderson (2003). Il tempo del gioco è stato separato dalla discussione evitando evitando così possibili confusioni didattiche.

Esperienza «vince il più veloce»: moltiplica due carte!

La classe ha deciso di giocare in coppie scelte liberamente. La maggior parte delle coppie usa le carte con il valore da 1 a 10; due coppie decidono di usare una parte delle carte del gioco dell'11 con il valore da 1 a 15.

3. Si tratta di un gioco molto diffuso nella Svizzera tedesca. Le 80 carte portano i valori da 1a 20, equamente ripartite in quattro colori: rosso, giallo, verde e blu.

Discussione in plenaria

Si discute sul nome del gioco che inizialmente si chiamava «guerra»; questa denominazione non è condivisa da tutti per cui si apre una parentesi sul tema guerra e sui giochi di guerra. Infine si propone di chiamarlo «gioco di sfida» o «battaglia con le carte». Per molte coppie di allievi alcuni calcoli risultano ancora difficili, così si decide di esercitarli nella prossima fase di gioco. Si scelgono i calcoli 6·7 e 7·8, così come tutti i numeri quadrati (3·3, 5·5…).

Alcuni giocatori che conoscono già bene tutte le tabelline vogliono aumentare la difficoltà del gioco; si attribuiscono valori più elevati a tre carte, fante (11), regina (12) e re (13).

Apprendimento mnemonico

Discussioni metacognitive possono anche concernere tecniche di memorizzazione. (Per esempio, «come avete fatto per memorizzare un certo prodotto?», «quali prodotti vorreste in ogni caso memorizzare per applicarli al gioco?»).

L'insegnante ha l'occasione di costruire proposte differenziate di apprendimento che nascono dalle esperienze di gioco e da altre vissute nelle ore di matematica (Meyer, 2004; Friedli, 2009). Gli allievi possono coscientemente decidere di studiare a memoria determinati prodotti. Se un bambino impara la tabellina 7·8=56, per esempio visualizzandola, dovrebbe saperla recitare a occhi chiusi o riprodurla alla lavagna. Un po' più tardi si potrebbe chiedergli che cosa vede in «7·8». Si controlla la correttezza della sua risposta: «Vedo 7·8=56». Dopo alcuni minuti gli viene di nuovo chiesto «Cosa vedi in 7·8=?» Poi per 20 minuti si lascia che il bambino si occupi d'altro, dopo di che gli si chiede ancora «Cosa vedi in 7·8=?» Se la risposta giunge immediatamente possiamo parlare di memorizzazione duratura.

Analogamente avviene con gli allievi che preferiscono memorizzare auditivamente. In questi casi i prodotti vengono suggeriti e richiamati dalla memoria oralmente.

L'attenzione e l'interesse dell'insegnante a una memorizzazione correlata e sistematica è un decisivo elemento motivante per gli allievi, che devono poter scegliere quali prodotti memorizzare per poi, in un altro giorno, applicarli al gioco. (Friedli, 2009).

Kamii e Anderson (2003) hanno effettuato, alla fine dell'anno scolastico, test di velocità nei quali praticamente tutti i bambini sono stati in grado di svolgere il gioco «UnoperUno» con grande successo.

Seconda finestrella

Esperienza «vince il più veloce»: moltiplica due o tre carte!

Nella 3ª classe citata si formano coppie e anche gruppi di tre giocatori.

Discussione in comune

Due gemelle sono diventate esperte nel gioco della moltiplicazione e questo è dovuto anche al fatto che a casa si sfidano spesso con le carte. In generale tutti i giocatori sono sorpresi del loro miglioramento nel memorizzare le tabelline. Dal punto di vista della socializzazione è aumentato il rispetto della regola di controllare il proprio volume di voce al fine di non gridare. Per alcuni ragazzi il senso di competitività rimane alto.

Conclusione

La *Sfida contadina* è un gioco che, a partire dalla scuola dell'infanzia, favorisce lo svolgimento di esperienze di apprendimento significative: dall'aspetto ordinale del numero alla seriazione come anche all'addizione e alla moltiplicazione. Le osservazioni mostrano come i bambini applicano gli apprendimenti raggiunti giocando a «UnoperUno» pragmaticamente per far fronte all'aumento delle richieste del gioco stesso, proprio come hanno fatto sin dall'inizio. La discussione in comune con gli allievi raggiunge finalità pragmatiche e matematiche, che Freudenthal chiama *insightful learning*: «There is, however, a way of training – including memorisation – where every little step adds something to the treasure of insight: training is integrated with insightful learning.» (Freudenthal, 1991, p.114).

Bibliografia

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Friedli E. (2009). Aufbau und Training von arithmetischen Basiskompetenzen in stark heterogenen Klassen. *Unveröff. Unterrichtsprojekt, Interkantonale Hochschule für Heilpädagogik*. Zürich.

Kamii C. (1994). *Young children continue to reinvent arithmetic. 3rd Grade*. New York: Teachers College Press.

Kamii C. e Anderson C. (2003). Multiplication Games: How We Made and Used Them. *Teaching Children Mathematics,* 10(3), 135-141.

Meyer S. (2004). 1 + 1 und 1x1. Verstehen und Wissen automatisieren. *Unveröff. Reader Hochschule für Heilpädagogik*. Zürich.

Wittmann E. Ch. e Gerhard N. Müller G.N. (2009). Blitzrechenoffensive! Anregungen für eine intensive Förderung mathematischer Basiskompetenzen. Consultabile in:

www.mathematik.uni-dortmund.de/didaktik/mathe2000 [20.01.2016]

Meyer S. (2016). Einmaleins-Kriegerlis. Übersetzung und Kommentar von «Multiplication Games» (Kamii & Anderson, 2003). Consultabile in:

http://www.interview.hfh.ch/page016.htm [05.02.2016]

Meyer S. e Rossi, C. (2016). *Einmaleins-Kriegerlis. Übersetzung mit Kommentar und Erfahrungsbericht von «Multiplication Games» (Kamii & Anderson, 2003).* Verfügbar unter: http://www.interview.hfh.ch/page016.htm [05.02.2016]

4. La stampante 3D come artefatto di mediazione semiotica[1]

Gabriele Caffi

This report presents/summarizes an activity performed with 13 ninth grade (basic course) pupils who had to deal with various problems concerning scale representation and relationships; drawing software and a 3D printer were used. After working on the project in the IT classroom, the pupils were asked to pretend they were architects measuring the size of the buildings in Stabio town square, in order to draw and print out a 3D-scale version of the square.

1. Introduzione

In questi primi due anni d'insegnamento ho avuto modo di gestire due corsi base in matematica, un compito che ho vissuto con interesse ma che però ho anche percepito come impegnativo. Ciò che ho sempre trovato importante è di cercare di dare un senso pratico ai contenuti che si trasmettono a lezione, cercando di motivare gli studenti attraverso situazioni problema che si riallacciassero alla realtà. È sulla base di questa idea che è nato il presente lavoro di diploma, che unisce il concetto filosofico del costruzionismo di Seymour Papert con il mondo delle tecnologie (per il quale nutro un particolare interesse).

Questa ricerca mira a verificare l'efficacia della stampante 3D e di un software di disegno chiamato *Tinkercad*, come artefatti di mediazione semiotica per affrontare situazioni legate ai concetti di rapporti e rappresentazioni in scala.

La parte principale di questo percorso è stata svolta in un contesto di laboratorio, la cui importanza è, fra l'altro, ben evidenziata nel «Piano di Studio della scuola dell'obbligo ticinese» (2015) come «spazio privilegiato per lavorare sui nuclei fondanti della disciplina».

2. Quadro Teorico

2.1. Il costruzionismo di Seymour Papert

Il costruzionismo di Seymour Papert sostiene l'idea secondo la quale il processo di apprendimento è più efficiente se il discente è coinvolto direttamente nella produzione di oggetti concreti.

1. Sintesi del lavoro di diploma per il *Master of arts in secondary education*, DFA, anno accademico 2015/2016. Relatore: Silvia Sbaragli.

Nella vita reale, che cosa se ne fanno gli allievi di scuola media della matematica appresa a lezione?[2] Una domanda simile se l'è posta Papert in una sua conferenza tenuta negli anni ottanta. Egli sostiene che parte dei problemi legati all'apprendimento della matematica a scuola sta nel fatto che la matematica che si studia non è la stessa matematica che è presente nel mondo reale, in cui ad esempio scienziati, ingegneri o banchieri ne fanno uso. Papert suggerisce pertanto di orientare le lezioni di matematica in modo che gli allievi possano fare qualcosa, cosicché si sentano un po' scienziati, ingegneri o banchieri, o come chiunque utilizzi la matematica costruttivamente per costruire qualcosa.

«Con Papert, il costruttivismo stringe un'alleanza forte con le tecnologie e l'informatica.» (Capponi M., 2008). Lui stesso, quando negli anni sessanta lavorava al MIT, realizzò il LOGO, il noto linguaggio di programmazione comprensibile e utilizzabile anche dai bambini di scuola elementare. Il suo famoso motto «dovrebbe essere il bambino a programmare il computer, e non il computer a programmare il bambino» (ibidem), voleva appunto ricordare che l'ambiente tecnologico e informatico (in cui svolgerò buona parte del percorso didattico di questo lavoro) deve avere come obiettivo quello di favorire un apprendimento attivo. La seguente citazione descrive meglio cosa s'intende per apprendimento attivo:

«Secondo Papert, i bambini, ma anche gli adulti, imparano meglio quando è data loro la possibilità di addentrarsi in un'esplorazione nella quale essi stessi costruiscono da soli i propri progetti, provano schemi, manipolano nozioni e idee. In altre parole, i bambini devono passare da uno status di «consumatori» di informazioni, in quello di «produttori» di conoscenza. (Capponi, 2008).

2.2. Il laboratorio

Nel «Piano di Studio della scuola dell'obbligo ticinese» si mette in risalto l'idea per cui «la conoscenza scientifica debba essere considerata come il frutto di una costruzione operata dagli esseri umani che apprendono e non come un sapere in sè».

Anche il documento «La scuola che verrà» (2015) evidenzia l'importanza del laboratorio. In particolare, in merito al laboratorio di matematica (pag. 16) si legge quanto segue:

«Il laboratorio di matematica è uno *spazio didattico* volto alla costruzione di significati degli oggetti matematici. L'ambiente che si respira è in qualche modo assimilabile a quello della bottega rinascimentale, nella quale si impara facendo e vedendo fare, interagendo personalmente con le attività proposte e comunicando con gli altri.»

L'importanza del laboratorio quindi non si limita alla singola disciplina, ma coinvolge anche i processi di competenza trasversali dell'allievo. Nel laboratorio l'allievo sperimenta, ipotizza, formula congetture e si confronta con i compagni argomentando le proprie idee.

Bolondi (2006) sottolinea l'importanza in un laboratorio di iniziare dal problema e non dalla sua soluzione. La mentalità con cui bisognerebbe affrontare il laboratorio di matematica è quella di partire da un problema (oppure da un'osservazione,

2. Tratta da una conferenza di Papert (1980) dal titolo «*Constructionism vs Instructionism*», http://www.papert.org/articles/const_inst/const_inst1.html.

o da un insieme di dati), di tentare di costruirne una spiegazione razionale, una modellizzazione e di riorganizzarla in una teoria. Lo stesso autore suggerisce di favorire la collaborazione fra gli studenti facendoli lavorare su problemi concreti e vicini alla loro vita quotidiana, di modo che anche quelli in difficoltà possano fornire contributi validi che vengano condivisi dagli altri.

Inoltre lo stesso Bolondi sostiene che, in un contesto di laboratorio di «tutto ciò che si fa ha un senso, anche gli errori» (ibidem). Nel laboratorio è importante dedicare momenti che permettano allo studente di commettere errori, e in seguito di affrontarli costruttivamente per trovare la strada giusta. Ricorda anche che gli allievi, di fronte a un ostacolo in matematica, procedono per tentativi del tutto casuali: applicano formule che non c'entrano col problema, eseguono operazioni senza saperne il perché, o semplicemente procedono senza alcun senso. La sua seguente citazione risalta l'importanza della dimensione costruttiva dell'errore in un contesto di laboratorio:

«[Gli allievi] Si aspettano che la soluzione di un problema esca come un coniglio dal cilindro del prestigiatore, forse perché troppe volte, noi insegnanti, gliela abbiamo fatta apparire in questo modo. In un laboratorio, imboccare una strada sbagliata spesso è la chiave per individuare, riflettendo, la strada giusta.» (ibidem).

2.3. Artefatti e strumenti

Il concetto di «artefatto», che in questo lavoro di ricerca è molto presente, non si riferisce unicamente a oggetti concreti ma va inteso in senso più ampio. Esso infatti comprende un insieme di «oggetti» anche molto diversi tra di loro, come ad esempio: strumenti musicali scientifici o informatici, suoni, gesti, testi e libri, penne e matite, … tutti caratterizzati dal fatto di offrire un contributo a livello cognitivo attraverso un loro utilizzo pratico. Nel libro di D.A. Norman «Le cose che ci fanno intelligenti»[3] (1993), viene rimarcata questa caratteristica degli artefatti (definiti da lui artefatti cognitivi) distinguendo così due aspetti che costituiscono un artefatto:

– un aspetto *pratico*, che permette di modificare l'ambiente circostante (in questo caso si parla di orientamento verso l'esterno);
– un aspetto *riflessivo*, che consente a chi ne fa uso di sviluppare l'intelligenza (e in questo caso si parla di orientamento verso l'interno).

In generale, i passaggi dall'aspetto pratico a quello riflessivo e viceversa possono essere considerati uno dei motori principali dell'evoluzione e del progresso (Bartolini Bussi, Mariotti, 2008).

Una possibile classificazione delle varie tipologie di artefatti è stata studiata e identificata da Wartofsky (1979), il quale suddivide gli artefatti in tre categorie: primari, secondari e terziari.

In particolare:

– Gli artefatti primari riguardano gli strumenti tecnici orientati verso l'esterno. Esempio: il compasso.
– Gli artefatti secondari concernono tutti gli strumenti psicologici orientati verso l'interno, quindi destinati al mantenimento e alla trasmissione di

3. Traduzione dall'inglese: Norman D.A. (1993). *Things that make us smart*.

particolari competenze tecniche acquisite. Esempi: scrittura, schemi, tecniche di calcolo, …

– Gli artefatti terziari (ad esempio le teorie matematiche) sono un sistema di regole formali che hanno perso ogni aspetto pratico legato allo strumento.

Il compito del docente all'interno di un percorso didattico è di gestire il passaggio da un artefatto di tipo primario a quello di tipo terziario, sfruttando gli artefatti secondari. Nel percorso didattico di questo lavoro di ricerca vi sono molti artefatti primari in gioco: la stampante 3D, un computer, un software[4], modellini in scala ottenuti con la stampante 3D e alcuni strumenti di misura quali ad esempio riga e squadra. L'obiettivo del lavoro è ottenere artefatti terziari relativi ai concetti in gioco.

Negli ultimi decenni, con l'avvento delle tecnologie informatiche, è stata posta particolare attenzione sulla delicatezza del rapporto strumento - utilizzatore, sia in ambiente lavorativo che in quello scolastico. Nel 1995 P. Rabardel pubblicò un volume dal titolo «Les hommes et les technologies – Approche cognitive des instruments contemporains», principalmente dedicato all'approccio alle nuove tecnologie. Esso si basa sulla differenza fondamentale tra artefatto e strumento. Mentre per l'autore l'artefatto è l'oggetto materiale o simbolico di per sé, lo strumento è definito come un sistema costituito dall'artefatto (o parte di esso) e dagli schemi d'uso costruiti dall'individuo. Rabardel introduce il concetto di genesi strumentale, che descrive il processo di elaborazione e di evoluzione degli strumenti e che è il risultato di una combinazione tra il processo di *strumentalizzazione* (che riguarda la comparsa e l'evoluzione delle diverse componenti dell'artefatto) e il processo di *strumentazione* (che riguarda la comparsa e lo sviluppo degli schemi d'uso). L'immagine seguente sintetizza tutto ciò in uno schema.

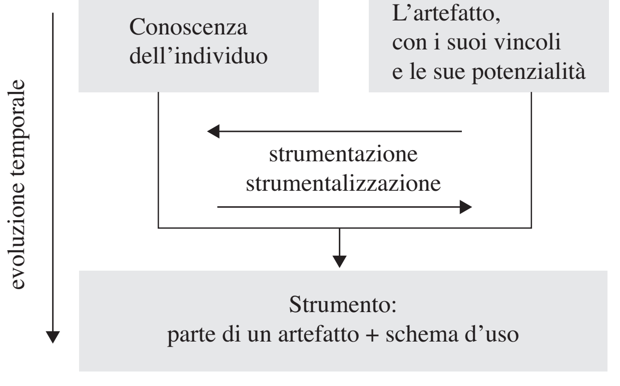


Figura 1. Schema di una genesi strumentale[5]

4. Il principale software che verrà utilizzato dagli allievi per costruire dei modelli tridimensionali al computer si chiama Tinkercad (https://www.tinkercad.com).
5. Tratto da: Maschietto M., Trouche L. (2009). *Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: the productive notion of mathematics laboratories.* Springer. pag. 5.

Rabardel e Samurçay (2001) sottolineano come l'uso di uno strumento non sia mai neutro, ma implichi una riorganizzazione delle strutture cognitive. Nell'approccio strumentale di Rabardel la dimensione sociale consiste nell'interazione tra gli schemi d'uso individuali e gli schemi sociali. Le potenzialità di uno strumento non sono pertanto strettamente legate allo strumento in sé, ma dipendono dall'interazione realizzata in classe sotto la guida dell'insegnante.

