Il test dei segni aritmetici di A. Rey

Un approccio di analisi qualitativa*

di Renato Rossini

Rivista del Servizio di Sostegno pedagogico della Scuola Media, no. 2, dicembre 1987, pag. 14-18

Il test di André Rey dei segni aritmetici è assai conosciuto e utilizzato da diversi colleghi di sostegno per ottenere delle indicazioni sulle capacità di ragionamento degli allievi. In esso si chiede loro di inserire uno (primi 5 item) o due (rimanenti 21 item) segni aritmetici per completare correttamente delle uguaglianze. Il tempo concesso per la prova è di 7 minuti.
Si tratta di una prova a metà strada tra il test attitudinale e la prova scolastica: richiede infatti di operare con numeri e segni in modo un po' inusuale. Per questo motivo, oltre che per la forza di convinzione di chi me l'aveva suggerita, ne sono rimasto attratto e l'ho presto anch'io utilizzata tra gli strumenti atti a tracciare il bilancio pedagogico degli allievi a me segnalati.
Una volta sono rimasto stupito e interdetto di fronte alla pena provata da un allievo, istallato già da qualche minuto sull'item 12) senza venirne a capo. "Cosa diavolo starà pensando?" mi sono chiesto. A prova terminata gliel'ho appunto domandato e, memore della presentazione da parte della professoressa Robert-Tissot delle strategie messe in atto dai ragazzi per risolvere la prova piagetiana della quantificazione delle probabilità durante la settimana di dicembre 1985 del corso di formazione, mi sono accorto che si sarebbe potuto tentare di fare un lavoro analogo anche per questa prova.

Siccome l'obiettivo che mi sono posto era quello di scoprire quale rappresentazione mentale i ragazzi si fanno della prova e quali strategie usano per la scelta dei segni aritmetici, il modo più semplice per ottenere questo risultato mi è sembrato quello di sottoporre un certo numero di ragazzi alla prova stessa, chiedendo loro di esplicitare i ragionamenti e le ipotesi pensate.
Così sono stati/e intervistati/e 18 ragazzi/e di prima media (6 per ciascuna delle tre sezioni). Ai docenti di matematica, che prontamente hanno collaborato, ho chiesto di mandarmi allievi che si offrivano volontariamente alla prova, sia maschi che ragazze, e con capacità matematiche differenti (due bravi, due mediocri e due con difficoltà). Quindi per nove settimane ho intervistato durante un'ora di matematica e separatamente (ca. 20/25 minuti ciascuno) due allievi/e di ogni singola sezione.
Cercherò ora di esporre i risultati di tale ricerca. Dapprima cercherò di tracciare una breve descrizione analitica del test, quindi esporrò i risultati veri e propri a proposito delle strategie utilizzate per passare infine a qualche considerazione e consiglio rivolti a chi intendesse far uso del test in modo da trarne qualche indicazione qualitativa.

Descrizione del test

Tralascio nella descrizione del test gli item da 1) a 5) che richiedono l'inserimento di un solo segno e hanno lo scopo di familiarizzare e rassicurare il ragazzo nei confronti della prova. Questo almeno con i ragazzi di 11/12 anni.
Per i più giovani possono segnalare anche le difficoltà di calcolo.
Considerando dunque unicamente i restanti item definisco item lineari quelli che richiedono operazioni che vanno entrambe nella direzione del risultato lungo la SNNI (serie naturale dei numeri interi) (vedi pag. 15).
Tra gli item non lineari ho sottolineato quelli in cui la prima operazione va nella direzione del risultato.