2.4. La mediazione semiotica nell'ottica del quadro vygotskiano

Vygotskij considera la funzione degli artefatti cognitivi come elemento principale dell'apprendimento. Dato che la prospettiva vygotskiana include una dimensione evolutiva, essa è particolarmente indicata nello studio dell'uso degli artefatti nel campo dell'educazione. In particolare, le teorie di Vygotskij hanno evidenziato come, all'interno di un contesto scolastico, l'evoluzione della cognizione umana sia il risultato dell'interazione sociale e culturale. I suoi costrutti teorici di riferimento per questo lavoro di ricerca sono i seguenti:

– la zona di sviluppo prossimale (ZSP);
– l'interiorizzazione;
– la mediazione semiotica;
– la piazza di Stabio.

La zona di sviluppo prossimale, che è una zona metaforica in cui si modella il processo di apprendimento attraverso l'interazione sociale, è definita da Vygotskij come:

«la distanza tra il livello reale di sviluppo del soggetto determinato dalla capacità di risolvere da solo un problema e il livello di sviluppo potenziale determinato dalla capacità di risolvere il problema sotto la guida dell'adulto o in collaborazione con un suo coetaneo più capace.» (Bartolini Bussi, Mariotti, 2008).

Il percorso didattico di questo lavoro di ricerca è costruito in modo tale che gli allievi possano lavorare nella loro ZSP. In accordo a questa definizione, infatti, una modalità di lavoro a gruppi in cui vi è una collaborazione e una cooperazione tra individui che perseguono uno scopo comune, aiuta lo sviluppo cognitivo. Nella ZSP lo sviluppo cognitivo è modellato dal processo di interiorizzazione.

Il processo di interiorizzazione viene definito da Vygotskij come una ricostruzione interna (su un piano intrapsicologico) di un processo di interazione esterno (interpsicologico). Esso descrive il processo di costruzione della conoscenza individuale come generato da esperienze sociali condivise. (ibidem).

Nel processo esterno, ad esempio quando gli allievi vengono sottoposti a un'interazione sociale, vi è una dimensione comunicativa che impone la produzione e l'interpretazione dei segni. Pertanto, l'analisi del processo di interiorizzazione va orientata sull'analisi del funzionamento del linguaggio naturale e di altri sistemi semiotici usati nella società.

Vygotskij identifica un'analogia tra l'uso dei segni (non solo linguistici, ma ad esempio: schemi, diagrammi, disegni, …) come strumenti psicologici per risolvere un dato problema (in cui bisogna ricordare, confrontare, scegliere e quant'altro) e l'uso degli artefatti come strumenti che hanno un'utilità pratica nel lavoro.

Stando a quanto descritto nel quadro vygotskiano, durante la fase di svolgimento di un compito, avviene l'uso sociale di artefatti, che produce segni condivisi. Questi segni non sono solo implicati direttamente nella risoluzione del compito (affrontato con l'artefatto), ma possono anche essere legati al contenuto che deve essere mediato. Pertanto tra i segni e un artefatto sussiste una relazione molto forte.

In questo lavoro di ricerca gli artefatti primari che entrano in gioco hanno una caratteristica molto importante: sono dotati di polisemia. Ossia, l'artefatto è considerato sia lo strumento (nel senso dato da Rabardel) che aiuta a risolvere un dato problema, sia il veicolo (in senso metaforico) che trasporta una data conoscenza matematica nell'allievo. Si tratta perciò di inserire lo studente all'interno di questo sistema in cui artefatto, compito e conoscenza matematica ne fanno parte.

L'obiettivo dell'inserimento di un artefatto all'interno di un'attività è di costruire significati matematici. Tuttavia, come ricordano Bartolini Bussi e Maschietto (2007), non è l'artefatto in sé a favorire un'evoluzione a livello cognitivo, ma l'uso che se ne fa. Ecco quindi che l'insegnante risulta decisivo nel ruolo di mediatore che utilizza l'artefatto per mediare i contenuti matematici agli studenti, ed è per questo motivo che l'insegnante viene definito un mediatore culturale e che gli artefatti vengono definiti strumenti di mediazione semiotica.

3. Domande e ipotesi di ricerca

3.1. Le domande di ricerca

D1. Quali sono le competenze degli allievi all'ingresso di una quarta media corso base, relative ai concetti di stima di lunghezze, di rapporto e di rappresentazione in scala?

D2. Dopo un percorso laboratoriale in cui si sfrutta la stampante 3D come artefatto di mediazione semiotica, le competenze acquisite dagli allievi permettono di migliorare la stima di lunghezze e di risolvere in modo più consapevole ed efficace problemi legati al concetto di rapporto e di rappresentazione in scala?

3.2. Le ipotesi di ricerca

I1. Si ipotizza che buona parte degli allievi abbia difficoltà ad affrontare situazioni legate ai concetti di rapporto e di rappresentazioni in scala, in cui si chiede di utilizzare una data scala di grandezza per trasformare le misure reali di un oggetto (o di una costruzione) nelle misure del modellino in scala, e viceversa. Si ipotizza inoltre che la maggior parte degli allievi abbia difficoltà a stimare in modo adeguato lunghezze di oggetti legati al vissuto o di costruzioni.

I2. Si ipotizza che l'attività all'esterno, in cui si stimano e poi si misurano direttamente le lunghezze principali di alcuni edifici, possa contribuire a migliorare il senso di stima degli allievi. Inoltre, si ipotizza che l'utilizzo della stampante 3D nel percorso didattico possa essere uno stimolo che arricchisce di senso e di significato i concetti coinvolti e che consenta alla maggior parte degli allievi di risolvere in modo più efficace situazioni che coinvolgono tali ambiti.

4. Metodologia di ricerca

4.1. Introduzione

Per rispondere alle domande D1 e D2 è stata progettata una ricerca di tipo qualitativo, nella quale l'oggetto di studio è il singolo allievo nella sua specificità, unicità e totalità e nelle interazioni con la classe. Come ricordano gli autori Coggi e Ricchiardi, (2005) l'obiettivo di una ricerca qualitativa è di «comprendere la realtà educativa indagata e approfondirne le specificità, mediante il coinvolgimento e la partecipazione personale del ricercatore».

4.2. Campione di riferimento

Il campione di riferimento di questo lavoro di ricerca è composto da 13 allievi di una quarta corso base della Scuola media di Stabio, una classe piuttosto eterogenea dal punto di vista delle competenze matematiche.

4.3. Fasi di ricerca

L'intero percorso di ricerca può essere riassunto in quattro fasi principali. La prima prevede la raccolta di preconoscenze degli allievi sugli argomenti oggetto di tale lavoro, attraverso un questionario suddiviso e somministrato in varie parti. La seconda fase è impostata prevalentemente in aula informatica in un contesto di laboratorio, dove vengono proposti i seguenti argomenti chiave: rapporti, grandezze in scala e stime di lunghezze. La terza fase viene svolta all'esterno (nella piazza principale del comune di Stabio): agli allievi viene chiesto di stimare e poi misurare le principali dimensioni di alcuni edifici per poi disegnarli in scala al computer e stamparli successivamente in 3D. Nella quarta e ultima fase viene sottoposto agli allievi un questionario finale impostato sugli stessi argomenti del primo, in modo da ottenere informazioni sull'ampliamento di competenze degli allievi.

4.3.1. Raccolta dati

Inizialmente è stato somministrato un questionario al campione di riferimento, suddiviso in modo tale da poter essere somministrato in quattro lezioni e da non occupare più di 20-30 minuti in ogni lezione.

In caso di risposte ai questionari non chiare o comunque che richiedano un approfondimento, sono state svolte delle interviste semistrutturate individuali per meglio comprendere queste risposte.

4.3.2. Laboratorio

La seconda parte, la più corposa, si è svolta in aula informatica. Sono state presentate agli allievi la stampante 3D e le informazioni più rilevanti sulla stampa 3D. In seguito, con le tempistiche descritte sotto, gli allievi sono stati alfabetizzati circa l'uso del software *Tinkercad* con cui si sono esercitati a rappresentare in scala oggetti della realtà.

1. *Introduzione, tutorial e prime situazioni (1 lezione da 2h)*

Agli allievi è stata presentata la stampante 3D e spiegato il funzionamento. In seguito gli studenti hanno creato un proprio account sul sito internet <www.tinkercad.com> e hanno appreso il corretto funzionamento degli strumenti principali del software Tinkercad: muovere la telecamera sul piano virtuale di lavoro, creare solidi geometrici, modificarne le dimensioni e l'orientamento, utilizzare le operazioni «Group» e «Ungroup».

2. *Tre palazzi e il Soma Cube (1 lezione da 2h)*

L'intera classe è stata suddivisa in due gruppi. Il primo ha cominciato a disegnare in Tinkercad tre palazzi ciascuno con una scala differente. Il secondo invece ha lavorato su sette pezzi di un rompicapo chiamato «Soma Cube». Ogni membro del gruppo ha preso direttamente le misure di uno dei sette pezzi e lo ha disegnato in scala 1 : 0,8 sul software. Successivamente il primo gruppo ha lavorato sul Soma Cube mentre il secondo sui tre palazzi.

3. *Discussione sul Soma Cube e rappresentazione in scala del proprio banco e del proprio computer (1 lezione da 1h)*

Alla classe sono stati mostrati tutti i pezzi del Soma Cube disegnati da loro e stampati in 3D[6]. In seguito si è discusso con la classe sugli errori che gli studenti hanno commesso nella fase di disegno dei loro pezzi. Nella seconda parte della lezione la classe è stata suddivisa in tre gruppi, ciascuno dei quali ha dovuto rappresentare in tre scale diverse sul software Tinkercad una versione modellizzata dal punto di vista geometrico del loro computer e del loro banco.

4. *Alcuni problemi con artefatti stampati in 3D e disegno di una casa ideata (1 lezione da 2h)*

Dal momento che gli artefatti stampati in 3D non erano sufficienti per tutta la classe, gli allievi sono stati suddivisi in due gruppi. Il primo gruppo ha dovuto risolvere dei problemi legati alle grandezze in scala con l'aiuto di otto oggetti stampati in 3D (di cui sei disegnati da alcuni di loro nella lezione precedente). Essi hanno inizialmente svolto i calcoli individualmente, poi si sono confrontati in piccoli gruppi e verso la fine della prima ora (della seconda per il secondo gruppo) con il docente. Il secondo gruppo, invece, ha espresso la propria creatività disegnando sul software Tinkercad il modellino di una casa ideata da loro. L'unico vincolo da rispettare era di fare in

6. Dato che in media sono stati necessari circa 40 min per stampare ogni singolo pezzo, la stampa di tutti i pezzi del *Soma Cube* è avvenuta nei due giorni successivi alla lezione *2*.

modo che il loro progetto fosse in scala. Successivamente il primo gruppo ha lavorato sul progetto della casa mentre il secondo sugli otto oggetti stampati.

4.3.3. Attività all'esterno (2 lezioni da 2h)

Agli allievi è stato chiesto di rilevare le misure dirette di 13 edifici che circondano la piazza principale di Stabio, secondo una modalità di lavoro a gruppi. Successivamente, gli studenti hanno disegnato individualmente in Tinkercad gli stessi edifici in scala, che sono stati in seguito stampati in 3D. Le principali fasi di lavoro di quest'attività sono state le seguenti:

1. Formazione dei gruppi.

Sono stati formati gruppi di 3-3-3-4 allievi, cercando di bilanciare le potenzialità cognitive di ogni gruppo combinando allievi con competenze diverse. Ad ogni gruppo sono stati assegnati tanti edifici quanti il numero dei membri del gruppo.

2. Stima delle dimensioni degli edifici.

All'interno di ogni gruppo, ogni allievo ha stimato individualmente le dimensioni principali degli edifici assegnati al proprio gruppo, scrivendo il tutto su un foglio. Quando tutti i componenti di un gruppo hanno consegnato le loro stime al docente, sono passati alla fase successiva.

3. Misurazione delle dimensioni degli edifici.

Ogni gruppo ha rilevato, con opportuni strumenti di misurazione che gli sono stati forniti (un flessometro da 5 m, un distanziometro laser da 15 m e dei fogli su cui scrivere), le misure dirette principali degli edifici che sono stati loro assegnati. Per aiutare gli allievi a superare la difficoltà legata all'irregolarità del contorno delle basi delle case e all'impossibilità di rilevare tutte le misure del contorno di alcune case, è stato consegnato ad ogni membro del gruppo un mappale con le dimensioni in scala dei contorni degli edifici in questione[7]. Inoltre, per ridurre gli errori di misurazione, tutti i membri del gruppo hanno misurato i 3-4 edifici assegnati a quel gruppo, in modo da avere dei confronti con i compagni, per escludere eventuali errori grossolani di misura. Quando tutti i membri di un gruppo hanno terminato di rilevare le dimensioni degli edifici, si sono annunciati al docente per poter passare alla fase successiva.

4. Assegnazione degli edifici.

Il docente ha assegnato ad ogni membro di ogni gruppo, uno dei 3-4 edifici da riprodurre in scala con il software di disegno 3D.

5. Disegno in Tinkercad.

Gli allievi hanno disegnato in scala con il software Tinkercad l'edificio che è stato loro assegnato e di cui hanno preso le misure nella fase precedente.

7. Il mappale del Canton Ticino con tutte le misurazioni ufficiali in scala è consultabile sul seguente sito internet: http://www.sitmap.ti.ch/index.php?ct=mue.

6. Stampa e posa finale.

Tutti e 13 gli edifici sono stati stampati in 3D e posati su un apposito cartoncino in modo da riprodurre una versione in scala della piazza del comune di Stabio.

4.3.4. Questionario finale

È stato somministrato un questionario finale composto di una serie di domande relative alle grandezze in scala e al senso di stima, estrapolate da prove cantonali di matematica, prove Invalsi e test PISA e riguardanti i concetti già proposti nel primo questionario. Per poter rilevare l'influenza dell'intero percorso sulle competenze degli allievi relative agli argomenti di questo progetto, i risultati delle domande del questionario finale sono stati confrontati con i risultati del questionario iniziale della fase 4.3.1 per ogni singolo allievo. Più precisamente, sono state confrontate le domande dei due questionari che hanno richiamato competenze che mobilitavano le stesse risorse cognitive.

5. Risultati della ricerca[8]

5.1. Analisi dei questionari

L'analisi dei risultati dei questionari è stata suddivisa in quattro parti, in riferimento a ciascuna situazione del questionario iniziale, e cioè: grandezze in scala, stimare lunghezze, attività sul mappale della scuola media di Stabio, attività sulla piazza di Stabio. In questa sintesi, ci limitiamo a dare qualche esempio di analisi, riferito alla prima parte.

Qualche risultato relativo alle grandezze in scala

L'analisi della prima serie di domande del questionario iniziale ha messo in evidenza alcune difficoltà sul tema delle grandezze in scala.

In media la classe ha impiegato circa 17 minuti per svolgere questa parte; il primo allievo ha consegnato dopo 9 minuti mentre l'ultimo dopo quasi 25 minuti.

Situazione 1.1. «*Cosa significa che il modellino è in scala 1 : 18?*»

In questa prima situazione si sono ottenuti i seguenti risultati:

8 allievi su 13 hanno risposto correttamente alla domanda. Fra le risposte corrette:

Significa che la grandezza reale della macchina è stata divisa in 18 parti.
Significa che la grandezza reale è 18 e il modellino rappresentato è 1.
Significa che il modellino è stato rimpicciolito 18 volte.

Situazione 1.2. «*Supponiamo che nella realtà le tre automobili descritte sopra siano lunghe uguali. Quale dei tre modellini risulterebbe il più piccolo? Giustifica la risposta.*»

5 allievi su 13 hanno risposto correttamente mostrando di avere delle basi

8. In questo scritto ci si limita ad alcuni esempi. I risultati analitici sono ottenibili previo richiesta all'autore: gabriele.caffi@edu.ti.ch

solide sull'argomento. 7 allievi su 13 hanno sbagliato, manifestando carenze sul concetto di scala; per esempio:
«*[…] meno volte lo rimpicciolisci, meno grande sarà il modellino.*».
Situazione 1.3. ***«Se il modellino della Porsche Macan Turbo fosse lungo 10 cm, quanti metri sarebbe lunga nella realtà quest'automobile? Mostra eventuali calcoli qui sotto.»***
5 allievi su 13 hanno risposto correttamente.
Frà risposte errate, una è particolarmente preoccupante: *«Secondo me nella realtà quest'automobile sarebbe lunga 1'000 metri»*. L'allievo che ha fornito questa risposta, come è emerso anche dall'analisi delle domande successive, ha un senso di stima molto carente. In un secondo momento, l'allievo in questione ha ammesso di riconoscere che come risultato è eccessivo, ma che sul momento non ha prestato la dovuta attenzione trasformando i centimetri in metri.
Situazione 1.4. ***« La Porsche 919 Hybrid della pagina precedente è un'auto da corsa lunga 4'640 mm. Di essa sono stati riprodotti 5 modellini con le seguenti lunghezze: 580 cm - 5,8 dm - 3'712 cm - 58 cm - 37'120 mm. Stabilisci quali tra questi 5 modellini è in scala 1 : 8.»***
3 allievi su 13 hanno risposto correttamente; 2 di questi hanno trasformato correttamente le lunghezze e fatto un uso corretto della scala data. 7 allievi su 13 hanno fornito una risposta scorretta. Tra questi, 3 allievi hanno risposto senza tenere in considerazione la stima delle grandezze proposte, ma calcolando direttamente
1 : 8 = 0,125 e 0,125 · 4640 = 548 cm (quindi un modellino di 5 metri e mezzo!).

5.2. Laboratorio

5.2.1. Prima lezione

All'inizio del percorso di laboratorio gli allievi hanno manifestato interesse e curiosità nel momento in cui è stata presentata loro la stampante 3D. La motivazione generata negli studenti ha permesso loro di apprendere con poche difficoltà e in poco tempo il corretto funzionamento di alcuni dei comandi principali del software Tinkercad, con cui si sono esercitati nel rappresentare alcuni oggetti osservabili nelle immagini seguenti.