Sfuggono a questa classificazione gli item 12) e 17). Nell'item 12) il primo numero e il risultato coincidono; nell'item 17) il risultato viene raggiunto già con la prima operazione, e poi mantenuto moltiplicandolo o dividendolo per 1. Le difficoltà che questi item pongono agli allievi saranno analizzate nel prossimo paragrafo.
Come si può notare dalla tabella, ad eccezione della variante b), item non lineari con operazioni inverse, tutte le altre varianti sono contenute nei primi 15 item. Chi risolve i primi 15 item si trova dinanzi quasi tutte le difficoltà poste dal test.
Degli item lineari solo il 13) che comporta l'adozione del diviso (:) quale secondo segno, pone delle difficoltà; dei non lineari sono facilmente risolti quelli con operazioni inverse del gruppo a) (segni + - o - +), più problematici gli altri. Ne consegue che è a livello degli item centrali 12), 13), 14) e 15) (più l'item 17) per chi ci arriva) che si situano le maggiori difficoltà del test.

Strategie utilizzate dagli intervistati
Tre diversi tipi di *schemi operativi* sono stati utilizzati dagli intervistati.

1. *L'intervistato verifica una sola ipotesi.* Caduta quella l'item è da lui giudicato irrisolvibile. Ho trovato questo comportamento solo in A.C.. Per risolvere il terzo esempio (8 2 1 = 3) ha provato 8 + 2 = 10, - 1 ..., poi ha giudicato il calcolo impossibile. Ho dovuto esortarla a provare altri segni. In seguito nel test questo atteggiamento è scomparso. Suppongo che nelle classi d'età inferiori sia più frequente.
2. *Caduta l'ipotesi tentata l'intervistato cambia l'intera coppia di segni, senza rendersi conto che solo il secondo segno può essere sbagliato.* Ad es. P.F. così ha affrontato l'item 19) 9 6 2 = 6
   Adesso faccio 9+6 fa 15, -2, impossibile
   Allora faccio 6, no 9 - 6 fa 3, +2 fa 5 : 6 non si può
   9 x 6 viene un numero troppo grande
3. *L'intervistato verifica tutte le ipotesi possibili: in particolare mantiene inalterato il primo segno e cambia il secondo*
   a) adottando la gamma dei 4 segni
   b) adottando solo i *segni congruenti* (condotta più economica)
   Dopo aver fatto il primo calcolo si ottiene un numero che può essere > o < o = al risultato. Se è uguale, a meno che il terzo numero sia 1 (x 1 o : 1) l'item è irrisolvibile e perciò va cambiato il primo segno; se è > i segni congruenti sono - o : (lungo la SNNI operano nella direzione del risultato); se è < i segni congruenti sono + e x.
   Evidentemente solo il terzo schema operativo permette di risolvere correttamente il test. Solo pochissimi ragazzi di prima media operano il secondo il terzo schema, con un prevalere dell'uno o dell'altro.

   Più feconda risulta l'analisi delle *strategie utilizzate per scegliere il primo segno.* Occorre subito dire che sia la prima che la terza strategia presentate possono condurre a risultati corretti (mentre la seconda non è funzionale per gli item 9), 15), 22), 24) e 25), ma è adatta per 16 item su 21!). Le strategie più raffinate hanno però il vantaggio dell'economicità: occorre un numero minore di ipotesi per terminare l'item. Anche a questo livello, oltre che nell'abilità di calcolo e nell'uso degli schemi operativi, entra in gioco il *fattore tempo.*

   Ho notato inoltre che alcuni allievi partiti dalle strategie più semplici, man mano che procedevano elaboravano delle strategie più complesse. In altre parole *durante il test si verificavano degli apprendimenti.* Ed è proprio questa capacità di apprendere il dato più significativo che ci può fornire questo test.
   Ma passiamo all'esposizione di queste strategie:

1. *strategia della scelta sistematica dei 4 segni.* L'intervistato prova tutti i segni, in genere nell'ordine +, -, x, :.
2. *strategia lineare* (vedi definizione nel paragrafo precedente).

1° livello. L'intervistato analizza il risultato: se il numero è alto prova + o x; se il numero è basso prova - o:.

2° livello. L'intervistato confronta il primo numero con il risultato: se questo è maggiore del risultato adotta le ipotesi - o :; se è minore le ipotesi + o x.