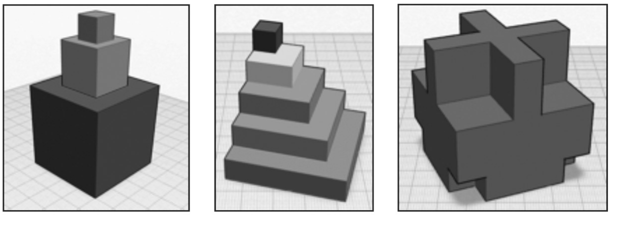


Figura 2. Imparaticci ottenuti con la stampante 3D.

5.2.2. Seconda lezione

Nel primo gruppo, ogni allievo ha preso le misure di uno dei sette pezzi del *Soma Cube* e lo ha rappresentato in scala 1 : 0,8 sul software Tinkercad. Essi avevano la possibilità di personalizzare il proprio pezzo aggiungendo le iniziali del proprio nome e del proprio cognome. In questa fase gli allievi hanno lavorato individualmente senza l'aiuto del docente.

Alcuni degli studenti che hanno cominciato a rappresentare in scala i tre palazzi hanno lavorato da soli sui calcoli necessari per trasformare le dimensioni in scala, altri invece hanno preferito lavorare in coppia con qualcuno. Nella fase di rappresentazione dei palazzi sul software, invece, tutti hanno lavorato individualmente ognuno sul proprio computer.

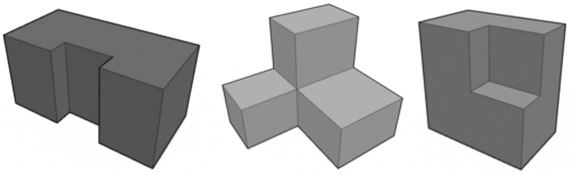


Figura 3. Esempi di oggetti programmati e realizzati con la stampante 3D.

5.2.3. Terza lezione

All'inizio della terza lezione sono stati mostrati agli allievi i pezzi del *Soma Cube* che hanno disegnato in scala nella lezione precedente e che sono stati stampati in 3D. Tutti gli studenti hanno manifestato il loro entusiasmo nel poter toccare con mano le proprie creazioni. Nella breve discussione che è seguita si è cercato di far comprendere alla classe il motivo di alcuni errori che sono stati commessi. Fra i principali, citiamo:

– dimenticanza di usare il comando «Group» per unificare in un unico pezzo l'oggetto disegnato; il pezzo viene stampato in due componenti anziché uno;
– errore nell'utilizzo della scala 1 : 0,8

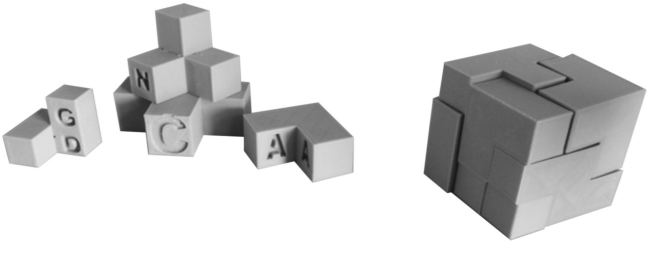


Figura 4. Il *Soma Cube*.

Nella seconda parte della lezione è stato chiesto loro di disegnare una modellizzazione geometrica del loro computer e del loro banco in scala. Nella fase di lavoro individuale, in cui gli studenti hanno dovuto calcolare le dimensioni in scala dei due artefatti, si è chiesto ai singoli allievi di spiegare i loro calcoli. L'attività di disegno dei due artefatti è stata affrontata con qualche difficoltà da alcuni studenti che hanno chiesto il sostegno del docente nel posizionare correttamente alcuni parallelepipedi per comporre il computer o il banco sul software Tinkercad. L'immagine seguente mostra i due oggetti disegnati e stampati in scale diverse.

Figura 5. Le scale delle tre coppie di modellini sono (da sinistra verso destra) 1:10, 1:15 e 1:20. Da notare un primo limite della stampante 3D: le gambe dei due banchi più piccoli erano talmente fragili che si sono subito rotte, mentre la qualità del monitor più piccolo è molto bassa.

5.2.4. Quarta lezione

Gli studenti che hanno lavorato sugli otto artefatti stampati in 3D hanno prima effettuato tutte le misurazioni e tutti i calcoli individualmente, poi si sono confrontati in piccoli gruppi e verso la fine della prima ora (rispettivamente della seconda per il secondo gruppo) con il docente. Le difficoltà che diversi studenti hanno avuto in questa fase sono state superate grazie al confronto con i compagni di classe.

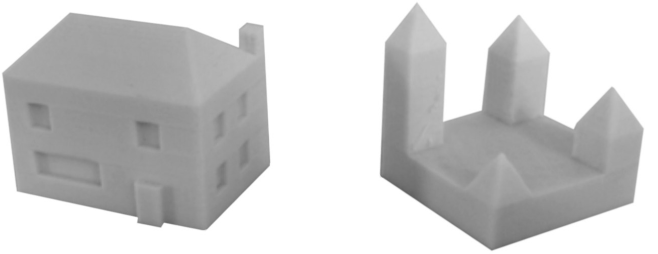


Figura 6. Due degli otto oggetti stampati in 3D, frutto del lavoro sulle situazioni.

Il progetto relativo alla casa libera, in cui gli studenti hanno dovuto calarsi nei panni di un architetto creativo per disegnare sul software Tinkercad una casa, è stato svolto dalla classe con maggior motivazione e interesse rispetto alla parte di misurazione e di calcolo. Per diversi studenti quest'attività è stata molto apprezzata e molto motivante.

5.2.5. Attività all'esterno

L'attività di misurazione degli edifici assegnati a ciascun gruppo è stata vissuta positivamente dagli studenti, che si sono trovati per la prima volta a dover rilevare le misure principali di alcuni edifici. Questa esperienza molto pratica li ha messi di fronte a numerosi ostacoli e difficoltà che, in qualche modo, hanno affrontato e superato confrontando le proprie idee nel gruppo e chiedendo ogni tanto opinioni anche al docente. Qui sotto sono state riportate alcune domande alle quali i vari gruppi hanno dovuto trovare una risposta.

– *Come misurare le dimensioni delle finestre poste al secondo piano?*
– *Come misurare l'altezza di un edificio se questo è posto su un terreno inclinato?*
– *Come possiamo ricavare le misure del tetto?*

Gli allievi sono riusciti a superare queste difficoltà di misurazione sostanzialmente in tre modi: utilizzando correttamente gli strumenti che sono stati loro consegnati (un flessometro, un misuratore laser, un mappale e una fotografia degli edifici), approssimando estreme irregolarità del terreno e degli edifici a forme più regolari e, in casi estremi (come ad esempio la misura delle dimensioni di una piccola finestra posta estremamente in alto), affidandosi al senso di stima.

Nella lezione successiva, svolta in aula informatica, tutti i gruppi avevano a disposizione al massimo 90 minuti per disegnare sul software Tinkercad in scala 1 : 200 le case di cui avevano preso le misure precedentemente. Anche se inizialmente l'attività è stata svolta con serietà e motivazione, col passare dei minuti la concentrazione è calata gradualmente.

L'attività di disegno è stata affrontata con interesse e motivazione da 8 allievi che sono riusciti a rappresentare molte delle caratteristiche degli edifici in scala.

L'esito del lavoro finale (che è stato stampato nell'arco dei sette giorni successivi alla lezione di disegno in Tinkercad) è osservabile nelle immagini seguenti. Oltre alle creazioni degli studenti, anche il docente ha deciso di partecipare all'opera disegnando e stampando in 3D, con la stessa scala degli altri edifici, la chiesa principale della piazza di Stabio. Di fronte alle loro creazioni, tutti gli studenti hanno manifestato grande interesse e stupore.

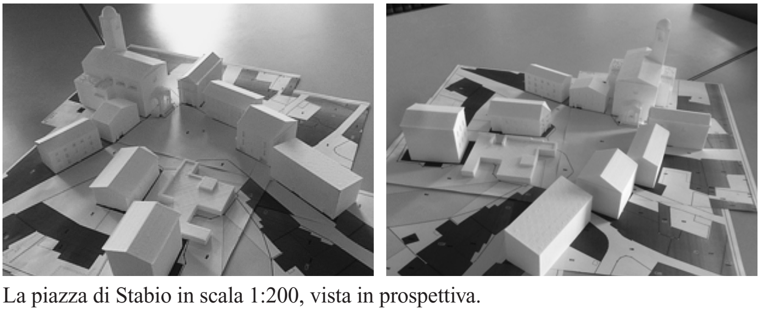


Figura 7. La piazza di Stabio in scala 1:200, vista in prospettiva.

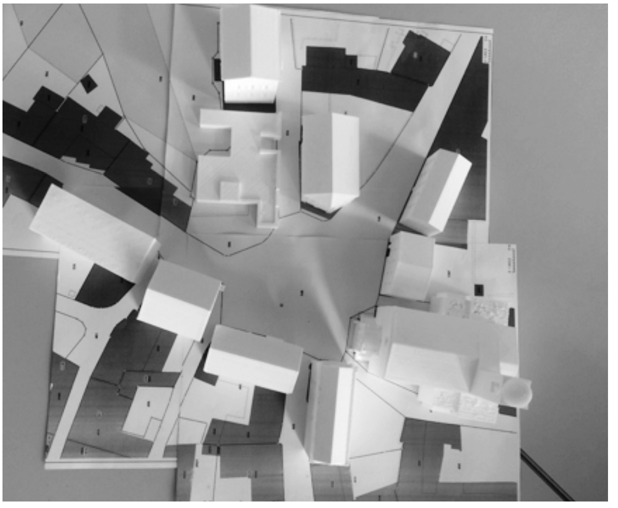


Figura 8. La piazza di Stabio, in scala 1:200, vista dall'alto.

Nella fase di discussione che è seguita, tutti hanno partecipato con attenzione e contribuito con le proprie idee e opinioni su pregi e difetti di ogni edificio. Durante la discussione, ricordando che tutti gli edifici sono stati stampati in scala 1 : 200, il docente ha posto domande dirette agli allievi, che hanno risposto individualmente. Alcuni esempi di domande:

– *Se nel modellino l'altezza di questa porta misura 1 cm, nella realtà quanti metri è alta?*
– *Quanto sarebbe alta nella realtà questa porta [disegnata erroneamente da un allievo], che in questo modellino risulta essere alta 4 mm?*
– *Nella realtà, quanto sarebbe alto questo edificio?*
– *Secondo te, le misure della base di questo edificio sono state prese correttamente? [facendo riferimento a un edificio che, collocato sul mappale, risultava troppo piccolo]*
– *Stima l'altezza reale del campanile della chiesa.*

5.3. Confronto tra i risultati dei questionari finali con quelli iniziali

Il confronto tra i risultati finali e quelli iniziali del campione di riferimento, ha mostrato che, globalmente:

10 allievi hanno migliorato il proprio apprendimento;

3 allievi sono rimasti costanti, dunque nessuno è peggiorato.

Sapere il significato di «essere in scala»

Domanda 1.1. ***«Che cosa significa in scala 1:100?»***

Tutti gli studenti hanno dimostrato di sapere cosa significa che un dato oggetto è in una certa scala. Principali risposte corrette:

(5 allievi): *«Significa che la grandezza reale è stata rimpicciolita di 100 volte.»*

(3 allievi): *«Significa che nella realtà è 100 volte più grande.»*

(5 allievi): *«Significa che 1 cm sono 100 cm nella realtà.»*

Utilizzare una scala data per calcolare lunghezze

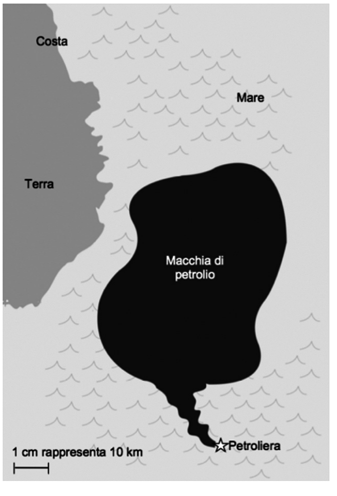
Esercizio 3[9]. *«Si consideri una carta stradale in scala 1 : 1’500’000. Due località sono rappresentate sulla carta a una distanza di 3 cm. A quale distanza (in km) si trovano le due località nella realtà?»*

8 allievi hanno utilizzato la scala in modo corretto e trasformato correttamente i centimetri in chilometri, mentre 5 allievi hanno sbagliato a trasformare i centimetri in chilometri. La percentuale di risposte corrette in Italia a livello nazionale è stata del 54.9%, mentre la classe ha realizzato il 61.5%. Dato che il campione di riferimento è formato da allievi di quarta base con diverse difficoltà, la percentuale di successo in questa situazione-problema può essere considerata soddisfacente.

Utilizzare uno strumento di misura e una scala data per ricavare lunghezze

Tutti gli studenti, meno uno, hanno mostrato di saper utilizzare un righello e una scala data per ricavare le misure reali richieste negli esercizi.

Utilizzare uno strumento di misura e una scala data per ricavare l’area di una superficie



Esercizio 2. *«Una petroliera ha urtato una roccia in alto mare che ha squarciato la stiva nella quale il petrolio viene immagazzinato. La petroliera si trovava a circa 65 km da terra. Dopo qualche giorno la macchia di petrolio si è allargata, come si può vedere nella cartina a lato. Utilizzando la scala della cartina, stima la superficie (area) della macchia di petrolio in chilometri quadrati (km²).»*

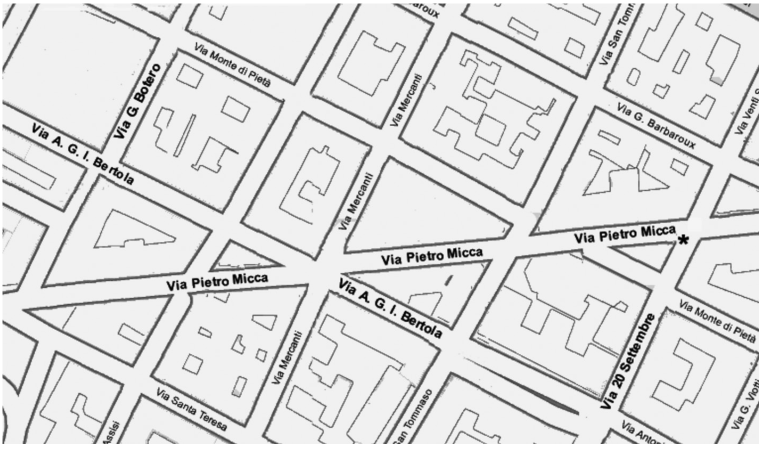
Tutti gli allievi hanno utilizzato un unico metodo di soluzione: hanno approssimato la superficie della macchia di petrolio con quella di uno o due rettangoli (probabilmente per questioni di tempo). Tranne 5 allievi che hanno sbagliato a utiliz-

9. Tratta dalla prova cantonale di matematica del 2015, corso base. La stessa domanda è stata posta in una prova INVALSI nel 2010, sotto forma di multiple choice.

zare la scala data e a trasformare le unità di misura, tutti gli altri hanno dimostrato di saper affrontare questo tipo di situazioni.

Ricavare una scala
Esercizio 4[10]. ***«Il Signor Carlo scende dal tram all'incrocio di via Pietro Micca con via 20 Settembre (nella mappa che vedi qui sotto il punto è contrassegnato da un asterisco).***

4.1 Il Signor Carlo percorre 150 metri di via 20 Settembre e, all'incrocio con via A.G.I. Bertola, svolta a destra risalendo fino all'incrocio con via G. Botero. Quanti metri all'incirca ha percorso in tutto?
4.2 Qual è, all'incirca, la scala sulla mappa?»



In Italia, a livello nazionale, la percentuale di risposte corrette nella situazione-problema 4.1 è stata del 30.5% rispetto al 46% dei 13 allievi di questa ricerca.

Invece, nella situazione-problema 4.2, la percentuale di risposte corrette è stata del 24.8% a livello italiano rispetto allo 0% del campione di riferimento di questo lavoro. Una spiegazione dell'insuccesso da parte dei 13 allievi nella domanda 4.2 sta nel fatto che mancando pochi minuti alla fine dell'ora, molti studenti hanno indicato come soluzione il numero che era più vicino alla risposta che hanno ottenuto nell'esercizio 4.1.

Esercizio 5[11]. ***«Lo scafo del modellino di una barca a vela è lungo 16 cm. Lo scafo della barca reale è lungo 16 m. Qual è la scala del modellino?***
A 1 : 1 – B 1 : 10 – C 1 : 50 – D 1 : 100»

In Italia, a livello nazionale, la percentuale di risposte corrette è stata del 53.4% rispetto al 77% dei 13 allievi di questo lavoro. Considerate le singole difficoltà di ognuno dei 13 studenti che sono state documentate nell'analisi dei questionari iniziali, si può affermare che questo risultato è soddisfacente.

10. Tratto da una prova INVALSI del 2011.
11. Selezionata da una prova INVALSI del 2012.

5.4. Risposte alle domande di ricerca

R1. Relativamente alla Domanda 1, l'analisi dei questionari iniziali ha mostrato come più della metà dei 13 allievi avesse delle difficoltà nell'affrontare situazioni legate ai concetti di rapporto e di rappresentazioni in scala. I risultati relativi alla stima degli oggetti o costruzioni, invece, hanno parzialmente smentito l'ipotesi relativa alla scarsa bontà del senso di stima della maggior parte degli studenti. La stima delle dimensioni del proprio banco e della propria aula è risultata problematica per 3 allievi su 13, mentre la stima delle dimensioni della scuola è risultata problematica per 6 allievi su 13.