Con questa strategia, che comporta già una prima forma di analisi globale dell'item, l'intervistato tende a raggiungere il risultato già con il primo calcolo.

3. *strategia globale*

1° livello. Applicazione parziale ad alcuni item.

- se i numeri sono bassi e il risultato è alto adotta l'ipotesi x. E' applicabile all'item 9) e diversi allievi l'hanno esplicitata;
- se il primo numero è alto e gli altri sono bassi adotta l'ipotesi:. E' applicabile agli item 16) e 20).

2° livello. Gli intervistati analizzano gli item considerando, per quelli non lineari anche la possibilità di allontanarsi dal risultato con il primo calcolo per poi raggiungerlo con il secondo.

Ad es. E.M. sull'item 23) 6 3 4 = 8 "Non ho fatto tentativi, ho solo pensato un po' di più a cosa ci poteva essere. Non ho pensato 6 - 3, così, no. Ho pensato solo a questo (6:3) e dell'altro che era 6 x 3."

E' evidentemente la presenza del 4 che induce in un attimo la ragazza a non operare con le ipotesi 6 - 3 e 6 + 3.

Ad es. A.I. sull'item 15) 9 3 2 = 12 "Vedendo che c'era il 12, veniva fuori il 6, poi facendo 6 x 2 faceva 12". "Ah, quindi hai provato subito 9 - 3". Oppure il ragionamento raffinato di D.M. sull'item 20) 10 5 4 = 6 "Perché ho visto subito che facendo : 5 faceva un numero pari, + un altro che può venire 6". "Non ho capito la faccenda del numero pari. Cosa vuol dire?". In seguito la risposta è un po' sgrammaticata. Intendeva comunque dire che il risultato della prima operazione doveva essere un numero pari, per poter poi operare con il 4 e ottenere 6 (ciò che non era il caso di 10 + 5 o 10 - 5).

Variante: M.I. ha cercato di stabilire un uguaglianza tra la prima coppia di numeri e la seconda. Stabilita questa uguaglianza teneva per buona la prima ipotesi e trovava facilmente la seconda. Secondo gli insegnanti di matematica è una strategia questa, che potrebbe essere più frequente negli allievi di seconda media, in quanto conoscono le equazioni.

Osservazioni su particolari item

Item 13) 8 2 3 = 2

E' stato sbagliato da 7 allievi su 18, due per errori di calcolo e 5 per *non aver considerato il diviso quale secondo segno.* Inoltre altri allievi l'hanno considerato solo dopo essere stati invitati a riesaminare il calcolo. Perché tante difficoltà?

Suppongo che molti allievi quando operano con il +, il - e persino con il x, operano con delle *quantità*: aggiungono sottraggono o prendono tante volte delle quantità di oggetti. La divisione richiede invece di operare delle *inferenze sulle quantità* (la partizione o la contenenza).

E' questo spostamento concettuale che certi allievi hanno difficoltà a prendere in considerazione.

Item 12) 3 6 3 = 3. E' stato sbagliato da 6 allievi su 18(!). Interessanti le soluzioni di I.M. (3 + 6 - 3 = 3) e C.B. (3 x 6 : 3 = 3), i quali hanno assunto, senza verificare con il calcolo, che con l'operazione inversa si tornava al numero di partenza,.

Item 17) 4 2 1 = 2. E' stato abbandonato da 5 allievi su 16 (due non sono nemmeno arrivati ad affontarlo). Questi allievi non hanno saputo cogliere l'1 quale elemento neutro rispetto alla moltiplicazione e alla divisione.
Essi l'hanno affrontato analogamente agli item 14) e/o 15) che li hanno tratti in inganno. Infatti: 14) 8 2 2 = 6
8 - 2, 6 ... non si può più fare niente con il 2. Così: 15) 9 3 2 = 12
9 + 3, 12 ... non si può più fare niente con il 2. Quindi : 14) 4 : 2 o 4 - 2, 2... non si può più fare niente con l'1.