R2. Relativamente alla Domanda 2, confrontando le risposte dei questionari iniziali con quelli finali, è emerso che per 10 allievi su 13 l'esperienza nel percorso laboratoriale è stata utile per acquisire più consapevolezza nell'affrontare efficacemente situazioni legate al concetto di rapporto e di rappresentazione in scala, così come previsto dall'ipotesi. Inoltre, l'attività laboratoriale ha influenzato positivamente sulla motivazione degli allievi.

6. Conclusioni e implicazioni didattiche

La ricerca ha messo in evidenza il ruolo positivo della stampante 3D come strumento di mediazione semiotica. Il facile utilizzo del software Tinkercad ha favorito le attività di laboratorio, che sono state vissute positivamente da tutti gli allievi.

Secondo il costruzionismo di Seymour Papert, il processo di apprendimento è più efficiente se il discente è coinvolto direttamente nella produzione di oggetti concreti. Sulla base di quest'idea, durante il percorso di laboratorio ho potuto constatare che, di fronte alle loro creazioni, gli studenti hanno sempre manifestato grande interesse, motivazione e attenzione nelle discussioni relative agli oggetti stampati da loro in 3D. Ciò ha facilitato il rendere più consapevoli gli studenti di fronte a situazioni legate ai concetti di stima di lunghezze, rapporto e di rappresentazione in scala.

6.1. Limiti di questo lavoro di ricerca

Il primo limite di questa ricerca sta nel fatto che il campione di riferimento non è sufficientemente grande per poter ricavare dati significativi generalizzabili.

Il secondo limite riguarda la qualità della stampa 3D. Nel caso in cui si dovessero stampare in 3D degli oggetti le cui parti hanno dimensioni inferiori o uguali a 3-4 mm, è possibile riscontrare dei problemi a livello di qualità di stampa. Ad esempio, i banchi disegnati in scala 1:15 e 1:20 dagli studenti nella terza lezione di laboratorio, quando sono stati stampati avevano le gambe talmente fragili che si sono subito rotte.

Il terzo limite consiste nell'aver svolto un percorso laboratoriale con la stampante 3D solamente in quarta base, quando ormai le prospettive future degli allievi erano già orientate.

Il quarto limite riguarda i tempi e le risorse di stampa. Progettare un percorso in cui si utilizza la stampante 3D con un gruppo numeroso di allievi può risultare problematico a causa dei lunghi tempi di stampa dei singoli oggetti e dispendioso dal punto di vista del materiale che viene utilizzato.

6.2. Possibili sviluppi

Un possibile sviluppo di questa ricerca potrebbe essere la stampante 3D sin dal primo anno di scuola media, in modo da poter arricchire di senso e di significato i concetti che gli studenti devono apprendere in matematica.

Un altro possibile sviluppo potrebbe riguardare l'interdisciplinarità. I docenti di educazione visiva e arti plastiche, con i loro allievi, utilizzano un software che si chiama *SketchUp* per modellizzare in 3D manufatti concreti. Questo programma può rappresentare una valida alternativa al software Tinkercad e pertanto può essere utilizzato anche per disegnare oggetti da stampare in 3D. Nell'ottica del laboratorio interdisciplinare, la combinazione tra matematica e educazione visiva e arti plastiche potrebbe essere un'opzione valida per l'uso della stampante 3D. Dato che con la stampante 3D è anche possibile stampare in rilievo molte località del mondo in scala (tra cui, per esempio, tutto il Ticino), un'altra valida combinazione potrebbe essere matematica e geografia.

6.3. Considerazioni personali

Questo lavoro di ricerca, oltre ad aver arricchito le mie conoscenze relative alla stampa 3D, mi ha permesso di sperimentarne il suo utilizzo in un contesto educativo. Le idee di Seymour Papert, che ho approfondito con grande interesse nel quadro teorico, sono state da guida per tutto questo lavoro di ricerca.

È veramente servito uscire dagli schemi scolastici? Sicuramente si potevano proporre i contenuti relativi ai rapporti in scala in altro modo, magari svolgendo lezioni classiche in aula. Tuttavia, come già accennato, Papert ci invita a svolgere lezioni di matematica orientate in modo che gli allievi possano sentirsi un po' scienziati, ingegneri o banchieri, o come chiunque utilizzi la matematica costruttivamente per costruire qualcosa. In questo lavoro si è cercato di far sentire un po' architetti gli allievi e ciò, oltre ad averli coinvolti maggiormente, li ha anche arricchiti di un'esperienza pratica che potrebbe tornar loro utile in futuro.

Bibliografia e sitografia

Blickstein P. (2013). Digital Fabrication and 'Making' in *Education: The Democratization of Invention*. Stanford University. Disponibile in:

https://tltl.stanford.edu/publications/papers-or-book-chapters/digital-fabrication-and-making-democratization-invention [21 agosto 2015].

Capponi, M. (2008). *Un giocattolo per la mente. L'informatica cognitiva di Seymour Papert*. Perugia: Morlacchi.

Papert S. (1980). *Constructionism vs. Instructionism.* Disponibile in:

http://www.papert.org/articles/const_inst/const_inst1.html [21 agosto 2015].

Papert, S. e Harel, I. (1991). *Situating Constructionism* (primo capitolo del libro: Papert, S., & Harel, I. (1991). Constructionism. Ablex Publishing Corporation). Disponibile in:

http://www.papert.org/articles/SituatingConstructionism.html [21 agosto 2015].

Bolondi, G. (2006). Metodologia e didattica: il laboratorio. *Rassegna, numero speciale dedicato alla didattica della matematica, vol. 29.* Bolzano.

Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica. *Riflessioni sul laboratorio di matematica*. Disponibile in:

http://www.umi-ciim.it/materiali-umi-ciim/trasversali/riflessioni-sul-laboratorio-di-matematica/ [21 agosto 2015].

Divisione della Scuola. (2015). *La scuola che verrà*. Bellinzona: DECS. Disponibile in:

https://www.lascuolacheverra.ch [28 agosto 2015].

Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (2015). Bellinzona: DECS.

Bartolini Bussi, M. G. e Mariotti, M. A. (2008). Mediazione semiotica nella didattica della matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij.

Bartolini Bussi M. G. e Maschietto M. (2007). *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola.* Springer.

Maschietto, M. e Trouche, L. (2009). *Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: the productive notion of mathematics laboratories.* Springer.

Bartolini Bussi M. G. e Mariotti M.A. (2008). *Mediazione semiotica nella didattica della matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij*.

Bartolini Bussi M. G. e Maschietto M. (2007). *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola*. Springer.

Mariotti, M. A. (2004). *Strumenti antichi e moderni nell'educazione matematica*. Università di Pisa.

Coggi, C. e Ricchiardi, P. (2005). *Progettare la ricerca empirica in educazione*. Roma: Carocci editore.

5. Competenze di visualizzazione e concettualizzazione[1]

Romina Casamassa

This research work has provided an overview of the processes in the development of some competencies within the geometric field, based on a sample of sixth grade class students. The purpose was to obtain useful information to structure a specific learning path, designed to foster the development of the desired competencies in the Plan of the Ticino compulsory school study (2015). The aim is to verify whether an approach based on these theories allows the students to overcome the difficulties observed in the development of the expected competencies.

La migliore ricerca farà nascere il miglior insegnamento
e il miglior insegnamento farà nascere la migliore ricerca
(A.P.J. Abdul Kalam)

1. Introduzione

L'idea di questo lavoro si sviluppa attorno al mio interesse personale nell'ambito della geometria e al desiderio di sperimentare un percorso didattico in prima media che preveda lo studio in contemporanea della geometria del piano e dello spazio. Considerando inoltre l'entrata in vigore del nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (2015), attraverso questo lavoro l'intento è di progettare e realizzare attività didattiche in linea con le competenze definite in tale documento, in modo da aver anche la possibilità di sperimentare una didattica per competenze.

Ho scelto di focalizzare questo lavoro sullo sviluppo di competenze nella visualizzazione e concettualizzazione di alcune attività che concernono il passaggio tra spazio e piano e viceversa, perché le ricerche in didattica della matematica evidenziano un particolare bisogno di lavorare in tali ambiti al fine di favorire lo sviluppo del ragionamento geometrico e con esso gli apprendimenti degli allievi.

2. Quadro teorico

2.1. L'insegnamento della geometria alla scuola media

Attraverso l'insegnamento della geometria nella scuola dell'obbligo si cerca di formare l'allievo affinché possa essere in grado di percepire, dare senso e capire il mondo fisico circostante: operando una modellizzazione della realtà che ci circonda. Mariotti (2005) sottolinea che esiste un legame naturale innegabile tra geometria e realtà, ma ciò non vale per quel che riguarda il suo apprendimento, il quale presenta una certa complessità che merita una particolare riflessione.

1. Sintesi del lavoro di diploma per il *Master of arts in secondary education*, DFA, anno accademico 2015/2016. Relatore: Silvia Sbaragli.

Alla scuola elementare e media l'insegnamento della geometria è tradizionalmente fondato sull'impostazione euclidea che parte dal piano per poi passare solo successivamente allo spazio. Un approccio che però, come evidenziano Arrigo e Sbaragli (2004), rischia di far perdere il contatto con la geometria tridimensionale che, dal punto di vista didattico, rappresenta una lettura della realtà più intuitiva per gli allievi perché vicina alle loro esperienze. Per un bambino infatti risulta essere più sofisticata una figura piana, da immaginare senza spessore, rispetto a un solido, proprio perché tutto ciò che lo circonda è tridimensionale. Inoltre studiando inizialmente solo la geometria piana, nella scuola media si interrompe il percorso cominciato alla scuola elementare, nel quale il bambino comincia a conoscere, almeno intuitivamente, alcune figure geometriche sia dello spazio sia del piano.

Pertanto, la costruzione da parte dell'allievo della conoscenza personale in ambito geometrico, che deve avvenire nella scuola media, dovrebbe essere qualcosa di continuo e che l'allievo compie interagendo con la realtà circostante (Arrigo & Sbaragli, 2004). Con questi presupposti è stato ipotizzato un percorso intuitivo più vicino al sapere personale di ogni allievo basato sull'insegnamento congiunto della geometria piana e di quella solida. Questa visione è stata presa in considerazione nel nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (2015), in vigore da settembre 2015, in cui leggiamo: *Nel 2° e 3° ciclo, il processo di insegnamento/apprendimento della geometria verte sul passaggio dallo spazio al piano e viceversa, partendo dalla lettura del mondo reale che circonda l'allievo e creando continuità fra i cicli. Non si tratta di riprodurre l'impostazione euclidea, iniziando da concetti come il punto, la linea, la retta e il piano, importanti nella trattazione razionale, ma distanti dall'esperienza dell'allievo, bensì di creare situazioni ricche e significative che permettano agli allievi di interpretare matematicamente il mondo reale che lo circonda, tramite modellizzazioni che consentano il passaggio: realtà-modello-realtà.* (p. 156).

Nello studio della geometria dello spazio, fondamentale per l'allievo di scuola media, un ruolo particolarmente importante lo riveste lo sviluppo della visualizzazione e della concettualizzazione, tema centrale di questo lavoro.

2.2. La concezione dello spazio

Lo sviluppo storico ha portato l'uomo a concepire lo spazio in diversi modi. Nel processo di insegnamento/apprendimento della geometria è importante riconoscere questo aspetto, perché le diverse concezioni possono influenzare il nostro modo di pensare e condizionare la comunicazione tra insegnante e allievo (Speranza, 1997).

Lo spazio può essere concepito come assoluto o relativo, indipendente o non indipendente, illimitato o limitato, finito o infinito e ancora come insieme di punti o come un continuo irriducibile. Queste sono solo alcune diverse concezioni sulle quali filosofi e matematici si sono soffermati, sufficienti però a far emerge un aspetto particolarmente rilevante: non si tratta di concetti ovvi e naturali, ma di qualcosa che necessita di essere formato, e ciò deve avvenire attraverso un'adeguata scelta didattica.

Mariotti (2005), analizzando il rapporto tra geometria e realtà, evidenzia che nonostante l'innegabile legame esistente «tra spazio astratto e ideale della geometria e lo spazio fisico nel quale avvengono le nostre esperienze» (p. 5), è necessaria una chiara distinzione tra le due concezioni.

Lo spazio, come illustrato da Speranza (1997), può anche essere detto omogeno o isotropo, il primo se tutti i punti si equivalgono mentre il secondo se sono tutte le direzioni per un punto ad equivalersi. Prendendo in considerazione queste due concezioni, egli sostiene che lo spazio della geometria euclidea risulta essere omogeneo e isotropo, mentre al contrario lo spazio dell'esperienza fisica non è né isotropo, perché esiste una direzione privilegiata (quella verticale), né omogeneo. Vi è quindi, in quest'ottica, una netta distinzione tra quello che possiamo considerare «lo spazio astratto e ideale della geometria» e quello che invece è considerato lo spazio fisico esperienziale, tridimensionale ed euclideo, oggetto della geometria insegnata nella scuola media.

2.3. Il ruolo della visualizzazione in ambito geometrico

La visualizzazione, definita in modo generale, è l'atto del rendere visibile. Il tema della visualizzazione e degli aspetti legati alla rappresentazione in matematica è stato oggetto di studio di diversi autori. Duval (1999) osserva che gli oggetti matematici necessitano delle diverse rappresentazioni semiotiche, in quanto per loro natura, al contrario degli oggetti definiti reali o fisici, non sono direttamente accessibili alla percezione e pertanto «rappresentazione e visualizzazione sono al centro della comprensione in matematica» (p. 3). Tuttavia, egli evidenzia che, per la comprensione della materia, è essenziale non confondere il concetto con le sue diverse rappresentazioni semiotiche possibili. Per fare ciò, da un punto di vista didattico, è necessario che lo studente sia in grado di muoversi tra i diversi possibili registri di rappresentazione.

In modo analogo anche Fischbein (1993) condivide quest'idea e tratta la questione introducendo la teoria dei concetti figurali, di cui sono approfonditi i contenuti nel paragrafo 2.4.

Duval (1999) fa una distinzione tra visualizzazione e visione, sostenendo che la visualizzazione, a differenza della visione, che fornisce un accesso diretto all'oggetto, si basa sulla produzione di rappresentazioni semiotiche, le quali mostrano «relazioni o, meglio, un'organizzazione di relazioni tra le unità di rappresentazione» (p. 13). Si tratta di rappresentazioni che non mostrano l'oggetto così com'è, nella sua totalità, e che necessitano di una comprensione globale dell'oggetto. Ad esempio, il disegno di un solido proiettato sul piano è comprensibile ed interpretabile come figura tridimensionale solo se avviene il processo di visualizzazione, ovvero se esiste la capacità di cogliere in modo diretto l'intera configurazione di relazioni presenti, selezionando ciò che è importante per la comprensione. In questo senso, Duval sostiene che attraverso «la visualizzazione si può rendere visibile tutto ciò che non è accessibile attraverso la visione» (p. 13). Quindi, non solo percepire ciò che è visibile agli occhi, bensì osservare e capire ciò che è realmente rappresentato.

Nelle situazioni che richiedono la visualizzazione di entità geometriche si osserva che per molti studenti vi sono delle difficoltà. Queste si legano al fatto che le figure geometriche possono avere più di un'interpretazione. Duval descrive questa difficoltà come un'incapacità di vedere oltre.

Molti studiosi, trattando questo argomento, hanno espresso l'importanza di educare alla visualizzazione. Nell'ambito della geometria, si tratta di un'educazione necessaria per una efficace e corretta interazione con le figure, le relazioni tra di esse, le trasformazioni e altre entità. Questo perché ogni volta che lo studente deve far riferimento a figure piane o spaziali necessita di un pensiero visuale (Hershkowitz, Parzysz, Van Dormolen, 1996).

2.4. La teoria dei concetti figurali

Per descrivere la natura dei concetti e del ragionamento geometrico useremo come quadro di riferimento la teoria dei concetti figurali introdotta da Fischbein (1993).

Nelle teorie psicologiche e cognitive i concetti e le immagini sono solitamente considerati come due categorie distinte di entità mentali. Da una parte i concetti, considerati come espressione di un'idea, sono legati a una rappresentazione generale e ideale di una classe di oggetti in base alle loro caratteristiche comuni, dall'altra le immagini sono considerate come rappresentazioni sensoriali di un oggetto o di un fenomeno. Secondo Fischbein, nel ragionamento geometrico, queste due entità mentali vengono mescolate. Egli sostiene che tutte le figure geometriche, su cui si basa il ragionamento geometrico, non possono essere considerate né come puri concetti né come pure immagini, in quanto esse rappresentano delle costruzioni mentali che possiedono allo stesso tempo sia proprietà concettuali sia figurali. Si tratta di «un misto di due entità indipendenti e definite, ovvero da un lato idee astratte (concetti), dall'altro rappresentazioni sensoriali che riflettono parte delle operazioni concrete» (Fischbein, 1993, p. 140). Ad esempio, trattando la congruenza di due triangoli, si utilizzano i concetti di punto, angolo, lato e triangolo ma ci si riferisce anche a informazioni o a operazioni figurali, come per esempio la sovrapposizione di due triangoli.

Le entità geometriche a cui ci riferiamo, quindi, per loro natura, possiedono proprietà concettuali; sono oggetti mentali ideali, astratti e generali, ma allo stesso tempo possiedono proprietà spaziali, dato che li si fanno corrispondere immagini.

Fischbein spiega questo aspetto sostenendo che gli oggetti possiedono una natura figurale intrinseca, perché solo facendo riferimento alle immagini è possibile prendere in considerazione operazioni come sovrapporre, distaccare o invertire, necessarie per la comprensione della materia. Mentre l'idealità, l'astrattezza, la perfezione e la generalità di queste entità geometriche possono essere prese in considerazione solo in modo concettuale, esse infatti non possiedono una corrispondenza materiale: oggetti 0-, 1-, 2-dimensionali come punto, linea e piano non possono esistere nella realtà, che è 3-dimensionale. Ma anche se prendiamo in considerazione il cubo o la sfera, questi sono sempre considerati come costrutti mentali che si suppone non possiedano realtà sostanziale. Dunque, gli oggetti mentali possiedono una proprietà della realtà, che i concetti non possiedono, la spazialità.