Conclusioni e indicazioni per un uso qualitativo del test

Mi preme sottolineare che, nei casi da me esaminati, non si è riscontrata alcuna correlazione tra la riuscita nel test e la riuscita in matematica. Le note di matematica ricevute dagli allievi che hanno ottenuto un buon esito nel test vanno dal 3 al 6! Per contro è invece vero che chi ha fallito il test si trova pure agli ultimi gradini (4 o 3) nella valutazione di matematica.
Anche se non c'è questa correlazione, la prova mantiene intatta la sua validità perché indaga sulle capacità degli allievi di formulare ipotesi (troppo spesso gli allievi deboli, sfiduciati, dimissionano da questa attività), di apprendere e di controllare i risultati.
Propongo ora, riassunto in modo schematico, un possibile percorso atto a ricavare dagli allievi sottoposti al test gli elementi per un'analisi qualitativa.

1. *Far svolgere all'allievo la prova per 7 minuti o fino a 15 item risolti* (non importa se sbagliati)
2. *Chiedere all'allievo quanto ha appreso a proposito della scelta dei segni.* La domanda "Hai trovato qualche sistema per sapere quali segni devi mettere" sembra la più feconda a questo proposito.
3. *Far controllare all'allievo stesso i calcoli svolti e chiedere di esplicitare le difficoltà incontrate in quelli tralasciati* ("Quali segni hai provato?") o il procedimento tenuto in quelli sbagliati.
4. *Far svolgere all'allievo ancora qualche item* (anche non in fila). Ad ogni item dopo che l'allievo l'ha risolto, chiedere di esplicitare ed eventualmente di giustificare (es. "Hai iniziato con il x, perché?) i tentativi operati. Particolarmente indicati a questo scopo sono gli item 17), 22) e 24).
5. *E' possibile infine far riflettere l'allievo sul mancato uso delle parentesi* (nessuno dei miei intervistati le ha usate. Ad. es. l'item 15) andrebbe scritto così: (9 - 3) x 2 = 12.

Suppongo che il procedimento di calcolare in successione da sinistra verso destra sia molto radicato negli allievi, anche perché è il primo che imparano. Gli apprendimenti successivi (uso delle parentesi, priorità alle moltiplicazioni e alle divisioni) non scalfiscono di molto la loro convinzione di fondo. Inoltre gli allievi sono abituati a un uso passivo delle parentesi (per risolvere delle espressioni) e non a un uso attivo (per produrre delle espressioni). Questo aspetto ha indotto i colleghi Comi e Righenzi a modificare il test: non so se il santo valga la candela. Non mi sento anzitutto di dare la "colpa" al test se gli allievi non usano le parentesi. In secondo luogo resta da verificare se un'analisi qualitativa (che è in fondo ciò che più mi preme) sia possibile negli stessi aspetti anche con il test modificato. La preoccupazione di un'analisi qualitativa, mi ha assicurato Giorgio Comi, è anche presente in chi ha curato la nuova versione. Vedremo di discuterne, dati alla mano.
Tornando al test di Rey, per l'analisi qualitativa dei dati, suggerisco di riflettere attorno a questi punti:

1. *Quali sono le capacità che l'allievo dimostra nel calcolo?*
2. *Sugli schemi operativi:*
   - l'allievo utilizza tutte le ipotesi possibili (sia per il primo che per il secondo segno)?

- in particolare sa mantenere inalterato il primo segno e cambiare il secondo? Così facendo utilizza solo segni congruenti o tutti i segni?
- prende in considerazione il diviso quale secondo segno?
- sa evitare le ipotesi assurde (del tipo 3 - 6 o 3 : 6)?
- è capace di abbandonare un'ipotesi inadatta ancor prima di calcolarla completamente?