«Nel concettualizzare, ad esempio, una ruota, per descrivere la sua rotondità è possibile che cogliamo non solo l'idea di rotondo, non solo l'immagine della ruota ad essa associata, ma anche un terzo tipo di costrutto che è la figura geometrica chiamata cerchio» (Fischbein, 1993, p. 141).

In modo analogo, un quadrato non corrisponde all'immagine disegnata per esempio su un foglio di carta, ma si tratta di una forma che è controllata dalla sua definizione. Questo ultimo aspetto caratterizza le figure geometriche che, facenti parte di un sistema teorico assiomatico, possiedono proprietà che sono imposte o derivate dalla loro definizione.

In questo senso, Fischbein chiama le figure geometriche *concetti figurali*, «entità mentali, che riflettono proprietà spaziali (forma, posizione, grandezza) e, allo stesso tempo, possiedono qualità concettuali - come l'idealità, l'astrattezza, la generalità e la perfezione» (Fischbein, 1993, p. 143). Un concetto figurale è dunque un'entità mentale che è controllata da un concetto matematico, ma che preserva la sua spazialità. Il ragionamento geometrico è caratterizzato dall'interazione tra i due aspetti: figurale e concettuale (Mariotti, 2005). A questo proposito Fischbein (1993) sottolinea che la completa fusione tra concetto e figura esprime una situazione ideale, in realtà, il giusto equilibrio non sempre viene raggiunto. Infatti, nello sviluppo dei concetti geometrici sarà sempre presente il contributo della componente figurale, idealmente però è l'aspetto concettuale che dovrebbe prevalere, in modo da controllare i significati, le relazioni e le proprietà delle figure. Se si creano situazioni conflittuali, in cui i due aspetti risultano in contrasto e, in particolare, se l'aspetto figurale sovrasta quello concettuale dominando le dinamiche del ragionamento, allora nascono difficoltà nel processo di insegnamento/apprendimento della geometria.

Quindi l'integrazione delle proprietà concettuali e figurali in strutture mentali unitarie con la predominanza dei limiti concettuali rispetto a quelli figurali non rappresenta un processo naturale. Al contrario, come sostiene Fischbein (1993), dovrebbe costituire una continua, sistematica e principale preoccupazione dell'insegnante. L'intervento didattico deve essere quindi pianificato e finalizzato a promuovere la dialettica tra le due componenti, in modo da creare la giusta armonia (Mariotti, 2005).

2.5. La visualizzazione nel passaggio tra 3D e 2D[2] e viceversa

Le rappresentazioni di figure 3D nel piano e le costruzioni di figure 3D a partire da rappresentazioni 2D rivestono un ruolo centrale nello studio della geometria dello spazio che implicano e includono il processo di visualizzazione. In questo lavoro di ricerca consideriamo la visualizzazione di oggetti 3D come un insieme di abilità collegate con il ragionamento spaziale.

Clements e Battista (1992) definiscono il ragionamento spaziale come «l'insieme di processi cognitivi attraverso i quali vengono costruite ed elaborate rappresentazioni e concettualizzazioni di oggetti spaziali, di relazioni e trasformazioni di essi» (citato da Mariotti, 2005, p. 15).

Quindi, come definito da Battista (2007) «il ragionamento spaziale è l'abilità di vedere, esaminare e riflettere riguardo a oggetti spaziali, immagini, relazioni e trasformazioni. Il ragionamento spaziale include il generare e l'esaminare immagini per rispondere a domande riguardanti trasformazioni e operazioni su immagini e mantenere le immagini al servizio di altre operazioni mentali» (p. 843).

Nella letteratura presa in considerazione, nella quale sono stati studiati gli errori e le difficoltà che gli studenti possono incontrare in situazioni di visualizzazione che richiedono procedimenti come la coordinazione e l'integrazione di punti di vista, la rotazione di un oggetto tridimensionale nello spazio e il piegare e dispiegare sviluppi di solidi, si osserva che gli errori e le difficoltà sono frequentemente associate all'interpretazione e all'uso delle rappresentazioni piane di oggetti 3D.

2. A partire da questo paragrafo è stato scelto di sintetizzare la dicitura «tridimensionale» con 3D e «bidimensionale» con 2D.

Diversi autori (Hershkowitz, Parzysz e Van Dormolen, 1996; Mesquita, 1992; Parzysz, 1988, 1991) affermano che le difficoltà incontrate dagli studenti, confrontati con situazioni di visualizzazione che includono rappresentazioni piane di oggetti 3D, sono spesso collegate al fatto che il ragionamento non viene fatto a partire dall'oggetto geometrico teorico (concetto) ma in base alla sua rappresentazione nel piano (immagine 2D). Rappresentando una figura 3D nel piano avviene infatti una perdita di informazioni, dato che si deve rinunciare a una delle tre dimensioni.

Fischbein (1993) osserva che uno dei principali ostacoli nel ragionamento geometrico è la difficoltà nella manipolazione di oggetti geometrici (concetti figurali): la tendenza è quella di trascurare le definizioni sotto la pressione delle restrizioni figurali.

Secondo Fischbein la trasformazione di «sviluppo» di un solido, e quindi il passaggio tra 3D e 2D e viceversa, rappresenta un'ottima opportunità per promuovere la dialettica tra la componente figurale e concettuale di un oggetto geometrico.

Egli osserva che negli sviluppi della figura 1 la componente figurale e quella concettuale sono ben integrate e di conseguenza si può manipolare lo sviluppo con i suoi elementi come concetto figurale, riconoscendo facilmente che il disegno rappresenta uno sviluppo di un cubo.

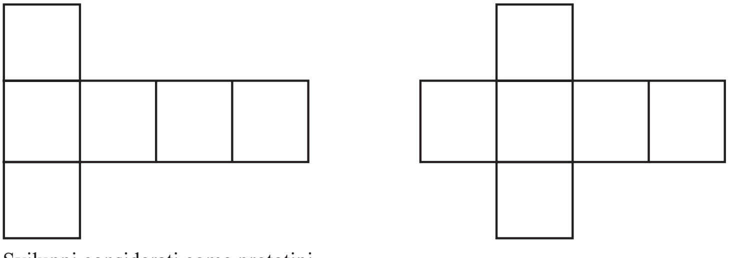


Figura 1. Sviluppi considerati come prototipi.

D'altra parte, questo tipo di sviluppo è considerato da Mesquita (1992) come prototipo, nel senso che corrisponde a una immagine stereotipata del cubo: quattro facce laterali e due basi.

A questo proposito, Fishbein osserva che nel caso della rappresentazione della figura 2 è più difficile riconoscere che si tratta di uno sviluppo di un cubo, dato che per ricostruire il solido, non è sufficiente solo vedere le figure, bensì è necessario modificare le sue posizioni e immaginare l'effetto delle trasformazioni sulle figure adiacenti.

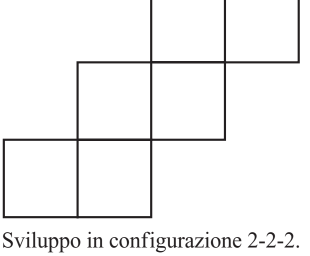


Figura 2. Sviluppo in configurazione 2-2-2.

Egli osserva che esercizi di questo tipo possono permettere di migliorare le seguenti abilità:

– la cooperazione costruttiva dell'aspetto figurale e concettuale in un'attività di problem solving in ambito geometrico;
– la capacità di mantenere in mente e coordinare il maggior numero di elementi concettuali;
– la capacità di organizzare i processi mentali;
– la capacità di prevedere e integrare l'effetto di ogni trasformazione sulla strada della soluzione.

Nei problemi in cui è richiesta la visualizzazione di oggetti 3D molto spesso si lavora con le loro rappresentazioni (materiali o mentali). Per manipolare correttamente queste rappresentazioni dell'oggetto è necessario controllare le proprietà dell'oggetto, che si preservano nella rappresentazione, e quelle che invece non vengono mantenute. Allo stesso modo si deve considerare che si lavora con oggetti che possiedono determinate proprietà concettuali che permettono determinati procedimenti e trasformazioni della rappresentazione e ne proibiscono altre (Gonzato, 2013).

La dialettica tra l'aspetto figurale e concettuale è dunque fondamentale e, come osserva Fischbein (1993), esiste la possibilità di far esercitare gli studenti con attività mentali in cui è richiesta la cooperazione tra i due aspetti. Così facendo si sviluppa il ragionamento spaziale, la visualizzazione e la concettualizzazione.

3. Domande e ipotesi di ricerca

3.1. Le domande di ricerca

Lo scopo principale del lavoro è di studiare lo sviluppo di alcune competenze in ambito geometrico (visualizzazione e concettualizzazione) negli allievi ticinesi di una classe di prima media.

D1. Quali competenze possiedono gli allievi all'ingresso della prima media nella visualizzazione e concettualizzazione di alcune attività che concernono il passaggio tra spazio e piano e viceversa? Quali difficoltà emergono in tali attività?

D2. Dopo un percorso didattico che verte sulla visualizzazione e concettualizzazione nel passaggio tra spazio e piano e viceversa come cambiano le competenze degli allievi nelle stesse tipologie di attività?

3.2. Le ipotesi di ricerca

Le ipotesi elaborate sono state espresse a partire dal quadro teorico di riferimento.

I1. Si ipotizza che gli allievi all'ingresso della prima media possiedano certe competenze in ambito geometrico che permettano loro di riconoscere le più comuni figure del piano e dello spazio, come per esempio un quadrato o un cubo. Tuttavia si ritiene che questa capacità non sia sufficiente, per esempio, al fine di riconoscere una figura 2D evidenziata all'interno di una figura 3D rappresentata sul piano. Per questo tipo di richiesta infatti si ritiene necessario essere in grado di concettualizzare in modo più significativo la situazione proposta. Al riguardo, si ipotizza che gli allievi possano avere difficoltà a motivare le proprie scelte utilizzando relazioni o proprietà delle figure geometriche. Questa difficoltà, come riportato da Fischbein (1983) e Mariotti (2005), si legherebbe al fatto di non essere in grado di richiamare gli aspetti concettuali, scinderli da quelli figurali e utilizzarli in modo armonico per affrontare le situazioni geometriche proposte.

Per quanto riguarda la visualizzazione, si ipotizzano principalmente due tipi di difficoltà. La prima, in linea con quanto affermato da diversi autori (Hershkowitz, Parzysz e Van Dormolen, 1996; Mesquita 1992; Parzysz, 1988, 1991), si legherebbe alla capacità di visualizzare figure 3D rappresentate sul piano nella loro totalità, ovvero la capacità di cogliere la figura in quanto tale e non fermarsi solo alla sua rappresentazione 2D. La seconda si legherebbe alla capacità immaginativa dell'allievo riguardante oggetti nel piano e nello spazio.

A questo proposito si ipotizza che le capacità di visualizzazione e di concettualizzazione siano variate all'interno del gruppo classe perché legate alle attitudini e all'esperienza individuale.

I2. Si ipotizza che un percorso didattico specifico possa permettere di sviluppare maggiori competenze nella visualizzazione e nella concettualizzazione di alcune attività che concernono il passaggio tra spazio e piano e viceversa, consentendo il superamento di alcune difficoltà ipotizzate in I1. In particolare, si ipotizzano dei miglioramenti per ciò che riguarda la capacità di manipolare mentalmente oggetti geometrici 3D e la capacità di giustificare le proprie affermazioni prendendo in considerazioni gli aspetti concettuali delle figure geometriche.

D'altra parte si ritiene che permarranno difficoltà, perché lo sviluppo di queste competenze richiede di vivere molte esperienze variate, distribuite in un lungo arco di tempo.

4. Metodologia di ricerca

4.1. Tipologia di ricerca e campione di riferimento

Il lavoro di ricerca è stato svolto secondo tre fasi distinte fra loro:

rilevazioni di ingresso attraverso un questionario iniziale, al fine di definire e analizzare la situazione iniziale degli allievi;

un itinerario didattico (ideato a partire dai dati raccolti in entrata) al fine di far evolvere le competenze degli allievi;

un questionario di uscita.

I due questionari proposti, iniziale e finale, sono analoghi dal punto di vista della richiesta ma strutturati da punti di vista diversi.

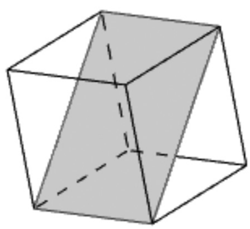
Successivamente attraverso il confronto dei dati in entrata e in uscita e il percorso svolto è stato possibile valutare qualitativamente l'intervento effettuato e analizzare i cambiamenti, l'evoluzione e gli sviluppi delle competenze degli allievi nella visualizzazione e concettualizzazione di alcune attività che concernono il passaggio tra spazio e piano e viceversa.

La ricerca è stata condotta su un campione di riferimento composto di 21 allievi di una classe di prima della scuola media di Castione.

5. Analisi dei risultati[3]

Domanda 1 del questionario iniziale

La seguente immagine rappresenta un cubo
in cui è stata evidenziata una figura.



Di che figura si tratta? ....
Motiva la tua risposta. ....

Commento relativo alla domanda 1 del questionario iniziale

13 allievi su 21 riconoscono che la figura evidenziata all'interno del cubo rappresenta un rettangolo. Di questi si rilevano le seguenti tipologie di motivazione:

3 allievi fanno riferimento solo ai lati della figura, quindi danno una spiegazione non sufficiente a livello concettuale per definire il rettangolo, come nell'esempio che segue:

Si tratta di un rettangolo perché ha 4 lati due lunghi e due corti
paralleli 2 a 2.

3 allievi fanno riferimento sia ai lati sia agli angoli della figura, come nell'esempio che segue, anche se non sempre vi è una vera esplicitazione delle proprietà in gioco:

È un rettangolo perchè ha: 4 angoli retti, 4 lati (2
lunghi e due più corti).

3. In questo articolo ci si limita a fornire alcuni esempi relativi a una domanda sulle 6 che costituivano i due questionari. L'intero materiale è ottenibile contattando l'autore (romina.casamassa@gmail.com).

5 allievi motivano la risposta richiamando prevalentemente gli aspetti figurali. Questo tipo di motivazione si lega solo a ciò che viene visto dall'allievo tramite la rappresentazione, senza prendere in considerazione l'aspetto concettuale.

1 allievo fornisce una spiegazione che mostra una certa cooperazione tra l'aspetto figurale e concettuale:

Perché ha una base e un altezza e può sembrare un romboide ma ha forma diversa.

1 allievo fornisce una motivazione che appare non centrata con la richiesta:

Perchè se tracci una linea da un angolo all'altro ottieni due triangoli.

8 allievi su 21 rispondono in modo scorretto.

Le risposte fornite sono le seguenti:

2 allievi rispondono che si tratta di un parallelogrammo ed entrambi forniscono una motivazione legata prevalentemente all'aspetto figurale. In questo caso, sembrerebbe che gli allievi non riconoscano la parte concettuale del cubo. In altre parole, la loro motivazione prende in considerazione solo ciò che è possibile vedere attraverso l'immagine e non le proprietà del cubo da cui dipende la soluzione, come nel seguente esempio:

Ho provato a prendere l'angolo di un foglio (angolo retto) e l'ho sovrapposto a un angolo della figura e non combaciava.

4 allievi rispondono che si tratta di un quadrato, indicando alcune sue caratteristiche, come nell'esempio seguente:

Perché il quadrato a i lati tutti uguali e anche gli angoli

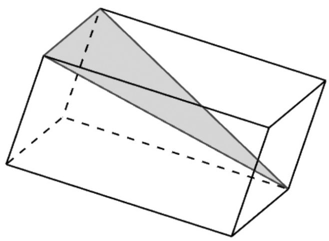
2 allievi rispondono che si tratta di un cubo, come nell'esempio seguente, lasciando presumere una non corretta comprensione della domanda:

So che è il cubo perché lo riconosco dai lati e dalle facce

Da quest'analisi emerge che la maggior parte degli allievi è riuscita a individuare la soluzione corretta. Questo risultato sembrerebbe dimostrare una certa dialettica tra l'aspetto concettuale e figurale. Tuttavia una parte di loro non ha fatto riferimento agli aspetti concettuali, giustificando la propria risposta facendo prevalentemente riferimento a ciò che è visibile attraverso la figura, come se la componente figurale prevalesse su quella concettuale. Quest'ultimo aspetto lo si osserva in modo particolare nelle risposte dei due allievi che affermano che la figura evidenziata all'interno del cubo è un parallelogrammo: si osserva quindi una certa difficoltà a riconoscere le componenti concettuali del cubo.

Domanda 1 del questionario finale

La seguente immagine rappresenta un parallelepipedo rettangolo in cui è stata evidenziata una figura.



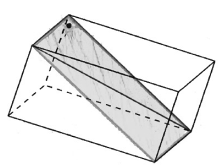
Di che figura si tratta? ....
Motiva la tua risposta. ....

Commento relativo alla domanda 1 del questionario finale

17 allievi su 21 riconoscono che la figura evidenziata all'interno del cubo rappresenta un triangolo scaleno. Non tutti però riconoscono che si tratta anche di un triangolo rettangolo. Al riguardo sono stati ottenuti i seguenti risultati:

12 allievi rispondono che si tratta di un triangolo scaleno rettangolo, rispondendo così in modo completamente corretto. Di questi allievi si rilevano le seguenti tipologie di motivazione:

9 allievi forniscono una motivazione ben elaborata, spiegando in modo chiaro sia il motivo per cui il triangolo è scaleno sia quello per cui è rettangolo. Di questi, 4 utilizzano l'immagine per spiegare al meglio la loro risposta. Il seguente protocollo è rappresentativo:



Si tratta di un triangolo scaleno acutangolo perché un lato coincide con uno spigolo, un'altro con una diagonale della faccia e l'ultimo con la diagonale del parallelepipedo rettangolo. È rettangolo perché uno spigolo corto e una diagonale della faccia formano un angolo retto. Gli altri due sono acuti.