3. *Quale tipo di strategia usa per la scelta del primo segno?*
4. *Durante l'esecuzione del test vi è un apprendimento di strategie più funzionali?* Di regola è possibile rispondere a questa domanda confrontando la strategia esplicitata alla domanda 2. con quanto risulta dal suo modo di operare affrontando i nuovi item che gli vengono proposti.
5. *L'allievo controlla spontaneamente le ipotesi che produce, o richiede, fors'anche solo attraverso lo sguardo, l'aiuto del docente?*

* Primo lavoro intermedio per il corso di formazione per i docenti di sostegno pedagogico delle scuole elementari e medie. (Sintesi dell'autore)

SEGNI ARITMETICI

A. REY - Ginevra 1961

Su questo foglio ci sono delle uguaglianze, anzi, saranno delle uguaglianze quando tu avrai messo i segni giusti dove ora ci sono degli spazi vuoti tra numero e numero.

Esempi: 6 2 = 8 4 3 = 12 8 2 1 = 3

1)		3	1	=	4	14)	8	2	2	=	6
2)		5	3	=	2	15)	9	3	2	=	12
3)		9	3	=	3	16)	12	2	3	=	2
4)		3	2	=	6	17)	4	2	1	=	2
5)		10	5	=	2	18)	3	5	2	=	4
6)	5	3	1	=	9	19)	9	6	2	=	6
7)	3	2	1	=	2	20)	10	5	4	=	6
8)	6	1	5	=	2	21)	2	4	3	=	5
9)	2	3	2	=	12	22)	6	2	4	=	3
10)	2	3	1	=	7	23)	6	3	4	=	8
11)	9	4	1	=	4	24)	7	4	3	=	9
12)	3	6	3	=	3	25)	8	4	5	=	10
13)	8	2	3	=	2	26)	4	3	5	=	7

Allievo:...Data:...

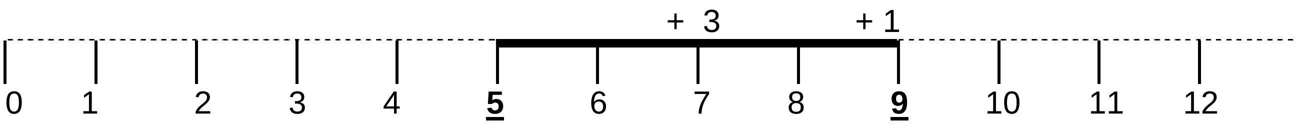
Classe:...Età: ....

Numero di errori: ....Tempo impiegato: ....

Osservazioni: ....

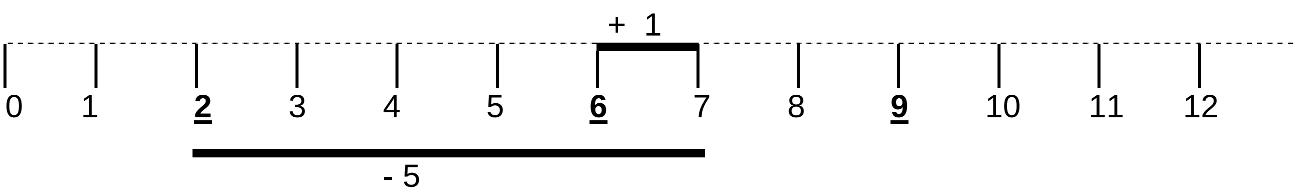
....

Ad es. l'item 6)   5   3   1   =   9



Se almeno una delle due operazioni non va nella direzione del risultato, gli item si definiscono **non lineari**.

Ad es. l'item 8)   6   1   5   =   2



T E S T							
ITEM LINEARI				ITEM NON LINEARI			
operazioni identiche		operazioni non identiche		operazioni inverse		operazioni non inverse	
a) + +	b) x x	a) x +	b) - :	a) + -	b) x :	a) x:	b) - x
c) - -	d) : :	+ x	: -	- x	: x	: +	x -
6) 11)	9) 16)	10)	13)	7) 8) 20)	22) 23) 25)	14) 18) 20)	15) 19) 21) 24) 26)