3 allievi motivano la loro risposta facendo riferimento solo alle misure dei lati del triangolo, come nell'esempio seguente:

> Questo triangolo a prima vista non sembra scaleno ma i tre lati corrispondono a 3 caratteristiche diverse del parallelepipedo rettangolo: diagonale del cubo, diagonale della faccia e spigolo

È interessante notare che questo allievo anche nel questionario iniziale aveva dato una risposta analoga, riconoscendo che la rappresentazione 2D potrebbe in un certo senso ingannare. Da queste sue spiegazioni traspare una certa capacità di integrare gli aspetti concettuali e controllare quelli figurali.

3 allievi riconoscono che si tratta di un triangolo scaleno non facendo però alcun riferimento alle ampiezze dei suoi angoli. Questi allievi motivano la loro risposta cercando di giustificare il motivo per cui i lati del triangolo sono di lunghezza diversa, come nel seguente esempio:

> È scaleno perché ha un lato che è un vertice, un lato è la diagonale di una faccia e l'ultimo è la diagonale del cubo

2 allievi rispondono che si tratta di un triangolo scaleno acutangolo, fornendo una motivazione non esplicativa alla loro risposta, come nell'esempio seguente:

> perché ha a almeno 1 angolo acuto, i lati sono tutti diversi.

4 allievi su 21 rispondono in modo scorretto. Le loro risposte sono le seguenti:

– 1 risponde che si tratta di un triangolo isoscele rettangolo;
– 1 risponde che si tratta di un triangolo isoscele acutangolo;
– 1 risponde che si tratta di un triangolo acutangolo;
– 1 risponde che si tratta di un triangolo rettangolo acutangolo.

Le loro motivazioni, pur essendo non esplicative, sono coerenti con le loro risposte, come mostrato dal seguente esempio:

> Perchè per essere un triangolo isoscele deve avere 2 lati congruenti, e ce li ha, e per essere un triangolo rettangolo deve avere almeno un angolo retto, e il triangolo lo ha

Infine, emerge che non sempre gli allievi utilizzano i giusti termini geometrici, come è possibile notare in alcuni dei protocolli riportati.

Confronto qualitativo tra i test iniziale e finale: qualche esempio

Confrontando questi risultati con quelli rilevati nel questionario iniziale si rileva un aumento della percentuale di riuscita di circa il 20%.

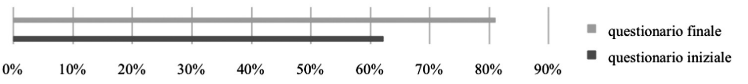


Figura 3. Confronto delle percentuali di riuscita alla domanda 1

È interessante notare che i 2 allievi che nel questionario iniziale avevano dato una risposta che lasciava presumere una difficoltà nel riconoscere e integrare gli aspetti concettuali per trovare la soluzione alla situazione proposta, nel questionario finale, a seguito dell'intervento didattico, rispondono in modo corretto e forniscono una motivazione che richiama gli aspetti concettuali della figura considerata.

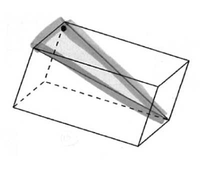
In particolare, rispetto al questionario iniziale, gli allievi dimostrano di riuscire a richiamare gli elementi e le proprietà del parallelepipedo rettangolo per giustificare la propria risposta. Inoltre si osserva che le risposte sono molto più elaborate: a differenza del questionario iniziale nessuno si è limitato a dare delle risposte brevi come ad esempio «perché lo vedo».

Nel questionario finale un allievo risponde in modo corretto a tutte le domande, migliorando in modo significativo rispetto al primo questionario anche nella tipologia di motivazione fornita. Dalle sue risposte emerge un notevole miglioramento nel giustificare le proprie affermazioni utilizzando le relazioni o le proprietà geometriche delle figure, integrando dunque in modo opportuno anche gli aspetti concettuali delle figure geometriche. Le sue motivazioni fornite in risposta alla prima domanda sono significative:

– questionario iniziale:

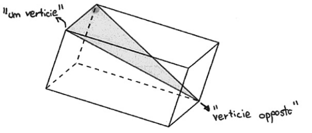
Perché il rettangolo ha questa forma e lo vedo.

– questionario finale:



PERCHE HA UN ANGOLO RETTO, I SUOI LATI SONO DI MISURA
DIVERSA E I SUOI ANGOLI SONO DI MISURA DIVERSA TUTTO CIÒ
CHE DEVE AVERE UN TRIANGOLO SCALENO
IL LATO ARANCIONE È ATTACCATA ALLA FACCIA, IL LATO
DELLA BASE È APPOGGIATO SU UNO SPIGOLO E INSIEME QUESTI DUE
FORMANO UN ANGOLO RETTO PERCHÉ L'ALTRO LATO ATTRAVERSA
COME UNA DIAGONALE MA NON SULLA FACCIA QUINDI NON FORMA
L'ANGOLO RETTO ANCHE SE SEMBRA. QUINDI HA TUTTI GLI ANGOLI/
LATI DIVERSI

Nel questionario finale, di un altro allievo, che incontra difficoltà in diverse materie, è possibile osservare un tentativo di motivare la propria affermazione richiamando le proprietà delle figure quindi dimostrando di aver acquisito alcune conoscenze.



perchè in questo caso a un angolo retto e "contiene
anche 2 angoli acuti per formare questa figura "un
vertice" é passato a quello anteriore e dal angolo vi
si va al vertice opposto, chiudendo così la
figura cioè passando dal verticie opposto al
"un verticie"

Per quanto riguarda le motivazioni fornite, in generale, si osserva un miglioramento caratterizzato da spiegazioni maggiormente elaborate, come si nota dai due esempi seguenti:

È rettangolo perché il lato e una diagonale della
faccia forma un angolo retto, ed è scaleno perché
una diagonale della faccia con una diagonale che
va anche all'interno del parallelepipedo rettangolo
sono disuguali

È rettangolo perchè l'angolo di 90° coincide
alle facce perpendicolari del parallelepipedo
rettangolo. È scaleno perchè un lato è una
diagonale della faccia un'altro è una diagonale
del parallelepipedo rettangolo, l'ultimo coincide
allo spigolo.

(A = ANGOLO ACUTO)(• = ANGOLO RETTO)

Ecco infine un esempio che mostra come, a volte, gli aspetti figurali prevalgano su quelli concettuali:

Perchè si vede che gli spigoli dello stesso lato
sono perpendicolari fra di loro, mentre i suoi
lati si incontrano tutti e due nello stesso vertice
Quindi si può stabilire e confermare che è
un triangolo acutangolo, isoscele, e poi si vede
che i lati hanno la stessa lunghezza

6. Risposte alle domande di ricerca

R1. Come ipotizzato gli allievi all'ingresso della prima media hanno difficoltà soprattutto legate alla capacità di concettualizzare le figure geometriche e in generale faticano a giustificare le proprie affermazioni, in particolar modo utilizzando le relazioni o le proprietà delle figure. I risultati ottenuti nel primo questionario dimostrano proprio che l'aspetto figurale spesso prevale su quello concettuale e che molte delle motivazioni date sono di tipo non esplicativo.

Per quanto riguarda le competenze possedute dagli allievi, come previsto, molto dipende dalle loro attitudini e dalle loro esperienze individuali con queste tipologie di attività.

R2. Come ipotizzato a priori, in generale si osserva un miglioramento nella formulazione delle giustificazioni e una maggiore capacità di concettualizzare le situazioni geometriche proposte. Dai risultati analizzati, emerge che la maggior parte degli allievi è in grado di richiamare gli aspetti concettuali delle figure, dimostrando di saperli riconoscere e utilizzare al fine di giustificare le loro affermazioni. In generale, è possibile riscontrare che le motivazioni degli allievi, in particolare in risposta alla prima domanda, sono ben elaborate ed esplicative.

Si osserva dunque una maggiore capacità di integrazione degli aspetti concettuali e figurali. Questo risultato positivo sembrerebbe rappresentare l'influenza positiva del percorso didattico al fine di favorire lo sviluppo del ragionamento geometrico che, come sostengono Fischbein (1993) e Mariotti (2005), è caratterizzato dall'interazione armonica tra i due aspetti: figurale e concettuale.

Questa maggiore capacità di integrare gli aspetti concettuali e figurali degli oggetti geometrici considerati sembrerebbe influire positivamente anche sulle capacità di visualizzazione, aspetto che si manifesta nella capacità di considerare gli oggetti geometrici nella loro totalità e non solo in riferimento a quanto visibile dalle loro possibili rappresentazioni. Tuttavia, ricollegandomi all'ipotesi iniziale, si conferma il fatto che permangono ancora difficoltà. Per un maggiore sviluppo del ragionamento geometrico e delle competenze attese occorre un lavoro costante e che si ripeta nel tempo. In sintesi, gli allievi più bravi dimostrano di possedere maggiori conoscenze in ambito geometrico, sia rispetto alle figure 2D sia a quelle 3D, che permettono loro di affrontare le situazioni proposte ottenendo risultati molto positivi, mentre alcuni allievi, più di altri, dimostrano un bisogno maggiore di un costante lavoro didattico, confermando così l'ipotesi iniziale che molto dipende dalle capacità cognitive personali e dalle precedenti esperienze individuali.

7. Conclusioni

Questo lavoro di ricerca ha fornito una panoramica sui processi di sviluppo di alcune competenze in ambito geometrico su un campione di studenti di una classe di prima media. Lo scopo è stato quello di ottenere informazioni utili a strutturare un percorso di apprendimento specifico per gli allievi di prima media e progettato in maniera tale da favorire lo sviluppo delle competenze auspicate dal Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (2015).

Come sostengono Fischbein (1993) e Mariotti (2005), lo sviluppo del ragionamento geometrico è caratterizzato dalla capacità di integrare sia gli aspetti concettuali sia quelli figurali degli oggetti geometrici considerati. Questa interazione risulta essere fondamentale per lo sviluppo dei concetti geometrici e, come sostiene Fischbein, dovrebbe costituire una continua, sistematica e principale preoccupazione dell'insegnante. Per quanto riguarda invece la visualizzazione, diversi autori ritengono che le principali difficoltà siano legate all'interpretazione e all'uso delle rappresentazioni piane di oggetti 3D e, a questo proposito, la capacità di visualizzazione diventa fondamentale, in quanto è attraverso la visualizzazione che si può rendere visibile ciò che non è accessibile attraverso la visione (Duval, 1999). In altre parole si tratta della capacità di controllare le proprietà dell'oggetto, che si preservano nella sua rappresentazione, e quelle che invece non vengono mantenute.

In linea con quanto rilevato dalle ricerche condotte in tali ambiti sono state progettate attività con l'obiettivo di verificare se un approccio basato su queste teorie consente il superamento delle difficoltà rilevate e lo sviluppo delle competenze attese.

I risultati ottenuti mostrano che un percorso didattico specifico può contribuire positivamente allo sviluppo di tali competenze. Tuttavia permangono ancora difficoltà, e questo aspetto rappresenta uno dei principali limiti di questa ricerca: il tempo. Per la realizzazione di questo lavoro il tempo è stato limitato, il percorso si è protratto solo per alcune settimane, non consentendo, là dove necessario, l'opportuno approfondimento delle attività svolte.

Altro limite di questa ricerca è caratterizzato dalla scelta personale delle attività didattiche. Pur avendo molta attenzione e cura negli aspetti didattici vi sono cose che possono sfuggire e in questo senso ho imparato che didatticamente bisogna sempre considerare possibili imprevisti.

Per quanto riguarda invece le conclusioni generali, date le dimensioni ridotte del campione analizzato, i risultati non permettono di operare generalizzazioni.

Un possibile sviluppo della mia ricerca potrebbe essere quello di approfondire maggiormente questo ambito considerando diverse tipologie di attività, per esempio prendendo in considerazione anche attività che richiedono la rappresentazione dei diversi punti di vista di una figura e le sue possibili trasformazioni (rotazioni, traslazioni, simmetrie) oppure considerando anche altri solidi geometrici già in prima media (prismi e solidi di rotazione). A questo proposito sarebbe interessante verificare se un diverso approccio, e un diverso ordine nella trattazione degli argomenti delineati nel Piano di formazione (2004) rispettivamente nel Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (2015), durante il primo biennio di scuola media, comporta una differenza nelle competenze possedute dagli allievi alla fine di un determinato ciclo. Come ulteriore sviluppo sarebbe inoltre interessante considerare percorsi didattici concernenti le figure 3D e 2D in contemporanea per tutti gli anni di scuola media e valutare se un tale approccio rispetto a ciò che si fa comunemente, porti a miglioramenti nello sviluppo del ragionamento geometrico favorendo l'apprendimento degli allievi.

Bibliografia

Arrigo, G., & Sbaragli S. (2004). *Salviamo la geometria solida! Riflessioni sulla geometria dall'infanzia alle superiori*. In: D'Amore B., Sbaragli S. (2004). Il grande gioco della Matematica 2. Atti del convegno d Lucca. 10-11 settembre 2004.

Battista, M.T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester, (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age Publising.

Coggi, C., & Ricchiardi, P. (2008). *Progettare la ricerca empirica in educazione.* Roma: Carocci editore.

Cottino, L., & Sbaragli, S. (2004). *Le diverse «facce» del cubo.* Roma: Carocci Faber.

Clements, D.H., & Battista, M.T. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. In D. Grouws (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp 420 – 464) New York: Macmillan.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica.* Bologna: Pitagora.

DECS, Ufficio dell'insegnamento medio (2004), *Piano di formazione della scuola media*, Bellinzona, settembre 2004

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. In F. Hitt and M. Santos (Eds.), *Proceedings od the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME*, 3-26.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162.

Gonzato, M. (2013). Evaluación de conocimientos de futuros profesores de educación primaria para la enseñanza de la visualización espacial. Tesis Doctoral.

Hershkowitz, R., Parzysz, B. & Van Dormolen, J. (1996). Space and shape. In A. J. Bishop et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education*, Vol1 (pp. 161-204). Dordrecht: Kluwer.

Mariotti, M.A., (2005). *La geometria in classe. Riflessioni sull'insegnamento e apprendimento della geometria*. Bologna: Pitagora.

Mesquita, A.L. (1992). The types of apprehension in spatial geometry: sketch of a research. *Structural topology*, 18, 19-3

Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (2015). Disponibile su: www.pianodistudio.ch

Parzysz, B. (1988). «Knowing» vs «seeing». Problem of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 79-92.

Parzysz, B. (1991). Representation of space and students' conceptions at high school level. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 575-593.

6. Attività sulle griglie isometriche nella scuola primaria

Bernardo Mutti

1. Introduzione

L'attività didattica che presento in questo scritto l'ho sperimentata nelle classi di scuola primaria (dalla prima alla quinta) durante un periodo di una quindicina di anni. Ho potuto così rendermi conto come sia utile, soprattutto per l'aspetto concettuale dell'apprendimento, far costruire manipolare e studiare poligoni collocati su griglie isometriche (per esempio quadrate, rettangolari o triangolari), con i vertici sempre coincidenti con i nodi delle griglie stesse. Come mostrerò negli esempi che seguono, queste attività didattiche possono coprire un ampio ventaglio dei programmi scolastici sia nell'ambito dello studio delle figure geoemetriche (trasformazioni comprese) sia in quello numerico (numeri interi e frazioni).

2. Svolgimento di attività geometriche

Occorre preparare un buon numero di fogli quadrettati o triangolati che serviranno da ambiente di lavoro.

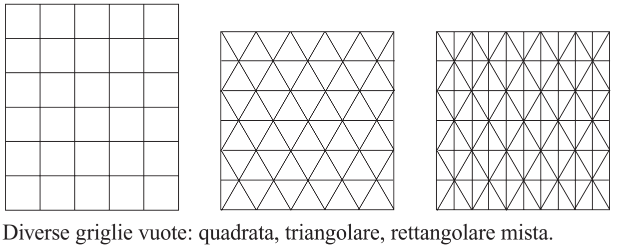


Figura 1. Diverse griglie vuote: quadrata, triangolare, rettangolare mista.

Usando fogli di carta colorata si ritagliano più poligoni basilari (coerenti con la griglia scelta) che saranno i mattoncini per le costruzioni che gli alunni sono invitati a eseguire, dapprima su indicazione dell'insegnante, poi liberamente.

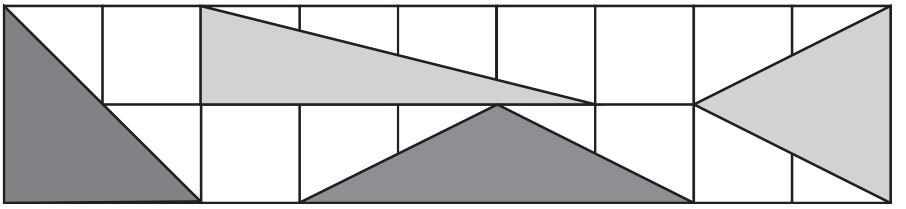


Figura 2. Alcuni poligoni basilari.

Accostando due o più figure, in modo che i vertici coincidano sempre con nodi della griglia, si ottengono nuove figure che gli allievi sono invitati a esaminare per poi dedurre determinate proprietà. In geometria si possono per esempio proporre attività di classificazione, composizione e scomposizione di poligoni, scoperta di nuovi poligoni, osservazioni concernenti lati, angoli, lati e altezze relative, parallelismo e perpendicolarità, determinazione di perimetri, aree, proprietà di simmetria, di rotazione, pavimentazioni del piano, ecc.

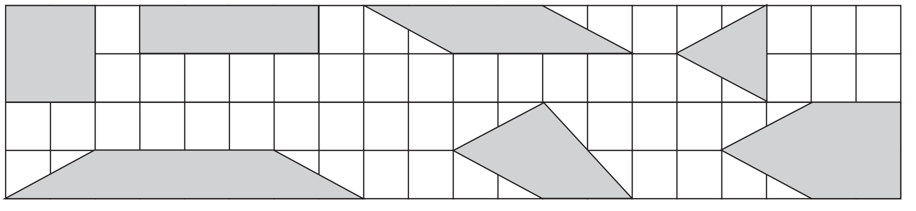


Figura 3. Primi esempi di costruzioni.

È interessante suggerire agli allievi di progettare nuove figure disegnando su griglie vuote. In questo modo può capitare di ottenere figure che non possono essere composte usando unicamente le figure basilari iniziali. Si presenta quindi l'occasione per arricchire l'insieme di queste ultime, ciò che apre considerevolmente il ventaglio delle figure che si possono ideare. Per esempio, le due figure che seguono (parallelogrammo e aquilone) sono ottenibili ciascuna componendo due coppie di figure triangolari, quindi due nuove figure di base (triangoli scaleni) da aggiungere alle altre. I due triangoli scaleni danno anche l'occasione di riflettere sull'orientamento delle figure piane. Questi due triangoli sono congruenti o no? Sono riducibili a uno solo? Se il foglio dal quale si ritagliano ha colori diversi su ciascuna pagina, ci si può accorgere che, mentre il parallelogranno è ottenibile con una coppia monocolore di triangoli scaleni, per l'aquilone, se lo si vuole monocolore, occorre usarli entrambi.

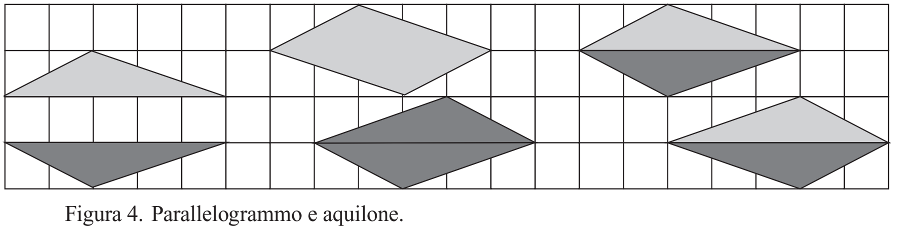


Figura 4. Parallelogrammo e aquilone.

Ed ecco altre figure su griglie triangolari: le basilari e le composte

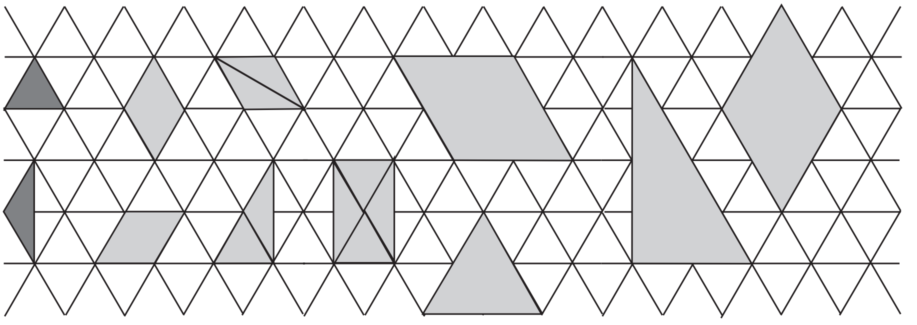


Figura 5. Attività sulla griglia triangolare.

Situazioni di questo tipo possono essere usate anche per introdurre la similitudine. Se si mettono a disposizione degli allievi molte copie di figure basilari, nascono molto presto composizioni che per la loro struttura sono decorative, piacciono all'occhio, sono esteticamente interessanti. Ciò succede quando si formano simmetrie (assiali e centrali), traslazioni o rotazioni. Chiedersi «perché è bello?» vuol dire scoprire come primo impatto le trasformazioni geometriche come gioco, ciò che prepara il terreno per studi più approfonditi.

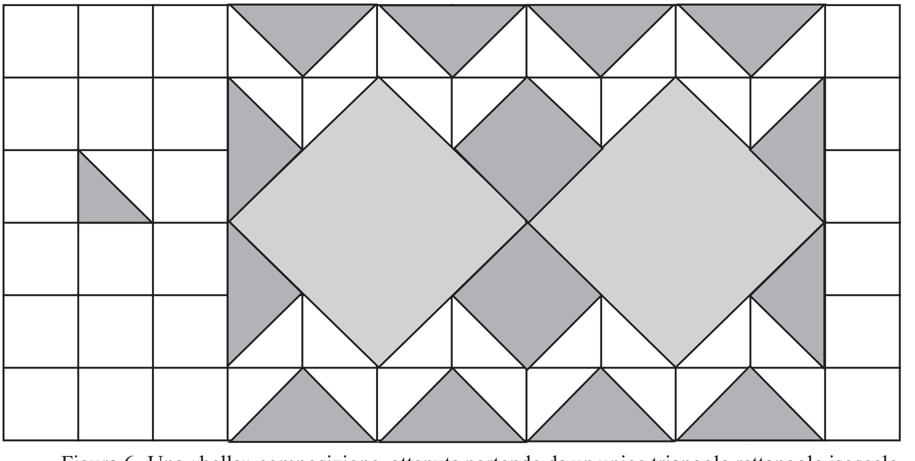


Figura 6. Una «bella» composizione, ottenuta partendo da un unico triangolo rettangolo isoscele.

Le trasformazioni geometriche si possono proporre già nelle prime classi della scuola elementare. Di seguito un esempio proposto in una prima. Partendo da un'unica piastrella (figura di base), gli allievi sono invitati a costruire piastrelle composte. Chi ottiene le più «belle»?

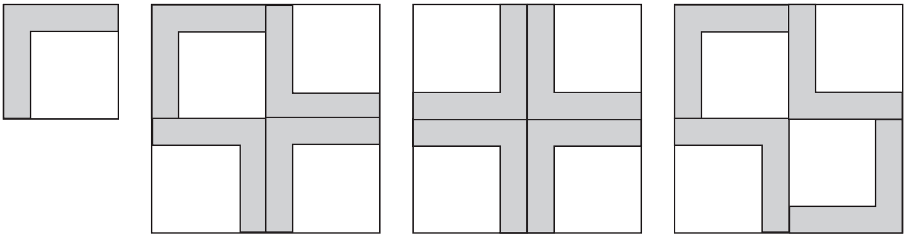


Figura 7. Alcune realizzazioni degli allievi di prima elementare.

Allievi del secondo ciclo elementare possono realizzare pavimentazioni del piano che, come qualità estetica, non sono inferiori a quelle professionali, come mostra l'esempio che segue. Qui le piastrelle sono triangoli equilateri suddivisi in tre figure.

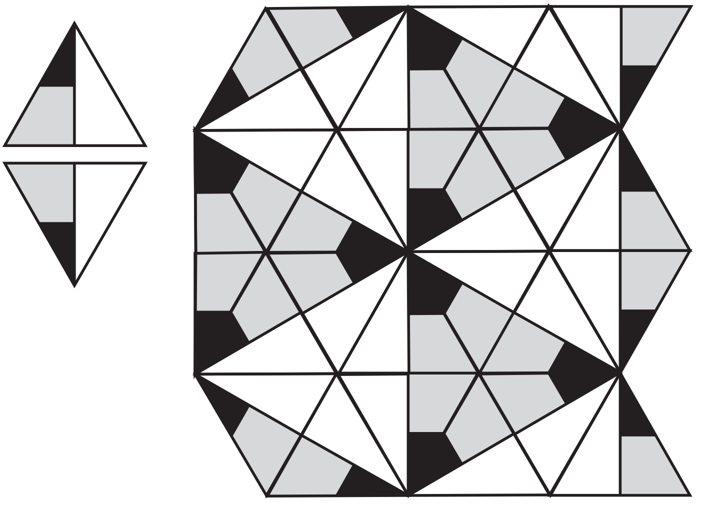


Figura 8. Un esempio di pavimentazione del piano.

3. Svolgimento di attività aritmetiche

Con figure geometriche disegnate su griglie si possono effettuare attività propedeutiche al concetto di area. Eccone una per iniziare.

L'unità di misura (dell'area) è il triangolo rettangolo isoscele (U). Gli allievi sono invitati a trovare le misure dell'area rispetto a questa unità (non è necessario puntualzzare il concetto, basta dare l'idea di misura di estensione). Aiutandosi con la griglia, gli allievi possono determinare la misura dell'area di ciascuna delle figure disegnate e di altre che possono anche creare a piacimento. Per ogni figura vi sono più modi. È utile anche identificare le figure non congruenti aventi la stessa area.

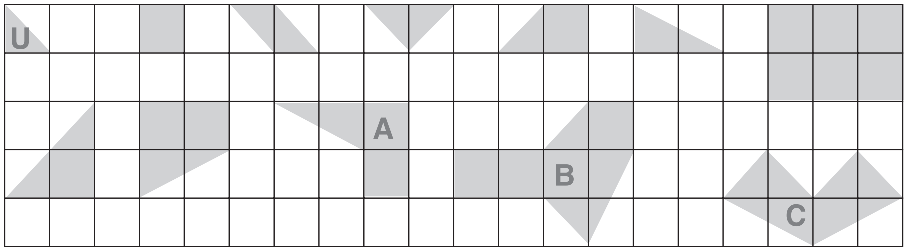


Figura 9. Poligoni per il calcolo dell'area: numeri interi.

Esempi di calcolo:

A = 4:2 + 2×2
= 2 + 2 + 2

B = 4×2 + 2 + 4:2
= 8 + 2 + 2

C = 4 + 8:2
= 4 + 4

Simili esercizi possono anche essere costruiti per rafforzare e approfondire l'apprendimento delle frazioni.

Negli esempi seguenti si cambia unità, indicata con U.

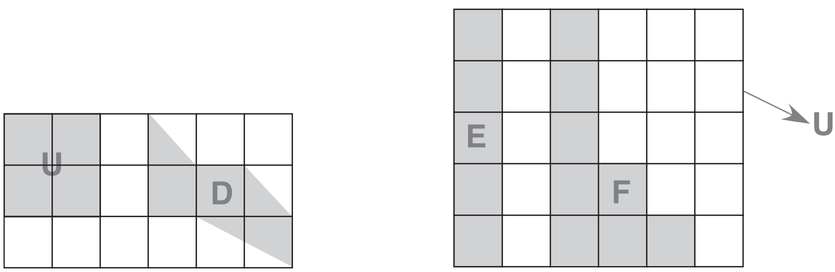


Figura 10. Poligoni per il calcolo dell'area: frazioni.

Esempi di calcolo:

$$D = \frac{1}{2} + \frac{2}{8} + \frac{1}{4} = \frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8}$$

$$E = \frac{1}{6}$$

$$F = \frac{1}{6} + \frac{3}{30} = \frac{5}{30} + \frac{3}{30}$$

1. Agorando[1] 6 Lingue formali

Paolo Hägler e Giorgio Mainini

Ogni lingua, per formare delle parole, ammette certe combinazioni di un certo insieme di lettere, detto alfabeto, e non ne ammette altre. In italiano, ad esempio, la q è quasi sempre seguita dalla u.

Qui sperimenterai una lingua formale, che non esiste. L'abbiamo creata noi e si chiama fintese. Per creare una parola in fintese si applicano le seguenti «Regole di formazione»:

R 1. l'alfabeto è {a ; b};
R 2. la parola a esiste;
R 3. la parola b non esiste;
R 4. se esiste la parola x, allora esiste anche la parola xa;
R 5. se esiste la parola y, allora esiste anche la parola by;
R 6. ogni parola ha al massimo 5 lettere.

Domande possibili

1. Perché la q è «***quasi*** sempre seguita dalla u»? Ci sono eccezioni? Quali?
2. La combinazione **bul** esiste in italiano? Solo all'inizio di parola o anche all'interno o alla fine? Cerca qualche altra combinazione rara.
3. Sai costruire qualche parola di fintese? Le sai costruire tutte? Quante sono? Sai costruire una parola che sembri fintese ma che, invece, non lo è?
4. Modifica la regola R 3. in «la parola b esiste» e rispondi alle stesse domande.
5. *Inventa tu qualche altra lingua, dandone l'alfabeto e le regole di formazione delle parole, e rispondi alle domande precedenti.*

Le soluzioni sono da inviare all'indirizzo agorando.bdm@gmail.com
Fra tutte le soluzioni esatte sarà scelta quella più completa e che meglio descriverà il lavoro svolto per ottenerla.

1. Il verbo greco *agoràzein* è traducibile, più o meno, con *andare in piazza a curiosare*. Qui si troveranno spunti matematici presi qua e là sui quali curiosare.

Soluzione Agorando 5

Nel gruppo A doveva essere estratta una testa di serie tra le 6 possibili, quindi ci sono 6 diverse possibilità, ma anche una squadra di prima fascia tra le 6 possibili, quindi altre 6 possibilità, per ognuna delle 6 per la testa di serie, pertanto le diverse possibilità parziali per le prime due squadre sono 6.6 = 36. Continuando così con la seconda e la terza fascia, sia arriva a 6^4=1296 possibilità.

Per il gruppo B, restando 5 squadre possibili per ogni fascia, sia ottiene in maniera analoga 5^4, per il C 4^4, per il D 3^4, per l’E 2^4 e per l’F 1^4.

Quindi globalmente, le possibilità per formare tutti i gruppi erano $6^4.5^4.4^4.3^4.2^4.1^4$=$(6.5.4.3.2.1)^4$=$(6!)^4$=268’738’560’000 diverse possibili estrazioni.

Veniamo alle altre suddivisioni. I calcoli restano gli stessi, ossia g^f per il gruppo A (dove g è il numero di gruppi e f è il numero di fasce), e $(g!)^f$ per tutti i gruppi.

Quindi abbiamo i seguenti risultati:

Gruppi	Fasce	Possibilità per il gruppo A	Possibilità per tutti i gruppi
2	12	4096	4’096
3	8	6561	1’679’616
4	6	4096	191’102’976
6	4	1296	268’738’560’000
8	3	512	65’548’320’768’000
12	2	144	229’442’532’802’560’000

Possiamo notare che per il gruppo A, il numero minore di possibilità si ha con 12 gruppi, mentre il maggiore con 3 gruppi; mentre per tutti i gruppi il numero minore di possibilità si ha con 2 gruppi ed il maggiore con 12 gruppi.

Anche con numeri di squadre diversi, si ottengono risultati simili (per il gruppo A si hanno più possibilità con 3 gruppi – se il numero di squadre è multiplo di 3 – e meno possibilità con il numero più alto di gruppi; mentre per tutti i gruppi il numero di possibilità cresce con l’aumentare del numero di gruppi).

1. Decifrazione di messaggi cifrati con il metodo di sostituzione monoalfabetica

Paolo Hägler, Giorgio Mainini e Jonathan Stoppani

In this article are presented a professional strategy to decrypt the text presented in Agorando 3: a message encrypted with the method of monoalphabetic substitution.

Nel Bollettino dei docenti di matematica numero 70 di maggio 2015 è apparso il quiz Agorando 3, nel quale si chiedeva di decifrare un testo cifrato con un metodo di sostituzione monoalfabetica, ossia ogni lettera del testo in chiaro era stata sostituita con la stessa lettera.

Nel numero 71 della stessa rivista, dicembre 2015, è stata pubblicata la soluzione, e nel numero 72, maggio 2016, abbiamo pubblicato un articolo che presentava due possibili strategie. Queste strategie erano concepite per risoluzioni «manuali», ossia senza concepire un codice che permettesse di eseguire la decifratura.

La scarsa efficacia di un simile metodo di cifratura sembrava già palese, ma per renderla ancora più visibile, i due autori di quel testo hanno cercato un crittoanalista che potesse sviluppare un programma per decifrare il testo. Grazie al passaparola tra i signori Patrik Kistler, Fulcieri Kistler e Andreas Gianola (che ringraziamo) è stato contattato il signor Jonathan Stoppani, autore del codice e co-autore di questo articolo, che ringraziamo sentitamente per il suo lavoro.

Il signor Stoppani ha sviluppato un algoritmo proprio per rispondere al nostro quiz. Si tratta di un algoritmo genetico, ossia che esegue delle variazioni casuali delle soluzioni, e poi mantiene solo quelle che apportano dei miglioramenti, in maniera analoga a quanto avviene nell'evoluzione (da cui il nome).

L'algoritmo in questione inizia considerando 50 (un parametro prefissato che si può modificare) soluzioni casuali (per soluzione si intende una qualsiasi sostituzione di una lettera con un'altra), e ognuna di queste soluzioni viene valutata con un punteggio del quale discuteremo in seguito. Ad ogni iterazione del programma vengono selezionate solo le 10 (altro parametro modificabile) soluzioni migliori, e partendo da

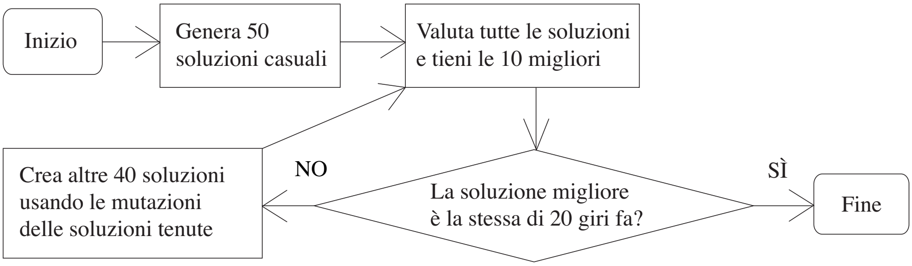
1. Per convenzione utilizziamo le lettere maiuscole per le lettere del testo cifrato, e le minuscole corsive per il testo della soluzione che consideriamo.

queste vengono eseguite delle mutazioni casuali fino ad ottenere una nuova popolazione di 50 soluzioni. Le mutazioni possono essere di due tipi; interne a una soluzione (ossia invertendo una corrispondenza di due lettere della stessa soluzione (parametro); ad esempio se nella soluzione precedente ad A[1] corrispondeva *b* e a C corrispondeva *d*, nella nuova ad A si fa corrispondere *d* e a C si fa corrispondere *b*), oppure di tipo cross-over (ossia invertendo due volte la corrispondenza di due lettere di due soluzioni diverse (altro parametro); ad esempio, se nella prima soluzione a C corrisponde *a*, e nella seconda a C corrisponde *e*, allora la nuova soluzione sarà ottenuta invertendo la *a* e la *e* della prima soluzione, e poi facendo un altro cambio analogo). L'algoritmo è infine programmato per fermarsi dopo che 20 iterazioni non apportano migliorie (altro parametro modificabile). Poiché questo algoritmo ha un procedimento aleatorio, il tempo per decrittare il codice non è sempre lo stesso, così come non lo è il numero di iterazioni necessarie. Giusto per dare un'idea del tempo necessario riportiamo i risultati di due esecuzioni: 29 iterazioni in 2 secondi e 51 iterazioni in 3 secondi (di cui le ultime 20 iterazioni, in entrambi i casi, senza migliorare la soluzione).

Vediamo ora come viene valutata una sostituzione. Innanzitutto, analogamente a quanto visto nella prima strategia dell'articolo apparso sul numero 72, viene considerato un testo di riferimento piuttosto lungo; nel nostro caso è stata presa la Bibbia. Questo testo ci serve per stimare le distribuzioni di frequenza delle lettere in un testo scritto in italiano. A differenza della prima strategia, però, invece di considerare la frequenza di apparizione di una singola lettera, vengono considerate le frequenze di apparizione di tutti i bigrammi (aa, ab, … zz). Gli spazi ed altri caratteri speciali (apostrofi, accenti, punti, …) non sono stati considerati, e quindi ad esempio nella parola cane sono stati riconosciuti 3 bigrammi (ca, an e ne). Lo stesso lavoro è poi eseguito anche in ogni soluzione considerata e i numeri di frequenze di apparizioni di ogni bigramma (nei due testi) sono moltiplicati tra loro, e infine viene eseguita la somma di questi 441 prodotti (si è sfruttato solo l'alfabeto italiano, composto di 21 lettere). Ogni volta che l'algoritmo è stato lanciato ha sempre trovato la stessa soluzione migliore, dal punteggio di 632'122. Questa soluzione, tuttavia, non è quella corretta, perché la Z e la G sono invertite tra loro. Questo errore è dovuto alla presenza di bigrammi con frequenza anomala rispetto al testo di riferimento, e ciò a causa probabilmente della brevità del nostro testo. La soluzione corretta è stata pertanto valutata con un punteggio inferiore, pari a 631'872, ossia inferiore soltanto dello 0,04%.

La lunghezza del testo da decifrare può da una parte rallentare l'esecuzione del programma, poiché valutare una soluzione richiede più tempo, ma dall'altra fornisce una maggiore garanzia di trovare la soluzione migliore. Tuttavia il tempo di valutazione di una soluzione è direttamente proporzionale alla lunghezza del testo (quindi per un testo di lunghezza doppia si stima che ci vorrà il doppio del tempo), e pertanto il tempo richiesto per la decifrazione non sarà mai eccessivo, soprattutto considerando qualche accorgimento (per un testo lungo 200 volte quello originale sono bastati 1 minuto e 30 secondi). Di conseguenza, un simile metodo di cifratura di un testo non può ritenersi efficace nell'era dei computer.

Possiamo riassumere il tutto in questo schema:



1. La SMASI a LACedu

Nell'ambito delle proposte culturali del LAC di Lugano, la SMASI curerà un ciclo di conferenze.

L'obiettivo è di mostrare al grande pubblico che fra i molteplici aspetti della cultura non vi è solo arte e spettacolo, ma anche – a tutti gli effetti – quelli scientifici, con la matematica che fa da elemento unificatore, perché si ritrova praticamente ovunque. Al momento sono state fissate due date, ma, se tutto andrà bene, si continuerà.

La prima conferenza si è svolta il 23 novembre, nell'Aula refettorio del LAC e ha ricevuto la visita della «Squadra esterna» della RSI, Rete Uno. Tema:

Il grande matematico svizzero Eulero e la nascita della topologia

A cura della Società Matematica della Svizzera Italiana (SMASI)

Nella prima parte il relatore Giorgio Mainini ha mostrato, basandosi sul testo originale latino. come Eulero ha affrontato e risolto il problema delle passeggiate attraverso i ponti di Königsberg. Nella seconda parte, Gianfranco Arrigo ha evidenziato due concetti matematici poco conosciuti dal grande pubblico e non sempre considerati nella scuola: i grafi e la parità. Attraverso alcuni esempi il relatore ha mostrato come questi concetti siano molto utili nella risoluzione dei problemi.

La seconda è in programma mercoledì 25 gennaio 2017, alle ore 16, anch'essa nell'Aula refettorio del LAC. Tema:

La probabilità matematica, ossia:
perché il matematico non gioca d'azzardo

A cura della Società Matematica della Svizzera Italiana (SMASI)

Relatori: Gianfranco Arrigo e Giorgio Mainini

Mediante semplici situazioni che si possono proporre anche agli allievi della scuola obbligatoria, si presenteranno cenni di storia del calcolo delle probabilità, dalla nascita legata al gioco d'azzardo (con protagonisti i matematici Cardano, Pascal, Fermat e il giocatore Chevalier de Méré) all'evoluzione come teoria affermata, branca importante della matematica odierna. L'attenzione sarà posta principalmente sul gioco d'azzardo, nell'intento di mettere in guardia il pubblico dai pericoli di questa particolare dipendenza. Saranno mostrate anche alcune simulazioni di situazioni aleatorie con il metodo di Montecarlo.

Se le due conferenze avranno avuto successo di critica e di pubblico, e se la programmazione di LACedu lo permetterà, ne sarà proposta una terza per la primavera del 2017.

2. Recensioni

Beniamino Danese (2015). *Laboratorio in scatola*. Verona: Edizione Reinventore, pp. 96, 20 € ISBN 978-88-97248-01-9.

Spesso si accusa la matematica di essere una scienza astratta e perciò arida, cioè secca, asciutta, nel senso che si costruisce solo nella mente, nulla a che fare con la realtà, non si possono fare prove di laboratorio; anche se questo non è del tutto vero, come mostrano i tanti «laboratori di matematica» disseminati nelle nostre scuole, indubbiamente la matematica soffre un po' nel confronto ludico con le scienze.

Caspita, qui bastano bottiglie di plastica piene d'acqua messe in frigo la sera prima, pipette, candele, bicchieri capovolti, un po' di colorante alimentare blu, foglietti di carta, sale da cucina, allume, due gocce d'olio, una pompa da bicicletta … insomma cosa facili da trovare, a disposizione di chiunque, e si possono fare esperimenti bellissimi alla portata di tutti, esperimenti che sorprendono, conquistano, insegnano, divertono, entusiasmano.

Se poi vieni a sapere che questi apparenti giochi sono stati proposti nella storia da Marie Curie, Galileo Galilei, Marcello Malpighi, Frank Oppenheimer, Alessandro Volta, Robert Boyle, Michael Farady, … beh, allora ti senti un vero scienziato anche tu.

A questa gioiosa attività scientifica, ricca di sorprese e di apprendimenti indimenticabili ci conduce Beniamino Danese, con questo divertente, spiritoso ma colto libro, nel quale raccoglie e descrive con cura un bel po' di esperimenti facili da realizzare, ma tali da lasciare un'impronta scientifica di alto livello.

E poi ci sono le storie, e che storie!, narrate in maniera avvincente; ci riportano all'epoca nella quale ciascuno di questi scienziati visse, e lo fanno con eleganza e semplicità, con una narratività trascinante.

La cosa che colpisce è che questi esperimenti sono pensati per le classi di scuola primaria, dunque con conoscenze scientifiche di base quasi nulle; stanno in piedi da sé, senza bisogno di precedenti fasi di preparazione. Sorprendono proprio perché sono immediatamente comprensibili e realizzabili.

Le compiono insieme insegnanti e allievi, ma le potrebbero senz'altro effettuare da soli gli studenti, in modo opportuno.

Beniamino, l'autore, è dottore di ricerca in fisica ma si delizia a raccontare e far vivere la scienza ai bambini (e agli insegnanti), con sorpresa, come fosse un viaggio affascinante e allegro, come di fatto è. Con il fratello (gemello) Emanuele ha fondato la società Reinventore che non solo pubblica in proprio questo libro piacevolissimo, ma fornisce anche kit già predisposti per rendere più snella la fase di preparazione di questi esperimenti.

Si tratta di un libro di poco meno di 100 pagine, pieno di illustrazioni, racconti, fotografie, immagini, una vera facile guida agli esperimenti in vari campi delle scienze: fisica, chimica, anatomia, biologia, …

Un vero gioiello didattico che raccomandiamo a tutti gli insegnanti di primaria che hanno a cuore l'insegnamento-apprendimento delle scienze.

(B. D'Amore e M. I. Fandiño Pinilla)

Giovanni Nicosia (2016). ***Matematica e scuola in Cina, Corea e Giappone*****. Bologna: Pitagora. pp. 328, 32 € ISBN 978-88-371-1805-8.**

Si è più volte fatto notare, anche su questa rivista, la scorrettezza di chi considera cultura solo quella elaborata in Occidente. L'espressione comune «estremo oriente» è spesso usata in termini negativi, come a significare che ciò che si è prodotto in Cina, in Corea e in Giappone – per stare al titolo del libro – sia di scarso interesse. Di riflesso, anche la scuola si è allineata a questo scorretto modo di posizionarsi di fronte alla cultura nel senso più ampio.

Ben vengano quindi opere, come questa di Giovanni Nicosia, che non si sofferma solo sulla produzione scientifica – in particolare matematica – dei tre paesi citati, ma entra nel delicato e sempre più importante mondo della didattica della matematica.

È ben noto che in Oriente si sono sviluppate, durante millenni, culture estremamente complesse, che reggono il confronto con la nostra, anzi, che, se conosciute, permettono di capire meglio il nostro mondo occidentale.

La cultura cinese ha storicamente un ruolo guida tra questi paesi.

Per esempio gli strumenti di calcolo (pallottolieri/abaci ecc.) e la struttura dei testi classici cinesi, che consiste in raccolte di problemi con relative soluzioni, giunsero anche in Corea e in Giappone. Parallelamente si propagarono le forme linguistiche necessarie a comunicare il sapere e anche il problema dell'insegnamento e dell'apprendimento delle conoscenze matematiche.

Oggi Cina, Corea e Giappone occupano ruoli di primissimo piano nella scena mondiale.

In questo libro si parla della cultura matematica, della scuola, e della matematica scolastica di Cina, Corea e Giappone. Sappiamo che gli studenti di questi paesi si classificano sempre assai bene nelle misurazioni internazionali dei livelli di competenza. I loro modelli scolastici sono però diversi dai nostri. In particolare la matematica risponde a un diverso orizzonte di esigenze e aspettative, ed è quindi insegnata in modo assai diverso. Ciò non toglie che una conoscenza reciproca e un confronto oggettivo tra questi due mondi offrirebbe a tutti una nuova possibilità di progredire.

Nel testo si trovano parecchi problemi interessanti, non tutti conosciuti, taluni simili a quelli della nostra civiltà, altri del tutto nuovi. Inoltre, ciò che può aumentare l'interesse dei lettori, si trovano anche piani di studio dettagliati, con relativa declinazione in chiave di competenze.

Il libro può quindi essere molto utile sia a chi si occupa di studiare la storia e l'epistemologia dei concetti matematici nel mondo intero, in particolare nelle diverse aree culturali (etnomatematica), agli insegnanti che sono costantemente alla ricerca di nuove situazioni e problemi da proporre nelle classi, come anche a chi sta affrontando lo spinoso problema di stabilire livelli di competenza, voluti dalle autorità scolastiche un po' dappertutto.

Sintesi dei contenuti:

Tre paradossi

1. Concezioni e tradizioni matematiche diverse (greco-araba e cinese).
2. Cina: matematica e studenti del Paese di Mezzo (lingua cinese e matematica; paradossi logici; rappresentazioni numerali; scuola, educazione e didattica in Cina e tra i cinesi nel mondo; didattica della matematica e prassi d'aula).
3. Schemi e combinatoria (trigrammi; cataste e piramidi; triangoli; quadrati magici).
4. Corea: la penisola degli studenti insonni (lingua coreana; scuola, educazione e didattica nella Corea del Sud.
5. Cenni sul sistema scolastico nella Corea del Nord.
6. Giappone: l'arcipelago delle distinzioni possibili (cultura giapponese e matematica; lingua giapponese e scrittura; educazione e didattica nella scuola giapponese; didattica della matematica in Giappone; lo spettacolo sacro della matematica giapponese).
7. Strumenti e tecniche di calcolo (le bacchette di calcolo giapponesi; il pallottoliere cinese suànpàn; il pallottoliere giapponese soroban).

(G. Arrigo)

Nando Geronimi, a cura di. (2006). ***Giochi matematici del medioevo. I «conigli di Fibonacci» e altri rompicapi liberamente tratti dal Liber Abaci.*** **Milano: Bruno Mondadori. pp. 148, 12.50 € ISBN 978-88-424-2004-2.**

Non è sempre agevole trovare la versione integrale del famoso libro di Leonardo Pisano detto il Fibonacci vissuto tra il 1175 e il 1235 e conosciuto oggi dal grande pubblico praticamente solo per l'omonima successione numerica derivante dal «problema dei conigli». Peccato perché questo interessante personaggio ci ha regalato, con il testo *Liber Abaci* nientemeno che il sistema di numerazione decimale che ancora oggi usiamo e del quale non sempre siamo capaci di apprezzarne la ricchezza e la comodità. Sistema che aveva imparato dagli Arabi durante un soggiorno nell'Africa settentrionale dove il giovane Leonardo si era recato, pare su stimolazione del padre gabelliere, per capire come i mercanti arabi facessero così in fretta a calcolare, senza ricorrere agli abacisti, fedeli accompagnatori dei mercanti europei. In questo libro, dopo aver introdotto il sistema di numerazione, Fibonacci introduce la tecnica delle operazioni in colonna che ancora oggi si usa insegnare nella scuola elementare. Ma, ciò che è soprattutto interessante per noi, sono i problemi che seguono, proposti da Leonardo con lo scopo di far calcolare nel nuovo modo.

Ecco perché mi piace questo libretto curato da Geronimi. Fra i problemi ve ne sono di veramente stimolanti, che si possono adattare e proporre alle classi nell'ottica del *problem solving*, che, come sappiamo, oggi è molto importante anche nell'apprendimento della matematica.

Fra le varie situazioni che si riferiscono ad ambienti odierni e familiari agli studenti, è consigliabile, di tanto in tanto, inserirne qualcuna proveniente da un passato anche assai remoto. Ciò può affascinare lo studente sia per l'atmosfera diversa che induce sia per una certa ingenuità, che poi è soprattutto onestà intellettuale, difficile da trovare nelle proposte attuali, molto spesso presentate con una forma «standard».

Ogni problema è accompagnato da una nota che indica con precisione il capitolo e il numero del foglio della versione originale nel quale si trova e da una soluzione adattata alle nostre conoscenze e abitudini matematiche (facente capo per esempio al calcolo frazionario, a quello letterale, alle equazioni e ai sistemi).

Anche il titolo dei problemi, a volte, è tradotto in italiano moderno, tuttavia nella nota si trova anche il titolo originale nell'italiano del «dolce stil novo» che, secondo me, a volte, è peccato non usare perché contribuisce a creare il fascino del passato.

(G. Arrigo)

Progetto grafico
Bruno Monguzzi
Prestampa
Taiana
Stampa
Veladini

Redazione
Laboratorio di didattica della matematica
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera

Telefono
091 814 18 21/22/24
Fax
091 814 18 19
gianfranco.arrigo@span.ch

Amministrazione
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera
Fax
091 814 18 19

Esce due volte all'anno
a maggio e a dicembre

Abbonamento annuo
SFR 30
€ 16

Bollettino dei docenti di matematica
73

In questo numero: di S. Maracchia «Sommare mele con cavalli»; di B. D'Amore e M. I. Fandiño Pinilla su proposte metodologiche illusorie; di M. D'Acunzo sulla valutazione delle competenze; di S. Meyer e C. Rossi per alunni in difficoltà; di G. Caffi sull'impiego didattico della stampante 3D; di R. Casamassa sulla visualizzazione in geometria; Agorando 6 di P. Hägler e G. Mainini; degli stessi con J. Stoppani sulla decifrazione di messaggi cifrati; Recensioni e Segnalazioni.

Direzione
Gianfranco Arrigo

Comitato di redazione
Aldo Frapolli, Luca Bellini, Carlo Ghielmetti,
Bernardo Mutti, Giorgio Mainini, Edo Montella,
Remigio Tartini

Comitato scientifico
Sergio Albeverio, Giulio Cesare Barozzi, Mauro Cerasoli,
J.D. Chatterji, Bruno D'Amore, Paolo Hägler,
Colette Laborde, Silvio Maracchia, Vania Mascioni,
Alberto Piatti, Jean-Claude Pont, Silvia Sbaragli

ISBN 978-88-99453-02-2
Fr. 18.–

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport